

N° d'ordre: /

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DE PHYSIQUE



Thèse présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat

En : Physique

Spécialité : Physique Théorique

Par : **CHERBAL OMAR**

Thème

Contribution à la Résolution de Quelques
Problèmes Quantiques Pseudo-Hermitiens et
Fermioniques Dépendants du Temps.

Soutenue publiquement, le 15/11/ 2009, devant le jury composé de:

Mr. M. FELLAH	Professeur	U.S.T.H.B	Président
Mr. M. MAAMACHE	Professeur	Université de Setif	Directeur de thèse
Mr. M. DRIR	Professeur	U.S.T.H.B	Co-directeur de thèse
Mr. K. BENCHEIKH	Professeur	Université de Setif	Examineur
Mr F. BENAMIRA	Professeur	Université de Constantine	Examineur
Mr A. CHOUCHAOU	Professeur	U.S.T.H.B	Examineur
Mr D.A. TRIFONOV	Professeur	Académie des sciences Bulgarie	Invité

DÉDICACE

Je dédie ce travail à:

- Mes très chers parents.
- Mes frères et soeurs.
- Mes amis.
- Tous ceux qui me sont chers.

REMERCIEMENTS

Les travaux présentés dans cette thèse ont été effectués au sein du laboratoire de Physique Théorique de la Faculté de Physique de l'USTHB.

*En premier lieu, je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements aux Professeurs, **M. Maamache** mon directeur de thèse du laboratoire de physique quantique et systèmes dynamiques de l'université Ferhat Abbes Setif, et **M. Drir** mon co-directeur de thèse du laboratoire de physique théorique de la faculté de physique de l'USTHB. Tout au long de ce travail, ils m'ont soutenu et conseillé; qu'ils trouvent ici le témoignage de toute ma gratitude et de ma profonde reconnaissance.*

*Par le passé, Mr le Professeur **M. Fellah** a présidé le jury de ma thèse de Magister et les jurys de thèses de Magister et de Doctorat d'état de Mr **M. Maamache**. Je suis très honoré qu'il ait accepté de présider également le jury de ma thèse de Doctorat.*

*Je remercie également Monsieur **K. Bencheikh** Professeur à l'université Ferhat Abbes Setif, Monsieur **F. Benamira** Professeur à l'université de Constantine et Monsieur **A. Chouchaoui** Professeur à la faculté de physique de l'USTHB, du grand honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être membres de jury.*

*Mes remerciements vont également à Monsieur **D.A. Trifonov**, Senior Professor à "Institute of Nuclear Research, Bulgarian academy of sciences, Sofia Bulgaria", de m'avoir accueilli dans son laboratoire, pour son esprit de collaboration et ses remarques et discussions scientifiques fructueuses qui m'ont permis de mener à bien cette thèse.*

*Je tiens à remercier également Messieurs **M. Le Bellac** Professeur émérite et **J.P. Provost** Professeur de l'institut non linéaire de Nice Sophia Antipolis France, pour leurs commentaires très utiles et leurs précieuses discussions.*

*Je remercie le Directeur de l'institut non linéaire de Nice Sophia Antipolis France, pour son hospitalité et pour l'aide dont j'ai bénéficié durant tous les stages que j'ai effectués dans son institut. Je ne saurais oublier de remercier Mmes **Nathalie Hamel** et **Isabelle Potier** pour leur gentillesse et disponibilité.*

*Enfin, je remercie tous mes amis, en particulier **Hamid Bouali** et son épouse **Jasmin Kröberet**, et aussi tous mes collègues de l'université Ferhat Abbas (Setif) et du laboratoire de Physique Théorique de la Faculté de Physique de l'USTHB.*

Contribution à la Résolution de Quelques Problèmes Quantiques Pseudo-Hermitiens et Fermioniques Dépendants du Temps.

