

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie HOUARI BOUMEDIENE
Faculté des Mathématiques



THÈSE

Présentée pour l'obtention du **diplôme de DOCTORAT en Sciences**

En : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par : SAHRAOUI Abdelkader

Sujet

Hamiltonicité et pancyclicité dans des superclasses de graphes sans griffe

Soutenue publiquement, le 03/07/2024, devant le jury composé de :

Mr. ABBAS Moncef	Professeur	USTHB	Président
Mme. BENMEZIANE Zineb	Maître de Conférences A	USTHB	Directrice de thèse
Mr. IKHLEF ESCHOUF Nouredine	Professeur	U. Médéa	Examinateur
Mr. BOUCHOU Ahmed	Maître de Conférences A	U. Médéa	Examinateur
Mme. AFFIF CHAOUICHE Fatima	Maître de Conférences A	USTHB	Examinatrice
Mme. KERDJOUJ Samia	Maître de Conférences A	U. Blida1	Examinatrice
Mme. ISSAADI Hayat	Maître de Conférences B	USTHB	Invitée

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord remercier grandement ma directrice de thèse, Madame Zineb BENMEZIANE, Maître de conférences à l'université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène de Alger, pour tout son aide. Je suis ravi d'avoir travaillé en sa compagnie car outre son appui scientifique, elle a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de cette thèse. Je la remercie également une autre fois car elle a su inspirer le titre de cette thèse.

Je remercie Monsieur Moncef ABBAS, Professeur à l'USTHB pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de la soutenance de mon Doctorat.

Je tiens à remercier messieurs Nouredine IKHLEF-ESCHOUF et Ahmed BOUCHOU d'avoir accepté non seulement pour faire partie du jury mais aussi pour le temps qu'ils ont consacré pour ma recherche.

Je remercie sincèrement mesdames Fatima AFFIF CHAOUCH et Samia KERDJOUJ pour l'honneur qu'elles me font pour examiner ce travail de thèse.

Mes remerciements vont aussi à Madame Hayat ISSAADI d'avoir acceptée de faire partie de ce jury en tant que invitée.

Je remercie toutes mes collègues avec qui j'ai partagé mes études et notamment ces années.

Il me sera très difficile de remercier tout le monde car plusieurs personnes m'ont soutenu moralement de près ou de loins.

Abstract :

The existence of cycles in a graph is one of the most studied topics in graph theory. It is one of the oldest problem but one that is still relevant today and continues to attract a great deal of attention from the scientific community. Its interest lies in the fact that it has many practical applications.

But answering the question of whether there exists in a graph a cycle of length equal to the number of vertices, i.e. a Hamiltonian cycle, is a difficult and NP-complete problem. This problem remains difficult even in the class of graphs that do not contain the claw as an induced sub-graph.

We are interested in the problem of the existence of the Hamiltonian cycle, but also in more difficult problems which are the existence of cycles of all possible lengths, i.e. the pancyclicity of a graph, and the existence of extendable cycles. The classes of graphs considered in this thesis are more general than claw-free graphs.

Our first contribution is to give an exhaustive synthesis of the different results obtained in the above domains, in the case of any graph, in claw-free graphs but also in subclasses of claw-free graphs such as quasi claw-free graphs, almost claw-free graphs and the largest class of graphs which is partially claw-free graphs.

Our second contribution is for partially claw-free graphs. A graph is partially claw-free if for any vertex v claw center, there exist two vertices x and y not claw centers such that $N_G(v)$ is contained in the union of the two sets $N[x]$ and $N[y]$.

We have shown that if G is triangularly connected partially claw-free graph containing neither $K_{1,4}$ nor K_4 , it is a fully cycle extendable graph if its set of claw centers is P_4 -free.

This result is important because it is the first for the existence of extendable cycles in this subclass and it generalizes many other results.

Résumé :

L'existence des cycles dans un graphe est l'un des problèmes les plus étudiés en théorie des graphes. C'est l'un des problèmes les plus anciens mais qui reste d'actualité et qui continue à susciter beaucoup d'attention de la communauté scientifique. L'intérêt réside dans le fait qu'il trouve de nombreuses applications pratiques.

Mais répondre à la question existe-il dans un graphe un cycle de longueur égale au nombre de ses sommets, c-à-d un cycle Hamiltonien est un problème difficile et classé NP-complet. Ce problème reste difficile même dans la classe des graphes ne contenant pas la griffe comme sous-graphe induit.

Nous s'intéressons au problème d'existence du cycle Hamiltonien, mais aussi à des problèmes plus difficiles qui sont l'existence des cycles de toutes les longueurs possibles, c.à.d. la pancyclicité d'un graphe et l'existence des cycles prolongeables. Les classes de graphes considérées dans cette thèse sont des classes plus large que les graphes sans griffe.

Notre première contribution réside dans le fait d'avoir donné une synthèse exhaustive des différents résultats obtenus dans les domaines sus-cités, dans le cas d'un graphe quelconque, dans les graphes sans griffe mais aussi dans les superclasses des graphes sans griffe telles que les graphes quasi sans griffe, les graphes presque sans griffe et la plus large classe de graphes partiellement sans griffe.

Notre deuxième contribution concerne les graphes partiellement sans griffe. Un graphe est partiellement sans griffe si pour tout sommet v centre d'étoile, il existe deux sommets x et y non centres d'étoiles tels que $N_G(v)$ est contenu dans l'union des deux ensembles $N[x]$ et $N[y]$.

Nous avons démontré que si un graphe G est triangulairement connexe partiellement sans griffe ne contenant ni $K_{1,4}$ ni K_4 comme sous-graphes induits est à cycle pleinement prolongeable si son ensemble de centres des étoiles est sans P_4 .

Ce résultat est important car c'est le premier pour l'existence des cycles prolongeables dans cette superclasse et il généralise beaucoup d'autres résultats.

ملخص

يعد وجود الدورات في الرسم البياني أحد أكثر الموضوعات التي تمت دراستها في نظرية الرسم البياني. وهو واحد من أقدم المسائل، لكنه لا يزال ذا صلة بالموضوع حتى يومنا هذا، ولا يزال يجذب اهتمامًا كبيرًا من المجتمع العلمي. تكمن أهميتها في أن لها العديد من التطبيقات العملية.

لكن الإجابة عن السؤال عما إذا كانت هناك دورة في رسم بياني ما طولها يساوي عدد الرؤوس، أي دورة هاميلتون، هي مشكلة صعبة ومكتملة من نوع E . وتظل هذه المشكلة صعبة حتى في فئة الرسوم البيانية التي لا تحتوي على المخلب كرسوم فرعي مستحث.

نحن مهتمون بمشكلة وجود دورة هاميلتونيان، ولكننا مهتمون أيضًا بمشاكل أكثر صعوبة وهي وجود دورات من جميع الأطوال الممكنة، أي دائرية الرسم البياني ووجود دورات قابلة للتمديد. إن فئات الرسوم البيانية التي ندرسها في هذه الأطروحة هي أكثر عمومية من الرسوم البيانية الخالية من المخالب.

تتمثل مساهمتنا الأولى في تقديم تجميع شامل للتناجج المختلفة التي تم الحصول عليها في المجالات المذكورة أعلاه، في حالة أي رسم بياني في الرسوم البيانية الخالية من المخالب، وكذلك في الفئات الفائقة من الرسوم البيانية الخالية من المخالب مثل الرسوم البيانية شبه الخالية من المخالب، والرسوم البيانية شبه الخالية من المخالب تقريبًا، والفئة الأكبر من الرسوم البيانية وهي الرسوم البيانية الخالية من المخالب جزئيًا.

مساهمتنا الثانية تتعلق بالرسوم البيانية الخالية جزئيًا من المخالب. يكون الرسم البياني خاليًا جزئيًا من المخالب إذا كان لأي رأس v مركز مخلب، يوجد رأسان x و y ليسا مركزي مخلبين بحيث يكون $N_G(v)$ موجودًا في اتحاد المجموعتين $N[x]$ و $N[y]$.

لقد أوضحنا أنه إذا كان G رسمًا بيانيًا متصلًا مثلثيًا خاليًا جزئيًا من المخالب لا يحتوي على $K_{1,4}$ ولا K_4 ، فهو رسم بياني قابل للتمديد بدورة

كاملة إذا كانت مجموعة مراكز المخالب فيه خالية من P_4 .
هذه النتيجة مهمة لأنها الأولى لوجود دورات قابلة للتمديد في هذه
الفئة الفائقة، وهي تعميم العديد من النتائج الأخرى.

Table des matières

Table des figures	ix
Liste des tableaux	xii
1 Définitions et notations	5
1.0.1 Sous-graphes d'un graphe	6
1.0.2 Graphes isomorphes	7
1.1 Parties importantes de l'ensemble des sommets	8
1.1.1 Voisinages et degré d'un sommet	8
1.1.2 Stable et clique	9
1.1.3 Ensemble dominant	10
1.2 Parties importantes de l'ensemble des arêtes	11
1.2.1 Chaînes et cycles	11
1.2.2 Distance, excentricité, rayon et diamètre	12
1.3 Graphes remarquables	14
1.3.1 Graphe connexe	14
1.4 Connexité locale et connexité triangulaire	16
1.4.1 Graphe régulier	17
1.4.2 Graphe complet	17
1.4.3 Graphe biparti	18
1.5 Graphes associés à un graphe	19
1.5.1 Graphe adjoint d'un graphe (Line graph)	19
1.5.2 Graphe joint et graphe complémentaire	20
1.5.3 Graphe puissance d'un graphe	21
1.5.4 Clôture ou Fermeture d'un graphe	21

1.5.5	Graphe triangulé (cordal)	23
1.5.6	Graphe intervalle	25
1.5.7	Graphe Roue	26
1.5.8	Graphe planaire	26
1.5.9	Coriacité (en anglais : Toughness)	27
1.5.10	Graphe scindé	28
1.5.11	Graphe sans griffe	28
1.6	Hamiltonicité	29
1.7	Pancyclicité	30
1.8	Graphe à cycle prolongeable	31
2	Hamiltonicité, pancyclicité et cycles pleinement prolongeables	33
2.1	Conditions d'Hamiltonicité	33
2.1.1	Conditions imposées sur les degrés	33
2.1.2	Conditions imposées sur les degrés pour les graphes bipartis	40
2.1.3	Conditions imposées sur les degrés généralisés	42
2.1.4	Conditions imposées sur les invariants	45
2.1.5	Conditions locales	51
2.2	Pancyclicité	53
2.2.1	Conditions imposées sur les degrés	54
2.2.2	Bipancyclicité des graphes bipartis	58
2.2.3	Conditions imposées sur les degrés généralisés	59
2.2.4	Conditions imposées sur les invariants	62
2.2.5	Conditions locales	66
2.3	Graphes à cycle prolongeable	68
2.3.1	Conditions imposées sur les degrés	69
2.3.2	Graphes triangulés à cycles prolongeables	70
2.3.3	Conditions imposées sur les degrés généralisés	75
2.3.4	Conditions imposées sur les invariants	76

2.3.5 Conditions locales	77
3 Hamiltonicité, pancyclicité et cycles prolongeables dans la classe des graphes sans griffe et dans des super-classes de graphes sans griffe	79
3.1 Conditions d'hamiltonicité des graphes sans griffe	80
3.1.1 Conditions sur les degrés	80
3.1.2 Conditions imposées sur les degrés généralisés	85
3.1.3 Conditions imposées sur les invariants	87
3.1.4 Conditions Locales	88
3.2 Conditions de pancyclicité des graphes sans griffe	91
3.2.1 Conditions imposées sur les degrés	91
3.2.2 Conditions Locales	92
3.2.3 Conditions imposées sur les degrés généralisés	94
3.2.4 Conditions locales	94
3.3 Superclasses de graphes sans griffe	97
3.3.1 Graphes quasi sans griffe	97
3.3.2 Hamiltonicité	98
3.3.3 Pancyclicité	99
3.3.4 Graphes presque sans griffe	100
3.3.5 Graphes partiellement sans griffe	103
4 Graphes partiellement sans griffe à cycles pleinement prolongeables	105
4.1 Résultat préliminaire	106
4.2 Résultat principal	107
Conclusion	137
Bibliographie	139

Table des figures

1.1 G graphe simple	6
1.2 Sous-graphes de G	7
1.3 Sous-graphes de G	7
1.4 $H \cong G$	8
1.5 Graphe G	8
1.6 Graphe G	9
1.7 Graphe G	10
1.8 Chaîne et cycle du graphe G	11
1.9 Graphes G	13
1.10 Graphe connexe	15
1.11 G triangulairement connexe	16
1.12 Graphes de Petersen 3-régulier	17
1.13 Graphes complets K_n pour $n=3,4,5$	18
1.14 Graphes biparti $G = (V_1, V_2, E)$	18
1.15 Graphes biparti $K_{3,4}$	19
1.16 Étoiles $K_{1,p}$; $p=1,2,3$	19
1.17 Graphes G et $L(G)$	20
1.18 Graphe $G \cup H$	20
1.19 Graphe $G + H$	20
1.20 Graphes $K_1 + \overline{K}_{p-1} \cong K_{1,p}$; $p = 2, 3$	21
1.21 Graphes $K_1 + (K_1 \cup P_n)$; $n = 2, 3$	21
1.22 Graphes $K_1 + P_n$; $n = 2, 3$ et $K_2 + \overline{K}_3$	21
1.23 Graphes carré	21
1.24 Graphes G	22

1.25	Cloture du graphes G	23
1.26	Graphes triangulés $C_4 + e$ et $C_5 + 2e$	24
1.27	Graphes bipartis triangulés $C_6 + e$ et $C_7 + 4e$	24
1.28	Graphe fortement triangulé $C_2 + 2e$	24
1.29	G_1 biparti triangulé et G_2 biparti fortement triangulé	25
1.30	G graphe intervalle	25
1.31	Graphes Roues W_3, W_4 et W_5	26
1.32	Graphes planaires K_4 et Q_3	26
1.33	Graphe 1-coriace	27
1.34	Graphe scindé	28
1.35	Graphe sans griffe	28
1.36	Graphe dodécaèdre (Hamiltonien)	29
1.37	G sommet-pancyclique	30
1.38	Graphes Roues Magnétiques M_3, M_4 et M_5	32
2.1	Graphe non Hamiltonien	35
2.2	Graphe Hamiltonien selon Pósa	36
2.3	Graphe de Petersen	47
2.4	Graphe H	73
2.5	Sous-graphes interdits F_1 et F_2	73
2.6	Graphes 3-FAN, 4-FAN, \bar{A} et $K_5 - 2e$	74
3.1	Graphe Z_2	87
3.2	Graphe $K_{1,1,3}$	96
3.3	Graphes G_1 quasi sans griffe et G_2 non quasi sans griffe	98
3.4	Graphe presque sans griffe	101
3.5	Graphe partiellement sans griffe	103
4.1	Cycle C	109
4.2	$C + v_i^- v_h^-$	110
4.3	$C + v_i^- v_i^+ + v_i v_h^-$	110
4.4	$C + v_h^- v_h^+ + v_h v_h^+$	111

4.5 C	112
4.6 C où $d \in N_1(v_j) \cap N_1(v_j^+) \cap N_1(u)$	113

Liste des tableaux

- 1.1 Isomorphisme $f : G \rightarrow H$ 8
- 1.2 Voisinages et degrés 9
- 1.3 Tableau des $d_G(x, y)$ 13
- 1.4 Tableau des $cl(G)$ 23

- 2.1 Graphes G_1, G_2, G_3 Hamiltoniens et G_4 non-Hamiltonien 37

INTRODUCTION

Un graphe est une construction mathématique très générique, représentant les relations entre les objets, ou les réseaux de toutes sortes : neuronaux, sociaux, électriques, etc....

L'étude de la théorie des graphes remonte à 1735, lorsque Leonard Euler a résolu le fameux problème des ponts de Königsberg, qui était de savoir si quelqu'un, quittant sa maison, pouvait traverser les sept ponts enjambant la rivière Pregel exactement une fois et rentrer chez lui.

En 1736, Euler a prouvé que ce n'est pas possible. Il a interprété le problème de manière abstraite, les ponts étant représentés par les arêtes d'un graphe, et a formellement énoncé la condition pour laquelle le graphe résultant avait un cycle qui contenait chaque arête du graphe. La condition est que tous les sommets, d'un graphe connexe, sont de degrés pairs est à la fois nécessaire et suffisante. Un graphe ayant un tel cycle est connu comme un graphe eulérien.

Le domaine d'étude s'est rapidement développé et la recherche dans ce domaine s'est rapidement ramifiée en d'innombrables sous-domaines. Les cycles en particulier continuent d'être un domaine de recherche intéressant et important dans plusieurs autres domaines d'application.

En 1857, William Rowan Hamilton a introduit le jeu icosien, dont l'objet était de tracer le long des bords d'un dodécaèdre, en passant par chaque sommet exactement une seule fois et en revenant au point

de départ. Depuis, de nombreuses recherches ont été consacrées à la recherche de conditions suffisantes pour l'existence d'un tel cycle qui couvre l'ensemble des sommets d'un graphe, appelé cycle Hamiltonien.

Dans cette thèse, on s'intéresse aux problèmes suivants :

- (P1) Étant donné un graphe simple non orienté G , G est-il Hamiltonien ?
- (P2) Étant donné un graphe simple non orienté G , G admet-il des cycles de toutes les longueurs possibles, c-a-d G est-il pancyclique ?
- (P3) Étant donné un graphe simple non orienté G , G est-il à cycle pleinement prolongeable ?

Notre travail s'inscrit dans le contexte des problèmes cités. On s'intéresse à ces problèmes dans la classe des graphes sans griffe (La griffe est le graphe de quatre sommets dont trois non adjacents entre eux et le quatrième adjacents à tous les autres) et dans des classes de graphes plus larges que la classe des graphes sans griffe.

Un graphe G est dit sans griffe, s'il ne contient pas la griffe comme sous-graphe induit. Le seul sommet de degré 3 dans de la griffe est appelé le centre de la griffe.

Trouver un cycle Hamiltonien dans un graphe quelconque est un problème difficile et classé NP-complet d'après [75] et [96]. Et ce problème reste difficile même dans la classe de graphes ne contenant pas l'étoile comme sous graphe induit.

Donc, les problèmes (P2) et (P3) sont plus difficiles que le problème (P1), et (P3) est encore plus difficile que (P2).

Outre l'introduction et la conclusion, cette thèse est organisée en quatre chapitres.

Dans le chapitre 01, on a exposé les différentes définitions, notions de base et notations utilisées dans cette thèse. Les graphes considérés

sont des graphes simples non orientés d'ordre n et de taille m . Pour les notions non définies, on utilise celles de Bondy et Murty [27]. Un graphe hamiltonien est un graphe qui possède un cycle hamiltonien.

La pancyclicité est une propriété qui généralise celle de l'hamiltonicité. Un graphe G de n sommets est dit pancyclique s'il contient des cycles de toutes les longueurs k avec $3 \leq k \leq n$. La notion de sommet-pancyclicité est plus forte que la pancyclicité. Un graphe G de n sommets est dit sommet-pancyclique si tout sommet de G est contenu dans au moins un cycle de toutes les longueurs k avec $3 \leq k \leq n$.

Un graphe $G = (V, E)$ est dit à cycle prolongeable si pour tout cycle C de longueur r , $r \leq |V| - 1$, il existe un cycle \acute{C} de longueur $r + 1$ vérifiant $V(C) \subset V(\acute{C})$. Si de plus chaque sommet de G est sur un triangle, alors G est dit à cycle pleinement prolongeable.

De toute évidence, tout graphe à cycle pleinement prolongeable est sommet-pancyclique, tout graphe sommet-pancyclique est pancyclique et tout graphe pancyclique est Hamiltonien.

Un graphe $G = (V, E)$ est dit triangulairement connexe si chaque deux arêtes e_1 et e_2 sont reliées par une séquence de triangles C_1, C_2, \dots, C_k telle que $e_1 \in C_1$, $e_2 \in C_k$ et $E(C_i) \cap E(C_{i+1}) \neq \emptyset$ pour tout $i, 1 \leq i \leq k - 1$. Le triangle est un graphe de trois sommets deux à deux adjacents entre eux.

Dans le chapitre 02, on expose un survey très exhaustif des différents résultats concernant l'existence de cycles dans un graphe quelconque. Concernant le problème (P1), les résultats sont trop importants, et il nous est impossible de les citer tous. On a mis en avant les résultats les plus généraux et les plus récents.

On a exposé les résultats par type de conditions :

1. conditions sur les degrés,
2. conditions sur les degrés généralisés,

3. conditions sur les invariants

4. conditions locales.

Dans le même chapitre, on a présenté les résultats obtenus pour la pancyclicité, la sommet-pancyclicité et les cycles pleinement prolongeables. On a exposé ces résultats selon les mêmes conditions. Le chapitre 03 est une synthèse des différents résultats concernant l'existence de cycles dans les graphes sans griffe et aussi dans les superclasses de graphes sans griffe. Ce chapitre comporte deux sections :

Dans la première section on a cité les plus importants résultats pour les graphes sans griffe.

Dans la deuxième section, on donne quelques résultats sur les trois superclasses de graphes sans étoiles. La première superclasse est celle des graphes presque sans griffe introduite par Ryjáček [148]. La seconde superclasse est celle des graphes quasi sans griffe définie par Ainouche [4] et la troisième superclasse et plus large des trois est la classe de graphes partiellement sans griffe définie par Abbas et Benmeziane [19].

Dans le chapitre 04, on donne deux résultats dans la plus large des superclasses de graphes sans griffe introduite par Abbas et Benmeziane [19]. On généralise pour cette classe un résultat établi pour les deux superclasses de graphes presque sans griffe et quasi sans griffe.

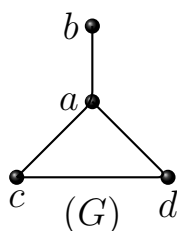
Définitions et notations

Introduction

Dans ce chapitre, on expose quelques notions et les définitions sur la théorie de graphes ainsi que la terminologie qu'on constate nécessaire dans la suite de la thèse. Pour les notations non définies, on utilise Bondy et Murty [27]. On ne considère que les graphes finis, simples et non orientés.

Un graphe non orienté est un couple $G = (V(G), E(G))$ ou $G = (V, E)$ s'il n'y a pas de confusion où : V est un ensemble non vide et est appelé l'ensemble des sommets du graphe G et $E \subseteq \{\{x, y\}, x, y \in V\}$ est un ensemble de parties à deux éléments de V et est appelé l'ensemble des arêtes.

L'ordre du graphe G , noté $n(G)$ ou n s'il y a aucune ambiguïté, est son nombre de sommets. Un graphe simple est un graphe dans lequel deux sommets $\{u, v\} \subset V$ sont reliés par au plus une arête $e = uv \in E$ (sans arêtes multiples) et sans boucle (la boucle est une arête d'extrémités confondus). Pour une arête $e = uv \in E$, les deux sommets u et v sont dits adjacents entre eux et e est incidente à u et à v .

FIGURE 1.1 – G graphe simple

Le graphe illustré dans la Figure 1.5 est simple non-orienté, composé de :

- 4 sommets $V = \{a, b, c, d\}$;
- 4 arêtes $E = \{ab, ac, ad, cd\}$;

La classe de graphes simples est importante et a de nombreuses applications en informatique, en physique et en chimie. Les graphes simples peuvent être utilisés pour modéliser les réseaux (routiers, de communication et sociaux) et les systèmes (économie et industrie).

1.0.1 Sous-graphes d'un graphe

Etant donné un graphe $G = (V, E)$ et $F \subset E$ une partie de E , $H = (V, F)$ est appelé graphe partiel du graphe G . Pour $W \subset V$, un sous-graphe de G est un graphe $H = (W, F)$ où $F \subset E$ et les extrémités des arêtes de F sont tous dans W . Pour $S \subset V$, le graphe induit par S de G , noté $\langle S \rangle$ ou $G[S]$, est le sous-graphe $H = (S, T)$ avec $T = \{e = uv; e \in E \text{ et } u, v \in S\}$. Les arêtes d'un sous-graphe induit incluent toutes les arêtes du graphe G qui joignent les sommets de S .

Notons que tout sous-graphe de G est contenu dans un sous-graphe induit de G . Si H est un sous-graphe de G nous écrivons $H \subseteq G$. De même, on désigne par $G \setminus S$ le sous-graphe induit $\langle V \setminus S \rangle$ ou $G[V \setminus S]$ avec $V \setminus S = \{u \in V | u \notin S\}$. En particulier, pour $v \in V$, $G \setminus v$ est le sous-graphe $G[V - \{v\}]$ obtenu en supprimant le sommet

v et les arêtes incidentes à v et pour $e \in E$, $G - e$ est le sous-graphe de G obtenu en supprimant l'arête e et $G + e$ est le graphe obtenu en ajoutant au graphe G l'arête $e = uv$ avec $u, v \in V$.

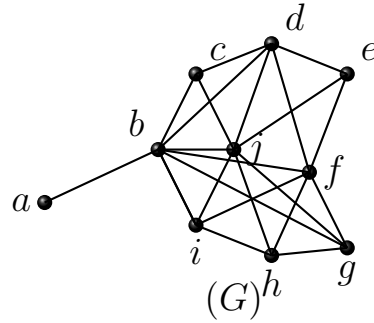


FIGURE 1.2 – Sous-graphes de G

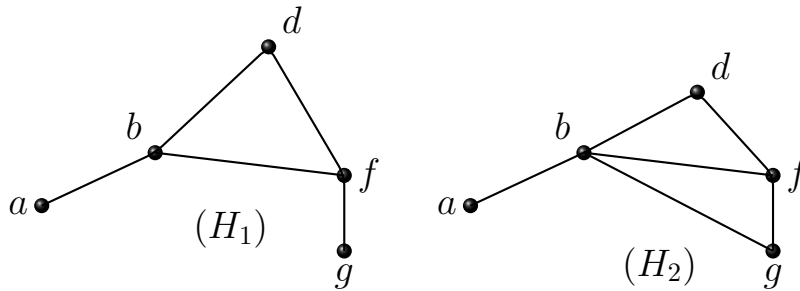


FIGURE 1.3 – Sous-graphes de G

Dans le graphe illustré dans les Figures 1.2 et 1.3,

- H_1 est un sous-graphe de G qui n'est pas induit ;
- H_2 est un sous-graphe de G induit par $\{a, b, d, f, g\}$.

1.0.2 Graphes isomorphes

Deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont dits isomorphes, noté $G_1 \cong G_2$, s'il existe une bijection f de V_1 dans V_2 vérifiant :

$$\forall (u, v) \in V_1^2, e = uv \in E_1 \Leftrightarrow f(e) = f(u)f(v) \in E_2$$

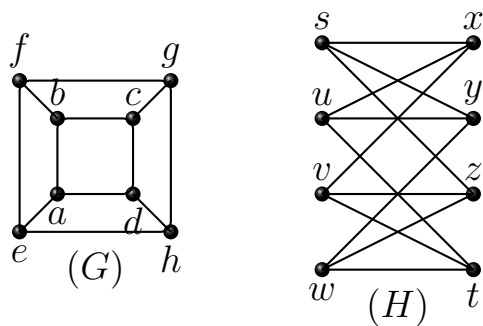


FIGURE 1.4 – $H \cong G$

k	a	b	c	d	e	f	g	h
f(k)	s	x	u	y	z	v	t	w

TABLE 1.1 – Isomorphisme $f : G \rightarrow H$

1.1 Parties importantes de l'ensemble des sommets

1.1.1 Voisinages et degré d'un sommet

Pour un graphe simple $G = (V, E)$, les voisinages ouvert et fermé d'un sommet $v \in V$, notés respectivement $N_G(v)$ ou $N(v)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté et $N[v]$, sont les sous-ensembles des sommets

$$N_G(v) = \{u \in V \mid uv \in E\} \text{ et } N[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

Le degré d'un sommet v , noté $d_G(v)$, est l'entier $d_G(v) = |N_G(v)|$. Les degrés minimum et maximum, notés respectivement $\delta(G)$ et $\Delta(G)$, sont égaux à

$$\delta(G) = \min_{v \in V} \{d_G(v)\} \text{ et } \Delta(G) = \max_{v \in V} \{d_G(v)\}$$

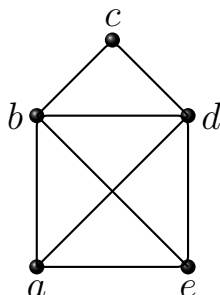


FIGURE 1.5 – Graphe G

Dans le graphe illustré dans la Figure 1.5, on a

sommet u	a	b	c	d	e
$d_G(u)$	3	4	2	4	3
$N_G(u)$	{b,d,e}	{a,d,c,e}	{b,d}	{a,b,c,e}	{a,b,d}
$N[u]$	{a,b,d,e}	{a,b,c,d,e}	{c,b,d}	{a,b,c,d,e}	{a,b,d,e}

TABLE 1.2 – Voisinages et degrés

1.1.2 Stable et clique

Deux sommets u et v , d'un graphe $G = (V, E)$, sont indépendants s'ils ne sont pas reliés par une arête ($uv \notin E$). Un ensemble indépendant (un stable) de sommets S est un sous-ensemble $S \subset V$ tel que toutes les paires de sommets de S sont indépendants.

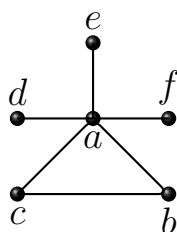
Un sous-ensemble de sommets $W \subset V$ d'un graphe $G = (V, E)$ est une clique si deux sommets quelconques de W sont adjacents entre eux dans $\langle W \rangle$. Le sous-graphe induit par une clique de n sommets est appelé graphe complet et est noté par K_n .

La taille maximale de tous les stables du graphe G , notée $\alpha(G)$, est appelé nombre de stabilité de G , c'est-à-dire

$$\alpha(G) = \max\{|S|, \text{ où } S \subset V \text{ et } S \text{ est un stable de } G\}$$

La taille maximale de toutes les cliques du graphe G , notée $\omega(G)$, est appelé nombre de clique de G , c'est-à-dire

$$\omega(G) = \max\{|W|, \text{ où } W \subset V \text{ et } W \text{ est une clique de } G\}$$

FIGURE 1.6 – Graphe G

Dans le poset illustré dans la Figure 1.6 ci-dessus,

- $\{a, b, c\}$ est la plus grande clique du graphe G ;
- $\{b, d, e, f\}$ est le plus grand ensemble indépendant du graphe G ;
- $\alpha(G) = 4$ et $\omega(G) = 3$.

1.1.3 Ensemble dominant

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non orienté. Un ensemble de sommets $D \subseteq V$ est un dominant de G si pour tout sommet $v \in V \setminus D$, v a un voisin dans D . Pour $G = (V, E)$ un graphe simple et k un entier positif, un sous ensemble de sommets D dans le graphe G est dit k -dominant si tout sommet extérieur à D a au moins k voisins dans D .

Pour un entier k , un graphe k -dominé est un graphe dans lequel chaque sommet $v \notin D$, où D est un ensemble dominant de cardinalité k , est adjacent à au moins k sommets de D .

La taille minimale de tous les dominants du graphe G , notée $\gamma(G)$, est appelé nombre dominant de G , c'est-à-dire

$$\gamma(G) = \min\{|D|, \text{ où } D \subset V \text{ et } D \text{ est un dominant de } G \}$$

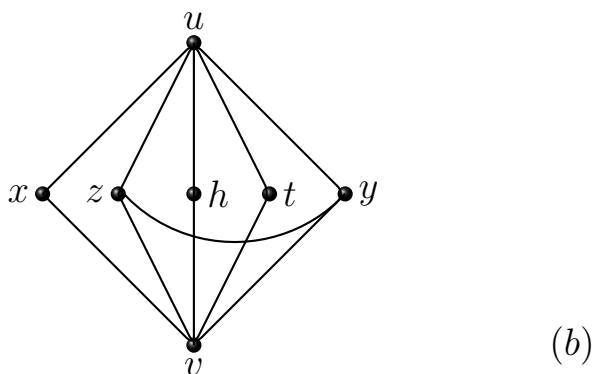


FIGURE 1.7 – Graphe G

Dans le poset illustré dans la Figure 1.7, on a

- $D = \{u, v\}$ est ensemble dominant du graphe G ;

- $\gamma(G) = 2$.

1.2 Parties importantes de l'ensemble des arêtes

1.2.1 Chaînes et cycles

Dans un graphe simple $G = (V, E)$, une chaîne reliant deux sommets u à v , notée (u, v) -chaîne, est une séquence (suite) finie de sommets w_1, w_2, \dots, w_k telle que $w_1 = u$, $w_k = v$ et $w_i w_{i+1} \in E$ pour tout $1 \leq i \leq k - 1$. Les deux sommets u et v sont appelés extrémités de la (u, v) -chaîne. On désigne par L_u^v l'ensemble de toutes les chaînes reliant les deux sommets u et v , c'est-à-dire

$$L_u^v = \{(u, v) - \text{chaîne}, u, v \in V\}$$

Une chaîne élémentaire (resp. simple) est une chaîne ne passant pas deux fois par un même sommet (resp. une même arête). Un cycle est une chaîne simple dont les deux extrémités sont confondus. On dit également qu'un cycle c'est une chaîne fermée. La longueur d'une chaîne (resp. d'un cycle élémentaire) est le nombre de ses arêtes.

La longueur d'un cycle élémentaire est aussi égale au nombre de ses sommets. la maille (resp. la circonférence) du graphe G , notée $g(G)$ (resp. $c(G)$), c'est la longueur minimale (resp. maximale) de ses cycles. Un cycle (resp. une chaîne) élémentaire de longueur k est noté par C_k ou k -cycle (resp. P_k). pour $k = 3$, le cycle C_3 ou 3-cycle est appelé triangle. Une corde est une arête reliant deux sommets non adjacents d'un cycle. Un cycle cordal est un cycle contenant au moins une corde.

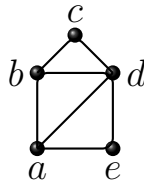


FIGURE 1.8 – Chaîne et cycle du graphe G

- $P_4 = a, b, c, d, e$ est une (a, e) -chaîne élémentaire et simple de lon-

geur 4 ;

- $C = a, b, c, d, e, a$ est un cycle de longueur 5 ;
- $e_1 = ad$ et $e_2 = bd$ sont deux cordes du cycle $C_5 = a, b, c, d, e, a$;
- $C_3 = a, b, d$.

Un couplage (en anglais *matching*) d'un graphe G est un ensemble d'arêtes M de ce graphe qui n'ont aucune extrémité commune. Un couplage maximal est un couplage M du graphe tel que toute arête du graphe a au moins une extrémité commune avec une arête de M . Un couplage parfait ou couplage complet est un couplage M du graphe tel que tout sommet du graphe est incident à exactement une arête de M .

1.2.2 Distance, excentricité, rayon et diamètre

Dans un graphe connexe $G = (V, E)$, la distance d'un sommet u à un sommet v , notée $d_G(u, v)$ ou $d(u, v)$ s'il y a pas d'ambiguïté, est la longueur minimale des chaînes reliant les deux sommets u et v , c'est-à-dire pour k un entier

$$d_G(u, v) = \min\{k, \text{où } \langle u, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, v \rangle \text{ est une } (u, v)\text{-chaîne} \}$$

L'excentricité (ou l'écartement) d'un sommet u , notée $e(u)$, est la distance maximale de u à tous les autres sommets du graphe, donc

$$e(u) = \max\{k, \text{où } \langle u, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, v \rangle \text{ est une } (u, v)\text{-chaîne et } v \in V\}$$

Le centre du graphe G c'est le sommet d'excentricité minimale dans G (le centre n'est pas nécessairement unique). Donc,

$$w \text{ est un centre du graphe } G \Leftrightarrow e(w) = \min\{e(u), u \in V\}$$

Le rayon du graphe G , noté $R(G)$ ou R , c'est l'excentricité d'un

centre de G

$$R(G) = \min\{e(u), u \in V\}$$

Le diamètre du graphe G , noté D_G ou D , c'est la plus grande distance entre les sommets de G .

$$Diam(G) = \max\{d_G(u, v), u, v \in V\}$$

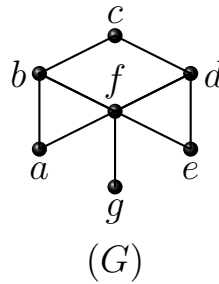


FIGURE 1.9 – Graphes G

$\downarrow y / \rightarrow x$	a	b	c	d	e	f	g	$e(x)$
a	0	1	2	1	2	1	2	2
b	1	0	1	2	2	1	2	2
c	2	1	0	1	2	2	3	3
d	1	2	1	0	1	1	2	2
e	2	2	2	1	0	1	2	2
f	1	1	2	1	1	0	1	2
g	2	2	3	2	2	1	0	3

TABLE 1.3 – Tableau des $d_G(x, y)$

- Le tableau 1.3 résume les distances $d_G(x, y)$ entre un sommet x et un sommet y du graphe G ;

$$e(u) = \begin{cases} 3 & \text{si } u \in \{c, g\} \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Le rayon et le diamètre du graphe G sont $R = 2$ et $D = 3$;
- Les sommets $\{a, b, d, e, f\}$ sont tous des centres du graphe G .

Pour un entier naturel k , le sous-ensemble des sommets

$$N_k(u) = \{v \in V(G) / d_G(u, v) = k\}$$

s'appelle ensemble des voisins du sommet u à distance k , en particulier, $N_1(v) = N_G(v)$.

Pour un entier naturel k , le sous-ensemble des sommets

$$M_k(u) = \{v \in V(G) / d_G(u, v) \leq k\} \text{ et } M_k(u) = \bigcup_{i \leq k} N_i(u)$$

s'appelle ensemble des voisins du sommet u à distance au plus k . La boule de rayon k centrée en u , notée $G_k(u)$, est le sous-graphe de G induit par l'ensemble $M_k(u)$, c'est-à-dire $G_k(u) = \langle M_k(u) \rangle$.

Un sommet v d'un graphe G est simplicial si son voisinage ouvert, $N_G(v)$, induit une clique dans G . Un sous-ensemble de sommets $S \subset V$ est une articulation si et seulement s'il existe deux sommets $u, v \in V \setminus S$ qui ne sont pas adjacents dans $\langle V \setminus S \rangle$. On dira que S est un ensemble (u, v) -articulation.

Deux sommets u et v sont jumeaux s'ils ont le même voisinage. Autrement dit, deux jumeaux $v_1, v_2 \in V$ ont alors $N_1(v_1) = N_1(v_2)$. Deux sommets u et v sont des vrais jumeaux s'ils sont jumeaux et voisins l'un de l'autre. On note par

$$\sigma_t(G) = \min \left\{ \sum_{i=1}^t d_G(v_i); \{v_1, \dots, v_t\} \text{ ensembles indépendant de } G \right\}$$

1.3 Graphes remarquables

1.3.1 Graphe connexe

Un graphe $G = (V, E)$ est dit connexe si chaque deux sommets $u, v \in V$ sont reliés par au moins une (u, v) -chaîne. Un sous-graphe induit connexe maximal d'un graphe G est appelé composante connexe du graphe. Un sommet $v \in V$ est un point d'articulation, (cut vertex en

anglais) si le nombre de composantes connexes du sous-graphe induit $G \setminus v$ est strictement supérieur au nombre de composantes connexes du graphe G . $W \subset V$ est un ensemble d'articulation du graphe G si $G \setminus W$ n'est plus connexe ou réduit à un sommet.

