

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
FACULTE DE GENIE CIVIL



THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de **DOCTORAT d'ETAT**

En Génie Civil

Spécialité : CONSTRUCTION

Par **IHADDOUDENE ABD-NACER-TOUATI**

Thème

**ANALYSE DE LA STABILITE DES STRUCTURES
A ASSEMBLAGES SEMI-RIGIDES**

Soutenue le mercredi 24 Décembre 2008, devant le jury composé de:

Mr D. BENOUAR	Professeur, USTHB.	Président
Mr M. CHEMROUK	Professeur, USTHB.	Directeur de thèse
Mr M. ABED	Professeur, Université de BLIDA.	Examineur
Mr A. ALI BENYAHIA	Professeur, USTHB.	Examineur
Mr M. SAIDANI	Professeur, Université de Coventry(UK)	Examineur
Mr N. LAOUAMI	Directeur de Recherche, C.G.S	Examineur

A la mémoire de mes parents, SOLIMAN et FATMA

à mon frère ALLAOUA

à mes sœurs HANIFA, SALEHA, KHADIDJA, AICHA et DAOUYA.

à mes beaux frères, feu MAHFOUD, MOULOUD, SALIM et HAFID

à mes beaux-parents EMBAREK et LOUIZA

à tous mes neveux et nièces dont, FERIEL, SABRINA, FARAH, KAMILA, WAFA

à toute ma famille

à tous mes amis.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mon directeur de thèse, le professeur **Chemrouk M**, pour avoir dirigé mes travaux de recherches ainsi que pour les encouragements et les subtiles orientations prodiguées tout au long de cette étude et dont le soutien m'a permis de mener cette thèse doctorale dans de bonnes conditions et avec un certain degré de liberté.

C'est avec un grand honneur que je tiens à adresser mes sincères remerciements au professeur **Benouar D**, de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène (U.S.T.H.B), qui a bien voulu accepter de présider le jury ainsi que pour l'intérêt qu'il lui a porté.

Ma reconnaissance va aux professeurs **Abed M**, de l'Université de Blida, **Ali Benyahia A**, de l'Université de Bab Ezzouar, **Saidani M**, de l'Université de Coventry (U.K), **Laouami N**, du Centre National de Recherche Appliquée en Génie Parasismique (C.G.S), qui ont bien voulu faire partie du jury, examiner mon travail et l'enrichir par leur inestimables remarques et critiques.

Je tiens à remercier tous les collègues et amis pour leur soutien et aide dont particulièrement : **Akchiche M**, **Badaoui M**, **Djermane M**, **Haddadi S**, **Djellab SE**, **Adman R**.

Enfin, un grand merci à ma femme **Samira** ainsi qu'à mes filles **Ines-Kenza** et **Amina-Zahra** pour leur compréhension et leur patience tout le long de cette thèse.

ملخص

إن الاختلاف بين دوران العقد و العناصر على مستوى الوصلات له تأثير جد مهم على الطابع العام للهياكل المستقرة المتكونة من أعمدة و روافد. الهدف من هذه الأطروحة هو تقديم صيغة تحليلية للطابع الشبه صلب الخاص بالوصلات مع الأخذ بعين الاعتبار ظاهرة الانبعاج و المجال الغير خطي للمادة. إن النموذج الميكانيكي المبسط المقترح في هذا العمل يتمثل في تشابه ثلاث نوابض مع إدخال عناصر العقد الغير مشوهة قصد انجاز هياكل مستقرة مع إدخال الطابع الشبه صلب للوصلات. مقارنة لحالات مأخوذة من أعمال منشورة متعددة أثبتت نجاعة الطريقة ألمنجزة والمقترحة في هذا العمل بدقة عالية.

RESUME

La distinction entre la rotation du nœud et celle des éléments au niveau des assemblages entraîne des répercussions très importantes sur le comportement global d'une structure auto-stable de poutre-poteau métallique.

Le présent travail consiste à établir une formulation analytique du comportement des assemblages semi rigides en tenant compte du phénomène de flambement et des non-linéarités matérielles (plasticité).

Un modèle mécanique simple, reposant sur l'analogie des trois ressorts avec en plus l'introduction de l'élément de nœud indéformable, pouvant refléter la stabilité des structures en tenant compte de la spécificité des nœuds d'assemblage, a été développé et validé. Il a l'avantage de pouvoir fournir, dans le cas de la prise en compte des non linéarités matérielle et géométrique, l'ensemble des informations quantitative et qualitative requises pour permettre de porter un jugement sur la performance de la structure étudiée.

Des études comparatives réalisées avec différents exemples trouvés dans la littérature ont été établies et une très bonne concordance des résultats est obtenue.

SYMMARY

The distinction between rotation of the node and that of the elements at the assembling joint leads to significant impacts on the overall behavior of a steel beam-column connection.

The present work consists of establishing an analytical formulation of the behavior of semi-rigid joints taking into account the phenomenon of buckling and the material non-linearities (plastic state).

A simple mechanical model based on the analogy of the three springs with the introduction of a non-deformable node's element, which can reflect the stability of structures taking into account the specificity of the assembling joint, has been developed and validated. It has the advantage of providing, in the case of taking into account material and geometric non-linearities, all the quantitative and qualitative informations required for the evaluation of the performance of the structure studied.

Comparative studies between the proposed mechanical model and various existing ones taken from the literature were made and a good concordance of the results is obtained.

SOMMAIRE

Remerciements.....	i
Résumés.....	ii
Sommaire.....	iii
Liste des figures.....	vii
Liste des tableaux.....	xi
Notations.....	xiii
INTRODUCTION GENERALE.....	1
CHAPITRE 1 - CLASSIFICATIONS DES ASSEMBLAGES.....	4
INTRODUCTION.....	4
COMPORTEMENT REEL DES ASSEMBLAGES.....	4
1.2.1. Incidences du comportement des assemblages semi rigides.....	5
1.2.2. Idéalisations d'un assemblage.....	6
1.2.3. Intérêts de la prise en compte de la semi rigidité.....	7
1.1. CAMPAGNES EXPERIMENTALES.....	7
1.4. CLASSIFICATION DES ASSEMBLAGES.....	8
1.4.1. Classification par rigidité.....	9
1.4.2. Classification en résistance.....	9
1.4.3. Classification par ductilité.....	10
1.5. DIVERSES CLASSIFICATIONS REGLEMENTAIRES.....	11
1.5.1. Selon les différents types d'assemblages.....	11
1.5.2. Classification selon l'Eurocode 3.....	13
1.5.3. Classification selon le règlement AISC/LRFD.....	14
1.5.4. Classification selon Bjorhovde et al.....	15
1.6. CONCLUSION	17
CHAPITRE 2 - MODELES DE COMPORTEMENT DES ASSEMBLAGES.....	18
2.1. INTRODUCTION.....	18
2.2. MODELISATION MATHEMATIQUE DE LA COURBE MOMENT-ROTATION	18
2.2.1. Formulation des modèles mathématiques d'assemblage.....	18
2.2.2. Classification des modèles d'assemblages.....	19

2.2.2.1. Modèle linéaire.....	19
2.2.2.2. Modèle multilinéaire.....	20
2.2.2.3. Modèle polynomial.....	21
2.2.2.4. Modèles exponentiels.....	22
2.3. MODELES MECANIKES.....	26
2.3.1. Modèle mécanique de l'Eurocode 3.....	26
2.3.1.1. Méthode des composantes.....	26
2.3.1.2. Etapes de la méthode des composantes.....	27
2.3.1.3. Composantes et loi moment-rotation.....	29
2.3.1.4. Rigidité initiale.....	30
2.3.2. Modèle mécanique de l'assemblage (Chan et Chui).....	31
2.3.3. Da Silva et al.....	33
2.3.4. Jaspert.....	34
2.4. PROPOSITIONS.....	35
2.4.1. Modèle mécanique développé.....	35
2.4.2. Modèle mathématique.....	37
2.5. CONCLUSIONS.....	37
CHAPITRE 3 - ANALYSE DE LA STABILITE DES STRUCTURES.....	39
3.1. INTRODUCTION.....	39
3.2. ANALYSE DU COMPORTEMENT D'UN ELEMENT BARRE COMPRIMEE.....	39
3.2.1. Les facteurs influençant le comportement des barres.....	40
3.2.1.1. Influence des contraintes résiduelles.....	40
3.2.1.2. Influences des déformées initiales.....	41
3.2.1.3. Influences de types d'appuis.....	41
3.2.2. Instabilité élastique d'un poteau droit (Modèle d'Euler).....	43
3.2.2.1. Equation différentielle de l'élément barre.....	43
3.2.2.2. Concept de longueur de flambement.....	44
3.2.2.3. Méthode des nomogrammes.....	45
3.2.2.4. Poutre isolée et poutre réelle.....	48
3.3. ANALYSE DU COMPORTEMENT DE L'ELEMENT POUTRE-POTEAU.....	53
3.3.1. Equation différentielle pour le cas d'une compression – flexion.....	53
3.3.1.1. Les différents cas de chargement.....	55

3.3.1.2. Influence de la déformée initiale.....	57
3.4. ANALYSE ELASTIQUE AU SECOND ORDRE:FORMULATION MATRICIELLE	
3.4.1. ETABLISSEMENT DES FONCTIONS DE STABILITE.....	60
3.4.2. MATRICE DE RIGIDITE.....	60
3.4.2.1. Cas des extrémités fixes à nœuds rigides.....	60
3.4.2.2. Cas de translations des extrémités à nœuds rigides.....	62
3.4.2.3. Autres formulations.....	66
3.4.3. MATRICE DE RIGIDITE POUR ELEMENTS A NŒUDS SEMI RIGIDES	
3.4.3.1. Méthode des rotations aménagée.....	71
3.4.4. CODES ET REGLEMENTS.....	73
3.4.4.1. Code Européen (EC 3).....	73
3.4.4.2. Code Américain (AISC /LRFD).....	75
3.4.5. REMARQUES.....	76
3.5. CONCLUSION.....	77

**CHAPITRE 4 - ANALYSE DE LA RIGIDITE DES ELEMENTS ELASTIQUES
LINEAIRES EN ROTATION EN TENANT COMPTE DU
FLAMBEMENT.....**

4.1. INTRODUCTION.....	78
4.2. ETABLISSEMENT DE LA MATRICE DE RIGIDITE.....	78
4.2.1. Equations d'équilibre et différentielle de l'élément.....	78
4.2.2. Matrice de rigidité dans le repère local.....	85
4.2.3. Matrice de rigidité dans le repère global.....	89
4.3. VECTEUR FORCES DE L'ELEMENT.....	90
4.3.1. Vecteur forces de l'élément dans le repère local.....	90
4.3.2. Vecteur forces de l'élément dans le repère global	91
4.4. LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.....	92
4.4.1 Méthode des éléments finis avec le modèle déplacement	92
4.4.2. Conditions sur la matrice de rigidité.....	92
4.5. CONCLUSIONS.....	93

CHAPITRE 5 - VALIDATIONS DU MODELE.....

5.1. NON LINEARITE MATERIELLE.....	94
5.1.1. Procédures de calcul.....	94

5.2. NON LINEARITE GEOMETRIQUE.....	97
5.3. APPLICATIONS NUMERIQUES.....	101
5.3.1. Exemple de S.L. Chan : Analyse linéaire.....	101
5.3.2. Comparaisons des différentes analyses.....	103
5.3.2.1. Portique à deux étages.....	104
5.3.2.2. Portique à deux travées.....	106
5.4. NON LINEARITE GEOMETRIQUE.....	107
5.4.1. Exemples de Mageirou et al.....	107
5.4.2. Portique étagés.....	109
5.4.3. Portique à un étage.....	110
5.5. NON LINEARITE MATERIELLE.....	112
5.6. COMPARAISONS	114
5.7. CONCLUSIONS.....	116
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES.....	117
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	121
ANNEXES :CAS PARTICULIERS DU FLAMBEMENT.....	134
ANNEXE A :RIGIDITE D'UN ELEMENT SUR DEUX APPUIS RIGIDES.....	134
ANNEXE B :RIGIDITE DES ELEMENTS A APPUIS ELASTIQUES LINEAIRES	137

LISTE DES FIGURES

Chapitre 1

Figure 1.1	Classification des assemblages selon leur rigidité.....	4
Figure 1.2	Courbes ($M - \theta$) de nœuds d'assemblage semi rigides.....	5
Figure 1.3	Influence des assemblages semi rigides sur les structures.....	6
Figure 1.4	Courbes moment rotation.....	7
Figure 1.5	Classification en rigidité des assemblages.....	9
Figure 1.6	Classification en résistance de l'assemblage.....	10
Figure 1.7	Les courbes moment rotation pour différents types d'assemblage.....	12
Figure 1.8	Courbe moment rotation du nœud d'assemblage.....	13
Figure 1.9	Classification selon l'Eurocode 3	13
Figure 1.10	Classification selon le règlement LRFD.....	15
Figure 1.11	Critère adimensionnel de Bjorhovde et al	16

Chapitre 2

Figure 2.1	Modèles linéaires.....	20
Figure 2.2	Modèle proposé par Jaspart	20
Figure 2.3	Modèle de Hon et Melchers.....	23
Figure 2.4	Courbe moment rotation de Richard-Abott.....	25
Figure 2.5	Courbe moment rotation de Chen et Kishi.....	25
Figure 2.6	Les composantes d'un assemblage poutre-poteau.....	27
Figure 2.7	Loi moment-rotation d'un assemblage [EC3].....	29
Figure 2.8	Modèles de ressorts pour un assemblage avec platine d'extrémité boulonnée.....	31
Figure 2.9	Élément de ressort.....	32
Figure 2.10	Modèle de l'élément idéalisé (Chan et al).....	32
Figure 2.11	Modèle mécanique pour un assemblage de poutre-poteau soudé.....	34
Figure 2.12	Modèle mécanique pour un assemblage platine d'extrémité étendue..	34
Figure 2.13	Modèle mécanique pour les assemblages boulonnés poutre-poteau...	35
Figure 2.14	Modèle mécanique proposé.....	36

Figure 2.15 Analogie des ressorts.....	36
---	----

Chapitre 3

Figure 3.1 : Courbe de comportement de barres en compression.....	40
Figure 3.2 : Influence des contraintes résiduelles.....	41
Figure 3.3 : Influence des déformées initiales.....	42
Figure 3.4 : Influence des types d'appuis.....	42
Figure 3.5 : Modèle d'Euler.....	43
Figure 3.6 : Nomogrammes.....	46
Figure 3.7 : Rotation des poutres.....	47
Figure 3.7. a - Nœuds fixes.....	47
Figure 3.7. b - Nœuds déplaçables.....	47
Figure 3.8 : Poutre poteau sous un chargement quelconque.....	54
Figure 3.9 : Moments aux extrémités.....	55
Figure 3.10 : Charge uniformément répartie.....	56
Figure 3.11 : Moments de premier et de second ordre.....	58
Figure 3.12 : Différentes positions du moment maximum.....	60
Figure 3.13 : Élément sous charge axiale et moments aux extrémités.....	60
Figure 3.14 : Élément de réduction.....	61
Figure 3.15 : Élément poutre-poteau.....	69
Figure 3.16 : Élément sous charge axiale et moments aux extrémités.....	71
Figure 3.17 : Illustration de la méthode $B_1 - B_2$	75
Figure 3.17. a – 1 ^{ère} analyse.....	75
Figure 3.17. b – 2 ^{ième} analyse.....	75

Chapitre 4

Figure 4.1 : Élément barre à noeuds semi rigides.....	79
Figure 4.2 : Élément k_{2j} de la matrice de rigidité \overline{K}_e	81
Figure 4.3 : Élément barre à nœuds semi rigides en translation.....	83
Figure 4.4.a . Vecteur force dans le repère local.....	91
Figure 4.4.b . Vecteur force dans le repère global.....	91

Chapitre 5

Figure 5.1 : Procédure du calcul pas à pas de la charge de rupture plastique.....	95
Figure 5.2: Les différents domaines de stabilité, instabilité.....	98
Figure 5.3: Principales étapes de la procédure de calcul de la charge critique.....	99
Figure 5.4 : Exemple de la référence (Chan et Chui, 2000).....	101
Figure 5.5: Diagrammes des moments (Chan et Chui, 2000).....	102
Figure 5.6: Différentes courbes de comportements.....	104
Figure 5.7: Portique à deux étages.....	104
Figure 5.8: Comparaisons des différents comportements.....	105
Figure 5.9 : Portique à deux travées.....	106
Figure 5.10: Diagramme des moments fléchissants	106
Figure 5.11: Systèmes étudiés (Mageirou et al, 2006).....	108
Figure 5.12 : Portique étagé de la référence (Mageirou et al, 2006).....	109
Figure 5.13: Portique à un étage (Mageirou et al, 2006).....	111
Figure 5.13.a : Nœuds déplaçables	111
Figure 5.13.b : Nœuds fixes.....	111
Figure 5.14 : Portique à nœuds semi rigides.....	112
Figure 5.15: Quatre nœuds semi rigides, ordre d'apparition des rotules plastiques....	114
Figure 5.16 : Ordre d'apparition des rotules plastiques.....	115
Figure 5.16.a : Poutre à nœuds rigides.....	115
Figure 5.16.b : Portique à nœuds semi rigides.....	115

Annexes

Figure A.1: Extrémité encastrée – articulé.....	135
Figure A.1.a : Rotation unitaire $\theta_i = 1$	135
Figure A.1.b : Translation unitaire $\Delta_i = 1$	135
Figure B.1: Élément semi rigide –articulé.....	137
Figure B.1. a: Rotation unitaire $\theta_i = 1$	137
Figure B.1. b: Translation unitaire $\Delta_i = 1$	137
Figure B.2: Élément semi rigide – encastré.....	139

Figure B.2.a: Rotation unitaire $\theta_i = 1$	139
Figure B.2.b : Translation unitaire $\Delta_i = 1$	139

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre 1

Tableau 1.1 : Valeurs limites des rigidités du nœud d'assemblage (EC3).....	14
Tableau 1.2 : Classification selon AISC/LRFD.....	14
Tableau 1.3 : Classification Bjorhovde et al.....	15

Chapitre 3

Tableau 3.1: Les différents types d'appuis idéalisés.....	44
Tableau 3.2: Expressions des fonctions ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 et ϕ_4	64
Tableau 3.3 : Moments d'encastrement pour l'élément poutre-poteau.....	71

Chapitre 4

Tableau 4.1 : Les expressions k_{2j} dans différentes situations.....	82
Tableau 4.2 : Différentes configurations du noeud d'assemblage.....	82
Tableau 4.3 : Différents types d'appuis.....	84
Tableau 4.4 : Matrice de rigidité de l'élément barre à nœuds d'assemblages semi rigides.....	87
Tableau 4.5: Matrice de rigidité pour différentes analyses et différents comportements des nœuds d'assemblages.....	88

Chapitre 5

Tableau 5.1 : Les valeurs des moments de flexion, présente étude (Chan et al)...	103
Tableau 5.2 : Comparaisons des valeurs de la charge critique pour le cas (a).....	108
Tableau 5.3 : Comparaisons des valeurs de la charge critique pour le cas (b).....	108
Tableau 5.4: La valeur des charges critiques obtenues selon différentes méthodes et la présente étude.....	109
Tableau 5.5: La valeur des charges critiques obtenues selon différentes méthodes (Mageirou et al, 2006) et présente étude : Cas du portique à nœuds déplaçables.....	110
Tableau 5.6: La valeur des charges critiques obtenues selon différentes méthodes (Mageirou et al, 2006) et présente étude : Cas du portique à nœuds	

fixes.....	111
Tableau 5.7 : Les moments fléchissants dans les sections critiques.....	114
Tableau 5.8: Comparaisons de résultats.....	115

Notations

θ : Rotation de l'assemblage

M : Moment fléchissant de l'assemblage

k : Flexibilité de l'assemblage

k_1 et k_2 : Flexibilités des assemblages, respectivement aux "i" et "j".

N : Effort normal

M_i et M_j : Moments fléchissants aux deux extrémités

w : Quantité $\frac{EI}{L}$

k_{ij} : Élément de la matrice de rigidité, qui est la réaction suivant la direction "j" due au déplacement unitaire suivant la direction "i".

\overline{K}_e : Matrice de rigidité dans le repère locale

\overline{F}_e : Vecteur force dans le repère local

θ_i et θ_j : Rotations de l'assemblage, respectivement, aux nœuds "i" et "j".

H_i, H_j et H : Poussées latérales

$(P-\Delta)$: Effets du second ordre

$\zeta_i(v)$ et $\phi_i(v)$: Fonctions de stabilité

D : Dénominateur avec prise en compte de la semi rigidité et de l'effort axial

$c = \cosinus$

$s = \sinus$

D^* : Dénominateur où les effets la semi rigidité des noeuds d'assemblages ne sont pas pris en compte

\overline{D} : Dénominateur en théorie du premier ordre avec prise en compte de la semi rigidité des nœuds d'assemblage.

K_e : Matrice de rigidité dans le repère global

F_e : Vecteur force dans le repère global

T_e : Matrice de transformation élémentaire

β : L'angle qui définit l'orientation de l'élément barre par rapport à l'axe de référence Ox .

u : Déplacement au sommet des poteaux avant atteinte de la rupture.

U : Vecteur des déplacements

V_i, M_i, V_j, M_j : réactions aux noeuds " i " et " j " sous l'action de charges extérieures, dans la repère local

$\Delta \bar{W}^{(i)}$: Charge unitaire de l'étape " i "

$\Delta \bar{M}^{(i)}$: Moment fléchissant de l'étape " i "

W : Charge appliquée à la structure

W_p : Charge de rupture plastique

M_i^* : Moment limite de la portion " i "

M_p^{ass} : Moment plastique de l'assemblage

M_p : Moment plastique de l'élément

P_{cr} : Charge critique

M_x ; Les moments fléchissants cumulés

U_x ; Les déplacements actualisés

dp_x ; La charge cumulée.

dp : Incrément de charge

λ : Elancement de la barre

$RM(I-1)$: reste du moment à l'étape précédente ($I-1$)

$\Delta M(I)$: Accroissement du moment fléchissant du à la charge unitaire à l'étape (I)

$S(I-1)$ et $S(I)$: Efforts (ou déplacements) aux étapes ($I-1$) et (I) .

ΔS : Incrément des efforts (déplacements) à l'étape (I) .

Det : Déterminant

INTRODUCTION

Les procédures classiques de dimensionnement des ossatures reposent sur la modélisation préalable du comportement flexionnel des sections de poutres et des poteaux ainsi que de celui des nœuds d'assemblage.

Toute ossature étant constituée d'éléments structuraux reliés entre eux par des assemblages, son comportement et sa capacité portante dépendront dans une large mesure de la manière dont les nœuds vont répondre aux efforts qui tendent à les solliciter.

Des répercussions très importantes sur le comportement global d'une structure auto-stable de poutre-poteau métalliques sont alors attendues dans la mesure où l'on enregistre une modification assez conséquente des efforts internes de celle-ci. La distinction entre la rotation du nœud et celle des éléments au niveau des assemblages prend, alors, toute sa signification.

La prise en compte du caractère non linéaire des courbes moment –rotation, caractéristiques des nœuds d'assemblage a l'avantage de pouvoir fournir, dans le cas de la prise en compte des non linéarités matérielle et géométrique, l'ensemble des informations quantitative et qualitative requises pour permettre de porter un jugement quand à la performance de la structure étudiée.

De ce fait, la prise en compte de ce comportement semi-rigide s'avère désormais indispensable, particulièrement lors du calcul des déplacements d'étages, de la charge critique ainsi que pour la détermination de la charge de rupture plastique dans le cas d'une analyse non-linéaire.

Face à la complexité d'une l'approche numérique, type éléments finis, et la lourdeur concernant son application pratique, il nous est apparu nettement plus simple d'opter pour l'étude d'un modèle dont l'aptitude à reproduire le comportement réel, en régime élastique, des assemblages est pratique et acceptable.

Dans ce travail, un modèle d'application simple, pouvant refléter le comportement réel des nœuds d'assemblages, a été développé, présenté et validé.

Ce système constitué d'un ensemble de poutre et de ressorts avec en plus l'introduction de l'élément de nœud indéformable. La modélisation adoptée, ici, est basée sur l'analogie des trois ressorts avec en plus l'introduction de la notion de l'élément de nœud indéformable (Ihaddoudène, 1995 ; Ihaddoudène et al, 2008) pour décrire les déplacements relatifs ainsi que les rotations entre les nœuds et les éléments de la structure.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés aux structures auto-stables ; aussi le modèle du ressort en flexion, seule, est la composante essentielle qui peut refléter la comportement du portique.

Au chapitre1, les différents types d'assemblages ainsi que leur comportement respectif qui ont fait l'objet de diverses classifications réglementaires, ont été rassemblés ; montrant ainsi toute l'importance et l'influence que pourraient avoir les assemblages semi rigides sur le comportement global des structures.

Afin de mieux situer notre contribution, d'une part, la synthèse des modèles mathématiques de la courbe moment-rotation symbolisant le comportement des assemblages ainsi que les différents modèles mécaniques, d'autre part, sont présentés au chapitre 2.

Au chapitre 3, l'analyse de la stabilité des structures a fait l'objet d'une synthèse, à commencer par l'analyse de l'élément barre en compression et les différents concepts y afférant à celle de la formulation matricielle en passant par l'analyse du comportement de l'élément de poutre-poteau.

Les différentes approches de certains codes et règlements ont également été rapportées.

Le modèle proposé est utilisé au chapitre 4. Le premier volet de l'étude a été consacré à la présentation des éléments de la matrice de rigidité en tenant compte des nouvelles fonctions de stabilité qui sont cette fois écrite en fonction de la semi

rigidité des assemblages. Le vecteur force s'en trouve déduit directement à partir de ces expressions établies.

Le second volet a porté sur les différentes possibilités d'avoir à traiter aussi bien les non linéarités géométriques (la charge critique) que matérielles (plasticité).

Ainsi, après les développements théoriques où le modèle retenu pour les ossatures auto-stables est présenté, ce travail de recherche se propose comme objectif principal de mettre en évidence le caractère général des formules proposées.

Pour montrer les effets de la semi rigidité sur le comportement des nœuds d'assemblage des exemples numériques, ont été présentés au chapitre 5.

Des études comparatives réalisées avec différents exemples trouvés dans des publications récentes, ont été établies et une très bonne précision est obtenue

CHAPITRE PREMIER

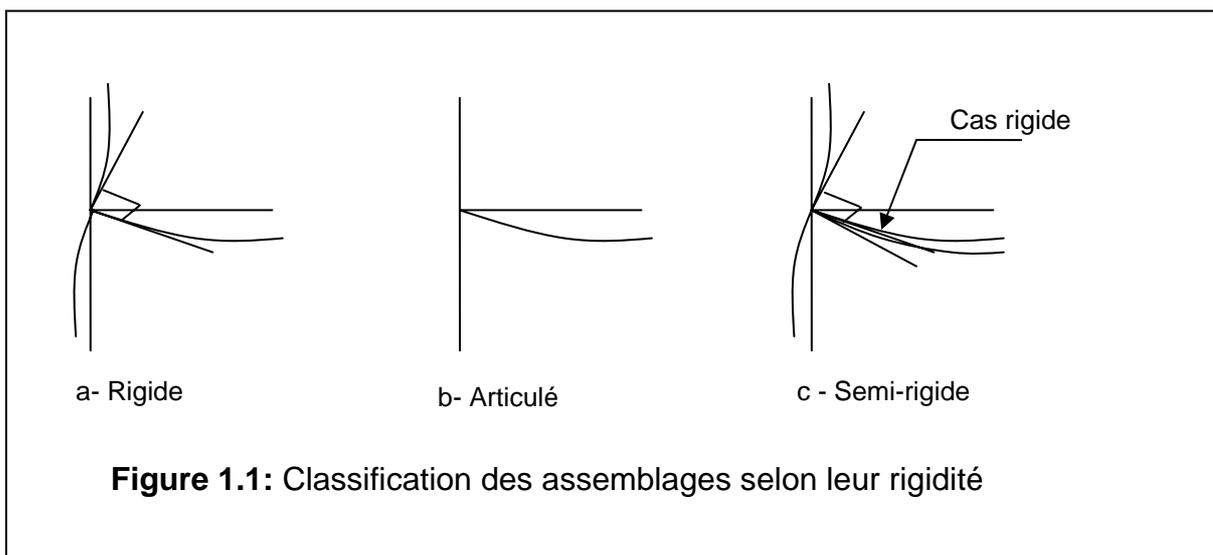
CLASSIFICATIONS DES ASSEMBLAGES

1.1. INTRODUCTION

La prise en compte du comportement réel des assemblages semi rigides dans l'analyse et le dimensionnement des structures est très important que ceci soit sur leur stabilité ou sur leur coût global ; d'où l'engouement de plusieurs laboratoires à travers le monde pour ce domaine de recherche.

1.2. COMPORTEMENT REEL DES ASSEMBLAGES

Dans l'analyse habituelle des structures métalliques, on considère les assemblages poutre-poteau soit comme des encastremements parfaits soit comme des articulations. L'assemblage de poutre poteau métalliques devant assurer le transfert d'une composante à une autre doit assurer la continuité du cheminement des efforts de la poutre au poteau ; ce qui implique que l'angle formé par les éléments assemblés reste inchangé, lors d'un chargement pour le cas rigide (cas a) (Jones et al, 1983 ; Bjorhovde et al, 1990) et qu'il n'y a aucun moment transmis dans le cas de l'articulation (cas b) de la figure (1.1) suivante :



Dans le premier cas, on aura besoin d'assemblages conséquents pour reprendre le moment d'encastrement alors que pour le second cas, des sections de poutres importantes.

Dans le cas intermédiaire représenté par le cas (c), les composantes de l'assemblage possèdent une certaine rigidité et lors d'un chargement, l'assemblage se déforme localement et cela va entraîner une rotation additionnelle entre l'élément de la poutre et l'élément du poteau.

Ainsi, le comportement réel des assemblages se situe entre ces deux cas extrêmes : les nœuds les plus rigides possèdent toujours une certaine flexibilité alors que les rotules sont capables de transmettre un certain moment de flexion (Fig. 1.2).

Le choix des dimensions d'un poteau est, alors, directement influencé par les efforts que celui-ci doit reprendre au niveau du nœud d'assemblage poutre-poteau.

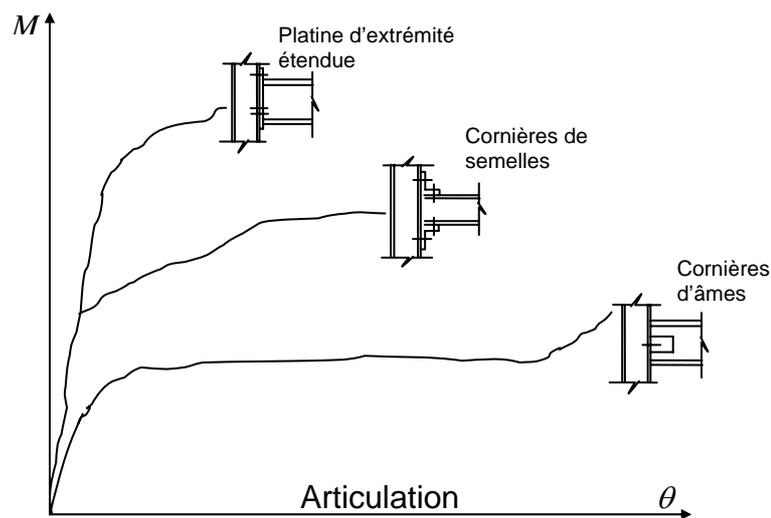


Figure 1.2: Courbes ($M - \theta$) de nœuds d'assemblage semi rigides

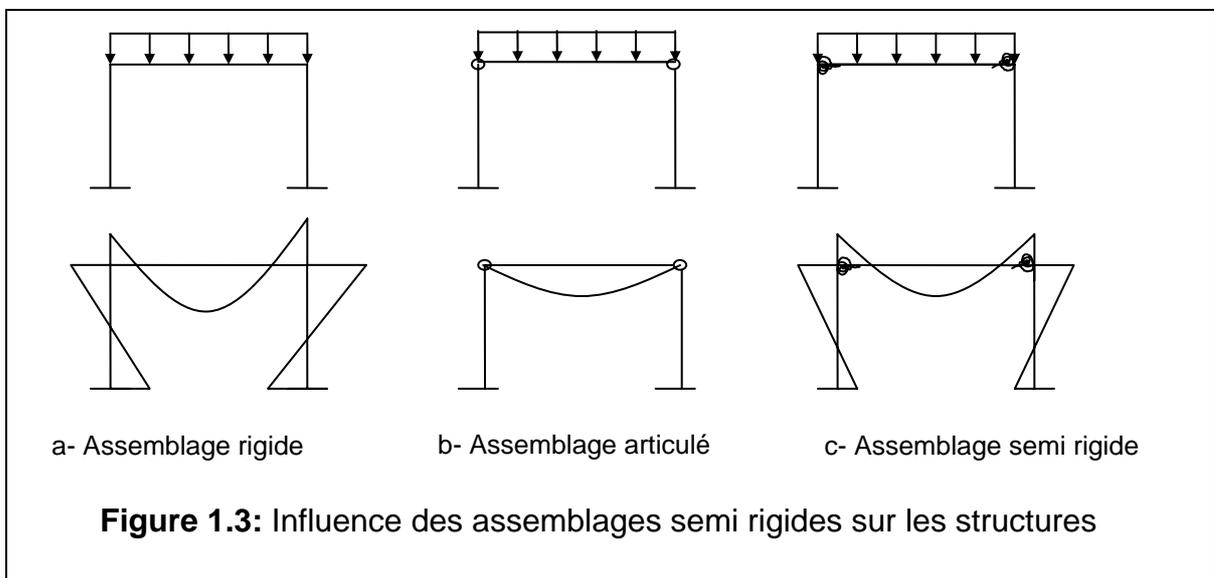
Ce constat réel du comportement de l'assemblage conduit à considérer que tout nœud d'assemblage est semi-rigide et partiellement résistant ; la capacité ultime des nœuds n'étant jamais supérieure à celle de la poutre.

1.2.1. Incidences du comportement des assemblages semi rigides

On peut relever parmi les effets de la semi rigidité sur les structures auto-stables, le caractère négatif pour les cadres et portiques car un mouvement additionnel

proviendra de la diminution de la rigidité effective des éléments constituant l'assemblage. Ceci affectera de façon très significative la période des vibrations et par conséquent intensifiera l'effet ($P - Delta$), qui va influencer la stabilité de la structure de façon négative.

Aussi, la prise en compte de la semi rigidité des nœuds d'assemblages aura non seulement une influence sur la déformabilité mais modifie l'ampleur et la distribution des efforts internes dans les éléments de l'ossature et aura une charge critique de flambement plus petite (Davison et al, 1987 ; Lui and Chen, 1987 ; Gerstle, 1988 ; Zoetemeijer, 1990 ; Bjorhovde et al, 1990; Ihaddoudène, 1995 ; Saidani, 1998 ; Ihaddoudène et al, 2008) comme le montre la figure (1.3) suivante :



Cette déformabilité du nœud d'assemblage dépend de la déformation des éléments le constituant (Jaspart, 1991; Chen and Kishi 1989 ; Zoetemeijer, 1990 ; Atamaz and Frey, 1993 ; Ihaddoudène, 1995), tels que les boulons, les cornières, platine d'extrémité étendue en flexion, ailes et âmes de la poutre en compression, etc...Le nombre important de paramètres pouvant influencer sur le comportement réel des nœuds d'assemblage ne rendent pas aisée leur étude (Ihaddoudène, 1995 ; Yongjiu et al, 2007; Sang-Sup and Tae-Sup, 2002 ; Pucinotti, 2001).

1.2.2. Idéalisations d'un assemblage

La prise en compte de la non linéarité du comportement des assemblages dans les calculs pratiques n'est pas aisée. Mais l'idéalisation de son caractère s'avère très

utile puisqu'il diminue la charge de calcul mais tant que la précision des résultats obtenus reste acceptable.

Le modèle élastique parfaitement plastique est le plus souvent utilisé (Fig.1.4), son avantage est qu'il est semblable à celui utilisé classiquement pour les éléments structuraux (poutre, poteau) en flexion.

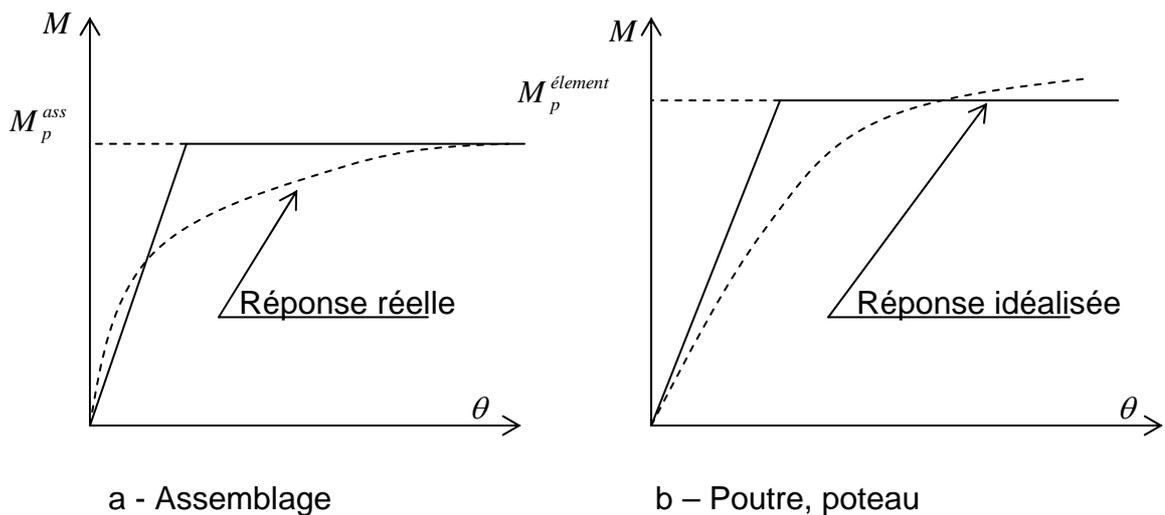


Figure 1.4: Courbes moment rotation

1.2.3. Intérêts de la prise en compte de la semi rigidité

La prise en compte des caractéristiques réelles de résistance et de déformabilité des nœuds est susceptible de conduire à une diminution substantielle du coût global des ossatures métalliques

En effet, dans les constructions métalliques, le coût des assemblages représente quelques 50% du coût total (Bijlaard, 2006), d'où – entre autres- cet acharnement à vouloir l'optimiser, ce qui explique l'engouement actuel de chercheurs du monde entier pour ce domaine de recherche.

De ce fait, l'intérêt économique de semi rigide doit être mis davantage en relief dans le cadre d'études poussées de type technico-économique et cette lacune devra, à notre humble avis, être comblée dans un avenir proche.

1.3. CAMPAGNES EXPERIMENTALES

Les nombreuses recherches expérimentales qui ont été menées sur les différents types d'assemblages dont (Jones et al, 1983 ; Kishi et al, 1987 ; Davison et al, 1987),

Nethercot,1985, Jaspert, 1997) ont souvent été répertoriés dans des banques de données (Kishi et al, 1987 ; Goverdhan,1990).

Alors que les plus anciennes remontent à 1917 (Young et al) et concernaient les assemblages de rivets (Rathbun, 1917) ceux par boulons H.R, qui les ont remplacés, sont devenus d'utilisation courante actuellement.

Tous ces incessants tests expérimentaux (Zoetemeijer, 1990 ; Chisala, 1999 ; Shi et al, 2007) sur une grande variété de poutre- poteaux ont pour but de standardiser les courbes de comportement de moment – rotation (Nethercot et al, 1997) et d'essayer d'obtenir les facteurs les plus importants d'un assemblage tels que la rigidité initiale et le moment ultime (Ihaddoudène et al, EC3).

Devant cette difficulté évidente, de part l'ampleur impliquant le coût élevé de ces expérimentations, ces dernières années, on procède souvent par tester un seul type d'assemblage (Cabrero and Bayo, 2005 ; Lee and Moon, 2002 ; Shi et al, 2007 ; Puccinotti, 2001, Kukreti and Zhou, 2006 ; Kovacs et al, 2008). Les développements de méthodes pratiques (Cabrero et al 2005 ; Ihaddoudène et al, 2008 ; Beg et al, 2004) ont alors suivi cette logique d'analyse des structures à assemblages semi rigides ; basés sur des modèles mécaniques appropriés (Da Silva et al, 2001 ; Ihaddoudène et al, 2008 ; Da Silva, 2008 ; EC3, 2005).

De ce fait, les paramètres pouvant influencer le comportement des assemblages ont fait l'objet de plusieurs publications et certaines ont été rapportées dans (Ihaddoudène, 1995).

1.4. CLASSIFICATION DES ASSEMBLAGES

Ces essais expérimentaux sur le comportement des nœuds d'assemblage, ont de ce fait permis de dégager divers critères de classifications (Boissonade, 2002 ; Jaspert, 1997) posant ainsi des jalons à certains codes dont principalement l'eurocode 3 (EC3, 1993). Ainsi les caractéristiques mécaniques principales d'un assemblage sont la rigidité, la résistance et la ductilité (Jaspert and Démonceau, 2008).

1.4.1. Classification par rigidité

La comparaison entre la rigidité élastique de l'assemblage et deux limites de rigidité conventionnelles (Fig.1.5) permet de classer l'assemblage dans l'une des catégories : rigide, articulé ou semi rigide.

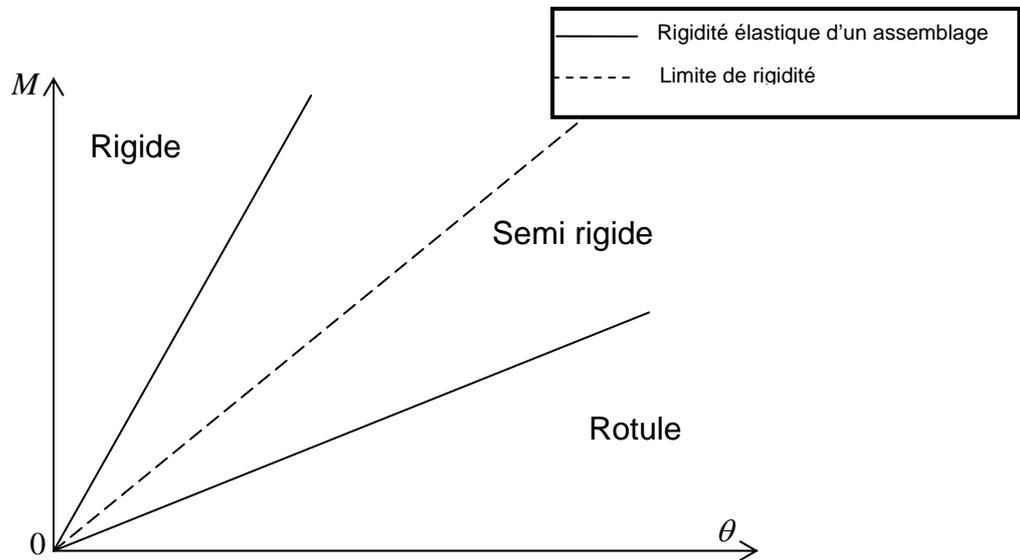


Figure 1.5: Classification en rigidité des assemblages

Les limites supérieure et inférieure définissent respectivement la « zone rigide » et la « zone rotule » dans laquelle l'assemblage peut-être considéré comme rigide, ou comme articulé.