Résumé

Cette thèse entre dans la cadre de l'extension de la notion d'états cohérents à différents domaines de la physique régis par un formalisme Hamiltonien autre que celui de l'oscillateur harmonique. Dans cette optique, nous nous sommes d'abord intéressés dans la première partie de cette thèse, aux différentes méthodes et techniques utilisées pour la construction des états cohérents bosoniques et fermioniques usuels dans le cadre de la mécanique quantique Hermitienne. Nous avons généralisé les premiers résultats sur la cohérence des Hamiltoniens et les opérateurs invariants du cas bosonique au cas fermionique. Nous avons montré que le système quantique qui préserve la cohérence correspond à l'oscillateur fermionique libre non-stationnaire (c'est-à-dire non-forcé). Nous avons ensuite construit, à l'aide de la méthode des invariants, les états cohérents pour l'oscillateur fermionique forcé non-stationnaire. Nous avons introduit deux opérateurs invariants non-Hermitiens qui sont aussi des opérateurs d'annihilation et de création. Dans la deuxième partie de cette thèse, consacrée à l'extension de la notion d'états cohérents dans le cadre de la nouvelle mécanique quantique non-Hermitienne, nous avons introduit les deux théories quantiques qui forment la base fondamentale de la mécanique quantique non-Hermitienne; en l'occurrence la théorie quantique PT-symétrique introduite par Bender et al (1998) et la théorie quantique pseudo-Hermitienne introduite par Mostafazadeh (2002). Cette nouvelle mécanique quantique nous a permis de définir les opérateurs d'annihilation et de création associés à notre système. Une fois que tous les ingrédients appropriés aux états cohérents ont été introduits, nous avons construit les états cohérents pseudo-fermioniques pour les systèmes à deux-niveaux décrits par des Hamiltoniens pseudo-Hermitiens. Nous avons montré que ces états cohérents

pseudo-fermioniques forment un ensemble **bi-normé** et **bi-surcomplet**. Enfin, nous avons montré que tous nos résultats ainsi que toutes les formules relatives à ces derniers, sont en accord avec les résultats précédents pour les états cohérents fermioniques dans la limite Hermitienne [75, 76, 80].

Mots-clés:

PT-symétrie, pseudo-Hermiticité, états cohérents fermioniques, théorie des invariants.

Table des matières

Introduction générale	8
I Etats cohérents en Mécanique Quantique Hermitienne	14
1 Etats cohérents usuels	16
1.1 Introduction	17
1.2 L'oscillateur harmonique bosonique	17
1.3 Définitions et propriétés élémentaires	18
1.4 Evolution d'états cohérents au cours du temps	22
2 Généralisation de la notion d'états cohérents	24
2.1 Introduction	25
2.2 Etats cohérents de l'algèbre $su(1,1)$	26
2.2.1 Etats cohérents de Barut-Girardello	26
2.2.2 Etats cohérents de Klauder-Perelomov	28
2.3 Etats cohérents de l'algèbre $su(2)$ ou atomiques	29
3 Etats cohérents fermioniques	31
3.1 Introduction	32
3.2 L'algèbre de Grassmann	32
3.3 Les concepts de base des états cohérents fermioniques	34

4	Invariants et états cohérents de l'oscillateur fermionique forcé	39
4.1	Introduction à la théorie des invariants	40
4.2	Revue de la stabilité temporelle de l'oscillateur bosonique forcé	41
4.3	La stabilité temporelle de l'oscillateur fermionique forcé	43
4.4	Construction des l'invariants	45
4.5	Etats cohérents de l'oscillateur fermionique forcé	49
II	Etats cohérents en mécanique quantique non-Hermitienne	53
5	Emergence des théories quantiques non-Hermitiennes	56
5.1	Les repères historiques d'une mécanique quantique non-Hermitienne . . .	57
5.2	Revue de la théorie quantique Hermitienne	59
6	La théorie quantique PT-symétrique: Ingrédients et formalisme	63
6.1	Introduction	64
6.2	Nouvelle théorie quantique PT-symétrique	64
6.2.1	Définitions et propriétés	64
6.2.2	Le PT -produit scalaire	65
6.3	L'opérateur de conjugaison C et le CPT -produit scalaire	66
6.3.1	Définition et propriétés de C	66
6.3.2	le CPT -produit scalaire	68
6.4	Comparaison de la mécanique quantique Hermitienne et PT-symétrique . . .	68
7	La théorie quantique pseudo-Hermitienne	70
7.1	Introduction	71
7.2	La pseudo-Hermiticité	71
7.3	Hamiltoniens pseudo-Hermitiens ayant une base biorthonormée complète . .	72
8	Systèmes à deux-niveaux	74
8.1	Présentation du modèle	75