La connectivité du graphe $G = (V, E)$, notée par $\kappa(G)$, est la taille minimale d'un ensemble d'articulation de $G = (V, E)$. Un graphe G est k -connexe si $\kappa(G) \geq k$, c'est-à-dire $\langle G \setminus S \rangle$ est connexe pour tout ensemble de sommets S tel que $|S| \leq k - 1$. Si $\kappa(G) = k$, alors G reste encore connexe pour toute suppression de tout $k - 1$ sommets de V . Il est possible de supprimer k sommets "bien choisis" pour rendre G non connexe (ou trivial). Une arête $e = uv$ d'un graphe $G = (V, E)$ est un isthme si $S = \{u, v\}$ est un ensemble d'articulation. Pour un graphe G connexe, une arête est un isthme si et seulement si elle n'est sur aucun cycle du graphe G .

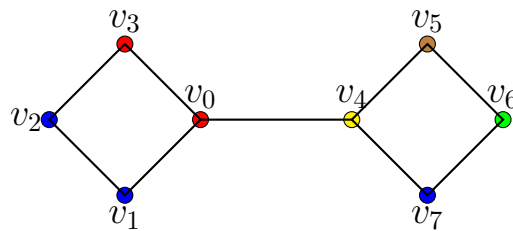


FIGURE 1.10 – Graphe connexe

- Dans le poset illustré dans la Figure 1.10 ci-dessus, le graphe G est connexe.
- Également,
 - v_0v_4 est le seul isthme ;
 - v_0 et v_4 sont des sommets d'articulation ;
 - $\kappa(G) = 1$.

1.4 Connexité locale et connexité triangulaire

Moins fortes que la connexité sont la connexité locale, la connexité triangulaire, et la panconnexité d'un graphe.

Pour un graphe simple $G = (V, E)$, un sommet $v \in V$ est dit localement connexe si le sous-graphe, $\langle N_G(v) \rangle$, induit par son voisinage ouvert $N_G(v)$ est connexe. Un graphe G est dit localement connexe si tout sommet $v \in V$ est localement connexe. Un sommet $u \in V$ (resp. un ensemble de sommets $S \subseteq V$) est dit un sommet (un ensemble de sommets) d'articulation si $\langle V \setminus \{u\} \rangle$ (resp. $\langle V \setminus S \rangle$) n'est pas connexe. Un graphe G est dit quasi localement connexe si chaque ensemble de sommets de séparation de G contient un sommet localement connexe.

Un graphe G est dit presque localement connexe si

$$\mathcal{B}(G) = \{v \in V(G), \langle N_G(v) \rangle \text{ est non connexe} \}$$

est un ensemble indépendant et pour tout $v \in \mathcal{B}(G)$, il y a un sommet $w \in V(G) - \{v\}$ tel que $\langle N_G(v) \cup \{w\} \rangle$ est connexe.

Un graphe G est dit triangulairement connexe si pour toute paire d'arêtes $e_1, e_2 \in E$, G admet une chaîne (une séquence) de 3-cycles (triangles) C_1, C_2, \dots, C_k telle que $e_1 \in C_1, e_2 \in C_k$ et $E(C_i) \cap E(C_{i+1}) \neq \emptyset$ pour tout $1 \leq i \leq k - 1$.

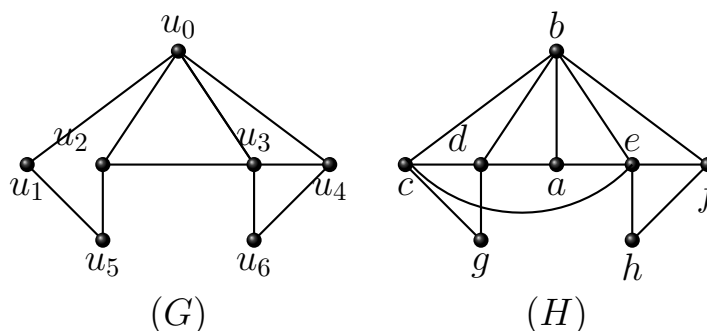


FIGURE 1.11 – G triangulairement connexe

Dans le poset illustré dans la Figure 1.11,

- le sommet u_0 du graphe G n'est pas localement connexe mais le

sommet b du graphe H l'est bien ;

- le graphe G n'est pas localement connexe mais le graphe H l'est bien ;
- H est un graphe triangulairement connexe et G ne l'est pas car les deux arêtes $e_1 = u_1u_5$ et $e_2 = vu_2$ ne sont reliées par aucune chaîne de triangles.

Évidemment, la connexité triangulaire est une extension de la connexité locale.

1.4.1 Graphe régulier

Un graphe G est dit régulier si tous ses sommets ont le même degré. Si ce degré est k , G est dit k -régulier (Voir le graphe illustré dans la Figure 1.31).

Les cycles et le graphe complet d'ordre n sont 2-régulier et $(n-1)$ -régulier respectivement.

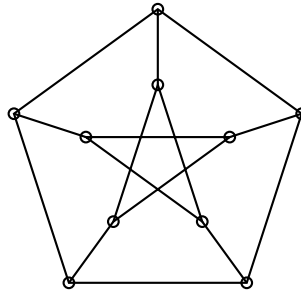


FIGURE 1.12 – Graphes de Petersen 3-régulier

1.4.2 Graphe complet

Un graphe simple dans lequel chaque deux sommets distincts sont reliés par une arête est appelé graphe complet. On notera par K_n le graphe complet d'ordre n . Donc, la clique est un graphe complet induit d'un graphe. Propriétés importantes des graphes complets :

- Le nombre d'arêtes d'un graphe complet d'ordre n est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$;

- La distance entre deux sommets d'un graphe complet est toujours égale à 1 ;
- Le diamètre d'un graphe complet est égal à 1.

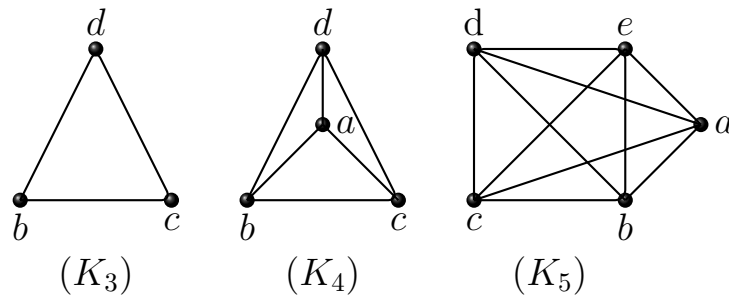


FIGURE 1.13 – Graphes complets K_n pour $n=3,4,5$

1.4.3 Graphe biparti

Un graphe G est dit biparti, noté $G = (V_1, V_2, E)$, si son ensemble de sommet V peut être partitionner en deux ensembles indépendants V_1 et V_2 tels que toute arête e du graphe G a une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2 . D'une manière équivalente, G ne contient aucun cycle de longueur impaire.

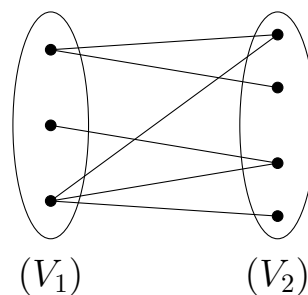
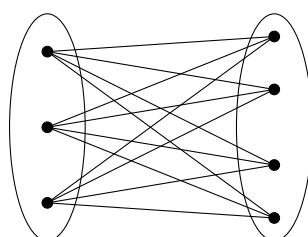


FIGURE 1.14 – Graphes biparti $G = (V_1, V_2, E)$

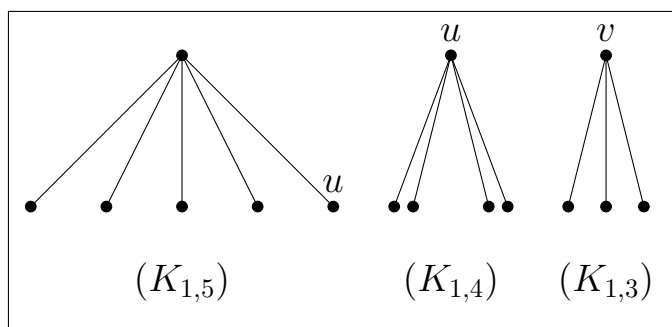
Le graphe biparti complet, noté $K_{m,n}$, est le grpahe biparti tel que $|V_1| = m$ et $|V_2| = n$ et tel que tout sommet de V_1 est adjacents à tous les sommets de V_2 .



$$(|V_1| = 3) \quad (|V_2| = 4)$$

FIGURE 1.15 – Graphes biparti $K_{3,4}$

De plus, $K_{n,m}$ est n -régulier si $m = n$. L'étoile est le graphe biparti complet $K_{1,n}$, notée également S_{n+1} et son seul sommet de degré n s'appelle centre de l'étoile. Le graphe biparti $K_{1,3}$ est aussi appelé griffe.

FIGURE 1.16 – Étoiles $K_{1,p}$; $p=1,2,3$

1.5 Graphes associés à un graphe

1.5.1 Graphe adjoint d'un graphe (Line graph)

Le graphe adjoint (graphe représentatif des arêtes) d'un graphe G , noté $L(G)$, admet $E(G)$ pour ensemble de sommets et deux sommets sont adjacents dans $L(G)$ si et seulement si ils ne le sont pas dans G . De toute évidence, si G est simple, alors $L(G)$ l'est aussi et est sans griffes. Pour $L(G)$ le graphe ligne d'un graphe G ,

$$\begin{cases} n(L(G)) = m(G) \\ \delta(L(G)) = \min\{d_G(u) + d_G(v) - 2 : uv \in E(G)\} \end{cases}$$

Si $L(G)$ est k -connexe, alors G est k -arête-connexe, ce qui signifie que les seuls ensembles d'arêtes de G ayant moins de k arêtes sont les ensembles d'arêtes incidentes à un sommet de G (Voir la Figure 1.17).

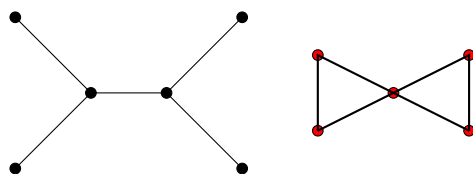


FIGURE 1.17 – Graphes G et $L(G)$

1.5.2 Graphe joint et graphe complémentaire

Pour deux graphes disjoints $G = (V(G), E(G))$ et $H = (V(H), E(H))$, soit $G \cup H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H))$ leur réunion (voir le poset illustré dans la figure 1.18);

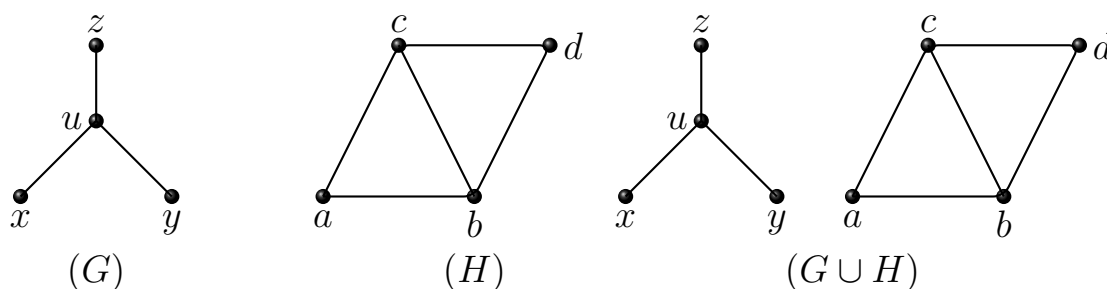


FIGURE 1.18 – Graphe $G \cup H$

Leur graphe joint de G et H , noté $G + H = (V_{G+H}, E_{G+H})$, est le graphe d'ensemble de sommets $V_{G+H} = V_G \cup V_H$ et d'ensemble d'arêtes $E_{G+H} = E(G) \cup E(H) \cup \{uv : u \in V(G), v \in V(H)\}$ (voir le poset illustré dans la figure 1.19);

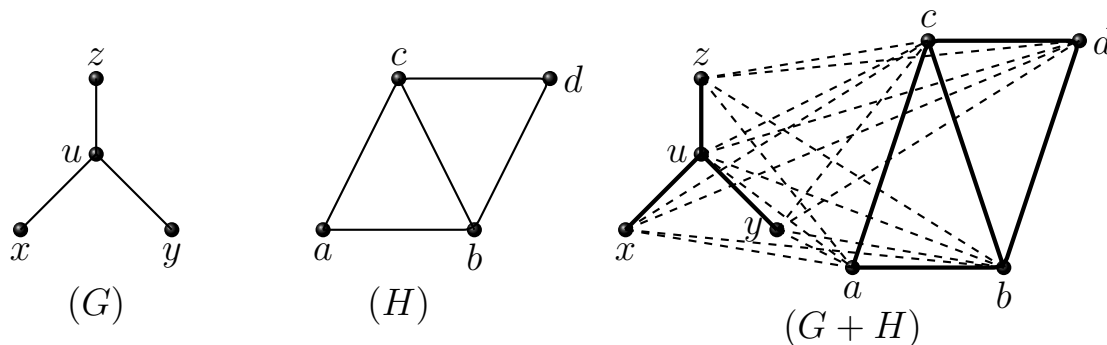


FIGURE 1.19 – Graphe $G + H$

Notons que l'étoile $K_{1,n-1}$ d'ordre n est $K_1 + \overline{K}_{n-1}$.



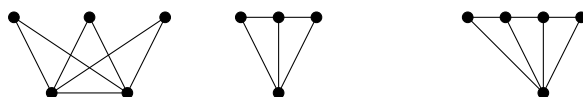
$$(K_1 + \overline{K}_3 \cong K_{1,3}) \quad (K_1 + \overline{K}_4 \cong K_{1,4})$$

FIGURE 1.20 – Graphes $K_1 + \overline{K}_{p-1} \cong K_{1,p}$; $p = 2, 3$



$$(K_1 + (K_1 \cup P_2)) \quad (K_1 + (K_1 \cup P_3))$$

FIGURE 1.21 – Graphes $K_1 + (K_1 \cup P_n)$; $n = 2, 3$



$$(K_2 + \overline{K}_3) \quad (K_1 + P_3) \quad (K_1 + P_4)$$

FIGURE 1.22 – Graphes $K_1 + P_n$; $n = 2, 3$ et $K_2 + \overline{K}_3$

1.5.3 Graphe puissance d'un graphe

Pour tout graphe G , son $k^{\text{ème}}$ puissance, noté G^k , c'est le graphe de même ensemble de sommets V et qui a une arête entre tous les deux sommets dont la distance dans G est au plus k . $E_{G^k} = \{uv; d_G(u, v) \leq k\}$. En particulier, pour $k = 2$, G^2 est le graphe carré du graphe G (Voir la Figure 1.23).

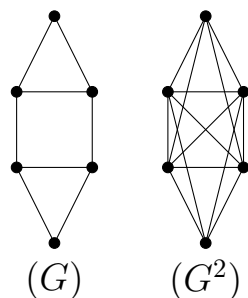


FIGURE 1.23 – Graphes carré

1.5.4 Clôture ou Fermeture d'un graphe

Dans [26], Bondy et Chvátal ont introduit la clôture (fermeture) d'un graphe. La k -fermeture $Cl_k(G)$ est obtenue à partir de G en

joignant récursivement les paires de sommets non adjacents dont la somme des degrés est au moins égale à k , jusqu'à ce qu'il ne reste plus aucune paire de ce type. La k -fermeture est indépendante de l'ordre d'adjacence des arêtes. Manifestement, tout graphe d'ordre n satisfait aux conditions suivantes.

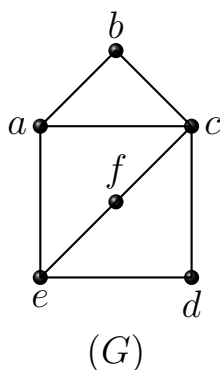
$$G = Cl_{2n-3}(G) \subseteq Cl_{2n-4}(G) \subseteq \dots \subseteq Cl_1(G) \subseteq Cl_0(G) = K_n$$

Une propriété P définie sur tous les graphes d'ordre n est dite k -stable si pour tout graphe G d'ordre n qui ne satisfait pas P , le fait que $uv \notin E(G)$ et que $G + uv$ satisfait P implique $d_G(u) + d_G(v) < k$.

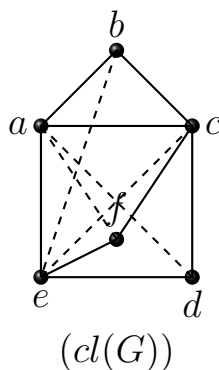
Vice versa, si $uv \notin E(G)$, $d_G(u) + d_G(v) \geq k$ et que $G + uv$ vérifie la propriété P , alors G lui-même vérifie la propriété P . Chaque propriété est $(2n - 3)$ -stable et chaque propriété k -stable est $(k + 1)$ -stable.

La n -fermeture, $Cl_n(G)$, est dite clôture ou fermeture du graphe G , notée $cl(G)$. Pour déterminer la fermeture $cl(G_0)$ d'un graphe simple et non orienté $G_0 = (V_0, E_0)$. On définit une suite finie de graphes (simples) $G_0, G_1, \dots, G_i, \dots, G_k$ où $G_i = (V_i, E_i)$ avec $1 \leq i \leq k$. Pour tout i , on ajoute à G_i une arête comme suit :

- $G_{i+1} = G_i + uv$ où u et v sont t.q. $\{u, v\} \notin E_i$ et $d_{G_i}(u) + d_{G_i}(v) \geq |V_i|$;
- La procédure s'arrête à G_k si pour tous sommets u et v , soit $uv \in E_k$, soit $d_{G_k}(u) + d_{G_k}(v) < |V_0|$ et $cl(G_0) = G_k$.


 FIGURE 1.24 – Graphes G

x	a	b	c	d	e	f
$d_G(x)$	3	2	4	2	3	2
$A = V \setminus N_G(x)$	d,f	d,e,f	e	a,b,f	b,c	a,b,d
$\{d_G(x) + d_G(y), y \in A\}$	5,5	4,5,4	7	5,4,4	5,7	5,4,4
arêtes ajoutées	ad,af	be	ce	da	eb,ec	fa

TABLE 1.4 – Tableau des $cl(G)$ FIGURE 1.25 – Cloture du graphes G

Quels que soient les choix d'arêtes ajoutés dans les étapes intermédiaires, on aboutit toujours au même graphe. Donc la fermeture d'un graphe est unique.

De même, la clôture (fermeture) d'un graphe bipartit $G = (V_1, V_2, E)$, notée $bcl(G)$, est le graphe obtenu à partir de G en joignant récursivement les paires de sommets non adjacents $u \in V_1$ et $v \in V_2$ dont la somme des degrés est au moins égale à $n + 1$, jusqu'à ce qu'il n'existe aucune paire de ce type.

1.5.5 Graphe triangulé (cordal)

Une corde dans un graphe est une arête reliant deux sommets non adjacents d'un cycle ;

Autrement dit : l'arête $e = uv$ est une corde d'un cycle C si $u, v \in V(C)$ et $d_{(C)}(u, v) \geq 2$;

Un graphe est dit graphe triangulé (ou cordal) si tous ses k -cycles pour $k > 3$ ont au moins une corde ;

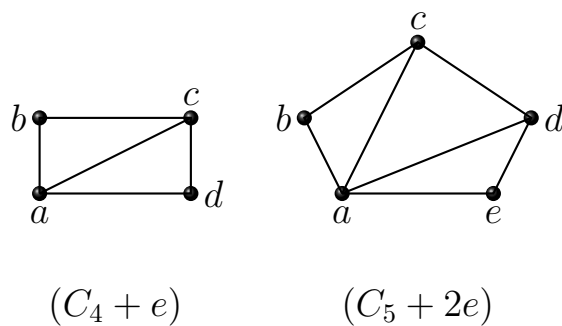


FIGURE 1.26 – Graphes triangulés $C_4 + e$ et $C_5 + 2e$

Golumbic et Goss, dans [77], ont définis un graphe biparti comme étant biparti triangulé si chaque cycle de longueur supérieure ou égale à 6 a une corde ;

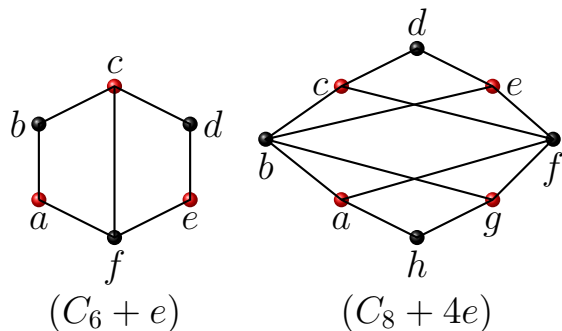


FIGURE 1.27 – Graphes bipartis triangulés $C_6 + e$ et $C_7 + 4e$

Une corde uv dans un cycle pair C est impaire, lorsque la distance dans C entre u et v est impaire ; Un graphe est fortement triangulé s'il est triangulé et que chaque cycle de longueur paire au moins 6 a une corde impaire.

Dalhaus et al. [44], ont définis un graphe triangulé comme étant fortement triangulé si et seulement si pour tout $k \geq 6$, chaque k -cycle admet deux cordes du cycle formant un triangle avec une arête du cycle.

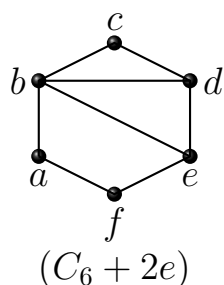


FIGURE 1.28 – Graphe fortement triangulé $C_2 + 2e$

McKee [127] a prouvé que cela équivaut à dire qu'un graphe est fortement triangulé si et seulement si chaque k -cycle C est la somme de $(k - 2)$ 3-cycles, dont chacun contient une arête de C , et de plus, qu'un graphe est biparti fortement triangulé si chaque k -cycle C ($k \geq 4$) est la somme de $(\frac{k}{2} - 1)$ 4-cycles, dont chacun contient une arête de C (voir le graphe illustré dans la Figure 1.29).

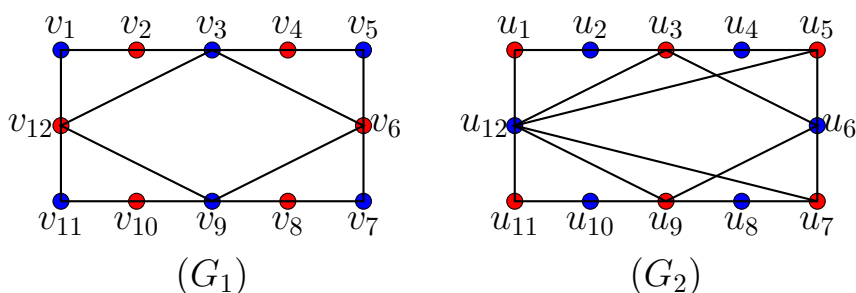


FIGURE 1.29 – G_1 biparti triangulé et G_2 biparti fortement triangulé

1.5.6 Graphe intervalle

Un graphe d'intervalles est le graphe d'intersection d'intervalles sur une droite qui est défini par un ensemble $E = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ d'intervalles sur une droite, lui associe le graphe d'intervalles $G = (V(G), E(G))$ où $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ et deux sommets u et v sont adjacents dans G si et seulement si $I_u \cap I_v \neq \emptyset$. Le poset illustré dans la Figure 1.30 est un graphe d'intervalles.

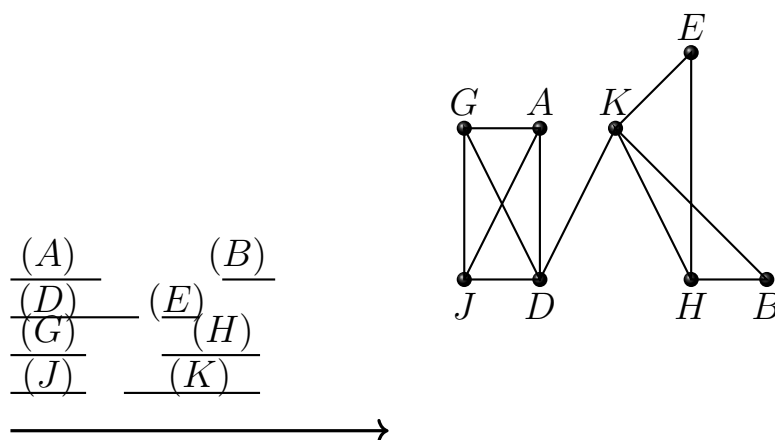


FIGURE 1.30 – G graphe intervalle

1.5.7 Graphe Roue

En théorie des graphes, la Roue W_{n-1} est un graphe d'ordre $n \geq 4$ formé d'un sommet u "centre" adjacent à tous les sommets d'un cycle C_{n-1} . La notation W_{n-1} provient du nom anglais wheel graph mais n'est pas universelle.

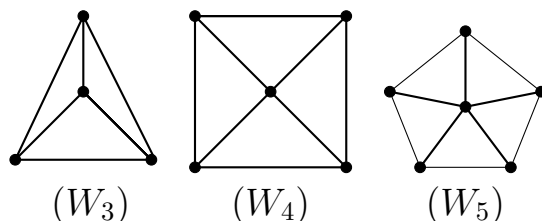


FIGURE 1.31 – Graphes Roues W_3 , W_4 et W_5

1.5.8 Graphe planaire

Un graphe est planaire s'il existe une représentation sur le plan tel qu'aucune arête ne se croise (Voir les graphes illustrés dans la figure 1.32). Soit G un graphe planaire connexe. On fixe une représentation planaire de ce graphe. Une face de cette représentation planaire est une des régions du plan délimitées par le dessin du graphe. Etant donné une face F , son bord est le plus court chemin fermé passant par toutes les arêtes qui touchent la face (le bord peut avoir à parcourir certaines arêtes plusieurs fois). Le degré d'une face est la longueur de son bord.

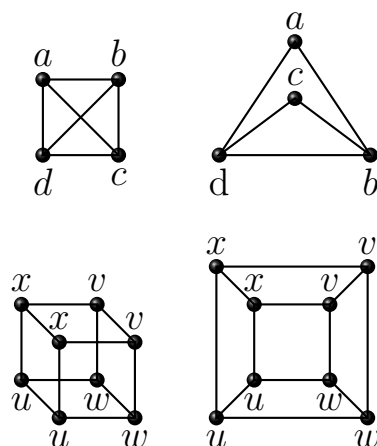


FIGURE 1.32 – Graphes planaires K_4 et Q_3

1.5.9 Coriacité (en anglais : Toughness)

Dans la théorie des graphes, la coriacité est une mesure de la connectivité d'un graphe. Un graphe G est dit t -coriace pour un nombre réel t donné si, pour chaque entier $k > 1$, G ne peut pas être partitionné en k composants connexes différentes en supprimant moins de tk sommets.

Soit G un graphe et $\omega(G)$ le nombre de composantes de G . Chvátal dans [40] a donné la définition du graphe t -coriace (t un réel tel que $t \geq 0$) et la coriacité, notée $\tau(G)$, comme suit :

Pour un graphe G et $t > 0$ un nombre réel tels :

$$\omega(G \setminus S) > 1 \Rightarrow |S| \geq t \cdot \omega(G \setminus S)$$

pour chaque ensemble de sommets $S \subset V$ de G .

- On dira alors que G est t -coriace (Le graphe illustré dans la Figure 1.33 est 1-coriace) ;
- La coriacité (en anglais the toughness) $\tau(G)$ est la valeur maximum de t pour laquelle G est t -coriace.

$$\tau(G) = \max\{t \in \mathbb{R}^+, \text{ où } G \text{ es } t\text{-coriace}\}$$

- $\tau(G) = 1$ pour le graphe illustré dans la Figure 1.33 ;
- Par convention, $\tau(K_n) = \infty$ pour tout $n \geq 1$.

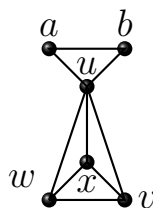


FIGURE 1.33 – Graphe 1-coriace

1.5.10 Graphe scindé

Folder [73], a introduit la notion du graphe scindé. Un graphe scindé (en anglais : split graph) est un graphe dont les sommets peuvent être partitionnés en deux ensembles V_1 et V_2 tels que V_1 induit un ensemble stable et V_2 induit une clique (Voir le graphe illustré dans la Figure 1.34). La perfection des split graphs découle du fait qu'ils sont triangulés.

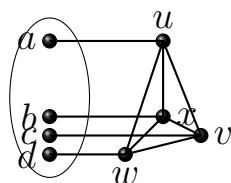


FIGURE 1.34 – Graphe scindé

1.5.11 Graphe sans griffe

Un graphe G est dit sans griffe s'il ne contient aucun sous-graphe induit isomorphe à $K_{1,3}$. De manière équivalente, un graphe sans griffe est un graphe dans lequel le voisinage de tout sommet est le complément d'un graphe sans triangle.

Les graphes sans griffe ont d'abord été étudiés comme une généralisation des graphes adjoints. Ils ont été l'objet de centaines d'articles de recherche mathématiques de plusieurs auteurs. Les graphes sans griffe sont connus pour avoir de nombreuses propriétés intéressantes et ont été étudiés par de nombreux auteurs ces dernières années [60].

Le graphe illustré dans la Figure 1.35 est sans griffe.

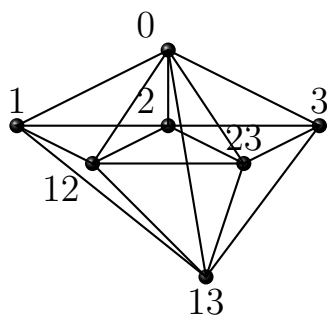


FIGURE 1.35 – Graphe sans griffe

1.6 Hamiltonicité

Dans ce chapitre, nous résumons les propriétés locales qui fournissent des informations sur la structure globale du cycle d'un graphe. Les auteurs ont défini des graphes en imposant des propriétés sur les cycles de ces graphes.

Une chaîne P d'un graphe G est dite hamiltonienne si elle passe par tous les sommets du graphe G une fois et une seule. Un cycle C d'un graphe G est dit hamiltonien s'il passe par tous les sommets du graphe G une fois et une seule.

Un graphe G est dit semi-hamiltonien (traçable) s'il possède une chaîne hamiltonienne. G est dit connexe-hamiltonien si chaque deux sommets de G sont reliés par une chaîne hamiltonienne. G est dit hamiltonien s'il possède un cycle hamiltonien.

Un graphe est dit localement hamiltonien (resp. semi-hamiltonien (traçable)) si, pour tout sommet v , le graphe induit par les voisins de v est hamiltonien (resp. semi-hamiltonien (traçable)) i.e. $\langle N_G(v) \rangle$ hamiltonien (resp. semi-hamiltonien).

Dans le poset illustré dans la Figure 1.36 ci-dessus, le cycle $C = a, b, c, d, n, m, l, k, j, i, h, g, q, r; s, t, p, o, f, e, a$ est un cycle hamiltonien, donc ce graphe (qui appelé dodécaèdre) est un graphe hamiltonien ;

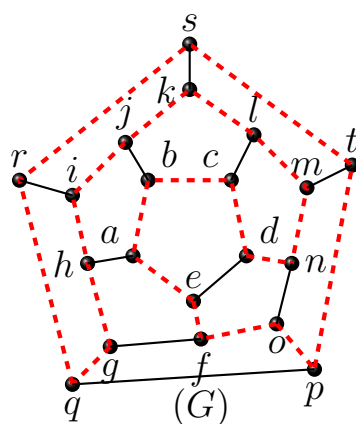


FIGURE 1.36 – Graphe dodécaèdre (Hamiltonien)

Le développement de la théorie des graphes a été profondément influencé par l'évolution d'Internet et des grands réseaux de communication qui en résultent. Les propriétés globales de tels réseaux qui peuvent être déduites de leurs propriétés locales sont particulièrement intéressantes. Skupień, dans [158], a défini l'hamiltonicité locale. Les graphes localement hamiltoniens ont été étudiés plus en détail dans [137], [138], [159].

1.7 Pancyclicité

Un sommet v d'un graphe G est r -pancyclique s'il est contenu dans un cycle de longueur k pour tout entier k où $r \leq k \leq n$, et G est sommet r -pancyclique si chaque sommet est r -pancyclique. Un sommet 3-pancyclique et un graphe sommet 3-pancyclique sont également appelés pancyclique et sommet-pancyclique, respectivement. Donc, un graphe $G(V, E)$ est pancyclique si G a un k -cycle pour tous les entiers k , $3 \leq k \leq |V(G)|$. G est dit sommet-pancyclique (arête-pancyclique) si G a un k -cycle contenant le sommet v (l'arête e) pour tout sommet $v \in V(G)$ ($e \in E$) et pour chaque entier k avec $3 \leq k \leq |V(G)|$. De manière analogue, G est appelé arête r -pancyclique pour un certain $3 \leq r \leq n$, si chaque arête de G se trouve sur un cycle de longueur k pour chaque $r \leq k \leq n$ (Le graphe de la Figure 1.37 est sommet-pancyclique).

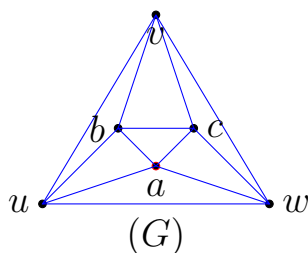


FIGURE 1.37 – G sommet-pancyclique

Les graphes pancycliques sont plus restreints que les graphes hamiltoniens. Donc, la pancyclicité est une propriété plus forte qui géné-

ralise celle de l'hamiltonicité. Le problème de la recherche d'un cycle Hamiltonien est classé *NP*-complet [96]. Par conséquent le problème de la pancyclicité est un problème *NP*-complet car la pancyclicité d'un graphe peut-être vérifiée en utilisant des algorithmes basés sur des propriétés mathématiques des graphes pancycliques. Elle peut être utilisée pour résoudre certains problèmes d'optimisation comme celui du voyageur de commerce.

Pour un sommet u d'un graphe G et un entier positif k , la maille $g(G)$ et la circonférence $c(G)$ sont, respectivement, la longueur minimale et maximale des cycles dans G . Évidemment, un graphe G est hamiltonien si $c(G) = n$. Un graphe G est faiblement pancyclique (ou presque pancyclique) s'il a au moins un cycle de longueur k dans G pour tout entier k , $g(G) \leq k \leq c(G)$. Un graphe G est dit sous-pancyclique s'il contient des cycles de toute longueur k avec $3 \leq k \leq c(G)$. Un graphe bipancyclique est un graphe biparti d'ordre pair $2n$ qui contient des cycles de toutes les longueurs paires $2k$ pour $2 \leq k \leq n$.

En 2004, Faudree et al. [54] ont définis la propriété du graphe (k, m) -pancyclique. Étant donné un graphe G d'ordre n et deux entiers k et m avec $0 \leq k \leq m \leq n$, G est dit (k, m) -pancyclique si, pour $k \leq m \leq n$, tout ensemble de k sommets de G est contenu dans un cycle de toute longueur possible l , pour $m \leq l \leq n$. La propriété de (k, m) -pancyclicité généralise celle de sommet-pancyclicité.

1.8 Graphe à cycle prolongeable

Un cycle C de longueur r ($r \leq n - 1$) ou un r -cycle du graphe G d'ordre n est dit prolongeable dans G si G contient un cycle \acute{C} de longueur $r + 1$ ou un $(r + 1)$ -cycle avec $V(C) \subset V(\acute{C})$. Si un tel cycle \acute{C} existe on dira que C peut être prolongé à \acute{C} ou que \acute{C} est un prolongement de C . Un graphe à cycle prolongeable est un graphe G qui contient au moins un cycle et tout cycle non hamiltonien du

graphe peut être prolongé à un cycle hamiltonien. Donc, G est à cycle prolongeable si tout cycle non hamiltonien C de G est prolongeable. Un graphe G est dit à cycle pleinement prolongeable s'il est à cycle prolongeable et chaque sommet de G se trouve sur un triangle C_3 .

Le fait qu'un graphe soit à cycle prolongeable est une propriété structurelle plus forte que d'être pancyclique qui est à son tour plus fort que d'être hamiltonien. Les graphes à cycle prolongeables est une classe de graphes plus restreinte que les graphes pancycliques. Par conséquent, le problème de cycle pleinement prolongeable reste un problème NP -complet.

Les roues W_{n-1} sont des graphes à cycles pleinement prolongeables. Les Roues Magnétiques M_{n-1} , $n \geq 4$ illustré dans la Figure 1.38 sont à cycles pleinement prolongeables.

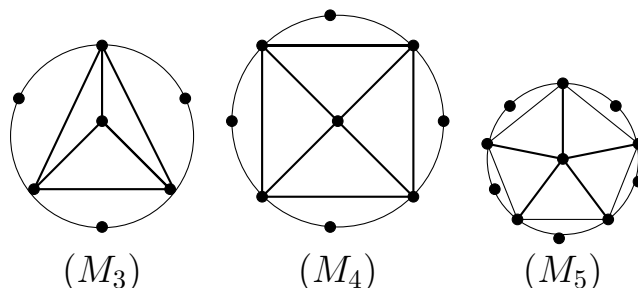


FIGURE 1.38 – Graphes Roues Magnétiques M_3 , M_4 et M_5

Hamiltonicité, pancyclicité et cycles pleinement prolongeables

Introduction

Déterminer si un graphe donné est hamiltonien est l'une des questions centrales de la théorie des graphes. De nombreux résultats qui constituent des conditions suffisantes pour l'hamiltonicité ont été prouvés par plusieurs auteurs.

Dans ce chapitre, nous résumons les propriétés qui fournissent des informations sur l'existence et la structure locale et globale des cycles d'un graphe.

Les conditions suffisantes d'hamiltonicité, de pancyclicité et des graphes à cycles prolongeables d'un graphe G peuvent être classées selon : conditions imposées sur les degrés de sommets, celles imposées sur les degrés généralisés, celles imposées sur les invariants, et les conditions locales.

2.1 Conditions d'Hamiltonicité

2.1.1 Conditions imposées sur les degrés

Les conditions imposées aux degrés des sommets constituent la base et presque toutes les autres conditions y sont liées. La condition de degré minimum de Dirac [45] pour l'hamiltonicité, est la condition

d'hamiltonicité la plus ancienne.

Théorème 2.1.1. (*Dirac, [45]*)

Tout graphe G d'ordre $n \geq 3$ est Hamiltonien si $d_G(v) \geq \frac{n}{2} > 1$ pour tout sommet $v \in V$.

Nous ferons référence à la condition $d_G(v) \geq \frac{n}{2} > 1$ comme condition de type-Dirac.

Ore dans [135], a généralisé la condition dûe à Dirac en utilisant la somme des degrés de deux sommets non adjacents d'un graphe. Ore a proposé deux théorèmes, le premier s'énonce par :

Théorème 2.1.2. (*Ore, [135]*)

S'il existe deux sommets u et v d'un graphe $G = (E, V)$ d'ordre n tels que $d_G(u) + d_G(v) \geq n$. G est Hamiltonien si et seulement si le graphe $G + uv$ l'est aussi.

Dans son second théorème, il a proposé que

Théorème 2.1.3. (*Ore, [135]*)

Si pour tout couple de sommets non adjacents $\{u, v\}$ d'un graphe G d'ordre n est tel que $d_G(u) + d_G(v) \geq n$, alors G est Hamiltonien.

En particulier, si $\min_{v \in V} d_G(v) \geq \frac{n}{2}$, alors G est hamiltonien.

Plus tard, les restrictions sur la somme des degrés qui permettent d'obtenir l'hamiltonicité sont appelées conditions de type-Ore.

Dans [135], Ore a désigné par $\sigma_2(G) = \min\{d_G(u) + d_G(v) : (u, v) \in V^2, uv \notin E\}$ la somme minimale des degrés sur toutes les paires de sommets non adjacents u et v d'un graphe G .

Depuis, la notation σ_2 s'est largement répandue, une notation similaire pour l'étude des cycles est apparue dans les graphes bipartis. On pourrait dire que la prévalence de la notation σ_2 indique à quel point le théorème d'Ore est fondamental. Il a proposé la condition suivante qui améliore les deux théorèmes de Dirac 2.1.1 et son résultat 2.1.3 :

Théorème 2.1.4. (Ore, [135])

Si dans un graphe G d'ordre $n \geq 3$, $\sigma_2(G) \geq n$ pour toute paire de sommets non adjacents u et v , alors G est Hamiltonien.