L'hypothèse de comportement rigide, par exemple, de l'assemblage est admise si l'effet de celui-ci sur la réponse de la structure est proche de celui d'un assemblage réellement rigide.

Dans les règlement Eurocode 3, on définit souvent, la valeur de ces deux limites dépend de la rigidité relative entre l'assemblage et les éléments structuraux (poutre, dans le cas d'assemblages poutre – poteau) et de la rigidité globale de la structure

1.4.2. Classification en résistance

La classification selon la résistance fait apparaître les notions d'assemblage à résistance complète, partielle ou nulle comme le montre la figure (1.6) suivante :

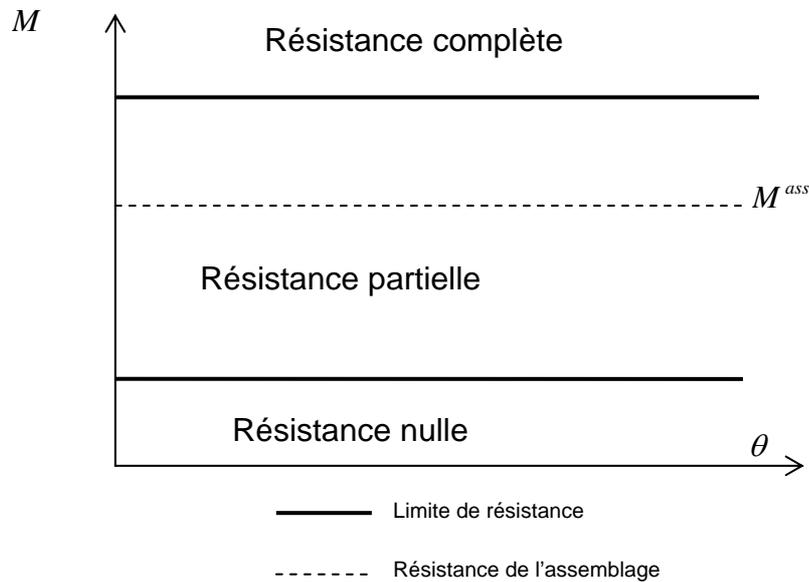


Figure 1.6: Classification en résistance de l'assemblage

- 1 – Un assemblage à résistance complète possède une résistance plus grande que celle des éléments structuraux assemblés. Autrement dit, une éventuelle rotule plastique se formera plutôt dans les éléments structuraux (poutre, poteau).
- 2 – Un assemblage à résistance nulle, possède une faible résistance, au maximum 25% (au sens de l'Eurocode 3) de la résistance minimum requise pour avoir un assemblage à résistance complète.
- 3 – Un assemblage à résistance partielle, constitue une solution intermédiaire.

1.4.3. Classification par ductilité :

La ductilité d'un assemblage se réfère à sa capacité maximale de déformation en rotation. Dans les assemblages à résistance partielle ou nulle, pour un certain niveau de chargement, une ductilité suffisante est requise afin d'assurer une éventuelle redistribution plastique des efforts dans le structure.

Mais, il y'a peu d'études consacrées à l'évaluation de la ductilité d'un assemblage et l'Eurocode 3, fournit des informations assez limitées sur ce sujet.

1.5. DIVERSES CLASSIFICATIONS REGLEMENTAIRES

1.5.1. Selon les différents types d'assemblages

Les études expérimentales précitées concernant les nœuds d'assemblages font ressortir une nette non linéarité de la courbe moment rotation ($M - \theta$), caractéristique de leur comportement semi rigide.

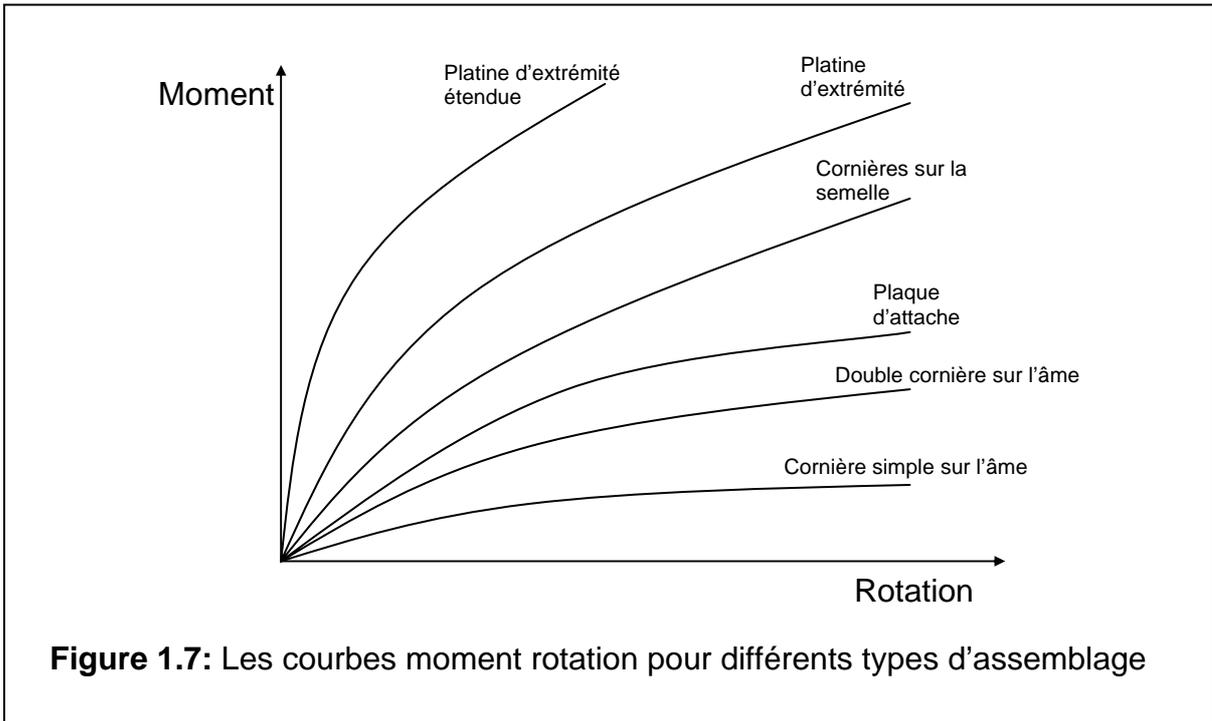
Cette non -linéarité est due à un certain nombre de facteurs dont les plus importants sont :(Chen et al, 1996, Ihaddoudène ,1995)

- a - la discontinuité des éléments qui le composent. Le nœud est composé d'une combinaison de pièces métalliques, des boulons, platine d'extrémité.
- b - Plastification graduelle, locale de certaines composantes de l'assemblage.
- c - la concentration des contraintes causées par des trous et des éléments servant à cet assemblage.
- d - voilement local des ailes et / ou l'âme de la poutre et colonne dans le voisinage de l'assemblage.
- e - changement de géométrie important dans l'assemblage sous l'effet des charges appliquées.

Ainsi, ces différentes sources du comportement de l'assemblage telles la présence des imperfections géométriques, les contraintes résiduelles dues à la soudure, concentration des contraintes et les effets secondaires locaux telle que la déformation du panneau d'âme du poteau, le rendent encore plus complexe à étudier.

La figure (1.7), ci-dessous, donne les différentes courbes ($M - \theta$) typiques pour différents types d'assemblage où les cas extrêmes sont l'encastrement parfait (axe vertical) et l'articulation (axe horizontal). Théoriquement, les assemblages situés entre ces deux cas extrêmes sont classés semi rigides.

Dans le but d'introduire les relations ($M - \theta$) dans un programme de calcul donné, de façon plus efficace, on fait souvent appel à des relations mathématiques.



Bien que les approches numériques utilisant la méthode des éléments finis en non linéaires pourraient traiter de toutes les complexités du comportement des nœuds d'assemblage, elles nécessitent, cependant de longues procédures et sont très sensibles à la modélisation.

En général, chacune de ces composantes est caractérisée par une courbe de déformation non-linéaire, bien que de simples idéalizations soient possibles (Ihaddoudène, 1995 ; Ihaddoudène et al,2008 ; EC3, 2005).

Dans le règlement européen, EC3, on définit une courbe de moment rotation idéalisée (Fig. 1.8-b) ainsi que les trois propriétés fondamentales: la rigidité (S_j) et, en particulier, la rigidité initiale ($S_{j,ini}$), moment de résistance ($M_{j,Rd}$) et la capacité de rotation (C_d).

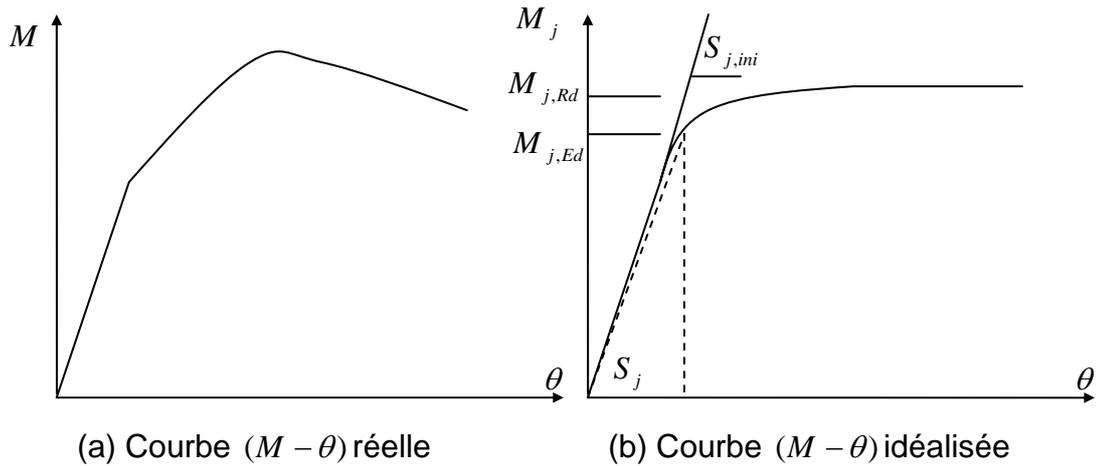


Figure 1.8 : Courbe moment rotation du nœud d'assemblage

1.5.2. Classification selon l'Eurocode 3 (1993, Part 1-8 :2005)

L'introduction du concept semi rigide dans l'Eurocode 3, relatif aux structures métalliques et l'idéalisation bi-linéaire des courbes moment-rotation qui y est recommandée, représentent une avancée importante en vue de l'acceptation et de la généralisation du concept semi-rigide. La figure (1.9) donne la forme simplifiée de ces courbes alors que le tableau (1.1) propose les valeurs minimale et maximale de la rigidité du nœud d'assemblage:

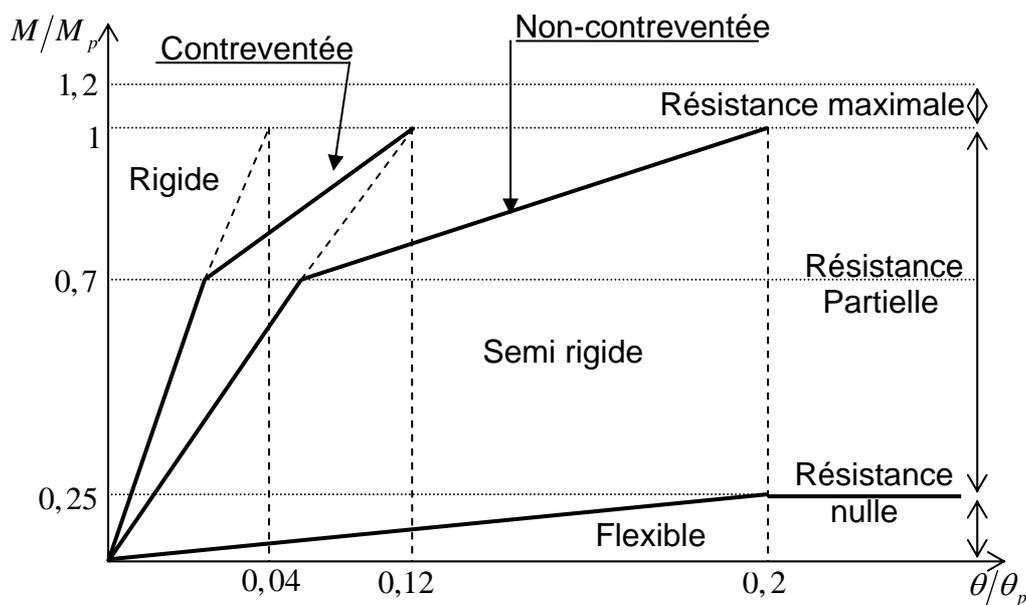


Figure 1.9: Classification selon l'Eurocode 3

Plusieurs propositions des valeurs limites (max et min) pour la rigidité des nœuds d'assemblage ont été admises dont celle de l'EC3 :

Tableau 1.1 : Valeurs limites des rigidités du nœud d'assemblage (EC3)

Rigide	Contreventé	$R_i L / EI \geq 25$
Rigide	Non contreventé	$R_i L / EI \geq 8$
Flexible	Contreventé	-
Flexible	Non contreventé	$R_i L / EI \leq 2$
Semi rigide	Contreventé	$2 < R_i L / EI < 20$
Semi rigide	Non contreventé	$2 < R_i L / EI < 8$

Cependant, dans ce règlement, il n'est mentionné nul part, un classement des nœuds d'assemblage en tenant compte de la ductilité, ne considérant uniquement les deux classements par rigidité et par résistance.

1.5.3. Classification selon le règlement AISC/LRFD (2005)

Le règlement Américain (AISC/LRFD) propose les valeurs limites suivantes pour la rigidité du nœud (Tableau 1.2) d'assemblage en tenant compte de sa ductilité comme le montre la figure (1.10) ci dessous :

Tableau 1.2 : Classification selon AISC/LRFD

Rigide	$R_s L / EI \geq 20$
Flexible	$R_s L / EI \leq 2$
Semi rigide	$2 < R_s L / EI < 20$

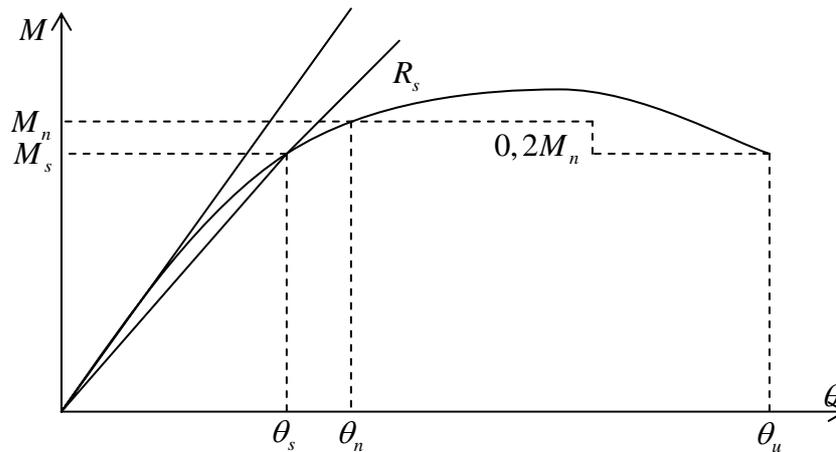


Figure 1.10: Classification selon le règlement LRFD

1.5.4. Classification selon Bjorhovde et al (1990)

Un pas important, en vue de l'acceptation, par tous, de l'approche semi rigide du calcul concerne la classification des nœuds d'assemblage. Divers critères de classifications en noeuds rigides, semi rigides et articulations ont été proposés. Bjorhovde et al (1990) ont eux proposés les valeurs limites suivantes pour la rigidité du nœud d'assemblages :

Tableau 1.3 : Classification Bjorhovde et al (1990)

Rigide	$R_i \geq EI/2d$
Flexible	$R_i \geq EI/10d$
Semi rigide	$EI/10d \leq R_i \leq EI/d$

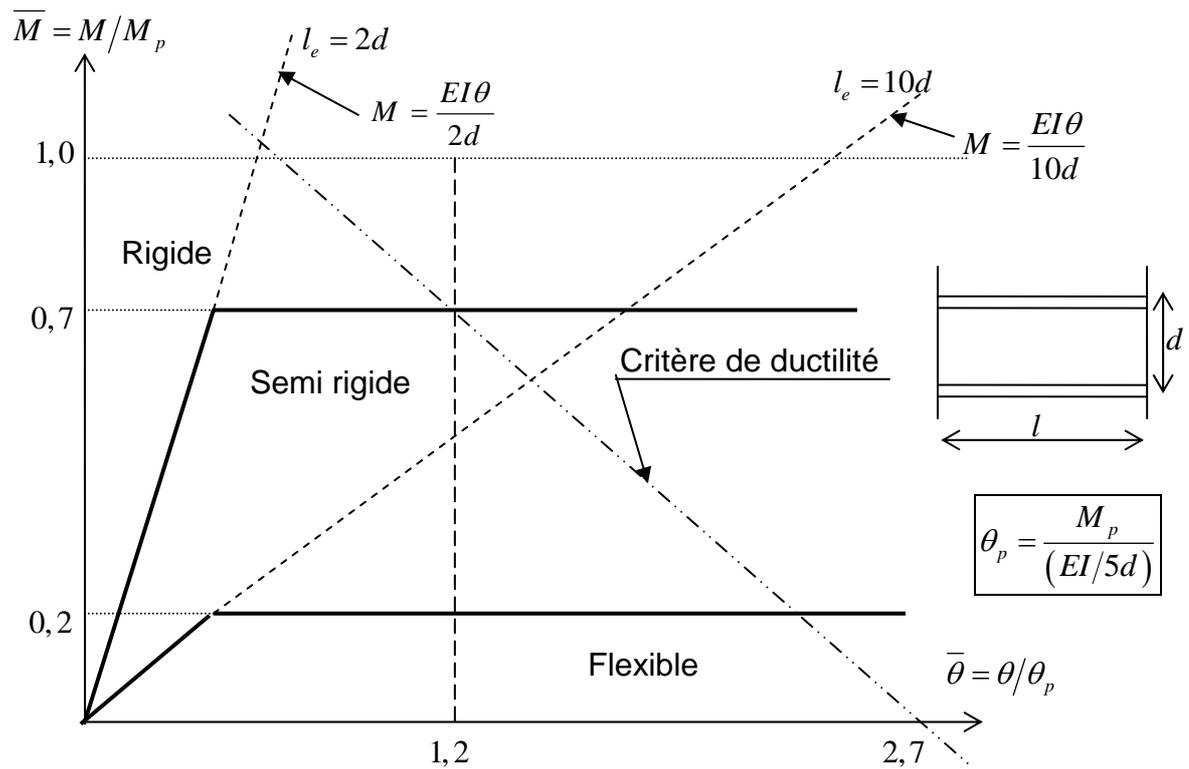


Figure 1.11: Critère adimensionnel de Bjorhovde et al

Les auteurs (Bjorhovde et al) ont exprimé la rigidité initiale de chaque assemblage à travers la longueur équivalente " l_e ", se basant sur la rigidité initiale $K_0 = \frac{EI}{L}$ de la courbe moment rotation d'une poutre de longueur L , soumise à deux moments à ses deux extrémités.

Ces auteurs suggèrent qu'il serait réaliste de prendre les longueurs équivalentes de $2d$ et $10d$ pour définir, respectivement, l'intervalle entre les comportements dit rigide et semi rigide pour la première ; puis entre le semi rigide et le flexible pour la seconde longueur équivalente. Alors que pour les moments ultimes, d'utiliser les valeurs de $0,7M_p$ et $0,2M_p$ comme le montre clairement la figure (1.11).

Kishi et Chen (1989) propose de prendre pour la longueur équivalente $l_e = 5d$ pour tous les assemblages semi rigides, valeur qui nous paraît assez raisonnable.

Dans le système de classification proposé, les auteurs l'ont prévu dans le cas où la connaissance préalable des composants du nœud d'assemblage ne sont pas disponibles. Ce qui implique que cette approche ne considère pas le comportement global de la structure.

1.6. CONCLUSION

L'introduction du concept de la semi rigidité dans les codes Européens (EC3) et américains (AISC/ LRFD) ou encore par certains auteurs tel Bjorhovde et al, relatifs aux structures métalliques et l'idéalisation des courbes moment rotations ($M - \theta$), représentent des jalons importants en vue de son acceptation.

Cependant, les critères de classifications diffèrent d'un code à un autre. Alors que la rigidité initiale est prise comme critère de classification par l'Eurocode 3 et les auteurs Bjorhovde et al, c'est plutôt la rigidité sécante qui est prise dans le règlement LRFD. En effet, dans ce règlement, deux valeurs distincts de la rigidité sécante doivent être définies pour les deux états limites : de service et ultime.

De plus, l'assemblage est classé rigide, semi rigide ou flexible en se basant sur le rapport de sa rigidité rotationnelle (R) à celle de la poutre (EI/L) égale à (RL/EI).

CHAPITRE DEUXIEME

MODELES DE COMPORTEMENT DES ASSEMBLAGES

2.1. INTRODUCTION

Il s'agit de trouver des modèles mathématiques susceptibles de représenter le plus fidèlement possible la courbe caractéristique de l'assemblage pour l'analyse de la stabilité des structures à nœuds d'assemblages semi rigides.

2.2. MODELISATION MATHEMATIQUE DE LA COURBE MOMENT-ROTATION

Pour modéliser la courbe moment-rotation, caractéristique de l'assemblage, plusieurs modèles ont été proposés. La meilleure de ces fonctions doit être la plus simple d'utilisation et capable de représenter la courbe le plus fidèlement possible et va concerner le plus possible de types d'assemblages.

Cependant, comme ce comportement dépend de plusieurs paramètres, ces modèles n'ont jamais reflété suffisamment le travail réel des assemblages.

Aussi, la classification des relations moment rotation des nœuds d'assemblages est divisée en trois types principaux : modèle analytique, modèle mathématique ou modèle mixte.

Dans le modèle analytique, la relation $(M - \theta)$ est basée sur les caractéristiques physiques de l'assemblage. Dans le second, la relation s'exprime par une fonction mathématique dans lequel les paramètres sont basés sur le calage des résultats de tests, alors que pour le troisième modèle combine les deux premières citées.

2.2.1. Formulation des modèles mathématiques d'assemblage

Pour représenter les courbes $(M - \theta)$, caractéristiques d'un assemblage, plusieurs modèles mathématiques et mixtes ont été proposés. Nous citerons quelques uns, modèle linéaire (Arbabi, 1982), bi-linéaire (Youssof Agha, 1989), Tri-linéaire (Gerstle, 1988, Jaspert, 1991 et 1997), polynomial (Frye et Morris, 1975), modèle

puissance (Kishi et Chen, 1987), exponentiel (Lui et Chen, 1988) et bien d'autres encore.

2.2.2 Classification des modèles d'assemblages

2.2.2.1. Modèle linéaire : Afin de définir la rigidité le modèle linéaire représentant l'assemblage semi rigide a été le plus utilisé vue sa simplicité (Figure 2.1). Il dépend d'un seul paramètre qui définit la rigidité de l'assemblage. La relation liant le moment à la rotation s'exprime par :

$$M = K\theta \quad (2.1)$$

dans laquelle $K = \frac{1}{k}$ représente la rigidité initiale de l'assemblage et peut être obtenue soit à partir de résultats d'essais ou par la méthode analytique. L'auteur [Lothers, 1960] a proposé de prendre $\frac{1}{k}$ égal à la rigidité initiale K_0 .

Pour l'analyse des déformations de l'assemblage, des formules de calcul – qui restent des références solides et d'actualité - de la rigidité initiale de certains types d'assemblages semi rigides ont été établies par les auteurs de la référence (Lothers, 1960 ; Chen et al,1987 ; Bjorhovde et al,1990) et rapportées en détails dans la référence (Ihaddoudène, 1995). Cette rigidité dépend essentiellement des dimensions de chaque composante constituant le nœud d'assemblage et mathématiquement, elle peut s'exprimer en fonction de la rigidité de la poutre. Lighfoot et Lemesurier (1974) lui ont donné l'expression de :

$$K_0 = \rho \frac{4EI}{L} \quad (2.2)$$

où, EI et L sont, respectivement, la rigidité à la flexion et la longueur de la poutre ; et ρ l'indice de rigidité qui indique le degré de flexibilité de l'assemblage. Ses valeurs varient de zéro pour le cas articulé à l'infini, pour le cas rigide.

La même équation a été mise sous une autre forme par Yu and Shanmugam (1986) :

$$K_0 = \frac{\eta}{1-\eta} \left(\frac{4EI}{L} \right) \quad (2.3)$$

où η représente le facteur de fixation qui vaut zéro pour le cas articulé et un pour le cas rigide.

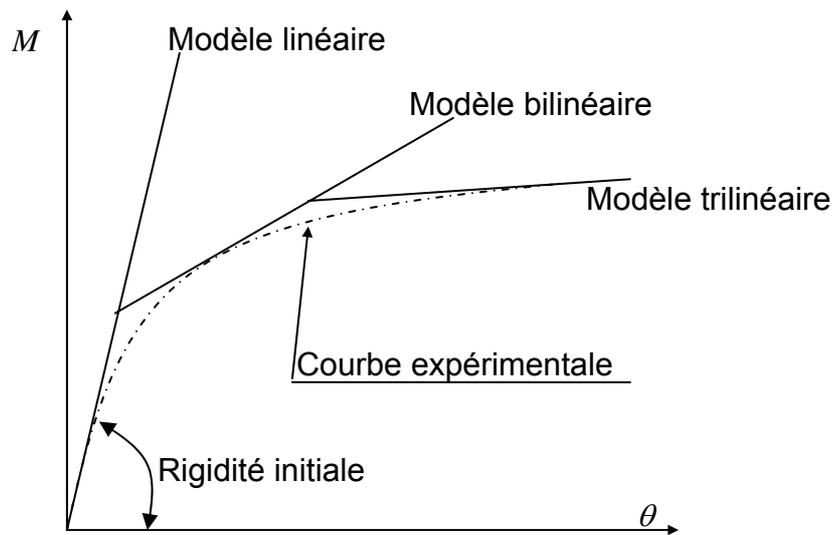


Figure 2.1: Modèles linéaires

2.2.2.2. Modèle multilinéaire : Ce modèle suit plus convenablement la courbe expérimentale que les modèles linéaire et bilinéaire. Jaspart (1991) a développé un modèle tri linéaire dans lequel il définit, en plus, le moment pseudo plastique M_{ppl} comme le montre la figure (2.2) suivante :

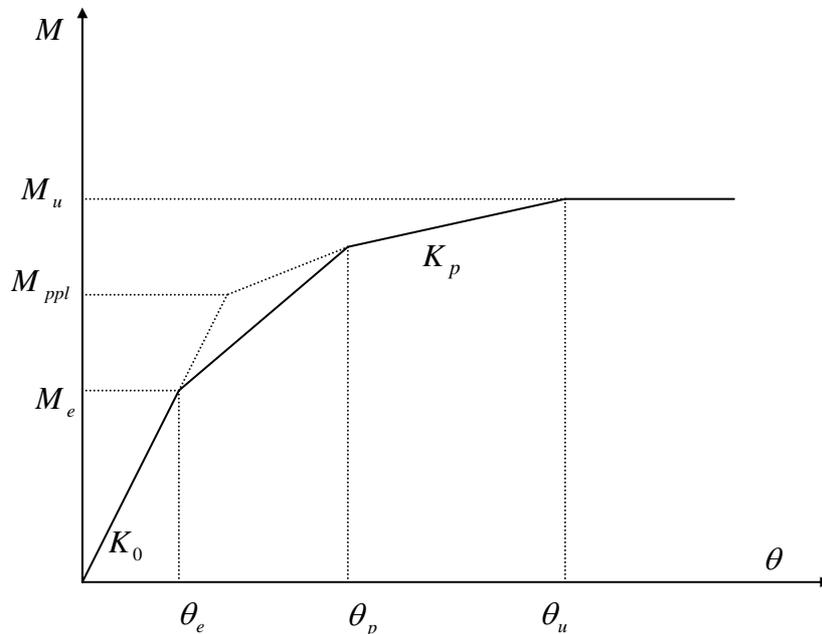


Figure 2.2: Modèle proposé par Jaspart

Ce modèle s'exprime par l'équation (2.4) suivante :

$$M_{ppl} = \frac{(K_0 - K_p)\theta}{\left\{1 + \left[\frac{(K_0 - K_p)\theta}{M_e}\right]^C\right\}^{1/C}} + K_p\theta \quad (2.4)$$

Dans laquelle :

C : coefficient de forme adimensionnel

K_p : Rigidité d'écroissage

θ_p : Rotation au début de l'écroissage

K_0 : Rigidité initiale

M_{ppl} : Moment pseudo-plastique

2.2.2.3. Modèle polynomiale : Ce modèle qui s'appuie sur celui de Sommer (1969) est dû à Frye et Morris (1975) et s'exprime sous la forme :

$$\theta_c = C_1(\kappa M)^1 + C_2(\kappa M)^3 + C_3(\kappa M)^5 \quad (2.5)$$

dans laquelle

C_i : Constantes adimensionnelles.

κ : Paramètre, dépend des dimensions de l'assemblage.

La rigidité initiale est obtenue à partir de la tangente :

$$K_0 = \left[\frac{dM}{d\theta_c} \right]_{M=0} = \left[\frac{1}{C_1\kappa + 3C_2\kappa(\kappa M)^2 + 5C_3\kappa(\kappa M)^4} \right]_{M=0} = \frac{1}{C_1\kappa} \quad (2.6)$$

A partir de séries tests, des fonctions standard concernant sept types d'assemblages, ont été obtenues par ces auteurs.

A titre d'exemple, pour l'assemblage à double cornière sur l'âme de la poutre, on a :

$$C_1 = 3,66 \cdot 10^{-4},$$

$$C_2 = 1,15 \cdot 10^{-6},$$

$$C_3 = 4,57 \cdot 10^{-8}$$

$$\text{et } \kappa = d^{-2,4} t^{-1,81} g^{0,15}$$

$$\theta = 3,66(\kappa M)10^{-4} + 1,15(\kappa M)^3 10^{-6} + 4,57(\kappa M)^5 10^{-8}$$

Où : d, t, g sont les dimensions de l'assemblage données dans (Frye et Morris, 1975).

Cependant, ces fonctions standards sont basées sur des essais dont certains remontent à l'année 1931, en somme dépassés. Ensuite, le défaut majeur de cette approche est l'existence d'un maximum dans la fonction qui ne correspond pas aux observations expérimentales (Jones et al, 1983).

2.2.2.4. Modèles exponentiels :

a. Lui et Chen (1987) ont proposés le modèle exponentiel, qui a la forme :

$$M = M_0 + \sum_{j=1}^n C_j \left[1 - \exp\left(\frac{-|\theta|}{2j\alpha}\right) \right] + K_f |\theta| \quad (2.7)$$

dont le rigidité de l'assemblage est donnée par :

$$K_0 = \left[\frac{dM}{d\theta} \right]_{|\theta|=0} = \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{2j\alpha} + K_f \quad (2.8)$$

Dans laquelle :

- M : moment appliqué au nœud
- K_f : rigidité d'écrouissage
- α : coefficient de calage
- C_j : curve fitting (coefficient)
- n : nombre de termes considérés

b. Yee et Melchers (1986)

Ces deux auteurs ont proposés un modèle exponentiel à quatre paramètres, qui s'écrit sous le forme:

$$M = M_p \left\{ 1 - \exp\left[\frac{-(K_0 - K_p + C\theta)\theta}{M_p} \right] \right\} + K_p \theta \quad (2.9)$$

dans laquelle

- M_p : moment plastique de l'assemblage
- K_0 : rigidité initiale de l'assemblage

K_p : rigidité d'écroûissage de l'assemblage

C : constante, fonction de l'allure de la courbe

La rigidité tangente est alors donnée par :

$$K_t = K_p + (K_0 - K_p + 2C\theta) \exp \left| \frac{-(K_0 - K_p + C\theta)\theta}{M_p} \right| \quad (2.10)$$

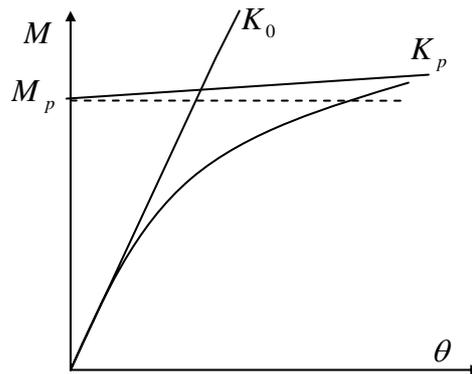


Figure 2.3: Modèle de Hon et Melchers

La fait que cette formule concerne essentiellement l'assemblage de type plaque supérieure et cornière inférieure sur la semelle, son extension reste alors fort limitée (Nethercot and Zandonini, 1989).

c. Modèle de Richard-Abott (1975)

C'est l'un des modèles les plus utilisés, pour définir les courbes $(M - \theta)$ des assemblages ; il a l'avantage de donner une rigidité positive et de ce fait, calque bien physiquement pour des assemblages semi rigides.

Ce modèle peut-être défini par quatre paramètres et s'exprime par la relation suivante :

$$M = \frac{(K_0 - K_p)|\theta|}{\left[1 + \left| \frac{(K_0 - K_p)|\theta|^n}{M_0} \right| \right]^{\frac{1}{n}}} + K_p|\theta|, \quad (2.11)$$

La rigidité tangente correspondante sera obtenue en dérivant l'expression du moment par rapport à la rotation de l'assemblage telle que :

$$K_t = \left[\frac{dM}{d\theta} \right] = \frac{(K_0 - K_p)}{\left[1 + \left| \frac{(K_0 - K_p)\theta}{M_0} \right|^n \right]^{(n+1)/n}} + K_p \quad (2.12)$$

dans lequel

K_0 : rigidité initiale

K_p : rigidité (strain-hardening)

M_0 : moment de référence

n : Paramètre qui définit l'allure de la courbe

d. Modèle Puissance de Chen et Kishi (1987)

Les auteurs Chen et Kishi (1987) ont simplifiés le modèle de Richard-Abott – écrouissage ignoré - qui dépend désormais de trois paramètres pour représenter la courbe $(M - \theta)$, caractéristique de l'assemblage. Il s'exprime sous la forme suivante :

$$M = \frac{R_{k_i} \theta}{\left\{ 1 + \left[\frac{\theta}{\theta_0} \right]^n \right\}^{\frac{1}{n}}} \quad (2.13)$$

$\theta_0 = \frac{M_u}{R_{k_i}}$: représente la rotation plastique

R_{k_i} : rigidité initiale

M_u : moment ultime

n : paramètre qui dépend de la forme de la courbe

On remarquera que plus le paramètre "n" augmente et plus l'assemblage se rigidifie.

La rigidité tangente de l'assemblage s'obtient à partir de :

$$R_{k_i} = \frac{dM}{d\theta} = \frac{R_{k_i}}{\left[1 + \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^n\right]^{\frac{n+1}{n}}} \quad (2.14)$$

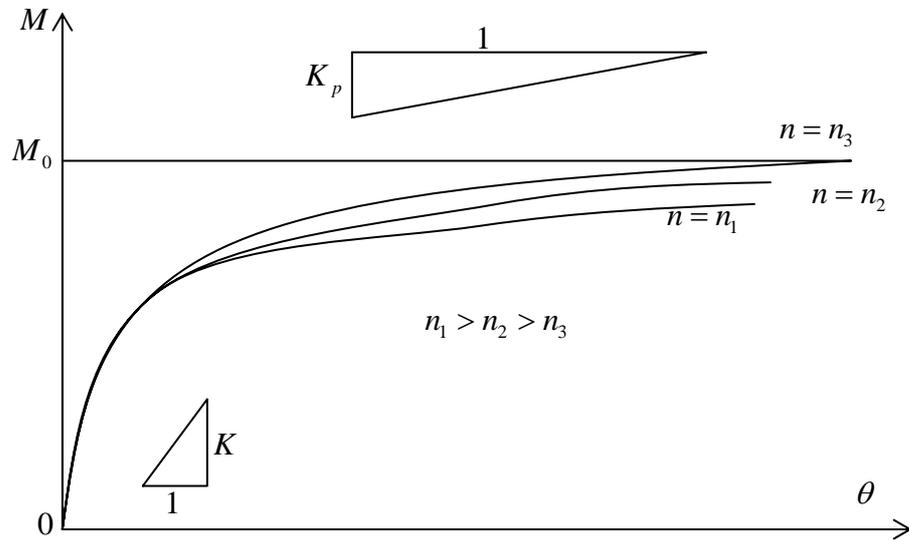


Figure 2.4: Courbe moment rotation de Richard-Abbott (1975)

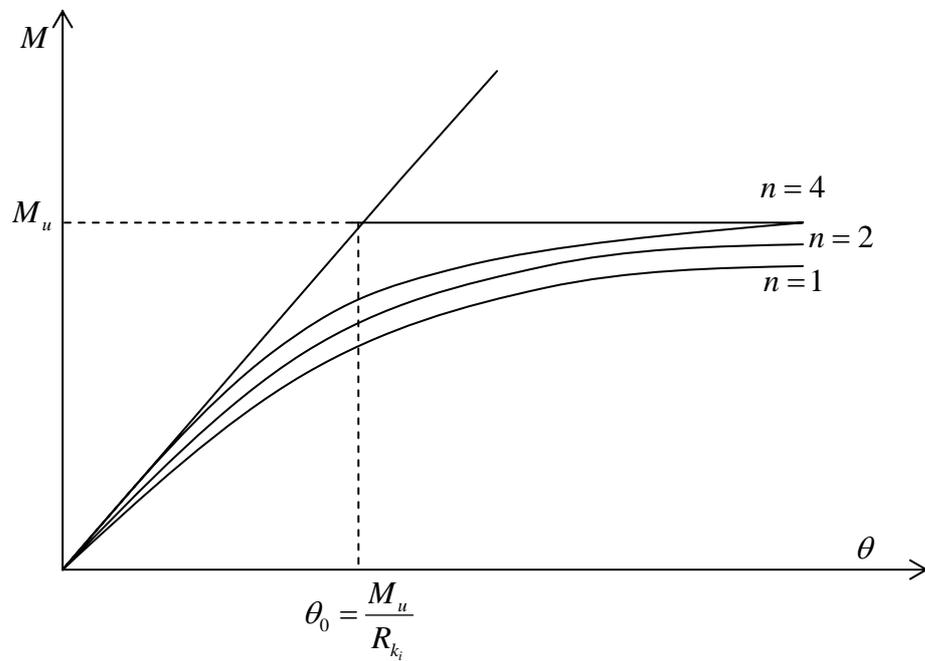


Figure 2.5: Courbe moment rotation de Chen et Kishi (1987)

2.3. MODELES MECANIKUES

2.3.1. Modèle mécanique de l'Eurocode 3

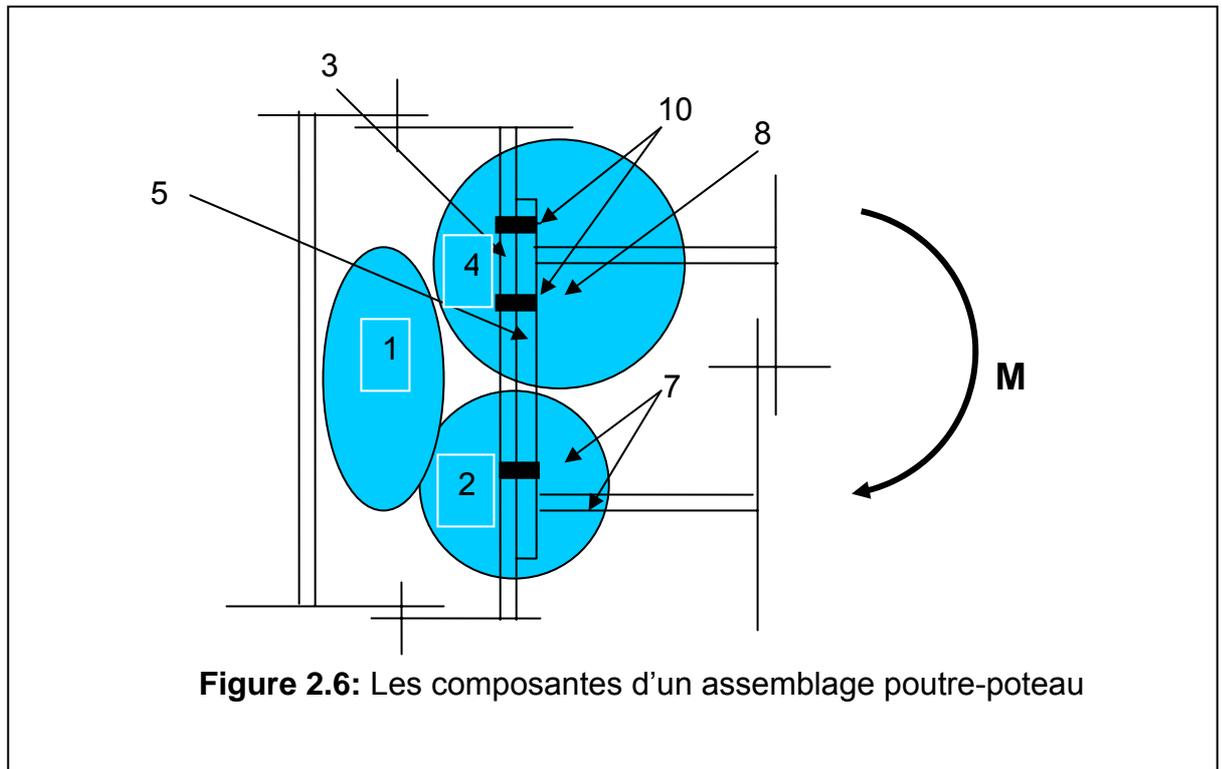
L'approche adoptée par ce règlement européen (EC 3) consiste, justement, en l'utilisation de ce que l'on appelle la méthode des composantes qui fournit des procédures d'évaluation du comportement en rotation des nœuds pour chaque type d'assemblage. Cela correspond à un modèle mécanique simplifié composé de ressorts en traction et liés rigidement, selon lesquelles le nœud est simulé par un choix approprié de composantes souples et rigides.