8.2	Diagonalisation du Hamiltonien	77
8.3	Les propriétés PT-symétriques des systèmes à deux-niveaux	78
8.4	La pseudo-Hermiticité des systèmes à deux-niveaux	79
9	Les états cohérents pseudo-fermioniques et évolution temporelle	81
9.1	Introduction	82
9.2	Opérateurs de création et d'annihilation	82
9.3	Construction des états cohérents pseudo-fermioniques	84
9.4	Propriétés élémentaires	87
9.5	L'évolution temporelle d'états cohérents pseudo-fermioniques	91
9.6	Résultats et discussion	93
	Conclusions et perspectives	94
	Appendice 1: Les états cohérents pseudo-fermioniques évolués forment une base bi-normalisée et bi-surcomplète.	98
	Appendice 2: La formule de Baker-Campbell-Hausdorff.	100
	Bibliographie	101

Introduction générale

La théorie quantique, qui a presque cent années d'existence, est devenue un composant et un outil indispensable dans la physique d'aujourd'hui. L'un des postulats les plus élémentaires de la mécanique quantique, stipule que si un Hamiltonien H est Hermitien ($H = H^+$), alors ses valeurs propres sont réelles. Où $(+)$ représente les opérations combinées de la transposition de matrice et de complexe conjugué. L'Hermiticité de H implique que l'opérateur d'évolution $e^{\frac{-i}{\hbar}Ht}$ est unitaire.

En 1998, Bender et Boettcher [1] ont présenté une autre alternative où la condition de l'Hermiticité de l'Hamiltonien pour avoir un spectre réel n'est pas exigée, elle est remplacée par la symétrie de réflexion d'espace-temps (PT -symétrie) sans violer aucun des axiomes physiques de la mécanique quantique. Ils ont montré que le spectre de l'Hamiltonien non-Hermitien à une dimension: $H = p^2 + x^2(ix)^\nu$, ($\nu \in [0, +\infty[$), est réel positif et discret. La réalité de ce spectre est une conséquence de la PT -symétrie de l'Hamiltonien H .

Par définition [1]-[7], un Hamiltonien non-Hermitien H est dit PT -symétrique s'il satisfait la relation $H = H^{PT} \equiv (PT)H(PT)$, où P et T sont respectivement les opérateurs de parité et d'inversion du temps, définis comme suit:

$$\begin{aligned} PxP &= -x, & PpP &= -p, \\ TxT &= x, & TpT &= -p, & Ti\mathbf{1}T &= -i\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Où $i := \sqrt{-1}$ et $x, p, \mathbf{1}$ sont respectivement les opérateurs position, impulsion et identité qui agissent dans l'espace de Hilbert. On peut aussi exprimer la définition $H = H^{PT}$ sous la forme $[H, PT] = 0$.

Les exemples d'Hamiltoniens non-Hermitiens PT -symétriques: $H = p^2 + ix^3$ et $H = p^2 - x^4$, souvent cités dans la littérature, sont des cas particuliers de l'Hamiltoniens $H = p^2 + x^2(ix)^\nu$ donné ci-dessus.

La conjecture de Bessis-Zinn Justin sur la réalité du spectre de l'Hamiltonien PT -symétrique $H = p^2 - (ix)^{2M}$ pour $M \geq 1$, à été aussi prouvée rigoureusement par Dorey [11, 12] et Shin [13].

Par conséquent, une grande partie de la littérature sur les Hamiltoniens non-Hermitiens, consiste en l'étude de leurs propriétés PT -symétriques [1]-[14].