Depuis, $\sigma_2(G) \geq n$ s'appelait condition de type-Ore pour l'hamiltonicité.

Le théorème d'Ore, et par conséquent la condition de Dirac, sont des conditions bien plus fortes que nécessaire pour l'existence d'un cycle Hamiltonien.

Arangno, dans [10], a donné le graphe G illustré dans la Figure 2.1 qui n'est pas Hamiltonien. Car les seuls sommets non adjacents se trouvent dans l'ensemble indépendant, $\overline{K}_{\frac{(n+1)}{2}}$, et que chacun de ces sommets a un degré $\frac{(n+1)}{2}$. Par conséquent, G ne satisfait pas la condition d'Ore, car $\sigma_2(G) = n - 1$.

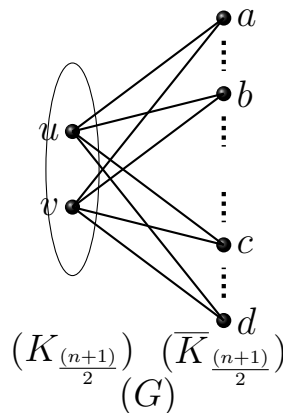


FIGURE 2.1 – Graphe non Hamiltonien

Les théorèmes de Dirac [45] et de Ore [135] constituent la base d'une grande partie des études relatives aux cycles dans les graphes.

Ils ont conduit à l'utilisation de conditions de degré minimum et de somme de degrés comme facteurs déterminants pour les structures de cycles souhaitées.

À titre d'exemple, considérons un graphe $G \equiv C_n$, qui est un cycle sur n sommets, où n est assez grand. Le degré de chaque sommet u du cycle G est $d_G(u) = \delta(G) = \Delta(G) = 2$, donc G ne satisfait ni le théorème d'Ore ni la condition de Dirac pour n assez grand. En fait, nous

verrons que le théorème d'Ore (et la condition de Dirac) garantissent bien plus que l'hamiltonicité. Juste après, Pósa dans [140], a donné plusieurs résultats sur l'hamiltonicité. On peut, en particulier, citer son théorème de 1962 qui porte sur les sommets faiblement adjacents (de degrés faibles) :

Théorème 2.1.5. (*L. Pósa, [140]*)

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n ($n \geq 3$). Si

- pour tout entier k , $1 \leq k < \frac{n-1}{2}$, $|\{v; d_G(v) \leq k\}| \leq k$;*
- et si, pour n impair, $|\{v; d_G(v) \leq \frac{n-1}{2}\}| \leq \frac{n-1}{2}$.*

alors G est un graphe Hamiltonien.

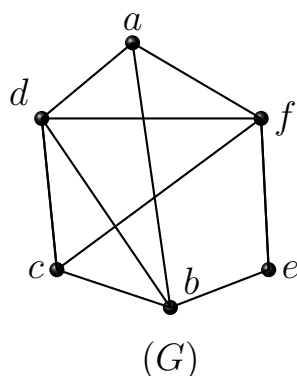


FIGURE 2.2 – Graphe Hamiltonien selon Pósa

Le graphe G illustré ci-dessus dans Figure 2.2 est d'ordre $n = 6$;

- Il est Hamiltonien : les sommets ont été ordonnés de manière à mettre en évidence un cycle Hamiltonien, c'est le cycle $C_6 = \langle a, f, e, b, c, d, a \rangle$;
- On ne peut pas déduire du théorème de Dirac, qu'il est Hamiltonien car $d_G(e) = 2 < \frac{n}{2}$.
- On ne peut plus garantir l'hamiltonicité selon Ore des deux sommets a et e qui sont non adjacents et $d_G(a) + d_G(e) = 5 < 6$;
- Par contre, le théorème de Pósa permet d'affirmer que le graphe est bien Hamiltonien, car il n'y a pas de sommet de degré 0 et

un seul sommet de degré 2 : la condition 1 est remplie ($0 \leq 1$ et $0 + 1 \leq 2$).

Voir aussi le graphe illustré dans la Figure 2.1 ci-dessous :

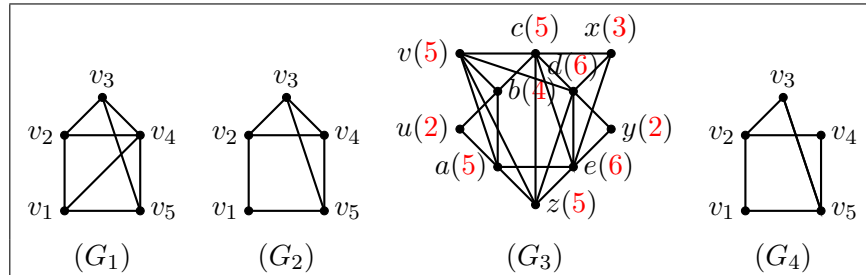


TABLE 2.1 – Graphes G_1, G_2, G_3 Hamiltoniens et G_4 non-Hamiltonien

Erdős, dans [47], a donné une borne inférieure à la taille du graphe pour qu'il soit Hamiltonien.

Théorème 2.1.6. (Erdős, [47])

Soit G un graphe de taille m et d'ordre $n \geq 3$. Si soit $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, ou bien $m > \max\{\binom{n-\delta(G)}{2} + \delta^2, \binom{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor}{2} + \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor^2\}$, alors G est Hamiltonien.

J. A. Bondy, dans [21], a prouvé son théorème qui est type-Ore pour l'hamiltonicité des graphes. Il a montré ce qui suit :

Théorème 2.1.7. (Bondy, [21])

Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n . Si $d_G(v_j) + d_G(v_k) \geq n$ pour toutes les paires $\{v_j, v_k\} \subset V$ avec $j < k$, $d_G(v_j) \leq j$ et $d_G(v_k) \leq k - 1$, alors G est Hamiltonien.

Une caractérisation algébrique des séquences de graphes a été donnée par Erdős et Gallai dans [49] et Harary dans [85] : Une séquence d'entiers non négatifs $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ peut être représentée comme la séquence de degrés d'un graphe simple fini sur n sommets si et seulement si $d_1 + \dots + d_n$ est pair et pour, et

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{k, d_i\}$$

En fait, la caractérisation des séquences de degrés est un cas particulier d'un problème plus général résolu par Tutte dans [166]. On dira qu'une suite d_1, d_2, \dots, d_p est majorée par la suite $d_1^*, d_2^*, \dots, d_p^*$, si $d_i^* \geq d_i$ pour tout i . Nash-Williams, dans [133], a proposé d'appeler une séquence d'un graphe forcément Hamiltonienne si tout graphe avec cette séquence de degrés est Hamiltonien. Plusieurs théorèmes sont des conditions suffisantes pour garantir qu'une séquence d'un graphe donné est forcément Hamiltonienne.

Bondy a affirmé que toute séquence d'un graphe simple G d_1, d_2, \dots, d_p avec $p \geq 3$ et $d_k \leq k, d_l \leq l, k \neq l \implies d_k + d_l \geq P$, G est Hamiltonien.

V. Chvátal, dans [39], a prouvé le résultat suivant en utilisant celui de Bondy,

Théorème 2.1.8. (*Chvátal, [39]*)

Soit G un graphe (simple et non orienté) d'ordre $n \geq 3$ et $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ses sommets ordonnés par ordre croissant selon leurs degrés, i.e., $d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq \dots \leq d_G(v_n)$. Si pour tout $k \leq \frac{n}{2}$ le graphe G satisfait $d_G(v_k) \leq k \implies d_G(v_{n-k}) \geq n - k$, alors G est Hamiltonien.

Cette condition suffisante, dû à Chvátal dans [39], est la plus générale dans son genre pour qu'un graphe soit Hamiltonien. Dans certains cas, on peut obtenir des conditions plus fortes mais en se restreignant à des classes particulières de graphes.

S'inspirant du théorème d'Ore [135], Bondy et Chvátal ont donné, en 1976 dans [26], le résultat suivant qui est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe G donné soit Hamiltonien :

Théorème 2.1.9. (*Bondy et Chvátal, [26]*)

Un graphe G est hamiltonien si et seulement si sa clôture $cl(G)$ est Hamiltonienne.

Las Vergnas dans [167], a adopté une autre condition qui est

proche de celle de Ore dans [135] pour confirmer l'hamiltonicité d'un graphe. Il a proposé son résultat suivant :

Théorème 2.1.10. (*L. Vergnas, 1972, [167]*)

Si les sommets d'un graphe G d'ordre n peuvent être étiquetés comme v_1, v_2, \dots, v_n tels que $j < k$, $k \geq n - j$, $v_j v_k \notin E(G)$, $d_G(v_j) \leq j$, $d_G(v_{k-1}) \leq k - 1$ implique $d_G(v_j) + d_G(v_k) \geq n$, alors G est Hamiltonien.

Il a développé le théorème dû à Ore dans [135] en exploitant la clôtüre (la fermeture) $cl(G)$ d'un graphe G comme suit :

Le théorème suivant généralise un certain nombre de conditions de degré suffisant antérieures pour l'hamiltonicité.

Théorème 2.1.11. (*Bondy et Chvatal, [26]*).

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$. Si $cl(G)$ est complet, alors G est Hamiltonien.

Bondy, dans [29], a utilisé le théorème de Chvátal-Erdős pour montrer son théorème suivant :

Théorème 2.1.12. (*Bondy, [29]*)

Soit G un graphe k -connexe d'ordre n tel que

$$\sum_{v \in S} d_G(v) \geq \frac{(k+1)(n-1)}{2}$$

pour tout ensemble indépendant S de $k+1$ sommets de G . Alors G est Hamiltonien.

Geng-Hua Fan, dans [50], a adopté une autre approche en utilisant une propriété que devraient vérifier les sommets de distance 2 d'un graphe G pour qu'il admet un cycle d'une certaine longueur k . On dit qu'un graphe G satisfait la propriété $P(k)$, pour $3 \leq k \leq n$, si pour tout sommets $u, v \in V(G)$ de distance

$$d_G(u, v) = 2 \Rightarrow \max\{d_G(u), d_G(v)\} \geq \frac{k}{2}$$

Fan, dans [51], a prouvé son résultat suivant :

Théorème 2.1.13. (*Geng-Hua Fan, [50]*)

Si un graphe 2-connexe G satisfait la propriété précédente $P(k)$, alors G a un cycle de longueur au moins k .

Clairement, pour $k = n$, le théorème 2.1.13 généralise le théorème 2.1.2 dû à Ore dans [135] et affirme que le graphe est Hamiltonien.

Nous notons que Schelten et Schiemeyer, dans [152], ont améliorés cette borne à $\frac{(n+13)}{5}$.

2.1.2 Conditions imposées sur les degrés pour les graphes bipartis

En 1963, Moon et Moser dans [130], ont élargis les résultats de l'hamiltonicité aux graphes bipartis. Pour un graphe biparti $G = (V_1, V_2, E)$, $\sigma_2^2(G)$ désigne

$$\sigma_2^2(G) = \min\{d_G(u) + d_G(v) : uv \notin E(G), u \in V_1, v \in V_2\}$$

Ils ont donné la condition de type-Ore suivante pour laquelle un graphe biparti aurait un cycle Hamiltonien.

Théorème 2.1.14. (*Moon et Moser, 1963, [130]*)

Pour $G = (V_1, V_2, E)$ un graphe biparti d'ordre $2n$, si $\sigma_2^2(G) \geq n + 1$, alors G est hamiltonien.

Amar, dans [6], a donné un résultat qui assure l'hamiltonicité semblable pour les graphes bipartis réguliers. Cette condition importante est de type-Ore pour l'hamiltonicité des graphes bipartis connexes d'ordres pairs seulement.

Théorème 2.1.15. (*Amar, 1993, [6]*)

Soit G un graphe biparti régulier connexe d'ordre $2n$ et satisfait la condition que toute paire de sommets $\{u, v\}$ telle que $d_G(u, v) = 3$. Si $d_G(u) + d_G(v) \geq n + 1$, alors G est Hamiltonien.

Arangno, dans [10], a développé des résultats, de Poša dans [141], de Kronk dans [99] et de Halan dans [86], en étudiant les graphes bipartis pour déterminer des conditions dans lesquelles un graphe biparti a un cycle Hamiltonien qui ne contient pas certaines arêtes du graphe. Deborah C. Arangno, dans [10], a montré le lemme suivant qui est une version du théorème 2.1.2 dû à Ore pour les graphes bipartis :

Lemme 2.1.1. (*Arangno, [10]*)

Étant donné un graphe biparti $G = (V_1, V_2, E)$ sur $2n$ sommets, et $d_G(u) + d_G(v) \geq n + 1$ pour toute paire de sommets non adjacents $u \in V_1, v \in V_2$, alors G est Hamiltonien si et seulement si $G + uv$ est Hamiltonien.

Ensuite, elle a obtenu la version suivante du théorème 2.1.9, de Bondy-Chvátal dans [26], pour les graphes bipartis. Arangno a montré que l'hamiltonicité de la clôture $bcl(G)$ est une condition de degré minimum nécessaire et suffisante pour l'hamiltonicité du graphe biparti G .

Lemme 2.1.2. (*Arangno, [10]*)

Si $G = (V_1, V_2, E)$ est un graphe biparti sur $2n$ sommets, alors G est Hamiltonien si et seulement si $bcl(G)$ l'est aussi.

Arangno, dans [10], a pué également qu'un graphe biparti $G = (V_1, V_2, E)$ reste Hamiltonien en supprimant un ensemble bien déterminé $\acute{E} \subset E$ d'arêtes.

De même, elle a établi des conditions sous lesquelles un cycle reste un cycle Hamiltonien dans le graphe et n'utilise aucune des arêtes supprimées. Arangno appelé ce graphe Hamiltonien par graphe évitant des arêtes. Elle proposée son théorème suivant :

Théorème 2.1.16. (*Arangno, [10]*)

Soit G un graphe biparti régulier d'ordre $2n \geq 10$ et de degré minimum $\delta(G) \geq \frac{3}{4}(n - 1)$. Si \acute{E} est un sous-ensemble de arêtes de

$E(G)$ tel que $|\hat{E}| < \frac{(n-3)}{2}$, alors il existe un cycle Hamiltonien C dans G qui ne contient aucune arête de \hat{E} .

2.1.3 Conditions imposées sur les degrés généralisés

La condition de degré est la méthode classique pour résoudre le problème Hamiltonien, et l'union de voisinages est une forme importante de condition de degré généralisés. Dans ce qui suit $\sigma_k(G)$ désigne

$$\sigma_k(G) = \min\left\{\sum_{i=1}^k d(v_i) / \{v_1, \dots, v_k\} \text{ est un stable de } G\right\}$$

Les graphes satisfaisant $\sigma_k(G)$ avec $k = 2$ seront souvent appelés graphes de type-Ore, tandis que si $k = 1$, ils seront appelés graphes de type-Dirac. En 1963, Ore dans [136], a prouvé le résultat suivant :

Théorème 2.1.17. (O. Ore, [136])

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$. Si $\sigma_2(G) \geq n + 1$, alors G est connexe Hamiltonien.

Bondy, dans [29], a donné une condition suffisante d'hamiltonicité en fonction de $\sigma_{k+1}(G)$ pour tout stable de $(k + 1)$ sommets.

Théorème 2.1.18. (Bondy, [29])

Soit G un graphe k -connexe d'ordre $n \geq 3$. Si $\sigma_{k+1}(G) \geq \frac{1}{2}(k + 1)(n - 1)$, alors G est Hamiltonien.

Plus récemment, Faudree et al., dans [56], ont utilisés le paramètre $NC(G)$ qui désigne

$$NC(G) = \min\{|N_G(u) \cup N_G(v)|, u, v \in V \text{ et } uv \notin E\}$$

et ils ont montré le résultat important suivant sur les graphes 2-connexes en comparant le degré minimum d'un graphe $\delta(G)$ et ce paramètre $NC(G)$ comme suit :

Théorème 2.1.19. (Faudree et al., [56])

Si G est un graphe 2-connexe d'ordre n et $NC(G) + \delta(G) \geq n$, alors G est Hamiltonien.

Les même auteurs, en étudiant le comportement des cas généraux de graphes 2-connexes, ont donné une condition sur l'hamiltonicité basée sur les degrés et l'union des voisinages et ils ont prouvés que

Théorème 2.1.20. (Flandrin et Li, [69])

Tout graphe 2-connexe $G = (V, E)$ d'ordre n vérifiant $d_G(u) + d_G(v) + d_G(w) \geq \frac{4n}{3} + |N_G(u) \cup N_G(v) \cup N_G(w)|$ pour tout stable (ensemble indépendant) $\{u, v, w\} \subset V$ est Hamiltonien.

Dans le cas des paires de sommets non adjacents, le résultat suivant était prouvé par Faudree et al. dans [56] :

Théorème 2.1.21. (Faudree et al., [56])

Soit G un graphe 2-connexe d'ordre n et t un entier au plus égal à $\delta(G)$. Si de plus pour toute paire de sommets non adjacents u et v $|N_G(u) \cup N_G(v)| \geq n - t$, alors G est Hamiltonien.

Ainouche, dans [3], a associé à chaque paire de sommets (u, v) de distance 2 d'un graphe $G = (V, E)$ l'ensemble $J(u, v)$ défini par

$$J(u, v) = \{w \in N_G(u) \cap N_G(v); \text{telque}; N[w] \subseteq N[u] \cup N[v]\}$$

Il a déduit la condition suffisante d'hamiltonicité suivant pour la classe de graphes quasi sans grille (et donc pour la classe de graphes sans griffe) :

Théorème 2.1.22. (Ainouche, [3])

Soit G un graphe 2-connexe. Si $|N_G(u) \cap N_G(v)| \geq 2$ et $J(u, v) \neq \emptyset$ pour $d_G(u, v) = 2$, $\{w \in N_G(u) \cap N_G(v) / d_G(w) = 2\} = \emptyset$ et $d_G(u) \leq d_G(v) < \frac{n}{2}$, alors G est Hamiltonien.

Plus tard, Flandrin et al. dans [64], ont combinés entre la propriété

d'intersection de voisinages avec la condition de degré et ont prouvés les deux théorèmes suivants :

Théorème 2.1.23. (Flandrin et al., [64])

Soit $G = (V, E)$ un graphe 2-connexe d'ordre $n \geq 27$ de degré minimum $\delta(G) \geq \frac{n-2}{3}$. Si pour tous les triplets $\{u, v, w\} \subset V$ où $N_G(u) \cap N_G(v) \cap N_G(w) \neq \emptyset$ et $\max\{d_G(u), d_G(v), d_G(w)\} \geq \frac{n}{2}$, alors G est Hamiltonien.

Flandrin et al., [64], ont encore montrés ce que suit :

Théorème 2.1.24. (Flandrin et al., [64])

Soit $G = (V, E)$ un graphe 2-connexe d'ordre $n \geq 3$ avec $\sigma_3(G) \geq n + 2$. Si pour tout les triplets $\{u, v, w\} \subset V$ tels que $N_G(u) \cap N_G(v) \cap N_G(w) \neq \emptyset$ on a $\max\{d_G(u), d_G(v), d_G(w)\} \geq \frac{n}{2}$, alors G est Hamiltonien.

Deux améliorations, pour le théorème 2.1.24, sont données par suite par les même auteurs, dans [65], ils ont considérés les ensembles indépendants de cardinalités 3 et ont prouvés que :

Théorème 2.1.25. (Flandrin et al., [65])

Si G est un graphe 2-connexe d'ordre n tel que

$$\sum_{i=1}^3 d_G(v_i) \geq n + \left| \bigcap_{i=1}^3 N_G(v_i) \right|$$

pour tout ensemble indépendant $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$, alors G est Hamiltonien.

Ils ont de même prouvés que :

Théorème 2.1.26. (Flandrin et al., [65])

Si G est un graphe connexe d'ordre n tel que

$$\sum_{i=1}^3 d_G(v_i) \geq n - 1 + \left| \bigcap_{i=1}^3 N_G(v_i) \right|$$

pour tout ensemble indépendant $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$, alors G est Hamiltonien.

Bing Wei, dans [169], a désigné par

$$\bar{\sigma}_k(G) = \min \left\{ \sum_{i=1}^k d_G(v_i) - \left| \bigcap_{i=1}^k N_G(v_i) \right| \right.$$

tel que $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset V$ est un stable de G . Flandrin et al., dans [65], ont également utilisés $\bar{\sigma}_k(G)$ et ils ont obtenus en 1991 des résultats en utilisant toujours les degrés et l'intersection de voisinages de tout ensemble indépendants de trois sommets.

Théorème 2.1.27. (Flandrin et al., [65])

Si G est un graphe 2-connexe d'ordre n tel que $\bar{\sigma}_3(G) \geq n$, alors G est Hamiltonien.

En 2000, Li [108] a utilisé $\bar{\sigma}_4(G)$ et il a donné la condition de la somme des degrés et de l'intersection des voisinages de quatre sommets indépendants dans les graphes 3-connexes.

Théorème 2.1.28. (Li, [108])

Si G est un graphe 3-connexe d'ordre n tel que $\bar{\sigma}_4(G) \geq n + 3$, alors G a un cycle dominant maximal.

2.1.4 Conditions imposées sur les invariants

Notre point de départ est le résultat bien connu suivant, dû à Nash-Williams dans [132].

Théorème 2.1.29. (Nash-Williams, [132])

Soit G un graphe 2-connexe d'ordre n de degré minimum $\delta(G)$ et de nombre d'indépendance $\alpha(G)$. Si $\delta(G) \geq \max\{\alpha(G), \frac{1}{3}(n+2)\}$, alors G est Hamiltonien.

Nash-Williams, dans [132], a prouvé le résultat surprenant sur les conditions du théorème de Dirac, bien qu'elles soient les meilleures

possibles, qui garantissent même l'existence de nombreux cycles hamiltoniens à arête-disjointes.

Théorème 2.1.30. (*Nash-Williams, [132]*)

Tout graphe d'ordre n de degré minimum $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ contient au moins $\lfloor \frac{5n}{224} \rfloor$ cycles Hamiltoniens à arête-disjointes.

Chvátal et Erdős, dans [41], ont donné un autre indicateur important pour connaître si un graphe a un cycle hamiltonien ou non. C'est un prédicat de la connectivité du graphe $\kappa(G)$ et le nombre d'indépendance $\alpha(G)$.

Les théorèmes de comparaison ultérieurs, impliquant ces mesures, sont appelés conditions de type Chvátal-Erdős.

Théorème 2.1.31. (*Chvátal et Erdős, [41]*)

Pour $k \geq 2$, un graphe k -connexe est Hamiltonien si $\alpha(G) \leq 2k$.

Chvátal-Erdős, dans [41], ont proposés de plus deux autres conditions sur l'hamiltonicité d'un graphe. Dans le premier, ils ont prouvé ce que suit :

Théorème 2.1.32. (*Chvátal et Erdős, [41]*)

Si G est un graphe d'ordre $n \geq 3$ tel que $\kappa(G) \geq \alpha(G)$, alors G est Hamiltonien.

Ce théorème est évident pour le graphe biparti complet $K(p, p+l)$ qui est p -connexe, ne contient pas d'ensemble indépendant de plus de $p + 1$ sommets et n'a pas de cycle Hamiltonien.

De même, le graphe de Petersen est 3-connexe ($\kappa(G) = 3$), ne contient pas d'ensemble indépendant de plus de quatre sommets ($\alpha(G) = 4$) et n'a pas de cycle Hamiltonien comme le montre le poset illustré dans la Figure 2.3 de celui du graphe de Peterson qui ne satisfait pas Chvátal et Erdős, donc c'est un graphe non Hamiltonien.

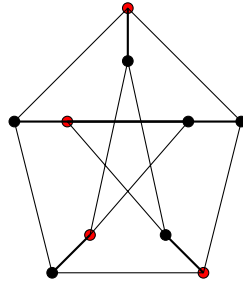


FIGURE 2.3 – Graphe de Petersen

Dans le second, Chvátal-Erdős, dans [41], ont donné le résultat suivant qui améliore le premier

Théorème 2.1.33. (Chvátal et Erdős, [41])

Soit G un graphe et $\alpha(G) \leq \kappa(G) + 1$. Alors G admet un cycle Hamiltonien.

Jackson, dans [91], a montré le résultat suivant pour les graphes 2-connexe et k -régulier.

Théorème 2.1.34. (B. Jackson, [91])

Tout graphe 2-connexe k -régulier d'ordre $n \leq 3k$ est Hamiltonien.

En 1981, Häggkvist et Nicoghossian dans [83] ont encore amélioré le théorème de Dirac en incorporant la connectivité $\kappa(G)$ du graphe et le degré minimum $\delta(G)$. Ils ont proposé le résultat suivant :

Théorème 2.1.35. (Haggkvist et Nicoghossia, [83])

Tout graphe 2-connexe G où $\delta(G) \geq \frac{(n+\kappa(G))}{3}$ est Hamiltonien.

Deux arêtes sont indépendantes si elles n'ont pas d'extrémités communes. Dans [84], Häggkvist et Thomassen ont prouvé que toutes $(k - 1)$ arêtes indépendantes d'un graphe k -connexe sont contenues dans un cycle commun. En utilisant ce résultat et la technique de preuve du Théorème 2.1.32, Häggkvist et Thomassen ont montrés que :

Théorème 2.1.36. (Häggkvist et Thomasse, [84])

Soit t un entier positif. Si $\alpha(G) \leq k - t$, alors tout système de chaînes disjointes de longueur totale au plus égale à t est contenu dans un cycle Hamiltonien de G .

En particulier, pour $t = 1$, on a ce que suit :

Théorème 2.1.37. (Chvátal et Erdős, [41])

Si G est un graphe d'ordre $n \geq 3$ tel que $\kappa(G) > \alpha(G)$, alors G est connexe-Hamiltonien.

Également, Chvátal et Erdős dans [41], ont conjecturé que la même conclusion est valable sous l'hypothèse supplémentaire que G soit sans K_3 . Le théorème suivant est une conséquence facile du théorème 2.1.32

Théorème 2.1.38. (Chvátal et Erdős, [41])

Soit G un graphe k -connexe sans aucun stable de $k+2$ sommets. Alors G possède une chaîne Hamiltonienne.

Bondy, dans [24], a donné le résultat qui affirme l'existence d'un lien entre deux conditions suffisantes pour l'existence d'un cycle Hamiltonien dans un graphe non orienté. Il a proposé le théorème suivant :

Théorème 2.1.39. (Bondy, [24])

Tout graphe simple $G = (V, E)$ qui satisfait la condition de Ore $d_G(u) + d_G(v) \geq n$ pour toute paire de sommets non adjacents $\{u, v\}$ satisfait également la condition Chvátal-Erdős de $\alpha(G) \leq \kappa(G)$

Le théorème précédent montre que la condition Chvátal-Erdős [41] est une généralisation de la condition d'Ore [135].

Un cycle C d'un graphe G est dit D_λ -cycle si chaque composante connexe de $G \setminus C$ a un ordre inférieur à λ . En utilisant un résultat profond sur les D_λ -cycle, Fraïsse dans [74] a obtenu la généralisation suivante du Théorème 2.1.30.

Théorème 2.1.40. (Fraïsse, [74])

Soit G un graphe k -connexe d'ordre $n \geq 3$ de degré minimum $\delta(G)$ et le nombre d'indépendance $\alpha(G)$. Si

$$\delta(G) \geq \max\left\{\alpha(G) + k - 2, \left(\frac{1}{k+1}\right)(n + k(k-1))\right\}$$

alors G est Hamiltonien.

Dans [88], le théorème suivant sur la localisation de la condition de Pósa [140]) est prouvé par Hasrarian et Khachatrian [88] :

Théorème 2.1.41. (*Hasrarian and Khachatrian, [88]*)

Un graphe connexe G d'ordre $n \geq 3$ est Hamiltonien si

$$\begin{cases} d_G(u) = k < \frac{n-1}{2} \Rightarrow |\{v \in M_2(u) / d_G(v) \leq k\}| < k \\ d_G(u) = \frac{n-1}{2} \Rightarrow |\{v \in M_2(u) / d_G(v) \leq \frac{n-1}{2}\}| < \frac{n-1}{2} \end{cases}$$

Dans [88], Hasrarian and Khachatrian, ont obtenu les résultats suivants :

Théorème 2.1.42. (*Hasrarian and Khachatrian, [88]*)

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$. Si

$$d_G(u) + d_G(v) \geq |N_G(u) \cup N_G(v) \cup N_G(w)|$$

pour chaque triple de sommets $\{u, v, w\}$ avec $d_G(u, v) = 2$ et $w \in N_G(u) \cap N_G(v)$, alors G est Hamiltonien.

Hasrarian and Khachatrian, dans [88], ont également proposés et prouvés le théorème qui suit :

Théorème 2.1.43. (*Hasrarian and Khachatrian, [88]*)

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ et que u et v soient deux sommets distincts de G . Si

$$d_G(u) \leq \frac{n}{2}, d_G(u, v) = 2 \Rightarrow d_G(v) \geq \frac{|M_3(u)|}{2}$$

alors G est Hamiltonien.

Le sous-graphe de G induit par $M_k(u)$ est noté par $G_k(u)$. Le degré dans $G_k(u)$ d'un sommet $v \in M_k(u)$ est noté par $d_{G_k(u)}(v)$. Pour $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n , Bondy et Chvatál ont montré dans [26] (en utilisant la preuve d'Ore dans [135]) que si $G + uv$ est Hamiltonien et $d_G(u) + d_G(v) \geq n$, alors G lui-même est Hamiltonien.

Hasrarian and Khachatrian, dans [88], ont généralisés ce résultat en proposant le théorème qui suit :

Théorème 2.1.44. (*Hasrarian and Khachatrian, [88]*)

Si $G + uv$ est hamiltonien, $d_G(u, v) = 2$, et $d_G(u) + d_{G_2(u)}(v) \geq |M_2(u)|$, alors G est lui-même Hamiltonien.

En termes de propriétés locales des $M_2(G)$ (ensembles de sommets à la distance plus de 2 d'un sommet ou d'un sous-graphe), de nouvelles conditions suffisantes pour qu'un graphe soit Hamiltonien sont obtenues. En particulier, les résultats de Fan, Chavatal et Erdos sont généralisés. Les nouveaux résultats s'appliquent également aux graphes de plus grand diamètre. En 1987, Fraïsse dans [74], a prouvé son théorème suivant ;

Théorème 2.1.45. (*Fraïsse, [74]*)

Soit G un graphe de degré $n \geq 3$ et k -connexe. Supposons qu'il existe un certain t , $1 \leq t \leq k$ tel que chaque stable $S \subseteq V(G)$ de cardinal t satisfait $|N_G(S)| \geq \frac{t(n-1)}{(t+1)}$, alors G est Hamiltonien.

Juste après, Faudree et al., dans [56] et dans [57], ont montrés deux résultats importants pour les graphes 2-connxes en utilisant $NC(G)$ qui désigne

$$NC(G) = \min\{|N_G(u) \cup N_G(v)|, u, v \in V(G) \text{ et } uv \notin E(G)\}$$

Théorème 2.1.46. (*Faudree et al., [56]*)

Si G est un graphe 2-connxes d'ordre n et $NC(G) \geq n - \delta(G)$, alors G est Hamiltonien.

Ils ont également proposé que

Théorème 2.1.47. (*Faudree et al., [57]*)

Si G est un graphe 2-connxes d'ordre n et $NC(G) \geq \frac{2n-1}{3}$, alors G est Hamiltonien.

Le résultat plus récent suivant, montré par Flandrin et al. dans [65], est un résultat important.

Théorème 2.1.48. (*E. Flandrin, [65]*)

Si G est 2-connexe et, pour chaque paire de sommets non adjacents u et v , $3|N_G(u) \cup N_G(v)| + \max\{2, |N_G(u) \cap N_G(v)|\} \geq (2n - 1)$, alors G est Hamiltonien.

$NC_2(G)$ désigne

$$NC_2(G) = \min\{|N_G(u) \cup N_G(v)|; / d_G(u, v) = 2\}$$

Les deux résultats suivants sont proposés par Lindquister dans [119] :

Théorème 2.1.49. (*Lindquister, [119]*)

Si G est 2-connexe et $NC_2(G) \geq \frac{(2n-1)}{3}$, alors G est Hamiltonien.

Théorème 2.1.50. (*Lindquister, [119]*)

Si G est 3-connexe et $NC_2(G) \geq \frac{2}{3}n$, alors G est connexe-Hamiltonien.

2.1.5 Conditions locales

Nous présentons des résultats qui sont des conditions d'hamiltonicité qui traitent le comportement local d'un graphe. Rappelons que Chartrand et Pippert dans [36] ont montrés que :

Théorème 2.1.51. (*Chartrand et Pippert, 1974, [36]*)

Tout graphe de degré minimum $\delta(G) > \frac{2}{3}(n - 1)$ est localement connexe.

Le premier résultat a été obtenu par Chartrand et Pippert [36].

Théorème 2.1.52. (*Chartrand et Pippert, 1974, [36]*).

Tout graphe G connexe, localement connexe d'ordre $n \geq 3$ et de degré maximum $\Delta(G) \leq 4$ est soit Hamiltonien, ou bien isomorphe à $K_{1,1,3}$.

En 1974, Fleischner dans [72], a fourni une preuve élégante en montrant que le carré d'un graphe 2-connexe est hamiltonien

Théorème 2.1.53. (*Fleischner, 1974, [72]*).

Le carré, G^2 , de tout graphe 2-connexe G est Hamiltonien.

Chartrand et Pippert, dans [36], ont aussi prouvé que

Théorème 2.1.54. (*Chartrand et Pippert, 1974, [36]*).

Tout graphe connexe localement semi-Hamiltonien (traçable) d'ordre $n \geq 3$ avec $\Delta(G) \leq 4$ est Hamiltonien.

En 1975, Kikust dans [98] a prouvé son résultat suivant :

Théorème 2.1.55. (*Kikust, 1975, [98]*)

Tout graphe connexe, localement connexe et 5-régulier est Hamiltonien.

De plus, Balakrishnan et Paulraja, dans [13] ont prouvés que tout graphe triangulé connexe est localement connexe.

Théorème 2.1.56. (*Balakrishnan et Paulraja, 1986, [13]*)

Tout graphe triangulé connexe est localement connexe.

Shi, dans [157], a généralisé le théorème classique de Dirac en prouvant que

Théorème 2.1.57. (*R. Shi, [157]*)

Tout graphe 2-connexe G d'ordre n contient un cycle qui passe par tous les sommets de degré supérieur ou égal à la moitié de l'ordre $\frac{n}{2}$.

Arangno, dans [10], a prouvée le résultat précédent de Shi [157], suivant un argument différent, qui est similaire à celui utilisé par Yamashita dans [171] en déduisant le résultat suivant :

Théorème 2.1.58. (Arangno, 2014, [10])

Si G est un graphe 2-connexe d'ordre n et $\max\{d_G(u) + d_G(v) \mid u, v \in S\} \geq d$ pour tout stable $S \in V(G)$ d'ordre $k + 1$, alors G a un cycle de longueur au moins $\min\{d, |V(G)|\}$.

Dans [10], Arangno a généralisée la condition d'Ore dans [135], donnée dans le théorème 2.1.2. Dans sa preuve, elle a suivi l'approche utilisée par Shi, dans [157], pour prouver qu'un graphe 2-connexe G d'ordre n contient un cycle qui passe par tous les sommets de degré supérieur $\frac{n}{2}$. Sa preuve était par contradiction et elle a utilisée un cycle maximal et une chaîne minimale.

Théorème 2.1.59. (Arangno, 2014, [10])

Soit $G = (V, E)$ un graphe 2-connexe d'ordre n . Alors G contient un cycle passant par tous les sommets $u, v \in V$ non adjacents entre eux dont la somme de degré est $d_G(u) + d_G(v) \geq n$.

2.2 Pancyclicité

L'étude de la pancyclicité a commencé suite à la remarque de J.A. Bondy [23], qui a affirmé que de nombreuses conditions suffisantes pour qu'un graphe soit hamiltonien impliquent, en effet, que le graphe soit pancyclique ou sommet-pancyclique.

Commençons par donner une certaine façon de positionner les sommets d'un graphe dans un certain ordre pour pouvoir confirmer après, que ce graphe est bien pancyclique. Cet ordre est appelé ordre pancyclique d'un graphe et a été défini par Hendry, dans [90].

Définition 2.2.1. (Hendry)

Un graphe G d'ordre $n \geq 3$ a un ordre pancyclique si ses sommets peuvent être ordonnés v_1, v_2, \dots, v_n de telle sorte que le sous-graphe de G induit par v_1, v_2, \dots, v_k contient un cycle de longueur k , pour chaque $k \in \{3, 4, \dots, n\}$. L'ordre pancyclique v_1, v_2, \dots, v_n est dit ordre pancyclique à partir de v_1 .

Dans cette section, nous verrons que les théorèmes donnant certaines conditions suffisantes pour l'hamiltonicité motivent des théorèmes analogues relatifs à la pancyclicité. Nous exposerons ces résultats de manière analogue à la section précédente.

2.2.1 Conditions imposées sur les degrés

Le premier résultat est celui de Bondy, dans [23]. Au premier temps, il a prouvé que le théorème d'Ore [135] était suffisant pour qu'un graphe soit pancyclique. Le même auteur a montré que les conditions de degré minimum de Dirac dans [45] et d'Ore dans [135] étaient suffisantes pour qu'un graphe soit pancyclique et garantissent en fait plus que l'existence d'un cycle hamiltonien. Il a prouvé que :

Théorème 2.2.1. (Bondy, [23])

Si G est un graphe d'ordre n tel que $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, alors G est soit pancyclique, ou bien isomorphe au graphe biparti complet $\frac{n}{2}$ -régulier $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.

En 1971, Bondy (dans [23] et [22]) a proposé sa nouvelle et célèbre méta-conjecture qui est la suivante :

Métaconjecture 2.2.1. (Bondy, [23])

Presque toute condition non triviale sur un graphe qui assure l'hamiltonicité d'un graphe, assure également que ce graphe est pancyclique (à quelques exceptions près).

Pour un graphe d'ordre n possédant un cycle de longueur $(n-1)$ et un sommet adjacent au moins à la moitié des sommets de G , Haggkvist et al., dans [82] et Benhocine et al., dans [18], ont donné le résultat suivant qui est appelé condition de type-fan pour la pancyclicité

Théorème 2.2.2. (Haggkvist et al., [82] et Benhocine, et al., [18])

Si un graphe G d'ordre $n \geq 4$ a un cycle C de longueur $(n-1)$ et un sommet $v \notin V(C)$ tel que $d_G(v) \geq \frac{n}{2}$, alors G est pancyclique.

La conjecture suivante a été proposée, indépendamment, par R. Haggkvist dans [81] et Mitchem et Schmeichel dans [128].

Conjecture 2.2.1. (*R. Haggkvist, [81] et Mitchem et Schmeichel, [128]*)

Soit G un graphe hamiltonien d'ordre n . Si le degré minimum $\delta(G) \geq \frac{(2n+1)}{5}$, alors G est pancyclique ou bien biparti et c'est la borne la meilleure que possible.

En 1988, Schmeichel et Hakimi dans [153], ont prouvé le résultat suivant :

Théorème 2.2.3. (*Schmeichel et Hakimi, 1988, [153]*)

S'il existe deux sommets consécutifs sur un cycle hamiltonien ayant une somme de degrés d'au moins $n+1$, alors G est pancyclique.

Bauer et Schmeichel, dans [14] et [154], ont donné un résultat qui généralise la condition d'hamiltonicité de Chvátal dans [39] du théorème 2.1.8.