2.3.1.1. Méthode des composantes

Pour illustrer la méthode, soit à considérer l'assemblage poutre-poteau représenté à la figure suivante, soumis à un moment de flexion M . Les composantes qui caractérisent cet assemblage sont données par la figure suivante (la numérotation des composantes dans l'énumération sur la figure (2.6) correspond à celle rapportée dans les références (Da Silva, 2001 et 2008 ; Jaspert, 1997 ; EC3, part 1-8:2005).

Où :

- 1. le panneau d'âme du poteau soumis à un effort de cisaillement,
- 2. l'âme du poteau dans la zone où elle est soumise à un effort de compression,
- 3. la semelle du poteau où elle est soumise à flexion, du fait de la traction dans les boulons,
- 4. l'âme du poteau dans la zone où elle est tendue,
- 5. la platine soumise à flexion du fait de l'effort de traction existant dans les boulons,
- 7. la partie comprimée de la poutre: âme et semelle,
- 8. l'âme de la poutre dans la zone où elle est soumise à un effort de traction,
- 10. les boulons soumis à des efforts de traction.



Trois types d'effort sont distingués dans les composantes, ils correspondent à trois zones dans l'assemblage: la zone en traction, en compression et en cisaillement. Chacune des composantes présente ses propres résistance rigidité et capacité de déformation en traction, compression ou cisaillement. La coexistence de plusieurs composantes dans un même élément, comme par exemple, au niveau de l'âme du poteau, soumise à la fois à de la compression ou de la traction et du cisaillement, peut mener à des interactions de contraintes susceptibles d'affecter la résistance et la rigidité de ces composantes.

2.3.1.2. Etapes de la méthode des composantes

L'application de la méthode des composantes demande les étapes suivantes:

- a - La détermination des composantes nécessaires à l'étude de l'assemblage considéré,
- b - L'évaluation des caractéristiques de résistance et/ou de rigidité de chaque composante (rigidité initiale, résistance de calcul,... ou courbe de déformation dans son entièreté),

c - " l'assemblage " des composantes en vue de déterminer les caractéristiques de rigidité et/ou de résistance de l'assemblage ou l'ensemble de la courbe moment-rotation de celui-ci.

La première étape dépend des caractéristiques géométriques de l'assemblage et de l'identification des zones de compression, traction et cisaillement.

La deuxième étape demande une connaissance suffisante du comportement des composantes. Chacune des composantes de tout assemblage possède sa propre résistance en traction, en compression, et/ou en cisaillement, selon la manière dont elle est sollicitée dans l'assemblage.

En général, la résistance d'une composante vis-à-vis d'une certaine sollicitation ne dépend que de la valeur de cette sollicitation: c'est notamment le cas pour les boulons, dont la résistance ne dépend que de l'effort de traction auxquels ils sont soumis.

Enfin, la troisième étape est basée sur une distribution des efforts internes dans l'assemblage ou, ce qui revient au même, sur le modèle mécanique considéré comme représentatif de l'assemblage.

Ces composantes représentent, donc, une partie spécifique du noeud qui, selon le type de chargement, permet d'identifier la contribution d'un ou de plusieurs ressorts et donc de ses propriétés structurelles.

De toute évidence, compte tenu de la complexité des noeuds d'assemblages métalliques, le développement de la méthode des composantes, et la prévision de leur comportement en général, s'appuie fortement sur les résultats d'un grand nombre de programmes de recherche expérimentale menée à travers un certain nombre d'instituts de recherche.

Il faut cependant mentionner, que ces résultats, ne sont pas à la portée de tous, bien que certains d'entre eux soient publiés, en partie seulement.

2.3.1.3. Composantes et loi moment-rotation

L'Eurocode 3 propose des caractéristiques de résistance et de rigidité pour chacune de ces composantes.

Après identification et calcul des caractéristiques des assemblages, il reste à assembler ces composantes pour déterminer le comportement de l'assemblage étudié. La méthode des composantes permet de déterminer analytiquement la rigidité initiale et le moment résistant de calcul. Ces deux caractéristiques suffisent pour définir la courbe moment-rotation de l'assemblage car l'EC3 adopte une courbe de comportement conventionnelle telle que celle représentée à la figure ci dessous.

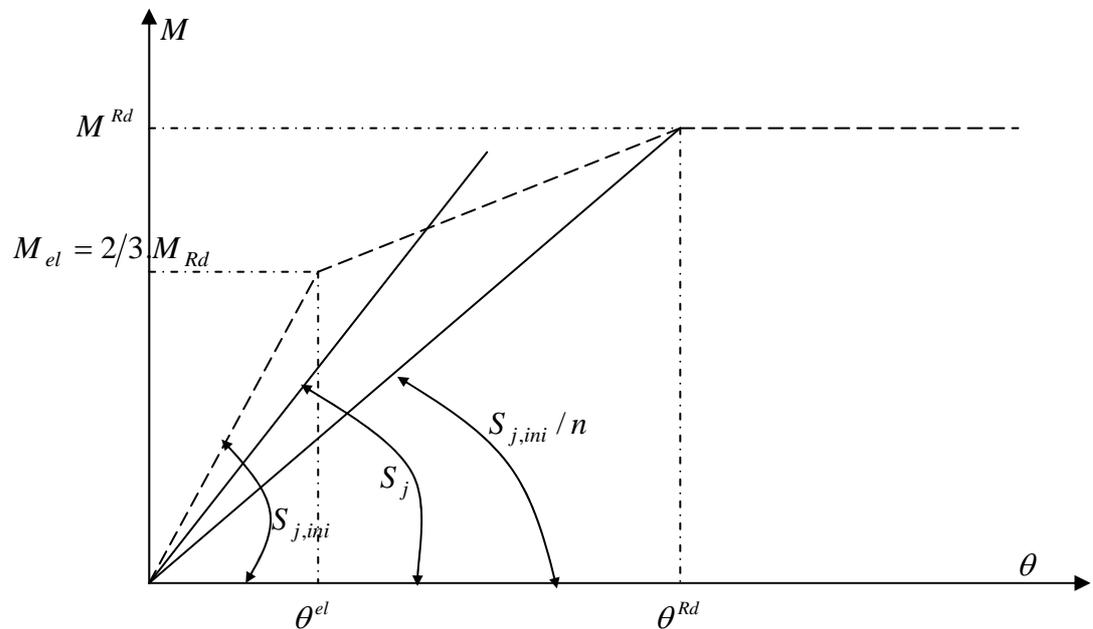


Figure 2.7: Loi moment-rotation d'un assemblage [EC3]

La rigidité sécante est fonction du moment résistant de calcul, de la rigidité initiale, du moment appliqué et d'un paramètre ψ dépendant du type d'assemblage. Le moment élastique est défini forfaitairement comme égal au deux tiers du moment résistant. La rigidité sécante lors de l'atteinte du moment résistant de calcul présente un rapport constant à la rigidité initiale et dépendant du type d'assemblage:

Certains auteurs (Van Keulen et al, 2003) ont testé plusieurs portiques en prenant la le moment élastique comme étant égal à la moitié du moment résistant, les résultats étant tout à fait satisfaisants.

Le type de modèle mécanique utilisé dans l'EC3, pour déterminer ces deux caractéristiques essentielles que sont la rigidité initiale et le moment résistant de calcul est examiné ci-après.

2.3.1.4. Rigidité initiale

La rigidité initiale est déterminée à partir des rigidités des composantes de l'assemblage. Le comportement élastique de chaque composante est représenté par un ressort. La relation force-déplacement d'un ressort est donnée par:

$$F_i = \frac{EA_i}{L_i} \Delta_i = k_i \Delta_i \quad (2.15)$$

où :

F_i : est la force dans le ressort i

E : module d'élasticité de l'acier

k_i : coefficient de rigidité du ressort i

Δ_i : déformation du ressort i

La figure (2.8) suivante illustre ces ressorts dans le cas d'un assemblage avec platine d'extrémité boulonnée. Les numéros associés à chaque ressort correspondent aux numéros des composantes dans l'EC3 et au numéro de la rangée de boulons considérée.

La figure (2.8-b) montre comment, au niveau d'une rangée de boulons, les déformations de la platine d'extrémité en flexion, des boulons en traction, de la semelle du poteau en flexion et de l'âme du poteau en traction sont combinées pour former un ressort effectif pour chaque rangée de boulons avec un coefficient de rigidité $k_{eff,r}$ (r est le numéro de la rangée de boulons). La figure (2.8-c) montre comment ces ressorts effectifs sont remplacés par un ressort équivalent unique de rigidité k_{eq} agissant au niveau du bras de levier z . Les formules déterminent $k_{eff,r}$, z et k_{eq} données ci-dessous sont déduites des différents schémas de la figure(2.8) en s'assurant que chaque modèle présente un comportement moment-rotation et un effort de compression dans la barre inférieure identiques.

$$k_{eff,r} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{k_{i,r}}} \quad (2.16-a)$$

$$z = \frac{\sum_r k_{eff,r} \cdot h_r^2}{\sum_r k_{eff,r} \cdot h_r} \quad (2.16-b)$$

$$k_{eq} = \frac{\sum_r k_{eff,r} \cdot h_r}{z} \quad (2.16-c)$$

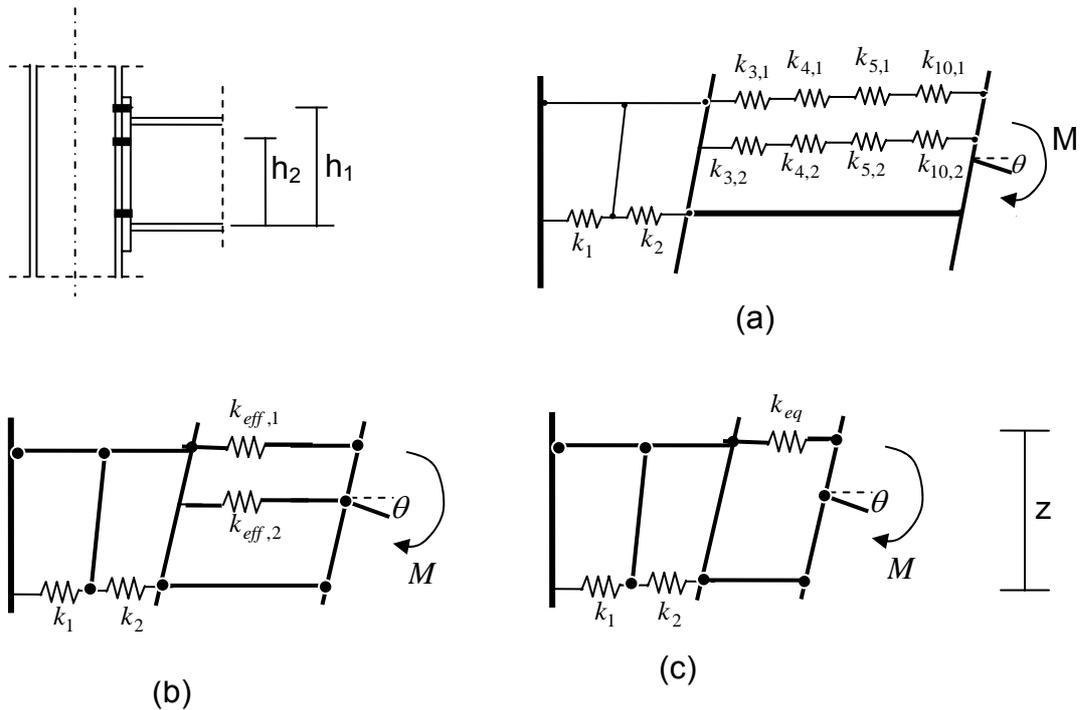


Figure 2.8 : Modèles de ressorts pour un assemblage avec platine d'extrémité boulonnée

Une fois ces caractéristiques déterminées, la rigidité initiale de l'assemblage d'obtient en écrivant que la rotation θ est égale à $(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_{eq})/z$.

$$S_{j,ini} = \frac{M_j}{\theta_j} = \frac{Fz}{\sum \frac{\Delta_i}{z}} = \frac{Fz^2}{E \sum \frac{1}{k_i}} = \frac{Ez^2}{\sum \frac{1}{k_i}} \quad (2.17)$$

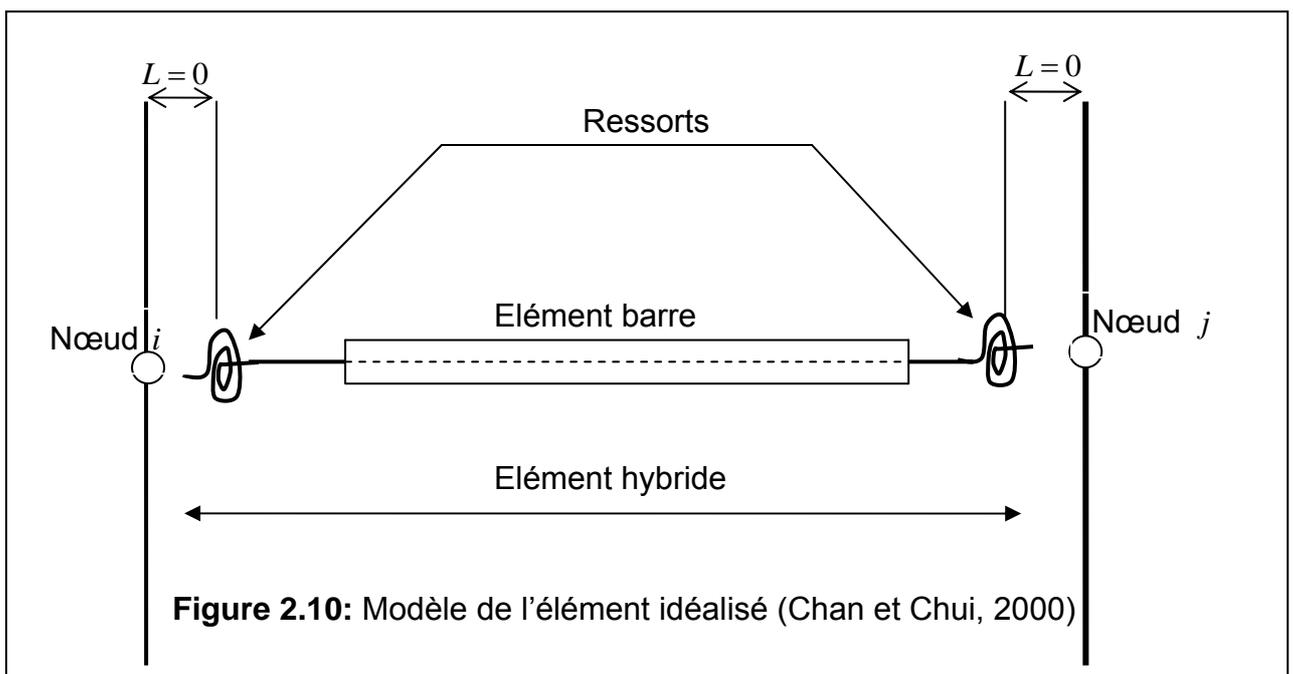
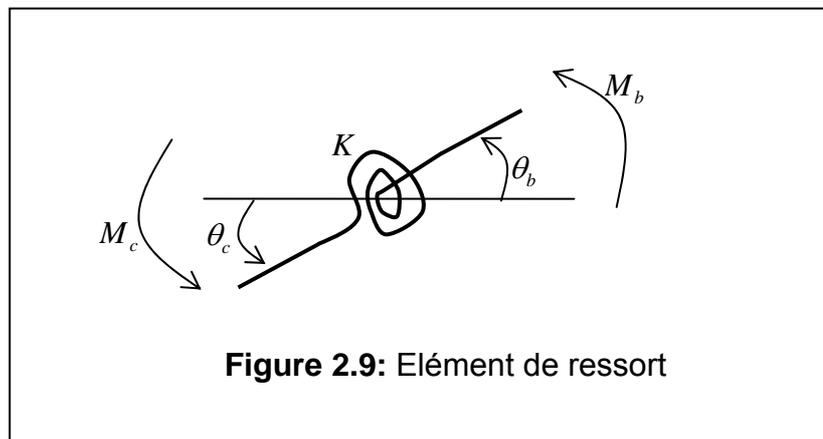
2.3.2. Modèle mécanique de l'assemblage (Chan et Chui, 2000)

Différentes tentatives de modélisation numérique du comportement de l'élément de nœud d'assemblage ont été proposés mais le modèle de ressorts (Chan et Chui,

2000) étant le plus utilisé. Il est constitué d'un ressort de rotation et parfois englobe deux ressorts de translations axiale et transversale. Il convient pour l'analyse des portiques auto- stables à nœuds d'assemblage semi rigides.

Le nœud semi rigide peut-être modélisé comme un élément de ressort, les hypothèses formulées sont les suivantes :

- a- L'assemblage est représenté par un ressort dont la loi constitutive est non linéaire.
- b- Le ressort a une longueur nulle et travaille uniquement en flexion
- c- Il est couplé à un élément fini de type poutre plane.



Les effets des déformations de l'effort axial et des forces de cisaillement sont négligeables devant les déformations dues au moment de flexion. Ainsi, seules les déformations rotationnelles des ressorts sont pris en considération.

L'équilibre des moments au niveau de l'assemblage (Fig. 2.9) donne :

$$M_b + M_c = 0 \quad (2.18)$$

où :

$$M_c = K(\theta_c - \theta_b) \quad (2.19-a)$$

et donc, on aura :

$$M_b = -M_c = K(\theta_b - \theta_c) \quad (2.19-b)$$

dans laquelle K est la rigidité rotationnelle de l'assemblage.

Sous la forme incrémentale, on peut écrire :

$$\begin{Bmatrix} \Delta M_c \\ \Delta M_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \theta_c \\ \Delta \theta_b \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

M_b et M_c sont les moments de la poutre et du poteau au niveau de l'assemblage.

K : rigidité de l'assemblage.

ΔM_b et ΔM_c sont les incréments des moments nodaux à la jonction entre le ressort et le nœud global puis entre la poutre et le ressort.

La matrice de rigidité de l'assemblage sera combinée avec celle de l'élément poutre pour formuler une nouvelle matrice de rigidité qui tienne compte de la semi rigidité des nœuds d'assemblage.

2.3.3. Da Silva et al (2001)

Da Silva et al ont étudiés analytiquement le comportement moment-rotation d'un assemblage soudé à l'aide d'un modèle mécanique constitué de deux ressorts caractérisés par des équations de comportement non linéaires. L'étude est basée sur l'expression du potentiel énergétique en fonction des degrés de liberté de

l'assemblage qui, une fois dérivée, permet de déterminer la courbe moment-rotation en fonction de l'effort axial N .



Figure 2.11: Modèle mécanique pour un assemblage de poutre-poteau soudé

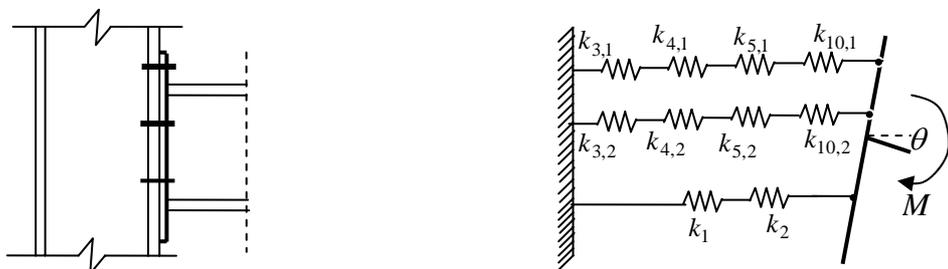


Figure 2.12: Modèle mécanique pour un assemblage platine d'extrémité étendue

2.3.4. Jaspert (1997)

La difficulté d'avoir une solution analytique a fait que certains auteurs comme Jaspert, ont préférés (Cerfontaine, 2004) une solution numérique obtenue par une méthode itérative. L'approche suivie s'inscrivant toujours dans le cadre de la méthode des composantes et tend à suivre le chargement d'un assemblage depuis le début du chargement jusqu'à sa ruine. Cette méthode permettait alors d'étudier à la fois les aspects de rigidité, de ductilité et de résistance (Jaspert, 1991 et 1997, Cerfontaine, 2004).

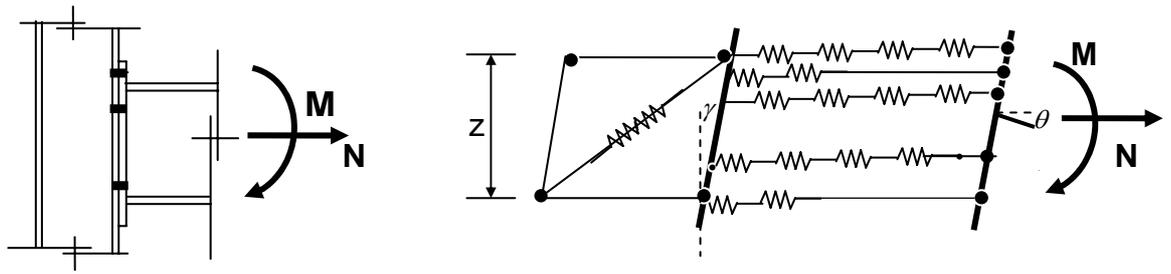


Figure 2.13: Modèle mécanique pour les assemblages boulonnés poutre-poteau

2.4. PROPOSITIONS

2.4.1. Modèle mécanique développé

Dans ce travail, la modélisation adoptée est basée sur l'analogie des trois ressorts (deux de translations, le troisième en rotation) avec en plus l'introduction de la notion de l'élément de noeud indéformable (Ihaddoudène, 1995 ; Ihaddoudène et al, 2008) pour décrire les déplacements relatifs ainsi que les rotations entre les noeuds et les éléments de la structure.

Les noeuds de la structure sur la figure (2.14-a) sont représentés par des cadres indéformables comme le montre la figure (2.14-b), à l'intérieur desquels on a un massif lié au cadre du noeud par deux ressorts de translation et lié à l'élément barre par un ressort de rotation, sur la figure (2.14-c). Ainsi, les extrémités des éléments barres présentent des déplacements relatifs et des rotations relatives ; les noeuds de la structure étant considérés dans les calculs comme des points matériels.

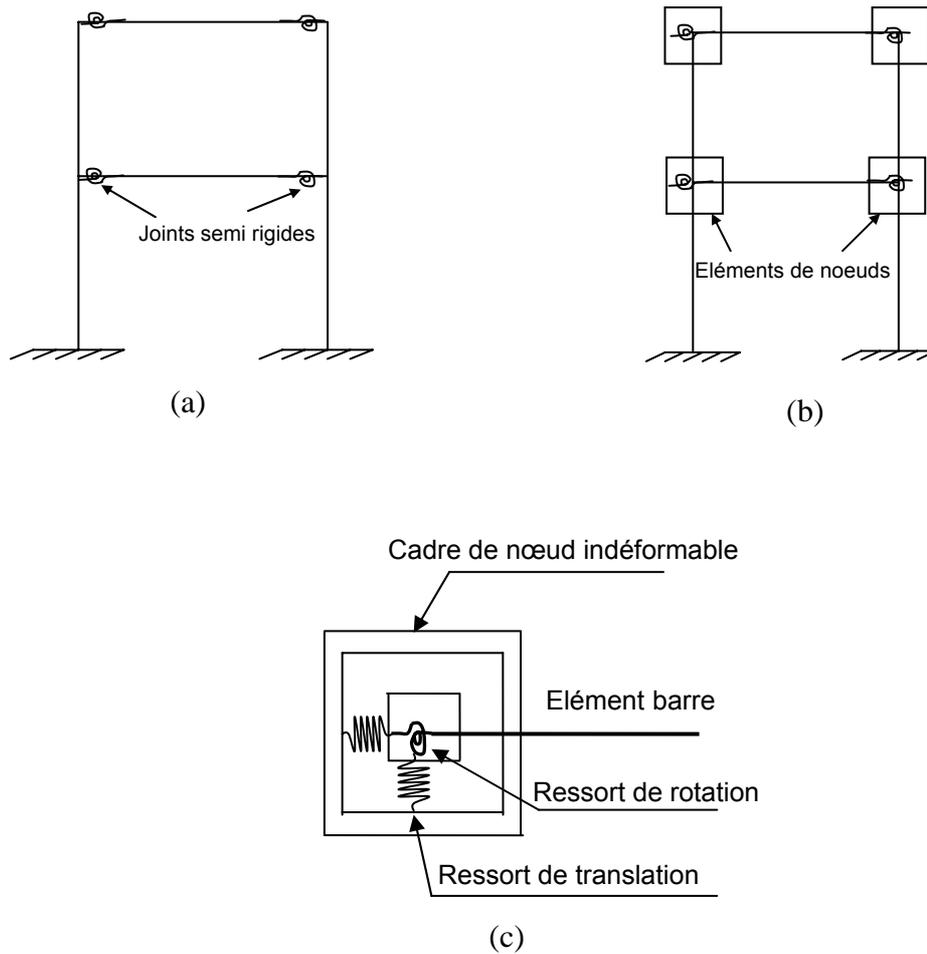
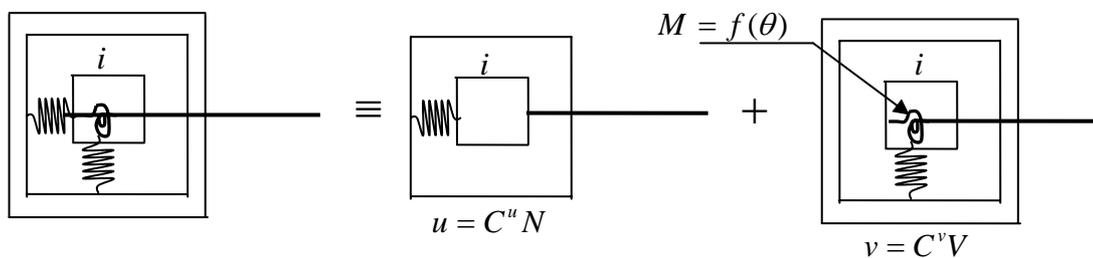


Figure 2.14 : Modèle mécanique proposé

En vertu du principe de superposition, les effets des trois ressorts peuvent être étudiés séparément, comme le montre la figure (2.15), ci-après :



(a): Elément de noeud indéformable; (b) :Ressort axial; (c) : Ressorts de translation et de rotation

Figure 2.15 : Analogie des ressorts

Le fait d'avoir introduit la notion d'élément de noeud indéformable, pour distinguer la rotation des noeuds de celle des éléments au niveau des assemblages semi-rigides nous a permis d'établir la matrice de rigidité tenant compte de cet aspect de comportement réel. Dans le repère local, elle est de la forme :

$$\overline{K}_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

2.4.2. Modèle mathématique

La relation moment-rotation du comportement des assemblages est non linéaire. Sous sa forme exponentielle (Ihaddoudène, 1995 ; Ihaddoudène et Chemrouk, 2004 ; Ihaddoudène et al, 2008) elle est mise sous la forme donnée par l'équation suivante :

$$\Theta = kM^\alpha \quad (2.22)$$

Où $\alpha = 1$ pour le cas linéaire

Globalement, la rigidité initiale et le moment ultime sont les deux caractéristiques les plus importantes qui permettent de définir le comportement du nœud d'assemblage (Bjorhovde et al, 1990, Ihaddoudène, 1995, EC3, 2005, Ihaddoudène et al, 2008).

2.5. CONCLUSIONS

La flexibilité des assemblages est bien connue pour être une source majeure de la non linéarité dans les structures métalliques. Si cette flexibilité n'est pas prise en compte, elle sera source d'erreurs et de précisions dans le dimensionnement des structures.

Dans ce chapitre, nous avons décrit les modèles des différents assemblages qui sont classés en modèle analytique, mathématique et mixte. Des exemples dans chaque catégorie ont été présentés.

La modélisation des nœuds d'assemblages (Chan et Chui, 2000) est assurée par le biais d'un ressort de rotation lié aux deux extrémités de la barre pour donner un élément hybride (poutre+ressort).

La matrice de rigidité ainsi constituée permet de traiter les éléments de structures à assemblage semi rigides mais dont la taille s'en trouve ainsi augmentée du degré de liberté de ce même assemblage et augmente ainsi la taille du problème à traiter.

Dans le modèle mécanique proposé, les solutions analytiques établies sont d'application faciles et pratiques. Tous les éléments de la matrice de rigidité s'obtiennent aisément par la méthode de déplacement unitaire.

CHAPITRE TROISIEME

ANALYSE DE LA STABILITE DES STRUCTURES

3.1. INTRODUCTION :

Une analyse du second ordre de type P-Delta permet souvent une évaluation simple et rationnelle de la distribution des efforts dans les éléments structuraux de bâtiments.

3.2. ANALYSE DU COMPORTEMENT D'UN ELEMENT BARRE COMPRIMEE

La rigidité des barres soumises à la compression pure décroît graduellement lorsque cette charge approche de la charge de ruine. Celle-ci peut alors, survenir par plastification totale de la section, par flambement de la barre toute entière ou encore par voilement d'une des parois mince constituant la section de la barre.

Une barre devant le phénomène d'instabilité élastique subit de façon soudaine, des déformations disproportionnées par rapport aux faibles accroissements de la charge; ce phénomène se produit d'autant plus facilement que la barre est élancée.

On a souvent tendance à simplifier l'étude des barres comprimées en identifiant trois zones définies en fonction de l'élancement et en regroupant les barres à l'intérieur de chacune des ces zones.

Dans ce cas, le comportement des barres est différent d'une zone à une autre, ce qui justifie une étude particulière pour chacune d'entre elles comme le montre la figure (3.1).

En effet, on remarque que pour les barres dont l'élancement $\lambda = l_f / i$ (dans lequel le rayon de giration $i = \sqrt{I/A}$, où I et A sont respectivement le moment d'inertie et l'aire de la section) est inférieur à un élancement limite, λ_{lim} , du matériau, l'état limite correspondant à la plastification totale de la section survient avant le voilement local des parois minces de la barre. L'état limite ultime, pour les poteaux élancés pour lequel λ est supérieur à cette même valeur de l'élancement λ_{lim} , est le phénomène du flambement élastique.

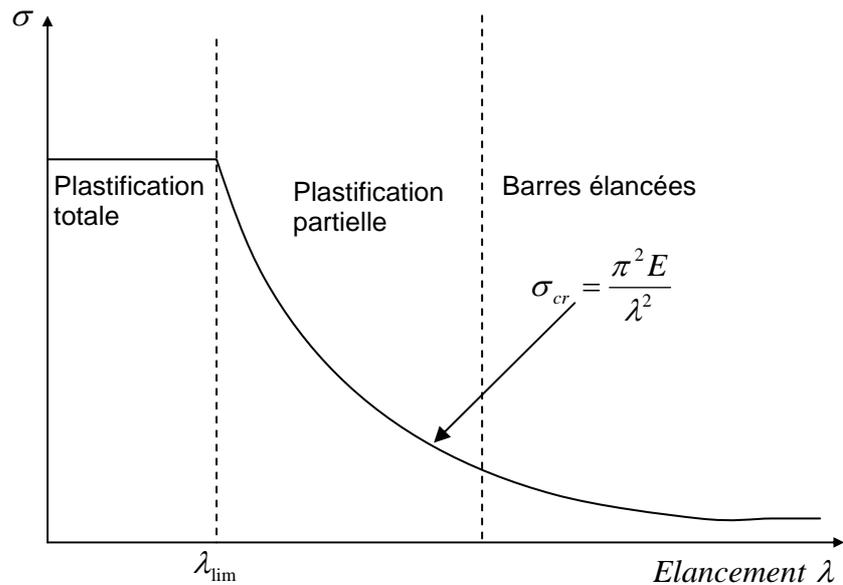


Figure 3.1 : Courbe de comportement de barres en compression

Pour les poteaux de longueur intermédiaire, cet état est le flambement anélastique et les éléments tombant dans cette catégorie sont les plus complexes à analyser.

En effet, l'interaction existant entre les différents facteurs (la distribution et l'intensité des contraintes résiduelles, élancement du poteau, ampleur de la déformée initiale, etc...) font en sorte que les résultats d'analyses théoriques du comportement des éléments de longueur intermédiaire démontrent une dispersion beaucoup plus grande pour cette catégorie d'éléments que pour les catégories précédentes.

3.2.1. Les facteurs influençant le comportement des barres

Parmi les facteurs les plus importants, susceptibles d'influencer le comportement des éléments barres en compression, on notera les contraintes résiduelles, les défauts de rectitude et les conditions aux extrémités de ces éléments (Galambos, 1988).

3.2.1.1. Influence des contraintes résiduelles

Les contraintes résiduelles qui résultent principalement des différentes opérations de laminage, soudage etc..., sont liées à la forme de la section et au mode de fabrication. La présence de ces contraintes fait en sorte que la section comprimée commence à se plastifier de façon progressive à une étape de chargement inférieure à l'étape correspondant à l'étape correspondant à la plastification totale de la pièce. Cette plastification affecte grandement la résistance des pièces en compression.

Sur la figure (3.2), il est montré qu'un profilé de plaques coupées au chalumeau présente une résistance plus élevée qu'un profilé similaire formé de plaques laminées (Galambos, 1988).

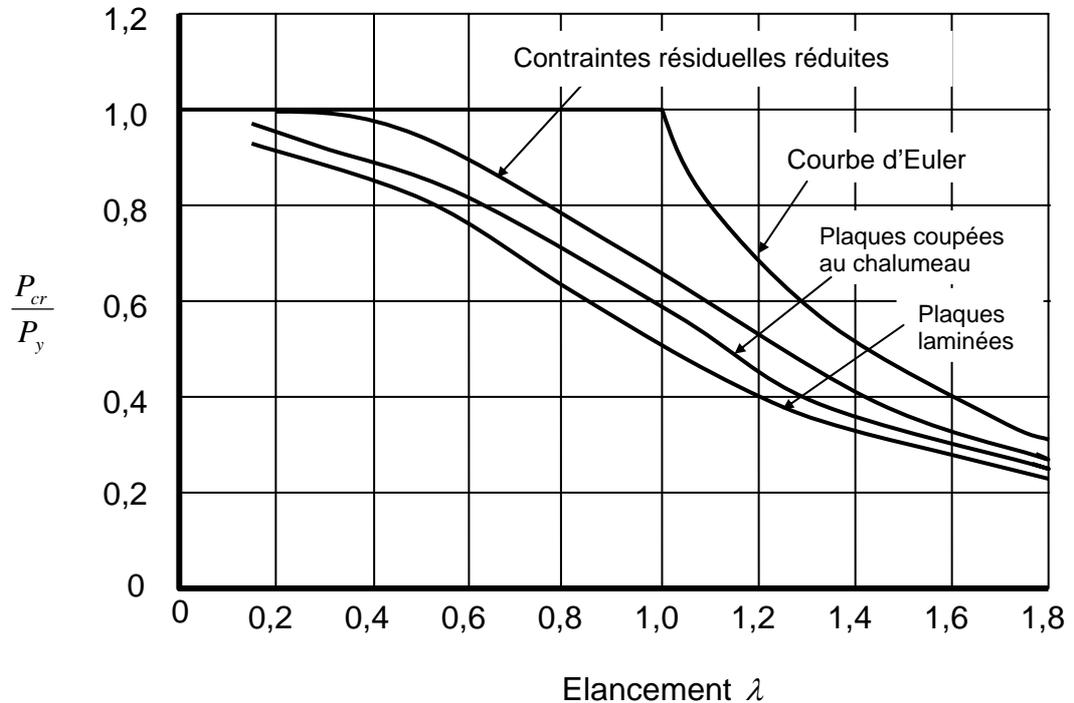


Figure 3.2: Influence des contraintes résiduelles

3.2.1.2. Influences des déformées initiales

L'allure de la déformée initiale étant impossible à prédire, on suppose en général une déformée de type sinusoïdale. La figure (3.3) ci-dessous donne pour différentes valeurs de déformées initiales, la distribution réelle des contraintes résiduelles de chaque barre et les déformées initiales maximales $L/500$; $L/100$; $L/2000$. Sur la figure ci-dessous, on visualise l'importance de l'effet combiné des contraintes résiduelles et des déformées initiales (Galambos, 1988). Il est montré que les barres comprimées de longueur intermédiaires sont celles qui sont les plus affectées par ces deux paramètres.

3.2.1.3. Influences de types d'appuis

Tous les modèles d'analyse sont basés sur des barres comprimées avec les conditions d'appuis d'encastrement et d'articulation idéalisées. On tenait compte de façon approximative de la liaison, en faisant appel au concept de longueur de

flambement (même si on doutait que le degré de fixation dû à l'assemblage jouait un rôle prépondérant sur le comportement d'ensemble de la barre comprimée).

La figure (3.4) montre l'importance de l'influence des assemblages et qu'il est, par conséquent essentiel d'en tenir compte dans les calculs.

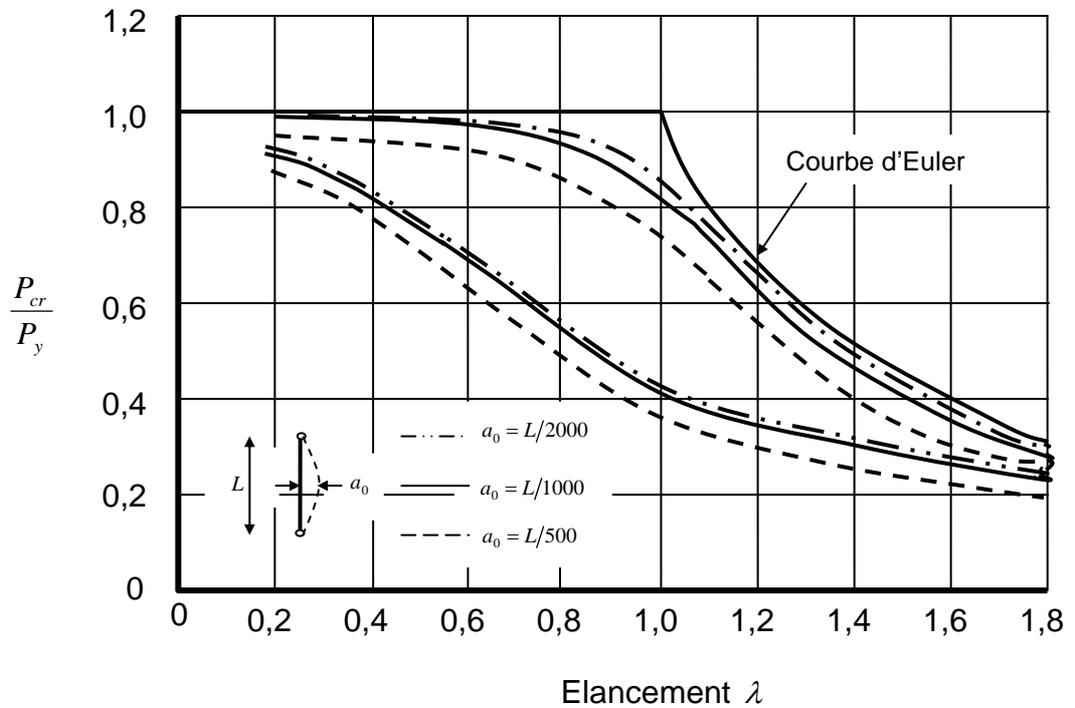


Figure 3.3: Influence des déformées initiales

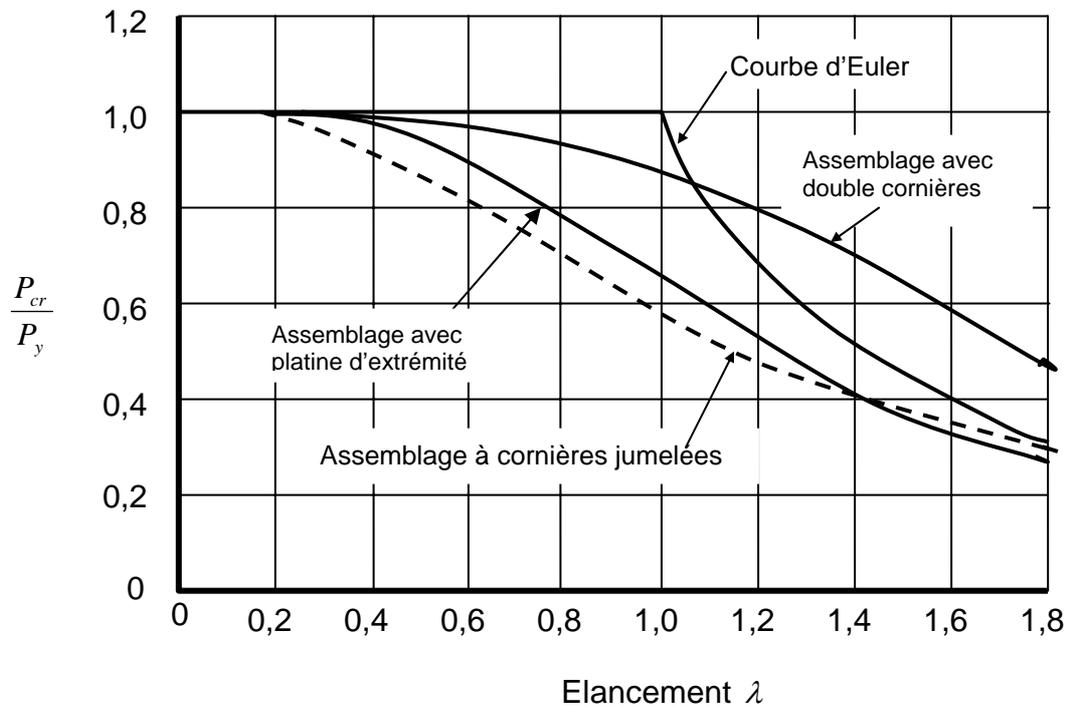


Figure 3.4 : Influence des types d'appuis

3.2.2. Instabilité élastique d'un poteau droit (Modèle d'Euler) :

Euler a proposé une solution analytique simple pour la détermination de la charge critique de flambement. Le modèle consiste en un poteau parfaitement droit, articulé à ses deux extrémités (fig. 3.5) et suffisamment élancé pour flamber avant qu'aucune fibre de la section ne se plastifie.