Quelques années après les travaux de Bender, Mostafazadeh a introduit la notion de pseudo-Hermiticité [15]-[24] dans le but d'établir une relation mathématique avec la notion de PT-symétrie. Il a exploré la structure de base qui est responsable de la réalité du spectre des Hamiltoniens non-Hermitiens. Il a établi que tous les Hamiltoniens qui sont PT-symétriques sont pseudo-Hermitiens. Il a montré aussi qu'un opérateur diagonalisable quelconque à spectre réel, est pseudo-Hermitien si et seulement si ses valeurs propres sont réelles ou sont groupées en paires de complexes conjugués (avec la même multiplicité). En outre, ce résultat a été généralisé à tous les Hamiltoniens standards qui sont PT-symétriques et qui possèdent \mathbb{R} comme espace de configuration, ainsi qu'à une autre classe d'Hamiltoniens non-diagonalisables, qui admettent une diagonalisation en blocs, avec des blocs diagonaux à dimension finie. En fait, plusieurs développements postérieurs dans ce domaine, ont été prédits dans le papier de Scholtz et al [25].

Par définition [15], un Hamiltonien H est dit pseudo-Hermitien s'il satisfait la relation $H^+ = \eta H \eta^{-1}$, où η est un opérateur linéaire, Hermitien et inversible. On peut aussi exprimer cette définition sous la forme $H^\# = H$, où $H^\# = \eta^{-1} H^+ \eta$ est le pseudo adjoint de H [15].

Un domaine très intéressant où la pseudo-Hermiticité est largement appliquée, est l'étude des systèmes à deux-niveaux décrits par des Hamiltoniens non-Hermitiens⁽¹⁾ [20, 32]. Ces systèmes sont couramment utilisés en physique de la matière condensée, physique atomique et l'optique quantique [33]-[40]. Dans ce cadre, Ben-Aryeh en 2004 [32] a étudié un problème d'optique quantique en exploitant les méthodes introduites dans la littérature pour le traitement des Hamiltoniens pseudo-Hermitiens [15]-[24]. Il a traité le système de l'atome à deux-niveaux en interaction avec un champ électromagnétique classique et avec les effets de damping. Il a montré qu'il existe une fréquence analogue à la fréquence de Rabi dite "pseudo-fréquence de Rabi" due aux oscillations entre les deux niveaux. Celle-ci dépend des effets de damping et de l'interaction résonante entre le champ électromagnétique et le dipôle atomique. Ainsi, il a introduit dans son analyse de nouveaux effets intéressants en

⁽¹⁾Les Hamiltoniens non-Hermitiens sont utilisés traditionnellement pour décrire les processus dissipatifs, comme le phénomène du déclin radioactif.

optique quantique, qui représente un véritable domaine de prédilection pour le formalisme **d'états cohérents** [59]-[69].

En mécanique quantique, les états cohérents sont des états spécifiques dont les valeurs moyennes des observables dans ces états, ont des propriétés aussi proches que possible des grandeurs physiques du modèle classique correspondant. C'est pour cette raison que les états cohérents jouent un rôle privilégié dans l'étude des correspondances entre mécanique quantique et classique.

Le concept d'états cohérents remonte à 1926, lorsque Schrödinger [58] a défini des états cohérents qui reproduisent les grandeurs classiques pour l'oscillateur harmonique. Cependant, de 1926 jusqu'à 1963, les activités dans ce domaine sont demeurées inactives. Ainsi, la première application moderne et spécifique du terme "**cohérent**" a été faite par Glauber [59, 60, 61] dans un contexte d'optique quantique. Ces états sont en effet des superpositions d'états du champ électromagnétique quantifié. Ce qui a permis de relancer ce domaine fructueux et important.

Au cours de l'année même (c'est-à-dire 1963), Klauder [47, 48] avait développé une théorie générale de représentations continues et suggérait la possibilité de construire des états cohérents par l'utilisation des représentations irréductibles des groupes de Lie. Dix ans après les travaux de Glauber et Klauder, Perelomov et Gilmore [49, 50, 51] ont construit les états cohérents des groupes de Lie avec différentes propriétés analogues à celles des états cohérents de l'oscillateur harmonique. Le thème fondamental de ce développement, était de relier étroitement les états cohérents avec le groupe dynamique du système physique étudié. A la lumière de cet apport, les états cohérents de Glauber sont eux-mêmes en rapport avec une structure algébrique qui est le groupe de Weyl-Heisenberg [49, 50, 64]. Comme conséquence, la notion d'états cohérents ne doit pas être limitée à l'oscillateur harmonique, mais elle peut être généralisée à tous les types de problèmes physiques qui possèdent une formulation dans le langage de la mécanique quantique en termes du groupe dynamique. Ce qui a donné lieu à l'apparition d'une vaste littérature qui concerne la généralisation de la notion d'états cohérents à divers domaines de la physique [45, 46, 53, 55, 62, 63, 64].