Théorème 2.2.4. (*Bauer et Schmeichel, [14]*)

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$ avec une séquence de degrés de sommets $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Si pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $d_k \leq k < \frac{n}{2} \Rightarrow d_{n-k} \geq n - k$, alors G est soit pancyclique, ou bien biparti.

Ils ont également prouvé le résultat intéressant suivant :

Théorème 2.2.5. (*Bauer et Schmeichel, [14]*)

Soit $G = (V, E)$ un graphe 2-connexe d'ordre n . Si

$$d_G(u, v) = 2 \Rightarrow \max\{d_G(u), d_G(v)\} \geq \frac{n}{2}$$

pour chaque deux sommets $u, v \in V$, alors G est pancyclique, ou bien $G \cong K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ ou bien encore $G \cong (K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}) - e$.

Bauer et Schmeichel, dans [14], ont posé la question comment appliquer la condition d'hamiltonicité de Fan dans [51], pour les graphes

pancyclique ? Comme la condition d'Ore, la condition de Fan s'avère suffisante pour plus que l'hamiltonicité comme l'ont prouvé Bauer et Schmeichel, dans [14], dans leur résultat juste après :

Théorème 2.2.6. (*Bauer et Schmeichel, [14]*)

*Soit G un graphe 2-connexe d'ordre n . Supposons que pour tout stable de trois sommets $\{u, v, w\} \subseteq V(G)$,
 $d_G(u) + d_G(v) + d_G(w) \geq \frac{3n}{2} - 1$, alors G est pancyclique, ou bien $G \cong K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$, $G \cong (K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}) - e$ ou bien encore le cycle $G \cong C_5$.*

Amar et al., dans [8], ont prouvé dans leur résultat suivant que la condition du théorème 2.2.1 est en fait suffisante pour la pancyclicité si le graphe est hamiltonien et $n \geq 102$.

Théorème 2.2.7. (*Amar et al., [8]*)

Soit $G = (V, E)$ un graphe hamiltonien non biparti d'ordre n . Si $n \geq 102$ et $\forall v \in V, d_G(v) \geq \frac{(2n+1)}{5}$, alors G est pancyclique.

Ils ont noté également que pour $\delta(G) \geq \frac{(2n+1)}{5} - 1$, le résultat n'est pas toujours vrai et pour $n \cong 0[5]$ il existe des graphes hamiltoniens avec $\delta(G) = \frac{2n}{5}$ qui ne sont ni pancycliques ni bipartis, comme le prouve le produit en couronne de C_5 et K_r , avec $n = 5r$. Ainsi, la borne est la meilleure possible.

Les deux théorèmes suivants, dû à B. Bollobas et G. Brightwell dans [20] et à Stacho dans [160] respectivement, généralisent les conditions suffisantes d'hamiltonicité et garantissent l'existence de cycles passant par des sommets bien choisis.

Théorème 2.2.8. (*Bollobas et Brightwell, [20]*)

Soit G un graphe d'ordre n et soit $W \subset V(G)$. Si $|W| \geq 3$ et $d_G(u) + d_G(v) \geq n$ pour toute paire de sommets non adjacents $u, v \in W$, alors G possède un cycle contenant tous les sommets de W .

Plus encore, les même auteurs ont prouvé que

Théorème 2.2.9. (*Bollobas et Brightwell, [20]*)

Soit G un graphe d'ordre n dont les sommets sont ordonnés selon l'ordre croissant de leurs degrés $d(v_1) \leq d(v_2) \leq \dots \leq d(v_n)$. Soit $W = \{v_{n-k+1}, v_{n-k+2}, \dots, v_n\}$ tel que $3 \leq k \leq n$ et $d_G(v_{n-k+1}) > n - k$. Si pour tout $n - k < t < \frac{n}{2}$, $d_G(v_t) \leq t \implies d_G(v_{n-t}) \geq n - t$, alors G possède un cycle contenant tous les sommets de W .

En parallèle, She-Min Zhang, dans [177], a utilisé le concept de distance sur un cycle C , notée $d_C(u, v)$, de deux sommets u et v sur le cycle C comme étant la longueur de la plus courte u, v -chaîne sur le cycle C . Il a prouvé en exploitant ce concept que :

Théorème 2.2.10. (She-Min Zhang, [177])

S'il existe deux sommets v_1 et v_2 d'un cycle hamiltonien C tels que $d_C(v_1, v_2) = 2$ et $d_G(v_1) + d_G(v_2) \geq n + 1$, alors G est pancyclique.

Le théorème important suivant, dû à Faudree et al. [52] assure la pancyclicité des graphes si la somme de degrés des deux d'extrémité d'une chaîne hamiltonienne est au moins $n - 1$.

Théorème 2.2.11. (Faudree et al., [52])

Si un graphe G d'ordre n possède une chaîne hamiltonienne $P_{n-1} = v_1, v_2, \dots, v_n$ telle que $d_G(v_1) + d_G(v_n) \geq n + 1$, alors G est pancyclique.

Le corollaire ci-dessous, dû à Harris dans [87], assure la pancyclicité d'un graphe d'ordre n si au moins $\frac{n}{3}$ de ses sommets sont de degrés au moins $\frac{(n+1)}{2}$. Cette condition est de type-Dirac pour la pancyclicité :

Corollaire 2.2.1. (Harris, [87])

Soit G un graphe hamiltonien d'ordre n . Si G admet p sommets v_1, v_2, \dots, v_p ($p \geq \frac{n}{3}$) tels que $d_G(v_k) \geq \frac{(n+1)}{2}$ pour tout $1 \leq k \leq p$, alors G est pancyclique.

Harris, dans [87], a encore prouvé un autre théorème utile pour la pancyclicité, qui peut être vérifié par une simple inspection des

degrés de sommet du graphe, et nous donne un aperçu intéressant de la structure locale de certains graphes pancycliques.

Théorème 2.2.12. (*Harris, [87]*)

Soit $G = (V, E)$ un graphe hamiltonien d'ordre $n \geq 5$. S'il existe un sommet $u \in V$ de degré $d_G(u) = n - 2$, alors G est pancyclique.

2.2.2 Bipancyclicité des graphes bipartis

Deborah C. Arangno, dans [10], a donné certaines conditions de bipancyclicité (pancyclicité des graphes bipartis) dans les graphes. Commençons par donner le théorème important de Schmeichel et Mitchem dans [155] qui est analogue au théorème 2.2.3, dû à Schmeichel et Hakimi, pour les graphes :

Théorème 2.2.13. (*Schmeichel et Mitchem, 1982, [155]*)

Si graphe biparti $G = (V_1, V_2, E)$ Hamiltonien de cycle hamiltonien v_1, v_2, \dots, v_{2n} est tel que $d_G(v_1) + d_G(v_{2n}) \geq n + 1$, alors G est bipancyclique.

Dans le théorème 2.1.15, Amar dans [6], a prouvé non seulement que la condition suivante garantit l'hamiltonicité dans un graphe biparti régulier, mais aussi la pancyclicité.

Théorème 2.2.14. (*Amar, 1993, [6]*)

Un graphe biparti connexe régulier $G = (V_1, V_2, E)$ d'ordre $2n$ satisfaisant la condition que pour toutes les paires de sommets u et v où $d_G(u, v) = 3$ implique $d_G(u) + d_G(v) \geq n + 1$, alors G est bipancyclique.

Dans le théorème suivant, Entringer et Schmeichel [46], précisent un nombre minimum d'arêtes qui garantit qu'un graphe biparti est bipancyclique.

Théorème 2.2.15. (*Entringer et Schmeichel, 1988, [46]*)

Un graphe biparti régulier d'ordre $2n$ et de taille $|E| = n^2 - n + 2$ est bipancyclique.

En 2009, Harris dans [87], a proposé et montré son théorème suivant :

Théorème 2.2.16. (Harris, 2009, [87])

Soit $G = (V_1, V_2, E)$ un graphe biparti régulier d'ordre $2n$ avec $n \geq 4$ et C un cycle hamiltonien de G . S'il existe un sommet de degré $n - 1$, alors G est bipancyclique.

2.2.3 Conditions imposées sur les degrés généralisés

Commençons par le résultat suivant dû à Faudree et Schelp dans [61] :

Théorème 2.2.17. (Faudree et Schelp, [61]).

Soit G un graphe d'ordre n tel que $\sigma_2(G) \geq n + 1$. Alors G est un arête 5-pancyclique.

Hendry dans [90] a montré le résultat suivant :

Théorème 2.2.18. (Hendry, [90])

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$ avec $\sigma(G) \geq \frac{(n+1)}{2}$. Alors G est sommet pancyclique.

Hendry a même montré dans [90] qu'un graphe G avec $\sigma(G) \geq \frac{(n+1)}{2}$ est à cycle pleinement prolongeable. Hendry, dans [90], a donné le théorème suivant qui a été la base des preuves de plusieurs autres résultats.

Théorème 2.2.19. (Hendry, [90])

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$ tel que $\sigma_2(G) \geq n$ et soit C un cycle non prolongeable de longueur k dans G avec $3 \leq k \leq n - 1$. Alors soit :

1. *on a $k \leq \frac{n}{2}$, les sommets de C induisent un graphe complet ; pour chaque sommet $u \in V(C)$, $N_G(u) \cap (V(G) - V(C)) \neq \emptyset$ et pour chaque sommet $w \in V(G) - V(C)$, $N_G(w) \cap V(C) \neq \emptyset$;*

2. ou bien, les entiers n et k sont pairs ; les sommets de C induisent un graphe régulier biparti complet avec les ensembles partiels $V_1, V_2, V(G) = V(C) \cup V_1 \cup V_2$ avec $|V_1| = |V_2|$ et les sommets $V_1 \cup V_2$ induisent un graphe de degré minimal au moins égal à $\frac{(n-k)}{2}$. De plus, si $x \in V_i$ et $y \in V_j$ pour $i, j \in \{1, 2\}$; alors $xy \in E(G)$ si et seulement si $i = j$.

En utilisant le concept de fermeture défini dans [26] par Bondy et Chvátal, Faudree et al. dans [58], ont montré le résultat suivant qui assure la pancyclicité d'un graphe G si $Cl_{n+1}(G)$ est complet.

Théorème 2.2.20. (Faudree et al. [58]).

Si $Cl_{n+1}(G)$ est complet, alors le graphe G est pancyclique.

En 1994, Aldred et al. dans [5], ont assouplis la condition d'Ore et ont montré ce que suit :

Théorème 2.2.21. (Aldred, Holton et Min, [5])

Si le graphe G d'ordre n satisfait $\sigma_2(G) \geq n - 1$, alors G est pancyclique sauf si G est isomorphe à l'un des graphes ci-dessous :

- un graphe d'ordre n constitué de deux graphes complets joints en un sommet ;
- un sous-graphe du joint d'un graphe complet d'ordre $\frac{n-l}{2}$ et d'un graphe nul (vide) d'ordre $\frac{n+l}{2}$;
- $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ ou bien C_5 .

Rappelons que, $\bar{\sigma}_2(G)$ désigne

$$\bar{\sigma}_2(G) = \min\{d_G(u) + d_G(v), uv \in E(G)\}$$

L.M. Xiong dans [170], a montré le résultat suivant :

Théorème 2.2.22. (L.M. Xiong, [170])

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 450$. Si $\bar{\sigma}_2(G) > \sqrt{2n + 1/4} - 3/2$, alors $L(G)$, le graphe adjoint du graphe G , est faiblement pancyclique.

Asratian et Sarkisian, dans [12], ont prouvé leur résultat important sur la sommet-pancyclicité en proposant le théorème suivant :

Théorème 2.2.23. (*Asratian et Sarkisian, [12]*).

Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 4$ tel que $d_G(u) + d_G(v) \geq |N_G(u) \cup N_G(v) \cup N_G(w)|$ pour tout chemin $P_2 = uvw$ avec $uv \notin E(G)$. Alors G est sommet 4-pancyclique à moins que n soit pair et que $G \cong K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.

En 2002, B. Randerath and al. dans [146], ont montré ce que suit :

Théorème 2.2.24. (*B. Randerath and al., [146]*)

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$ tel que $\sigma_2(G) \geq \lceil \frac{4n}{3} \rceil - 1$. Alors chaque sommet de G est contenu dans un 3-cycle.

Le même auteurs ont également montré que :

Théorème 2.2.25. (*B. Randerath and al., [146]*)

Si $Cl_{\lceil \frac{4n-3}{3} \rceil}(G)$ est complet, alors G est sommet-pancyclique.

Ils ont encore prouvé que :

Théorème 2.2.26. (*B. Randerath and al., [146]*)

Si $Cl_{\lceil \frac{3n-3}{2} \rceil}(G)$ est complet, alors G est arête-pancyclique.

Ils ont encore prouvé le résultat suivant concernant les graphes arête-pancyclique.

Théorème 2.2.27. (*B. Randerath and al., [146]*)

Soit G un graphe d'ordre n tel que $\delta(G) \geq \frac{(n+2)}{2}$. Alors G est arête-pancyclique.

De nombreuses variations de pancyclicité ont suscité un intérêt récent dans le domaine. La propriété (k, m) -pancyclicité, définie en 2004 par Faudree et al. [54], qui est une généralisation de la sommet-pancyclicité . En 1971, Bondy dans [23], a montré que la condition $\sigma_2(G) \geq n + 1$ garantie que G est pancyclique. Faudree et al., dans

[54], ont montrés que cette borne assure bien plus la pancyclicité. Leur résultat, qui utilise la notion de (k, m) -pancyclicité, donne un aperçu de la prévalence des cycles dans un tel graphe.

Théorème 2.2.28. (*Faudrée et al., [54]*).

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$. Si $\sigma_2(G) \geq n + 1$, alors G est $(k, 2k)$ -pancycloïque pour tout entier $k \geq 2$.

2.2.4 Conditions imposées sur les invariants

En 1930, Ramsey dans [145], a donné le résultat suivant qui était nécessaire dans l'énoncé du résultat relatif à la pancyclicité pour tout graphe qui satisfait la condition de Chvátal-Erdős.

Théorème 2.2.29. (*Ramsey, 1930, [145]*)

Pour tout deux d'entiers $k, m \geq 2$, il existe un entier $r(k, m)$ tel que tout graphe d'ordre $n \geq r(k, m)$ contient une clique de taille k ou un stable de taille m .

Si l'ordre du graphe G est suffisamment grand par rapport au nombre d'indépendance $\alpha(G)$ du graphe, la condition Chvátal-Erdős se révèle être suffisante pour la pancyclicité.

Il s'ensuit d'après V. Chvátal et P. Erdős, dans [41], que

Théorème 2.2.30. (*V. Chvátal et P. Erdős, [41]*)

Si G est un graphe Hamiltonien d'ordre n et $\kappa(G) \geq 4(\alpha(G) + 1)^4$, alors G est pancycloïque.

Notons que le graphe biparti complet régulier $K_{t,t}$ vérifie $\kappa(G) \geq \alpha(G) = t$ n'est pas pancycloïque, en effet, il n'a pas de cycles impairs.

En prouvant une conjecture de Zarins, Erdős dans [48], a montré qu'au lieu de faire l'hypothèse sur connectivité $\kappa(G)$, il suffit de supposer que G est Hamiltonien et que n l'ordre du graphe G est suffisamment grand par rapport au nombre d'indépendance $\alpha(G)$. Il a prouvé que

Théorème 2.2.31. (Erdős, [48])

Si G est un graphe Hamiltonien d'ordre n et $n \geq 4\alpha^4(G)$, alors G est pancyclique.

Il découle, alors de [41] du théorème 2.1.33, que $\kappa(G) \geq 4(\alpha(G) + 1)^4$ est suffisant pour la pancyclicité.

Théorème 2.2.32. (Erdős, 1974, [48])

Si G est un graphe Hamiltonien d'ordre n avec $\kappa(G) \geq 4(\alpha(G) + 1)^4$, alors G est pancyclique.

En 1990, Jackson et Ordaz dans [92], ont conjecturés que

Conjecture 2.2.2. (Jackson et Ordaz, [92])

Si $\kappa(G) > \alpha(G)$, alors G est pancyclique.

Motivés par la métaconjecture de Bondy, dans [28], Amar et al. dans [7] ont obtenu plusieurs résultats sur les longueurs de cycles dans un graphe G qui vérifie la condition de Chvátal-Erdős $\kappa(G) \geq \alpha(G)$. Ils ont commencé par conjecturer que

Conjecture 2.2.3. (Amar et al., [7])

Si un graphe G tel que $\kappa(G) \geq \alpha(G)$ n'est pas biparti, alors G contient des cycles de toute longueur k pour tous les $4 \leq k \leq n$ (Le cas où $G = C_5$ est un 5-cycle doit être exclu).

Notons que la connectivité $\kappa(G)$ est majorée par le degré de tout sommet du graphe G . Si $\kappa(G) > \alpha(G)$, alors il y a une arête à l'intérieur du voisinage de tout sommet du graphe G , donc en particulier G doit contenir des K_3 .

En 1996, Lou dans [123], a prouvé son résultat plus fort suivant :

Théorème 2.2.33. (Lou, [123])

Si G est un graphe d'ordre n , $\kappa(G) \geq \alpha(G)$ et G est sans K_3 , alors G contient des cycles de toute longueur t pour tous les $4 \leq t \leq n$, à moins que $G \cong C_5$ ou bien $G \cong K_{t,t}$ pour certains valeurs de t .

Le théorème 2.2.29, dû à Ramsey dans [145], était nécessaire pour l'énoncé du résultat relatif à la pancyclicité des graphes satisfaisant la condition de Chvátal-Erdős.

Ceci a permis à Flandrin et al. d'énoncer le résultat suivant [67] et par la suite [68] :

Théorème 2.2.34. (*Flandrin et al., 2004, [67]*)

Soit $G = (V, E)$ un graphe k -connexe de nombre d'indépendance $\alpha(G)$ tel que $\kappa(G) \geq \alpha(G)$ et $|V| > 2k(4\alpha(G) + 1)$. Alors G est pancyclique.

Keevash et Sudakov, dans [97], ont amélioré la borne de Erdős dans [48]. Ceci établit la conjecture de Jackson et Ordaz, dans [92], citée ci-dessus. De plus, ils ont prouvé que la pancyclicité découle déjà de l'hypothèse que G est Hamiltonien avec un degré minimum $\delta(G)$ au moins égal à $600\alpha(G)$.

Théorème 2.2.35. (*Keevash et Sudakov, [97]*)

Si G est un graphe Hamiltonien et $\delta(G) \geq 600\alpha(G)$, alors G est pancyclique.

Le théorème suivant améliore le résultat d'Erdoš et montre qu'une dépendance cubique entre n et $\alpha(G)$ est suffisante pour la pancyclicité d'un graphe.

Théorème 2.2.36. (*Keevash et Sudakov, [97]*)

Si $G = (V, E)$ est un graphe Hamiltonien d'ordre n et $n \geq 150\alpha^3(G)$, alors G est pancyclique.

Le résultat suivant, dû aussi à Keevash et Sudakov dans [97], garantit l'existence des cycles de certaines longueurs.

Théorème 2.2.37. (*Keevash et Sudakov, [97]*)

Si G est un graphe tel que $\delta(G) \geq 300\alpha(G)$, alors G contient un cycle de longueur k pour tout $3 \leq k \leq \frac{\delta(G)}{81}$.

En 2012, Lee et Sudokov, dans [106], ont donné une autre condition pour laquelle un graphe satisfaisant la condition Chvátal-Erdős est pancyclique :

Théorème 2.2.38. *(Lee et Sudokov, 2012, [106])*

Il existe une constante c telle que pour tout entier positif k , tout graphe Hamiltonien d'ordre $n \geq ck^{7/3}$ avec $\alpha(G) \leq k$ est pancyclique.

Afin de prouver le théorème précédent, Lee et Sudokov, dans [106], ont répondu partiellement à la question de Keevash et Sudakov pour la condition $n \geq ck^{7/3}$, et ont combiné le résultat suivant avec les outils développés dans [97] qui était l'objectif principal de leur travail.

Théorème 2.2.39. *(Lee et Sudokov, 2012, [106])*

Il existe une constante c telle que pour tout entier positif k , tout graphe Hamiltonien d'ordre $n \geq ck^{7/3}$ avec $\alpha(G) \leq k$ contient un cycle de longueur $n - 1$.

Afin de prouver le théorème précédent, Lee et Sudokov ont utilisé le théorème suivant :

Théorème 2.2.40. *(Lee et Sudokov, 2012, [106])*

Il existe une constante c telle que pour tout entier positif k , tout graphe Hamiltonien d'ordre $n \geq ck^{7/3}$ avec $\alpha(G) \leq k$ contient un cycle de longueur $n - 1$. De plus, pour un ensemble fixé arbitraire de sommets W de taille $|W| \geq 20k^2$, il existe un tel cycle qui contient tous les sommets de W .

Dans [1], S. A. van Aardt et al., ont prouvé le résultats suivant pour les graphes faiblement pancycliques

Théorème 2.2.41. *(S. A. van Aardt et al., [1]).*

Si G est un graphe connexe et localement Hamiltonien d'ordre n avec $\Delta(G) \geq (n - 5)$, alors G est faiblement pancyclique.

2.2.5 Conditions locales

En 1971, Bondy dans [23], a montré le résultat très important suivant :

Théorème 2.2.42. (Bondy, [23])

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$ et de taille q . Si $q > \binom{n-1}{2} + 1$, alors G est pancyclique.

Bondy, dans [23], a prouvé à travers le théorème suivant que la condition $|E(G)| \geq \frac{n^2}{4}$ sur la taille d'un graphe G Hamiltonien est suffisante pour la pancyclicité.

Théorème 2.2.43. (Bondy, [23])

Soit G un Hamiltonien d'ordre n et que $|E(G)| \geq \frac{n^2}{4}$. Alors G est soit pancyclique, ou bien c'est le graphe biparti complet $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$.

Bondy, dans [23], a noté que la condition $|E| \geq \frac{n^2}{4}$ sur la taille d'un graphe G est satisfaite si $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$. Amar, dans [6], a réduit cette borne à $\delta(G) \geq \frac{(2n+1)}{5}$ si $n \geq 162$. Il semblait intéressant de voir comment les bornes peuvent être améliorées en présence de l'hypothèse supplémentaire que G est Hamiltonien. Pour le théorème précédent, cela a été fait et la réponse est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.2.44. (Bondy, [23])

Soit G un graphe Hamiltonien d'ordre n . Si $q \geq \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} + 11 \right\rfloor$, alors G est pancyclique ou biparti, et c'est la meilleure borne que possible.

Dans [23], Bondy a également conjecturé que

Conjecture 2.2.4. (Bondy, [23])

Tout graphe planaire 4-connexe G est pancyclique.

Kikust, dans [98], a considéré les graphes 5-réguliers localement connexes et a prouvé ce qui suit.

Théorème 2.2.45. (*Kikust, [98]*)

Si un graphe G est connexe, localement connexe et 5-régulier, alors G est pancyclique.

En 2003, Ryjáček dans [149] a proposé la conjecture suivante :

Conjecture 2.2.5. (*Ryjáček, [149]*).

Tout graphe connexe localement est faiblement pancyclique.

La conjecture de Ryjáček [149] semblait être très difficile à établir, il était donc naturel de considérer les deux conjectures plus faibles suivantes .

Conjecture 2.2.6. *Tout graphe localement semi-Hamiltonien (traçable) est faiblement pancyclique.*

Conjecture 2.2.7. *Tout graphe localement Hamiltonien est faiblement pancyclique.*

Dans [79] Gordon et al. ont conclu que la conjecture de Ryjáček [149] était vraie pour les graphes avec $\Delta(G) = 5$ et $\delta(G) \geq 3$. Récemment, S. A. van Aardt et al., dans [1], ont montré que la conjecture de Ryjáček [149] était vraie pour tous les graphes localement connexes de degré maximum au plus 5.

Théorème 2.2.46. (*S. A. van Aardt et al., [1]*).

Si G est un graphe localement connexe avec $\Delta(G) \leq 5$, alors G est faiblement pancyclique.

Dans [1], S. A. van Aardt et al., ont prouvé que

Théorème 2.2.47. (*S. A. van Aardt et al., [1]*).

Si G est un graphe connexe localement Hamiltonien d'ordre n avec $\Delta(G) \geq (n - 5)$, alors G est faiblement pancyclique.

M. Cream et al., dans [43], ont donné ce résultats suivant :

Théorème 2.2.48. (*M. Cream et al., [43]*).

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 4$. Si $\sigma_2(G) \geq n$, alors G est triangulé pancyclique, ou bien $G \cong K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$, ou bien encore $G \cong G_6$.

2.3 Graphes à cycle prolongeable

Hendry, dans [90], a étudié dans quelle mesure les conditions suffisantes impliquant qu'un graphe soit hamiltonien impliquent qu'il soit aussi à cycle prolongeable. Beaucoup de théorèmes et de conjectures sont énoncés dans ce sens.

Il est montré que si un cycle C non prolongeable dans un graphe satisfaisant la condition suffisante d'Ore, dans [135], pour un cycle Hamiltonien alors le sous-graphe induit par les sommets de C est soit un graphe complet, ou bien un graphe biparti complet régulier.

D'autres résultats sont également donnés concernant les problèmes extrêmes, la stabilité, les graphes avec sous-graphes induits interdits, les graphes carrés des graphes et les graphes triangulés.

Si on veut montrer qu'un graphe est Hamiltonien, une approche standard consiste à supposer que le graphe ne l'est pas, qu'un cycle C de longueur maximale est donné, puis à obtenir une contradiction en trouvant un cycle plus long \acute{C} .

Il peut arriver que le cycle le plus long \acute{C} contient tous les sommets du cycle d'origine C plus un sommet supplémentaire ($V(C) \subset V(\acute{C})$ et $|V(\acute{C})| = |V(C)| + 1$). Hendry, dans [90], a proposé d'étudier des conditions suffisantes pour que les cycles soient prolongés de cette manière simple.

Hondry, dans [89], a introduit le concept de cycles k -corde prolongeables comme suit :

Définition 2.3.1. (Hendry, [89])

- Pour chaque entier $k \geq 0$, un cycle C est k -corde prolongeable s'il est prolongeable en un cycle \acute{C} en utilisant au plus k cordes du cycle C .
- Un graphe G est k -corde prolongeable si chaque cycle non hamiltonien de G est k -corde prolongeable.

L'objectif de cette section est de présenter les résultats sur les cycles pleinement prolongeables. Nous classons ces résultats de manière analogue à ce qui a été fait dans les sections précédentes.

2.3.1 Conditions imposées sur les degrés

En 1980, Bondy dans [25], a prouvé le fameux résultat pour les graphes à cycle prolongeables suivant :

Théorème 2.3.1. (Bondy, 1980, [25])

Si un graphe G satisfait la condition d'Ore, alors étant donné tout cycle non Hamiltonien C , il existe un cycle \acute{C} tel que $V(C) \subset V(\acute{C})$ et $|V(\acute{C})| = |V(C)| + k$ où $k \in \{1, 2\}$.

Cela a conduit à introduire une nouvelle propriété qui plus tard serait définie par Hendry dans [90].

Dans [89] et [90], Hendry a introduit le concepte du graphe à cycle prolongeable en utilisant les conditions de degré de Dirac [45]. Dans [89], Hendry a montré que la condition de Dirac [45] assure que chaque cycle du graphe G peut-être prolongé à l'exception des cycles de certaines classes de graphes.

Hendry, dans [90], a prouvé que les conditions, de Dirac [45] et d'Ore [135], sont suffisantes, à quelques exceptions près, pour qu'un graphe soit à cycles prolongeables.

En 1995, Faudree et al., dans [59], ont considéré une forme plus restreinte de prolongement des cycles en imposant des exigences sur

le nombre d'arêtes du cycle d'origine pour qu'il soit prolongeable. Ils ont donné et prouvé ces résultats ci-dessous :

Théorème 2.3.2. (*Faudree et al., [59]*)

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$. Alors,

- *Si $\delta(G) > \frac{3n}{4} - 1$, alors G est 0-corde prolongeable ;*
- *Si $\delta(G) > \frac{5n}{9}$, alors G est 1-corde prolongeable ;*
- *Si $\delta(G) > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, alors G est 2-corde prolongeable.*

2.3.2 Graphes triangulés à cycles prolongeables

Hendry, dans [90], a conjecturé que tous les graphes triangulés Hamiltoniens sont à cycle prolongeables.

Conjecture 2.3.1. (*Hendry, [90]*)

Tout graphe triangulé Hamiltonien est à cycle prolongeables.

Cette conjecture de Hendry était l'issu des théorèmes suivants. B. Thomas, dans [163], a établi ses deux théorèmes suivants pour fournir la preuve de la propriété à cycle prolongeable dans les graphes triangulés inductifs sur la longueur du cycle. Ces preuves donnent un aperç des raisons pour lesquelles une preuve générale s'est révélée insaisissable. Son premier résultat était le suivant :

Théorème 2.3.3. (*Brent Thomas, [163]*)

Chaque 3-cycle dans un graphe Hamiltonien triangulé est prolongeable.

Théorème 2.3.4. (*Brent Thomas, [163]*)

Chaque 4-cycle dans un graphe Hamiltonien triangulé est prolongeable.

À partir des travaux de Hendry [90], la conjecture 2.3.1 a reçu une attention considérable. La conjecture de Hendry a été confirmée

pour un certain nombre de classes de graphes spéciales, notamment les graphes triangulés Hamiltoniens planaires [93], les graphes d'intervalles hamiltoniens [2], et [37], les graphes scindés hamiltoniens [2], etc....

Après plusieurs auteurs, dans une série d'articles, ont confirmés la conjecture de Hendry pour un certain nombre de classes de graphes, la conjecture est encore réfutée par Lafond et Seamone dans [101].

En 2002, Jiang dans [93], a vérifié la propriété de cycle prolongeable dans la classe de graphes triangulés planaires Hamiltoniens et a prouvé le résultat suivant :

Théorème 2.3.5. (*Jiang, 2002, [93]*)

Tout graphe triangulé planaire Hamiltonien est à cycle prolongeable.

En 2006 et en parallèle, Abueida et Sritharan [2] et Chen et al. [37] ont prouvé que les graphes d'intervalle Hamiltoniens sont également à cycle prolongeables

Théorème 2.3.6. (*Abueida et Sritharan, [2] et Chen et al., [37]*)

Tout graphe d'intervalle Hamiltonien est à cycle prolongeable.

Abueida et Sritharan ont de même prouvés, dans [2], que les graphes scindé hamiltoniens sont à cycle prolongeables.

Théorème 2.3.7. (*Abueida et Sritharan, [2]*)

Tout graphe scindé Hamiltonien est à cycle prolongeable.

Bender et al. [17] ont étudié les graphes triangulés et les graphes scindé. Leur étude a inspiré l'idée qu'une grande classe de graphes triangulés Hamiltoniens sont en fait à cycle prolongeables. Mais récemment, LaFond et Seamone dans [101] ont identifié des contre-exemples pour montrer que la conjecture de Hendry n'est pas en général vraie.

Etant donné que leurs contre-exemples ne sont pas des graphes fortement triangulés et qu'ils ne sont tous que 2-connexes, Lafond et Seamone ont posé les deux questions suivantes :

- Les graphes fortement triangulés Hamiltoniens sont-ils à cycle prolongeables ?
- Existe-t-il un entier k tel que tous les graphes triangulés Hamiltoniens k -connexes soient à cycle prolongeables ?

Plus tard, une conjecture plus forte que celle de Hendry a été proposée par Arangno et al. dans [10]. Beasley et Brown dans [15], ont introduit le concept plus général à cycle S -prolongeable pour $S = \{1, 2, \dots, n\}$ comme suit :

Définition 2.3.2. (*Beasley et Brown*)

- Soit G un graphe d'ordre n et $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Supposons C un cycle de longueur k dans G . Alors C est S -prolongeable s'il existe un $p \in S$ tel qu'il existe un cycle \acute{C} dans G où $|V(\acute{C})| = |V(C)| + p$, et $V(C) \subset V(\acute{C})$;
- Si cela est vrai pour tous les cycles non Hamiltoniens de G , le graphe G est dit à cycles S -prolongeable.

Par conséquent, un graphe est à cycle prolongeable si tout cycle non Hamiltonien C est $\{1\}$ -prolongeable.

En particulier, dans le cas des graphes triangulés, Arangno et al. dans [10], ont conjecturé que

Conjecture 2.3.2. (*Arangno et al., [10]*)

Si G est un graphe triangulé Hamiltonien, alors G est $\{1, 2\}$ -cycle prolongeable.

Le graphe illustré de la Figure 2.4 est fourni par Lafond et Seamone dans [101] comme graphe de base pour leur contre-exemple sur la conjecture de Hendry.

C'est le graphe où ils ont construis un exemple d'une sous-classe de graphes triangulés qui ne sont pas à cycle prolongeable.

Le contre-exemple s'appuie sur le graphe de base H illustré dans la Figure 2.4.

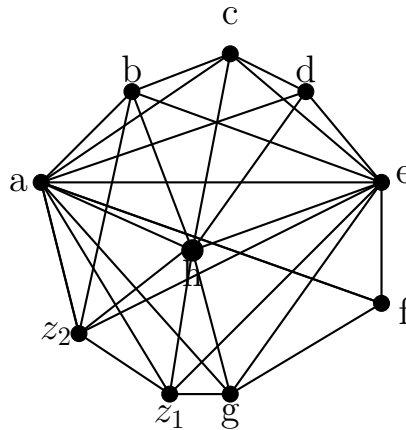


FIGURE 2.4 – Graphe H

Dans [10], Deborah C. Arangno, a donné le résultat ci-dessous pour les graphes triangulés prévus de sous-graphes induits F_1 et F_2 du poset illustrés dans la Figure 2.5 suivante :

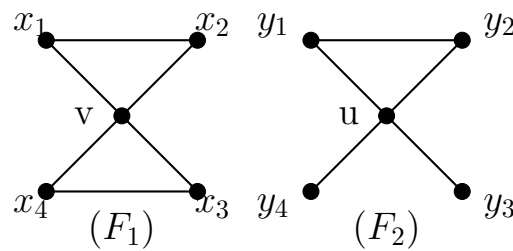
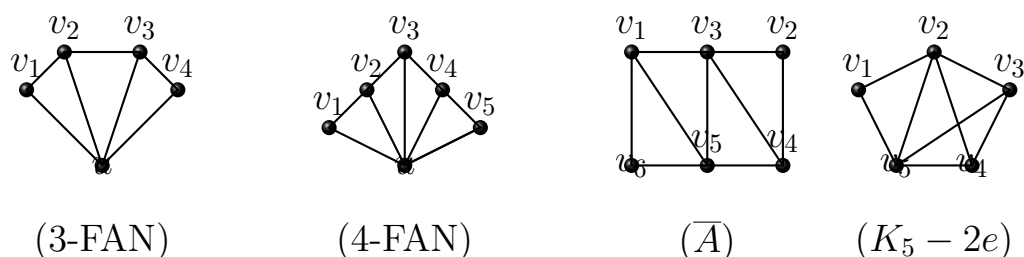


FIGURE 2.5 – Sous-graphes interdits F_1 et F_2

Théorème 2.3.8. (D. C. Arangno, [10])

Soit G un graphe triangulé Hamiltonien sans graphes induits F_1 et F_2 (voir le graphe illustré de la Figure 2.5). Si G admet un sommet simplicial x de voisins u et v tels que $N[u] \subset N[v]$, alors G est à cycle prolongeable.

G. Rong et al., dans [147], ont ajouté à la liste des graphes à cycle prolongeables deux classes supplémentaires, à savoir les graphes triangulés Hamiltoniens sans 4-FAN où chaque $K_5 - e$ induit a de vrais jumeaux, et les graphes triangulés Hamiltoniens sans $\{4-FAN, \bar{A}\}$.


 FIGURE 2.6 – Graphes 3-FAN, 4-FAN, \bar{A} et $K_5 - 2e$

La première contribution de G. Rong et al., dans [147], était le théorème suivant qui réfute directement la conjecture d'Arangno et fournit des réponses négatives aux questions 2.3.2.

Théorème 2.3.9. (G. Rong et al., [147])

Soit S un ensemble non vide d'entiers positifs, et soit t l'entier maximum dans S . Alors, pour tous les entiers $k > 0$ et $n > 14 + t + 2k$, il existe un graphe fortement cordal $(2 + k)$ -connexe Hamiltonien d'ordre n qui n'est pas à cycle S -prolongeable.

Le second résultat est le théorème suivant sur la première sous-classe de graphes triangulés hamiltoniens sans 4-FAN.

Théorème 2.3.10. (G. Rong and al., [147])

Les graphes triangulés Hamiltoniens sans 4-FAN où chaque $K_5 - 2e$ induit (s'il y en a) a des vrais jumeaux sont à cycle prolongeables.

Le théorème suivant confirme que les graphes triangulés hamiltoniens sont aussi à cycle prolongeable s'ils sont sans $\{4 - FAN, \bar{A}\}$.

Théorème 2.3.11. (G. Rong and al., [147])

Les graphes triangulés hamiltonien sans $\{4 - FAN, \bar{A}\}$ sont à cycle prolongeable.

Arangno dans [10] a vu, le défi pour voir quelles conditions qui se sont avérées suffisantes pour l'hamiltonicité pourrait également s'avérer suffisant pour les graphes à cycle prolongeable dans le cas particulier des graphes triangulés. Cela lui a permis de poser sa conjecture suivante :

Conjecture 2.3.3. (Arangno, 2014, [10])

Si G est un graphe triangulé 2-connexe qui satisfait la condition d'hamiltonicité de Fan, alors G est à cycle prolongeable.

2.3.3 Conditions imposées sur les degrés généralisés

En 1995, Asratian dans [11], a donné une condition suffisante pour qu'un graphe est à cycle prolongeable en se basant sur l'union des voisinages des sommets d'une chaîne P_3 . il a proposé son résultat comme suit :

Théorème 2.3.12. (Asratian, [11])

Tout graphe G vérifiant $|N_G(u) \cap N_G(v)| \geq |N_G(u) \setminus (N_G(v) \cup N_G(w))|$ pour toute chaîne induit $P_3 = uvw$ d'ordre 3 est à cycle pleinement prolongeable.

Notons que la condition $|N_G(u) \cap N_G(v)| \geq |N_G(u) \setminus (N_G(v) \cup N_G(w))|$ est équivalente à $|d_G(u) + d_G(v)| \geq |N_G(u) \cup N_G(v) \cup N_G(w)|$. Brause et al., dans [30] ont Également montré que

Théorème 2.3.13. (Brause et al., [30])

Si G est un graphe connexe localement connexe d'ordre $n \geq 3$ tel que :

- $|N_G(u) \cap N_G(v) \cap N_G(w)| \geq |N_G(u) \setminus (N_G[v] \cup N_G[w])|$ pour toute chaîne induite $P_3 = uvw$ d'ordre 3 dans G , et
- $|(N_G(v_2) \cap N_G(v_3) \cap N_G(v_4)) \cup (N_G(v_4) \cap N_G(v_5) \cap N_G(v_6))| \geq 1$ pour tout ensemble de sommets $U = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$
- avec $E(G[U]) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_3v_5\}$

, alors G est à cycle pleinement prolongeable ou bien $G \cong K_{\frac{n-1}{2}} + \overline{K}_{\frac{n+1}{2}}$

2.3.4 Conditions imposées sur les invariants

B. Randerath et al., dans [146], ont utilisé la fermeture pour donner la condition suivante d'un graphe à cycle pleinement prolongeable.

Théorème 2.3.14. *(B. Randerath et al., [146])*

Si $Cl_{\frac{3n}{2}-2}(G)$ est complet, alors G est à cycle pleinement prolongeable.