3.2.2.1. Equation différentielle de l'élément barre soumis à une charge axiale :

Considérons la barre de la figure (3.5.a) dans sa position déformée et écrivons les formules élémentaires de la résistance des matériaux (fig.3.5.b) :

$$EIy''(x) = -M(x) \quad (3.1.a)$$

qui peut-être écrite sous la forme :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0 \quad (3.1.b)$$

$$\text{Où : } k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

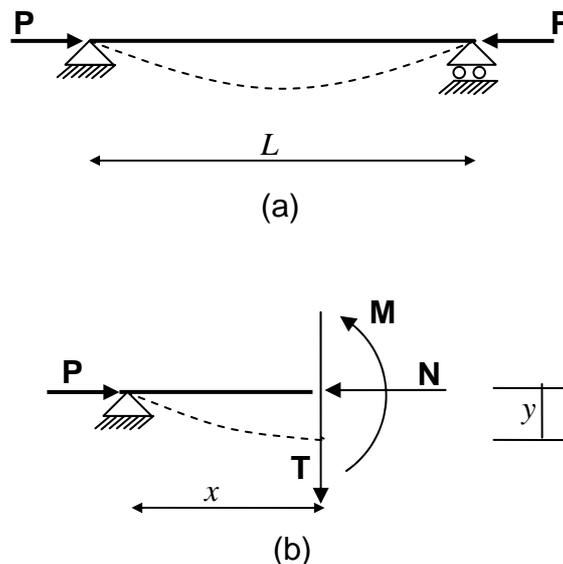


Figure 3.5: Modèle d'Euler

La solution de l'équation différentielle homogène donne l'équation de la déformée :

$$y = A \cos kx + B \sin kx \quad (3.2.a)$$

On détermine les constantes d'intégration A et B en considérant les conditions aux limites. La flèche étant nulle aux extrémités à $x=0$ et $x=L$, ce qui rend son expression sous la forme :

$$y(x) = B \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad (3.2.b)$$

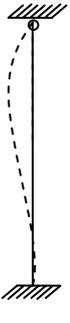
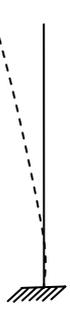
D'où l'on peut tirer directement la plus petite charge critique d'Euler obtenue pour

$$n = 1 \text{ et qui vaut : } P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (3.3)$$

3.2.2.2. Concept de longueur de flambement

Le concept de longueur de flambement a été introduit pour généraliser l'équation d'Euler dont la charge critique est donnée par l'équation (3.3). Afin de tenir compte des différentes conditions d'appuis, on a introduit le concept de longueur de flambement $L_f = \beta L$. Pour différents types d'appuis, le tableau suivant donne la longueur de flambement ainsi que la charge critique.

Tableau 3.1: Les différents types d'appuis idéalisés

Différents Types d'appuis idéalisés						
Longueur de flambement $L_f = \beta L$	L	$0,7 L$	$0,5 L$	$2 L$	$2 L$	L
Charge critique P_{cr}	$\pi^2 EI / L^2$	$2 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$4 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$\left(\frac{1}{4}\right) \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$\left(\frac{1}{4}\right) \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$\pi^2 EI / L^2$

On remarque du tableau (3.1) que, lorsque le déplacement latéral est nul, le coefficient de la longueur de flambement est compris entre 0,5 et 1.

Quand ce déplacement est permis, sa valeur est comprise entre 1.0 et l'infini. La limite supérieure est hypothétique et correspond au cas où les deux extrémités de la barre sont parfaitement articulées.

L'auteur de la référence (Cheong-Siat, ,1986) présente ce qu'il a qualifié de paradoxe le fait que ce facteur, qui découle d'une analyse de flambement élastique sous charges de gravité agissant seules, n'est pas représentatif et ne peut donc pas être appliqué à d'autres conditions de chargements. Il y'aurait ainsi deux facteurs impliqués : l'un pour la calcul de la stabilité individuelle des poteaux et l'autre pour la stabilité globale de la structure.

Il est démontré aussi (Cheong-Siat, ,1986) que ce paradoxe s'applique aussi pour les cas des structures métalliques à nœuds d'assemblages semi rigides. Aussi, une analyse au second ordre donnera une solution satisfaisante.

3.2.2.3. Méthode des nomogrammes

Le degré de rigidité aux extrémités d'un poteau dans une structure réelle se situe entre zéro et l'infini, soit respectivement, les limites correspondant à une rotule et à un encastrement parfait. La méthode des nomogrammes (de Lawrence et Julian) permet de déterminer la valeur du coefficient de longueur de flambement pour n'importe quel type de rigidité comprise entre ces deux limites extrêmes.

Cela consiste à calculer les rigidités relatives avec l'équation (3.4) au sommet G_U et à la base G_L du poteau, on trace ensuite une droite entre ces deux valeurs sur le nomogramme approprié pour déterminer la valeur de β .

$$G = \frac{\sum(I_c/L_c)}{\sum(I_p/L_p)} \quad (3.4)$$

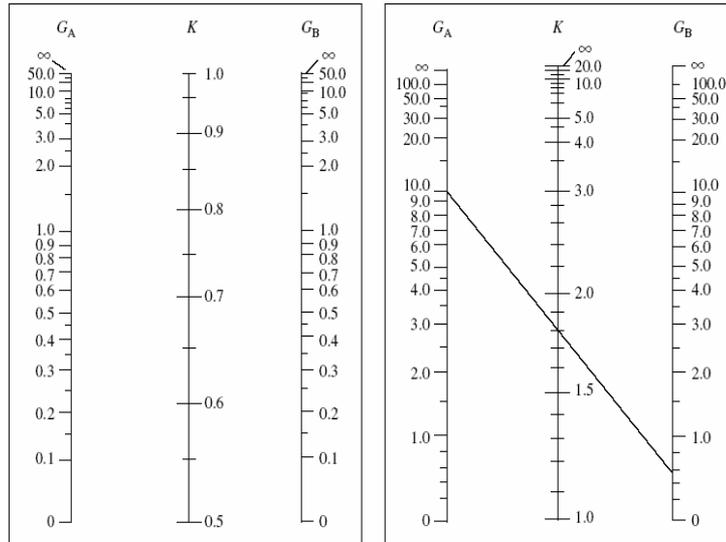


Figure 3.6 : Nomogrammes : Portiques (a) à nœuds déplaçables et (b) nœuds fixes

Pour le cas encasturé-appuyé donné par le tableau ci-dessus, par exemple, la partie supérieure du poteau est encasturée alors que la partie inférieure est articulée ; ainsi $G_U = 0$ et $G_L = \infty$ (Pour l'articulation $I_p = 0$ et $G = \infty$, et inversement pour l'encastrement). La droite joignant ces valeurs donne une valeur de $K = 0,7$.

Cependant, ces nomogrammes ne peuvent être utilisés que si les différentes rigidités (I/L) sont connues, lorsque un choix préliminaire des sections a été fait.

Combien même que cette méthode est largement utilisée, il reste que les divers règlements recommandent de tenir compte de la rigidité partielle qu'offre très souvent les assemblages (impossibilité de réaliser un encastrement parfait par exemple).

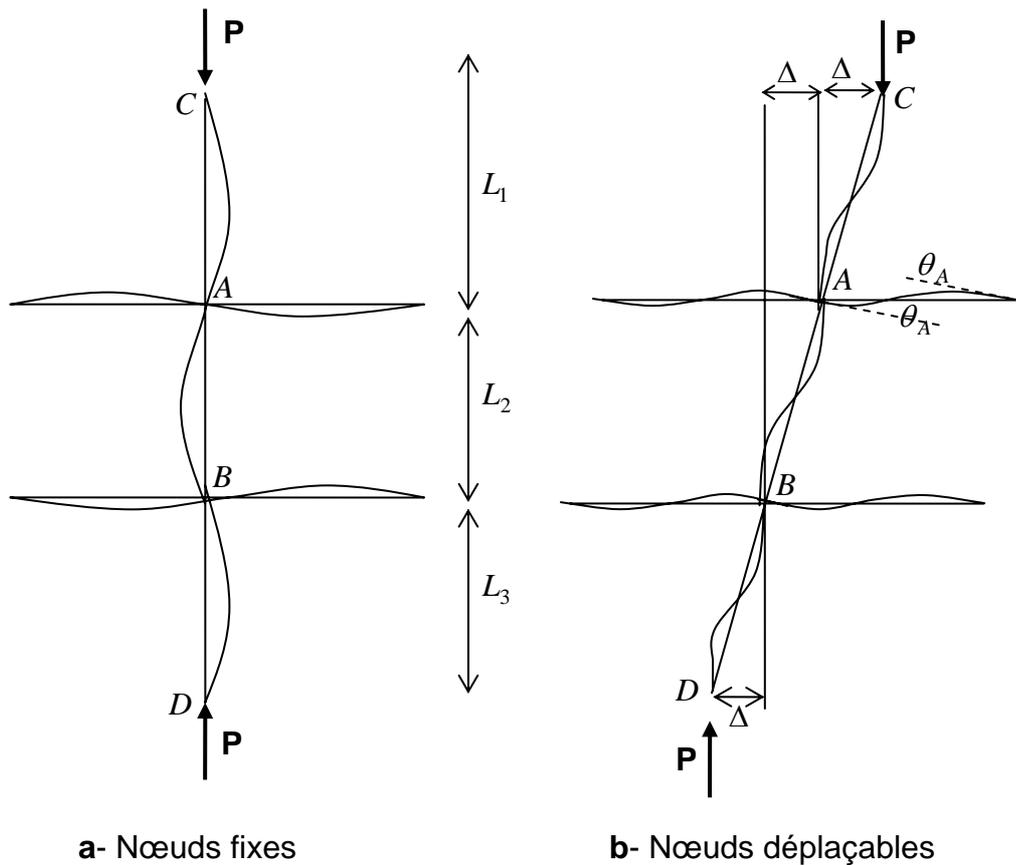


Figure 3.7 : Rotation des poutres

Les équations à la base des nomogrammes ont été dérivées selon l'hypothèse d'un cadre à joints rigides, de géométrie uniforme, qui se déforme selon un mode régulier.

Toute dérogation à ces hypothèses entraîne des valeurs erronées du coefficient de longueur de flambement (Chen et Lui, 1987). Aussi, son application aux charpentes irrégulières peut entraîner des erreurs importantes.

Combien même cette difficulté ait été contournée en calculant des valeurs de rigidités modifiées, elle reste relativement laborieuse.

Cette méthode est ainsi basée sur l'hypothèse que les poteaux flambent simultanément (Essa, 1997) et cela dans les cas illustrés sur la figure (3.7) mais dans une structure contreventée par exemple, le flambement d'un poteau quelconque ne dépend pas de la résistance au flambement des autres poteaux :

c'est un phénomène de comportement individuel. Mais dans une charpente non contreventée, c'est, en effet, un comportement global.

Dans les références de Duan et Chen (1988 et 1989), il est démontré que la présence de conditions particulières (articulations, encastrement) aux extrémités éloignées des poteaux supérieurs et inférieurs (Fig. 3.7) peuvent conduire à des valeurs de β parfois sécuritaires et parfois non – sécuritaires pour le poteau central.

Dans le cas du modèle où le déplacement latéral est permis, les résultats sont nettement non – sécuritaires (Essa, 1997).

Enfin, dans la méthode des nomogrammes, le poteau est en quelque sorte extrait de la structure et étudié de façon isolée. Par contre, dans le cadre de l'analyse structurale, le poteau interagit avec le reste de la structure, il s'agit d'un phénomène de comportement d'ensemble.

3.2.2.4. Poutre isolée et poutre réelle

L'évaluation de la stabilité des poteaux sous charges axiales est généralement conduite (Gizejowski et al, 2006) par différentes méthodes analytique (da Silva et Coelho, 2001) et numérique (Goto et Chen, 1987; Jaspert, 1991), par la détermination de la longueur de flambement et rapportés notamment dans les références (Timoshenko, 1966 ; Wood, 1974 ; Ashwini, 1985; Hallesland, 1994 ; Wang et al, 2005 ; Tong et Wang, 2006 ; Wang, 2006 ; Simitzes et Hodges, 2006), souvent utilisée dans des codes tel (l'Eurocode 3 ; Wang et al, 1993) et qui tendent à simplifier les hypothèses influençant, ainsi, le degré de précision des résultats, erronés surtout pour les cas de portiques irréguliers (Girgin et al, 2006).

Cependant, les différents algorithmes de calcul des méthodes numériques qui permettent de prendre en compte les procédures de calcul linéaire, non linéaire (Hallesland, 2007) sont souvent, suivis de lourdeur de calculs qui ne sont pas à la portée de tous.

Les formules d'interaction relatives à la vérification de la stabilité des poteaux soumis à la compression et à la flexion s'appliquent à des éléments supposés isolés de tout

contexte (Liew et al, 1991 ; Aristizabal-Ochoa, 1997 ; Boissonnade et al, 2002, Cerfontaine, 2004 ; da Silva, 2008). Leur application à un poteau réel de bâtiment nécessite la définition d'un poteau équivalent isolé avec différents types d'appuis (Seculovic et Salatic, 2001).

L'effet de ces différents appuis est souvent matérialisé par la présence de ressorts flexionnels dont la rigidité équivaut à celle de la partie environnante de l'ossature réelle (Gantes et al, 2005 ; Mageirou, 2006, Tong et Wang, 2006).

La détermination de la longueur de flambement découle de l'étude du poteau isolé équivalent. Le problème principal réside dans l'évaluation des caractéristiques flexionnelles des ressorts d'extrémités.

Pour les cas de poteaux à section variables, on a souvent tendance à utiliser des méthodes numériques pour déterminer leur longueur de flambement. Récemment encore, les auteurs (Al-Sadder, 2004 ; Saffari et al, 2008) ont proposé une méthode analytique en utilisant la méthode des rotations aménagée, s'inspirant ainsi fortement de la méthode suggérée par (Ermopoulos, 1997). En effet, pour un élément à section variable, cet auteur préconise de le diviser en un certain nombre de segments de sections constantes et à l'interface, rajouter les équations de compatibilité.

Cependant, il y'a lieu de souligner que la précision des résultats dépendra, dans une large mesure, du nombre de segments utilisé.

Enfin, le principal objectif recherché est de proposer une approche afin de pouvoir évaluer la charge critique de flambement de portique simple ou étagé tenant compte de la spécificité des assemblages semi rigides.

3.2.2.4.1. Evaluation fondée sur l'étude de l'instabilité élastique linéaire des poteaux

L'étude de l'instabilité élastique linéaire d'un poteau isolé avec différents types d'appuis et soumis à un effort de compression conduit à l'écriture d'une équation différentielle dont la solution, obtenue par voie itérative, fournit les longueurs effectives de flambement associés aux différents modes d'instabilité ; la plus faible d'entre elles est, en particulier, celle dont on cherche à estimer la valeur. Les

diverses solutions approchées de cette équation dans la littérature dont principalement :

a - Solution exacte donnée par Wood (1975) :

Cet auteur apporte la solution exacte à l'équation différentielle sous la forme d'abaque qui fournit le coefficient de longueur effective de flambement K_{eff} - défini comme le rapport entre la longueur effective de flambement L_{eff} et la hauteur du poteau - en fonction des coefficients d'encastrement k relatifs aux deux extrémités A et B du poteau :

$$k_A = \frac{R_p}{R_p + R_A} \quad (3.5.a)$$

$$k_B = \frac{R_p}{R_p + R_B} \quad (3.5.b)$$

dans lesquels

$$R_p = \frac{4EI_p}{L_p} \text{ caractérise la rigidité à la flexion du poteau}$$

b - L'Eurocode 3 suggère l'expression mathématique approchée suivante de l'abaque de Wood (Wood, 1975) :

$$K_{eff} = \frac{1 + 0,145(k_A + k_B) - 0,265k_A k_B}{2 - 0,364(k_A + k_B) - 0,247k_A k_B} \quad (3.6)$$

c - Formule proposée par Jaspart (1991)

Pour évaluer le coefficient de longueur effective de poteau, Jaspart a proposé la formule suivante :

$$K_{eff} = \frac{1}{\sqrt{n_{eff}}} \quad (3.7.a)$$

Avec

$$n_{eff} = \frac{1 + 0,007 \alpha_p f_1(r) + 0,009 \alpha_p^2 f_2(r)}{1 + 0,034 \alpha_p f_1(r) + 0,00225 \alpha_p^2 f_2(r)}$$

Les deux fonctions f_1 et f_2 (Jaspart, 1991) sont définies comme :

$$f_1 = \frac{1+r}{\sqrt{1+r^2}} \quad (3.7.b)$$

$$f_2 = \frac{r}{1+r^2} \quad (3.7.c)$$

d - Approche proposée du calcul de la charge d'instabilité (Jaspart, 1991)

Dans sa formulation, cet auteur propose pour l'évaluation de la longueur effective de flambement évaluée sur la base de l'utilisation conjointe de l'abaque de Wood et des coefficients d'encastrement k_A et k_B exprimées de la manière suivante :

$$k_A = \frac{R_P}{R_P + R_A + R_{PA}^*} \quad (3.8.a)$$

$$k_B = \frac{R_P}{R_P + R_B + R_{PB}^*} \quad (3.8.b)$$

Les rigidités des poteaux s'expriment par :

$$R_{PA}^* = \frac{2EI_A}{L_A} \frac{\alpha^2(\varepsilon_A) - \beta^2(\varepsilon_A)}{\alpha(\varepsilon_A)} \quad (3.9.a)$$

$$R_{PB}^* = \frac{2EI_B}{L_B} \frac{\alpha^2(\varepsilon_B) - \beta^2(\varepsilon_B)}{\alpha(\varepsilon_B)} \quad (3.9.b)$$

Où $\alpha(\varepsilon)$ et $\beta(\varepsilon)$ représentent les fonctions de stabilité relatives à une partie de poteau et ont pour expressions

$$\alpha(\varepsilon) = \frac{\varepsilon(\sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon)}{2(2 - 2 \cos \varepsilon - \varepsilon \sin \varepsilon)} \quad (3.10.a)$$

$$\beta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon(\varepsilon - \sin \varepsilon)}{2(2 - 2 \cos \varepsilon - \varepsilon \sin \varepsilon)} \quad (3.10.b)$$

Où

$$\varepsilon = L\sqrt{N/EI}$$

Dans laquelle "N" représente la valeur de l'effort de compression auquel est soumis la partie du poteau étudiée de longueur L et d'inertie I .

Ces fonctions traduisent la diminution de la rigidité de flexion d'un poteau en fonction de l'effort de compression qui lui est appliqué. Elles modifient les relations moment - rotation comme suit :

$$M_g = m_g + \frac{2EI}{L} [\alpha(\varepsilon)\theta_g + \beta(\varepsilon)\theta_d] \quad (3.11.a)$$

$$M_d = m_d + \frac{2EI}{L} [\beta(\varepsilon)\theta_g + \alpha(\varepsilon)\theta_d] \quad (3.11.b)$$

Où m_g et m_d constituent les moments d'encastrement parfaits.

Pour une valeur nulle de l'effort normal ($\varepsilon = 0$), les fonctions de stabilité prennent les valeurs bien connues :

$$\alpha(0) = 2,0$$

$$\beta(0) = 1,0$$

En définitive, la détermination de la longueur effective de flambement repose sur l'évaluation des coefficients d'encastrement qui sont fonctions des rigidités des poteaux supérieur et inférieur R_{PA} et R_{PB} .

Certains auteurs tels que (Vandepitte, 1982 ; Ackroyd et Gerstle, 1983) ont montré, pour leur part, que les effets du second ordre dont une structure à nœuds rigides est le siège lors de son chargement, peuvent être pris en compte de manière simple et directe dans la méthode des rotations couramment utilisée pour l'étude élastique linéaire des structures (Salmon et Johnston, 1996 ; Samuelsson et Zienkiewicz, 2006).

Ce type d'analyse évite, ainsi, le recours à une méthode itérative habituelle et autorise, par ailleurs, la prise en considération de la diminution de la rigidité de l'ossature due aux efforts de compression des poteaux.

Ces auteurs proposent pour l'analyse élastique linéaire du second ordre des modifications à la méthode des rotations. Celle-ci repose sur l'expression d'équations constitutives – relative à chaque barre de l'ossature – qui fournissent les valeurs des moments d'extrémité M_g et M_d à partir des moments d'encastrement parfaits m_g et m_d et des rotations θ_g du nœud gauche et θ_d du nœud droit.

En l'absence de l'effort normal dans les barres, ces relations s'expriment :

$$M_g = m_g + \frac{2EI}{L} (2\theta_g + \theta_d) \quad (3.12.a)$$

$$M_d = m_d + \frac{2EI}{L} (\theta_g + 2\theta_d) \quad (3.12.b)$$

De plus, ils proposent de remplacer les expressions (3.12.a) et (3.12.b) ci-dessus par les expressions (3.11.a) et (3.11.b) données plus haut et qui font intervenir la notion de fonction de stabilité.

Mais n'a-t-on pas conclu déjà que tout nœud d'assemblage est semi rigide et que par conséquent les moments m_g et m_d ne pouvant jamais être considérés parfaits, c'est l'un des reproches à faire à la méthode proposée.

3.3. ANALYSE DU COMPORTEMENT DE L'ÉLÉMENT POUTRE-POTEAU

En réalité, tous les éléments des structures sont pour la plupart, soumis à des efforts combinés de flexion et de compression, ce sont les poutres-poteaux (Chen et Atsuta, 1976). Leur étude théorique est fort complexe car ils subissent divers effets secondaires résultant de la combinaison des charges. On trouvera des références sur ce sujet assez complètes dont principalement (Chen and Atsuta, 1976 ; Chen, 1991 ; Timoshenko et Gere, 1966 ; Livesley, 1975) et plus récemment dans (Salmon et Johnson, 1996. Bazant et Cedolin, 2003 ; Wang et al, 2005 ; Aristizabal-Ochoa, 2008) pour ne citer que les plus importantes. On y retrouve l'effet $P - \Delta$ présenté par une série de fonctions trigonométriques, ainsi que des expressions approchées utilisant les facteurs d'amplifications. La formulation matricielle de la matrice de rigidité aménagée utilise, quand à elle, les fonctions de stabilité initialement introduite par Livesley et Chandler (1956).

3.3.1. Equation différentielle pour le cas d'une compression - flexion :

On considère le cas général de la poutre de la figure (3.8) ci dessous où la charge transversale $q(x)$ est combinée avec les moments aux extrémités M_1 et M_2

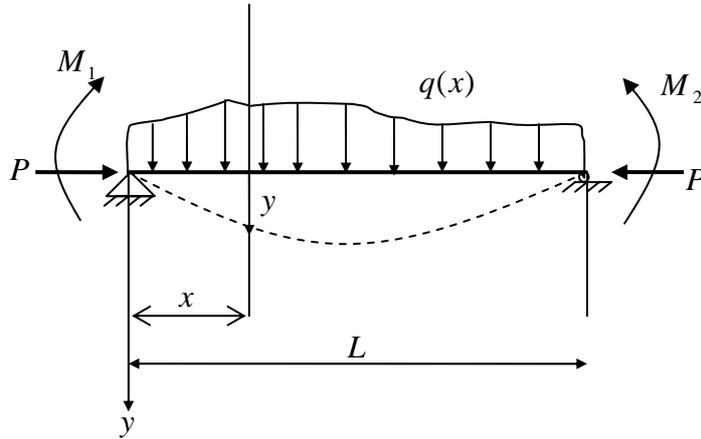


Figure 3.8: Poutre poteau sous un chargement quelconque

$$M(x) = M_i + Py \quad (3.13)$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x) \quad (3.14.a)$$

Pour des sections constantes et en divisant par EI , on aura :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = -\frac{M_i(x)}{EI} \quad (3.14.b)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{EI} \frac{d^2 M_i(x)}{dx^2} \quad (3.14.c)$$

A partir de l'équation (3.13),

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \quad \text{et donc} \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{1}{EI} \frac{d^2 M(x)}{dx^2}$$

Soit en remplaçant dans l'expression (3.14.c), on aura :

$$-\frac{1}{EI} \frac{d^2 M(x)}{dx^2} + \frac{P}{EI} \left(\frac{-M(x)}{EI} \right) = -\frac{1}{EI} \frac{d^2 M_i}{dx^2} \quad (3.14.d)$$

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + k^2 M(x) = \frac{d^2 M_i(x)}{dx^2} \quad (3.14.e)$$

La solution de l'équation homogène sera :

$$M(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (3.15.a)$$

à laquelle on rajoute la solution particulière. Le maximum de $M(x)$ est obtenu par

différentiation $\frac{dM(x)}{dx} = 0$, ce qui donne

$$Ak \cos kx - Bk \sin kx = 0 \quad \text{soit} \quad (3.15.b)$$

$$M^{\max}(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (3.15.c)$$

3.3.1.1. Les différents cas de chargement :

a - Cas 1 : Moments appliqués aux nœuds

De l'équation générale et les conditions aux limites, on peut déterminer l'expression du moment ainsi que son maximum, respectivement, tels que :

$$M(x) = \left(\frac{M_2 - M_1 \cos kL}{\sin kL} \right) \sin kx + M_1 \cos kx \quad (3.16.a)$$

$$M^{\max}(x) = M_2 \sqrt{\frac{1 - 2(M_1/M_2) \cos kL + (M_1/M_2)^2}{\sin^2 kL}} \quad (3.16.b)$$

En supposant des moments égaux $M_1 = M_2 = M$ appliqués aux deux extrémités, on aura :

$$M^{\max}(x) = M \sqrt{\frac{2(1 - \cos kL)}{\sin^2 kL}} \quad (3.16.c)$$

$$M^{\max} = M \sqrt{\frac{2(1 - \cos kL)}{1 - \cos^2 kL}} = M \left(\frac{1}{\cos kL/2} \right) \quad (3.16.d)$$

$$M^{\max} = M \sec \frac{kL}{2} \quad (3.16.e)$$

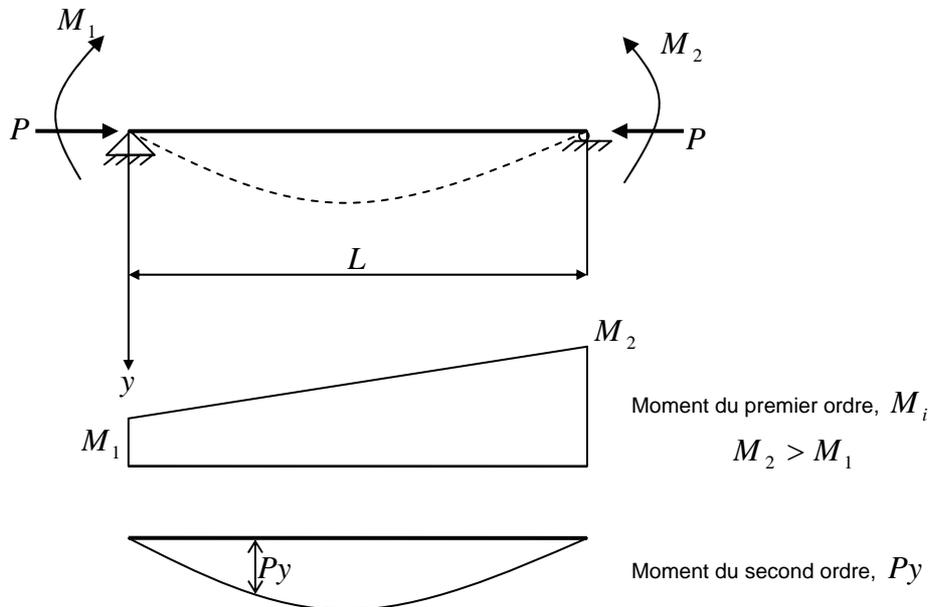


Figure 3.9: Moments aux extrémités

b - Cas 2 : Charge uniformément répartie

$$M^{\max}(x) = \frac{q}{k^2} \sqrt{\left(\frac{1 - \cos kL}{\sin kL}\right)^2 + 1} - \frac{q}{k^2} \quad (3.17.a)$$

$$M^{\max}(x) = \frac{q}{k^2} \left(\sec \frac{kL}{2} - 1 \right) \quad (3.17.b)$$

$$M^{\max}(x) = \frac{qL^2}{8} \underbrace{\left(\frac{8}{(kL)^2} \right) \left(\sec \frac{kL}{2} - 1 \right)}_{\text{facteur d'amplification du à l'effort axial}} \quad (3.17.c)$$

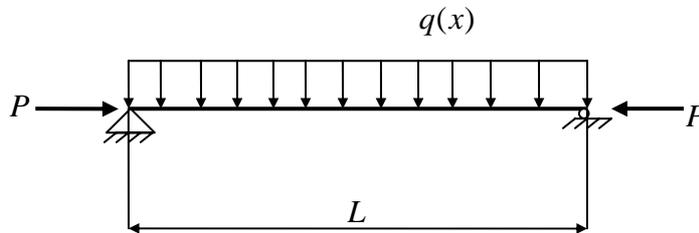


Figure 3.10: Charge uniformément répartie

Expression de la flèche :

Soit l'expression de $M(x) = Py - q \frac{x^2}{2} + \frac{qL}{2}x$ (3.18)

La déformée et la pente auront pour expressions :

$$y = A \sin kx + B \cos kx + \frac{q}{2EI k^2} x^2 - \frac{wL}{2EI k^2} x + \frac{q}{EI k^4} \quad (3.19.a)$$

$$y' = Ak \cos kx - Bk \sin kx + \frac{q}{EI k^2} - \frac{qL}{2EI k^2} \quad (3.19.b)$$

Les constantes d'intégration sont déterminées avec les conditions $y(0) = 0$ et

$y'(L/2) = 0$, l'expression précédente peut-être réécrite sous la forme simplifiée :

$$y = \frac{qL^4}{16EIu^4} \left[\tan u \sin \frac{2ux}{L} + \cos \frac{2ux}{L} - 1 \right] - \frac{qL^2}{8EIu^2} x(L-x) \quad (3.19.c)$$

$$\text{Avec } u = \frac{kL}{2} = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}},$$

Après quelques transformations, la flèche maximale sera telle que

$$y^{\max} = y_0 \left[1 + (P/P_{cr}) + (P/P_{cr})^2 + \dots \right] = y_0 \left[\frac{1}{1 - (P/P_{cr})} \right] \quad (3.19.d)$$

c - Cas 3 : Charge concentrée

La même démarche est suivie pour avoir la flèche max et le moment max soit pour la mi-travée:

$$y^{\max} \approx y_0 \left[\frac{1}{1 - (P/P_{cr})} \right] \quad (3.20.a)$$

$$M^{\max} \approx M_0 \left[\frac{1 - 0,18(P/P_{cr})}{1 - (P/P_{cr})} \right] \approx M_0 \left[\frac{1 - 0,2(P/P_{cr})}{1 - (P/P_{cr})} \right] \quad (3.20.b)$$

On remarque qu'il y'a une similarité des formes entre les facteurs d'amplification dans les expressions précédentes pour les cas de la charge concentrée et répartie.

3.3.1.2. Influence de la déformée initiale

a - Charge répartie :

Soit la poutre poteau précédente soumise à la charge répartie $q(x)$, quelconque, et présentant une flèche initiale (imperfection) δ_0 , à mi-travée comme le montre la figure ci-dessous :

$$y_1 = \frac{P}{EI} (y_1 + \delta_0) \left(\frac{L}{2} \right) \frac{2}{\pi} \left(\frac{L}{\pi} \right) = (y_1 + \delta_0) \frac{PL^2}{\pi^2 EI} \quad (3.21.a)$$

Ou

$$y_1 = (y_1 + \delta_0) \frac{P}{P_{cr}}$$

$$\text{D'où } y_1 = \delta_0 \left[\frac{P/P_{cr}}{1 - P/P_{cr}} \right] = \delta_0 \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \quad (3.21.b)$$

Comme y_{\max} est la somme de δ_0 et y_1

$$y_{\max} = \delta_0 + y_1 = \delta_0 + \delta_0 \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) = \frac{\delta_0}{1 - \alpha} \quad (3.21.c)$$

Le moment max incluant l'effet de l'effort axial est :

$$M^{\max}(x) = M_0 + P y_{\max} \quad (3.21.d)$$

En remplaçant l'expression de y_{\max} dans l'équation (3.21.c) et sachant que $P = \alpha P_{cr} = \alpha \pi^2 EI / L^2$, l'équation (3.21.d) sera écrite comme étant le produit d'un moment au premier ordre M_0 par le facteur d'amplification B_1 ;

$$\text{ainsi } M^{\max}(x) = B_1 M_0 \quad (3.22.a)$$

$$\text{dans laquelle } B_1 = \frac{C_m}{1 - \alpha} \quad (3.22.b)$$

$$C_m = 1 + \left(\frac{\pi^2 EI \delta_0}{M_0 L^2} - 1 \right) \alpha = 1 + \psi \alpha \quad (3.22.c)$$

Pour différentes situations, les auteurs (Timoshenko et Gere, 1966) ont donné les valeurs de C_m et on remarque que sa valeur n'excède jamais l'unité.

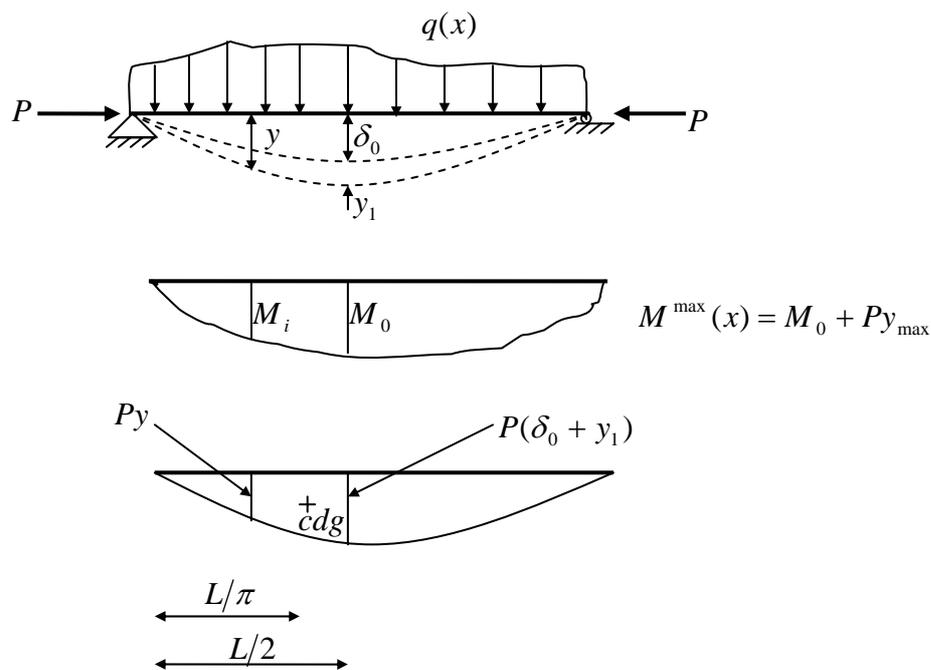


Figure 3.11: Moments de premier et de second ordre

b - Moments aux extrémités :

Dans cette situation, le moment max est soit dû au moment M_2 (Fig.3.12.a) ou dans diverses situations dépendant du rapport (M_1/M_2) et de la valeur de α , (Fig.3.12.b).

Afin d'éviter ces situations, le concept du moment équivalent M_E est introduit (Fig.3.12.c). Afin d'établir cette relation posons $M = M_E$, on a donc,

$$M_E = M_2 \sqrt{\frac{1 - 2(M_1/M_2)\cos kL + (M_1/M_2)^2}{2(1 - \cos kL)}} \quad (3.23)$$

Pour un moment uniforme, le facteur d'amplification est donné par la formule (3.22.a) :

$$B_1 = \sec \frac{kL}{2} = \frac{1}{1 - \alpha}$$

Puis en utilisant le moment équivalent M_E pour remplacer M_1 et M_2 , le moment max aura pour expression : $M^{\max}(x) = M_E \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)$

Comparée à l'équation (3.23) donne :

$$M^{\max}(x) = C_m M_2 \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right) \quad (3.24.a)$$

Dans lequel :

$$C_m = M_E / M_2 = \sqrt{\frac{1 - 2(M_1/M_2)\cos kL + (M_1/M_2)^2}{2(1 - \cos kL)}} \quad (3.24.b)$$

De cette expression, on remarque que le coefficient du moment équivalent C_m est fonction du rapport (M_1/M_2) et de la charge axiale (P). Les expressions simplifiées suivantes de ce coefficient, éliminant la dépendance de l'effort axial, ont été proposées par Massonnet et Austin.

$$\text{Pour Massonnet : } C_m = \sqrt{0,3(M_1/M_2)^2 + 0,4(M_1/M_2) + 0,3} \quad (3.25)$$

$$\text{Pour Austin : } C_m = 0,6 + 0,4(M_1/M_2) \geq 0,4 \quad (3.26)$$

Les moments M_1 et M_2 sont respectivement le plus petit et le plus grand moment appliqué aux nœuds.

Dans les règlements américains, LRFD, on adopte la formule d'Austin.

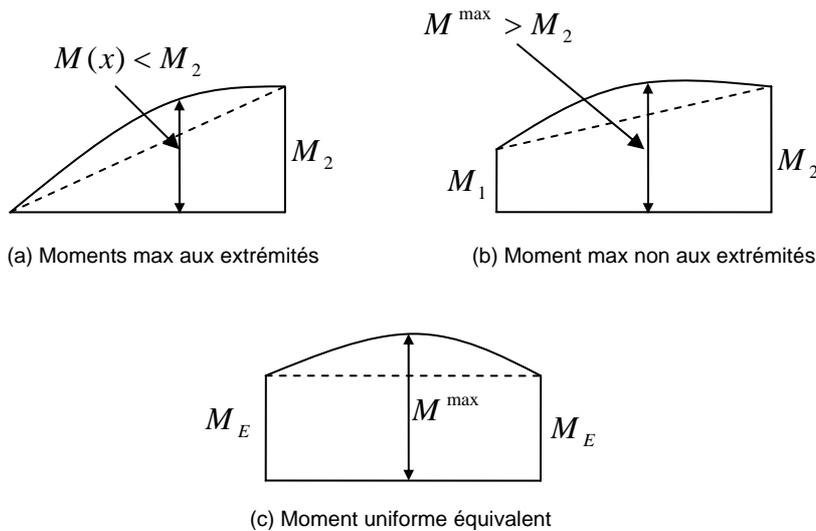


Figure 3.12: Différentes positions du moment maximum

3.4. ANALYSE ELASTIQUE AU SECOND ORDRE : FORMULATION MATRICIELLE

3.4.1. ETABLISSEMENT DES FONCTIONS DE STABILITE

Les fonctions de stabilité (Chen et Lui, 1987 ; Chen et al, 1996 ; Salmon et Johnston, 1996 ; Vandebitte, 1983) traduisent la diminution de la rigidité de flexion d'un poteau en fonction de l'effort de compression qui lui est appliqué, elles modifient, en fait, les relations moment –rotation. Soit l'élément suivant, soumis à la fois aux moments d'extrémités ainsi qu'à une charge axiale.

3.4.2. MATRICE DE RIGIDITE

3.4.2.1. Cas des extrémités fixes à nœuds rigides

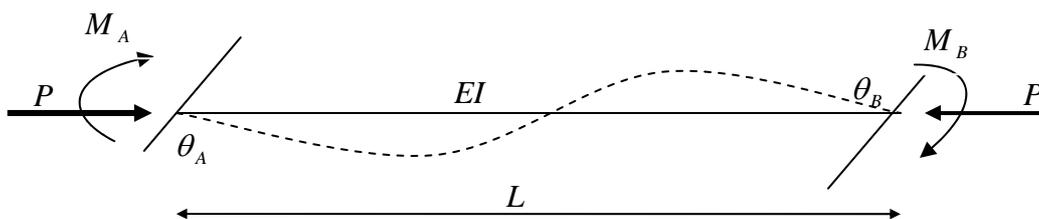


Figure 3.13: Élément sous charge axiale et moments aux extrémités

En considérant l'équilibre d'un tronçon de cet élément tel que :

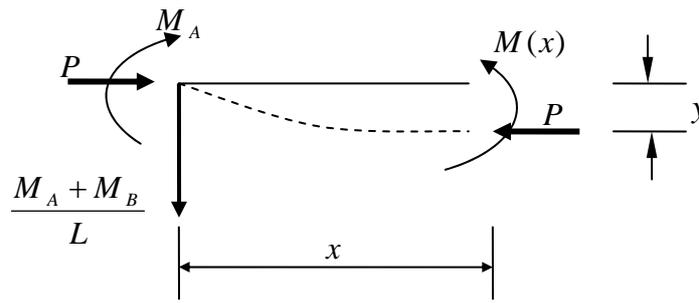


Figure 3.14: Élément de réduction

a - Equations d'équilibres :

$$M(x) = Py + M_A - \frac{M_A + M_B}{L} x \quad (3.27)$$

$$EIy''(x) = -M(x) \quad (3.28.a)$$

$$y''(x) + \frac{P}{EI} y = \frac{M_A + M_B}{L} x - M_A \quad (3.28.b)$$

Avec $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$

La déformée est telle que :

$$y(x) = A \cos kx + B \sin kx + \frac{M_A + M_B}{EIk^2} x - \frac{M_A}{EIk^2} \quad (3.29.a)$$

La rotation est alors obtenue par :

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -Ak \cos kx + Bk \sin kx + \frac{M_A + M_B}{EIk^2} \quad (3.29.b)$$

Les constantes A et B s'obtiennent à partir des conditions suivantes

$$y(0) = 0 \Rightarrow A = \frac{M_A}{EIk^2} \quad (3.29.c)$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow B = \left(\frac{-M_B - M_A \cos kL}{EIk^2} \right) \frac{1}{\sin kL} \quad (3.29.d)$$

Finalement, la déformée et auront pour expression les relations suivantes :

$$y(x) = \frac{M_A}{EIk^2} \cos kx + \left[\frac{-M_B - M_A \cos kL}{EIk^2} \right] \frac{\sin kx}{\sin kL} + \left(\frac{M_A + M_B}{EIk^2} \right) x - \frac{M_A}{EIk^2} \quad (3.30.a)$$

$$y'(x) = -\frac{1}{EIk} \left[\frac{\cos kL}{\sin kL} \cos kx + \sin kx - \frac{1}{kL} \right] M_A - \frac{1}{EIk} \left[\frac{\cos kx}{\sin kL} - \frac{1}{kL} \right] M_B \quad (3.30.b)$$

b – Conditions aux limites

Les rotations en A et B sont obtenues pour les conditions suivantes :

$\theta_A|_{y'(x=0)}$ et $\theta_B|_{y'(x=L)}$ ce qui donne la relation :

$$\begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix} = \frac{L}{EI} \begin{bmatrix} \frac{\sin kL - kL \cos kL}{(kL)^2 \sin kL} & \frac{\sin kL - kL}{(kL)^2 \sin kL} \\ \frac{\sin kL - kL}{(kL)^2 \sin kL} & \frac{\sin kL - kL \cos kL}{(kL)^2 \sin kL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

Après quelques transformations et tenant compte du fait que :

$$M_A = \frac{EI}{L} (S_{ii} \theta_A + S_{ij} \theta_B) \quad (3.32.a)$$

$$M_B = \frac{EI}{L} (S_{ji} \theta_A + S_{jj} \theta_B) \quad (3.32.b)$$

$$P = \frac{EI}{L} \delta \quad (3.32.c)$$

Cas de la compression, où pour la charge $P < 0$, on aura :

$$S_{ii} = \frac{kL \sin kL - (kL)^2 \cos kL}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL} \quad (3.33.a)$$

$$S_{ij} = \frac{(kL)^2 - kL \sin kL}{2 - 2 \cos kL - kL \sin kL} \quad (3.33.b)$$

Cas de la traction, où pour la charge axiale $P > 0$, on aura :

$$S_{ii} = S_{jj} = \frac{(kL)^2 \cosh kL - kL \sinh kL}{2 - 2 \cosh kL + kL \sinh kL} \quad (3.33.c)$$

$$S_{ij} = S_{ji} = \frac{kL \sinh kL - (kL)^2}{2 - 2 \cosh kL + kL \sinh kL} \quad (3.33.d)$$

Ces coefficients sont appelés fonctions de stabilité, sous la forme matricielle, les expressions précédentes peuvent être écrites :

$$\begin{pmatrix} M_A \\ M_B \\ P \end{pmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{pmatrix} S_{ii} & S_{ij} & 0 \\ S_{ij} & S_{jj} & 0 \\ 0 & 0 & A/I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \delta \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

3.4.2.2. Cas de translations des extrémités à nœuds rigides

Dans le cas d'une translation Δ aux extrémités, les moments s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned}
M_A &= \frac{EI}{L} \left[S_{ii} \left(\theta_A - \frac{\Delta}{L} \right) + S_{ij} \left(\theta_B - \frac{\Delta}{L} \right) \right] \\
&= \frac{EI}{L} \left[S_{ii} \theta_A + S_{ij} \theta_B - (S_{ii} + S_{ij}) \frac{\Delta}{L} \right]
\end{aligned} \tag{3.35.a}$$

$$\begin{aligned}
M_B &= \frac{EI}{L} \left[S_{ji} \left(\theta_A - \frac{\Delta}{L} \right) + S_{jj} \left(\theta_B - \frac{\Delta}{L} \right) \right] \\
&= \frac{EI}{L} \left[S_{ji} \theta_A + S_{jj} \theta_B - (S_{ji} + S_{jj}) \frac{\Delta}{L} \right]
\end{aligned} \tag{3.35.b}$$

Remarque :

Cependant, pour une charge axiale nulle ($P=0$), ces fonctions de stabilité sont indéterminées et pour lever cette indétermination, le théorème de l'Hopital est appliqué et les expressions suivantes sont alors avancées (Lui et Chen, 1986):

$$S_{ii} = 4 + \frac{2\pi^2 \rho}{15} - \frac{(0,01\rho + 0,543)\rho^2}{4 + \rho} - \frac{(0,004\rho + 0,285)\rho^2}{8,183 + \rho} \tag{3.36.a}$$

$$S_{ij} = 2 - \frac{\pi^2 \rho}{30} + \frac{(0,01\rho + 0,543)\rho^2}{4 + \rho} - \frac{(0,004\rho + 0,285)\rho^2}{8,183 + \rho} \tag{3.36.b}$$

Avec le coefficient adimensionnel de la charge axiale : $\rho = \frac{P}{P_{cr}} = \frac{PL^2}{\pi^2 EI}$

Ce qui conduit dans, ce cas, aux cas classiques $S_{ii} = S_{jj} = 4$ et $S_{ij} = S_{ji} = 2$ couramment utilisé dans la théorie du premier ordre.