Dans ce même élan de généralisation, des états cohérents d'une nature qualitativement différente, ont été également construits: Il s'agit des états cohérents fermioniques [75, 76, 77, 79, 80]. Cette formulation résulte de l'existence de deux types de particules fondamentales en physique: Les bosons et les fermions. Ces deux types de particules ont des relations de commutation différentes pour leurs opérateurs de base. Ainsi, les bosons satisfont les relations de commutation standards, tandis que les fermions obéissent aux relations d'anticommutation. Ces différences sont explicitement représentées par des différentes structures de groupe et des espaces de Hilbert. Une autre différence réside dans le choix des variables de paramétrisation pour les états cohérents fermioniques, qui ne sont pas des variables complexes ordinaires, mais des variables anticommutantes satisfaisant l'algèbre de Grassmann [82, 94].

Dans un travail précédent [73], nous avons construit les états cohérents fermioniques associés au système du spin à deux-niveaux en interaction avec un champ magnétique variable.

Durant ces dernières années, le concept d'états cohérents a été également introduit aux systèmes quantiques décrits par des Hamiltoniens non-Hermitiens [71, 72]. Dans un but de généralisation, nous étudions dans cette thèse les états cohérents des systèmes quantiques suivants:

- 1) *Les oscillateurs fermioniques forcés non-stationnaires.*
- 2) *Les systèmes à deux-niveaux décrits par des Hamiltoniens pseudo-Hermitiens.*

Cette thèse est organisée comme suit:

Dans la première partie sont regroupés quatre chapitres: consacrée aux états cohérents dans le cadre de la mécanique quantique Hermitienne. Nous commencerons d'abord, par rappeler les définitions et les propriétés élémentaires relatives aux états cohérents bosoniques de Glauber. Nous passerons en revue également les concepts de base des états cohérents fermioniques paramétrisés par les variables de Grassmann. Ensuite, nous donnerons un aperçu sur l'évolution de la notion d'états cohérents et nous présenterons les différentes méthodes de généralisation de cette notion. Nous terminerons cette partie par la construction des

états cohérents pour l'oscillateur fermionique forcé non-stationnaire et nous montrerons que le système quantique qui préserve la cohérence, correspond à l'oscillateur fermionique libre non-stationnaire.

La deuxième partie de cette thèse, regroupant cinq chapitres, est consacrée à l'extension de la notion d'états cohérents dans le cadre de la nouvelle mécanique quantique non-Hermitienne. Dans cette optique, nous introduisons d'abord les deux théories quantiques qui forment la base de la mécanique quantique non-Hermitienne, en l'occurrence la théorie quantique PT -symétrique introduite par Bender et al (1998) et la théorie quantique pseudo-Hermitienne introduite par Mostafazadeh (2002). Nous présenterons ensuite, un modèle typique qui trouve ses applications en physique atomique et en optique quantique [32], et qui permet de démontrer et d'illustrer les implications des résultats généraux sur la PT -symétrie et la *pseudo-Hermiticité* d'une manière assez détaillée. Nous introduisons ensuite les opérateurs de création et d'annihilation qui réalisent une généralisation pseudo-Hermitienne de l'algèbre des fermions [24]. Une fois que tous les ingrédients appropriés aux états cohérents auront été introduits, nous construisons les états cohérents pseudo-fermioniques pour les systèmes à deux-niveaux, décrits par des Hamiltoniens pseudo-Hermitiens. Ces états cohérents sont paramétrisés à l'aide des variables de Grassmann [82]. Nous montrerons que ces états cohérents obéissent aux mêmes critères de base que les états cohérents fermioniques; à savoir, ils sont définis comme états propres des opérateurs d'annihilation, ils peuvent aussi être définis par l'action de l'opérateur de déplacement sur le vide, (i) ils sont bi-normés et (ii) ils possèdent la continuité de l'indice de base, (iii) ils vérifient la résolution de l'identité et (iv) ils vérifient la stabilité temporelle, c'est-à-dire que l'évolué d'un état cohérent reste toujours un état cohérent et le système reste toujours bi-normé et bi-surcomplet au cours du temps. Ainsi, ils forment une base *bi-normée* et *bi-surcomplète*.