Ils ont encore prouvé que :

Théorème 2.3.15. *(B. Randerath et al., [146])*

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 8$. Si $2 \leq \delta(G) \leq \sqrt{2n}$ et

$$m(G) \geq \binom{n}{2} - \binom{\delta(G)}{2} - n - \delta(G) + 2$$

alors G est à cycle pleinement prolongeable.

Et encore, ils ont montré que :

Théorème 2.3.16. *(B. Randerath and al., [146])*

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 8$ et $\delta(G) \geq 4$. Alors G est à cycle pleinement prolongeable si

$$m(G) \geq \binom{n}{2} - n$$

David Brown, dans [9], a posé la question Peut-on étendre la conjecture de Hendry dans [90], pour savoir si la condition de Chvátal-Erdős est valable pour que les graphes triangulés sont à cycle prolongeables ? Arangno, dans [10], a examinée cette conjecture et a donnée son résultat suivant pour un graphe triangulé :

Théorème 2.3.17. *(D. C. Arangno, [10])*

Soit G un graphe triangulé d'ordre $n \geq 3$ satisfaisant la condition de Chvátal-Erdős, $\kappa(G) \geq \alpha(G)$. Alors G est à cycle prolongeable.

2.3.5 Conditions locales

Rappelons qu'un graphe localement connexe décrit la connexité du voisinage de n'importe quel sommet du graphe.

Un graphe localement connexe est plus susceptible d'avoir d'autres propriétés telles que l'hamiltonicité et à cycle prolongeable.

De plus, si le voisinage de chaque sommet satisfait la condition d'Ore, alors une sorte de comportement "local d'Ore" et on peut en dire autant.

Les théorèmes suivants nous permettent de comprendre comment la structure locale affecte les propriétés globales d'un graphe.

Nous introduisons de nouveaux résultats dans ce sens, et nous présentons des conditions sur le comportement local qui influe sur la propriété à cycle prolongeable dans un graphe.

Hendry, dans [89], a vérifié le résultat de Kikust dans [98] et il a proposé son théorème suivant :

Théorème 2.3.18. (*Hendry, [89]*)

Tout graphe G connexe localement connexe d'ordre $n \geq 3$ avec $\Delta(G) \leq 5$ et $\Delta(G) - \delta(G) \leq 1$ est à cycle pleinement prolongeable.

Gordon Orlovich Potts et Strusevich, dans [79], ont généralisé ce dernier résultat aux graphes G d'ordre $n \geq 3$, $\Delta(G) \leq 5$ et $\delta(G) \geq 3$ comme suit :

Théorème 2.3.19. (*Gordon et al., [79]*)

Si G est un graphe connexe localement connexe d'ordre $n \geq 3$. Si $\Delta(G) \leq 5$ et $\delta(G) \geq 3$, alors G est à cycle pleinement prolongeable.

Dans [1], S. A. van Aardt et al. ont montré de plus que

Théorème 2.3.20. (*S. A. van Aardt et al, [1]*)

Supposons que G soit un graphe connexe localement traçable avec $n \geq 3$ et $\Delta(G) \leq 5$. Alors G est à cycle pleinement prolongeable si et seulement si $G \notin \{M_3, M_4, M_5\}$.

S. A. van Aardt et al., dans [1], ont aussi montré le résultat suivant pour les graphes où $\Delta(G) \leq 6$ comme suit

Théorème 2.3.21. (*S. A. van Aardt et al, [1]*)

Soit G un graphe connexe localement hamiltonien avec $n \geq 3$ et $\Delta(G) \leq 6$. Alors G est à cycle pleinement prolongeable.

Chapitre 3

Hamiltonicité, pancyclicité et cycles prolongeables dans la classe des graphes sans griffe et dans des superclasses de graphes sans griffe

La classe des graphes sans griffe à été largement étudiée par plusieurs chercheurs et beaucoup de résultats de la théorie des graphes ont été obtenu pour cette classe.

En effet, des problèmes reconnus difficiles sont facilement résolus pour cette classe de graphes tels que le problème du stable maximum (le nombre de stabilité), la conjecture des graphes parfaits et le problème de coloration. Par ailleurs beaucoup de nouvelles conditions pour l'existence de cycles ont été améliorée.

Notre travail constitue un très large survey des plus importants résultats obtenus pour cette classe pour l'existence de cycles.

Seulement l'exclusion de la griffe constitue une condition forte, c'est pour cette raison qu'il est intéressant d'étudier des classes de graphes contenant la classe des graphes sans griffe et de généraliser des résultats prouvés pour les graphes sans griffe à ces superclasses.

Ces dernières années beaucoup de résultats dans ce contexte ont été établi. Nous présenterons aussi dans ce chapitre les résultats concr-

nant l'existence de cycles pour ces superclasses.

3.1 Conditions d'hamiltonicité des graphes sans griffe

Le problème d'existence du cycle Hamiltonien est difficile et il est classé

NP -complet même pour les graphes sans griffe.

Nous allons présenter les résultats obtenus dans ce domaine suivant le type de conditions. On citera les résultats sur les degrés, les degrés généralisés,....

3.1.1 Conditions sur les degrés

En 1985, Matthews et Summer dans [126], ont donné une borne inférieure de degré minimum $\delta(G)$ assurant l'hamiltonicité d'un graphe sans griffe et ont montré que :

Théorème 3.1.1. (*Matthews et Summer, [126]*)

Si G est un graphe 2-connexe sans griffe d'ordre n de degré minimum $\delta(G) \geq \frac{(n-2)}{3}$, alors G est Hamiltonien.

Dans le résultat qui suit, les bornes de degré, dûs à Dirac dans [45] et à Ore dans [135], sont améliorées en présence de quelques hypothèses supplémentaires. Liu et Wu, dans [121], ont utilisé la régularité comme suit :

Théorème 3.1.2. (*Liu and Wu, [121]*)

Si G est un graphe 2-connexe sans griffe et $\delta(G)$ -régulier où $\delta(G) \geq \frac{(n-1)}{4}$, alors G est Hamiltonien.

En 1992, M. Li dans [112], a essayé de fixer l'ordre du graphe en fonction de la régularité et le résultat était le suivant :

Théorème 3.1.3. (*M. Li, [112]*)

Tout graphe 2-connexe k -régulier sans griffe d'ordre au plus $5k$ ($k \geq 10$) est Hamiltonien.

De nombreux chercheurs ont prouvé des conditions suffisantes pour qu'un graphe sans griffe soit Hamiltonien en utilisant le degré minimal.

En 1991, Li a montré dans [110], le résultat suivant :

Théorème 3.1.4. (*M. Li, [110]*)

Tout graphe 3-connexe sans griffe d'ordre $n \leq 6\delta(G) - 11$ est Hamiltonien.

Dans [115], Li a amélioré le résultat précédent en réduisant la borne inférieure de l'ordre du graphe à $5\delta(G) - 5$ comme suit :

Théorème 3.1.5. (*M. Li, [115]*) *Tout graphe 3-connexe sans griffe G d'ordre $n \leq 5\delta(G) - 5$ est Hamiltonien.*

Pour les graphes réguliers, Liu et Li dans [122], ont également montré le théorème suivant en minorant l'ordre n d'un graphe :

Théorème 3.1.6. (*Liu et Li, [122]*)

Tout graphe 3-connexe, k -régulier sans griffe G d'ordre au moins $(5k - 5)$ est Hamiltonien.

Li, dans [115], a donné la condition suffisante de l'hamiltonicité des graphes non réguliers et il a prouvé que

Théorème 3.1.7. (*M.C. Li, [115]*)

Tout graphe 3-connexe sans griffe G d'ordre $n \geq 5\delta(G) - 5$ est hamiltonien.

En parallèle, E. Flandrin et al. [66] ont amélioré le résultat de Li [115] en se basant sur le résultat de Chvátal et Erös, dans [41] de 1972 et ont montré que

Théorème 3.1.8. (*E. Flandrin et al., [66]*)

Tout graphe 3-connexe G , sans griffe et de degré minimum $\delta(G) \geq 6$ d'ordre $n \geq 5\delta(G) - 10$ est Hamiltonien.

En 1996, Li dans [113], a étendu les deux théorèmes précédents. Plus précisément, il a pris les graphes réguliers et il a obtenu le résultat suivant :

Théorème 3.1.9. (*M. Li, [113]*)

Tout graphe 3-connexe k -régulier sans griffe d'ordre $n \leq 7k - 19$ est Hamiltonien.

En parallèle, M. Li dans [113], a proposé la conjecture suivante :

Conjecture 3.1.1. (*M. Li, (1996)*)

Tout graphe 3-connexe k -régulier sans griffe d'ordre $n \leq 10k - 1$ est Hamiltonien.

Le résultat suivant a été obtenu par Li dans [113], il généralise le théorème 3.1.6 dû à Liu et Li dans [122] pour les graphes k -régulier 3-connexe :

Théorème 3.1.10. (*Li, [113]*)

Tout graphe k -régulier 3-connexe sans griffe G d'ordre $n \geq 7k - 19$ est Hamiltonien.

Le théorème de Li [115] a été également amélioré par Li et al. dans [107] à travers le résultat suivant :

Théorème 3.1.11. (*Li et al., [107]*)

Tout graphe 3-connexe sans griffe d'ordre $n \geq 6\delta(G) - 7$ est Hamiltonien.

Les propriétés de base suivantes de la fermeture $cl(G)$ ont été démontrée par Ryjáček dans [150].

Théorème 3.1.12. (*Ryjáček, [150]*).

Soit G un graphe sans griffe de clôture $cl(G)$. Alors,

- il existe un graphe sans triangle H tel que $cl(G) \cong L(H)$;*
- les deux graphes G et $cl(G)$ ont la même circonférence.*

Pour les graphes simples sans griffe et 3-connexes, les résultats suivants ont été prouvés par Ryjáček dans [150] en prouvant que :

Théorème 3.1.13. (*Ryjáček, [150]*)

Si G est un graphe simple sans griffe 3-connexes d'ordre n et si $\delta(G) \geq \frac{(n+5)}{5}$, alors G est Hamiltonien.

En 1998, Kuipers et Veldman dans [100], ont encore amélioré les deux théorèmes 3.1.11 et 3.1.11 précédents en prouvant que :

Théorème 3.1.14. (*Kuipers et Veldman, [100]*)

Tout graphe 3-connexes sans griffe G d'ordre n suffisamment grand de degré minimum $\delta(G) \geq \frac{(n+29)}{8}$ est Hamiltonien.

Encore, Kuipers et Veldman dans [100], ont ainsi confirmé la conjecture 3.1.1 donnée en dans [110] et ils ont, en outre, donné la conjecture suivante qui a été confirmée par suite par Lai et al. en 2005 dans [103].

Conjecture 3.1.2. (*Kuipers et Veldman*)

Tout graphe 3-connexes sans griffe G d'ordre n suffisamment grand et de degré minimum $\delta(G) \geq \frac{(n+6)}{10}$ est Hamiltonien.

En 2001, dans [62], Favaron et Fraïsse, en utilisant la clôture de Ryjáček [150], ont encore amélioré les résultats dans [[112], [115], [116]] et ont prouvé le résultat suivant.

Théorème 3.1.15. (*Favaron et Fraïsse, [62]*)

Si G est un graphe 3-connexes sans griffe d'ordre n avec $n \leq 10\delta - 37$, alors G est Hamiltonien.

En 2002, Li, Lu et Liu dans [107], ont donné le résultat qui améliore celui de Ryjáček 3.1.13 comme suit :

Théorème 3.1.16. (*Li, Lu et Liu, [107]*).

Soit G un graphe simple d'ordre n sans griffe et 3-connexes. Si $\delta(G) \geq \frac{(n+7)}{6}$, alors G est Hamiltonien.

Dans [103], Li et al. ont prouvé le résultat suivant qui généralise les théorèmes 3.1.14 et 3.1.15.

Théorème 3.1.17. (*Li, Shao et Zhan, [103]*)

Si G est un graphe simple sans griffe 3-connexe avec $n \geq 196$, et si $\delta(G) \geq \frac{n+5}{10}$, alors soit G est Hamiltonien, ou bien $\delta(G) = \frac{n+5}{10}$ et $cl(G)$ est le graphe adjoint de G obtenu à partir du graphe de Petersen P_{10} en ajoutant $\frac{n-15}{10}$ arêtes pendantes à chaque sommet de P_{10} .

Dans un graphe 2-connexe et sans $K_{1,4}$, Markus dans [124] a prouvé que la condition de degré minimum suivante est suffisante pour l'hamiltonicité.

Théorème 3.1.18. (*Markus, [124]*)

Soit G un graphe 2-connexe sans $K_{1,4}$ avec $\delta(G) \geq \frac{(n+2)}{3}$. Alors G est Hamiltonien.

Lai, Shao et Zhan [105] ont prouvé que la conjecture de Kuipers et Veldman [100] est vraie.

Théorème 3.1.19. (*Lai, Shao et Zhan, [105]*)

Si G est un graphe simple sans griffe 3-connexe d'ordre n suffisamment grand et si $\delta(G) \geq \frac{n+29}{8}$, alors G est Hamiltonien.

Plus tard, Li dans [117] a prouvé que

Théorème 3.1.20. (*M. Li, [117]*)

Tout graphe 3-connexe sans griffe G d'ordre n contient un cycle de longueur au moins $\min\{6\delta(G) - 15, n\}$.

Plus récemment, dans [95], Kaiser et Vrána ont proposé et montré que

Théorème 3.1.21. (*Kaiser et Vrána, [95]*)

Tout graphe G 5-connexe sans griffe et de degré minimum $\delta(G) \geq 6$ est Hamiltonien,

Cela représente actuellement la meilleure amélioration de l'affirmation de la conjecture de Matthews-Sumner [125].

3.1.2 Conditions imposées sur les degrés généralisés

En 1979, Gould dans [80], a imposé une condition sur le diamètre pour les graphes sans griffe pour assurer l'hamiltonicité. Il a prouvé que

Théorème 3.1.22. (R.J. Gould, 1979, [80])

Si G est un graphe 2-connexe sans griffe d'un diamètre au plus égal à 2 ($\text{Diam}(G) \leq 2$), alors G est Hamiltonien.

Faudree et al., dans [55], ont donné une condition de semi-hamiltonicité des graphes sans griffe.

Théorème 3.1.23. (R.J. Faudree et al., 1988, [55])

Si G est un graphe 2-connexe sans griffe d'ordre n tel que $NC \geq \frac{n-2}{2}$, alors G est semi-Hamiltonien.

Faudree et al., dans [55], ont également montré la condition d'hamiltonicité pour graphes sans griffe suivante :

Théorème 3.1.24. (R.J. Faudree et al., 1988, [55])

Soit G un graphe 2-connexe sans griffe d'ordre n . Si

$$d_G(u) + d_G(v) + d_G(w) \geq n - 2$$

pour tout ensemble stable $\{u, v, w\}$, alors G est Hamiltonien.

Faudree et al., dans [55], ont aussi énoncé et prouvé la condition d'hamiltonicité suivante pour les graphes sans griffe.

Théorème 3.1.25. (R.J. Faudree et al., 1988, [55])

Si G est un graphe 2-connexe sans griffe d'ordre $n \geq 14$ tel que $NC \geq \frac{2n-3}{3}$, alors G est Hamiltonien.

Faudree et al., dans [55], ont par suite utilisé le théorème 3.1.26 pour montrer que

Théorème 3.1.26. (*R.J. Faudree et al., 1988, [55]*)

Si G est un graphe 2-connexe sans griffe d'ordre $n \geq 14$ tel que $NC \geq \frac{2n-5}{3}$, alors G est semi-Hamiltonien.

En 1988, Zhang dans [175] a énoncé le résultat suivant qui a été obtenu indépendamment et en parallèle par Broersma dans [34].

Théorème 3.1.27. (*Zhang, [175] et Broersma, [34]*)

Pour un graphe G 2-connexe sans griffe d'ordre n . Si $\sigma_3 \geq n - 2$, alors G est Hamiltonien.

Un résultat encore plus général et plus fort a été obtenu par Zhang [175] qui a prouvé que

Théorème 3.1.28. (*C. Q. Zhang, [175]*)

Si G est un graphe k -connexe sans griffe avec $\sigma_{k+1}(G) \geq n - k$ (pour $k \geq 2$), alors G est Hamiltonien.

Pour les graphes k -connexe avec k assez larges, Shen et al. dans [156] a prouvé le résultat suivant :

Théorème 3.1.29. (*Shen et al. dans [156]*)

Soit G un graphe k -connexe ($k \geq 2$) et l'ensemble des sommets centres des griffe induites dans G est indépendant (stable). Si $\sigma_{k+1}(G) \geq n + k$, alors G est Hamiltonien.

En parallèle, Broersma et al., [32], ont prouvé leur condition de degré minimum pour l'hamiltonicité suivante :

Théorème 3.1.30. (*Broersma et al., [32]*)

Soit G un graphe 2-connexe sans griffe d'ordre n . G est un graphe Hamiltonien si chaque deux sommets $u, v \in V(G)$ vérifiant $d_G(u, v) = 2$ satisfont l'une des deux conditions suivante :

1. $\min\{d_G(u), d_G(v)\} \geq \frac{n-2}{3}$;
2. $|N_G(u) \cap N_G(v)| \geq 2$.

3.1.3 Conditions imposées sur les invariants

Soit Z_i le graphe obtenu en identifiant un sommet de K_3 et un sommet terminal de P_{i+1} . Une autre direction de recherche des graphes Hamiltoniens était d'identifier les sous-graphes interdits.

En 1974, Goodman and Hedetniemi dans [78], ont prouvé le théorème suivant qui était l'une des nombreuses restrictions de paires de sous-graphes en interdisant $\{K_{1,3}, Z_2\}$ (Voir le poset illustré dans la Figure 3.1).

Théorème 3.1.31. (Goodman and Hedetniemi, [78])

Si G est 2-connexe sans $\{K_{1,3}, Z_2\}$, alors G est Hamiltonien.

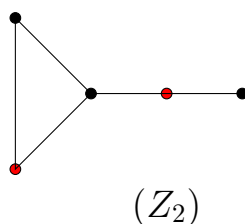


FIGURE 3.1 – Graphe Z_2

Le théorème bien connu de Chvátal et Erdős stipule que si G satisfait $\alpha(G) \leq \kappa(G)$, alors G est Hamiltonien (ou, de manière équivalente, tout non Hamiltonien graphe de connectivité k contient un ensemble stable de taille $k + 1$).

Flandrin et Li dans [70] ont prouvé que dans un graphe sans griffe 3-connexe, les hypothèses peuvent être affaiblies.

Théorème 3.1.32. (Flandrin et Li, [70])

Si G est un graphes k -connexe ($k \geq 3$) sans griffe et $\alpha(G) \leq 2k$, alors G est Hamiltonien.

Ainouche et al. ont montré dans [4] le résultat suivant qui est analogue à celui du théorème 3.1.32 dû à Flandrin et Li pour les graphes sans $K_{1,3}$ mais Ainouche et al. ont exigé une borne supérieure au nombre d'indépendance du graphe carré G^2 .

Théorème 3.1.33. (*Ainouche et al., [4]*)

Tout graphe k -connexe sans griffe ($k \geq 2$) G est Hamiltonien si $\alpha(G^2) \leq k$.

3.1.4 Conditions Locales

En 1974, Chartrand et Pippert dans [36], ont donné la condition de connexité locale suivante :

Théorème 3.1.34. (*Chartrand et Pippert, [36]*)

Soit G un graphe d'ordre n de degré minimum $\delta(G) \geq \frac{2}{3}(n-1)$. Alors G est localement connexe.

Oberly et Sumner, dans [134], ont prouvé le résultat qui suit pour les graphes connexes et localement connexes sans griffe :

Théorème 3.1.35. (*Oberly et Sumner, [134]*)

Tout graphe 2-connexe localement connexe sans griffe est Hamiltonien.

Par suite, Arangno dans [10], a établi une condition suffisante pour l'hamiltonicité des graphes 2-connexes sans griffe avec un degré minimum donné. Son travail était basé sur les deux théorèmes 3.1.35 et 3.1.34 dûs à Oberly et Sumner dans [134] respectivement. Arangno dans [10], a conclut que

Théorème 3.1.36. (*D. C. Arangno, [10]*)

Tout graphe 2-connexe sans griffe d'ordre $n \geq 4$ de degré minimum $\delta(G) \geq \frac{2}{3}(n-1)$ est Hamiltonien.

La conjecture suivante, dû à Matthews et Sumner [125], était l'origine de nombreuses recherches sur l'hamiltonicité dans la classe de graphes sans griffe. Elle est basée sur la connectivité $\kappa(G)$.

Conjecture 3.1.3. (*Matthews et Sumner*)

Tout graphe 4-connexe sans griffe est Hamiltonien.

Liu et al. dans [120], ont montré le résultat suivant :

Théorème 3.1.37. (*Liu et al., [120]*)

Pour $k \geq 5$, tout graphe 2-connexe k -régulier d'ordre au plus $n \leq 3k+3$ est Hamiltonien.

Pour les graphes sans griffe, un plus petit degré de régularité est suffisant pour affirmer qu'un graphe sans griffe est Hamiltonien, comme le prouve le résultat suivant dû à Liu et Wu dans [121].

Théorème 3.1.38. (*Liu et Wu, [121]*)

Tout graphe 2-connexe k -régulier sans griffe d'ordre $n \leq 4k + 1$ est Hamiltonien.

Li et Liu dans [115], ont par suite montré un résultat qui améliore le résultat 3.1.38 précédent. Ils ont prouvé que

Théorème 3.1.39. (*Li and Liu, [115]*)

Tout graphe 3-connexe k -régulier sans griffe d'ordre $n \leq 5k - 5$ est Hamiltonien.

Le résultat suivant de Plummer [139] affirme que la conjecture de Matthews et Samner 3.1.3 est vraie dans le cas particulier suivant :

Théorème 3.1.40. (*M. D. Plummer, [139]*)

Si G est un graphe 4-connexe 4-régulier et sans griffe contenant un K_4 , alors G est Hamiltonien.

Le résultat d'hamiltonicité suivant a été prouvé par Broersma et Veldman dans [31]

Théorème 3.1.41. (*Broersma et Veldman, [31]*)

Si G est un graphe 2-connexe sans $\{K_{1,3}, P_6\}$, alors G est Hamiltonien.

Asratien, dans [11], a montré son résultat suivant pour les graphes sans griffe localement connexe

Théorème 3.1.42. (*Asratien, [11]*)

Soit G un graphe localement connexe sans griffe d'ordre $n \geq 4$. Alors G est connexe-Hamiltonien si et seulement si G est 3-connexe.

En 2016, Chen et al. dans [38], ont amélioré le théorème 3.1.42 précédent [11] en généralisant le résultat à la classe de graphes sans griffe presque localement connexes.

Théorème 3.1.43. (*X. Chen et al., [38]*)

Soit G un graphe sans griffe presque localement connexe d'ordre $n \geq 4$. Alors G est connexe-Hamiltonien si et seulement si G est 3-connexe.

Une conjecture dû à Thomassen, dans [164], stipule que

Conjecture 3.1.4. (*Thomassen*)

Tout graphe adjoint 4-connexe $L(G)$ d'un graphe G est Hamiltonien.

En parallèle, Balakrishnan et Paulraja dans [13], ont prouvé que tout graphe triangulé connexe est localement connexe comme suit :

Théorème 3.1.44. (*Balakrishnan et Paulraja, [13]*)

Tout graphe triangulé 2-connexe sans griffe est localement connexe.

Ryjáček dans [150] a montré que les deux conjectures 3.1.3 et 3.1.4 sont équivalentes et a prouvé que :

Théorème 3.1.45. (*Ryjáček, [150]*)

Tout graphe 7-connexe et sans griffe est Hamiltonien.

À partir des deux théorèmes 3.1.35 et 3.1.44 ci-dessus, Arangno dans [10], a conclut que

Théorème 3.1.46. (*Arangno, [10]*)

Tout graphe triangulé 2-connexe sans griffe est Hamiltonien.

Pour généraliser la condition d'Ore pour l'hamiltonicité, Fan dans [50], a prouvé en 1984 que

Théorème 3.1.47. (*G. H. Fan, [51]*)

Pour un graphe G d'ordre n , si pour chaque deux sommets u et v de distance $d_G(u, v) = 2$ le degré maximum de u ou bien de v est au moins $\frac{n}{2}$, alors le graphe contient un cycle Hamiltonien.

En observant qu'un graphe d'intervalle est un graphe triangulé, Balakrishnan et Paulraja dans [13] ont donné le corollaire suivant qui résulte de résultat 3.1.46 dû à Arangno [10] :

Corollaire 3.1.1. (*Balakrishnan et Paulraja, [13]*)

Tout graphe d'intervalle connexe sans griffe est Hamiltonien.

3.2 Conditions de pancyclicité des graphes sans griffe

3.2.1 Conditions imposées sur les degrés

Flandrin et al., dans [63], ont étudié la pancyclicité dans la classe de graphes sans griffe et en 1990 ils ont démontré le résultat suivant :

Théorème 3.2.1. (*Flandrin et al., [63]*)

Soit G un graphe 2-connexe sans griffe d'ordre $n \geq 35$. Si $\delta(G) \geq \frac{(n-2)}{3}$, alors G est pancyclique.

Trommel et al., dans [165], ont donné les deux résultats suivants qui dépendent du degré minimum $\delta(G)$ et qui affirment l'existence des cycles de certaines longueurs dans un graphe sans griffe :

Théorème 3.2.2. (*H. Trommel et al., [165]*)

Soit G un graphe sans griffe. Si $\delta(G) > \max\{2, \sqrt{2n+1/4} - 3/2\}$, alors G contient des cycles de toute longueur l avec $3 \leq l \leq \delta(G) + 1$.

Également, ils ont encore montré que :

Théorème 3.2.3. (*H. Trommel et al., [165]*)

Si G est un graphe sans griffe d'ordre $n \geq 5$ avec $\delta(G) > \sqrt{3n+1} - 2$ et la circonférence $c(G) \geq \delta(G) + 3$, alors G contient des cycles de toute longueur l avec $\delta(G) + 2 \leq l \leq c(G)$.

Le théorème suivant découle immédiatement des deux théorèmes 3.2.2 et 3.2.3 précédents,

Théorème 3.2.4. (*H. Trommel et al., [165]*)

Soit G un graphe sans griffe d'ordre $n \geq 5$. Si $\delta(G) > \sqrt{3n+1} - 2$, alors G est sous-pancyclique.

Les deux résultats suivants sont des conséquences immédiate du théorème 3.2.4 dû à Trommel et al. dans [165]. En ajoutant la condition d'hamiltonicité, Trommel et al. ont prouvé le résultats ci-dessous :

Corollaire 3.2.1. (*H. Trommel et al., [165]*)

Soit G un graphe hamiltonien sans griffe d'ordre $n \geq 5$. Si $\delta(G) > \sqrt{3n+1} - 2$, alors G est pancyclique.

En supposant que le graphe est de plus 2-connexe , ils ont prouvé ce que suit :

Corollaire 3.2.2. (*H. Trommel et al., [165]*)

Soit G un graphe sans griffe 2-connexe d'ordre $n \geq 5$. Si $\delta(G) > \sqrt{3n+1} - 2$, alors G contient des cycles de toute longueur l avec $3 \leq l \leq \min\{2\delta(G) + 4, n\}$.

Trommel et al., dans [165], ont également donné le autre résultat important suivant :

Théorème 3.2.5. (*H. Trommel et al., [165]*)

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 450$. Si $\sigma_2(G) > \sqrt{2n + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$, alors le graphe adjoint $L(G)$ est sous-pancvclique.

3.2.2 Conditions Locales

Matthews et Sumner, dans [125], ont étudié le graphe carré d'un graphe connexe sans griffe et ils ont prouvé que :

Théorème 3.2.6. (*M. Matthews et D. Sumner, [125]*)

Si G est un graphe connexe sans griffe, alors son graphe carré G^2 est sommet-pancyclique.

En 1989, Zhang dans [176], a montré par suite que

Théorème 3.2.7. (Zhang, [176])

Si un graphe G est quasi localement connexe sans griffe d'ordre $n \geq 3$, alors chaque sommet de G est contenu dans un cycle de longueur l avec $3 \leq l \leq n$ (i.e. G sommet-pancyclique).

Il a également montré les deux résultats qui suivent :

Théorème 3.2.8. (Zhang, [176])

Soit G un graphe connexe localement connexe sans griffe d'ordre $n \geq 3$. Si le sommet v de G est contenu dans un cycle de longueur k , alors v est contenu dans un cycle de longueur l , pour tout $k + 1 \leq l \leq n$

Et de plus, il a montré que

Théorème 3.2.9. (Zhang, [176])

Si G est un graphe connexe localement connexe sans griffe d'ordre $n \geq 3$, alors G contient des cycles de toutes les longueurs possibles.

En 1993, Bedrossian et al. dans [16], ont élargi le théorème 3.1.47 de Fan dans [51] et ont prouvé le résultat suivant :

Théorème 3.2.10. (Bedrossian et al., [16])

Un graphe 2-connexe sans griffe est soit pancyclique, ou bien un cycle.

Faudree et al., dans [53], ont amélioré le théorème 3.1.41 dû à Broersma et Veldman dans [31]. Ils ont montré que dans les mêmes conditions si un graphe est d'ordre $n \geq 10$, alors il est pancyclique.

Théorème 3.2.11. (Faudree et al., [53])

Si G est un graphe 2-connexe et sans $\{K_{1,3}, P_6\}$ d'ordre $n \geq 10$, alors G est pancyclique.

Le théorème suivant dû à Lai et al. qui est prouvé dans [102] est l'une des extensions importantes d'un théorème de Zhang prouvé dans [176].

Théorème 3.2.12. (Lai et al., [102])

Tout graphe triangulairement connexe sans griffe G de taille $|E(G)| \geq 3$ est sommet-pancyclique.

Un autre résultat dû à Qu et Lin qui est prouvé dans [143] et est une autre extension importante du même théorème de Zhang prouvé dans [176].

Théorème 3.2.13. (*X. Qu et H. Lin, [143]*).

Tout graphe triangulairement connexe sans griffe et sans sommet isolé est également quasi localement connexe sans griffe.

3.2.3 Conditions imposées sur les degrés généralisés

Faudree et al., dans [55], ont également donné une condition sur la pancyclicité des graphes sans griffe.

Théorème 3.2.14. (*R.J. Faudree et al., 1988, [55]*)

Si G est un graphe 2-connexe sans griffe d'ordre $n \geq 14$ tel que $NC \geq \frac{2n-2}{3}$, alors G est pancyclique.

Li, dans [111], a donné une condition sur la somme des degrés pour les graphes sans griffe d'ordre suffisamment grand sous laquelle la hamiltonicité implique la pancyclicité.

Théorème 3.2.15. (*Mingchu Li, 1991, [111]*)

Si G est un graphe Hamiltonien sans griffe d'ordre $n \geq 100$ et que $\sigma_3(G) \geq \frac{(n-2)}{3}$, alors G est pancyclique.

3.2.4 Conditions locales

Ce résultat sur l'existence d'un couplage parfait dans un graphe sans griffe a été cité dans [167] par Vergnas et par Oberly et Sumner dans [134].

Théorème 3.2.16. (*L. Vergnas, [167] et Oberly et Sumner, [134]*)

Tout graphe connexe sans $K_{1,4}$ d'ordre pair admet un couplage parfait.

En 1990, Hondrey dans [90], a observé que Clark dans [42] prouvait en réalité le résultat plus fort suivant :

Théorème 3.2.17. (Clark, 1981, [42])

Si G est un graphe connexe localement connexe sans griffe d'ordre $n \geq 3$, alors G est à cycle pleinement prolongeable.

Ramos et al., dans [144], ont prouvé un résultat sur les graphes \tilde{A} cycle prolongeable ne contenant pas les graphes de type $(K_1 \cup K_1) + (K_1 \cup K_n)$ comme des sous-graphes induits.

Théorème 3.2.18. (Ramos et al., 2012, [144])

Tout graphe 2-connexions sans sous-graphes induits $\{K_{1,3}, P_4\}$ est à cycle pleinement prolongeable à l'exception de $(K_1 \cup K_1) + (K_1 \cup K_n)$ pour tout entier $n \geq 1$.

Arangno dans [10], a étudié les graphes à cycle prolongeables en particulier la classe des graphes triangulés sans griffe. Elle a prouvé, en utilisant le théorème 3.1.1 dû à Balakrishnan et Paulraja dans [13], le résultat qui suit :

Théorème 3.2.19. (D. C. Arangno, [10])

Tout graphe triangulé 2-connexe sans griffe est à cycle prolongeable.

Le corollaire suivant découle immédiatement de son résultat 3.2.19 précédent :

Corollaire 3.2.3. (D. C. Arangno, [10])

Tout graphe d'intervalle connexe sans griffe est à cycle prolongeable.

Le corollaire suivant est également immédiat car Golumbic, dans [76], a montré que les graphes d'intervalles unitaires sont des graphes d'intervalles où tous les intervalles ont la même longueur 1 sont précisément les graphes d'intervalles sans griffe.

Corollaire 3.2.4. (D. C. Arangno, [10])

Tout graphe d'intervalle unitaire 2-connexe sans griffe est à cycle prolongeable.

Brause et al., dans [30] ont montré le résultat suivant :

Théorème 3.2.20. (Brause et al., [30])

Si G est un graphe connexe localement connexe sans $(K_1 + (K_1 \cup K_2))$ d'ordre $n \geq 3$, alors

- (i) *G est faiblement pancyclique ;*
- (ii) *et G est à cycle pleinement prolongeable si et seulement si G est Hamiltonien.*

Les même auteurs ont prouvé les trois résultats suivants pour les graphes sans $K_{1,1,3}$ (Voir le graphe illustré dans la Figure 3.2 :

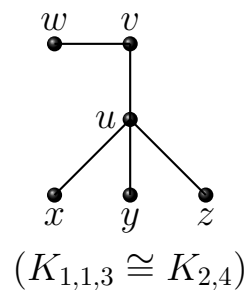


FIGURE 3.2 – Graphe $K_{1,1,3}$

Théorème 3.2.21. (Brause et al., [30])

Si G est un graphe connexe localement connexe sans $(k_1 + (k_1 \cup k_2))$, alors G est à cycle pleinement prolongeable si et seulement si $2\delta(G) \geq n$.

Également,

Théorème 3.2.22. (Brause et al., [30])

Si G est connexe localement connexe sans $\{K_{1,1,3}, k_1 + p_4\}$ ou bien $\{K_{1,1,3}, k_1 + (k_1 \cup P_3)\}$, alors G à cycle pleinement prolongeable.

Théorème 3.2.23. (Brause et al., [30])

Si G est connexe localement connexe sans $\{K_1 + P_4, K_{1,4}, K_2 + (K_1 \cup K_2)\}$ et est sans $K_{1,1,3}$, alors G est à cycle pleinement prolongeable.

En fin, En 2017 Brause et al. dans [30], ont prouvé le résultat suivant pour les graphes à cycle pleinement prolongeable.

Théorème 3.2.24. (*Brause et al., [30]*)

Si G est un graphe connexe localement connexe et sans griffe d'ordre $n \geq 3$, alors G est à cycle pleinement prolongeable.

3.3 Superclasses de graphes sans griffe

Un nouveau domaine de recherche qui a émergé est celui de l'étude des graphes qui comprennent l'étoile $K_{1,3}$ comme sous graphe induit. Il s'agit, des superclasses des graphes quasi sans griffe (Quasi claw-free graphs (QCF)) définie et étudiée par Ainouche dans [3], de la classe des graphes presque sans griffe (Almost claw-Free graphs (ACF)) introduite par Ryjáček dans [148] et de la classe de graphes partiellement sans griffe (Partially claw-Free graphs (PCF)) concept définie par Abbas et Benmeziane dans [19].

3.3.1 Graphes quasi sans griffe

Le concept de graphes quasi sans griffe à été introduit par Ainouche, dans [3], et il a généralisé une variété de résultats, en particulier, les résultats sur les graphes sans griffe au graphes quasi sans griffe. Ainouche, dans [4], a étendu le théorème 2.1.31 dû à Chvátal and Erdős dans [41] à la classe des graphes quasi sans griffe. Notons qu'un graphe quasi sans griffe n'est pas nécessairement sans $K_{1,3}$. Ainouche, dans [4], a défini cette classe de graphes comme suit :

Définition 3.3.1. (*Ainouche*)

Un graphe G est quasi sans griffe s'il satisfait la propriété : si $d_G(x, y) = 2$, alors il existe $u \in N_G(x) \cap N_G(y)$ tel que $N[u] \subseteq N[x] \cup N[y]$.

Les graphes illustrés dans la Figure 3.3 sont quasi sans griffe et non quasi sans griffe respectivement.

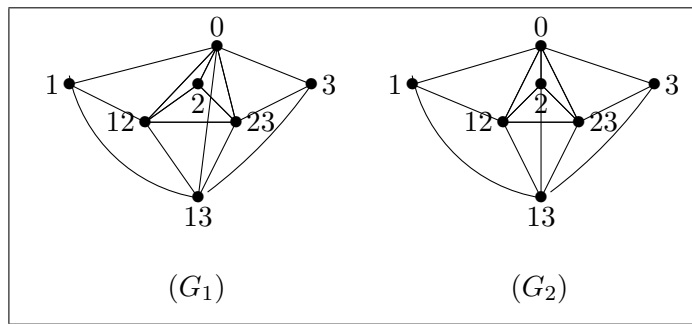


FIGURE 3.3 – Graphes G_1 quasi sans griffe et G_2 non quasi sans griffe

Parmi les premiers résultats de Ainouche dans [3] est le résultat sur l'existence d'un couplage parfait :

Théorème 3.3.1. (Ainouche, [3])

Tout graphe d'ordre pair connexe quasi sans griffe possède un couplage parfait.

3.3.2 Hamiltonicité

Le résultat suivant sur l'hamiltonicité du carré d'un graphe k -connexe, généralise le théorème 2.1.31 de Chvátal and Erdős dans [41].

Théorème 3.3.2. (Ainouche, [3])

Pour $k \geq 2$, un graphe k -connexe quasi sans griffe G est Hamiltonien si $\alpha(G^2) \leq k$.

En 2003, Li [118] a donné le résultat plus fort suivant

Théorème 3.3.3. [118]

Soit G un graphe 3-connexe quasi sans griffe d'ordre n . Si $\delta(G) \geq \frac{(n+5)}{5}$, alors G est Hamiltonien.

Vumar, en 2006 dans [168], a donné une condition pour que la circonférence d'un graphe 3-connexe quasi sans griffe soit Hamiltonien c'est le théorème suivant :

Théorème 3.3.4. (Vumar, [168])

La circonférence d'un graphe 3-connexe quasi sans griffe G d'ordre n est au moins $\min\{4\delta - 2, n\}$ et G est Hamiltonien si $n \leq 5\delta(G) - 5$.

Pour les graphes 4-connexe, Lai et al. [104] ont donné le résultat suivant :

Théorème 3.3.5. (H. J. Lai et al., [104])

Tout graphe adjoint 4-connexe d'un graphe quasi sans griffe est connexe Hamiltonien.

3.3.3 Pancyclicité

Ainouche [3] a démontré le résultat important sur les graphes localement connexe quasi sans griffe qui suit :

Théorème 3.3.6. (Ainouche, [3])

Tout graphe connexe localement connexe quasi sans griffe d'ordre $n \geq 3$ est pancyclique.

Ainouche, dans [3], a prouvé la condition suffisante pour la pancyclicité des graphes quasi sans griffe à travers le théorème suivant :

Théorème 3.3.7. (Ainouche, [3])

Si $|N_G(u) \cap N_G(v)| \geq 2$ pour chaque deux sommets $u, v \in V(G)$ de distance $d_G(u, v) = 2$ et $\{w \in N_G(u) \cap N_G(v) / d_G(w) = 2\} = \emptyset$, alors G est un graphe pancyclique ou bien un cycle.