L'effort tranchant s'exprime alors par :

$$T = - \left(\frac{M_A + M_B + P\Delta}{L} \right) \tag{3.37.a}$$

Soit, en remplaçant les expression des moments M_A et M_B , devient :

$$T = - \frac{EI}{L} \left\{ (S_{ii} + S_{ij}) \theta_A + (S_{ii} + S_{ij}) \theta_B - 2 \left[(S_{ii} + S_{ij}) - (kL)^2 \right] \frac{\Delta}{L} \right\} \tag{3.37.b}$$

qu'on peut mettre sous la forme simplifiée :

$$\begin{pmatrix} M_A \\ M_B \\ T \\ P \end{pmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{pmatrix} S_{ii} & S_{ij} & -\frac{S_{ii} + S_{ij}}{L} & 0 \\ & S_{ii} & -\frac{S_{ii} + S_{ij}}{L} & 0 \\ & & \frac{2(S_{ii} + S_{ij}) - (kL)^2}{L^2} & 0 \\ SYM & & & \frac{A}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \Delta \\ u \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

La matrice de rigidité globale s'en retrouve alors, déduite (Chen et Lui, 1991), dans ce cas et sera écrite sous la forme :

$$[K] = \frac{EI}{L} \begin{pmatrix} \frac{A}{L} & 0 & 0 & \frac{A}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12}{L^2}\phi_1 & \frac{6}{L}\phi_2 & 0 & -\frac{12}{L^2}\phi_1 & \frac{6}{L}\phi_2 \\ & & 4\phi_3 & 0 & -\frac{6}{L}\phi_2 & 2\phi_4 \\ & & & \frac{A}{L} & 0 & 0 \\ SYM & & & & \frac{12}{L^2}\phi_1 & -\frac{6}{L}\phi_2 \\ & & & & & 4\phi_3 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

où ϕ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) représentent les fonctions de stabilités données par (Chen et Lui, 1987 et 1991) et à l'origine, données par Livesley et Chandler (1956).

Le tableau (3.2) suivant donne les expressions de ces fonctions de stabilités pour différentes situations de la charge P .

Tableau 3.2: Expressions des fonctions ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 et ϕ_4

ϕ_i	$P < 0$	$P = 0$	$P > 0$
ϕ_1	$\frac{(kL)^3 \sin kL}{12\phi_c}$	1	$\frac{(kL)^3 \sinh kL}{12\phi_t}$
ϕ_2	$\frac{(kL)^2 (1 - \cos kL)}{6\phi_c}$	1	$\frac{(kL)^2 (\cosh kL - 1)}{6\phi_t}$
ϕ_3	$\frac{kL(\sin kL - kL \cos kL)}{4\phi_c}$	1	$\frac{kL(kL \cosh kL - \sinh kL)}{4\phi_t}$
ϕ_4	$\frac{kL(kL - \sin kL)}{2\phi_c}$	1	$\frac{kL(\sinh kL - kL)}{2\phi_t}$

Avec :

$$\phi_c = 2 - 2 \cos kL - kL \sin kL \quad \text{et} \quad \phi_t = 2 - 2 \cosh kL + kL \sinh kL$$

Cependant, pour éviter l'utilisation des différentes équations pour les deux cas de la traction et de la compression, ces mêmes auteurs ont proposés les fonctions de stabilités suivantes :

$$\phi_1 = \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} [(kL)^2]^n \right\} / 12\phi \quad (3.40.a)$$

$$\phi_2 = \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)!} [(kL)^2]^n \right\} / 6\phi \quad (3.40.b)$$

$$\phi_3 = \left\{ \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+3)!} [(kL)^2]^n \right\} / 4\phi \quad (3.40.c)$$

$$\phi_4 = \left\{ \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} [(kL)^2]^n \right\} / 2\phi \quad (3.40.d)$$

Avec

$$\phi = \left\{ \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+4)!} [(kL)^2]^n \right\}$$

Le problème qui se pose dans ce cas, est que pour une force axiale nulle $P = 0$, on arrive à une indétermination des fonctions de stabilité. Pour éviter cette situation, les auteurs (Chen et Lui, 1991) ont fait un développement en séries de Taylor

$$\phi_1 = 1 + \frac{(kL)^2}{10} - \frac{(kL)^4}{8400} + \frac{(kL)^6}{108000} - \frac{37(kL)^8}{2328480000} \quad (3.41.a)$$

$$\phi_2 = 1 + \frac{(kL)^2}{60} - \frac{(kL)^4}{8400} + \frac{(kL)^6}{756000} - \frac{37(kL)^8}{2328480000} \quad (3.41.b)$$

$$\phi_3 = 1 + \frac{(kL)^2}{30} - \frac{(kL)^4}{25200} + \frac{(kL)^6}{108000} - \frac{509(kL)^8}{2328480000} \quad (3.41.c)$$

$$\phi_4 = 1 - \frac{(kL)^2}{60} + \frac{13(kL)^4}{25200} - \frac{11(kL)^6}{756000} + \frac{907(kL)^8}{2328480000} \quad (3.41.d)$$

Si l'on prend juste les deux premiers termes de l'expression (3.39) pour un développement en série de Taylor, la matrice de rigidité globale est donnée par :

$$[K] = [K_e] + [K_g] \quad (3.42.a)$$

Où $[K_e]$ est la matrice de rigidité linéaire (premier ordre), donnée par :

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & SYM & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.42.b)$$

et $[K_g]$ est la matrice de rigidité géométrique, donné par :

$$[K_g] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6P}{5L} & \frac{P}{10} & 0 & -\frac{6P}{5L} & \frac{P}{10} \\ & & \frac{2PL}{15} & 0 & -\frac{P}{10} & -\frac{PL}{30} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & SYM & & & \frac{6P}{5L} & -\frac{P}{10} \\ & & & & & \frac{2PL}{15} \end{bmatrix} \quad (3.42.c)$$

3.4.2.3. Autres formulations

a - Fonction de stabilité

La détermination de la charge critique s'appuie sur la formulation de la matrice de rigidité exacte (Couates et al, 1988 ; Kirby and Nethercot , 1979), qui est dépendante des fonctions de stabilité s , c et sc , initialement développées par Livesley et Chandler (1956) et telles que :

b - Equations d'équilibre :

En l'absence de la charge axiale (1^{er} ordre), les moments M_1 et M_2 s'écrivent :

$$M_1 = 4k\theta_1 \quad (3.43.a)$$

$$M_2 = 2k\theta_1 \quad (3.43.b)$$

$$\text{avec } k = \frac{EI}{L}$$

Les efforts tranchants s'en déduisent :

$$T_1 = -T_2 = \frac{M_1 + M_2}{L} \quad (3.44)$$

L'équation différentielle s'écrit alors (1^{er} ordre)

$$EIy''(x) = -M(x)$$

Mais en présence d'un effort axial "P" capable de produire les effets (P-Δ) dans la poutre (effet du second ordre), les expressions sont alors écrites à l'état déformé et les moments sont alors :

$$M_1 = sk\theta_1 \quad (3.45.a)$$

$$M_2 = cM_1 = csk\theta_1 \quad (3.45.b)$$

s : Fonction de stabilité qui exprime l'effet de P sur M

c : Facteur de transmission, qui exprime l'effet du nœud (1) sur le nœud (2).

La déformée peut se mettre sous la forme suivante :

$$y = A \sin\left(\frac{2\alpha}{L}\right)x + B \cos\left(\frac{2\alpha}{L}\right)x + \left(\frac{L}{2\alpha}\right)^2 \cdot \frac{1}{EI} \left(\frac{M_1 + M_2}{L} - M_2\right) \quad (3.46)$$

Avec :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \sqrt{\rho} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{P}{P_{cr}} ; \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

1 - Pour $\rho < 0$ (élément en compression), les fonctions de stabilités sont alors :

$$s = \frac{\alpha(1 - 2\alpha \cot 2\alpha)}{\tan \alpha - \alpha} \quad (3.47.a)$$

$$c = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} \quad (3.47.b)$$

2 - Pour $\rho > 0$ (élément en traction), les fonctions de stabilités seront :

$$s = \frac{\gamma(1 - 2\gamma \coth 2\gamma)}{\tanh \gamma - \gamma} \quad (3.47.c)$$

$$c = \frac{2\gamma - \sinh 2\gamma}{\sinh 2\gamma - 2\gamma \cosh 2\gamma} \quad (3.47.d)$$

$$\text{Avec : } \gamma = \frac{\pi}{2} \sqrt{-\rho}$$

La matrice de rigidité globale sera alors écrite sous la forme :

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{sEI}{L} & \frac{scEI}{L} & 0 & 0 & \frac{s(1+c)EI}{L^2} & \frac{-s(1+c)EI}{L^2} \\ \frac{scEI}{L} & \frac{sEI}{L} & 0 & 0 & \frac{s(1+c)EI}{L^2} & \frac{-s(1+c)EI}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ \frac{s(1+c)EI}{L^2} & \frac{s(1+c)EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{2s(1+c)EI}{mL^3} & \frac{-2s(1+c)EI}{mL^3} \\ \frac{-s(1+c)EI}{L^2} & \frac{-s(1+c)EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{-2s(1+c)EI}{mL^3} & \frac{2s(1+c)EI}{mL^3} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

c – Méthode des éléments finis : Les fonctions de forme

L'équation différentielle des poutres soumises à des charges axiales et transversales précédemment écrite a pour expression :

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = q(x) \quad (3.49.a)$$

La solution de l'équation homogène sera ($q(x) = 0$):

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (3.49.b)$$

$$y(x) = A_1 \cos kx + A_2 \sin kx + A_3 x + A_4 \quad (3.50.a)$$

Les A_i sont des constantes arbitraires et seront déterminées à partir des conditions aux limites :

$$\text{Pour } x = 0, \text{ on a } y = y_1, \frac{dy}{dx} = \theta_1 \quad (3.50.b)$$

$$\text{Pour } x = L, \text{ on a } y = y_2, \frac{dy}{dx} = \theta_2 \quad (3.50.c)$$

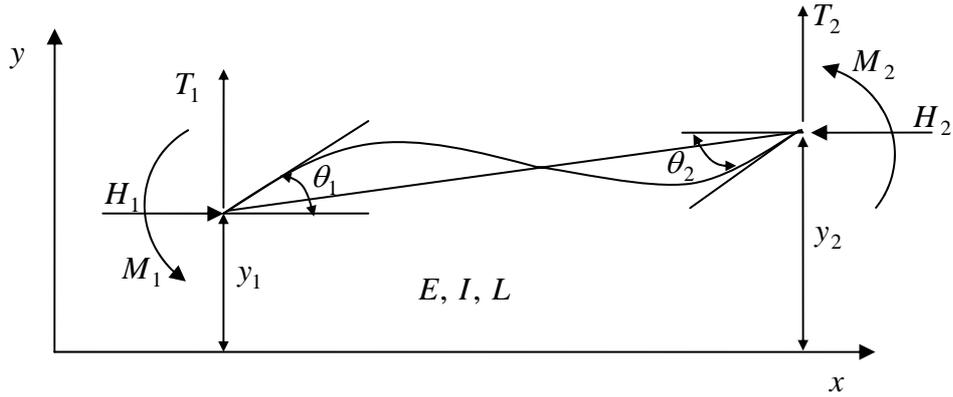


Figure 3.15: Élément poutre-poteau

$$\begin{aligned}
 y(0) = y_1 &\Rightarrow y_1 = A_1 + A_2 \\
 \theta_1 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} &\Rightarrow \theta_1 = A_2 k + A_3
 \end{aligned} \tag{3.50.d}$$

$$\begin{aligned}
 y(L) = y_2 &\Rightarrow y_2 = A_1 \cos kL + A_2 \sin kL + A_3 L + A_4 \\
 \theta_2 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=L} &\Rightarrow \theta_2 = -kA_1 \sin kL + kA_2 \cos kL + A_3
 \end{aligned} \tag{3.50.e}$$

La résolution de ce système d'équation permet de déterminer les constantes A_i . La déformée, simplifiée, sera telle que :

$$y = H_1 y_1 + H_2 \theta_1 + H_3 y_2 + H_4 \theta_2 \tag{3.51}$$

dans laquelle les H_i sont les fonctions de forme. La détermination des coefficients C_i ne pose plus de problème puisque :

Pour : $x = 0 \Rightarrow M_1 = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}$ et $T_1 = EI \frac{d^3 y}{dx^3} + P \frac{dy}{dx}$, on aura aisément :

$$\begin{aligned}
 M_1 = &\frac{(kL)^2 (1 - \cos kL)}{2(1 - \cos kL) - kL \sin kL} \frac{EI}{L^2} y_1 + \frac{kL \sin kL - (kL)^2 \cos kL}{2(1 - \cos kL) - kL \sin kL} \frac{EI}{L} \theta_1 - \\
 &\frac{(kL)^2 (1 - \cos kL)}{2(1 - \cos kL) - kL \sin kL} \frac{EI}{L^2} y_2 + \frac{(kL)^2 - kL \sin kL}{2(1 - \cos kL) - kL \sin kL} \frac{EI}{L} \theta_2
 \end{aligned} \tag{3.52.a}$$

$$\begin{aligned}
 T_1 = &\frac{(kL)^3 \sin kL}{2(1 - \cos kL) - kL \sin kL} \frac{EI}{L^3} y_1 + \frac{(kL)^2 (1 - \cos kL)}{2(1 - \cos kL) - kL \sin kL} \frac{EI}{L^2} \theta_1 - \\
 &\frac{(kL)^3 \sin kL}{2(1 - \cos kL) - kL \sin kL} \frac{EI}{L^3} y_2 + \frac{(kL)^2 (1 - \cos kL)}{2(1 - \cos kL) - kL \sin kL} \frac{EI}{L^2} \theta_2
 \end{aligned} \tag{3.52.b}$$

De la même manière, on pourra déterminer pour $x = L$:

$$M_2 = \frac{(kL)^2(1 - \cos kL)}{2(1 - \cos kL) - kL \sin kL} \cdot \frac{EI}{L^2} y_1 + \frac{(kL)^2 - kL \sin kL}{2(1 - \cos kL) - kL \sin kL} \cdot \frac{EI}{L} \theta_1 - \frac{(kL)^2(1 - \cos kL)}{2(1 - \cos kL) - kL \sin kL} \cdot \frac{EI}{L^2} y_2 + \frac{kL \sin kL - (kL)^2 \cos kL}{2(1 - \cos kL) - kL \sin kL} \cdot \frac{EI}{L} \theta_2 \quad (3.52.c)$$

$$T_2 = -\frac{(kL)^3 \sin kL}{2(1 - \cos kL) - kL \sin kL} \cdot \frac{EI}{L^3} y_1 - \frac{(kL)^2(1 - \cos kL)}{2(1 - \cos kL) - kL \sin kL} \cdot \frac{EI}{L^2} \theta_1 - \frac{(kL)^3 \sin kL}{2(1 - \cos kL) - kL \sin kL} \cdot \frac{EI}{L^3} y_2 - \frac{(kL)^2(1 - \cos kL)}{2(1 - \cos kL) - kL \sin kL} \cdot \frac{EI}{L^2} \theta_2 \quad (3.52.d)$$

Sous la forme matricielle, on aura :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_4 \frac{EI}{L^3} & C_1 \frac{EI}{L^2} & -C_4 \frac{EI}{L^3} & C_1 \frac{EI}{L^2} \\ & C_2 \frac{EI}{L} & -C_1 \frac{EI}{L^2} & C_3 \frac{EI}{L} \\ & & C_4 \frac{EI}{L^3} & -C_1 \frac{EI}{L^2} \\ \text{SYM} & & & C_2 \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.53.a)$$

Dans laquelle, les coefficients C_i sont écrits de façon explicite :

$$C_1 = \frac{(kL)^2(1 - \cos kL)}{2(1 - \cos kL) - kL \sin kL} \quad (3.53.b)$$

$$C_2 = \frac{kL \sin kL - (kL)^2 \cos kL}{2(1 - \cos kL) - kL \sin kL} \quad (3.53.c)$$

$$C_3 = \frac{(kL)^2 - kL \sin kL}{2(1 - \cos kL) - kL \sin kL} \quad (3.53.d)$$

$$C_4 = \frac{(kL)^3 \sin kL}{2(1 - \cos kL) - kL \sin kL} \quad (3.53.e)$$

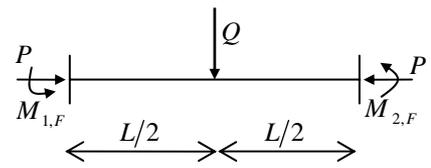
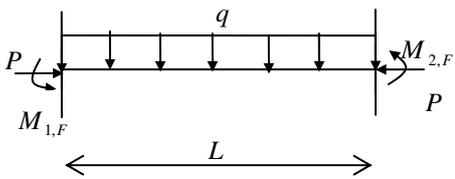
Pour les limites des C_i quand $kL \rightarrow 0$: $C_1 = 6$, $C_2 = 4$, $C_3 = 4$, $C_4 = 12$

La matrice de rigidité complète dans le repère global :

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & C_4 \frac{EI}{L^3} & C_1 \frac{EI}{L^2} & 0 & -C_4 \frac{EI}{L^3} & C_1 \frac{EI}{L^2} \\ & & C_2 \frac{EI}{L} & 0 & -C_1 \frac{EI}{L^2} & C_3 \frac{EI}{L} \\ \frac{EA}{L} & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_4 \frac{EI}{L^3} & -C_1 \frac{EI}{L^2} & C_3 \frac{EI}{L} \\ & & & & & C_2 \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \\ \text{SYM} \end{matrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

c - Quelques cas de chargement

Tableau 3.3 : Moments d'encastrement pour l'élément poutre-poteau

Cas de charges considérées	Moments d'encastrement
	$M_{1,F} = -M_{2,F} = \frac{QL}{8} \left[\frac{2(1 - \cos u)}{u \sin u} \right]$
	$M_{1,F} = -M_{2,F} = \frac{qL^2}{12} \left[\frac{3(\tan u - u)}{u^2 \tan u} \right]$

Avec
$$u = \frac{kL}{2} = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

3.4.3. MATRICE DE RIGIDITE POUR ELEMENTS A NŒUDS SEMI RIGIDES

3.4.3.1. Méthode des rotations aménagée

Soit l'élément barre à nœuds semi rigides de la figure (3.16), soumis une charge axiale et à des moments à ses deux extrémités,

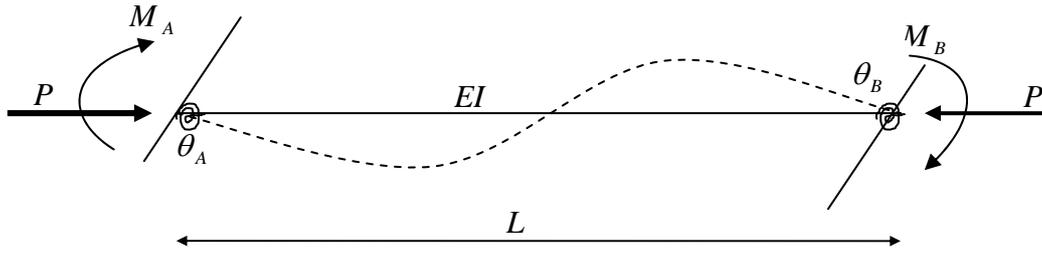


Figure 3.16: Élément sous charge axiale et moments aux extrémités

L'expression de ces moments sont donnée par la méthode des rotations aménagée (King et Chen, 1993 ; Chen et al, 1996 ; Chen et al, 1996) tels que :

$$M_A = \frac{EI}{L} \left[S_{ii} \left(\theta_A - \frac{M_A}{R_{kiA}} \right) + S_{ij} \left(\theta_B - \frac{M_B}{R_{kiB}} \right) \right] \quad (3.55.a)$$

$$M_B = \frac{EI}{L} \left[S_{ij} \left(\theta_A - \frac{M_A}{R_{kiA}} \right) + S_{jj} \left(\theta_B - \frac{M_B}{R_{kiB}} \right) \right] \quad (3.55.b)$$

Dans lesquelles on retrouve principalement les fonctions de stabilité S_{ii} et S_{ij} précédemment définies. Sous leur forme simplifiée, on retrouve ces expressions tel que :

$$M_A = \frac{EI}{L} [S_{ii}^* \theta_A + S_{ij}^* \theta_B] \quad (3.55.c)$$

$$M_B = \frac{EI}{L} [S_{ij}^* \theta_A + S_{jj}^* \theta_B] \quad (3.55.d)$$

Où :

$$S_{ii}^* = \left(S_{ii} + \frac{EIS_{ii}^2}{LR_{kiB}} - \frac{EIS_{ij}^2}{LR_{kiB}} \right) / R^* \quad (3.55.e)$$

$$S_{jj}^* = \left(S_{jj} + \frac{EIS_{jj}^2}{LR_{kiA}} - \frac{EIS_{ij}^2}{LR_{kiA}} \right) / R^* \quad (3.55.f)$$

$$S_{ij}^* = S_{ji}^* = S_{ij} / R^* \quad (3.55.g)$$

$$R^* = \left(1 + \frac{EIS_{ii}}{LR_{kiA}} \right) \left(1 + \frac{EIS_{jj}}{LR_{kiB}} \right) - \left(\frac{EI}{L} \right)^2 \frac{S_{ij}^2}{R_{kiA} R_{kiB}} \quad (3.55.h)$$

$$\begin{pmatrix} P \\ M_A \\ M_B \end{pmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{pmatrix} A/I & 0 & 0 \\ 0 & S_{ii}^* & S_{ij}^* \\ 0 & S_{ji}^* & S_{jj}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \theta_A \\ \theta_B \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

La matrice de rigidité $[K]$ sera alors écrite sous la forme :

$$\frac{EI}{L} \begin{pmatrix} \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ \frac{(S_{ii}^* + 2S_{ij}^* + S_{jj}^*) - (kL)^2}{L^2} & \frac{(S_{ii}^* + S_{jj}^*)}{L} & 0 & -\frac{(S_{ii}^* + 2S_{ij}^* + S_{jj}^*) + (kL)^2}{L^2} & \frac{(S_{ij}^* + S_{jj}^*)}{L} \\ 0 & S_{ii}^* & 0 & -\frac{(S_{ij}^* + S_{jj}^*)}{L} & S_{ij}^* \\ 0 & 0 & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ SYM & & & \frac{(S_{ii}^* + 2S_{ij}^* + S_{jj}^*) - (kL)^2}{L^2} & -\frac{(S_{ij}^* + S_{jj}^*)}{L} \\ & & & & S_{jj}^* \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Si on néglige l'effort axial, la matrice de rigidité précédente se réduit à :

$$\frac{EI}{L} \begin{pmatrix} \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ \frac{(S_{ii}^* + 2S_{ij}^* + S_{jj}^*)}{L^2} & \frac{(S_{ii}^* + S_{jj}^*)}{L} & 0 & -\frac{(S_{ii}^* + 2S_{ij}^* + S_{jj}^*)}{L^2} & \frac{(S_{ij}^* + S_{jj}^*)}{L} \\ 0 & S_{ii}^* & 0 & -\frac{(S_{ij}^* + S_{jj}^*)}{L} & S_{ij}^* \\ 0 & 0 & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ SYM & & & \frac{(S_{ii}^* + 2S_{ij}^* + S_{jj}^*)}{L^2} & -\frac{(S_{ij}^* + S_{jj}^*)}{L} \\ & & & & S_{jj}^* \end{pmatrix} \quad 3.58.a$$

$$S_{ii} = S_{jj} = 4 \quad \text{et} \quad S_{ij} = S_{ji} = 2$$

$$S_{ii}^* = \left(4 + \frac{12EIS_{ii}^2}{LR_{kiB}} \right) / R^* ; \quad (3.58.b)$$

$$S_{jj}^* = \left(4 + \frac{12EIS_{ii}^2}{LR_{kiA}} \right) / R^* ; \quad (3.58.c)$$

$$S_{ij}^* = S_{ji}^* = 2 / R^* \quad (3.58.d)$$

$$R^* = \left(1 + \frac{4EI}{LR_{kiA}} \right) \left(1 + \frac{4EI}{LR_{kiB}} \right) - \left(\frac{EI}{L} \right)^2 \frac{4}{R_{kiA} R_{kiB}} \quad (3.58.e)$$

3.4.4. CODES ET REGLEMENTS

3.4.4.1. Code Européen (EC 3)

Dans le règlement EC3 (Part 1-8 :2005), les effets du second ordre ne sont pas automatiquement pris en compte pour toutes les structures mais sont intimement liés au type de structures étudiées.

La nouveauté dans ce code européen est qu'il définit en plus du concept semi rigide, une classification des structures en souples et rigides de manière à statuer sur la nécessité de prendre en compte ou non les effets du second ordre. Ceux-ci sont, effectivement, pris dans le cas d'une structure souple ; sinon une analyse au premier ordre est suffisante.

Ainsi, on définit, au sens de l'eurocode 3, un coefficient d'amplification critique " α_{cr} " qui permet de délimiter l'intervalle entre structure souple et structure rigide.

Le coefficient $\alpha_{cr} = \frac{V_{cr}}{V}$ représente le facteur par lequel il faut multiplier la charge verticale totale pour atteindre l'instabilité de la structure.

Où :

V : représente la charge verticale totale

Ainsi pour :

$\alpha_{cr} < 10 \Rightarrow$ Structure souple (Effets du second ordre considérés)

$\alpha_{cr} \geq 10 \Rightarrow$ Structure rigide (Effets du second ordre négligés)

L'eurocode3, propose alors trois voies possibles pour prendre en compte ces effets du second ordre :

1 – Analyse élastique au 2^{ième} ordre

Dans cette analyse, la méthode pas à pas est utilisée pour suivre le comportement non-linéaire des assemblages. C'est, en fait, une succession de comportements linéaires actualisés.

2 – Analyse élastique au premier ordre, avec amplification des moments dus à la

déformation latérale par un coefficient $\left(\frac{1}{1-1/\alpha_{cr}} \right)$

Cette méthodologie constitue une alternative à l'analyse du second ordre en l'absence de moyens ou logiciels spécifiques.

α_{cr} : à partir des résultats de l'analyse au premier ordre

3 – Analyse élastique au premier ordre, suivie d'une vérification avec longueurs de flambement correspondant au mode d'instabilité : cette méthode est pénalisante par rapport aux deux précédentes.

3.4.4.2. Code Américain (AISC /LRFD)

Dans ce code, existe une formule permettant de calculer le moment du second ordre à partir de deux analyses du premier ordre dont les résultats sont amplifiés pour tenir compte des effets *P-Delta*, cette expression s'écrit (Al-Mashary et al, 1990, White et Hajjar, 1991; King et Chen, 1993 ; AISC/LRFD, 2005):

$$M_{II} = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt} \quad (3.59)$$

Où :

M_{nt} : est le moment calculé au moyen d'une analyse au premier ordre sous toutes les charges et dans la structure contreventée (voir figure 3.17.a)

M_{lt} : est le moment calculé au moyen d'une seconde analyse au 1^{er} ordre sous l'unique réaction horizontale R obtenue suite à la première analyse (figure 3.17.b)

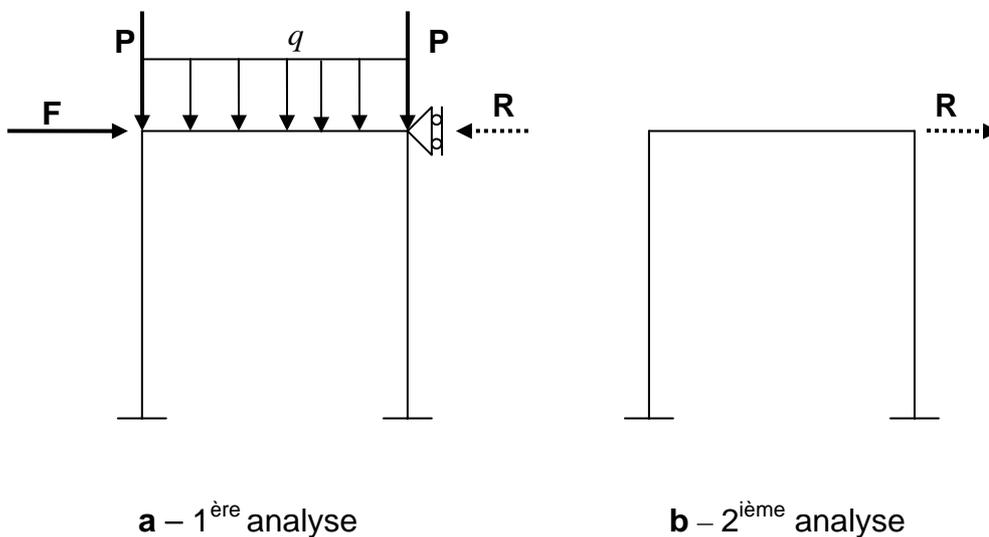


Figure 3.17: Illustration de la méthode $B_1 - B_2$

a - La signification des facteurs B_1 et B_2 :

a-1 : Pour le facteur : $B_1 = \frac{C_m}{1 - \frac{N}{N_{cr}}} \geq 1$

où

$C_m = 0,6 + 0,4 \frac{M_1}{M_2}$ c'est le coefficient d'équivalence de Massonnet-Campus

N : effort normal sollicitant le poteau

$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_c}{L_f^2}$ charge critique d'Euler

Le coefficient B_1 représente ainsi, l'amplification des moments de flexion due à l'effet $P-\Delta$ dans l'élément, appelé souvent effet ε . En effet, il vient multiplier le moment existant dans la structure contreventée pour laquelle le seul effet du second ordre est l'effet ε (le déplacement horizontal de l'étage étant bloqué, l'effet $P-\Delta$ est inexistant).

Pour $N = N_{cr}$, on aura $B_1 = \infty$ et le poteau est instable (au sens d'une analyse critique d'instabilité élastique).

a -2 : Pour le facteur : $B_2 = \frac{1}{1 - \frac{\Delta}{H} \cdot \frac{\sum N}{\sum F}}$

dans lequel :

H : hauteur totale

Δ ; déplacement horizontal au premier ordre

$\sum N$: somme des charges verticales

$\sum F$: réaction horizontale totale (R , dans la figure -b -)

Le coefficient B_2 représente l'amplification des moments de flexion due à l'effet $P-\Delta$. En effet, il vient multiplier le moment de la structure sous l'unique action de la réaction horizontale R , ce qui représente bien l'effet du bras de levier supplémentaire sur les charges verticales (en relation directe avec l'effet $P-\Delta$)

3.4.5. REMARQUES

3.4.5.1. Par rapport à l'eurocode 3, le terme $\frac{\Delta}{H} \cdot \frac{\sum N}{\sum F}$ est équivalent à $\frac{V}{V_{cr}}$ et

lorsque, $V = V_{cr}$ le coefficient B_2 est infini et la structure est instable (au sens d'une analyse critique d'instabilité élastique).

3.4.5.2. Le domaine de validité de $\frac{V}{V_{cr}}$ dépend d'un domaine compris entre 0,1 et 0,25 .

a - Si pour $\frac{V}{V_{cr}} > 0,1$, ce code qualifie la structure de souple (Eurocode 3 – partie 5.2.1.2(3)) et demande à l'utilisateur de mener une analyse globale qui inclut les effets de la déformation de la structure en utilisant une théorie du second ordre.

Ce code utilise, donc, un critère qui gouverne cette classification et dont le règlement américain n'en tient pas compte.

Cette charge, V_{cr} correspond à la charge verticale pour laquelle la structure devient instable, en prenant une déformée critique, d'ensemble. D'après cette constatation, nous pensons que l'effet $P-\Delta$ ne saurait être inclut dans l'analyse de la structure que si $\frac{V}{V_{cr}} > 0,1$.

b - Pour $\frac{V}{V_{cr}} > 0,25$, l'effet $P-\Delta$ est très important même avec le facteur d'amplification $\frac{1}{1-(V/V_{cr})}$ n'est pas suffisant et l'Eurocode 3 demande à l'utilisateur

de ne pas appliquer cette méthode sans apporter de justification.

Pour apporter un élément de réponse à cela, nous pensons qu'amplifier les efforts en tenant compte seulement de l'effet $P-\Delta$ est insuffisant et que l'effet ε doit être lui aussi être introduit dans l'analyse globale (qui reste l'une des pistes à explorer), allusion faite en remarquant que seule la méthode B_1-B_2 inclut cet effet dans le calcul des efforts internes.

3.5. CONCLUSION

A première vue, la méthode B_1-B_2 issue du code américain AISC, présente des similitudes avec les méthodes de l'eurocode3. Mais il serait indispensable, plutôt, de comparer la procédure entière de dimensionnement pour les deux codes et de ne pas se contenter de comparer l'évaluation des efforts internes.

CHAPITRE QUATRIEME

ANALYSE DE LA RIGIDITE DES ELEMENTS ELASTIQUES LINEAIRES EN ROTATION EN TENANT COMPTE DU FLAMBEMENT

4.1. INTRODUCTION

Dans l'analyse habituelle des structures, on utilise souvent une analyse au premier ordre pour déterminer les efforts internes des éléments de la structure. Ce type d'analyse qui est basée sur la configuration non déformée de la structure, permet d'écrire les équations dans cette configuration, et ne tient, donc, pas compte des déformations additionnelles engendrées par le changement de géométrie.

Par contre dans une analyse au second ordre, les équations d'équilibre sont formulées à l'état déformé de la structure ce qui engendre des effets du second ordre supplémentaires appelés ($P - \Delta$).

Cependant, dans le premier ou le second cas d'analyse les effets de la déformation des nœuds d'assemblages ne sont pas pris en compte de façon explicite. Aussi, les différents effets de la déformation des nœuds d'assemblages dits semi rigides dans la formulation du modèle mécanique (Fig. 2.14) sont, ainsi, considérés.

La modélisation adoptée pour le nœud d'assemblage semi rigide repose sur l'analogie des trois ressorts représenté sur la figure (2.13) : un ressort en rotation et deux en translation axiale et verticale. Il s'agit d'établir la matrice de rigidité de l'élément à nœuds semi rigides en tenant compte du flambement.

4.2. ETABLISSEMENT DE LA MATRICE DE RIGIDITE

4.2.1. Equations d'équilibre et différentielle de l'élément

L'élément barre de la figure (4.1), à nœuds d'assemblage semi rigides est soumis à un effort de compression N et à des moments fléchissants M_i et M_j à ses deux

extrémités. La matrice de rigidité de cet élément dans le repère locale est donnée par :

$$\overline{K}_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

où :

k_{ij} : est l'élément de la matrice de rigidité, qui est la réaction suivant la direction "j" due au déplacement unitaire suivant la direction "i". Sous l'effet d'une rotation unitaire, $\theta_i = 1$, les équations d'équilibres et différentielles sont écrites à l'état déformé, sont telles que:

4.2.1.1. Élément à une rotation unitaire $\theta_i = 1$:

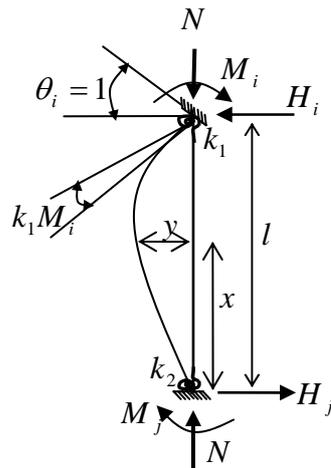


Figure 4.1 : Élément barre à noeuds semi rigides

a - Equations d'équilibres

$$\text{Les poussées latérales : } H_i = H_j = H \quad (4.2.a)$$

$$\text{Moment fléchissant à une section } x : M(x) = Ny + Hx - M_j \quad (4.2.b)$$

$$\text{Moment à l'encastrement "i" : } M_i = Hl - M_j \quad (4.2.c)$$

b - Equation différentielle

L'équation différentielle de la déformée de l'élément barre s'écrit alors :

$$EIy'' = -Ny - Hx + M_j \quad (4.3.a)$$

qu'on écrit sous la forme

$$y'' + \alpha^2 y = -\frac{Hx}{EI} + \frac{M_j}{EI} \quad (4.3.b)$$

dans laquelle : $\alpha^2 = \frac{N}{EI}$

La solution de l'équation différentielle donne :

$$y(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - \frac{Hx}{\alpha^2 EI} + \frac{M_j}{\alpha^2 EI} \quad (4.4.a)$$

Dans lesquelles les constantes d'intégrations A et B sont déterminées à partir des conditions d'appuis $y(0) = 0$ et $y(l) = 0$:

$$y(0) = 0 \text{ donne } B = -\frac{M_j}{\alpha^2 EI} \quad (4.4.b)$$

$$y(l) = 0 \text{ donne } A = \frac{1}{\alpha^2 EI \sin \alpha l} [M_j (\cos \alpha l - 1) + Hl] \quad (4.4.c)$$

Ces valeurs permettent d'écrire, respectivement, les expressions de la déformée et de la pente telles que :

$$y(x) = \frac{\sin \alpha x}{\alpha^2 EI \sin \alpha l} [M_j (\cos \alpha l - 1) + Hl] - \frac{M_j}{\alpha^2 EI} \cos \alpha x - \frac{Hx}{\alpha^2 EI} + \frac{M_j}{\alpha^2 EI} \quad (4.5.a)$$

$$y'(x) = \frac{\alpha \cos \alpha x}{\alpha^2 EI \sin \alpha l} [M_j (\cos \alpha l - 1) + Hl] + \frac{\alpha M_j}{\alpha^2 EI} \sin \alpha x - \frac{H}{\alpha^2 EI} \quad (4.5.b)$$

Dans ces expressions les réactions H et M_j sont déterminées à partir des conditions aux limites particulières :

$$\text{Pour } y'(0) = k_2 M_j \quad (4.5.c)$$

$$\text{Pour } y'(l) = -1 + k_1 M_i = -1 + k_1 (Hl - M_j) \quad (4.5.d)$$

Après quelques transformations, la solution du système précédent donne :

$$H = \frac{w}{l} \cdot \zeta_1(v) \quad (4.6)$$

$$M_j = w \cdot \phi_1(v) \quad (4.7)$$

$$M_i = w \cdot \phi_2(v) \quad (4.8)$$

Où l'on a :

$$v = \alpha l \text{ et } w = \frac{EI}{l},$$

$$\zeta_1(v) = \frac{v^2(1 - \cos v + k_2 v w \sin v)}{D} \quad (4.9.a)$$

$$\phi_1(v) = \frac{v(v - \sin v)}{D} \quad (4.9.b)$$

$$\phi_2(v) = \zeta_1(v) - \phi_1(v) \quad (4.9.c)$$

Avec $D = (2 - 2 \cos v - v \sin v) + \xi(v, k_1, k_2)$

4.2.1.2. Elément k_{2j} de la matrice de rigidité :

Les éléments k_{2j} , par exemple, de la matrice de rigidité élémentaire peuvent être déterminés directement à partir ces expressions établies ci-dessus.

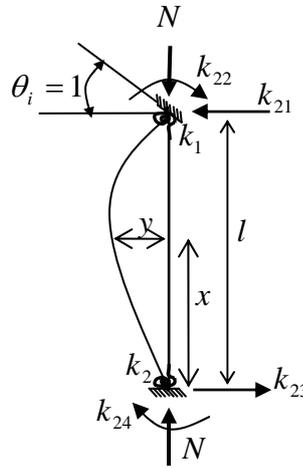


Figure 4.2: Elément k_{2j} de la matrice de rigidité \overline{K}_e

$$k_{21} = \frac{EI}{l^2} \frac{v^2 [1 - \cos v + k_2 v w \sin v]}{D} \quad (4.10.a)$$

$$k_{22} = \frac{EI}{l} \frac{v [\sin v - v \cos v + k_2 v^2 w \sin v]}{D} \quad (4.10.b)$$

$$k_{23} = -\frac{EI}{l^2} \frac{v^2 [1 - \cos v + k_2 v w \sin v]}{D} \quad (4.10.c)$$

$$k_{24} = \frac{EI}{l} \frac{v [v - \sin v]}{D} \quad (4.10.d)$$

Le tableau (4.1) présente la différence de ces éléments k_{2j} de la matrice de rigidité avec ceux quand le comportement du nœud d'assemblage est ignoré.