Dans la conclusion, nous résumons l'essentiel de notre travail tout en comparant nos résultats à ceux obtenus dans le cadre de la mécanique quantique Hermitienne.

Partie I

Etats cohérents en Mécanique Quantique Hermitienne

La première partie de cette thèse s’articule autour des quatre chapitres suivants:

Le premier chapitre a pour but de présenter les différentes méthodes et techniques qui sont utilisées pour la construction des états cohérents usuels. Nous rappellerons d’abord les trois définitions équivalentes des états cohérents usuels (de l’oscillateur harmonique bosonique) introduites par Glauber [61]; à savoir, **(a)** les états cohérents sont définis comme états propres de l’opérateur d’annihilation, **(b)** les états cohérents peuvent être obtenus à partir de l’action de l’opérateur de déplacement sur le vide de l’oscillateur harmonique. **(c)** Ces états cohérents minimisent la relation d’incertitude d’Heisenberg: $\Delta\hat{q}\Delta\hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}$.

Au deuxième chapitre, nous donnerons un aperçu sur l’évolution de la notion d’états cohérents et nous présenterons les différentes méthodes de généralisation de cette notion.

Le troisième chapitre sera consacré au passage en revue, des concepts de base des états cohérents fermioniques. Ces derniers seront définis [62, 79, 81] d’une façon analogue à celle des états cohérents bosoniques usuels, mais il seront paramétrisés par les variables de Grassmann [82, 94] qui représentent l’analogie classique des opérateurs quantiques de Fermi.

Le quatrième chapitre traitera de la construction des états cohérents de l’oscillateur fermionique forcé non-stationnaire à l’aide de la théorie des invariants. Enfin, nous montrerons aussi que le système quantique qui préserve la stabilité temporelle correspond à l’oscillateur fermionique libre non-stationnaire.

CHAPITRE

1

Etats cohérents usuels

1.1 Introduction

Les états cohérents, qui jouent un rôle important dans différents domaines de la physique, sont l'un des concepts les plus importants dans la physique d'aujourd'hui [63, 64]. Ils sont généralement connus comme états quantiques qui conviennent assez naturellement pour envisager la correspondance quantique-classique.

On se propose de présenter dans ce chapitre les définitions et les propriétés de base des états cohérents usuels (de l'oscillateur harmonique bosonique). Ensuite, nous étudierons l'évolution de ces états cohérents au cours du temps.

1.2 L'oscillateur harmonique bosonique

L'oscillateur harmonique bosonique unidimensionnel de masse m et de pulsation ω est décrit par l'Hamiltonien,

$$H = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2, \quad (1.2.1)$$

où \hat{q} et \hat{p} sont respectivement les opérateurs position et impulsion qui vérifient:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (1.2.2)$$

Les opérateurs d'annihilation et de création associés à H sont donnés par:

$$a = \frac{m\omega\hat{q} + i\hat{p}}{(2\hbar m\omega)^{\frac{1}{2}}}, \quad a^+ = \frac{m\omega\hat{q} - i\hat{p}}{(2\hbar m\omega)^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.2.3)$$

vérifiant la relation de commutation:

$$[a, a^+] = \mathbf{1}. \quad (1.2.4)$$

D'où \hat{q} et \hat{p} s'écrivent en fonction de a et a^+ comme suit:

$$\hat{q} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\frac{1}{2}}(a^+ + a), \quad \hat{p} = \left(\frac{\hbar m\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}}i(a^+ - a). \quad (1.2.5)$$

Ainsi, H peut se mettre sous la forme:

$$H = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right), \quad (1.2.6)$$

où N est l'opérateur nombre de particules:

$$N = a^+ a, \quad (1.2.7)$$

vérifiant les relations de commutations,

$$[N, a] = -a, \quad [N, a^+] = a^+. \quad (1.2.8)$$

Compte tenu de (1.2.6), il est équivalent de diagonaliser N ou H .