Dans [3], Ainouche a également confirmé que :

Théorème 3.3.8. (Ainouche, [3])

Tout graphe localement connexe et quasi sans griffe d'ordre $n \geq 3$ est pancyclique.

Rappelons que Z_k est le graphe obtenu en reliant un sommet du triangle K_3 à un sommet d'extrémité d'un chaîne P_{k+1} de longueur k . B le graphe obtenu en reliant deux sommets de deux triangle.

Dans [3], Ainouche a montré deux autres résultats pour les graphes 2-connexes sans Z_2 et sans B .

Théorème 3.3.9. (*Ainouche, [3]*)

Soit G un graphe 2-connexe quasi sans griffe d'ordre n et sans Z_2 . Alors G est un graphe pancyclique ou bien un cycle.

Également, Ainouche a prouvé le résultat suivant :

Théorème 3.3.10. (*Ainouche, [3]*)

Soit G un graphe 2-connexe quasi sans griffe d'ordre n et sans $\{Z_3, B\}$. Alors G est un graphe pancyclique ou bien un cycle.

Ainouche, [3], a donné une conjecture sur la pancyclicité d'un graphe localement connexe quasi sans griffe qui a été montré plus tard par Zhan dans [172] dans le théorème qui suit :

Théorème 3.3.11. (*Zhan, [172]*)

Tout graphe connexe localement connexe quasi sans griffe d'au moins trois sommets est sommet-pancyclique.

Motivés par le travail d'Ainouche dans [3], Qu et Wang, dans [142], ont prouvé les deux résultats qui suivent et qui donnent tous les deux une réponse positive à la conjecture d'Ainouche.

Théorème 3.3.12. (*E. Qu et J. Wang, [142]*)

Tout graphe quasi localement connexe et quasi sans griffe d'au moins trois sommets est pancyclique.

Également,

Théorème 3.3.13. (*E. Qu et J. Wang, [142]*)

Tout graphe presque localement connexe quasi sans griffe d'au moins trois sommets est sommet-pancyclique.

3.3.4 Graphes presque sans griffe

Ryjáčèk a introduit la classe des graphes presque sans griffe, dans [148], comme suit :

Définition 3.3.2. *Un graphe G est presque sans griffe si pour tous les sommets $v \in A$, l'ensemble des centres des étoiles de G , $\langle N_G(v) \rangle$ est 2-dominé et A est un ensemble stable (Voir le graphe illustré dans la Figure 3.4).*

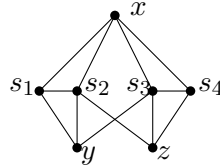


FIGURE 3.4 – Graphe presque sans griffe

Le résultat suivant dû à Ryjáček dans [148], est une extension du théorème 3.2.16 sur l'hamiltonicité de la classe de graphes sans griffe à la superclasse de graphes presque sans griffe qui a été prouvé par L. Vergnas [167] et Sumner [161].

Théorème 3.3.14. *(Z. Ryjáček, [148])*

Tout graphe connexe presque sans griffe d'ordre pair a un couplage parfait.

Broersma et al., dans [33], ont prouvé le résultat qui suit :

Théorème 3.3.15. *(Broersma, Ryjáček et Schiermeyer, [33])*

Tout graphe 2-connexe presque sans griffe G d'ordre n vérifiant $\delta(G) \geq \frac{(n-2)}{3}$ est Hamiltonien.

Le second résultat de Broersma et al., dans [33], est le suivant :

Théorème 3.3.16. *(Broersma, Ryjáček et Schiermeyer, [33])*

Tout graphe 2-connexe presque sans griffe G d'ordre n vérifiant $\sigma_3(G) \geq n$ est Hamiltonien.

Plus tard, dans [114], Li a donné le résultat plus fort suivant :

Théorème 3.3.17. *(M. C. Li, [114])*

Tout graphe G 3-connexe presque sans griffe d'ordre n contient un cycle de longueur au moins $\min\{4\delta(G), n\}$.

Dans [114] Li a confirmé le résultat suivant conjecturé par Broersma, Ryjáček et Schiermeyer dans [33]

Théorème 3.3.18. (*M. C. Li, [114]*)

Tout graphe G 3-connexe presque sans griffe d'ordre n tel que $n \leq 5\delta(G) - 5$ est hamiltonien.

L'une des extensions importantes d'un théorème de Zhang dans [176], est le théorème suivant dû à Teng et al. qui l'ont prouvé en 2002 dans [162].

Théorème 3.3.19. (*Teng et al., 2002*)

Tout graphe G connexe localement connexe presque sans griffe d'ordre $n \geq 3$ est pancyclique.

En 1994, Ryjáček, [148], a donné son résultat suivant où il affirme qu'un graphe est à cycle pleinement prolongeable s'il est connexe presque sans griffe et sans $K_{1,4}$.

Théorème 3.3.20. (*Z. Ryjáček, [148]*)

Tout graphe connexe localement connexe sans $K_{1,4}$ presque sans griffe d'ordre $n \geq 3$ est à cycle pleinement prolongeable.

Hendry, dans [90], a amélioré ce résultat et a montré son théorème pour les graphes à cycle pleinement prolongement suivant :

Théorème 3.3.21. (*Hendry, 1990, [90]*)

Pour un graphe triangulé 2-connexe G d'ordre $n \geq 3$ satisfaisant $2(G) \geq n - 1$. Soit G est à cycle pleinement prolongeable, ou bien $n \geq 5$ est impair et $G \cong K_{\frac{(n-1)}{2}} + \overline{K_{\frac{(n-1)}{2}}}$

Zhan, dans [173], a montré le résultat fort pour qu'un graphe presque sans griffe soit à cycle pleinement prolongeable à condition qu'il ne contient pas de sous-graphes induit isomorphe à $K_{1,4}$.

Théorème 3.3.22. (*M. Zhan, 2010, [173]*)

Tout graphe triangulairement connexe sans $K_{1,4}$ presque sans griffe d'ordre $n \geq 3$ est à cycle pleinement prolongeable.

Par suite, en 2016, M. Zhan and S. Zhan dans [174] ont prouvé un autre résultat en imposant une condition sur le nombre de clique comme suit :

Théorème 3.3.23. (M. Zhan and S. Zhan, 2016, [174])

Tout graphe triangulairement connexe sans $K_{1,4}$ presque sans griffe d'ordre $n \geq 3$ est à cycle pleinement prolongeable si le nombre de cliques du sous-graphe induit par l'ensemble A des centres des étoiles de G est au plus égal à 2 (i.e. $\omega(\langle A \rangle) \leq 2$).

3.3.5 Graphes partiellement sans griffe

La plus large superclasse de graphes sans griffe est la classe des graphes partiellement sans griffe introduite par Abbas et Benmeziane dans [19]. Nous donnons, dans ce qui suit, les principaux résultats obtenus jusqu'à présent sur les graphes partiellement sans griffe.

Définition 3.3.3. *Un graphe $G = (V, E)$ est dit partiellement sans griffe si pour tout sommet $v \in A$, l'ensemble des centres des étoiles de G , il existe deux sommets $x, y \in V \setminus A$ tels que $N_G(v) \subseteq N[x] \cup N[y]$. On dit également que $\langle N_G(v) \rangle$ est 2-dominé dans $V \setminus A$ (Voir le graphe illustré dans la Figure 3.5).*

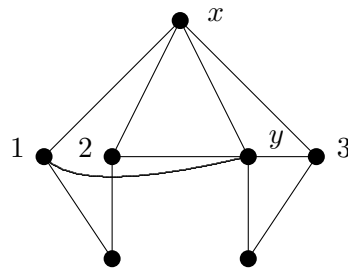


FIGURE 3.5 – Graphe partiellement sans griffe

Matthews et Sumner dans [125] ont montré que

Théorème 3.3.24. (*Matthews et Sumner, [125]*)

Si un graphe G non complet de connectivité $\kappa(G)$, alors
 $\tau(G) \leq \frac{\kappa(G)}{2}$.

Ils ont donné un autre résultat meilleur qui améliore le précédent 3.3.24 sur les graphes sans griffe.

Théorème 3.3.25. (*Matthews et Sumner, [125]*)

Si G est un graphe non complet sans griffe, alors $\tau(G) = \frac{\kappa(G)}{2}$.

Abbas et Benmeziane dans [19] ont étendu et amélioré le résultat de Matthews et Sumner, [125], pour la superclasse de graphes partiellement sans griffe comme suit :

Théorème 3.3.26. (*M. Abbas et Z. Benmeziane, [19]*)

Si G est graphe non complet partiellement sans griffe, alors
 $\tau(G) \geq \min\{1, \frac{\kappa(G)}{2}\}$.

Encore, Abbas et Benmeziane dans [19], ont montré le résultat suivant analogue au résultat montré indépendamment par Flandrin et Li [71] et Broersma et al [35] pour les graphes sans griffe :

Théorème 3.3.27. (*M. Abbas et Z. Benmeziane, [19]*)

Tout graphe 2-connexe partiellement sans griffe G d'ordre n tel que $\sigma_3(G) \geq n$ est Hamiltonien.

Graphes partiellement sans griffe à cycles pleinement prolongeables

Introduction

Hendry a prouvé dans [90] le résultat important que si G est un graphe connexe localement connexe sans griffe d'ordre au moins 3, alors G est un graphe à cycle pleinement prolongeable.

Plus tard, Ryjáček, dans [148], a introduit la première superclasse de graphes sans griffe qui englobe les graphes presque sans griffe et vérifie la propriété que, pour tout sommet $v \in V$ du graphe G , le sous-graphe induit $\langle N_G(v) \rangle$ est 2-dominé et l'ensemble A , des centres des étoiles de G , est un stable (ensemble indépendant).

En 2010, M. Zhan dans [173], a prouvé que tout graphe triangulairement connexe presque sans griffe est à cycle pleinement prolongeable s'il est sans sous-graphe induit isomorphe à l'étoile $K_{1,4}$.

Une seconde superclasse de graphes sans griffe, encore plus large que celle des graphes presque sans griffe, a été étudiée par Abbas et Benmeziane dans [19], elle comporte les graphes contenant la griffe $K_{1,3}$ et vérifiant que pour tout centre d'une griffe $v \in V$ le sous-graphe induit $\langle N_G(v) \rangle$ est 2-dominé dans $V \setminus A$.

Abbas et Benmeziane dans [19] ont prouvé les deux résultats suivants sur les graphes 2-connexes et partiellement sans griffe.

Théorème 4.0.1. (M. Abbas and Z. Benmeziane, [19])

Si G est un graphe partiellement sans griffe 2-connexe avec $\delta(G) \geq \frac{(n-2)}{3}$, alors G est Hamiltonien.

Les mêmes auteurs ont également prouvé que

Théorème 4.0.2. (M. Abbas and Z. Benmeziane, [19])

Si G est un graphe partiellement sans griffe 2-connexe avec $\sigma_3(G) \geq n$, alors G est Hamiltonien.

Nous soulignons qu'il n'y a pas beaucoup de résultats qui ont été atteints ou prouvés dans pour cette dernière classe de graphes.

4.1 Résultat préliminaire

Dans la suite, on donne une caractérisation des graphes partiellement sans griffe en proposant le résultat suivant. Cette proposition est l'une des outils utilisés dans la preuve du résultat principal du théorème ci-dessus :

Proposition 4.1.1. (A. Sahraoui et Z. Benmeziane, 2023, [151])

Soit G un graphe partiellement sans griffe, $v \in A$ ensembles des centres des étoiles de G et $x, y \in V \setminus A$ tel que $N_G(v) \subset N[x] \cup N[y]$. Alors $x, y \in [(N_1(v) \cup N_2(v)) \setminus A]$.

Preuve:

Soit G un graphe partiellement sans griffe, $v \in A$ un centre des étoile de G et $x, y \in V - A$ tel que $N_G(v) \in N[x] \subset N[y]$. L'ensemble

$$\{\{v\}, N_1(v), N_2(v), \dots, N_{e(v)}(v)\}$$

est une partition de l'ensemble de sommets V . Sans perte de généralité, par absurde supposons que $x \in N_k(v)$ avec $k \geq 3$. Donc,

$$\begin{cases} N_G(x) \subset N_{k-1}(v) \cup N_k(v) \cup N_{k+1}(v) \\ \text{et} \\ N[x] \subset N_{k-1}(v) \cup N_k(v) \cup N_{k+1}(v) \end{cases} \quad (\text{pour tout } k \geq 3)$$

Comme,

$$\begin{cases} N_G(v) \cap N_{k-1}(v) = \emptyset \\ N_G(v) \cap N_k(v) = \emptyset \\ N_G(v) \cap N_{k+1}(v) = \emptyset \end{cases} \quad (\text{pour tout } k \geq 3)$$

Alors $N_G(v) \not\subset N[x]$. De même, $N_G(v) \not\subset N[y]$. D'où, $N_G(v) \not\subset N[x] \cup N[y]$, une contradiction. \square

4.2 Résultat principal

On propose le résultat suivant qui peut être considéré comme le premier résultat concernant les cycles prolongeables dans les graphes partiellement sans griffe :

Théorème 4.2.1. (*A. Sahraoui et Z. Benmeziane, 2023, [151]*)

Tout graphe triangulairement connexe, partiellement sans étoiles et sans $\{K_{1,4}, K_4\}$ est un graphe à cycle pleinement prolongeable si le sous-graphe $\langle A \rangle$, induit par l'ensemble des centres des étoiles A , est sans P_4 .

Preuve du théorème 4.2.1:

De G triangulairement connexe tout sommet du graphe G est sur un triangle. Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que pour tout cycle C de longueur $r \leq |V(G)| - 1$, il existe un cycle C' de longueur $r + 1$ tel que $V(C) \subset V(C')$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe un cycle C de longueur $r \leq |V(G)| - 1$ non prolongeable. Une orientation du cycle C du

graphe G est définie. Pour tout sommet $u \in V(C)$, on désigne par u^+ et u^- le sommet successeur et le sommet prédécesseur du sommet u sur C , respectivement. De même, $u^{++} = (u^+)^+$ et $u^{+++} = (u^{++})^+$ (respectivement, $u^{--} = (u^-)^-$ et $u^{---} = (u^{--})^-$). Pour deux sommets $u, v \in V(G)$, $C[u, v]$ et $\overleftarrow{C}[u, v]$ désignent les deux (u, v) -chaînes dans le même sens et dans le sens opposé par rapport à l'orientation du cycle C respectivement. $C[u, u]$ et $\overleftarrow{C}[u, u]$ désignent le sommet u .

Dans les sous-graphes induits par les étoiles $K_{1,r}$ pour $r \geq 3$ le centre de l'étoile est toujours cité le premier de la liste des sommets. Rappelons que A est l'ensemble de tous les centres des étoiles de G . Soit le cycle $C = v_1v_2 \dots v_rv_1$, et l'ensemble

$$\mathfrak{B}(C) = \{\mathcal{B}; \text{ tel que } \mathcal{B} \text{ est un triangle et } E(\mathcal{B}) \cap E(C) \neq \emptyset\}$$

Clairement

$$E(C) \subset \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathfrak{B}(C)} E(\mathcal{B})$$

Si un triangle $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}(C)$ est tel que $|V(C) \cap V(\mathcal{B})| = 2$, alors le sous-graphe induit par l'ensemble des arêtes $E(C) \cup E(\mathcal{B}) - (E(C) \cap E(\mathcal{B}))$ prolonge le cycle C . Donc, on suppose que pour tout $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}(C)$, $V(\mathcal{B}) \subseteq V(C)$.

Considérons l'arête $e \in E(G)$ tel que e est incidente à un seul sommet du cycle C et \mathcal{B}_e est le triangle tel que $e \in \mathcal{B}_e$. Clairement, $\mathcal{B}_e \notin \mathfrak{B}(C)$. De G triangulairement connexe, il existe une séquence de triangles Z_0, Z_1, \dots, Z_k telle que $Z_0 = \mathcal{B}_e$ et $Z_k \in \mathfrak{B}(C)$. C , e , et \mathcal{B}_e (Consulter le posé illustré dans la figure 4.6 suivante) sont choisis de telle manière que parmi tous les cycles d'ensemble de sommets $V(C)$, le nombre k de triangles dans cette séquence est le plus petit possible. Par conséquent, de la définition de l'arête e , $k \geq 1$.

On a aussi $|V(Z_0) \cap V(C)| = 2$ et $V(Z_i) \subseteq V(C)$ pour tout $i \geq 1$. Posons $Z_0 = \langle uv_iv_ju \rangle$ et $Z_1 = \langle v_iv_jv_hv_i \rangle$ tel que $v_h \in C[v_j^+, v_i^-]$.

Le cycle C , l'arête e et le triangle \mathcal{B}_e sont choisis de telle manière

que $|\{v_i^+v_i^-, v_j^+v_j^-\} \cap E(G)|$ est aussi grande que possible.

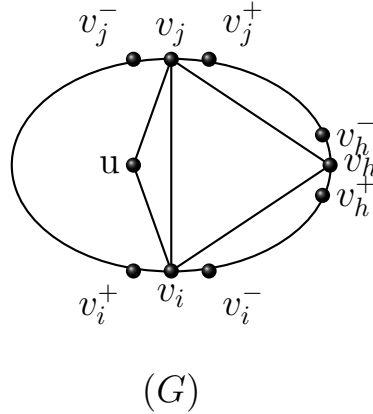


FIGURE 4.1 – Cycle C

■

La preuve est basée sur les huit lemmes suivants. Le premier lemme est la première conséquence entre les sommets de deux triangles Z_0 et Z_1 avec le nombre k des triangles de la séquence.

Lemme 4.2.1. (i) $v_i, v_j \in A$, $v_i^+ \notin N_1(v_j^+)$ et $v_i^- \notin N_1(v_j^-)$;

(ii) Pour $k \geq 2$,

- $v_h^\circ \notin N_1(v_l^\circ)$ avec $l \in \{i, j\}$ et $\circ \in \{-, +\}$;
- Si $v_i^+ \in N_1(v_i^-)$, alors $v_i \notin N_1(v_h^+) \cup N_1(v_h^-)$;
- Si $v_h \notin N_1(v_i^+) \cup N_1(v_i^-)$, alors $v_h^+ \notin N_1(v_h^-)$;
- Si $v_h \notin A$, alors $v_h \notin N_1(v_i^+) \cup N_1(v_j^-)$.

Preuve:

(i) $\cdot 1 \leq |\{v_hv_i^-, v_hv_i^+, v_i^-v_i^+\} \cap E(G)| \leq 2$ sinon, soit $\langle v_i, v_i^-, v_i^+, u, v_h \rangle \cong K_{1,4}$ ou bien $\langle v_h, v_i^-, v_i, v_i^+ \rangle \cong K_4$, une contradiction.

• Si $v_i^+ \in N_1(v_j^+)$, alors le cycle

$$C' = v_j u \overleftarrow{C} [v_i, v_j^+] C [v_i^+, v_j]$$

prolonge le cycle C , contradiction. De même, $v_i^- \notin N_1(v_j^-)$.

(ii) Pour $k \geq 2$.

- Si $v_h^- \in N_1(v_i^-)$, alors v_i et v_h seront adjacents dans le cycle

$$C' = v_i C[v_h, v_i^-] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_i]$$

D'où, $P' = Z_0 Z_1$, avec $Z_1 \in \mathfrak{B}(C')$, est une chaîne de triangles et $k = 1$, une contradiction.

De même, $v_h^+ \notin N_1(v_l^+)$ et $v_h^- \notin N_1(v_l^-)$ pour $l \in \{i, j\}$.

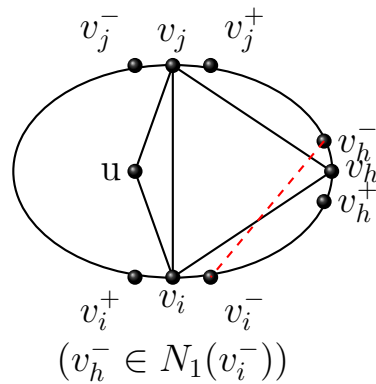


FIGURE 4.2 - $C + v_i^- v_h^-$

- Pour $v_i^+ \in N_1(v_i^-)$ et $v_i \in N_1(v_h^-)$, v_i et v_h seront adjacents dans le cycle $C' = v_i C[v_h, v_i^-] C[v_i^+, v_h^-] v_i$ et $P' = Z_0 Z_1$ est une chaîne de triangles et $k = 1$, contradiction. De même, $v_i \notin N_1(v_h^+)$.

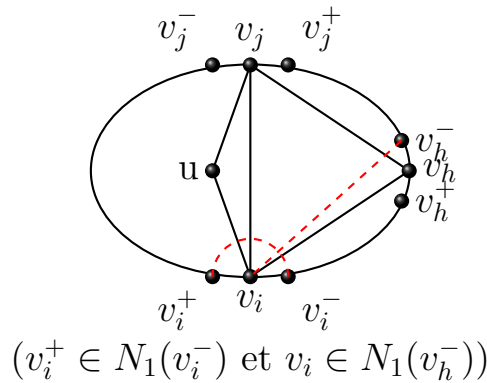


FIGURE 4.3 - $C + v_i^- v_i^+ + v_i v_h^-$

- Il suffit de montrer que si $v_h^- \in N_1(v_h^+)$, alors

$v_h \notin N_1(v_i^+) \cup N_1(v_i^-)$. Donc, pour $v_h \in N_1(v_i^+)$, v_i et v_h seront adjacents dans le cycle

$$C' = v_h C[v_i^+, v_h^-] C[v_h^+, v_i] v_h$$

et $P' = Z_0 Z_1$ est une chaîne de triangles et $k = 1$, contradiction. De même, $v_h \notin N_1(v_i^-)$.

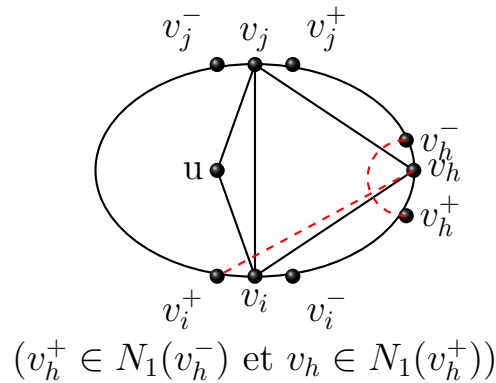


FIGURE 4.4 – $C + v_h^- v_h^+ + v_h v_h^+$

- Si $v_j^- \in N_1(v_h)$, alors $v_i^+ \neq v_j^-$ et $\langle v_h, v_h^-, v_j^-, v_i \rangle \cong K_{1,3}$ donc $v_h \in A$ de $v_h^- \notin N_1(v_i)$ sinon $\langle v_i, v_i^+, v_i^-, v_h^-, u \rangle \cong K_{1,4}$ car $v_h^- \notin N_1(u)$ autrement $v_i^+ \notin N_1(v_h^-)$. Soit le cycle

$$C' = C[v_j, v_h^-] C[v_i^+, v_j^-] C[v_h, v_i] u v_j$$

et $P' = Z'_0 Z'_1$, avec $Z'_0 = \langle u, v_h^-, v_i, u \rangle$ et

$Z'_1 = \langle v_i, v_h^-, v_h, v_i \rangle \in \mathfrak{B}(C)$. Donc P' est une chaîne de triangles et $k = 1$, contradiction. De même pour $v_i^+ \in N_1(v_h)$, $\langle v_h, v_h^+, v_i^+, v_j \rangle \cong K_{1,3}$ et $v_h \in A$ de $\langle v_j, v_j^+, v_j^-, v_h^+, u \rangle \cong K_{1,4}$ si $v_h^+ \in N_1(v_j)$.

□

Par le lemme 4.2.2 suivant, on confirme les résultats suivants :

Lemme 4.2.2. *Pour $d \in N_G(v_j) \cap N_G(v_j^+)$,*

(i) $d \in V(C)$ et $d \notin N_1(u)$;

(ii) Si $w \in [V(C) \cap N_1(u) \cap N_1(v_j^+)] - \{v_i, v_j, v_h, N_1(v_l^{--}), N_1(v_l^{++})\}$ avec $l \in \{i, j\}$, alors $u \notin N_1(w^{--}) \cup N_1(w^{++})$;

(iii) $v_j^- \in N_1(d)$. Donc, $d \neq v_h$;

(iv) Si $k \geq 2$, alors $v_h \notin N_1(d)$ et $v_h \notin N_1(v_j^-) \cup N_1(v_j^+)$.

Preuve:

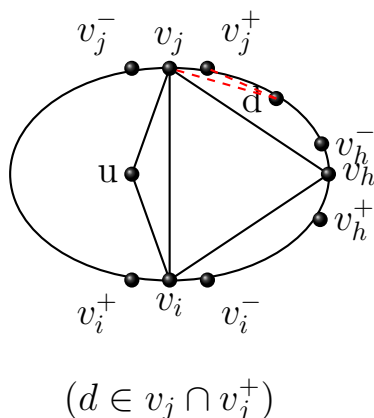


FIGURE 4.5 – C

(i) Par l'absurde,

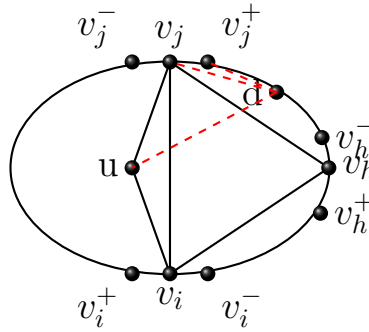
- Si $d \notin V(C)$, alors $C' = v_j d C[v_j^+, v_j]$ prolonge le cycle C , contradiction.
- Si $d \in N_1(u)$, alors $d \notin \{v_i^-, v_i^+, v_j^-, v_j^+\}$. $v_j^+ \notin N_1(d^+)$ sinon

$$C' = v_j u \overleftarrow{C}[d, v_j^+] C[d^+, v_j]$$

prolonge le cycle C et $\langle d, d^-, d^+, u, v_j^+ \rangle \cong K_{1,4}$ de $v_j^+ \notin N_1(d^-)$ sinon d'une part, $\langle d, d^-, d^+, u \rangle \cong K_{1,3}$ de $d^+ \notin N_1(d^-)$ dans le cas contraire

$$C' = v_j u d C[v_j^+, d^-] C[d^+, v_j]$$

prolonge le cycle C et d'autre part, d'après la proposition 4.1.1, $d \notin A$. Sans perte de généralité, supposons $d \in C[v_j^{++}, v_h^-]$.



$$(d \in N_1(v_j) \cap N_1(v_j^+) \cap N_1(u))$$

 FIGURE 4.6 – C où $d \in N_1(v_j) \cap N_1(v_j^+) \cap N_1(u)$

* $v_j^- \notin N_1(d^-)$ sinon

$$C' = v_j u C[d, v_j^-] \overleftarrow{C}[d^-, v_j]$$

prolonge le cycle C .

* Nous avons $d^+ \notin N_1(v_j^{++}) \cup N_1(d^{--})$ autrement

$$\begin{cases} C' = v_j u d v_j^+ \overleftarrow{C}[d^-, v_j^{++}] C[d^+, v_j] \\ \text{ou } C' = v_j u d d^- C[v_j^+, d^{--}] C[d^+, v_j] \text{ si } d^+ \in N_1(v_j^{++}) \cup N_1(d^{--}) \end{cases}$$

prolonge le cycle C .

* Alors $v_h \notin N_1(d^-) \cap N_1(v_j^+)$ sinon

· Pour $v_j^+ = d^-$, $v_h \notin N_1(d)$ et $v_h \in A$ de

$$C' = v_j u C[d, v_h^-] v_j^+ C[v_h, v_j]$$

prolonge le cycle C si $v_j^+ \in N_1(v_h^-)$ et $\langle v_i, v_i^-, v_i^+, u, v_h^- \rangle \cong K_{1,4}$ si $v_h^- \in N_1(v_i)$ de :

$$\begin{cases} C' = v_j u v_i \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j^+] C[v_h, v_i^-] C[v_i^+, v_j] \\ \text{ou } C' = v_j u \overleftarrow{C}[v_i, v_h] C[v_j^+, v_h^-] C[v_i^+, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C si $v_i^+ \in N_1(v_i^-) \cup N_1(v_h^-)$ et $\langle v_i, v_i^-, v_i^+, u, v_h \rangle \cong K_{1,4}$ si $v_h^- \in N_1(v_i^-)$ de $v_h^+ \notin N_1(v_i^+)$

sinon

$$C' = v_j u v_i v_h C[v_j^+, v_h^-] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h^+] C[v_i^+, v_j]$$

prolonge le cycle C .

- Pour $v_j^+ \neq d^-$ et $v_h \in A$ de

$$C' = v_j u C[d, v_h^-] \overleftarrow{C}[d^-, v_j^+] C[v_h, v_j]$$

prolonge le cycle C si $d^- \in N_1(v_h^-)$ et

$$\begin{cases} \langle v_j, v_j^-, v_j^+, u, d^- \rangle \cong K_{1,4} \\ \text{ou } \langle v_h, v_h^-, v_j^+, v_i \rangle \cong K_{1,3} \end{cases}$$

si $v_j \notin N_1(d^-) \cap N_1(v_h^-)$.

- * $d^{++} \notin N_1(d^-) \cup N_1(v_j^+)$ sinon $d^{++} \notin N_1(d) \cup N_1(v_j)$ et $\langle v_j, v_j^-, v_j^+, u, v_h \rangle \cong K_{1,4}$ de

- Si $v_j^+ \in N_1(v_h)$, alors $d^{++} \in N_1(v_h) - \{v_h^-\}$ autrement

$$C' = v_j u C[d, d^{++}] \overleftarrow{C}[d^-, v_j^+] C[v_h, v_j]$$

prolonge le cycle C et $v_j^+ \in A$. Donc, $v_h \in A$ car d'abord,

$v_h^- \notin N_1(v_j)$ sinon $v_h^- \notin N_1(v_i)$ et $\langle v_h, v_h^+, v_j^+, v_i \rangle \cong K_{1,3}$.

Ensuite, $d^{++} \notin N_1(v_h^+)$ sinon $\langle d^{++}, d^+, d^-, v_j, v_h^+ \rangle \cong K_{1,4}$

de $\begin{cases} \langle v_j, v_j^-, v_j^+, u, d^+ \rangle \cong K_{1,4} \\ \text{ou } \langle d, d^+, d^-, u, v_j^+ \rangle \cong K_{1,4} \end{cases}$

si $v_j \in N_1(d^+) \cup N_1(d^-)$ respectivement car

$$C' = v_j u d d^+ \overleftarrow{C}[v_j^-, d^{++}] \overleftarrow{C}[d^-, v_j]$$

prolonge le cycle C ou $\langle v_j^+, v_j^-, v_h, d \rangle \cong K_{1,3}$ si

$v_j^- \in N_1(d^+) \cup N_1(v_j^+)$ respectivement.

- Si $v_j^+ \in N_1(v_j^-)$, alors $d^{++} \neq v_h^-$ et $v_i^+ \neq v_j^-$ sinon

$$\begin{cases} C' = v_j u C[d, d^{++}] \overleftarrow{C}[d^-, v_j^+] \overleftarrow{C}[v_j^-, v_h] v_j \\ \text{ou } C' = v_j u \overleftarrow{C}[v_i, v_j^+] v_j^- v_j \end{cases}$$

prolonge le cycle C . D'où, $\langle d^{++}, d^+, d^-, d^{+++} \rangle \cong K_{1,3}$ de

$$\begin{cases} C' = v_j u d C[v_j^+, d^-] d^{++} d^+ C[d^{+++}, v_j] \\ \text{ou } C' = v_j u C[d, d^{++}] C[v_j^+, d^-] C[d^{+++}, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C si $d^{+++} \in N_1(d^+) \cup N_1(d^-)$.
Donc, $d^{++} \notin N_1(d)$ et $\langle v_j^+, v_j^-, d, d^{+++} \rangle \cong K_{1,3}$ de
 $\langle d^{++}, d^-, d^+, v_j^-, d^{+++} \rangle \cong K_{1,4}$ si $d^{++} \in N_1(v_j^-)$ de

$$\begin{cases} C' = v_j u C[d, v_j^-] \overleftarrow{C}[d^-, v_j] \\ \text{ou } C' = v_j u d d^+ \overleftarrow{C}[v_i^-, d^{+++}] \overleftarrow{C}[d^-, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C si $v_j^- \in N_1(d^-) \cup N_1(d^+)$ et
 $\langle v_j^-, v_j^+, v_j^-, d^{+++} \rangle \cong K_{1,3}$ si $d^{+++} \in N_1(v_j^-)$ car

$$C' = v_j u C[d, d^{+++}] \overleftarrow{C}[d^-, v_j^+] \overleftarrow{C}[v_j^-, d^{+++}] v_j^- v_j$$

prolonge le cycle C ou $\langle v_j^-, v_j, v_j^-, d^{+++} \rangle \cong K_{1,3}$ si
 $v_j^-- \in N_1(v_j^+) \cup N_1(d^{+++})$ de $v_j^-- \notin N_1(v_j)$ sinon

$$C' = v_j u C[d, d^{+++}] \overleftarrow{C}[d^-, v_j^+] v_j^- C[d^{+++}, v_j^--] v_j$$

prolonge le cycle C .

• $v_j^- \notin N_1(v_h)$ sinon $v_h^+ \neq N_1(v_i)$ et $v_h \in A$ de $v_j \notin N_1(v_h^-) \cup N_1(v_h^+)$ autrement $v_h \in A$ et
 $v_h^+ \notin N_1(v_h^-)$ sinon $v_h^+ \neq N_1(v_i^-)$ et $\langle v_i, v_i^-, v_i^+, u, v_h \rangle \cong K_{1,4}$ car

$$\begin{cases} C' = v_j u C[v_i, v_j^-] v_h \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h^+] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j] \\ \text{ou } C' = v_j u v_i v_h \overleftarrow{C}[v_j^-, v_i^+] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h^+] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C si $v_i^- \in N_1(v_h) \cup N_1(v_i^+)$ et $v_h \in A$ si $v_i^+ \in N_1(v_h)$ de

$$C' = v_j u \overleftarrow{C}[v_i, v_h^+] C[v_i^+, v_j^-] \overleftarrow{C}[v_h, v_j]$$

prolonge le cycle C si $v_h^+ \in N_1(v_i^+)$.

- Sans perte de généralité, supposons $w \in C[v_j, v_h]$ et $w^{--} \in N_1(u)$.

D'abord, $\langle w, w^-, w^+, u \rangle \cong K_{1,3}$, $\langle w^{--}, w^-, w^{---}, u \rangle \cong K_{1,3}$ de

$$\begin{cases} C' = v_j u w C[v_j^+, w^-] C[w^+, v_j] \\ \text{ou } C' = w u w^{--} w^- \overleftarrow{C}[w^{---}, v_j^+] C[w, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C si $w^- \in N_1(w^+) \cup N_1(w^{---})$, respectivement.

Ensuite, $\langle u, v_k, w, w^{--} \rangle \cong K_{1,3}$ pour $k \in \{i, j\}$ de $v_i \notin N_1(w) \cup N_1(w^{--})$ sinon $\langle u, v_j, w^{--}, w \rangle \cong K_{1,3}$ et $w^{--} \notin N_1(w)$ autrement $\langle w, w^-, w^+, u, v_j^+ \rangle \cong K_{1,4}$ car

$$\begin{cases} C' = v_j u \overleftarrow{C}[w^{--}, v_j^+] C[w^-, v_j] \\ \text{ou } C' = v_j u \overleftarrow{C}[w, v_j^+] C[w^+, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C si $v_j^+ \in N_1(w^-) \cup N_1(w^+)$, respectivement.

- Pour $v_j^- \notin N_1(d)$ et sans perte de généralité supposons que $d \in C[v_i, v_j]$. $d \notin \{v_i^+, v_j^-\}$ du Lemme 4.2.1, (i) et $v_h \notin \{v_i^-, v_j^+\}$ sinon
 - Si $v_h = v_i^-$, alors

$$\begin{cases} \langle v_j, v_j^-, v_j^+, u, v_h \rangle \cong K_{1,4} \\ \text{ou } \langle v_j, v_j^-, d, u, v_h \rangle \cong K_{1,4} \end{cases}$$

si $v_j^+ \in N_1(v_h) \cup N_1(v_h)$, une contradiction.

- Si $v_h = v_j^+$, alors $\langle v_i, v_i^-, v_i^+, u, v_h \rangle \cong K_{1,4}$ si $v_i^- \notin N_1(v_h)$ de $v_i^+ \notin N_1(v_i^-)$ autrement

$$C' = v_j u v_i C[v_h, v_i^-] C[v_i^+, v_j]$$

prolonge le cycle C , contradiction.

- D'après la proposition 4.1.1 $v_i \notin A$ de

- $v_i^{--} \notin N_1(v_i^+)$ sinon

$$C' = v_i u \overleftarrow{C}[v_j, v_i^+] \overleftarrow{C}[v_i^{--}, v_h] v_i^- v_i$$

prolonge le cycle C . $d \notin N_1(v_i^-) \cap N_1(v_i^+)$ autrement $\langle d, d^-, d^+, v_i^- \rangle \cong K_{1,3}$ et $\langle v_h, v_i^+, d, v_i \rangle \cong K_{1,3}$ contradiction du lemme 4.2.1 (i). D'où $v_i^- \notin N_1(d^-) \cap N_1(d^+)$ dans le cas contraire

$$\begin{cases} C' = v_j u C[v_i, d^-] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h] C[d, v_j] & \text{si } v_i^- \in N_1(d^-) \\ \text{et } C' = v_j u C[v_i, d] C[v_h, v_i^-] C[d^+, v_j] & \text{si } v_i^- \in N_1(d^+) \end{cases}$$

prolonge le cycle C ,

$$C' = v_i u \overleftarrow{C}[v_j, d^+] \overleftarrow{C}[d^-, v_i^+] d C[v_h, v_i]$$

prolonge le cycle C si $d^+ \in N_1(d^-)$ et $v_h^+ \notin N_1(v_i) \cap N_1(d)$ sinon $v_h^+ \in N_1(v_i^-)$ et $\langle v_h, v_h^+, v_i^-, v_j \rangle \cong K_{1,3}$.

- De même, $v_i^{++} \notin N_1(v_i^-) \cap N_1(v_i)$ sinon $v_i^{++} \notin N_1(v_i)$ et $v_i^{++} \neq d^-$ sinon

$$C' = v_j u C[v_i, v_i^{++}] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h] C[d, v_j]$$

prolonge le cycle C .

D'où, $\langle v_i^{++}, v_i^+, v_i^-, v_i^{+++} \rangle \cong K_{1,3}$ et $\langle v_h, v_h^+, v_i, v_i^{++} \rangle \cong$

$K_{1,3}$ de $v_i^{+++} \notin N_1(v_i^+) \cup N_1(v_i^-)$ sinon

$$\begin{cases} C' = v_j u \overleftarrow{C}[v_i, v_h] v_i^{++} v_i^+ C[v_i^{+++}, v_j] \text{ si } v_i^{+++} \in N_1(v_i^+) \\ \text{et } C' = v_j u C[v_i, v_i^{++}] C[v_h, v_i^-] C[v_i^{+++}, v_j] \text{ si } v_i^{+++} \in N_1(v_i^-) \end{cases}$$

prolonge le cycle C et $\langle v_h, v_h^+, v_i^-, v_j \rangle \cong K_{1,3}$ si $v_h^+ \in N_1(v_i) \cup N_1(v_i^{++})$ de $v_h^+ \in N_1(v_j)$ sinon $\langle v_h, v_h^+, v_i, v_j \rangle \cong K_4$ ou $\langle v_h, v_h^+, v_i, d \rangle \cong K_{1,3}$.