Tableau 4.1 : Les expressions k_{2j} dans différentes situations

Prise en compte de l'effort normal de compression et de la semi rigidité des noeuds d'assemblage	Seul l'effort normal est pris en compte (semi rigidité des noeuds d'assemblage ignorée)
$k_{21} = \frac{EI}{l^2} \frac{v^2 [1 - \cos v + k_2 v w \sin v]}{D}$ $k_{22} = \frac{EI}{l} \frac{v [\sin v - v \cos v + k_2 v^2 w \sin v]}{D}$	$k_{21} = \frac{EI}{l^2} \frac{v^2 [1 - \cos v]}{(2 - 2 \cos v - v \sin v)}$ $k_{22} = \frac{EI}{l} \frac{v [\sin v - v \cos v]}{(2 - 2 \cos v - v \sin v)}$
$k_{23} = -\frac{EI}{l^2} \frac{v^2 [1 - \cos v + k_2 v w \sin v]}{D}$	$k_{23} = -\frac{EI}{l^2} \frac{v^2 [1 - \cos v]}{(2 - 2 \cos v - v \sin v)}$
$k_{24} = \frac{EI}{l} \frac{v [v - \sin v]}{D}$	$k_{24} = \frac{EI}{l} \frac{v [v - \sin v]}{(2 - 2 \cos v - v \sin v)}$

4.2.1.2.1. Différentes configurations :

On peut envisager (Tableau 4.2) quelques cas concernant les différents types d'appuis tels que :

Tableau 4.2 : Différentes configurations du noeud d'assemblage

Barre			
$\zeta_1(v)$	$\frac{v^2 \sin v}{2 \sin v - \cos v - v}$	$\frac{v^2 \sin v}{\sin v - v \cos v}$	$\frac{v^2 \sin v}{\sin v - v \cos v + k_1 v^2 w \sin v}$
$\phi_1(v)$	$\frac{v \sin v (v - \sin v)}{(1 - \cos v)(2 \sin v - \cos v - v)}$	0	0
$\phi_2(v)$	$\frac{v \sin v (\sin v - v \cos v)}{(1 - \cos v)(2 \sin v - \cos v - v)}$	$\frac{v^2 \sin v}{\sin v - v \cos v}$	$\frac{v^2 \sin v}{\sin v - v \cos v + k_1 v^2 w \sin v}$

4.2.1.3. Elément à un déplacement unitaire $\Delta_i = 1$

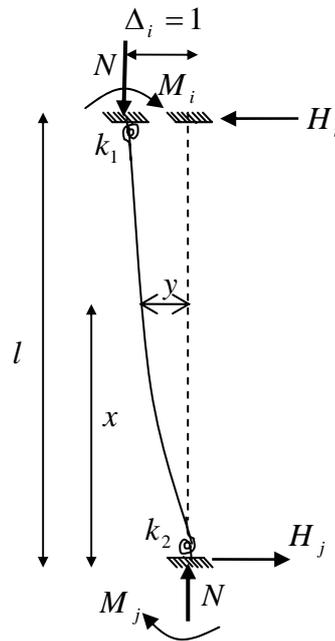


Figure 4.3: Elément barre à nœuds semi rigides en translation

Une démarche similaire est suivie, les équations d'équilibre correspondant à ce cas sont alors écrites :

a - Equations d'équilibres

$$H_i = H_j = H \quad (4.11.a)$$

$$M(x) = Ny + Hx - M_j \quad (4.11.b)$$

$$M_i = N + Hl - M_j \quad (4.11.c)$$

b - Equation différentielle

L'équation différentielle de la déformée de l'élément sera cette fois telle que :

$$EIy'' = -Ny - Hx + M_j : \quad (4.12)$$

$$y(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - \frac{Hx}{\alpha^2 EI} + \frac{M_j}{\alpha^2 EI} \quad (4.13)$$

Les constantes d'intégration A et B sont déterminées à partir des conditions d'appuis $y(0) = 0$ et $y(l) = 0$:

La déformée et la rotation ont les expressions respectives suivantes :

$$y(x) = \frac{\sin \alpha x}{\alpha^2 EI \sin \alpha l} \left[M_j (\cos \alpha l - 1) + Hl + \alpha^2 EI \right] - \frac{M_j}{\alpha^2 EI} \cos \alpha x - \frac{Hx}{\alpha^2 EI} + \frac{M_j}{\alpha^2 EI} \quad (4.14.a)$$

$$y'(x) = \frac{\alpha \cos \alpha x}{\alpha^2 EI \sin \alpha l} \left[M_j (\cos \alpha l - 1) + Hl + \alpha^2 EI \right] + \frac{\alpha M_j}{\alpha^2 EI} \sin \alpha x - \frac{Hx}{\alpha^2 EI} \quad (4.14.b)$$

Cette fois les réactions H et M_j sont déterminées par les conditions aux limites suivantes :

$$y'(0) = k_2 M_j \quad (4.14.c)$$

$$y'(l) = k_1 M_i = k_1 (Hl + N - M_j) \quad (4.14.d)$$

La solution du système d'équations ainsi formé donne les fonctions sous la forme simplifiée :

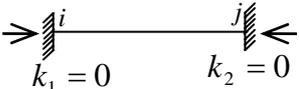
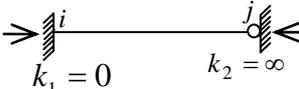
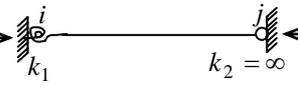
$$H = \frac{\omega}{l^2} \zeta_2(v) \quad (4.15)$$

$$M_i = \frac{\omega}{l} \phi_4(v) \quad (4.16)$$

$$M_j = \frac{\omega}{l} \phi_3(v) \quad (4.17)$$

Pour différents types d'appuis, le tableau (4.3) donne les expressions des fonctions précédentes.

Tableau 4.3 : Différents types d'appuis

Barre			
$\zeta_2(v)$	$\frac{v^3(1 + \cos v)}{2 \sin v - v \cos v - v}$	$\frac{v^3 \cos v}{(\sin v - v \cos v)}$	$\frac{v^3(\cos v - k_1 v \omega \sin v)}{(\sin v - v \cos v + k_1 v^2 \omega \sin v)}$
$\phi_3(v)$	$\frac{v^2 \sin v}{2 \sin v - v \cos v - v}$	0	0
$\phi_4(v)$	$\frac{v^2 \sin v}{2 \sin v - v \cos v - v}$	$\frac{v^2 \sin v}{(\sin v - v \cos v)}$	$\frac{v^2 \sin v}{\sin v - v \cos v + k_1 v^2 \omega \sin v}$

En particulier, quand $k_1 = 0$, on aura les expressions suivantes :

$$\zeta_1(v) = \frac{v^2 \sin v(1 - \cos v + k_2 v \omega \sin v)}{(1 - \cos v + k_2 v \omega \sin v)(\sin v - v \cos v) + (\sin v - v)(1 - \cos v)} \quad (4.18.a)$$

$$\phi_1(v) = \frac{v \sin v(v - \sin)}{(1 - \cos v + k_2 v \omega \sin v)(\sin v - v \cos v) + (\sin v - v)(1 - \cos v)} \quad (4.18.b)$$

$$\phi_2(v) = \frac{v \sin v(\sin - v \cos v + k_2 v^2 \omega \sin v)}{(1 - \cos v + k_2 v \omega \sin v)(\sin v - v \cos v) + (\sin v - v)(1 - \cos v)} \quad (4.18.c)$$

$$\zeta_2(v) = \frac{v^3[(1 - \cos v) + \cos v(1 - \cos v + k_2 v \omega \sin v)]}{(1 - \cos v + k_2 v \omega \sin v)(\sin v - v \cos v) + (\sin v - v)(1 - \cos v)} \quad (4.18.d)$$

$$\phi_3(v) = \frac{v^2 \sin v(1 - \cos v)}{(1 - \cos v + k_2 v \omega \sin v)(\sin v - v \cos v) + (\sin v - v)(1 - \cos v)} \quad (4.18.e)$$

$$\phi_4(v) = \zeta_2(v) - \phi_3(v) + v^3 \quad (4.18.f)$$

Les autres éléments de la matrice de rigidité élémentaire tenant compte simultanément de la semi rigidité et de l'effort axial seront déterminés de la même manière.

4.2.2. Matrice de rigidité dans le repère local

Sous la forme simplifiée, la matrice de rigidité dans le repère local est :

$$[\bar{K}_e] = EI \begin{bmatrix} \frac{v^3(s + \Omega)}{Dl^3} & -\frac{v^2(1 - c + \eta_2)}{Dl^2} & -\frac{v^3(s + \Omega)}{Dl^3} & \frac{v^2(1 - c + \eta_1)}{Dl^2} \\ & \frac{v(s - vc + v\eta_2)}{Dl} & \frac{v^2(1 - c + \eta_2)}{Dl^2} & \frac{v(v - s)}{Dl} \\ & & \frac{v^3(s + \Omega)}{Dl^3} & \frac{v^2(1 - c + \eta_1)}{Dl^2} \\ SYM & & & \frac{v(s - vc + v\eta_1)}{Dl} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Avec :

$$D = (2 - 2\cos v - v\sin v) + \xi(v, k_1, k_2)$$

$$\Omega = (k_1 + k_2)vwc - k_1 k_2 (vw)^2 s$$

$$\eta_1 = k_1 vws \text{ et } \eta_2 = k_2 vws$$

4.2.2.1. Cas particuliers :

a- Dans le cas de l'analyse du second ordre où le comportement du nœud d'assemblage est ignoré, on retrouve la matrice de rigidité donnée par (Ghali et al, 2006)

$$[k_e] = EI \begin{bmatrix} \frac{v^3 s}{l^3(2-2c-vs)} & -\frac{v^2(1-c)}{l^2(2-2c-vs)} & -\frac{v^3 s}{l^3(2-2c-vs)} & \frac{v^2(1-c)}{l^2(2-2c-vs)} \\ & \frac{v(s-vc)}{l(2-2c-vs)} & -\frac{v^2(1-c)}{l^2(2-2c-vs)} & \frac{v(v-s)}{l(2-2c-vs)} \\ SYM & & \frac{v^3 s}{l^3(2-2c-vs)} & -\frac{v^2(1-c)}{l^2(2-2c-vs)} \\ & & & \frac{v(s-vc)}{l(2-2c-vs)} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Les expressions données par (4.19) se réduisent alors à :

$D^* = (2 - 2\cos v - v\sin v)$ où les effets la semi rigidité des noeuds d'assemblages ne sont pas pris en compte ($k_1 = k_2 = 0$). Ainsi, on aura :

$$\xi(v, k_1, k_2) = \Omega = \eta_1 = \eta_2 = 0$$

b – Dans le cas d'une analyse du premier ordre, avec prise en compte de la semi rigidité des nœuds d'assemblage ($N = 0$, effort normal nul), on retrouve la matrice de rigidité de l'élément suivante (Ihaddoudène):

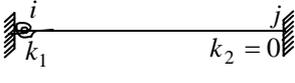
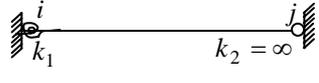
$$[\bar{K}_e] = \begin{bmatrix} \frac{36\omega[1+(k_1+k_2)\omega]}{\bar{D}l^2} & -\frac{18\omega(1+2k_2\omega)}{\bar{D}l} & -\frac{36\omega[1+(k_1+k_2)\omega]}{\bar{D}l^2} & -\frac{18\omega(1+2k_1\omega)}{\bar{D}l} \\ & \frac{12\omega(1+3k_2\omega)}{\bar{D}} & \frac{18\omega(1+2k_2\omega)}{\bar{D}l} & \frac{6\omega}{\bar{D}} \\ SYM & & \frac{36\omega[1+(k_1+k_2)\omega]}{\bar{D}l^2} & \frac{18\omega(1+2k_1\omega)}{\bar{D}l} \\ & & & \frac{12\omega(1+3k_1\omega)}{\bar{D}} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\bar{D} = [4(1 + 3k_1\omega)(1 + 3k_2\omega) - 1]$$

Pour des éléments présentant des modes d'attaches différents aux nœuds de la structure, les matrices de rigidité ne sont en fait que des cas particuliers de la matrice de rigidité précédente.

c - Pour certains cas particuliers, les éléments k_{ij} de ces matrices [Ihaddoudène et al] sont rapportés sur le tableau (4.4) suivant :

Tableau 4.4 : Matrice de rigidité de l'élément barre à nœuds d'assemblages semi rigides

k_{ij}			
k_{11}	$\frac{36\omega(1 + 2k\omega)}{l^2[4(1 + 3k\omega)^2 - 1]}$	$\frac{12\omega(1 + k_1\omega)}{l^2(1 + 4k_1\omega)}$	$\frac{3\omega}{l^2(1 + 3k_1\omega)}$
k_{12}	$-\frac{18\omega(1 + 2k\omega)}{l[4(1 + 3k\omega)^2 - 1]}$	$-\frac{6\omega}{l(1 + 4k_1\omega)}$	$-\frac{3\omega}{l(1 + 3k_1\omega)}$
k_{13}	$-k_{11}$	$-k_{11}$	$-k_{11}$
k_{14}	k_{12}	$-\frac{6\omega(1 + 2k_1\omega)}{l(1 + 4k_1\omega)}$	0
k_{22}	$\frac{12\omega(1 + 3k\omega)}{4(1 + 3k\omega)^2 - 1}$	$\frac{4\omega}{1 + 4k_1\omega}$	$\frac{3\omega}{1 + 3k_1\omega}$
k_{23}	$-k_{12}$	$-k_{12}$	$-k_{12}$
k_{24}	$\frac{6\omega}{4(1 + 3k\omega)^2 - 1}$	$\frac{2\omega}{1 + 4k_1\omega}$	0
k_{33}	k_{11}	k_{11}	k_{11}
k_{34}	$-k_{14}$	$-k_{14}$	0
k_{44}	k_{22}	$\frac{4\omega(1 + 3k_1\omega)}{1 + 4k_1\omega}$	0

d – Dans le cas d'analyse du premier ordre où les déformations des nœuds d'assemblage sont ignorés, on a :

$$[\bar{K}_e] = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ SYM & & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ & & & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Dans le tableau (4.5) ci-dessous, on donne – pour comparaison - de façon explicite, tous les éléments de cette matrice de rigidité ainsi que ceux des cas connus.

Tableau 4.5: Matrice de rigidité pour différentes analyses et différents comportements des nœuds d'assemblages

Effet du second ordre en tenant compte de la semi rigidité des nœuds d'assemblage	Effet du second ordre avec le semi rigidité ignorée	Analyse du premier ordre
$k_{11} = \frac{EI v^3 [s + (k_1 + k_2)vwc - k_1 k_2 (vw)^2 s]}{l^3 D}$	$k_{11} = \frac{EI v^3 s}{l^3 (2 - 2c - vs)}$	$k_{11} = \frac{12EI}{l^3}$
$k_{12} = -\frac{EI v^2 [1 - c + k_2 vws]}{l^2 D}$	$k_{12} = -\frac{EI v^2 [1 - c]}{l^2 (2 - 2c - vs)}$	$k_{12} = \frac{6EI}{l^2}$
$k_{13} = -\frac{EI v^3 [s + (k_1 + k_2)vwc - k_1 k_2 (vw)^2 s]}{l^3 D}$	$k_{13} = -\frac{EI v^3 s}{l^3 (2 - 2c - vs)}$	$k_{13} = -\frac{12EI}{l^3}$
$k_{14} = \frac{EI v^2 [1 - c + k_1 vws]}{l^2 D}$	$k_{14} = \frac{EI v^2 [1 - c]}{l^2 (2 - 2c - vs)}$	$k_{14} = \frac{6EI}{l^2}$
$k_{21} = -\frac{EI v^2 [1 - c + k_2 vws]}{l^2 D}$	$k_{21} = \frac{EI v^2 [1 - c]}{l^2 (2 - 2c - vs)}$	$k_{21} = \frac{6EI}{l^2}$
$k_{22} = \frac{EI v [s - vc + k_2 v^2 ws]}{l D}$	$k_{22} = \frac{EI v [s - vc]}{l (2 - 2c - vs)}$	$k_{22} = \frac{4EI}{l}$
$k_{23} = -\frac{EI v^2 [1 - c + k_2 vws]}{l^2 D}$	$k_{23} = -\frac{EI v^2 [1 - c]}{l^2 (2 - 2c - vs)}$	$k_{23} = -\frac{6EI}{l^2}$

$k_{24} = \frac{EI}{l} \frac{v[v-s]}{D}$	$k_{24} = \frac{EI}{l} \frac{v[v-s]}{(2-2c-vs)}$	$k_{24} = \frac{2EI}{l}$
$k_{31} = -\frac{EI}{l^3} \frac{v^3 [s + (k_1 + k_2)vwc - k_1 k_2 (vw)^2 s]}{D}$	$k_{31} = -\frac{EI}{l^3} \frac{v^3 s}{(2-2c-vs)}$	$k_{31} = -\frac{12EI}{l^3}$
$k_{32} = -\frac{EI}{l^2} \frac{v^2 [1-c + k_2 vws]}{D}$	$k_{32} = -\frac{EI}{l^2} \frac{v^2 [1-c]}{(2-2c-vs)}$	$k_{32} = -\frac{6EI}{l^2}$
$k_{33} = \frac{EI}{l^3} \frac{v^3 [s + (k_1 + k_2)vwc - k_1 k_2 (vw)^2 s]}{D}$	$k_{33} = \frac{EI}{l^3} \frac{v^3 s}{(2-2c-vs)}$	$k_{33} = \frac{12EI}{l^3}$
$k_{34} = -\frac{EI}{l^2} \frac{v^2 [1-c + k_1 vws]}{D}$	$k_{34} = -\frac{EI}{l^2} \frac{v^2 [1-c]}{(2-2c-vs)}$	$k_{34} = -\frac{6EI}{l^2}$
$k_{41} = \frac{EI}{l^2} \frac{v^2 [1-c + k_1 vws]}{D}$	$k_{41} = \frac{EI}{l^2} \frac{v^2 [1-c]}{(2-2c-vs)}$	$k_{41} = \frac{6EI}{l^2}$
$k_{42} = \frac{EI}{l} \frac{v[v-s]}{D}$	$k_{42} = \frac{EI}{l} \frac{v[v-s]}{(2-2c-vs)}$	$k_{42} = \frac{2EI}{l}$
$k_{43} = -\frac{EI}{l^2} \frac{v^2 [1-c + k_1 vws]}{D}$	$k_{43} = -\frac{EI}{l^2} \frac{v^2 [1-c]}{(2-2c-vs)}$	$k_{43} = -\frac{6EI}{l^2}$
$k_{44} = \frac{EI}{l} \frac{v[s - vc + k_1 v^2 ws]}{D}$	$k_{44} = \frac{EI}{l} \frac{v[s - vc]}{(2-2c-vs)}$	$k_{44} = \frac{4EI}{l}$

4.2.3. Matrice de rigidité dans le repère global

Après avoir déterminé la matrice de rigidité \overline{K}_e de l'élément barre dans le repère local et ajouté l'effet de l'effort normal, on obtient la matrice de rigidité dans le repère global à l'aide de la matrice de transformation T_e , telle que :

$$K_e = T_e^T \overline{K}_e T_e \quad (4.23)$$

où :

$$T_e = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

La matrice de rigidité K_e dans le repère globale est donnée par :

$$[K_e] = \begin{bmatrix} (N_1 + k_{11}R_1) & (N_3 - k_{11}R_3) & -k_{12}R_4 & (k_{13}R_1 - N_1) & (N_3 - k_{13}R_3) & -k_{14}R_4 \\ & (N_2 + k_{11}R_2) & k_{12}R_5 & (-N_3 - k_{13}R_3) & k_{13}R_2 & k_{14}R_5 \\ & & k_{22} & -k_{23}R_4 & k_{23}R_5 & k_{24} \\ & & & (N_1 + k_{33}R_1) & (N_3 - k_{33}R_3) & -k_{34}R_4 \\ & & & & (N_2 + k_{33}R_2) & k_{34}R_5 \\ & & & & & k_{44} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

SYM.

Dans laquelle :

$$N_1 = \frac{EA \cos^2 \beta}{l} ; N_2 = \frac{EA \sin^2 \beta}{l} ; N_3 = \frac{EA \sin \beta \cos \beta}{l},$$

$$R_1 = \sin^2 \beta ; R_2 = \cos^2 \beta ; R_3 = \sin \beta \cos \beta ; R_4 = \sin \beta \text{ et } R_5 = \cos \beta.$$

L'angle β définit l'orientation de l'élément barre par rapport à l'axe de référence Ox .

4.3. VECTEUR FORCES DE L'ELEMENT

4.3.1. Vecteur forces de l'élément dans le repère local $ox'y'$

Le vecteur force de l'élément barre à nœuds d'assemblage, exprimé dans le repère local est tel que :

$$\overline{F}_e = \begin{bmatrix} \overline{X}_i \\ \overline{Y}_i \\ \overline{M}_i \\ \overline{X}_j \\ \overline{Y}_j \\ \overline{M}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_i \\ -V_i \\ -M_i \\ H_j \\ -V_j \\ -M_j \end{bmatrix} \quad (4.25.a)$$

H_i, V_i, M_i, V_j, M_j et H_j : réactions aux noeuds "i" et "j" sous l'action de charges extérieures, dans la repère local

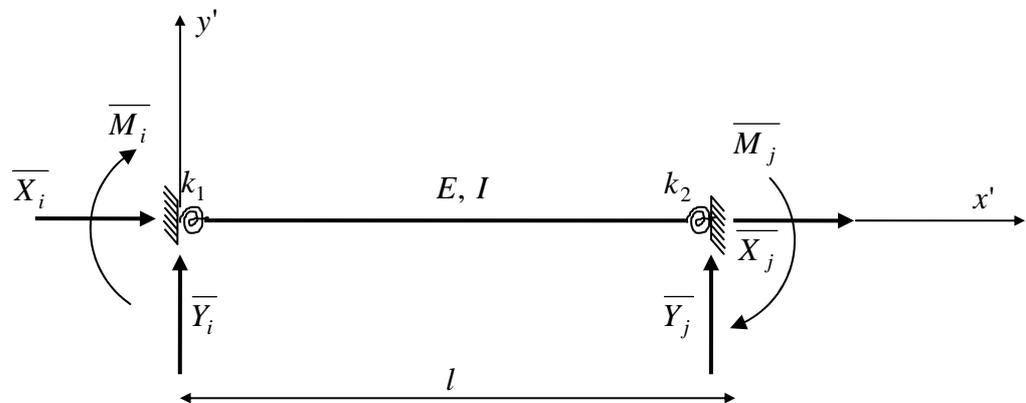
4.3.2. Vecteur forces de l'élément dans le repère global oxy

Dans le repère global, il s'exprime par la relation suivante :

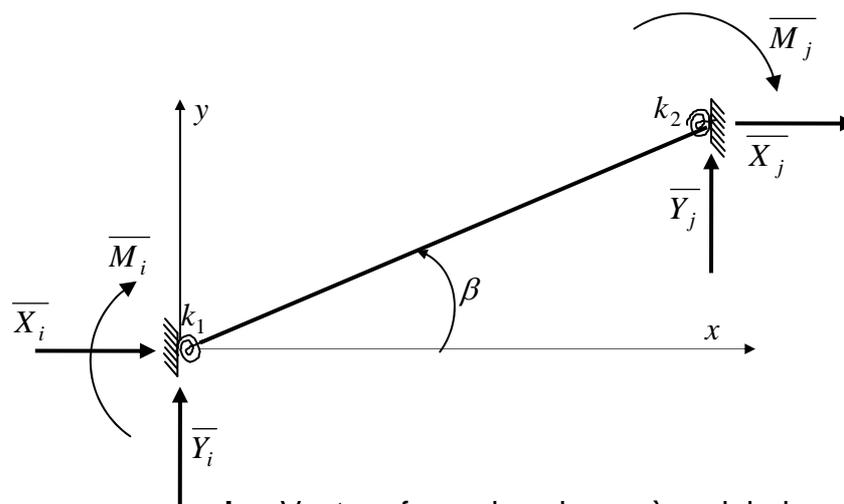
$$F_e = T_e^T \cdot \bar{F}_e \quad (4.25.b)$$

où :

\bar{F}_e : vecteur forces dans le repère local.



a – Vecteur force dans le repère local



b – Vecteur force dans le repère global

Figure 4.4 : Vecteur forces de l'élément dans le repère global oxy

4.4. LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

4.4.1 Méthode des éléments finis avec le modèle déplacement

La structure étudiée est divisée en éléments finis reliés entre eux par des noeuds. D'après les conditions d'équilibres aux noeuds, on a l'équation fondamentale de la structure analysée par la méthode des éléments finis :

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (4.26.a)$$

dans laquelle :

K : matrice de rigidité

U : vecteur des déplacements

F : vecteur de forces de la structure dans le repère global

$$K = \sum_{i=1}^{n_e} K_e^L \quad (4.26.b)$$

$$F = \sum_{i=1}^{n_e} F_e^L \quad (4.26.c)$$

et les sommations s'effectuent sur l'ensemble des n_e éléments. Les matrices de rigidité et les vecteurs de forces des éléments sont localisés dans le repère global à l'aide de la matrice de localisation L_e :

$$K_e^L = L_e^T K_e L_e \quad (4.26.d)$$

$$F_e^L = L_e^T F_e \quad (4.26.e)$$

La matrice de rigidité \overline{K}_e et le vecteur de forces \overline{F}_e de chaque élément dans le repère local peuvent être transformés dans le repère global de la structure à l'aide de la matrice de transformation T_e .

$$K_e = T_e^T \overline{K}_e T_e \quad (4.26.f)$$

$$F_e = T_e^T \overline{F}_e \quad (4.26.g)$$

4.4.2. Conditions sur la matrice de rigidité

Quand ce système est linéaire, et si la matrice de rigidité $[K_e]$ est définie positive, alors $[K_e]^{-1}$ existe et est unique, on en déduit ainsi le vecteur déplacement tel que :

$$\{U_e\} = [K_e]^{-1} \{F_e\} \quad (4.27.a)$$

Par contre, quand ce système est non linéaire, la matrice de rigidité est modifiée et dépend des paramètres du problème ; ici $[K_e]$ dépend de $\{F_e\}$ et on peut écrire :

$$[K_e(F)]\{U_e\} = \{F_e\} \quad (4.27.b)$$

Si les efforts sont connus, on peut déterminer tous les éléments de $[K(F)]$ et le système précédent admet une solution unique :

$$\{U\} = [K(F)]^{-1} \{F\} \quad (4.27.c)$$

pourvue que la structure reste stable.

A l'équilibre instable, cette solution n'est plus unique et la matrice $[K(F)]$ est singulière (la rigidité de la structure est nulle) et l'analyse de ce type de problème exige, donc, une technique itérative.

4.5. CONCLUSION

1 – L'introduction de la notion de nœud, pour distinguer la rotation des nœuds de celle des éléments au niveau des assemblages semi-rigides, prend ainsi toute sa signification. Le modèle mécanique proposé et validé fait que les formules simples proposées sont générales puisqu'elles sont appliquées dans toutes les situations.

Ainsi, la confrontation analytique des expressions données par la formulation établie fait que l'on peut aisément considérer ou non l'effet de l'effort axial, sans que l'on soit amené à développer un artifice de calcul pour lever l'indétermination par exemple, comme c'est le cas de certains auteurs.

2 – La généralisation des expressions formulées fait que l'on peut aussi bien considérer les différents cas de comportements du nœud d'assemblage linéaire rigide, semi rigide en passant par une analyse plastique et enfin par une analyse de la stabilité comme il sera montré dans les exemples dans le chapitre réservé à cet effet.

CHAPITRE CINQUIEME

VALIDATION DU MODELE

5.1. NON LINEARITE MATERIELLE (Plasticité)

L'analyse non-linéaire des structures formées de barres à assemblages semi-rigides est basée sur le calcul élastique linéaire de la structure par la méthode des éléments finis avec le modèle déplacement. Il s'agit, alors, de déterminer le mécanisme de ruine et la charge correspondante ainsi que les déplacements d'étage en tenant compte de la spécificité des nœuds dont le comportement est non linéaire.

5.1.1. Procédures de calcul

La procédure générale consiste à analyser - pour chaque étape de calcul - la structure sous le facteur de charge unitaire tout en gardant les sollicitations et les déformations des étapes précédentes; ceci afin de pouvoir estimer les restes des moments fléchissants aux sections critiques et ainsi calculer l'incrément de charge de l'actuelle étape.

Les étapes de calcul à suivre par la méthode pas à pas sont données par le schéma de calcul de la figure (5.1).

A chaque étape de calcul, on évalue la matrice de rigidité des éléments dans le repère global en tenant compte du changement des nouveaux modes de " liaisons actualisées " et on les assemble de façon à construire la nouvelle matrice de rigidité K de la structure. Le vecteur de force F dépend également des nouveaux modes de liaisons.

A chaque étape de calcul, on adopte la matrice de rigidité et le vecteur de forces globaux de la structure, aux conditions aux limites correspondantes.

On résout ensuite le système d'équations linéaires $KU = F$ pour obtenir les déplacements nodaux.

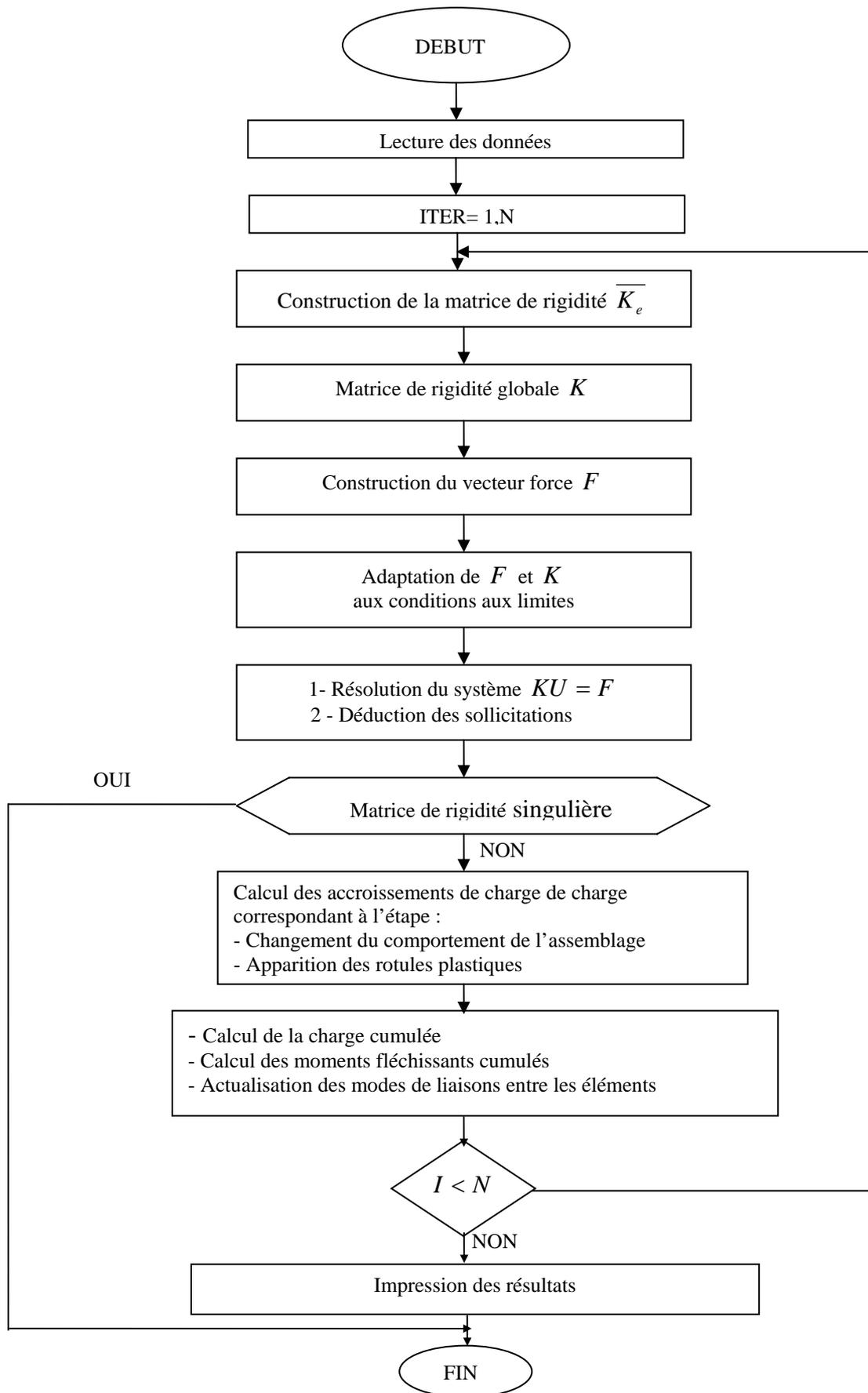


Figure 5.1 : Procédure du calcul pas à pas de la charge de rupture plastique

Les efforts internes sont calculés à partir de la relation entre les forces appliquées aux noeuds et les déplacements nodaux des éléments:

$$[K_e]\{U_e\} = \{F_e\} \quad (5.1)$$

La détermination des accroissements de charges correspondant aux sections critiques a pour but de chercher la valeur minimale de l'incrément de charge $\Delta W(I)$ avec la nouvelle condition de plastification ou le changement du comportement de l'assemblage. Ces accroissements de charge sont calculés à partir de:

$$\Delta W(I) = \frac{RM(I-1)}{\Delta M(I)} \quad (5.2)$$

où :

$RM(I-1)$: reste du moment à l'étape précédente ($I-1$)

$\Delta M(I)$: accroissement du moment fléchissant du à la charge unitaire à l'étape (I)

Les restes des moments limites sont considérés comme étant les compléments des moments cumulés aux différentes étapes par rapport aux moments limites (moment plastique ou moments limites du comportement de l'assemblage). Une fois que cet incrément de charge eut été déterminé, les efforts ainsi que les déplacements cumulés peuvent être évalués à partir de la formule suivante:

$$S(I) = S(I-1) + \Delta W(I) * \Delta S \quad (5.3)$$

où:

$S(I-1)$ et $S(I)$: efforts (ou déplacements) aux étapes ($I-1$) et (I) .

ΔS : incrément des efforts (ou déplacements) à l'étape (I) .

L'actualisation des types de liaisons entre les éléments en tenant compte des nouvelles conditions (changement du comportement de l'assemblage, apparitions des rotules plastiques) est nécessaire et servira pour les étapes suivantes.

Le processus de calcul est arrêté quand la matrice de rigidité global de la structure est singulière (la structure est un mécanisme).

L'avantage de cette procédure est que l'on peut - à la fois - l'utiliser pour déterminer la distribution des moments fléchissants ainsi que les déplacements de la structure à joints semi-rigides sous un chargement donné.

Elle permet également de calculer simultanément la charge de rupture plastique ainsi que le déplacement correspondant.

Dans le programme, cela correspond à :

$$dp_1 = \min(\min(Dp_1));$$

$$dp_2 = \min(\min(Dp_2));$$

$$dp = \min(dp_1, dp_2);$$

On s'arrête quand on aura les conditions simultanées

$$Dp_1 < 10^{-6} \quad \text{et} \quad Dp_2 < 10^{-6},$$

dans ce cas :

$$Dp_1 = \left| \frac{Dp_1 - dp}{dp} \right| \quad \text{et} \quad Dp_2 = \left| \frac{Dp_2 - dp}{dp} \right|$$

Alors :

$$M_x = M_x + M \quad ; \quad \text{les moments fléchissants cumulés}$$

$$U_x = U_x + u \quad ; \quad \text{les déplacements actualisés}$$

$$dp_x = dp_x + dp \quad ; \quad \text{la charge cumulée.}$$

5.2. NON LINEARITE GEOMETRIQUE

Dans le cas d'une analyse non linéaire géométrique, les équations d'équilibre sont formulées à l'état déformé de la structure ce qui engendre des effets du second ordre ($P - \Delta$). Il s'agit de déterminer la charge critique de flambement pour n'importe quel structure plane, aussi bien des portiques à nœuds fixes ou à nœuds déplaçables.

Pour ce faire, on aura atteint la singularité de la matrice de rigidité quand le déterminant est nul et le programme prend fin.

Cependant, pour une itération donnée, le déterminant peut être positif ou négatif comme le montre la figure (5.2) suivante :

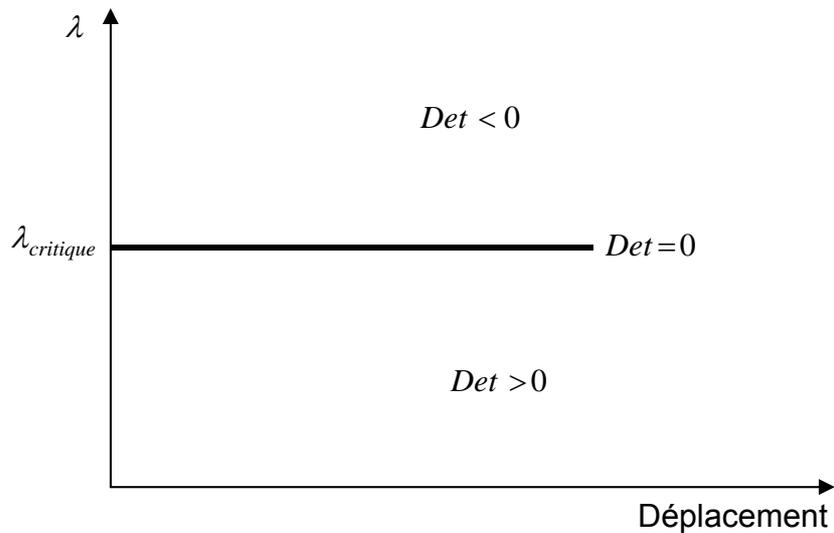


Figure 5.2: Les différents domaines de stabilité, instabilité

Le déterminant est nul quand l'instabilité est atteinte, ce qui correspond à la charge critique d'instabilité. Dans le programme, ceci correspond au facteur de charge, qui est la proportion entre la valeur de la charge introduite et la valeur de la charge à l'itération considérée :

$$p_i = \lambda_i * p_0 \quad (5.4)$$

L'incrément se fait par l'intermédiaire de l'incrément de charge :

$$p_i = p_{i-1} + \Delta p_i \quad (5.5)$$

Si le déterminant est positif, on n'a pas encore atteint le singulier, il faudra alors augmenter la charge. Par contre, s'il est négatif, ceci veut dire que nous avons dépassé la valeur singulière et que cette dernière se trouve alors entre le point de l'itération précédente et le point actuel comme le montre la figure (5.3). Soit dp la longueur de cette plage où il faut chercher cette singularité.

if $Det < 0$

$$p = p - dp ;$$

$$dp = dp / 2 ;$$

Dans un premier temps, on prend d'abord le milieu de cet intervalle en soustrayant $(dp/2)$.

Le test se fera sur l'effort normal, du moment qu'aussi bien la matrice de rigidité que le vecteur second membre en sont fonction ; c'est à dire que l'on

vérifie : $precision = \left| \frac{p - p_2}{p_2} \right| < 10^{-4}$ (précision = $abs((p-p_2)/p_2)$).

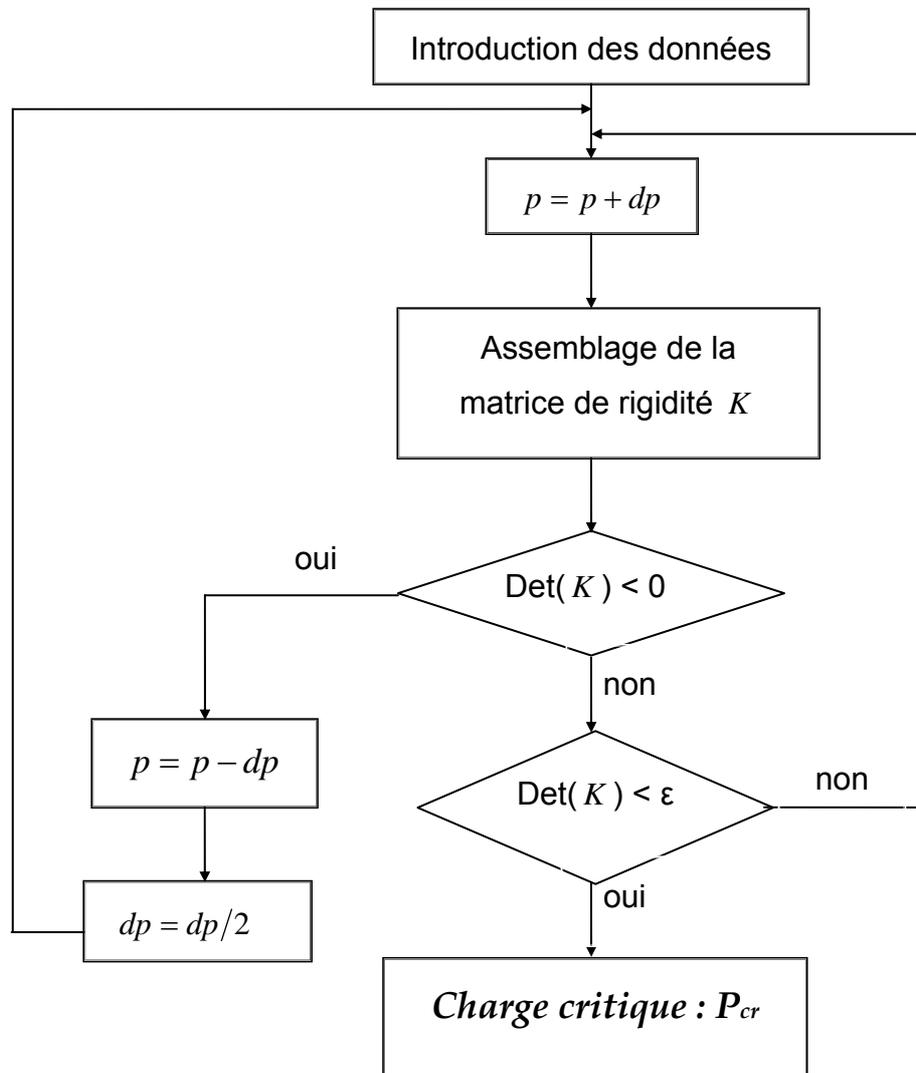


Figure 5.3: Principales étapes de la procédure de calcul de la charge critique

5.2.1. Procédures du programme Matlab

Nombre de nœuds
 Nombre d'éléments

Coordonnées des nœuds :
 Pour chaque nœud on définit les coordonnées
 $x(i)$; $y(i)$

Caractéristiques des éléments :
 Pour chaque nœud (i) et (j), on définit :
 Flexibilités en (i) puis en (j) ;
 La quantité EI et EA en (i) puis en (j)

Longueurs et inclinaison des éléments

```
for ii=1:m
  x1 = x(nd(ii)) ;
  x2 = x(na(ii)) ;
  y1 = y(nd(ii)) ;
  y2 = y(na(ii)) ;
  L(ii) = sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2) ;
  xdif = x2 - x1 ;
  ydif = y2 - y1 ;
  if xdif ~= 0
    theta(ii) = atan(ydif/xdif) ;
  else
    if ydif > 0
      theta(ii) = pi / 2 ;
    elseif ydif < 0
```

Initialisation de la charge
 Incrément de charge

```
  BB = Portique_calc_complet(L(jj),p1,EI(jj),EA(jj),sk1(jj),sk2(jj),theta(jj)) ;
  m1 = 3*nd(jj)-2 ;
  m2 = 3*na(jj)-2 ;
  n1 = 3*nd(jj) ;
  n2 = 3*na(jj) ;

  CC(m1:n1,m1:n1) = CC(m1:n1,m1:n1) + BB(1:3,1:3) ;
  CC(m1:n1,m2:n2) = CC(m1:n1,m2:n2) + BB(1:3,4:6) ;
  CC(m2:n2,m1:n1) = CC(m2:n2,m1:n1) + BB(4:6,1:3) ;
  CC(m2:n2,m2:n2) = CC(m2:n2,m2:n2) + BB(4:6,4:6) ;

  if Det < 0
    ii = ii - 1 ;
    p = p - dp ;
    dp = dp / 2 ;
  elseif Det > 0
    Det1 = Det ;
  end
```

```
  précision = abs((p-p2)/p2) ;
End
Affichage de la valeur de la charge Pcr.
```

5.3. APPLICATIONS NUMERIQUES

5.3.1. Exemple de S.L. Chan : Analyse linéaire

Dans le but de valider le modèle mécanique proposé, des comparaisons avec des résultats récemment publiés (Chan et Chui, 2001) ont été conduites [Ihaddoudène et al, 2008]. Le portique est analysé avec différentes rigidités données par les mêmes auteurs.