L'espace de Hilbert est engendré par la base complète orthonormée des états propres normalisés $|n\rangle$ de H (appelé l'espace de Fock). Les états $|n\rangle$, ($n = 1, 2, \dots$) sont donnés par:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n |0\rangle, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1, \quad \langle m | n \rangle = \delta_{m,n}. \quad (1.2.9)$$

On a

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}). \quad (1.2.10)$$

L'état fondamental ou "l'état du vide" est défini par:

$$a |0\rangle = 0, \quad \langle 0 | 0 \rangle = 1. \quad (1.2.11)$$

L'action de a et a^+ sur les états $|n\rangle$ est donnée par,

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad a^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (1.2.12)$$

Les vecteurs $|n\rangle$ sont aussi des états propres de N :

$$N |n\rangle = a^+ a |n\rangle = n |n\rangle. \quad (1.2.13)$$

1.3 Définitions et propriétés élémentaires

Les états cohérents usuels (de l'oscillateur harmonique) ont été introduits par Glauber [61] en 1963. Ces états $|\alpha\rangle$ peuvent être défini de trois manières équivalentes [61, 62, 63, 64, 69]:

• **Définition (a):** Les états cohérents $|\alpha\rangle$ sont définis *comme états propres de l'opérateur d'annihilation a* :

$$a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (1.3.1)$$

Ces états cohérents $|\alpha\rangle$ sont donnés explicitement par [59, 60, 61],

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.3.2)$$

• **Définition (b)**: Les états cohérents peuvent aussi être obtenus par l'action de l'opérateur de déplacement unitaire $D(\alpha)$ sur l'état du vide $|0\rangle$:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle, \quad (1.3.3)$$

où l'opérateur de déplacement unitaire $D(\alpha)$ est défini par:

$$D(\alpha) = e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)}, \quad (1.3.4)$$

et satisfait les propriétés suivantes:

$$D^{-1}(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha, \quad (1.3.5)$$

$$D^{-1}(\alpha) a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*, \quad (1.3.6)$$

$$D(\alpha) D(\beta) = e^{(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)} D(\beta) D(\alpha), \quad (1.3.7)$$

$$D(\alpha + \beta) = e^{-\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)} D(\alpha) D(\beta). \quad (1.3.8)$$

On retrouve à partir de cette définition (b) l'expression (1.3.2) de $|\alpha\rangle$ comme suit:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle \quad (1.3.9)$$

$$= e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)} |0\rangle \quad (1.3.10)$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} |0\rangle \quad (1.3.11)$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle \quad (1.3.12)$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (1.3.13)$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.3.14)$$

Ici on a utilisé la formule de Baker-Campbell-Hausdorff (**Voir appendice 2**):

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^A e^B. \quad (1.3.15)$$

Cette dernière formule est valable si A et B commutent avec $[A, B]$, c'est-à-dire $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$. Puisque $[\alpha a^+, -\alpha^* a] = \alpha^* \alpha$ qui est un nombre, donc il commute avec αa^+ et $-\alpha^* a$, d'où $D(\alpha)$ s'écrit sous la forme:

$$D(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^+} e^{-\alpha^* a}. \quad (1.3.16)$$

Et

$$e^{-\alpha^* a} |0\rangle = (1 - \alpha^* a + \frac{\alpha^{*2}}{2!} a^2 + \dots) |0\rangle \quad (1.3.17)$$

$$= |0\rangle. \quad (1.3.18)$$

• **Définition (c)**: On peut aussi définir les états cohérents *comme des états qui réduisent au minimum la relation d'incertitude d'Heisenberg* $\Delta\hat{q}\Delta\hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}$, où les opérateurs position \hat{q} et impulsion \hat{p} sont donnés par l'équation (1.2.5) et les variances $\Delta\hat{q}$ et $\Delta\hat{p}$ sont données par:

$$\Delta\hat{q} = \sqrt{\langle\hat{q}^2\rangle - \langle\hat{q}\rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \quad (1.3.19)$$

$$\Delta\hat{p} = \sqrt{\langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}. \quad (1.3.20)$$