- Si $v_h \notin \{v_j^+, v_i^-\}$, $\langle v_j, v_j^-, d, u, v_h \rangle \cong K_{1,4}$ de $v_h \notin N_1(v_j^-) \cup N_1(d)$ sinon

- Pour $v_h^+ = v_i^-$, $v_i^+ \notin N_1(v_i^-)$ sinon

$$C' = v_j u v_i v_i^- C[v_i^+, v_j^-] \overleftarrow{C}[v_h, v_j]$$

prolonge le cycle C . Par conséquent, $v_i \notin A$ selon 4.1.1.

- Pour $v_h^+ \neq v_i^-$,

- Si $v_h \in N_1(d)$, alors $v_j^- \notin N_1(v_h)$,

$$\begin{cases} \langle v_h, v_j^-, d, v_i \rangle \cong K_{1,3} \\ \text{et } \langle v_h, v_h^-, v_j^-, v_i, d \rangle \cong K_{1,4} \end{cases}$$

de $\langle v_i, v_i^-, v_i^+, u, v_h^- \rangle \cong K_{1,4}$ si $v_h^- \in N_1(v_i)$ car $v_h^- \notin N_1(v_i^-) \cup N_1(v_i^+)$ autrement

$$\begin{cases} C' = v_j u C[v_i, v_j^-] C[v_h, v_i^-] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j] \\ \text{ou } C' = v_j u \overleftarrow{C}[v_i, v_h] \overleftarrow{C}[v_j^-, v_i^+] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C et $v_i^+ \notin N_1(v_i^-)$ dans le cas contraire $\langle d, d^-, d^+, v_j^+ \rangle \cong K_{1,3}$ parce que, si $d^+ \in N_1(d^-)$, alors

$$C' = v_j u v_i \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j^+] C[d^+, v_j^-] C[v_h, v_i^-] C[v_i^-, d] v_j$$

prolonge le cycle C et

$$\begin{cases} C' = v_j u v_i \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j^+] d C[v_h, v_i^-] C[v_i^+, d^-] C[d^+, v_j] \\ \text{ou } C' = v_j u v_i \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j^+] \overleftarrow{C}[d^-, v_i^+] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h] C[d, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C si $v_j^+ \in N_1(d^-) \cup N_1(d^+)$, une contradiction.

Pour $v_h^- \in N_1(v_j^-)$, $v_i^+ \notin N_1(v_i^-) \cup N_1(v_h)$ autrement

$$\begin{cases} C' = v_j u v_i C[v_h, v_i^-] C[v_i^+, v_j^-] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j] \\ \text{ou } C' = v_j u \overleftarrow{C}[v_i, v_h] C[v_i^+, v_j^-] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C . Donc, $v_i^- \in N_1(v_h)$ et $v_h^+ \in N_1(v_i^-)$ sinon $\langle v_h, v_h^-, v_h^+, v_j, v_i^- \rangle \cong K_{1,4}$ de

$$\begin{cases} C' = v_j u C[v_i, v_j^-] v_h \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h^+] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j] \\ \text{ou } C' = v_j u C[v_i, v_j^-] C[v_h, v_i^-] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C .

si $v_h^- \in N_1(v_h^+) \cup N_1(v_i^-)$ et si $v_h^+ \in N_1(v_j)$, alors $\langle v_j, v_j^-, d, u, v_h^+ \rangle \cong K_{1,4}$. D'où, $\langle v_h, v_h^+, v_i, d, v_j^- \rangle \cong K_{1,4}$ de

$$C' = v_j u C[v_i, v_j^-] C[v_h^+, v_i^-] \overleftarrow{C}[v_h, v_j]$$

prolonge le cycle C ou $\langle d, d^-, d^+, v_j, v_h^+ \rangle \cong K_{1,4}$ si $v_h^+ \in N_1(v_j^-) \cup N_1(d)$ car

$$C' = v_j u C[v_i, d^-] C[d^+, v_j^-] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j^+] d C[v_h^+ v_i^-] v_h v_j$$

prolonge le cycle C si $d^+ \in N_1(d^-)$ et

$$\begin{cases} C' = v_j u C[v_i, d^-] C[v_h^+, v_i^-] \overleftarrow{C}[v_h, v_j^+] C[d, v_j] \\ \text{ou } C' = v_j u C[v_i, d] C[v_j^+, v_h] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h^+] C[d^+, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C si $v_h^+ \in N_1(d^-) \cup N_1(d^+)$.

Pour, $v_h^+ \in N_1(v_j^-)$, $\langle v_i, v_i^-, v_i^+, u, v_h \rangle \cong K_{1,4}$ de

$$\begin{cases} C' = v_j u C[v_i, [v_j^-] C[v_h^+, v_i^-] \overleftarrow{C}[v_h, v_j] \\ \text{ou } C' = v_j u \overleftarrow{C}[v_i, v_h^+] \overleftarrow{C}[v_j^-, v_i^+] \overleftarrow{C}[v_h, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C si $v_h \in N_1(v_i^-) \cup N_1(v_i^+)$ et $v_i^+ \notin N_1(v_i^-)$ sinon $\langle d, d^+, v_h, v_j^+ \rangle \cong K_{1,3}$ de

$$C' = v_j u v_i \overleftarrow{C}[v_h, v_j^+] C[d^+, v_j^-] C[v_h^+, v_i^-] C[v_i^+, d] v_j$$

prolonge le cycle C si $v_j^+ \notin N_1(d^+)$ et $\langle v_h, v_h^-, v_h^+, v_j, d^+ \rangle \cong K_{1,4}$ si $v_h \notin N_1(d^+)$ de

$$C' = v_j u v_i v_h \overleftarrow{C}[v_j^-, v_i^+] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h^+] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j]$$

prolonge le cycle C si $v_h^+ \notin N_1(v_h^-)$ et si $d^+ \in N_1(v_h^-) \cup N_1(v_h^+)$, alors

$$\begin{cases} C' = v_j u v_i \overleftarrow{C}[v_h, v_j^+] \overleftarrow{C}[d, v_i^+] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h^+] C[d^+, v_j] \\ \text{ou } C' = v_j u v_i C[v_h, v_i^-] C[v_i^+, d] C[v_j^+, v_h^-] C[d^+, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C . On en déduit à la fin que

$v_j^+ \in N_1(v_j^-)$, $v_j \notin N_1(d^-) \cup N_1(d^+)$ sinon $\langle v_j, v_j^-, v_h, u, x \rangle \cong K_{1,4}$ si

$x \notin N_1(v_j)$ pour $x \in \{d^-, d^+\}$ et $v_j \notin N_1(v_h^+) \cup N_1(v_i^-)$ dans le cas contraire $\langle v_j, v_j^-, d, u, y \rangle \cong K_{1,4}$ si $y \notin N_1(v_j)$ pour $y \in \{v_h^-, v_h^+\}$ de $v_j^- \in N_1(v_h^-) \cup N_1(v_h^+)$ autrement $\langle v_i, v_i^-, v_i^+, u, v_h \rangle \cong K_{1,4}$ de

$$C' = v_j u v_i \overleftarrow{C}[v_h, v_j^+] \overleftarrow{C}[v_j^-, v_i^+] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h^+] d v_j$$

prolonge le cycle C si $v_i^+ \in N_1(v_i^-)$ et

$$\begin{cases} C' = v_j u C[v_i, v_j^-] C[v_h^+, v_i^-] \overleftarrow{C}[v_h, v_j] \\ \text{ou } C' = v_j u \overleftarrow{C}[v_i, v_h^+] \overleftarrow{C}[v_j^-, v_i^+] \overleftarrow{C}[v_h, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C si $v_h \in N_1(v_i^-) \cup N_1(v_i^+)$. De même,

$$\begin{cases} C' = v_j u v_i C[v_h, v_i^-] C[v_i^+, v_j^-] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j] \\ \text{ou } C' = v_j u \overleftarrow{C}[v_i, v_h] C[v_i^+, v_j^-] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C si $v_i^+ \in N_1(v_i^-) \cup N_1(v_h)$ et $\langle v_h, v_h^-, v_h^+, v_i, d \rangle \cong K_{1,4}$ si $v_i^- \in N_1(v_h)$ de

$$C' = v_j u C[v_i, v_j^-] C[v_j^+, v_h^-] C[v_h^+, v_i^-] v_h v_j$$

prolonge le cycle C si $v_h^+ \in N_1(v_h^-)$ et $\langle d, d^-, d^+, v_j, v_h^+ \rangle \cong K_{1,4}$ if $v_h^+ \in N_1(d)$ de

$$C' = v_j u C[v_i, d^-] C[d^+, v_j^-] C[v_j^+, v_h] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h^+] d v_j$$

prolonge le cycle C si $d^+ \in N_1(d^-)$ et

$$\begin{cases} C' = v_j u C[v_i, d^-] C[v_h^+, v_i^-] \overleftarrow{C}[v_h, v_j^+] \overleftarrow{C}[v_j^-, d] v_j \\ \text{ou } C' = v_j u C[v_i, d] C[v_j^+, v_h] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h^+] C[d^+, v_j] \end{cases}$$

si $v_h \in N_1(d^-) \cup N_1(d^+)$.

- Si $v_j^- \in N_1(v_h)$, alors $\langle v_h, v_h^-, v_h^+, v_i, v_j^- \rangle \cong K_{1,4}$ de
 - $v_h^- \notin N_1(v_i)$ sinon $v_h^- \notin N_1(v_i^-) \cup N_1(v_i^+)$, $v_i^+ \in N_1(v_i^-)$ et $v_h^+ \notin N_1(v_h^-)$ autrement

$$C' = v_j u v_i v_h \overleftarrow{C}[v_j^-, v_i^+] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h^+] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j]$$

prolonge le cycle C . D'où, $\langle v_h, v_h^-, v_h^+, v_j \rangle \cong K_{1,3}$ car $v_j \notin N_1(v_h^+)$ dans le cas contraire

$\langle v_j, v_j^-, d, u, v_h^+ \rangle \cong K_{1,4}$ de $v_h^+ \notin N_1(d)$ autrement
 $\langle d, d^-, d^+, v_j^+ \rangle \cong K_{1,3}$ et $\langle v_h, v_h^-, v_h^+, v_j^- \rangle \cong K_{1,3}$ de

$$C' = v_j u v_i \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j^+] d C[v_h, v_i^-] C[v_i^+, d^-] C[d^+, v_j]$$

prolonge le cycle C si $d^+ \in d^-$, $v_j^+ \notin N_1(d^-) \cap N_1(d^+)$
 sinon

$$\begin{cases} C' = v_j u v_i \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j^+] \overleftarrow{C}[d^-, v_i^+] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h] \overleftarrow{C}[v_j^-, d] v_j \\ \text{ou } C' = v_j u v_i \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j^+] C[d^+, v_j^-] C[v_h, v_i^-] C[v_i^+, d] v_j \end{cases}$$

prolonge le cycle C et $v_h^- \notin N_1(v_j^-)$ autrement

$$C' = v_j u v_i C[v_h, v_i^-] C[v_i^+, v_j^-] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j]$$

Donc, $v_j^+ \notin N_1(v_j^-)$ et $v_j \notin A$, selon proposition 4.1.1,
 sinon

$$C' = v_j u v_i \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j^+] \overleftarrow{C}[v_j^-, v_i^+] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h] v_j$$

prolonge le cycle C .

• $v_h^- \notin N_1(v_j^-)$ de $v_i^+ \notin N_1(v_i^-)$ sinon

$$C' = v_j u v_i C[v_h, v_i^-] C[v_i^+, v_j^-] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j]$$

prolonge le cycle C . D'où, $v_i \notin A$ selon proposition
 4.1.1.

• $v_h^+ \notin N_1(v_j^-)$ sinon $v_h \notin N_1(v_i^-) \cup N_1(v_i^+)$ ou bien

$$\begin{cases} C' = v_j u C[v_i, v_j^-] C[v_h^+, v_i^-] \overleftarrow{C}[v_h, v_j] \\ \text{ou } C' = v_j u \overleftarrow{C}[v_i, v_h^+] \overleftarrow{C}[v_j^-, v_i^+] \overleftarrow{C}[v_h, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C si $v_h \in N_1(v_i^-) \cup N_1(v_i^+)$. D'où,
 $v_i^+ \in N_1(v_i^-)$ et $\langle v_h, v_h^-, v_j^-, v_i \rangle \cong K_{1,3}$. De plus,

$v_j^+ \notin N_1(v_j^-)$ sinon $\langle v_j^-, v_j^+, v_h, v_j^{--} \rangle \cong K_{1,3}$ de

$$\begin{cases} C' = v_j u v_i \overleftarrow{C}[v_h, v_j^+] \overleftarrow{C}[v_j^{--}, v_i^+] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h^+] v_j^- v_j \\ \text{ou } \langle v_j^-, v_j, v_j^{--}, v_h^+ \rangle \cong K_{1,3} \end{cases}$$

si $v_j^{--} \in N_1(v_j^+) \cup N_1(v_h)$.

- Si $v_h = d$, alors $v_h \in A$, $v_h^+ \neq v_i^-$ sinon $v_i^+ \notin N_1(v_i^-)$ dans le cas contraire

$$C' = v_j u v_i v_h^- C[v_i^+, v_j^-] \overleftarrow{C}[v_h, v_j]$$

et selon proposition 4.1.1 $v_i \notin A$, une contradiction.

- Si $v_j^+ = v_h^-$, alors $v_j \notin A$ car $v_h^+ \notin N_1(v_j^+)$ et $v_j^{--} \notin N_1(v_j^+) \cap N_1(v_h)$ autrement $\langle v_i, v_i^-, v_i^+, u, v_h \rangle \cong K_{1,4}$. $v_j^{--} \notin N_1(u)$ sans le cas contraire $\langle v_h, v_j^-, v_j^+, v_h^+, v_i \rangle \cong K_{1,4}$.
- Si $v_j^+ \neq v_h^-$, alors $v_j \notin N_1(v_h^-) \cup N_1(v_h^+)$ autrement $\langle v_j, v_j^-, v_j^+, u, x \rangle \cong K_{1,4}$ pour $x \in \{v_h^-, v_h^+\}$ et $\langle v_i, v_i^-, v_i^+, u, v_h \rangle \cong K_{1,4}$ de $\langle v_h, v_h^-, v_h^+, y, v_j \rangle \cong K_{1,4}$ pour $y \in \{v_h^-, v_h^+\}$ si $v_h \in N_1(v_i^-) \cup N_1(v_i^+)$ et $\langle v_h, v_h^+, v_j^-, v_j^+, v_i \rangle \cong K_{1,4}$ si $v_i^+ \in N_1(v_i^-)$ car $v_h^+ \notin N_1(v_j^-)$ autrement $v_j \notin A$ selon proposition 4.1.1. En effet, si $v_j^{--} \in N_1(v_j^+)$, alors

$$C' = v_j u v_i \overleftarrow{C}[v_h, v_j^+] \overleftarrow{C}[v_j^{--}, v_i^+] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h^+] v_j^- v_j$$

et si $v_j^{++} \in N_1(v_j^-)$, alors $v_j^{++} \notin N_1(v_h)$ sinon $\langle v_j^-, v_j, v_j^{++}, v_i^+ \rangle \cong K_{1,3}$.

- Supposons $v_h \in N_1(d)$. Alors $v_h \notin N_1(v_j^-) \cup N_1(v_j^+)$. Donc $\langle v_j, v_j^-, v_j^+, u, v_h \rangle \cong K_{1,4}$, une contradiction.

□

Dans le lemme suivant, on donne la borne inférieure de k , nombre de triangles de la séquence de triangles.

Lemme 4.2.3. $k \geq 2$. D'où, $v_i \notin N_1(v_j^-) \cup N_1(v_j^+)$ et $v_j \notin N_1(v_i^-) \cup N_1(v_i^+)$.

Preuve: En effet, supposons que $k = 1$, $v_h \in \{v_i^-, v_j^+\}$. Sans perte de généralité, supposons que $v_h = v_i^-$. Donc, $v_j^+ \notin N_1(v_j^-)$ et $v_j^+ \in N_1(v_h)$ ou bien $\langle v_j, v_j^-, v_j^+, v_h, u \rangle \cong K_{1,4}$.

• D'où, selon la proposition 4.1.1, $v_j \notin A$ de :

• **Cas 01 :** Si $v_j^+ = v_h^-$, alors $v_j^{--} \notin N_1(u)$ de $v_j^{--} \neq v_i^+$ sinon

$$C' = v_i u C[v_j^{--}, v_i]$$

prolonge le cycle C . Donc tout d'abord, $\langle v_j^{--}, v_j^-, u, v_j^{--} \rangle \cong K_{1,3}$ et $v_j^{--} \in A$ ensuite, $v_j^{--} \notin A$ selon la proposition 4.1.1, une contradiction.

$v_j^{--} \notin N_1(v_j^+) \cap N_1(v_h)$ sinon $\langle v_j^{--}, v_j^-, v_j^+, v_j^{--}, u \rangle \cong K_{1,4}$ de

$$C' = v_i u \overleftarrow{C}[v_j, v_j^{--}] C[v_j^+, v_i]$$

prolonge le cycle C si $v_j^{--} = v_i^+$ et

$$\begin{cases} C' = v_j u C[v_i, v_j^{--}] v_j^- v_j^{--} \overleftarrow{C}[v_h, v_j] \\ \text{ou } C' = v_j u C[v_i, v_j^{--}] C[v_j^+, v_h] C[v_j^-, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C si $v_j^{--} \in N_1(v_j^-) \cap N_1(v_j^+)$.

• **Cas 02 :** Si $v_j^+ \neq v_h^-$, alors de plus $v_j^{++} \notin N_1(v_j^-)$ autrement

$C' = v_j u C[v_i, v_j^-] C[v_j^{++}, v_h] v_j^+ v_j$ prolonge le cycle C .

• Clairement, $v_j^+ \notin N_1(v_i)$. Si $v_j^- \in N_1(v_i)$, alors $v_i^+ \in N_1(v_j^-)$ et $v_i^+ \notin N_1(v_h)$. Donc, $v_i \notin A$ de $v_j^{--} \notin N_1(u) \cup N_1(v_h)$ sinon

$$\begin{cases} C' = v_i u \overleftarrow{C}[v_j^-, v_i^+] C[v_j^-, v_i] \\ \text{ou } C' = v_i u C[v_j, v_h] \overleftarrow{C}[v_j^-, v_i^+] v_j^- v_i \end{cases}$$

prolonge le cycle C et $C' = v_j u C[v_i^{++}, v_j^-] \overleftarrow{C}[v_i^+, v_j]$ ou

$$C' = v_i u C[v_j, v_h] C[v_i^{++}, v_j^-] v_i^+ v_i$$

prolonge le cycle C si $v_i^{++} \in N_1(u) \cup N_1(v_h)$.

□

Le lemme suivant 4.2.4 donne la valeur du nombre de triangles de la séquence :

Lemme 4.2.4. *Le nombre de triangles est exactement égal à $k = 2$.*

Preuve:

En effet, supposons $k \geq 3$. Donc $v_i^- \neq v_h^+$, $v_h^- \neq v_j^+$ et

$$\begin{cases} v_h \notin N_1(v_k^-) \cup N_1(v_k^+) \text{ et } v_k \notin N_1(v_h^-) \cup N_1(v_h^+) \text{ pour } k \in \{i, j\} \\ v_k \notin N_1(v_m^-) \cup N_1(v_m^+) \text{ pour } k, m \in \{i, j\} \text{ et } k \neq m \end{cases}$$

En outre, $v_k^+ \in N_1(v_k^-)$ sinon $\langle v_k, v_k^-, v_k^+, u, v_h \rangle \cong K_{1,4}$ for $k \in \{i, j\}$.

De plus, $v_h^+ \in N_1(v_h^-)$ autrement $v_h \in A$ et $v_j \notin A$ de :

- $v_j^{--} \neq v_h$ et $v_j^{--} \notin N_1(v_h) \cap N_1(v_j^+)$ autrement

$$C' = v_j u v_i v_i^+ \overleftarrow{C}[v_i^-, v_j^+] C[v_j^{--}, v_j]$$

prolonge le cycle C et $\langle v_h, v_h^-, v_h^+, v_j, v_j^{--} \rangle \cong K_{1,4}$ de $v_j^{--} \notin N_1(v_h^-) \cap N_1(v_h^+)$ sinon

$$\begin{cases} C' = v_j u v_i C[v_h, v_i^-] C[v_i^+, v_j^{--}] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j^+] v_j^- v_j \\ \text{ou } C' = v_j u v_i v_i^+ \overleftarrow{C}[v_i^-, v_j^+] C[v_j^{--}, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C si $v_j^{--} = v_i^+$. Donc, $\langle v_j^{--}, v_j^+, v_h^+, v_j^{--} \rangle \cong K_{1,3}$ de $v_j^{--} \notin N_1(v_j^+) \cup N_1(v_h^+)$ dans le cas contraire

$$C' = v_j u v_i v_i^+ \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h^+] v_j^- \overleftarrow{C}[v_h, v_j^+] v_j^- v_j$$

prolonge le cycle C ou $\langle v_j^{--}, v_j^+, v_h, v_j^{--} \rangle \cong K_{1,3}$.

- $v_j^{++} \neq v_h$ et $v_j^{++} \notin N_1(v_j^-) \cup N_1(v_h)$ autrement

$$C' = v_j u v_i C[v_h, v_i^-] C[v_i^+, v_j^-] v_j^+ v_j$$

prolonge le cycle C et $\langle v_h, v_h^-, v_h^+, v_j, v_j^{++} \rangle \cong K_{1,4}$ de $v_j^{++} \neq v_h^-$ car dans le cas contraire

$$C' = v_j u v_i C[v_h, v_i^-] C[v_i^+, v_j^-] \overleftarrow{C}[v_j^{++}, v_j]$$

prolonge le cycle C et $v_j^{++} \notin N_1(v_h^+) \cap N_1(v_h^-)$ sinon

$$C' = v_j u v_i \overleftarrow{C}[v_h, v_j^{++}] C[v_h^+, v_i^-] C[v_i^+, v_j^-] v_j^+ v_j$$

prolonge le cycle C ou $\langle v_j^{++}, v_j^-, v_h^-, v_j^{+++} \rangle \cong K_{1,3}$ car $v_j^{+++} \notin N_1(v_j^-) \cup N_1(v_h^-)$ dans le cas contraire

$$C' = v_j u v_i C[v_h, v_i^-] C[v_i^+, v_j^-] C[v_j^{+++}, v_h^-] \overleftarrow{C}[v_j^{++}, v_j]$$

prolonge le cycle C ou $\langle v_j^{++}, v_j^-, v_h, v_j^{+++} \rangle \cong K_{1,3}$.

Enfin, $v_i \notin A$ de $v_h \notin N_1(v_i^{++}) \cup N_1(v_i^{--})$ autrement

$$\begin{cases} C' = v_i u v_j v_h C[v_i^{++}, v_j^-] C[v_j^+, v_h^-] C[v_h^+, v_i^-] v_i^+ v_i \\ \text{ou } C' = v_i u v_j v_h \overleftarrow{C}[v_i^{--}, v_h^+] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j^+] \overleftarrow{C}[v_j^-, v_i^+] v_i^- v_i \end{cases}$$

prolonge le cycle C . \square

Les sommets successeur et prédécesseur des deux sommets v_i et v_j sont tels que

Lemme 4.2.5. $|\{v_i^- v_i^+, v_j^- v_j^+\} \cap E(G)| = 1$.

Preuve:

Supposons $|\{v_j^- v_j^+, v_i^- v_i^+\} \cap E(G)| \neq 1$. Alors

- **Case 01 :** Si $|\{v_j^- v_j^+, v_i^- v_i^+\} \cap E(G)| = 0$, alors $v_h \in [N_1(v_i^-) \cup N_1(v_i^+)] \cap [N_1(v_j^-) \cup N_1(v_j^+)]$.

- ◇ **Sous-cas 01** : Pour $v_h \in N_1(v_i^-) \cap N_1(v_j^-)$, $\langle v_h, v_h^-, v_i^-, v_j^- \rangle \cong K_{1,3}$ et $v_h^+ \neq v_i^-$ dans le cas contraire $v_i \notin A$ de $v_i^{++} \notin N_1(v_i^-) \cap N_1(v_h)$ si non $v_i^{++} \neq v_j^-$ et $\langle v_h, v_h^-, v_j^-, v_i, v_i^{++} \rangle \cong K_{1,4}$ de $\langle v_i^{++}, v_i^-, v_i^+, y \rangle \cong K_{1,3}$ pour $y \in \{v_j^-, v_h^-\}$ et $v_i^{++} \in N_1(y)$ car

$$\begin{cases} C' = v_i u C[v_j, v_i^-] C[v_i^{++}, v_j^-] v_i^+ v_i \\ \text{ou } C' = v_i u C[v_j, v_h^-] C[v_i^{++}, v_j^-] v_h v_i \end{cases}$$

prolonge le cycle C si $v_i^+ \in N_1(y)$. Donc $\langle v_h, v_h^-, v_h^+, v_i, v_j^- \rangle \cong K_{1,4}$ de $\langle v_i, v_i^-, v_i^+, u, z \rangle \cong K_{1,4}$ pour $z \in \{v_h^-, v_h^+\}$ et $z \in N_1(v_i)$.

En outre, $v_h^+ \notin N_1(v_h^-)$ si non

$$C' = v_j u \overleftarrow{C}[v_i, v_j^-] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h^+] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j]$$

prolonge le cycle C .

- ◇ **Sous-cas 02** : Pour $v_h \in N_1(v_i^+) \cap N_1(v_j^+)$, donc $\langle v_h, v_h^+, v_i^+, v_j^+ \rangle \cong K_{1,3}$ et $v_j^+ \neq v_h^-$ autrement, selon la proposition 4.1.1, $v_j \notin A$ de $\langle v_h, v_h^+, v_i^+, v_j, v_j^{--} \rangle \cong K_{1,4}$ si $v_j^{--} \notin N_1(v_j^+) \cap N_1(v_h)$ et $\langle v_h, v_h^-, v_h^+, v_i^+, v_j^+ \rangle \cong K_{1,4}$ si $v_j^{++} \notin N_1(v_j^-)$ de

$$\begin{cases} C' = v_i u C[v_j, v_h] C[v_i^+, v_j^+] C[v_h^+, v_i] \\ \text{ou } C' = v_j u \overleftarrow{C}[v_i, v_j^+] \overleftarrow{C}[v_j^{--}, v_i^+] v_j^- v_j \end{cases}$$

prolonge le cycle C si $y \notin N_1(v_j^{--})$ pour $y \in \{v_h^+, v_i^+\}$ et

$$\begin{cases} C' = v_j u \overleftarrow{C}[v_i, v_h^+] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j^+] \overleftarrow{C}[v_j^-, v_i^+] v_h v_j^+ v_j \\ \text{ou } C' = v_j u \overleftarrow{C}[v_i, v_h] C[v_i^+, v_j^-] \overleftarrow{C}[v_j^{++}, v_h^-] v_j^+ v_j \\ \text{ou } C' = v_j u \overleftarrow{C}[v_i, v_h] \overleftarrow{C}[v_j^-, v_i^+] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C si $v_h^- \notin N_1(v_h^+) \cup N_1(v_j^+) \cup N_1(v_i^+)$.

- ◇ **Sous-cas 03** : Pour $v_h \in N_1(v_i^-) \cap N_1(v_j^+)$, $v_j^+ \neq v_h^-$ et $v_h^+ \neq v_i^-$ autrement $v_i \notin A$ or $v_j \notin A$. D'où $\tilde{A}^1, \langle v_h, v_h^-, v_h^+, v_j, v_i^- \rangle \cong K_{1,4}$ de $x \notin N_1(v_j)$ sinon $\langle v_j, v_j^-, v_j^+, u, x \rangle \cong K_{1,4}$ pour $x \in \{v_h^-, v_h^+\}$ et

$v_h^+ \notin N_1(v_h^-)$ dans le cas contraire v_h et v_j sont adjacents sur le cycle

$$C' = v_j v_h C[v_h^+, v_j]$$

et $k = 1$, une contradiction. Enfin, $v_h^+ \notin N_1(v_i^-)$ dans l'autre cas $v_i \notin A$ de $v_i^{--} \neq v_h^+$ et $v_i^{++} \neq v_j^-$, $v_i^{--} \notin N_1(v_i^+) \cap N_1(v_h)$ et $v_i^{++} \notin N_1(v_i^-) \cup N_1(v_h)$ sinon $\langle v_j, v_j^-, v_j^+, u, y \rangle \cong K_{1,4}$ pour $y \in \{v_i^{--}, v_i^{++}\}$ de $y \notin N_1(v_h^-)$ autrement $\langle y, v_i^-, v_i^+, v_h^- \rangle \cong K_{1,3}$ car

$$C' = v_i u \overleftarrow{C}[v_j, v_i^+] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j^+] C[v_h, v_i]$$

prolonge le cycle C si $v_i^+ \notin N_1(v_h^-)$.

- ◇ **Sous-cas 04 :** Pour $v_h \in N_1(v_i^+) \cap N_1(v_j^-)$, $v_h \in A$, $v_j^+ \neq v_h^-$ et $v_h^+ \neq v_i^-$ dans le cas contraire $v_i \notin A$ ou $v_j \notin A$. $v_h^+ \notin N_1(v_h^-)$ sinon v_h et v_j sont adjacents sur le cycle

$$C' = v_j v_h \overleftarrow{C}[v_j^-, v_h^+] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j]$$

et $k = 1$. Et donc, $\langle v_h, v_h^-, v_h^+, v_i, v_j^- \rangle \cong K_{1,4}$ de

$$C' = v_i u C[v_j, v_h] C[v_i^+, v_j^-] C[v_h^+, v_i]$$

prolonge le cycle C si $v_h^+ \in N_1(v_j^-)$. Donc, d'après la proposition 4.1.1, $v_i \notin A$ de $\langle v_h, v_h^-, v_h^+, v_i^+, v_j^- \rangle \cong K_{1,4}$ si $v_i^{++} \notin N_1(v_i^-)$ de $v_i^+ \notin N_1(v_j^-)$ autrement

$$C' = v_j u v_i C[v_h^+, v_i^-] C[v_i^{++}, v_j^-] v_i^+ \overleftarrow{C}[v_h, v_j]$$

prolonge le cycle C .

En outre, $v_i^{--} \notin N_1(v_i^+)$ sinon $\langle v_i, v_i^-, v_i^+, u, v_h^+ \rangle \cong K_{1,4}$ de $v_h^+ \notin N_1(v_i^-)$ sinon

$$C' = v_j u v_i v_i^- C[v_h^+, v_i^{--}] C[v_i^+, v_j^-] \overleftarrow{C}[v_h, v_j]$$

prolonge le cycle C .

- **Cas 02** : Si $|\{v_j^- v_j^+, v_i^- v_i^+\} \cap E(G)| = 2$, alors $v_j^+ \neq v_h^-, v_h^+ \neq v_i^-, v_i^+ \neq v_j^-$ et $v_k \notin N_1(v_h^-) \cup N_1(v_h^+)$ pour $k \in \{i, j\}$.

D'où, $v_h \notin N_1(v_k^-) \cup N_1(v_k^+)$ pour $k \in \{i, j\}$. Sans perte de généralité, on suppose que $v_h \notin N_1(v_i^-)$, so $\langle v_h, v_h^-, v_h^+, v_j^-, v_i^- \rangle \cong K_{1,4}$ de

$$C' = v_j u v_i v_h \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h^+] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j^+] \overleftarrow{C}[v_j^-, v_i^-]$$

prolonge le cycle C si $v_h^+ \in N_1(v_h^-)$ et $v_h^+ \notin N_1(v_i^-)$ car dans le cas contraire $v_i \notin A$ de $v_i^{++} \notin N_1(v_i^-) \cap N_1(v_h)$ autrement

$$\begin{cases} \langle v_i^-, v_i, v_i^{++}, v_h^+ \rangle \cong K_{1,3} \\ \text{et } \langle v_i^-, v_i, v_i^{--}, v_h^+ \rangle \cong K_{1,3} \end{cases}$$

si $v_i^{--} \in N_1(v_i^-) \cap N_1(v_h)$ car $v_i^{--} \neq v_h^+$ sinon

$$C' = v_j u \overleftarrow{C}[v_i, v_i^{--}] C[v_i^+, v_j^-] C[v_j^+, v_h] v_j$$

prolonge le cycle C .

□

Donc, les deux sommets successeur et prédécesseur du sommet v_i sont adjacents entre eux selon le lemme suivant :

Lemme 4.2.6. $v_i^+ \in N_1(v_i^-)$.

Preuve:

On suppose que $v_i^+ \notin N_1(v_i^-)$. Tout d'abord, $v_j^+ \in N_1(v_j^-)$ et $v_h \in N_1(v_i^-) \cup N_1(v_i^+)$. Donc, $v_h^+ \notin N_1(v_h^-)$ et $v_h \in A$ sinon

$$\begin{cases} C' = v_i u v_j v_h \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h^+] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j^+] \overleftarrow{C}[v_j^-, v_i^-] \\ \text{ou } C' = v_i u v_j v_h C[v_i^+, v_j^-] C[v_j^+, v_h^-] C[v_h^+, v_i] \end{cases}$$

prolonge le cycle C si $v_h \in N_1(v_i^+) \cup N_1(v_i^-)$. En suite, selon la proposition 4.1.1 $v_i \notin A$ de :

(.) **Cas 01** : Supposons que $v_h \in N_1(v_i^-) - N_1(v_i^+)$. Alos

- **Sous-cas 01** : $v_i^{--} \notin N_1(v_i^+)$, $v_i^{--} \neq v_h^+$ sinon

$$C' = v_j u \overleftarrow{C}[v_i, v_i^{--}] C[v_i^+, v_j^-] C[v_j^+, v_h] v_j$$

prolonge le cycle C . D'où, $v_i^{--} \notin N_1(v_i^+) \cap N_1(v_h)$ autrement $\langle v_h, v_h^-, v_h^+, v_j, v_i^- \rangle \cong K_{1,4}$ de $v_h^+ \notin N_1(v_i^-)$ car dans le cas contraire

$$C' = v_j u v_i v_i^- C[v_h^+, v_i^{--}] C[v_i^+, v_j^-] C[v_j^+, v_h] v_j$$

prolonge le cycle C .

- **Sous-cas 02** : $v_i^{++} \notin N_1(v_i^+) \cap N_1(v_h)$ sinon

$\langle v_h, v_h^-, v_h^+, v_i, v_i^{++} \rangle \cong K_{1,4}$ de $y \notin N_1(v_i^{++})$ pour $y \in \{v_h^+, v_h^-\}$ autrement $\langle v_i^{++}, v_i^-, v_i^+, y \rangle \cong K_{1,3}$ car

$$C' = v_i u v_j C[v_h, v_i^-] C[v_i^{++}, v_j^-] C[v_j^+, v_h^-] v_i^+ v_i$$

prolonge le cycle C si $v_i^+ \in N_1(v_h^-)$.

- (.) **Cas 02** : Supposons que $v_h \in N_1(v_i^+) - N_1(v_i^-)$. Alors $v_j^+ \neq v_h^-$ sinon

$$C' = v_j u \overleftarrow{C}[v_i, v_h] C[v_i^+, v_j^-] v_j^+ v_j$$

prolonge le cycle C . Également,

- **Sous-cas 01** : $v_i^{--} \notin N_1(v_i^+) \cup N_1(v_h)$ autrement

$v_i^{--} \neq v_h^+$ et $\langle v_h, v_h^-, v_h^+, v_j, v_i^+ \rangle \cong K_{1,4}$ de $v_i^+ \notin N_1(v_h^-)$ otherwise $\langle v_i^+, v_i, v_i^{--}, v_h^- \rangle \cong K_{1,3}$.

- **Sous-cas 02** : $v_i^{++} \notin N_1(v_i^-)$ sinon

$$C' = v_j u v_i C[v_i, v_i^{++}] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_j^+] v_j^- v_j$$

prolonge le cycle C si $v_i^{++} = v_j^-$.

Donc, $v_h^+ \neq v_i^-$ et $\langle v_h, v_h^-, v_i^-, v_i^+, v_j \rangle \cong K_{1,4}$ de

$$C' = v_j u v_i v_i^- C[v_i^{++}, v_j^-] C[v_j^+, v_h^-] v_i^+ v_h v_i$$

prolonge le cycle C si $v_i^+ \in N_1(v_h^-)$.

(.) **Cas 03** : Supposons que $v_h \in N_1(v_i^+) \cap N_1(v_i^-)$. Alors $\langle v_h, v_i^-, v_i^+, v_j \rangle \cong K_{1,3}$ et

- **Sous-cas 01** : $v_i^{--} \notin N_1(v_i^+)$ sinon $\langle v_h, v_h^+, v_i^-, v_i^+, v_j \rangle \cong K_{1,4}$ de $v_h^+ \notin N_1(v_i^-)$ car dans le cas contraire

$$C' = v_i u v_j \overleftarrow{C}[v_h, v_j^+] \overleftarrow{C}[v_j^-, v_i^+] \overleftarrow{C}[v_i^{--}, v_h^+] v_i^- v_i$$

prolonge le cycle C .

- **Sous-cas 02** : $v_i^{++} \notin N_1(v_i^-)$ sinon $\langle v_h, v_h^-, v_i^-, v_i^+, v_j \rangle \cong K_{1,4}$ de $v_i^+ \notin N_1(v_h^-)$ autrement

$$C' = v_i u v_j C[v_h, v_i^-] C[v_i^{++}, v_j^-] C[v_j^+, v_h^-] v_i^+ v_i$$

prolonge le cycle C .

□

Le sommet v_h est adjacent à v_j^- ou v_j^+ et appartient à l'ensemble A .

Lemme 4.2.7. $v_h \in N_1(v_j^+) \cup N_1(v_j^-)$, $v_h^+ v_h^- \notin E(G)$ et $v_h \in A$.

Preuve:

Si $v_h \notin N_1(v_j^-) \cup N_1(v_j^+)$, alors $\langle v_j, v_j^-, v_j^+, u, v_h \rangle \cong K_{1,4}$.
 $v_h^+ \notin N_1(v_h^-)$ prolonge le cycle de :

$$\begin{cases} C' = v_j u v_i v_h C[v_j^+, v_h^-] C[v_h^+, v_i^-] C[v_i^+, v_j] & \text{si } v_h \in v_j^+ \\ \text{ou } C' = v_j u v_i v_h \overleftarrow{C}[v_j^-, v_i^+] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h^+] \overleftarrow{C}[v_h^-, v_j] & \text{si } v_h \in v_j^- \end{cases}$$

prolonge le cycle C . $v_h^+ \neq v_i^-$ sinon $v_j \notin A$ car :

- $v_j^{--} \notin N_1(v_j^+) \cap N_1(v_h)$ ou bien,

$$\begin{cases} C' = v_j u v_i v_i^- C[v_i^+, v_j^{--}] C[v_j^+, v_h] C[v_j^{--}, v_j] & \text{si } v_j^{--} \in N_1(v_j^+) \\ \text{ou } C' = v_j u v_i v_i^- C[v_i^+, v_j^{--}] v_j^- v_j^- \overleftarrow{C}[v_h, v_j] & \text{si } v_j^{--} \in N_1(v_j^-) \end{cases}$$

prolonge le cycle C . Par conséquent,

$$\begin{cases} \langle v_j^{--}, v_h^-, v_j^+, v_j^{--} \rangle \cong K_{1,3} \\ \text{et } \langle v_h, v_h^-, v_j^{--}, v_j \rangle \cong K_{1,3} \end{cases}$$

, une contradiction.

• $v_j^{++} \notin N_1(v_j^-)$ sinon

$$C = v_j u v_i v_i^- C[v_i^+, v_j^-] C[v_j^{++}, v_h] v_j^+, v_j$$

prolonge le cycle C .