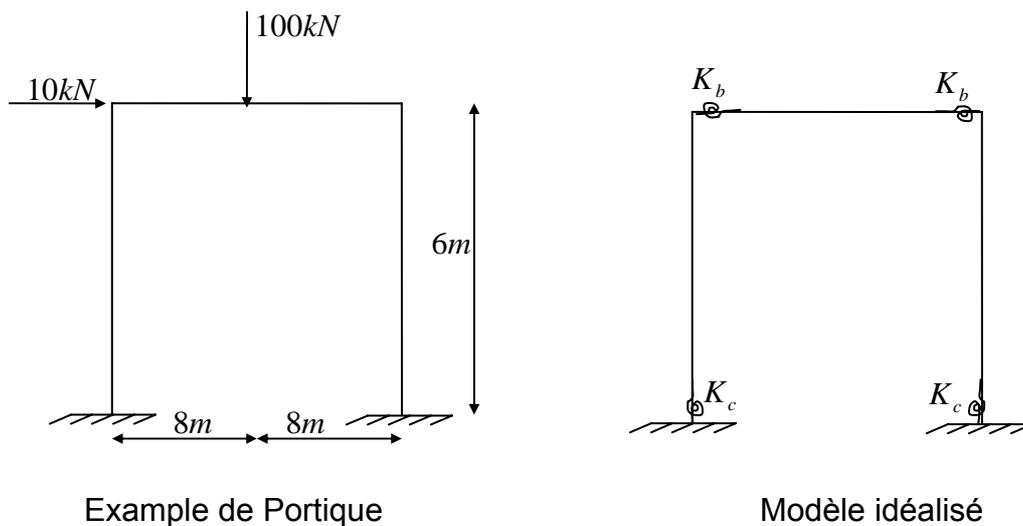


Figure 5.4 : Exemple de la référence (Chan et Chui, 2000)

Les données du problème :

Pour la poutre : $I_b = 21500cm^3$; $A_b = 76cm^2$

Pour le poteau : $I_c = 9460cm^4$; $A_c = 110cm^2$

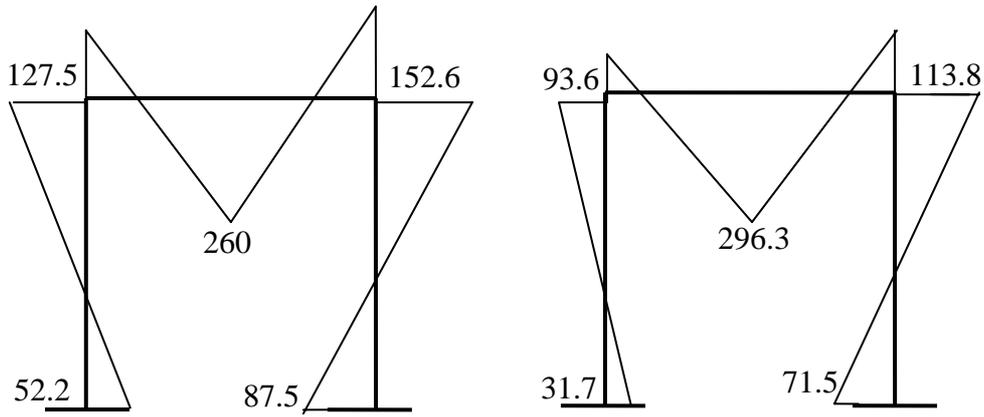
Les différents cas étudiés concernent :

1 – Assemblage rigide avec : $K_b = K_c = \infty$

2 – Assemblage semi rigide avec : $K_b = 4 \frac{EI_b}{L_b}$ et $K_c = \frac{EI_c}{L_c}$

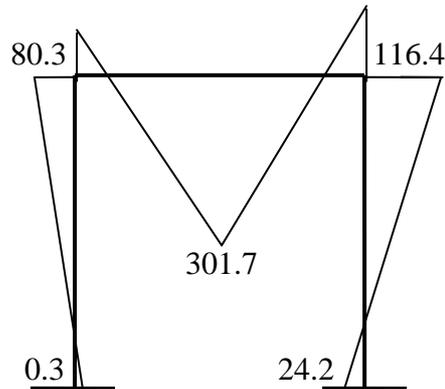
3 – Assemblage semi rigide avec : $K_b = 4 \frac{EI_b}{L_b}$ et $K_c = \infty$

Les digrammes des moments, (en $kN.m$), de ces différentes situations ainsi que la comparaison des valeurs données avec la présente étude sont respectivement donnés par la figure (5.5) et le tableau (5.1) suivants :



Assemblage rigide :
 $K_b = K_c = \infty$

Assemblage semi rigide
 $K_b = 4 \frac{EI_b}{L_b}$ and $K_c = \infty$



Assemblage semi rigide
 $K_b = 4 \frac{EI_b}{L_b}$ and $K_c = \frac{EI_c}{L_c}$

Figure 5.5: Diagrammes des moments [S.L.Chan]

Les diagrammes des moments montrent l'importance que revêt le comportement des assemblages sur les éléments de structures. En effet, la valeur de ces moments obtenue, est fortement influencée par le type d'assemblage utilisé.

Pour le cas rigide, ils sont plus importants au niveau des extrémités que ceux dans le cas semi rigide. Au niveau de la poutre, cette situation s'inverse, puisque c'est dans les cas semi rigide où l'on retrouve les moments les plus importants que ceux dans le cas rigide.

Enfin, les valeurs obtenues par la présente formulation qui sont comparées [Ihaddoudène et al, 2008] à celles données par la référence (Chan et Chui, 2000) sont rapportées dans le tableau (5.1) ci-dessous :

Tableau 5.1 : Les valeurs des moments de flexion, présente étude (Chan et Chui)

Schéma	Assemblage rigide $k_b = k_c = 0$	Assemblage Semi rigide avec $k_b = \frac{4EI_b}{L_b}$, $k_c = 0$	Assemblages semi rigides avec $k_b = \frac{4EI_b}{L_b}$, $k_c = \frac{EI_c}{L_c}$
<p>Figure (5.4)</p>	Moments	Moments	Moments
	$M_{41} = 52.2$	31.9 (31.7)	0.3392 (0.3)
	$M_{14} = 127.6$	93.7 (93.6)	80.2715 (80.3)
	$M_{52} = 87.1$	71.8 (71.5)	24.1813 (24.2)
	$M_{25} = 152.7$	113.9 (113.8)	116.4294 (116.4)
	$M_{32} = 260$	296.4 (296.3)	301.6495 (301.7)
(kN.m)	(kN.m)	(kN.m)	

5.3.2. Comparaisons des différentes analyses :

Position du problème:

Cette fois, le comportement des nœuds d'assemblage est non linéaire. Les différents comportements des courbes caractéristiques du nœud d'assemblage, ainsi que celui de l'élément, sont donnés sur la figure (5.6) ci-dessous.

Afin de comparer les différents comportements des assemblages rigide, semi rigide linéaire et semi rigide bilinéaire, les deux portiques ci-dessous sont analysés avec les données suivantes :

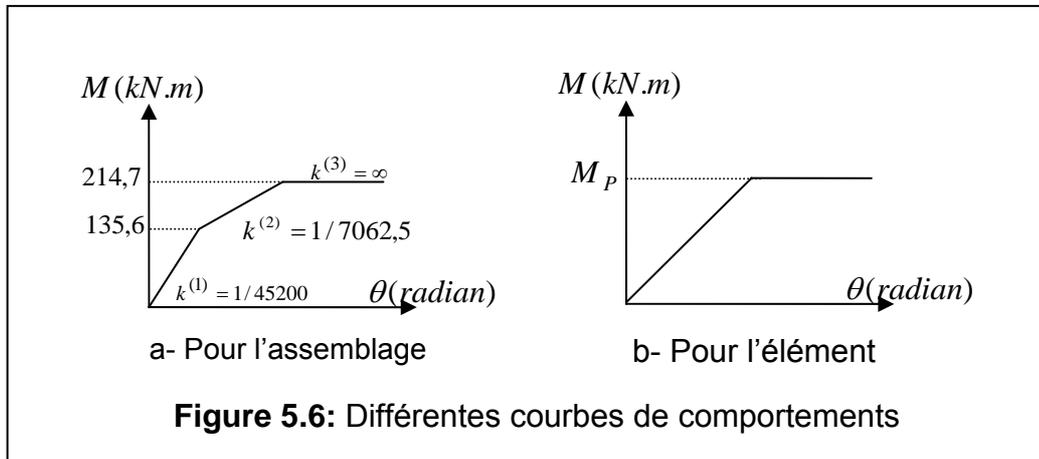
Les traverses sont en IPE 400 dont les caractéristiques :

$$I_x = 23130\text{cm}^4 ; S_x = 654\text{cm}^3 ; A = 84,5\text{cm}^2 ; M_P = 2S_x\sigma_e = 319,92 \text{ kN.m}$$

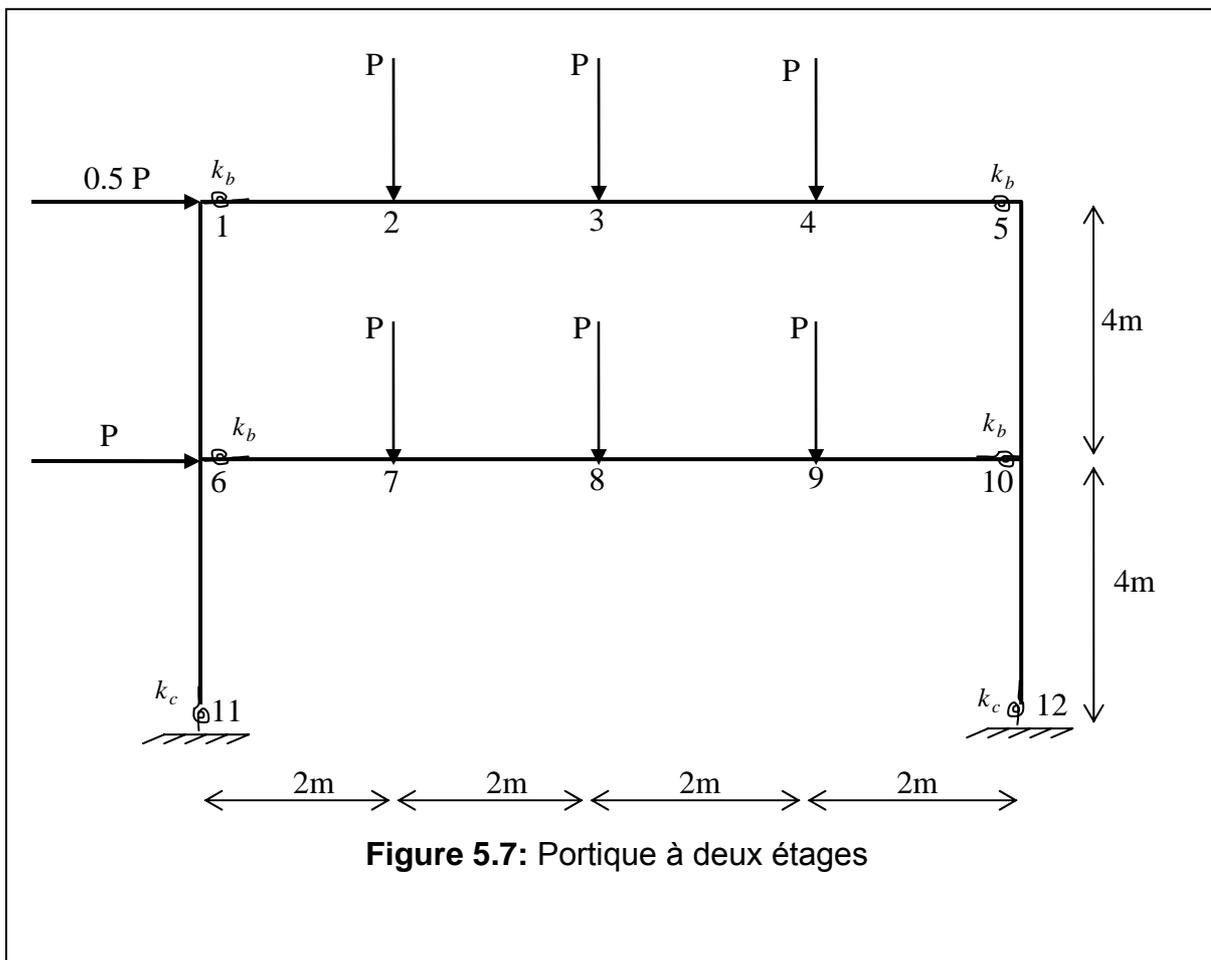
Les poteaux sont en HEA 280 qui ont pour données :

$$I_x = 13670\text{cm}^4 ; S_x = 556\text{cm}^3 ; A = 97,2\text{cm}^2 ; M_P = 2S_x\sigma_e = 266,88 \text{ kN.m}$$

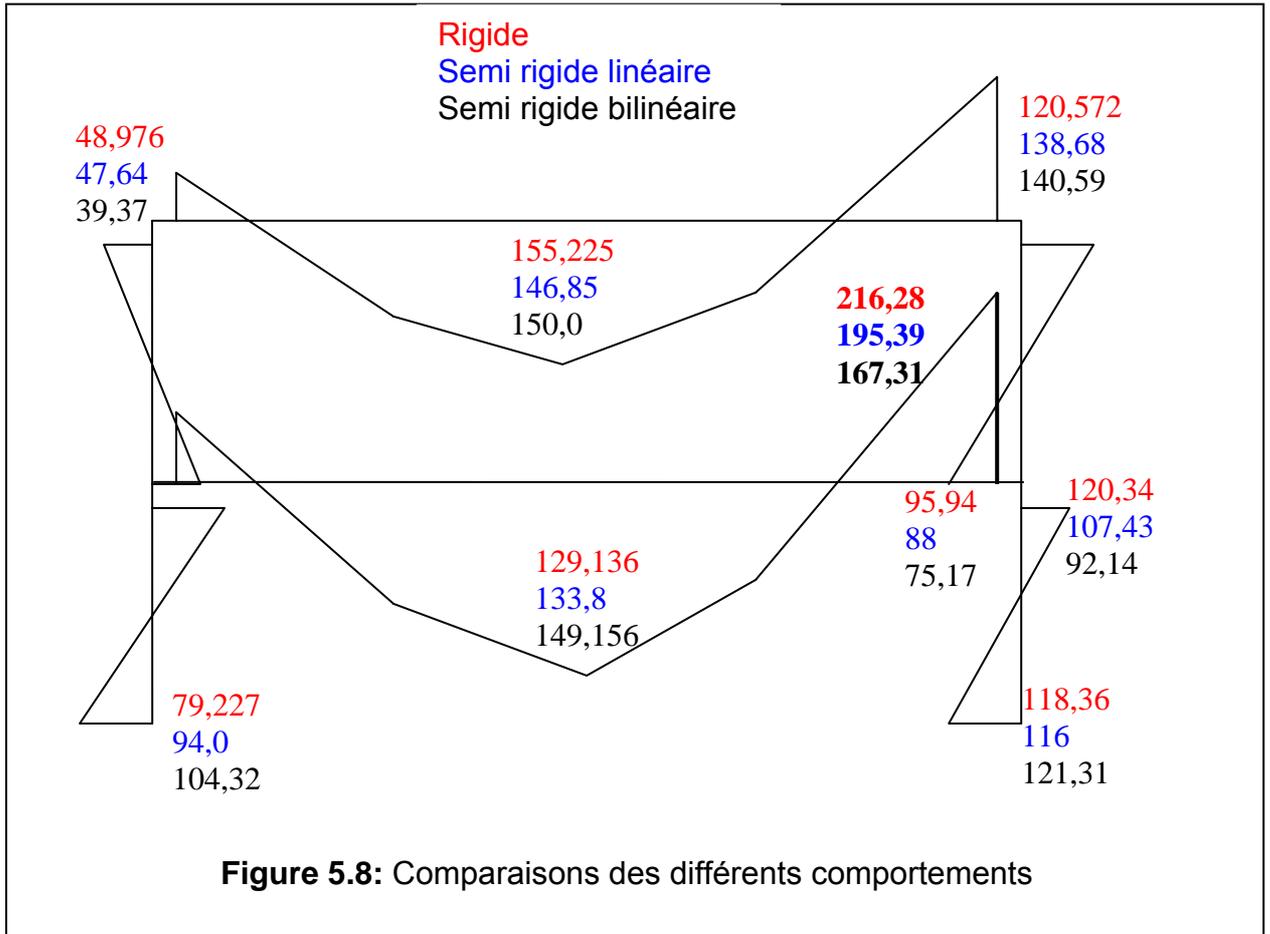
Afin de voir quelle pourrait être l'influence des nœuds d'assemblages sur les portiques étagés et sur des portiques à travées, on considère les portiques ci-dessous. La charge est augmentée jusqu'à la valeur de $P = 60kN$.



5.3.2.1. Portique à deux étages :

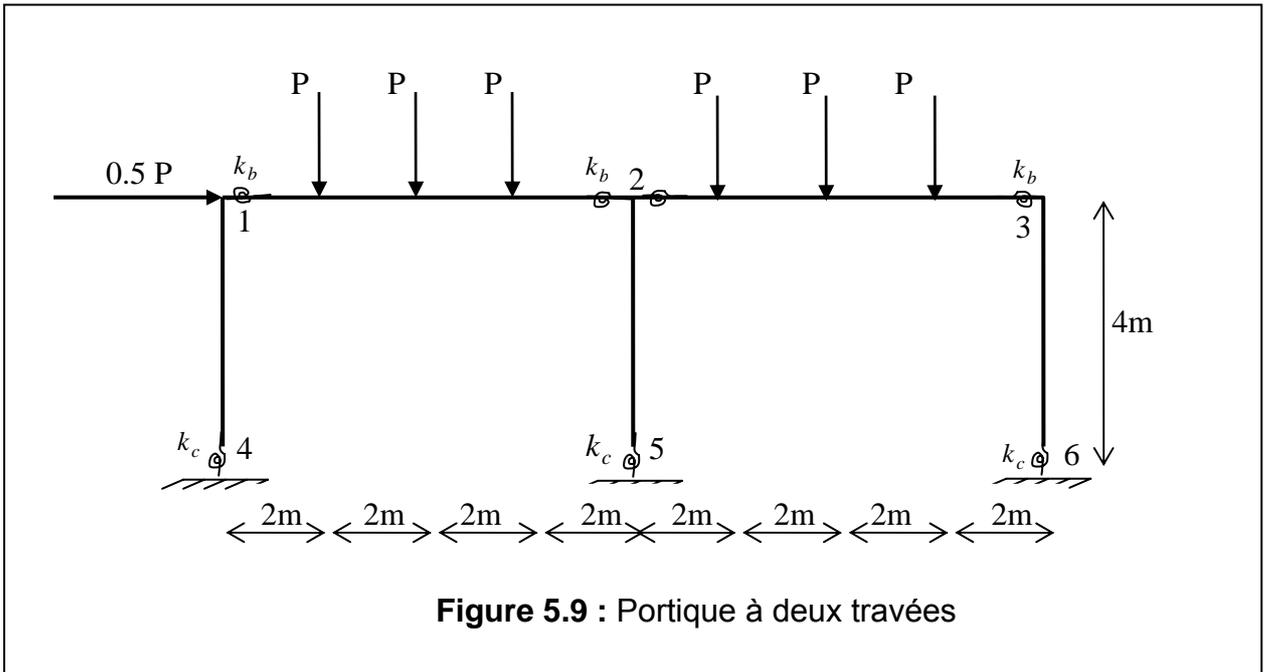


En suivant la procédure de calcul donnée par l'organigramme précédent, les diagrammes des moments fléchissants correspondants à ces différents cas sont donnés par la figure (5.8) suivante :

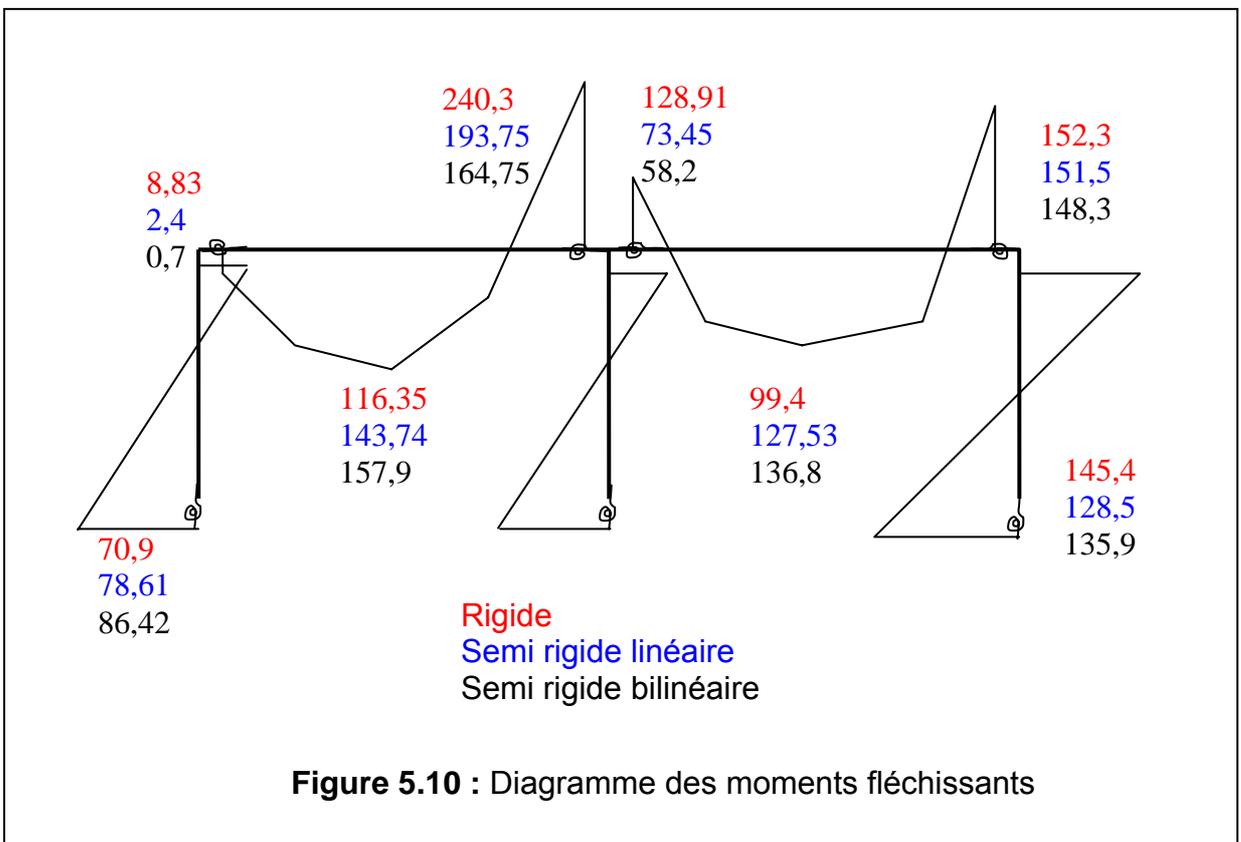


On remarque que les moments de flexion des nœuds d'assemblage (en 6 et 10 sur le diagramme des moments) diminuent du cas rigide au cas semi rigide bilinéaire, alors qu'ils augmentent à mi-travée (en 8, sur le diagramme), ce qu'on ne retrouve pas au niveau supérieur (en 1, 5 puis 3, respectivement). Dans ce cas, on ne devrait pas avoir le même type d'assemblage semi rigide pour les deux étages de ce portique.

5.3.2.2. Portique à deux travées :



Le diagramme des moments correspondants est :



L'influence des assemblages sur les valeurs des moments de flexion est montrée sur la figure (5.10) ci-dessus.

En effet, pour ce portique à un étage et à deux travées, la diminution des moments aux niveaux des extrémités s'accompagne par une augmentation de sa valeur en travée.

Ainsi, on peut avancer que l'influence que peuvent avoir les assemblages sur le comportement des portiques étagés et à travées est clairement établie. Les diagrammes des moments fléchissants pour ces deux exemples montrent que les poutres sont hautement sensibles à la flexibilité des assemblages pour les portiques étagés.

5.4. NON LINEARITE GEOMETRIQUE

Dans cette section, il s'agit de déterminer, dans différentes situations de comportements de portique à nœuds fixes et à nœuds déplaçables (Ihaddoudène et al, 2008), la charge critique de flambement pour chaque situation.

Les trois exemples traités suivants sont tirés de la référence (Mageirou et al, 2005, Mageirou et al 2006), les caractéristiques des éléments sont donnés par :

$$\text{Pour la poutre } \left\{ \begin{array}{l} EI = 4,8573e4kN.m^2 \\ EA = 896490kN \end{array} \right\} \text{ et pour le poteau } \left\{ \begin{array}{l} EI = 9.0699e + 4.kN.m^2 \\ EA = 1272600kN \end{array} \right\}$$

La flexibilité de l'assemblage $k_1 = 1/150rad / kN.m$

5.4.1. Exemple de Mageirou et al

Les portiques métalliques suivants, représentés sur la figure (5.11) de portée $l = 20m$ et de hauteur $h = 10m$ sont analysés et comparés aux différents résultats donnés par les références précitées. La synthèse des résultats des systèmes étudiés est donnée dans les tableaux (5.2) et (5.3) ci-dessous :

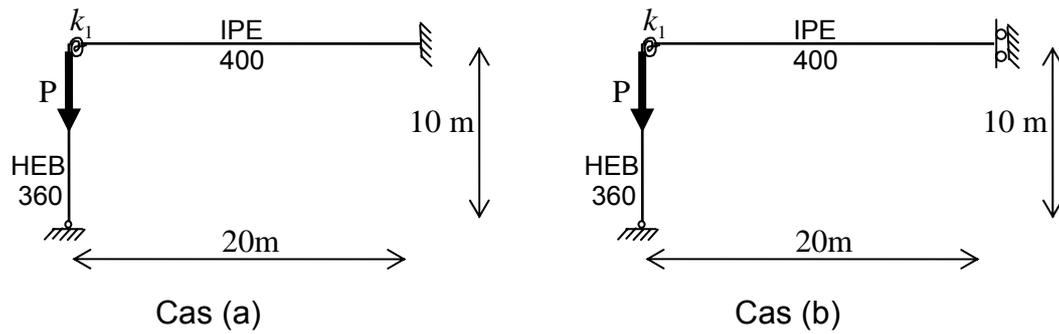


Figure 5.11: Systèmes étudiés (Mageirou et al)

Tableau 5.2 : Comparaisons des valeurs de la charge critique pour le cas (a)
(Mageirou and Gantes, 2006)

Méthodes utilisées	P_{cr} (kN)	$\frac{P_{cr} - P_{cr,MEF}}{P_{cr,MEF}}$ (%)
M.E.F (Numérique)	8981,58	0
Référence [Mageirou et al, 2006]	8981,16	-0,005
Présente étude proposée	8982	0,0046

Tableau 5.3 : Comparaisons des valeurs de la charge critique pour le cas (b)
(Mageirou et al, 2006)

Méthodes utilisées	P_{cr} (kN)	$\frac{P_{cr} - P_{cr,MEF}}{P_{cr,MEF}}$ (%)
M.E.F (Numérique)	8979,83	0
Référence [Mageirou et al, 2006]	8979,86	0,001
Présente étude proposée	8980	0,0019

La charge critique obtenue par la présente formulation, pour les deux cas de systèmes étudiés, est similaire à celles données par les références précitées. Elle est atteinte pour un déterminant nul de la matrice de rigidité.

Les résultats obtenus par les références précédentes ainsi que par le programme MSC-NASTRAN, pour les mêmes exemples donne les valeurs de cette charge critique, pour chaque cas, égale respectivement à, $P_{cr} = 8981.16kN$ et $P_{cr} = 8981.58kN$.

5.4.2. Portique étagés

Le portique étagé de la figure (5.12) est analysé en utilisant la formulation proposée, comparée à celles données par différentes méthodes présentée dans les références précitées. Cette fois la charge concentrée aura pour valeur égale à $P/3$ comme indiqué sur la même figure.

Le tableau (5.4) ci-dessous donne la valeur de la charge critique selon différentes méthodes utilisées.

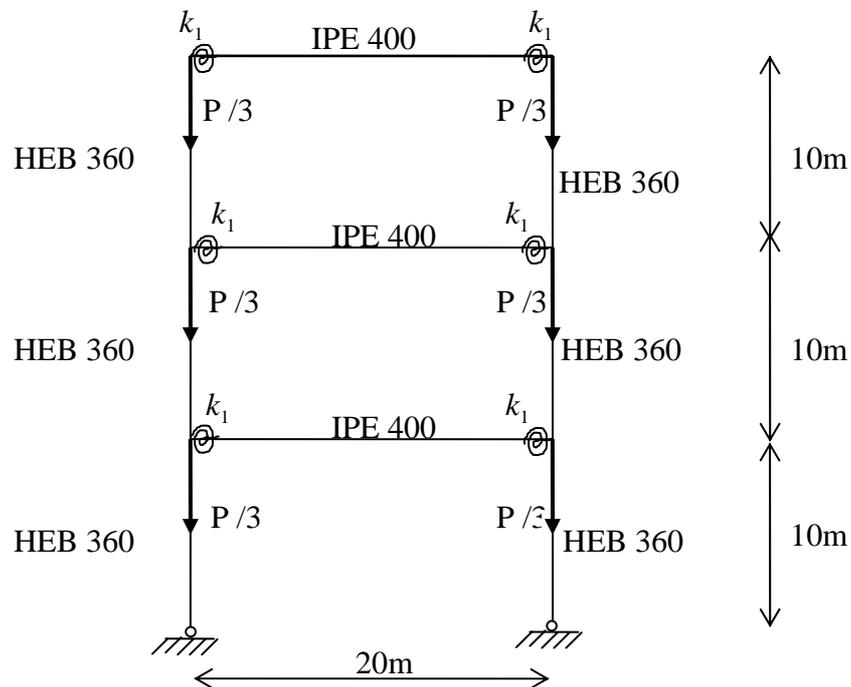


Figure 5.12 : Portique étagé de la référence [Mageirou, 2006]

Tableau 5.4: La valeur des charges critiques obtenues selon différentes méthodes [Mageirou and Gantes, 2006] et la présente étude.

Méthodes utilisées	$P_{cr} (kN)$	$\frac{P_{cr} - P_{cr,MEF}}{P_{cr,MEF}} (\%)$
M.E.F (Numérique)	22,02428	0
EC3 (Eurocode 3)	560,6	2445,37
L.R.F.D (Code Américain)	2702,46	12170,4
Référence [Mageirou et al, 2006]	21,9399	- 0,38
Présente étude proposée	21,94	- 0,382

Le tableau ci-dessus récapitule la valeur de la charge critique obtenue par les différentes méthodes. La méthode proposée donne la valeur de $P_{cr} = 21,94kN$, identique à celles données par la méthode des éléments finis ($22,02428kN$) ainsi que par les auteurs précités ($21,9399kN$) mais reste très éloignée de celles données par les codes EC3 ($560,6kN$) et LRFD ($2702,46kN$).

Afin d'étudier l'influence du type de structure, à nœuds d'assemblage semi rigides, sur la valeur de la charge critique, le portique de la figure (5.13) suivant est analysé dans les cas de nœuds fixes et de nœuds déplaçables.

5.4.3. Portique à un étage

On considère les deux portiques de la figure (5.13.a), à nœuds déplaçables et (5.13.b) à nœuds fixes. Les tableaux (5.5) et (5.6) donnent la valeur de la charge critique pour les deux cas de portique selon différentes méthodes utilisées.

Tableau 5.5: La valeur des charges critiques obtenues selon différentes méthodes (Mageirou et al, 2006) et présente étude : Cas du portique à nœuds déplaçables

Méthodes utilisées	$P_{cr} (kN)$	$\frac{P_{cr} - P_{cr,MEF}}{P_{cr,MEF}} (\%)$
M.E.F (Numérique)	14,77	0
EC3 (Eurocode 3)	898,78	5983,56
L.R.F.D(Code Américain)	3441,23	23192,60
Mageirou et al (2006)	14,77	0
Présente étude proposée	14,7	-0,474

La charge critique obtenue par la méthode proposée est de $P_{cr} = 14,7kN$, très voisine à celle donnée, $P_{cr} = 14,77kN$, donnée par (Mageirou and Gantes, 2006).

Cas particuliers :

1 – Pour des caractéristiques identiques pour la poutre et le poteau,

$$EI = 9.0699e + 4.kN.m^2 \text{ et } EA = 1272600kN, \text{ la charge critique sera : } P_{cr} = 14,8kN .$$

2 – Pour les caractéristiques $EI = 4,8573e4kN.m^2$ $EA = 896490kN$, cette charge sera égale à : $P_{cr} = 14,6kN$.

Tableau 5.6: La valeur des charges critiques obtenues selon différentes méthodes (Mageirou and Gantes, 2006) et la présente étude : Cas du portique à nœuds fixes

Méthodes utilisées	$P_{cr} (kN)$	$\frac{P_{cr} - P_{cr,MEF}}{P_{cr,MEF}} (\%)$
M.E.F (Numérique)	8980,67	0
EC3 (Eurocode 3)	9980,74	11,14
L.R.F.D(Code Américain)	11821,70	31,64
Mageirou and Gantes	8980,67	0
Présente étude proposée	8980,6	-0,0008

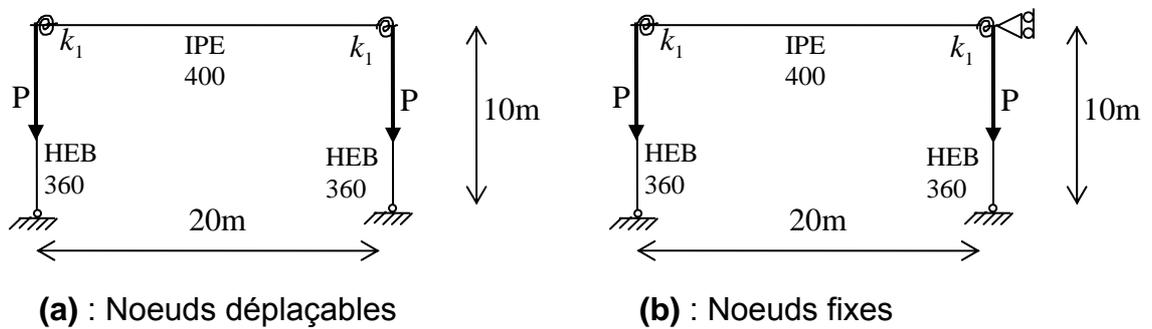


Figure 5.13: Portique à un étage (Mageirou and Gantes)

Remarque importante : Les résultats obtenus par la présente formulation analytique sont en nette concordance avec ceux obtenus par la référence précitée ainsi que la méthode des éléments finis ; alors que l'application des deux différents codes donne des valeurs très éloignées aussi bien pour les structures de portique à nœuds fixes ou à nœuds déplaçables. Par ailleurs, dans ce dernier cas, cette charge est la plus petite.

Comme on peut le constater, une analyse du second ordre de type $P - \Delta$ permet une évaluation simple et rationnelle de la distribution des efforts dans n'importe quel type de charpente de bâtiment.

Elle apporte une solution simple à chacun des nombreux problèmes inhérents à la méthode traditionnelle de dimensionnement qui fait intervenir le concept de longueur de flambement.

5.5. NON LINEARITE MATERIELLE (Plasticité)

Le portique ci-dessous, dont tous les éléments sont en IPE 330, est analysé pour différentes situations des nœuds d'assemblage afin de déterminer la charge de rupture plastique [lhaddoudène et al, 2008]. Les Moments plastiques des assemblages et des éléments sont respectivement égaux à $M_p^{ass} = 114,13 KNm$ et $M_p = 192,96 KNm$.

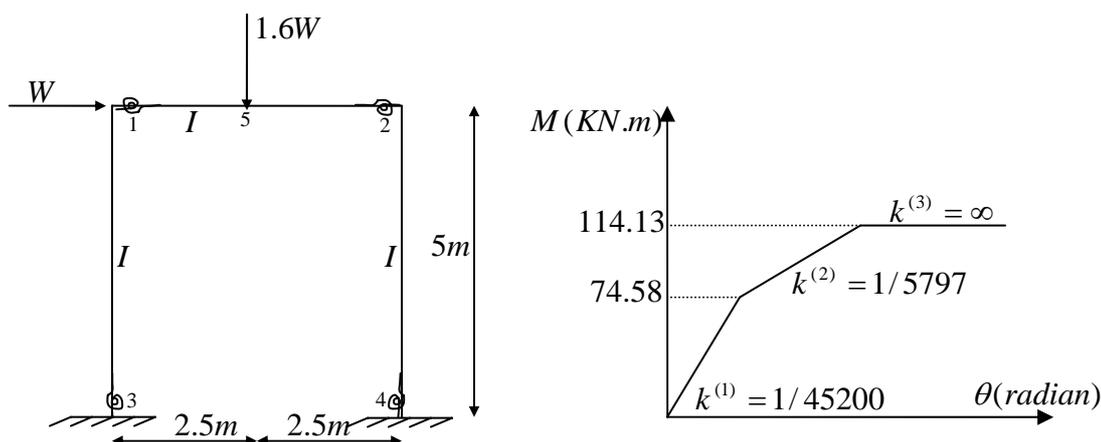


Figure 5.14 : Portique à nœuds semi rigides

La méthode pas à pas est utilisée [lhaddoudène, lhaddoudène et al] afin de déterminer la charge de rupture plastique, le déplacement d'étage ainsi que l'ordre d'apparition des rotules plastiques.

Différents cas associés sont alors considérés : 1) cas rigides, 2) semi rigides aux extrémités des poutres et enfin 3) aux extrémités des poutres et poteaux.

Méthode pas à pas :

Le processus de la méthode pas à pas, qui est utilisée, est divisé en certains nombres d'étapes, en fonction du modèle bilinéaire (ou tri linéaire) et de l'état de la structure tel que :

1 – On suppose que tous les assemblages travaillent dans la première portion caractéristique de l'assemblage et que les charges extérieures augmentent proportionnellement de zéro jusqu'à la valeur $\Delta W^{(1)}$; qui permettra à un assemblage

noté "j" d'atteindre le moment limite M_1^* (74,58kN.m) de la première portion de la figure (5.14). Les incréments des moments fléchissants $\Delta M^{(1)}$ correspondant à l'incrément de charge $\Delta W^{(1)}$ sont considérés comme les moments résiduels pour la deuxième étape.

2 – On suppose que l'assemblage "j" travaille dans la deuxième portion de la courbe caractéristique de l'assemblage alors que les autres se trouvent encore dans la première portion.

On continue à augmenter proportionnellement les charges à partir de zéro jusqu'à la valeur $\Delta W^{(2)}$, de telle sorte que le moment total, qui est égal à la somme des incréments de moments de deux étapes dans un autre assemblage, atteigne le moment limite M_1^* (74,58kN.m), sur la courbe de comportement) ou que celui de l'assemblage "j" atteigne le moment limite M_2^* (113,14kN.m), sur la courbe de comportement) de la seconde portion.