Donc, $\langle v_h, v_h^-, v_h^+, v_i \rangle \cong K_{1,3}$ et $v_h \in A$. \square

Finalement, on arrive à la contradiction suivante :

Lemme 4.2.8. $\langle v_j, v_j^-, v_j^+, u, v_h \rangle \cong K_{1,4}$.

Preuve: On suppose que $v_h \in N_1(v_j^+) \cup N_1(v_j^-)$. Alors

• **Cas 01 :** Pour $v_h \in N_1(v_j^+) - N_1(v_j^-)$, $v_i^+ \notin N_1(v_j^-)$ car dans le cas contraire

$$C' = v_j u v_i v_i^+ \overleftarrow{C}[v_i^-, v_j]$$

prolonge le cycle C . Donc, $v_j \notin A$ de :

• $v_j^{++} \notin N_1(v_j^-)$ sinon

$$C' = v_j u v_i C[v_h, v_i^-] C[v_i^+, v_j^-] C[v_j^{++}, v_j]$$

prolonge le cycle C si $v_j^{++} = v_h^-$. Dans ce cas, $v_j^{++} \notin N_1(v_j^-) \cup N_1(v_h)$ car dans le cas contraire

$$C' = v_j u v_i v_i^- \overleftarrow{C}[v_i^-, v_j^-] \overleftarrow{C}[v_j^{++}, v_h] v_j^+ v_j$$

prolonge le cycle C si $v_h^+ = v_i^-$.

Par conséquent,

$$\begin{cases} C' = v_j u v_i C[v_h, v_i^-] C[v_i^+, v_j^-] C[v_j^{++}, v_h^-] v_j^+ v_j \\ \text{ou } C' = v_j u v_i v_h C[v_j^+, v_h^-] C[v_h^+, v_i^-] C[v_i^+, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C si $v_h^- \in N_1(v_j^+) \cup N_1(v_h^+)$.

Donc, $\langle v_h, v_h^-, v_h^+, v_i, v_j^+ \rangle \cong K_{1,4}$.

· $v_j^- \notin N_1(v_h) \cup N_1(v_j^+)$ autrement

$$C' = v_j u v_i v_i^+ \overleftarrow{C}[v_i^-, v_j^+] C[v_j^{--}, v_j]$$

prolonge le cycle C si $v_j^{--} = v_i^{++}$. Par conséquent,

$$\begin{cases} \langle v_j^{--}, v_j^-, v_j^+, v_j^{---} \rangle \cong K_{1,3} \text{ et } \langle v_h, v_i^-, v_j, v_j^{--} \rangle \cong K_{1,3} \text{ si } v_i^- = v_h^+ \\ \text{ou } \langle v_h, v_h^+, v_j^{--}, v_j \rangle \cong K_{1,3} \text{ et } \langle v_j^{--}, v_j^-, v_j^+, v_j^{---} \rangle \cong K_{1,3} \text{ si } v_i^- \neq v_h^+ \end{cases}$$

de

* Si $v_j^{---} \in N_1(v_j^-) \cup N_1(v_j^+)$ et $v_j^{--} \notin N_1(v_i^-)$

$$\begin{cases} C' = v_j u C[v_i, v_j^{---}] v_j^- v_j^{--} C[v_j^{--}, v_j] \\ \text{ou } C' = v_j u C[v_i, v_j^{---}] C[v_j^+, v_i^-] C[v_j^{--}, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C sinon

$$C' = v_j u C[v_i, v_j^{---}] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_j^+] C[v_j^{--}, v_j]$$

prolonge le cycle C si $v_j^{---} \in N_1(v_i^-)$.

Donc, $\langle v_j^{--}, v_j^-, v_j^+, v_i^-, v_j^{--} \rangle \cong K_{1,4}$;

* $v_h^+ \notin N_1(v_j) \cup N_1(v_j^{--})$ sinon

$$\begin{cases} \langle v_j, v_j^-, v_j^+, u, v_h^+ \rangle \cong K_{1,4} \\ \text{ou } \langle v_j^{--}, v_j^-, v_j^+, v_h^+, v_j^{--} \rangle \cong K_{1,4} \end{cases}$$

$v_j^- \notin N_1(v_j^-) \cup N_1(v_j^+)$ autrement

$$\begin{cases} C' = v_j u v_i C[v_h, v_i^-] C[v_i^+, v_j^{---}] v_j^- v_j^{--} v_j^+ v_j \\ \text{ou } C' = v_j u v_i C[v_h, v_i^-] C[v_i^+, v_j^{---}] v_j^+ C[v_j^{--}, v_j] \end{cases}$$

prolonge le cycle C

si $v_j^+ = v_h^-$ et par conséquent, $\langle v_h, v_h^-, v_h^+, v_j, v_j^{--} \rangle \cong K_{1,4}$ car

pour

$w \in \{v_h^-, v_h^+\}$, $w \notin N_1(v_j) \cup N_1(v_j^{--})$ sinon

$$\begin{cases} \langle v_j, v_j^-, v_j^+, u, w \rangle \cong K_{1,4} \\ \text{ou } \langle v_j^{--}, v_j^-, v_j^+, w \rangle \cong K_{1,3}. \end{cases}$$

- **Cas 02** : Pour $v_h \in N_1(v_j^-) - N_1(v_j^+)$, $v_i^+ \neq v_i^-$ car dans le cas contraire

$$C' = v_j u v_i v_i^- C[v_i^+, v_j^-] \overleftarrow{C}[v_h, v_j]$$

prolonge le cycle C .

Par conséquent, $\langle v_h, v_h^-, v_h^+, v_j, v_j^- \rangle \cong K_{1,4}$ car $v_h^+ \notin N_1(v_j^-)$ sinon $v_j \notin A$ de :

- $v_j^{--} \notin N_1(v_j^+)$ autrement

$$C' = v_j u v_i \overleftarrow{C}[v_h, v_j^+] \overleftarrow{C}[v_j^{--}, v_i^+] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h^+] v_j^- v_j$$

prolonge le cycle C .

- $v_j^{++} \neq v_h^-$ et $v_j^{++} \notin N_1(v_j^-) \cup N_1(v_h)$ autrement $\langle v_j^-, v_j^{++}, v_j, v_h^+ \rangle \cong K_{1,3}$.

- **Cas 03** : Pour $v_h \in N_1(v_j^-) \cap N_1(v_j^+)$, $v_h^+ \neq v_i^-$ sinon

$$C' = v_j u v_i v_i^- C[v_i^+, v_j^-] \overleftarrow{C}[v_h, v_j]$$

prolonge le cycle C . Donc, $\langle v_h, v_h^+, v_i, v_j^-, v_j^+ \rangle \cong K_{1,4}$ car $v_h^+ \notin N_1(v_j^-)$ sinon $v_j \notin A$ de :

- Si $v_j^- = v_i^+$ ou $v_j^{--} \in N_1(v_j^+)$

$$\begin{cases} C' = v_j u v_i v_i^+ \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h^+] v_j^- \overleftarrow{C}[v_h, v_j] \\ \text{ou } C' = v_j u v_i \overleftarrow{C}[v_h, v_j^+] \overleftarrow{C}[v_j^{--}, v_i^+] \overleftarrow{C}[v_i^-, v_h^+] v_j^- v_j \end{cases}$$

prolonge le cycle C respectivement.

· Si $v_j^+ \neq v_h^-$, alors $v_j^{++} \notin N_1(v_j^-)$ sinon

$$C' = v_j u v_i C[v_h, v_i^-] C[v_i^+, v_j^i] \overleftarrow{C}[v_j^{++}, v_j]$$

prolonge le cycle C si $v_j^{++} = v_h^-$.

Par conséquent, $\langle v_h, v_h^-, v_i, v_j^-, v_j^+ \rangle \cong K_{1,4}$ de

$$C' = v_j u v_i C[v_h, v_i^-] C[v_i^+, v_j^-] C[v_j^{++}, v_h^-] v_j^+ v_j$$

prolonge le cycle C si $v_j^+ \in N_1(v_h^-)$.

□

Preuve du théorème 4.2.1 (Suite):

D'après les lemmes 4.2.1 et 4.2.2, le deux sommets

$$|\{v_h, v_h^o\} \cap A| \leq 1 \text{ pour } o \in \{-, +\}$$

et si $v_h \in A$, alors $\{v_l^-, v_l^+\} \cap A = \emptyset$ pour $l \in \{i, j\}$.

De lemmes 4.2.3 et 4.2.4, la chaîne de triangles est de longueur $k = 1$. Les lemmes 4.2.5 et 4.2.6 et 4.2.7 mènent $v_i^+ \in N_1(v_i^-)$, $v_h \notin N_1(v_j^-) \cup N_1(v_j^+)$ et $v_h \in A$.

Tout ça confirme que $\langle v_i, v_j^-, v_j^+, u, v_h \rangle \cong k_{1,4}$ selon le lemme 4.2.8, qui contredit G sans $k_{1,4}$. ■

Rappelons que, tout ensemble indépendant est également sans P_4 . Donc, le corollaire suivant est une conséquence directe du théorème 4.2.1.

Corollaire 4.2.1. (*A. Sahraoui et Z. Benmeziiane, 2023, [151]*)

Tout graphe connexe localement connexe et partiellement sans grille ayant au moins trois sommets est un graphe à cycle pleinement prolongeable s'il est sans $\{K_4, K_{1,4}\}$ et si son ensemble de centres d'étoiles A est indépendant.

Notons aussi que tout couplage parfait est sans P_4 , donc le corol-

laire suivant est vrai et découle du théorème précédent :

Corollaire 4.2.2. (A. Sahraoui et Z. Benmeziane, 2023, [151])

Tout graphe triangulairement connexe et partiellement sans grille d'ordre au moins trois est un graphe à cycle pleinement prolongeable s'il est sans $\{K_4, K_{1,4}\}$ et si son ensemble de centres d'étoiles A est un couplage parfait.

Également, le corollaire suivant est une conséquence directe des deux corollaires précédents :-

Corollaire 4.2.3. (A. Sahraoui et Z. Benmeziane, 2023, [151])

Tout graphe triangulairement connexe et partiellement sans grille d'ordre au moins trois est un graphe à cycle pleinement prolongeable s'il est sans $\{K_4, K_{1,4}\}$ et si son ensemble de centres d'étoiles A est une partition d'un ensemble indépendant et un couplage parfait.

Comme tout graphe presque sans griffe et partiellement sans griffe, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 4.2.4 (A. Sahraoui et Z. Benmeziane, 2023, [151]). *Tout graphe triangulairement connexe et presque sans griffe d'ordre au moins trois est un graphe à cycle pleinement prolongeable s'il est sans $\{K_4, K_{1,4}\}$.*

Comme tout graphe presque sans griffe et partiellement sans griffe, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 4.2.5 (Sahraoui et Benmeziane(2023)). *Tout graphe triangulairement connexe et presque sans griffe d'ordre au moins trois est un graphe à cycle pleinement prolongeable s'il est sans $\{K_4, K_{1,4}\}$.*

Conclusion

À la fin de cette thèse, on conclut qu'un graphe triangulairement connexe et partiellement sans étoiles est un graphe à cycle pleinement prolongeable s'il est sans sous-graphes induits isomorphes à $\{K_{1,4}, K_4\}$ et de plus son ensemble de centres des étoiles A est sans P_4 .

L'une des outils de la démonstration de ce théorème était la proposition qui caractérisait la classe de graphes partiellement sans étoiles et qui a affirmé que si un graphe $G = (V, E)$ est partiellement sans étoiles et $v \in A$ ensemble des centres des étoiles de G et $x, y \in V - A$ avec $v \in N[x] \cup N[y]$, alors $x, y \in N_1(v) \cup N_2(v)$.

On a exigé aux graphes partiellement sans étoiles d'être sans K_4 mais on a élargé leur ensemble des centres des étoiles par l'exigence d'être sans P_4 au lieu d'un ensemble indépendant.

L'une des questions qui se pose est la conjecture suivante :

Conjecture 4.2.1. *Tout graphe connexe et partiellement sans étoiles et sans $K_{1,4}$ est un graphe à cycle pleinement prolongeable si son ensemble de centres des étoiles A est sans P_3 .*

D'autres questions se posent encore et qui seront nos prochaines perspectives sont les suivantes :

\Leftrightarrow Le graphe triangulairement connexe partiellement sans étoiles et sans $K_{1,4}$ est-il à cycle pleinement prolongeable si son ensemble de centres des étoiles est sans K_3 ?

↔ Les graphes $[3, 1, 6]$ -cycle réguliers définis par M. Mollard [129] et étudié par N. Kahoul dans [94] sont-ils à cycle pleinement prolongeable ?

↔ Plus généralement, Les graphes $[k, 1, 2k]$ -cycle réguliers sont-ils à cycle pleinement prolongeable ?

↔ M. Mollard dans [129] a défini le graphe $[\mu, \lambda]$ -cycle régulier. Un graphe

$G = (V, E)$ de circonférence au moins μ ($\mu \geq 2$) est un graphe $[\mu, \lambda]$ -cycle régulier ($\lambda \geq 1$) s'il existe un sous-ensemble non vide C de cycles élémentaires dans G tel que chaque chaîne $P_{\mu+1}$ dans G appartient à exactement λ cycles dans C . Que doit vérifier le graphe $[\mu, \eta]$ -cycle régulier pour qu'il soit à cycle prolongeable ?

↔ Mulder [131] a introduit le $(0, \lambda)$ -graphe pour lequel deux sommets distincts ont soit 0, soit λ voisins communs. Le $(0, \lambda)$ -graphe est-il à cycle pleinement prolongeable ?

↔ La classe des graphes OTIS (en anglais Optical Transpose Interconnection Systems) est une classe de graphes importante en raison de leurs diverses propriétés souhaitables. Les graphes OTIS font l'objet de recherches actives dans le domaine du traitement parallèle. Des études récentes sont portées sur les graphes OTIS. Le graphe OTIS [109], noté O_G , dérivé du graphe $G = (V, E)$ est un graphe d'ensemble de sommets $V(O_G) = \{(v, g), v, g \in V(G)\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(O_G) = E(O_G^1) \cup E(O_G^2)$ avec

$$\begin{cases} E(O_G^1) = \{((g, p_1), (g, p_2)) / g \in V(G) \text{ et } (p_1, p_2) \in E(G)\} \\ E(O_G^2) = \{((g, p), (g, p)) / g, p \in V(G) \text{ et } g \neq p\} \end{cases}$$

Notre perspective est de déterminer les conditions qui permettent d'affirmer que le graphe OTIS O_G est à cycle prolongeable.

Bibliographie

- [1] S. A. V. Aardt and al. Global cycle properties in locally connected locally traceable. SIAM J. Discrete Applied Mathematics, **205** :171–179, (2016).
- [2] A. Abueida and R. Sritharan. Cycle extendability and hamiltonian cycles in chordal graph classes. Discrete Math., **20 (3)** :669–681, 2006.
- [3] A. Ainouche. Quasi claw-free graphs. Discrete Math., **179** :13–26, (1998).
- [4] A. Ainouche and al. Remarks on hamiltonien properties of claw-free graphs. Ars. Combine., **26** c :110–121, (1990).
- [5] R. E. L. ALDRED and al. A degree characterization of pancyclicity. Discrete Math., **127** :23–29, (1994).
- [6] D. Amar. Applying a condition for a hamiltonian bipartite graph to be bipancyclic. Discrete Math., **111** :19–25, (1993).
- [7] D. Amar and al. Pancyclism in chvátal-erdős’s graphs. Graphs Combin., **7** :101–112, (1991).
- [8] D. Amar and al. Pancyclism in hamiltonian graphs. Discrete Math., **89** :111–131, (1991).
- [9] D. Arangno and D. Brown. 2-connected claw-free chordal graphs are cycle extendable. 10 2013.

- [10] D. C. Arangno. Hamiltonicity Pancyclicity and Cycle Extendability in Graphs. Phd. thesis, Utah State University, 2014.
- [11] A.S. Asratian. Some properties of graphs with local ore condition. Ars Combin., **41** :97–106, (1995).
- [12] A.S. Asratian and G.V. Sarkisian. Some panconnected and pancyclic properties of graphs with a local ore-type condition. Graphs Combin., **12** :209–219, (1996).
- [13] R. Balakrishnan and P. Paulraja. Chordal graphs and some of their derived graphs. Congress. Numer., **53** :71–74, (1986).
- [14] B. Bauer and E. Schmeichel. Hamiltonian degree conditions which imply a graph is pancyclic. J. Combin. Theory, **48**(Ser B) :111–116, (1990).
- [15] L. Beasley and D. Brown. On cycle and bi-cycle extendability in chordal and chordal bipartite graphs. Congressus Numerantium, **174** :41–47, (2005).
- [16] P. Bedrossian and al. A generalization of fan’s condition for hamiltonicity pancyclicity and hamiltonian-connectedness. Discrete Math., **115** :39–50, (1993).
- [17] E.A. Bender and al. Almost all chordal graphs split. J. Austral. Math. Soc., **38**(A) :214–221, (1985).
- [18] A. Benhocine and A.P. Wojda. Gang-hua fan for pancyclic or hamilton-connected graphs. J. Combinatoire Theory, ser B **42** :167–180, (1987).
- [19] Z. Benmeziane and M. Abbas. Hamiltonicity in partly claw-free graphs. RAIRO Oper. Res., **43**(1) :103–113, 2009.
- [20] B. Bollobas and G. Brightwell. Cycles through specified vertices. Combinatorica, **13** :147–155, (1993).
- [21] J. A. Bondy. Properties of graphs with constraints on degrees. Studia. SCi. Math. Hung., **4** :473–475, (1969).

-
- [22] J. A. Bondy. Pancyclic graphs. Proc. Second Louisiana Conf. on Combinatorics Graph Theory and Computing Louisiana State Univ. Baton Rouge LA, pages 167–172, (1971).
- [23] J. A. Bondy. Pancyclic graphs i. J. Combin. Theory Ser. B, **11** :80–84, (1971).
- [24] J. A. Bondy. A remark on two sufficient conditions for hamilton cycles. Discrete Mathematics, **22** (2) :191–193, (1978).
- [25] J. A. Bondy. The theory and applications of graphs. Wiley, 1981.
- [26] J. A. Bondy and V. Chvátal. A method in graph theory. Discrete Math., **15** :111–135, 1976.
- [27] J. A. Bondy and U.S.R. Murty. Graph Theory with Applications. Macmillan Press Ltd (Great Britain) and Elsevier Science Publishing Co., Inc.(USA), 1976.
- [28] J.A. Bondy. Pancyclic graphs : Recent results infinite and finite sets. Colloq. Math. Soc. János Bolyai Keszthely Hungary, pages 181–187, 1973.
- [29] J.A. Bondy. Longest paths and cycles in graphs of high degree. Research Report CORR 80-16 Department of Combinatorics and Optimization Faculty of Mathematics University of Waterloo Ontario Canada, page 14 pages, 1980.
- [30] C. Brause and al. Local connectivity local degree conditions some forbidden induced subgraphs and cycle extendability. Discrete Math., **340** :596–606, (2017).
- [31] H. Broersma and H. Veldman. Restrictions on induced subgraphs ensuring hamiltonicity or pancyclicity of $k_{1,3}$ -free graphs, 1990.
- [32] H. J. Broersma and al. Unifying results on hamiltonian claw-free graphs, 1994.
- [33] H. J. Broersma and al. Toughness and hamiltonicity in almost claw-free graphs. J. Graph Theory., **21** :431–439, (1996).

- [34] H.J. Broersma. Existence of δ_λ -cycles and δ_λ -paths, Winter 1988.
- [35] H.J. Broersma and al. Toughness and hamiltonicity in almost claw-free graphs. Momerandum 1114 Univ. of Twente Enschede, pages 181–194, (1983).
- [36] G. Chartrand and R.E. Pippert. Locally connected graphs. časopis Pěst. Mat., **99** :158–163, 1974.
- [37] G. Chen and al. Cycle extendability of hamiltonian interval graphs. SIAM Journal of Discrete Math., **20** (3) :682–689, (2006).
- [38] X. Chen and al. Hamiltonian properties of almost locally connected claw-free graphs. arscom, **124** :95–109, (2016).
- [39] V. Chvátal. On hamilton’s ideals. J. Combin. Theory, **12(Ser B)** :163–168, (1972).
- [40] V. Chvátal. Tough graphs and hamiltonian circuits. Discrete Math., **5** :255–228, 1973.
- [41] V. Chvátal and P. Erdős. A note on hamiltonian circuits. Discrete Math., **2** :111–113, (1972).
- [42] L. Clark. Hamiltonian properties of connected locally connected graphs. Congr. Numer., **32** :199–204, (1981).
- [43] M. Cream and al. A note on extending bondy’s meta-conjecture. AUSTRALAS. J. COMBIN., **67**(1) :463–469, (2017).
- [44] E. Dahlhaus and al. A characterization of strongly chordal graphs. Discrete Math., **187** :269–27, 1998.
- [45] G.A. Dirac. Some theorems on abstract graphs. Proc. London Math. Soc., **2** :69–81, 1952.
- [46] R. Entringer and E. Schmeichel. Edge conditions and cycle structure in bipartite graphs. Ars Combinatoria, **26** :229–232, (1988).
- [47] P. Erdős. Remarks on a paper of pósa. Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci., **7** :227–229, (1962).

-
- [48] P. Erdős. Some problems in graph theory. in : Hypergraph Seminar Ohio State Univ. Columbus Ohio 1972 in : Lecture Notes in Math., **411** Springer Berlin :187–190, 1974.
- [49] P. Erdős and T. Gallai. Graphs with prescribed degrees of vertices (hungarian). Mat. Lápok, **11** :264–274, (1960).
- [50] G.H. Fan. New sufficient conditions for cycles in graphs. J. Combin. Theory (Ser : B), **37** :221–227, (1984).
- [51] G.H. Fan. New sufficient conditions for cycles in graphs. J. Combin. Theory, **37**(Ser B) :221–227, 1984.
- [52] G. Faudree and al. Pancyclism and small cycles in graphs. Discussiones Mathematicae Graph Theory, **16**(1) :27–40, (1996).
- [53] R. J. Faudree and al. Forbidden subgraphs and cycle extendability. J. Combin. Math. Combin. Comput., **19** :109–128, (1995).
- [54] R. J. Faudree and al. Generalizing pancyclic and k -ordered graphs. Graphs Combin, **20** (3) :291–310, 2004.
- [55] R.J. Faudree and al. Hamiltonian properties and adjacency conditions in $k_{1,3}$ -free graphs. in : Proc. 6th Internat. Conf. Theory and Applications of graphs Kalamazoo MI, (1988).
- [56] R.J. Faudree and al. Neighborhood unions and highly hamiltonian properties in graphs. preprint, 1988.
- [57] R.J. Faudree and al. Neighborhood unions and highly hamiltonian properties in graphs. J. Combin. Theory ser., **47**(B) :1–9, 1989.
- [58] R.J. Faudree and al. The complete closure of a graph. J. Graph Theory, **17** :481–494, (1993).
- [59] R.J. Faudree and al. Degree conditions and cycle extendability. Discrete. Math., **141** :109–122, (1995).
- [60] R.J. Faudree and al. Claw-free graphs-survey. Discrete Math., **164** :87–147, (1997).

- [61] R.J. Faudree and R.H. Schelp. Path connected graphs. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **25** :313–319, (1974).
- [62] O. Favaron and P. Fraisse. Hamiltonicity and minimum degree in 3-connected claw-free graphs. J. Combin. Theory Ser. B, **82** :297–305, (2001).
- [63] E. Flandrin and al. Pancyclism in $K_{1,3}$ -free graphs. PhD thesis, 1990.
- [64] E. Flandrin and al. Hamiltonism and verices with a common neighbor. Rapport de Recherche L. R. I. No 690 Univ. Paris-sud, Orsay, 1991.
- [65] E. Flandrin and al. Hamiltonism degree sum and neighborhood intersection. Discrete Mathematics, **90** :41–52, 1991.
- [66] E. Flandrin and al. On hamiltonian claw-free graphs. Discrete Math., **111** :221–229, (1993).
- [67] E. Flandrin and al. A note on pancyclism of highly connected graphs. Discrete Math., **286** :57–60, (2004).
- [68] E. Flandrin and al. A chvátal-erdős type condition for pancyclability. Discussiones Mathematicae Graph Theory, **26** :335–342, (2006).
- [69] E. Flandrin and H. Li. Hamiltonism and neighborhood intersections. Rapport de recherche 406, Université Paris-sud L. R. I. Bât. 490. 91405 Orsay France, 1988.
- [70] E. Flandrin and H. Li. Chvátel-Erdős condition in 3-connected claw-free graphs. Rapport de recherche 406, L. R. I. No. 500. Univ. Paris-Sud Orsay France, 1989.
- [71] E. Flandrin and H. Li. Hamiltonian and claws. Ars Combinatoria, **29(C)** :77–89, (1990).
- [72] H. Fleischner. The square of every two-connected graph is hamiltonian. J. Combin. Theory, **16** :29–34, (1974).

-
- [73] S. Foldes and P. L. Hammer. Split graphs having dilworth number two. Canadian Journal of Mathematics, **29** (3) :666–672, (1977).
- [74] P. Fraisse. d_λ -cycles and their applications for hamiltonian graphs. preprint, 1987.
- [75] M. R. Garey and D. S. Johnson. Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness. New York : W. H. Freeman, September 1983.
- [76] M. C. Golumbic. Algorithmic graph theory and perfect graphs. Academic Press, 1980.
- [77] M. C. Golumbic and C. F. Goss. Perfect elimination and chordal bipartite graphs. J. Graph Theory, **2** :155–163, 1978.
- [78] S. Goodman and S. Hedetniemi. Sufficient conditions for a graph to be hamiltonian. J. Combin. Theory (B), **16** :175–180, 1974.
- [79] V.S. Gordon and al. Hamiltonian properties of locally connected graphs with bounded vertex degree. Discrete Appl. Math., **159** :1759–1774, 2011.
- [80] R. J. Gould. Traceability in graphs. Doctoral Thesis, Western Mochigan University, (1979).
- [81] R. Häggkvist. Odd cycles of specified length in nonbipartite graphs. Ann. Discrete Math., **62** :89–99, (1982).
- [82] R. Häggkvist and al. Pancyclic graphs. Ars Combinatoria, **11** :37–49, (1981).
- [83] R. Häggkvist and G.Nicoghossian. A remark on hamiltonian cycles. Journal of Combinatorial Theory, **30(1)(B)** :118–120, 1981.
- [84] R. Häggkvist and C. Thomassen. Circuits through specified edges. Discrete Math., **41** :29–34, (1982).
- [85] F. Harary. Graph theory. Addison-Wesley Reading Mass., page 59, 1969.

- [86] A. Harlan and al. Hamiltonian cycles avoiding sets of edges in a graph. Australasian J. Combinatorics, **48** :191–203, (2010).
- [87] A. Harris. Cycle structures in graphs. PhD thesis University of Colorado Denver, 2009.
- [88] A. S. Hasrarian and N. K. Khachatryan. A two theorems on a hamiltonian graphs(russian). Math. Zametki, **35** No.1 :55–61, (1984).
- [89] G. R. T. Hendry. Extending cycles in directed graphs. J. Graph Theory Ser. B, **46** :162–172, (1989).
- [90] G. R. T. Hendry. Extending cycles in graphs. Discrete Math., **85** :59–72, (1990).
- [91] B. Jackson. Hamilton cycles in regular 2-connected graphs. J. Combin. Theory (B), **29** :27–46, 1980.
- [92] B. Jackson and O. Ordaz. Chvátal-erdős s conditions for paths and cycles in graphs and digraphs. A survey, Discrete Math., **84** :241–254, (1990).
- [93] T. Jiang. Planar hamiltonian chordal graphs are cycle extendable. Discrete Math., **257** (2-3) :441–444, (2002).
- [94] N. Kahoul and A. Berrachedi. Cycle-regular graphs of (0λ) -graph type. Discrete Mathematics, **310**(2) :255–259, 2010.
- [95] T. Kaiser and P. Vrána. Hamilton cycles in 5-connected line graphs. European J. Combin., **33** :924–947, (2012).
- [96] R. M. Karp.
- [97] P. Keevash and B. Sudakov. Pancyclicity of hamiltonian and highly connected graphs. J. Combin. Theory Ser. B, **100** :456–467, (2010).
- [98] P.B. Kikust. The existence of a hamiltonian cycle in a regular graph of degree 5 [russian latvian summary]. in : Latvian Mathematical Yearbook, **16** :33–38, (1975).

-
- [99] H. Kronk. Generalization of a theorem of pósa. Proceed. of the AMS, **21**(1) :77–78, (1969).
- [100] E.J. Kuipers and H.J. Veldman. Recognizing claw-free hamiltonian graphs with large minimum degree. Memorandum 1437 University of Twente, 1998.
- [101] M. Lafond and B. Seamone. Hamiltonian chordal graphs are not cycle extendable. SIAM J. Discret.Math., **29**(2) :877–887, (2015).
- [102] H. Lai and al. Triangularly connected claw-free graph. Preprint, (2004).
- [103] H. J. Lai and al. Hamiltonian n_2 -locally connected claw-free graphs. J. Graph Theory, **48** (2) :142–146, (2005).
- [104] H. J. Lai and al. Every 4-connected line graph of a quasi claw-free graph is hamiltonian connected. Discrete Mathematics, **308** :5312–5316, (2008).
- [105] H.J. Lai and al. Hamiltonicity in 3-connected claw-free graphs. J. Combin. Theory Ser. B, **96** :493–504, (2006).
- [106] C. Lee and B. Sudakov. Hamiltonicity independence number and pancyclicity. European Journal of Combinatorics, **33** :449–457, (2012).
- [107] G. Li and al. Hamiltonian cycles in 3-connected claw-free graphs. Discrete Math., **250** :137–151, (2002).
- [108] H. Li. On cycles in 3-connected graphs. Graphs and Combinatorics, **16**(3) :319–335, (2000).
- [109] H. X. Li and al. Topology-based analysis of otis (swapped) networks o_{K_n} and o_{P_n} . Journal of Chemistry, 2019.
- [110] M. Li. On hamiltonian claw-free graphs. Preprint, 1991.
- [111] M. Li. Pancyclism in claw-free graphs. J. Nanjing Univ. Nat. Sci, **27** :123–126, (1991).

- [112] M. Li. Hamiltonian cycles in regular 2-connected claw-free graphs in : J.a. bondy ed. basic graph theory : Paths and circuits. (North-Holland Amsterdam), **75**, 1992.
- [113] M. C. Li. Hamiltonian cycles in regular 3-connected claw-free graphs. Discrete math., **156** :171–196, (1996).
- [114] M. C. Li. Hamiltonicity cycles in almost claw-free graphs. Graphs and Combinatorics, **17** :687–706, (2001).
- [115] M.C. Li. Hamiltonian cycles in 3-connected claw-free graphs. J. Graph Theory, **17** :303–313, (1993).
- [116] M.C. Li. Hamiltonian properties of claw-free graphs. Ph.D. Thesis University of Toronto, 1998.
- [117] M.C. Li and al. Circumferences and minimum degrees in 3-connected claw-free graphs. Discrete Math., **309** :3580–3587, (2009).
- [118] R. Li. Hamiltonicity of 3-connected quasi claw-free graphs. Discrete math., **265** :393–399, (2003).
- [119] T.E. Lindquister. The effects of distance and neighborhood union condition on hamiltonian properties in graphs. J. Graph Theory, **13** :335–352, (1989).
- [120] Y. Liu and al. 2-connected k -regular graphs on at most $3k + 3$ vertices to be hamiltonian. J. Systems Sci. Math. Sci., **6** :36–49, (1986).
- [121] Y. Liu and Z. Wu. Hamiltonian cycles of 2-connected regular $k_{1,3}$ -free graphs. preprint Nanjing University. china, (1987).
- [122] Z. Liu and M. C. Li. Hamiltonian cycles of 3-connected regular claw-free graphs. J. Qufu Normal University, **18** :1–8, (1992).
- [123] D. Lou. The chvátal-erdős condition for cycles in triangle-free graphs. Discrete Math., **152** :253–257, (1996).
- [124] L. R. Markus. results in $k_{1,r}$ -free graphs. Congr. Numer., **98** :143–149, (1993).

-
- [125] H. Matthews and D. Sumner. Hamiltonian results in $k_{1,3}$ -free graphs. J. Graph Theory, **8** :139–146, 1984.
- [126] M. Matthews and D. Sumner. Longest paths and cycles in $k_{1,3}$ -claw-free graphs. J. Graph Theory, **9** :269–277, (1985).
- [127] T. A. McKee. Chordal bipartite strongly chordal and strongly chordal bipartite graphs. Discrete Math., **260** :231–238, 2003.
- [128] J. Mitchem and E. Schmeichel. Pancyclic and bipancyclic graphs. J Graph Theory, **6** :429–439, (1982).
- [129] M. Mollard. Quelques problèmes combinatoires sur l'hypercube et les graphes de hamming. Thèse Doctorat es-Science Université Joseph Fourier Grenoble, (1989).
- [130] J.W. Moon and L. Moser. On hamiltonian bipartite graphs. Israel J. Math., **1** :163–165, (1963).
- [131] H.M. Mulder. $(0, \lambda)$ -graphs and n-cubes. Discrete Math., **28** :179–188, (1979).
- [132] C. J. A. Nash-Williams. Edge-disjoint hamiltonian circuits in graphs with vertices of large valency. in "Studies in Pure Mathematics" (L. Mirsky Ed.) Academic Press London, pages 157–183, 1971.
- [133] C. J. A. Nash-Williams. Hamiltonian arcs and circuits. mimeographed lecture text University of Waterloo, (1971).
- [134] D.J. Oberly and D.P. Sumner. Every connected, locally connected nontrivial graph with no induced claw is hamiltonian. J. Graph Theory, **3** :351–356, (1979).
- [135] O. Ore. Note on hamilton circuits. American Mathematical Monthly, **67** :55, 1960.
- [136] O. Ore. Hamilton connected graphs. J. Math. Pures Appl., **42** :21–27, (1963).

- [137] C.M. Pareek and Z. Skupień. On the smallest non-hamiltonian locally hamiltonian graph. J. Univ. Kuwait (Sci.), pages 9–16, 1983.
- [138] C.M. Pareek and Z. Skupień. On the smallest non-hamiltonian locally hamiltonian graph. J. Univ. Kuwait (Sci.), **10** :103–120, 1983.
- [139] M. D. Plummer. 2-extendability and hamiltonicity in two classes of claw-free graphs. preprint, 1992.
- [140] L. Pósa. A theorem concerning hamilton lines. Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., **7** :225–226, 1962.
- [141] L. Pósa. On the circuits of finite graphs. Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., **8** :355–361, (1964).
- [142] E. X. Y. Qu and J. Wang. Vertex pancyclicity in quasi-claw-free graphs. Discrete Mathematics, **309** :1135–1141, (2009).
- [143] X. Qu and H. Lin. Quasilocally connected almost locally connected or triangularly connected claw-free graphs. Discrete Geometry Combinatorics and Graph Theory, pages 162–165, (2007).
- [144] R.E. Ramos and A.L. Babierra. Highly hamiltonian $\{K_{1,3}, P_4\}$ -free graph. Southeast Asian Bull. Math., **36** :529–534, (2012).
- [145] F.P. Ramsey. On a problem of formal logic. Proc. Lond. Math. Soc., **30** :264–286, (1930).
- [146] B. Randerath and al. Vertex pancyclic graphs. Discrete Applied Mathematics, **120** :219–237, (2002).
- [147] G. Rong and al. Cycle extendability of hamiltonian strongly chordal graphs. SIAM Journal on Discrete Mathematics, **35** (**3**) :2115–2128, (2021).
- [148] Z. Ryjáček. Almost claw-free graphs. J. Graph Theory, **18** :469–477, (1994).

-
- [149] Z. Ryjáček. Problem 416. weak pancyclicity of locally connected graphs. Discrete Math., **272** :305–306, (2003).
- [150] Z. Ryjáček. On a closure concept in claw-free graphs. J. Combin. Theory Ser. B, **70** :217–224, (1997).
- [151] A. Sahraoui and Z. Benmeziane. Hamiltonicity and pancyclicity of superclasses of claw-free graphs. Filomat, **37** :14 :4771–4783, (2023).
- [152] U. Schelten and I. Schiermeyer. Small cycles in hamiltonian graphs. Discrete Appl. Math., **79** (1-3) :201–211, (1997).
- [153] E. Schmeichel and S. Hakimi. A cycle structure theorem for hamiltonian graphs. J. Combin. Theory, **45** (B) :99–107, (1988).
- [154] E. Schmeichel and S. L. Hakimi. Pancyclic graphs and a conjecture of bondy and chvatěl. J. Combin. Theory, **17** :22–34, (1974).
- [155] E. Schmeichel and J. Mitchem. Bipartite graphs with cycles of all even lengths. J. Graph Theory, **6** :429–439, (1982).
- [156] R. Shen and al. Hamiltonicity of k -connected graphs with claws. ir.amss.ac.cn, 1997.
- [157] R. Shi. 2-neighborhoods and hamiltonian conditions. J. Graph Theory, **16** (3) :267–271, (1992).
- [158] Z. Skupień. Locally hamiltonian graphs and kuratowski’s theorem. Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys, **13** :615–619, 1965.
- [159] Z. Skupień. Locally hamiltonian and planar graphs. Fund. Math., **58** :193–200, 1966.
- [160] L. Stacho. Degrees neighborhoods and closure operations, 1990. Preprint.
- [161] D. P. Sumner. Graphs with 1-factor. Proc. Am. math. Soc., **42** :8–13, (1974).

- [162] Y. Teng and H. You. Every connected almost locally connected quasi-claw-free graph g with $|v(g)| \geq 3$ is fully cycle extendable. Journal of Shandong National University (Nature Science), **17**(4) :5–8, (2002).
- [163] B. Thomas. Cycle extendability in graphs. manuscript : Denver CO, 2010.
- [164] C. Thomassen. Reflections on graph theory. J. Graph Theory, **10** :309–324, (1986).
- [165] H. Trommel and al. Pancyclicity of claw-free hamiltonian graphs. Discrete Mathematics, **197/198** :781–789, (1999).
- [166] W. T. Tutte. A short proof of the factor theorem for finite graphs. Canad. J. Math., **6** :347–352, (1954).
- [167] L. Vergnas. Sur les hypergraphes bichromatiques. 2006.
- [168] E. Vumar. On the circumference of 3-connected quasi claw-free graphs. Graphs and Combinatorics, **22** (2) :271–282, (2006).
- [169] I. Wei. Hamiltonian paths and hamiltonian connectivity in graphs. Discrete Mathematics, **121** :223–228, (1993).
- [170] L.M. Xiong. On subpancyclic line graphs. Preprint, 1995.
- [171] T. Yamashita. On degree sum conditions for long cycles and cycles through specified vertices. Discrete Math., **308** :6584–6587, (2008).
- [172] M. Zhan. vertex pancyclicity in quasi claw-free graphs. Discrete mathematics, **307** :1679–1683, (2007).
- [173] M. Zhan. Full cycle extendability of triangularly connected almost claw-free graphs. Ars Combinatoria, **96** :489–497, 2010.
- [174] M. Zhan and S. Zhan. Full cycle extendability of nearly claw-free graphs. ABS Combinatoria, **127** :339–356, (2016).
- [175] C. Q. Zhang. Hamilton cycles in claw-free graphs. J. Graph Theory, **12** :209–216, (1988).

- [176] C. Q. Zhang. Cycles of given length in some $k_{1,3}$ -free graphs. Discrete Math., **78** :307–313, (1989).
- [177] S.M. Zhang. Pancyclism and bipancyclism of hamiltonian graphs. J. Combin. Theory, **60** (Series B) :159â168, (1994).