Le processus de la méthode pas à pas s'effectue de cette façon jusqu'à ce que la somme des incréments de charges soit égale à la charge appliquée à la structure:

$$W = \sum_i^n \Delta W^{(i)}$$

La charge de rupture plastique est égale à la somme de ses incréments, à toutes les étapes:

$$W_p = \sum_1 \Delta W^{(i)}$$

et le déplacement horizontal au sommet des poteaux avant la rupture plastique est de :

$$u_2 = \sum_1 \Delta u_2^{(i)}$$

Le programme écrit en Matlab, permet d'avoir les valeurs des moments fléchissants dans les sections critiques et de suivre pas à pas l'incrément de charge $\Delta W^{(i)}$, ceci est donné par le tableau suivant :

Tableau 5.7 : Les moments fléchissants dans les sections critiques

$i^{ème} \text{ étape}$	$\Delta W_1^{(i)}$	$\Delta M_1^{(i)}$	$\Delta M_2^{(i)}$	$\Delta M_3^{(i)}$	$\Delta M_4^{(i)}$	$\Delta M_5^{(i)}$	$\Delta u_2^{(i)}$
1	44.716	23.762	-74.58	-53.050	72.181	64.020	0.0197
2	1.393	0.952	-1.375	-2.240	2.399	2.575	0.0008
3	9.044	9.333	-9.388	-19.290	7.208	18.115	0.0071
4	21.313	28.879	-28.787	-24.458	24.443	46.670	0.0245
5	5.556	10.540	0.0	-9.401	8.999	16.383	0.0095
6	0.408	1.114	0.0	-0.928	0.0	1.373	0.0009
7	1.621	3.340	0.0	-4.763	0.0	4.912	0.0051
8	7.242	36.210	0.0	0.0	0.0	32.589	0.0281
Σ	91.293	114.13	-114.13	-114.13	114.13	182.637	0.0957

Ce qui permet de donner l'ordre d'apparition des rotules plastiques suivant :

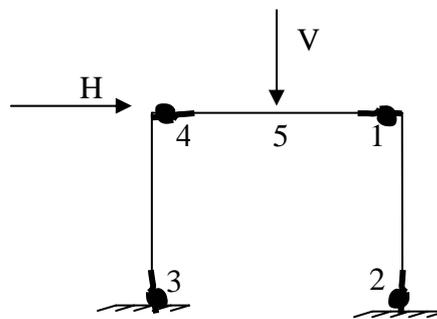


Figure 5.15: Quatre nœuds semi rigides, ordre d'apparition des rotules plastiques

5.6. COMPARAISONS DE PORTIQUES AVEC DIFFERENTES FLEXIBILITES

Pour les cas de nœuds d'assemblage aux extrémités des poutres puis des poutres et poteaux, l'ordre d'apparition des rotules plastiques est donné par la figure (5.16) ci-dessous.

La valeur de la charge de rupture ainsi que le déplacement correspondant à chaque cas sont données par le tableau (5.8) suivant qui résume les résultats obtenus.

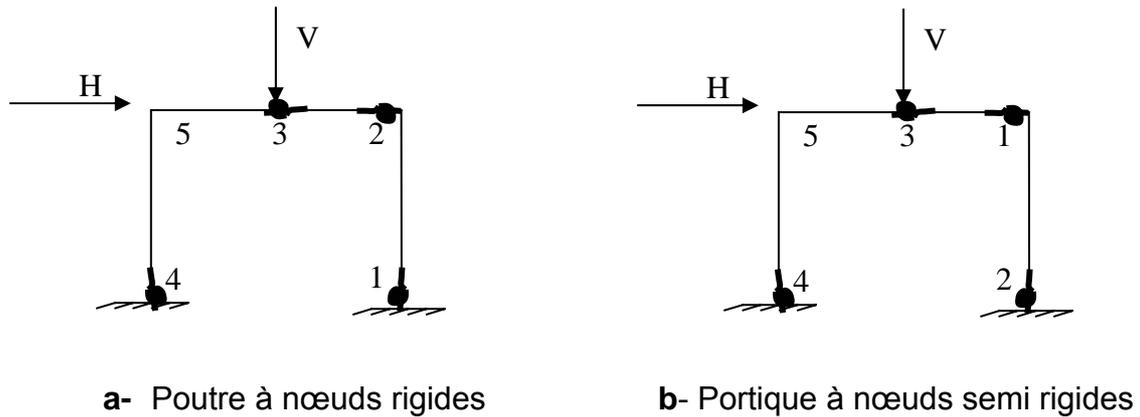


Figure 5.16 : Ordre d'apparition des rotules plastiques

La vérification est faite par utilisation de la méthode fondamentale de l'analyse plastique en se basant sur les théorèmes statique et cinématique.

En effet, la borne supérieure de la charge de rupture plastique dans le cas d'un mécanisme de poutre donne une charge $W_p = 114,13kN$ alors que le mécanisme de poteau la valeur $W_p = 91,304kN$. La charge de ruine sera alors, la plus petite des ces deux valeurs.

Tableau 5.8: Comparaisons de résultats [lhaddoudène1995, lhaddoudène et al, 2008]

Cas étudiés	Semi rigidité: Poutre et poteau	Semi rigidité : Poutre	Rigide
Charge de ruine (kN)	91,293	111,122	128,64
Vérification	91,304	111,122	128,64
Déplacement horizontal (cm)	9,57	5,56	5,42

REMARQUES :

Certaines remarques peuvent être faites concernant l'influence de la semi rigidité sur les structures puis de la méthode pas à pas, utilisée.

- 1 - La semi-rigidité des noeuds d'assemblage influe sur l'ordre d'apparition des rotules plastiques comme le montre les figures de comparaisons ci-dessus. Le mécanisme de ruine s'en trouve changé et la charge correspondante diminue.
- 2 - Sous les mêmes charges appliquées, les déplacements horizontaux du portique semi- rigide sont plus grands que ceux du portique à noeuds rigides.

3 - La méthode pas à pas utilisée, présente plusieurs avantages dans la mesure où elle permet d'avoir, en plus de la charge de rupture, le déplacement d'étage de la structure.

5.7. CONCLUSIONS

La flexibilité des assemblages est bien connue pour être une source majeure de la non linéarité dans les structures métalliques. Si cette flexibilité n'est pas prise en compte, elle sera source d'erreurs et de précisions dans le dimensionnement des structures.

Les différents avantages que peuvent procurer les assemblages semi rigides sur les structures ont faits l'objet de recherches poussées. La modélisation tri-linéaire du comportement des nœuds d'assemblage a été discutée et nous avons montré que son utilisation conduit à des résultats sécuritaires et suffisamment précis à des fins pratiques.

Par utilisation d'expressions analytiques pour les structures métalliques à nœuds d'assemblages semi rigides soumises à des charges axiales, tous les éléments de la matrice de rigidité de l'élément barre ont été déterminés.

L'utilisation de la méthode proposée a été validée par des exemples publiés, ce qui lui confère le caractère simplicité, justesse et précision comparée aux différentes procédures de calcul suggérées des codes.

Outil disponible pour l'ingénierie, cette approche doit être considérée comme pouvant être utilisée en parallèle avec les méthodes classiques de dimensionnement et elle est en mesure de conforter les décisions des concepteurs.

Ici, la responsabilité d'opter a priori pour une méthode d'analyse – élastique ou plastique – et de contrôler a posteriori si les conditions requises pour la mise en œuvre de la méthode choisie sont bien satisfaites est très importante pour le concepteur.

L'approche élastique postule une ruine par perte de stabilité des poteaux alors que les poutres et nœuds d'assemblage sont toujours élastiques, au sens de l'idéalisation élasto-plastique qui a été fait pour leur comportement.

A l'inverse, l'approche plastique suppose une ruine par formation du premier mécanisme de poutre, alors que les poteaux restent stables.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Aristizabal-Ochoa JD. Slope-deflection equations for stability and second-order analysis of Timoshenko beam–column structures with semi-rigid connections. *Engineering Structures*, 2008; 30 : 2517-2527.

Arbabi, F. Drift of flexibly connected frames. *Computers & Structures*, 1982; 15(2) :103-108.

Al-Sadder SZ. Exact expressions for stability functions of a general non-prismatic beam–column member. *Journal of Constructional Steel Research*, 2004 ; 60 :1561-1584.

Al-Mashary F, Chen WF. Elastic Second-Order Analysis for Frame Design. *Journal of Constructional Steel Research*, 1990; 15 : 303-322.

Ashwini, K. Stability theory of structures. *Tata Mc Graw-Hill Publishing Company Limited*, 1985.

Atamaz Sibai W, Frey F. New semi-rigid joint elements for non-linear analysis of flexibly connected frames. *Journal of Constructional Steel Research*, 1993 ; 25:185-199.

Abdel-Jaber M, Beal R.G, Godley MHR. Numerical study on semi-rigid racking frames under sway. *Computer & Structures*, 2005; 83 : 2463-2475.

Ackroyd MH, Gerstle KH. Elastic stability of flexibly connected frames. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1983; 109 (1) : 241-245.

Aristizabal-Ochoa JD. Stability and second order analysis of frames with semi rigid connections under uniformly distributed axial loads. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 2001;127(11) : 1306-1315.

Aristizabal-Ochoa JD. Story stability of braced, partially braced, and unbraced frames : Classical approach. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1997; 123(6) : 799-807.

Aristizabal-Ochoa JD. First-and second-order stiffness matrices and load vector of beam-columns with semi-rigid connections. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1997; 123(5) :669-678.

American Institute of Steel Construction, AISC. Specification for structural steel buildings. ANSI/AISC 360-05. An American National Standard. March 2005.

Bijlaard F. Eurocode 3, a basis for further development in joint design. *Journal of Constructional Steel Research*, 2006 ; 62 : 1060-1067.

Beg D, Zupancic E, Vayas I. On the rotation capacity of moment connections. *Journal of Constructional Steel Research*, 2004 ; 60 : 601-620.

Boissonnade N, Jaspart JP, Muzeau JP, Villette M. Improvement of the interaction formulae for beam columns in Eurocode 3. *Computers&Structures*, 2002; 80:2375-85.

Bazant ZP. Structural stability. *International Journal of solids and Structures*, 2000; 37 : 55-67.

Bazant ZP, Cedolin L. Stability of structures : Elastic, inelastic, fracture and damage theories. *Dover Edition*, 2003.

Bjorhovde R, Colson A, Brozzetti J. Classification system for beam-to-column connections. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1990; 116(11) : 3059-3076.

Bayo E, Cabrero JM, Gil B. An effective component-based method to model semi-rigid connections for the global analysis of steel and composite structures. *Engineering Structures*, 2006; 28 : 97-108.

Chan SL. Non-linear behavior and design of steel structures. *Journal of Constructional Steel Research*, 2001 ; 57 : 1217-1231.

Chan SL, Chui PPT. Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections. *Elsevier Science Ltd*, 2000.

Chen WF, Lui EM. Structural stability :theory and implementation. *Elsevier Science Publishing Co., Inc*, 1987.

Chen WF, Lui EM. Principles of structural design. *CRC Press, Taylor & Francis Group*, 2006.

Chisala, ML. Modelling $M - \phi$ curves for standard beam-to-column connections. *Engineering Structures*, 1999; 21: 1066-1075.

Chen WF, Goto Y, Liew JYR. Stability design of semi-rigid frames. *John Wiley*, 1996.

Coates RC, Coutie MG, Kong FK. Structural analysis. *Third Edition, V.N.R (UK) Co.Ltd.*; [Chapitre 9], 1988.

Chen WF. Design of beam-columns in steel frames in the United States. *Thin-Walled Structures*, 1991 ; 13 : 1-83.

Cheong-Siat M. The K -factor paradox. *Journal of Structural Engineering*, ACSE, 1986; 112(ST8).

Cabrero JM, Bayo E. Development of practical design methods for steel structures with semi-rigid connections. *Engineering Structures*, 2005; 27: 1125-1137.

Cunningham R. Some aspects of semi-rigid connections in structural steelwork. *The Structural Engineer*, 1990; 68(5): 83-92.

Chen WF, Atsuta T. Theory of beam-columns. In: In-plane behavior and design, Vol.1. USA, *McGraw-Hill*, 1976.

Cerfontaine F. Etude de l'interaction entre moment de flexion et effort normal dans les assemblages boulonnés . *Thèse Docteur en Sciences Appliquées*. Université de Liège. 2004, Belgique.

Davison JB, Kirby PA, Nethercot DA. Rotational stiffness characteristics of steel beam-to-column connections. *Journal of Constructional Steel Research*, 1987; 8: 17-54.

Duan L, Chen WF. Effective length factor for columns in braced frames. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1988; 114(ST10).

Duan L, Chen WF. Effective length factor for columns in unbraced frames. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1989; 115(ST1).

Da Silva LS, Coelho AMG. An analytical evaluation of the response of steel joints under bending and axial force. *Computers & Structures*, 2001; 79 : 873-881.

Dhillon BS, O'Malley JW. Interactive design of semi rigid steel frames. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1999; 125(5) : 556-564.

Ekhande Shataram G, Selvappalam Mohan, Madugula Murty KS. Stability functions for three-dimensional beam-columns. *Journal of Structural Engineering*, 1989; 115(2): 467-479.

Eurocode 3. Design of steel structures. British Standard BS EN 1993-1-8:2005. Part 1-8: Design of joints, 2005.

Ermopoulos JC. Equivalent buckling length of non uniform members. *Journal of Constructional Steel Research*, 1997; 42 : 141-158.

Essa HS. Stability of columns in unbraced frames. *Journal of Structural Engineering*, 1997; 123(7): 952-957.

Finley A.Charney, Rakesh Pathak. Sources of elastic deformation in steel frame and framed tube structures :Part 1 : Simplified subassemblage models. *Journal of Constructional Steel Research*, 2008; 64: 87-100.

Frye J, Morris, GA. Analysis of flexibly connected steel frames. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 1975; 2(3): 280-291.

Gerstle KH. Effect of connections on frames". *Journal of Constructional Steel Research*, 1988; 10 : 241-267.

Ghali A, Neville AM, Brown TG. Structural analysis : A unified classical and matrix approach. *Spon Press, 5th Edition*, 2006.

Gizejowski MA, Barszcz AM, Branicki CJ, Uzoegbo HC. Review of analysis methods for inelastic design of steel semi-continuous frames. *Journal of Constructional Steel Research*, 2006; 62 : 81-92.

Goto Y, Suzuki S, Chen WF. Stability behaviour of semi-rigid sway frames. *Engineering Structures*, 1993; 15(3) : 209-219.

Goto Y, Chen WF. On the computer-based design analysis for the flexibly jointed frames. *Journal of Constructional Steel Research*, 1987; 8 : 203-231.

Girgin K, Ozmen G, Orakdogen E. Buckling lengths for irregular frame columns. *Journal of Constructional Steel Research*, 2006; 62 : 605-613.

Gantes Charis J, Mageirou Georgios E. Improved stiffness distribution factors for evaluation of effective buckling lengths in multi-story sway frames. *Engineering Structures*, 2005; 27:1113-1124.

Girhammar Ulf Arne, Pan Dan H. Exact static analysis of partially composite beams and beam-columns. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2007;49:239-255.

Galambos TV. Guide to design criteria for metal structures, chapter 3, 4th Ed, Editor, John Wiley and Sons, N.Y.1988.

Horne MR. Plastic theory of structures. Second Edition, Pergamon Press, 1979.

Hadianfard MA, Razani R. Effects of semi rigid behavior of connections in the reliability of steel frames. *Structural Safety*, 2003; 25:123-138.

Hallesland J. Mechanics and effective lengths of columns with positive and negative end restraints. *Engineering Structures*, 2007; 29 : 3464-3474.

Hallesland J. Approximate effective length factors for columns with positive and negative end restraints. *Research Report in Mechanics*, 1994; 94 (1) : 1-32.

Ihaddoudène ANT, Saidani M, Chemrouk M. Mechanical model for the analysis of steel frames with semi rigid joints. *Journal of Constructional Steel Research* (Article in Press, doi:10.1016/j.jcsr.2008.08.010, à paraître), 2008.

Ihaddoudène ANT, Saidani M, Chemrouk M. Modelling of steel frames with semi rigid joints. *International Journal of Applied Engineering Research*, July 2008, 3(7): 955-967.

Ihaddoudène ANT, Chemrouk M. Influence of semi rigid joints on the behaviour of steel beam-column structures. *Proceedings of the 2004 International Conference on computational & experimental engineering & science*, 26-29 July 2004; Madeira, Portugal.

Ihaddoudène ANT. Analyse non-linéaire des structures métalliques à assemblages semi-rigides. *Thèse de Magister*, Institut de Génie Civil, USTHB, 1995.

Jaspart JP. Extending of the Merchant-Rankine formula for the assessment of the ultimate load of frames with semi-rigid joints. *Journal of Constructional Steel Research*, 1988 ; 11 : 283-312.

Jaspart JP, Maquoi R. Guidelines for the design of braced frames with semi-rigid connections. *Journal of Constructional Steel Research*, 1990; 16 : 319-328.

Jaspart JP, Démonceau JF. European design recommendations for simple joints in steel structures. *Journal of Constructional Steel Research*, 2008 ; 64 : 822-832.

Jaspart, JP. Etude de la semi-rigidité des noeuds poutre-colonne et son influence sur la résistance et la stabilité des ossatures en acier. Thèse de Doctorat, MSM, Université de Liège, juin, 1991.

Jaspart JP. Contributions to recent advances in the field of steel joints. Column bases and further configurations for beam-to-column joints and beam splices. *Thèse d'Agrégé de l'enseignement supérieur.* Université de Liège, Belgique, 1997.

Jones SW, Kirby PA, Nethercot DA. The analysis of frames with semi-rigid connections: A state-of-the-art report. *Journal of Constructional Steel Research*, 1983; 3(2) : 2-13.

Kirby PA, Nathercot DA. Design for structural stability. *Grosby Lockwood Staples, Granada Publishing*; [Chapitre 2],1979.

King WS, Chen WF. LRFD analysis for semi-rigid frame design. *Engineering Journal*, ASCE, 1993; fourth quater: 130-140.

Chen WF, Kishi, N. Semi-rigid steel beam to column connections : Data base and modeling. *Journal of Structural Engineering*, 1989;115(1):105-119.

Kishi N, Chen WF, Goto Y, Komuro M. Effective length factor of columns in flexibly jointed and braced frames. *Journal of Constructional Steel Research*, 1998 ; 47 : 93-118.

Kestutis Urbonas, Alfonsas Daniunas. Behaviour of semi-rigid steel beam-to-beam joints under bending and axial forces. *Journal of Constructional Steel Research*, 2006; 62, : 1244-1249.

Kukreti AR, Zhou FF. Eight-bolt end plate connection and its influence on frame behavior. *Engineering Structures*, 2006; 28 : 1483-1493.

Kemp AR. A mixed flexibility approach for simplifying elastic and inelastic structural analysis of frames. *Journal of Constructional Steel Research*, 2002; 58 : 1297-1313.

Kim SE, Choi SH. Practical second-order inelastic analysis for three-dimensional steel frames subjected to distributed load. *Thin-Walled Structures*, 2005; 43 : 135-160.

Kim SE, Chen WF. Practical advanced analysis for unbraced steel frame analysis. *Journal of Structural Engineering*, 1996; 122(11): 1259-1265.

Kim SE, Chen WF. Practical advanced analysis for braced steel frame design. *Journal of Structural Engineering*, 1996; 122(11): 1266-1273.

Livesley RK, Chandler DB. Stability functions for structural framework. *Manchester University Press*, 1956.

Lothers, JE. Advanced design in structural steel. Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs Chapter 8, NewYork, 1960.

Lau SM, Kirby PA, Davison JB. Semi-rigid design of partially restrained columns in non-sway steel frames. *Journal of Constructional Steel Research*, 1999; 50 : 305-328.

Lui EM, Chen WF. Analysis and behaviour of flexibly-jointed frames. *Engineering Structures*, 1986; 8:107-118.

Lui EM, Chen WF. Effects of joint flexibility on the behavior of steel frames. *Computers & Structures*, 1987; 26(5) :719-723.

Lui EM, Chen WF. Steel frame analysis with flexible joints. *Journal of Constructional Steel Research*, 1987; 8 : 161-202.

Lee Sang-Sup, Moon Tae Sup. Moment-rotation model of semi rigid connections with angles. *Engineering Structures*, 2002; 24 : 227-237.

McGuire W, Gallagher RH, Ziemian RD. Matrix structural analysis. 2nd Edition. NewYork, Wiley, 2000.

Moncarz PD, Gerstle KH. Steel frames with nonlinear connections. *Journal of Structural Division*, ASCE, 1981; 107(ST8) : 1427-1441.

Mageirou Georgios E, Gantes Charis J. Buckling strength of multi-story sway, non-sway and partially-sway frames with semi-rigid connections. *Journal of Constructional Steel Research*, 2006; 62 : 893-905.

Mohamadi-shooreh MR, Mofid M. Parametric analyses on the initial stiffness of flush end-plate splice connections using FEM. *Journal of Constructional Steel Research*, 2008; 64 : 1129 -1141.

Nethercot DA, Zandonini R. Methods of prediction of joint behaviour: beam-to-column connections. *Structural Connections and Stability and Strength*, Edition, Narayanan, Elsevier applied sciences, 1989; 23-62.

Nethercot, DA. Utilisation of experimentally obtained connection data in assessing the performance of steel frames. *Proceedings of the ASCE convention, Detroit. Connection Flexibility and Steel Frames*, 1985; edited by Chen, WF.

Nethercot DA. Frame structures: global performance, static and stability behaviour. General report. *Journal of Constructional Steel Research*, 2000; 55 : 109-124.

Pucinotti, R. Top-and-seat and web angle connections: prediction via mechanical model. *Journal of Constructional Steel Research*, 2001; 57: 661-694.

Raftoyiannis Ioannis G. The effect of semi-rigid joints and an elastic bracing system on the buckling load of simple rectangular steel frames. *Journal of Constructional Steel Research*, 2005; 61 : 1205-1225.

Richard Liew JY, White DW, Chen WF. Beam-column design in steel frameworks insights on current methods and trends. *Journal of Constructional Steel Research*, 1991;18: 269-308.

Saidani M. The effect of eccentricity connection on the distribution of axial force and bending moments in RHS lattice girders. *Journal of Constructional Steel Research*, 1998; 47(3): 211-221.

Samuelsson A, Zienkiewicz OD. History of the stiffness method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006; 67: 149-57.

Scholz H. Approximate P-delta methods for sway frames with semi-rigid connections. *Journal of Constructional Steel Research*, 1990;15 : 215-231.

Simoès da Silva L, Girao Coelho AM. An analytical evaluation of the response of steel joints under bending and axial force. *Computers&Structures*, 2001; 79 : 873-881.

Simoès da Silva, L. Towards a consistent design approach for steel joints under generalized loading. *Journal of Constructional Steel Research*, 2008; 68 : 1059-1075.

Seculovic M, Salatic R. Nonlinear analysis of frames with flexible connections. *Computers & Structures*, 2001; 79: 1097-1107.

Saffari H, Rahgozar R, Yahanshahi R. An efficient method for computation of effective length factor of columns in a steel gabled frame with tapered members, *Journal of Constructional Steel Research*, 2008; 64 : 400-406.

Salmon CG, Johnston JE. Steel structures: Design and behaviour. 4th ed. *Harper Collins College Publishers*; [Chapitre 14], 1996.

Shi Y, Shi G, Wang Y. Experimental and theoretical analysis of the moment-rotation behaviour of stiffened extended end-plate connections. *Journal of Constructional Steel Research*, 2007 ; 63 : 1279-1293.

Sang-Sup L, Tae-Sup M. Moment-rotation model of semi rigid connections with angles, *Engineering Structures*, 2002, **24**, 227-237.

Singh H, Singh GM. Non-linear analysis of frames. *Computers & Structures*, 1992; 44(6) : 1377-1379.

Stuart SJ Moy. Plastic methods for steel and concrete structure. University of Southampton, Department of Civil Engineering, Mac-Millan Publishers LTD, 1985.

Simitises GJ, Hodges DH. Fundamentals of structural stability. *Elsevier Inc*, 2006.

Tong GS, Wang JP. Column effective lengths considering inter-story and inter-column interactions in sway-permitted frames. *Journal of Constructional Steel Research*, 2006; 62:413-423.

Tin-Loi F, Vimonsatit V. Shakedown of frames with semi-rigid connections. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1993; 119(6) : 1694-1711.

Tong GS, Ji Y. Buckling of frames braced in flexural bracing. *Journal of Constructional Steel Research*, 2007; 63 : 229-236.

Timoshenko SP, Gere JM. Théorie de la stabilité élastique. 2^{ième} Edition, Dunod, Paris, 1966.

Vandepitte D. Non iterative analysis of frames including the $P - \Delta$ effect. *Journal of Constructional Steel Research*, 1982; 2 : 3-10.

Van Keulen DC, Nethercot DA, Snijder HH, Bakker MCM. Frame analysis incorporating semi-rigid joint action : Applicability of the half initial Secant stiffness approach. *Journal of Constructional Steel Research*, 2003; 59 : 1083-1100.

Vu Thanh Hai. Analyse plastique des structures. Cours de Post-Graduation, Institut de Génie-Civil, année 1989-1990.

White DW, Hajjar JF. Application of second-order elastic analysis in LRFD: research to practice. *Engineering Journal*, AISC, 1991; Fourth quarter : 133-148.

Wang CY. Optimum trapezoidal frame with rigid members and flexible joints. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2007; 42 : 760-764.

Wood, RH. Effective lengths of columns in multi-storey buildings, *The structural Engineer*, 1974; (52), Part1: 235-244, Part 2 : 295-302, Part 3 : 341-346.

Wang JP, 2006. Column effective lengths considering inter-story and inter-column interactions in sway-permitted frames. *Journal of Constructional Steel Research*, 2006 ; 62 : 413-423.

Wong YL, Yu T, Chan SL. A simplified analytical method for unbraced composite frames with semi-rigid connections. *Journal of Constructional Steel Research*, 2007;63 : 961-969.

White D, Hajjar J. Stability of steel frames without consideration of effective length. *Engineering Structures*, 1997;19 : 797-810.

Wang Jing-Feng, Li Guo-Qiang. A practical design method for semi-rigid composite frame under vertical loads. *Journal of Constructional Steel Research*, 2008; 64 : 176-189.

Wang CM, Kitipornchai S, Liew KM. Research on elastic buckling of columns, beams and plates:focussing on formulas and design charts. *Journal of Constructional Steel Research*, 1993; 26 : 211-230.

Wang CM, Wang CY, Reddy JN. Exact solutions for buckling of structural members. *CRC Press, series in Computational Mechanics and Applied Analysis*, 2005.

Xu L, Liu Y, Grierson DE. Non-linear analysis fo steel frameworks through direct modification of member stiffness properties. *Advances in Engineering Software*, 2005; 36 : 312-324.

Xu L, Liu Y. Story stability of semi-braced steel frames. *Journal of Constructional Steel Research*, 2002; 58 : 467-491.

Yang JG, Lee GY. Analytical model for the preliminary design of a single-storey multi-bay steel frame under horizontal and vertical loads. *Journal of Constructional Steel Research*, 2007; 63 : 1091-1101.

Yongjiu, S, Gang, S. and Yuanqing, W. Experimental and theoretical analysis of the moment-rotation behaviour of stiffened extended end-plate connections, *Journal of Constructional Steel Research*, 2007; 63, 1279-1293.

Yang YB, McGuire W. Stiffness matrix for geometric nonlinear analysis. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1985; 112(4) : 853-877.

Yee YL, Melchers RE. Moment-rotation curves for bolted connections. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1986; 112(ST3) : 615-635.

Yu CH, Shanmugam NE. Stability of frames with semi rigid joints. *Computers & Structures*, 1986; 23(5) :639-648.

Zoetemeijer, P. Summary of the research on bolted beam-to-column connections, Stevin Laboratory Report 25-6-90, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands; 1990.

ANNEXES

CAS PARTICULIERS DU FLAMBEMENT

ANNEXE A : RIGIDITE D'UN ELEMENT SUR DEUX APPUIS RIGIDES

A.1. ELEMENTS A EXTREMITES ARTICULE-ENCASTRE

A .1.1. Extrémité encastree subissant une rotation unitaire $\theta_i = 1$

Pour l'élément aux extrémités articulé-encastree, la solution de l'équation différentielle donne l'expression de la déformée telle que :

$$y(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - \frac{Hx}{\alpha^2 EI} \quad (\text{A.1})$$

En déterminant les constantes d'intégrations A et B correspondant aux cas considérés, on arrive à avoir la relation :

$$H = \frac{3\omega}{l} \phi_1(v) \quad (\text{A.1.a})$$

Où :

$$\phi_1(v) = \frac{v^2 \sin v}{3(\sin v - v \cos v)} = \frac{v^2 \tan v}{3(\tan v - v)} \quad \text{et} \quad v = \alpha l = l \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

$$\text{Ainsi le moment fléchissant : } M_i = Hl = 3\omega \phi_1(v) \quad (\text{A.1.b})$$

Cas particuliers :

Pour $v = 0$ (donc pour $N = 0$), $\phi_1(v) = 1$ on a : $M_i = 3\omega$ et $H = \frac{3\omega}{l}$

Quand le facteur $v > 0$ et donc $\phi_1(v) < 1$ les réactions à l'encastrement dues à $\theta_i = 1$, à l'extrémité encastree en tenant compte de l'influence de l'effort N (de compression) sont plus petites par rapport à celles quand cet effort est nul.

A.1.2. Extrémité encastree ayant un déplacement unitaire $\Delta_i = 1$

L'équation de la déformée sera telle que :

$$y = \frac{1}{\sin \alpha l} \left(1 + \frac{Hl}{\alpha^2 EI} \right) \sin \alpha x - \frac{Hx}{\alpha^2 EI} \quad (\text{A.2})$$

En déterminant les constantes d'intégrations A et B correspondant aux cas considérés, on arrive à avoir la relation des poussées latérales telles que :

$$H = \frac{w}{l^2} \cdot \frac{v^3 \cos v}{\sin v - v \cos v} = \frac{3w}{l^2} \eta_1(v) \quad (\text{A.3.a})$$

où

$$\eta_1(v) = \frac{v^3 \cos v}{\sin v - v \cos v} = \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)}$$

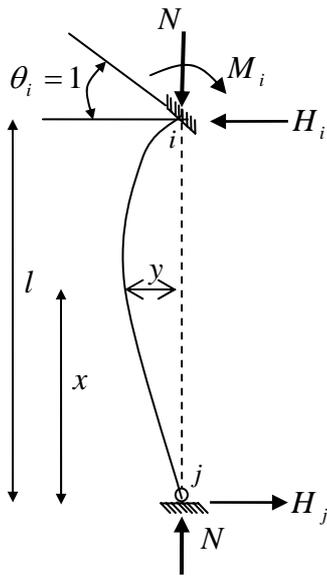
Le moment d'encastrement "i"

$$M_i = Hl + N = \frac{3w}{l} \eta_1(v) + \frac{v^2 w}{l} = \frac{3w}{l} \left(\eta_1(v) + \frac{v^2}{3} \right) \quad (\text{A.3.b})$$

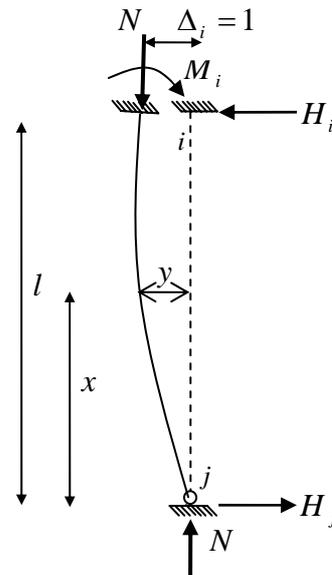
$$M_i = \frac{3w}{l} \phi_1(v) \quad (\text{A.3.c})$$

En remarquant que :

$$\eta_1(v) + \left(\frac{v^2}{3} \right) = \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)} + \frac{v^2}{3} = \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)} = \phi_1(v) \quad (\text{A.3.d})$$



a – Rotation unitaire $\theta_i = 1$



b – Translation unitaire $\Delta_i = 1$

Figure A.1: Extrémité encastree - articulé

Cas particuliers :

Pour $v = 0$ on aura

$$\phi_1(0) = 1 \text{ et } \eta_1(v) = 1$$

$$M_i = \frac{3w}{l} \quad \text{et} \quad H = \frac{3w}{l^2}$$

A.2. ELEMENT BI-ENCASTRE

A.2.1. Extrémité encastree en i subissant une rotation unitaire $\theta_i = 1$

$$H = \frac{w}{l} \frac{v^2 \sin v}{2 \sin v - v \cos v - v} = \frac{6w}{l} \eta_3(v) \quad (\text{A.4.a})$$

$$M_i = 4w \phi_2(v) \quad (\text{A.4.b})$$

$$M_j = \frac{Hl(v - \sin v)}{v(1 - \cos v)} = 2w \phi_3(v) \quad (\text{A.4.c})$$

Dans lesquelles :

$$\eta_3(v) = \frac{v^2 \sin v}{6(2 \sin v - v \cos v - v)} \quad (\text{A.5.a})$$

$$\phi_2(v) = \frac{v \sin v (\sin v - v \cos v)}{4(1 - \cos v)(2 \sin v - v \cos v - v)} \quad (\text{A.5.b})$$

$$\phi_3(v) = \frac{v \sin v (v - \sin v)}{2(1 - \cos v)(2 \sin v - v \cos v - v)} \quad (\text{A.5.c})$$

A.2.2. Extrémité encastree en i subissant une translation unitaire $\Delta_i = 1$

$$H = \frac{12w}{l^2} \eta_2(v) \quad (\text{A.6.a})$$

$$M_j = M_i = \frac{6w}{l} \phi_4(v) \quad (\text{A.6.b})$$

Avec

$$\eta_2(v) = \frac{v^3(1 + \cos v)}{12(2 \sin v - v \cos v - v)} \quad (\text{A.7.a})$$

$$\phi_4(v) = \frac{v^2 \sin v}{6(2 \sin v - v \cos v - v)} \quad (\text{A.7.b})$$

ANNEXE B : RIGIDITE DES ELEMENTS A APPUIS ELASTIQUES LINEAIRES

B.1. ELEMENT SEMI RIGIDE EN i , ARTICULE EN j :

B.1.1. Elément à une rotation unitaire $\theta_i = 1$

$$H = \frac{\omega}{l} \zeta_1(v) \quad (\text{B.1.a})$$

$$M_i = Hl = \omega \zeta_1(v) \quad (\text{B.1.b})$$

Avec :

$$\zeta_1(v) = \frac{v^2 \sin v}{\sin v - v \cos v + k_1 v^2 \omega \sin v} = \frac{v^2 \tan v}{\operatorname{tg} v - v + k_1 v^2 \omega \tan v} \quad (\text{B.2.a})$$

Cas particuliers :

Pour $k_1 = 0$

$$\zeta_1(v) = \frac{v^2 \sin v}{\sin v - v \cos v} = \frac{v^2 \tan v}{\tan v - v} \quad (\text{B.2.b})$$

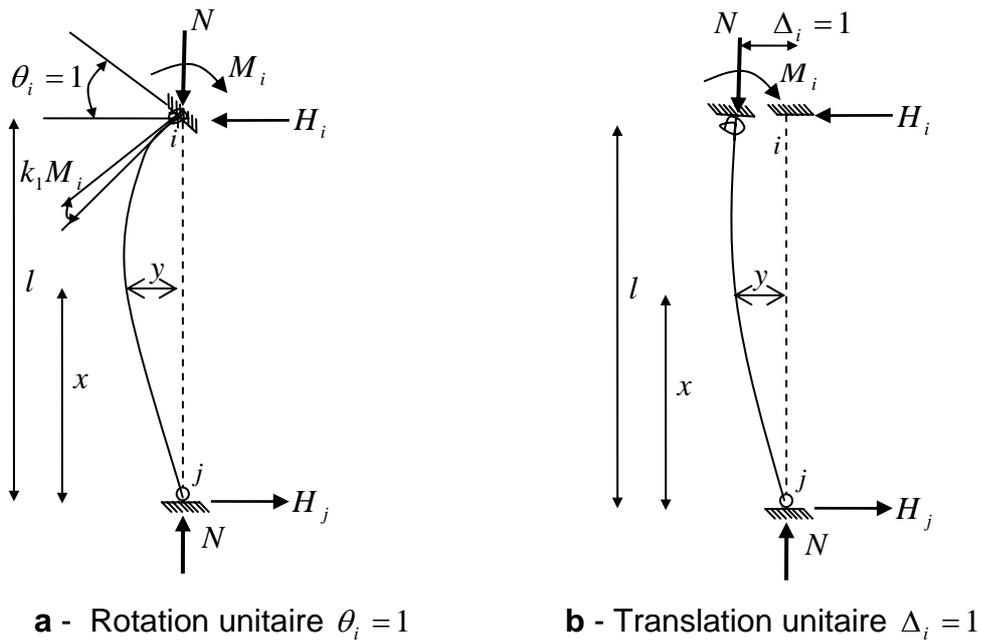


Figure B.1: Elément semi rigide -articulé

B.1.2. Elément à un déplacement unitaire $\Delta_i = 1$

$$H = \frac{\omega}{l^2} \cdot \frac{v^3 (\cos v - k_1 v \omega \sin v)}{(\sin v - v \cos v + k_1 v^2 \omega \sin v)} = \frac{\omega}{l^2} \zeta_2(v) \quad (\text{B.3.a})$$

$$M_i = Hl + N = \frac{\omega}{l} (\zeta_2(v) + v^2) = \frac{\omega}{l} \phi_4(v) \quad (\text{B.3.b})$$

Où :

$$\zeta_2(v) = \frac{v^3 (\cos v - k_1 v \omega \sin v)}{(\sin v - v \cos v + k_1 v^2 \omega \sin v)} = \frac{v^3 (1 - k_1 v \omega \tan v)}{\tan v - v + k_1 v^2 \omega \tan v} \quad (\text{B.4.a})$$

$$\phi_4(v) = \frac{v^2 \sin v}{\sin v - v \cos v + k_1 v^2 \omega \sin v} = \frac{v^2 \tan v}{\tan v - v - k_1 v^2 \omega \tan v} \quad (\text{B.4.b})$$

Cas particuliers :

$$1- \quad k_1 = 0 \quad \zeta_2(v) = \frac{v^3 \cos v}{\sin v - v \cos v} = \frac{v^2}{\tan v - v} \quad (\text{B.5.a})$$

$$\phi_4(v) = \frac{v^2 \sin v}{\sin v - v \cos v} = \frac{v^2 \tan v}{\tan v - v} \quad (\text{B.5.b})$$

$$2 - k_1 = \infty \quad \zeta_2(v) = -v^2 \quad (\text{B.5.c})$$

$$\phi_4(v) = 0 \quad (\text{B.5.d})$$

B.2. ELEMENT SEMI RIGIDE EN i , ENCASTRE EN j

B.2.1. Elément à une rotation unitaire $\theta_i = 1$

$$H = \frac{\omega}{l} \zeta_1(v) \quad (\text{B.6.a})$$

$$M_j = \omega \phi_1(v) \quad (\text{B.6.b})$$

$$M_i = \omega \phi_2(v) \quad (\text{B.6.c})$$

où :

$$\zeta_1(v) = \frac{v^2 \sin v (1 - \cos v)}{(1 - \cos v)(\sin v - v \cos v + k_1 v^2 \omega \sin v) + (v - \sin v)(1 - \cos v + k_1 v \omega \sin v)} \quad (\text{B.7.a})$$

$$\phi_1(v) = \frac{v \sin v (v - \sin v)}{(1 - \cos v)(\sin v - v \cos v + k_1 v^2 \omega \sin v) + (\sin v - v)(1 - \cos v + k_1 v \omega \sin v)} \quad (\text{B.7.b})$$

$$\phi_2(v) = \zeta_1(v) - \phi_1(v) = \frac{v \sin v (\sin v - v \cos v)}{(1 - \cos v)(\sin v - v \cos v + k_1 v^2 \omega \sin v) + (\sin v - v)(1 - \cos v + k_1 v \omega \sin v)} \quad (\text{B.7.c})$$

Cas particuliers :

Pour $k_1 = 0$

$$\zeta_1(v) = \frac{v^2 \sin v}{2 \sin v - v \cos v - v} \quad (\text{B.8.a})$$

$$\phi_1(v) = \frac{v \sin v (v - \sin v)}{(1 - \cos v)(2 \sin v - v \cos v - v)} \quad (\text{B.8.b})$$

$$\phi_2(v) = \frac{v \sin v (\sin v - v \cos v)}{(1 - \cos v)(2 \sin v - v \cos v - v)} \quad (\text{B.8.c})$$

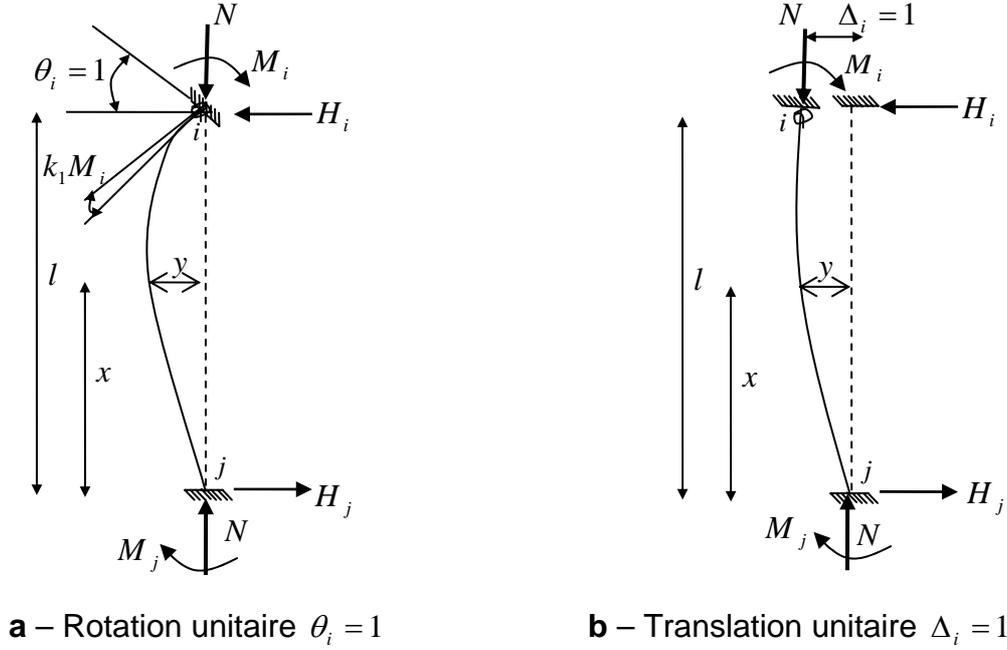


Figure B.2: Elément semi rigide – encastré

2- b : Elément à une rotation unitaire $\Delta_i = 1$

$$H = \frac{\omega}{l^2} \zeta_2(v)$$

$$M_j = \frac{\omega}{l} \phi_3(v) \quad (\text{B.9})$$

$$M_i = \frac{\omega}{l} \phi_4(v)$$

Avec :

$$\zeta_2(v) = \frac{v^3 \sin v (\sin v + k_1 v \omega \cos v)}{(\sin v - v)(1 - \cos v) + (\sin v - v \cos v)(1 - \cos v + k_1 v \omega \sin v)} \quad (\text{B.10.a})$$

$$\phi_3(v) = \frac{v^2 \sin v (1 - \cos v + k_1 v \omega \cos v)}{(\sin v - v)(1 - \cos v) + (\sin v - v \cos v)(1 - \cos v + k_1 v \omega \sin v)} \quad (\text{B.10.b})$$

$$\phi_4(v) = \frac{v^2 \sin v (1 - \cos v)}{(\sin v - v)(1 - \cos v) + (\sin v - v \cos v)(1 - \cos v + k_1 v \omega \sin v)} \quad (\text{B.10.c})$$