Dans ces états les valeurs moyennes des opérateurs \hat{q} , \hat{p} , \hat{q}^2 et \hat{p}^2 sont données par:

$$\langle\hat{q}\rangle \equiv \langle\alpha|\hat{q}|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \operatorname{Re} \alpha, \quad (1.3.21)$$

$$\langle\hat{p}\rangle \equiv \langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle = \sqrt{2\hbar m\omega} \operatorname{Im} \alpha, \quad (1.3.22)$$

$$\langle\hat{q}^2\rangle \equiv \langle\alpha|\hat{q}^2|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} [4(\operatorname{Re} \alpha)^2 + 1], \quad (1.3.23)$$

$$\langle\hat{p}^2\rangle \equiv \langle\alpha|\hat{p}^2|\alpha\rangle = \frac{\hbar m\omega}{2} [4(\operatorname{Im} \alpha)^2 + 1]. \quad (1.3.24)$$

Où $\operatorname{Re} \alpha$ et $\operatorname{Im} \alpha$ sont les parties réelles et imaginaires de α .

D'où

$$\Delta\hat{q}\Delta\hat{p} = \frac{\hbar}{2}, \quad (1.3.25)$$

qui est la valeur minimale de la relation d'incertitude d'Heisenberg. On note que ces trois définitions sont équivalentes seulement pour l'oscillateur harmonique.

Les états cohérents $|\alpha\rangle$ possèdent deux propriétés clés, à savoir:

i) **La résolution de l'identité:** C'est-à-dire ils vérifient la relation:

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \mathbf{1}, \quad (1.3.26)$$

où

$$d^2\alpha = d(\operatorname{Re} \alpha)d(\operatorname{Im} \alpha). \quad (1.3.27)$$

On dit aussi que les états $|\alpha\rangle$ forment *une base surcomplète*.

Pour montrer cette identité (1.3.26), il suffit de la prendre entre le bras $\langle n|$ et le ket $|m\rangle$, il vient:

$$\frac{1}{\pi} \int \langle n|\alpha\rangle \langle \alpha|m\rangle d^2\alpha = \frac{1}{\pi} \int e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^n \alpha^{*m}}{\sqrt{n!m!}} d(\operatorname{Re} \alpha)d(\operatorname{Im} \alpha). \quad (1.3.28)$$

On pose $\alpha = \rho e^{i\theta}$ (c'est le passage en coordonnées polaires dans le plan complexe de α), d'où,

$$d^2\alpha = \rho d\rho d\theta, \quad (1.3.29)$$

il en résulte,

$$\frac{1}{\pi} \int \langle n|\alpha\rangle \langle \alpha|m\rangle d^2\alpha = \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\pi} \frac{\rho^{n+m}}{\sqrt{n!m!}} e^{i(n-m)\theta} e^{-\rho^2} = \delta_{nm}, \quad (1.3.30)$$

où nous avons utilisé le changement de variables $\rho^2 = u$ et $\int_0^\infty du. u^n e^{-u} = n!$.

ii) **La stabilité temporelle:** C'est-à-dire l'évolué au cours du temps d'un état cohérent reste toujours état cohérent. La section suivante est consacrée à l'étude de cette propriété.

En outre, ces états cohérents $|\alpha\rangle$ possèdent d'autres propriétés remarquables à savoir:

- Les états cohérents ne sont pas orthogonaux car le produit scalaire des deux états cohérents est donné par:

$$\langle \alpha|\beta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n} \beta^n}{n!} e^{(-\frac{|\alpha|^2}{2})} e^{(-\frac{|\beta|^2}{2})} \quad (1.3.31)$$

$$= e^{(\alpha^* \beta - \frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2)}. \quad (1.3.32)$$

Ce produit scalaire n'est jamais nul.

- Les états cohérents $|\alpha\rangle$ sont normalisés:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1, \quad (1.3.33)$$

et le module du produit scalaire $\langle\alpha|\beta\rangle$,

$$|\langle\alpha|\beta\rangle| = e^{-\frac{1}{2}|\alpha-\beta|^2}, \quad (1.3.34)$$

est une mesure de la "distance" entre les deux états cohérents.

- Les valeurs moyennes $\langle\hat{q}\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$, $\langle H\rangle$ dans ces états $|\alpha\rangle$ restent constamment égales aux grandeurs classiques correspondantes, à savoir:

$$\langle\hat{q}\rangle = \langle\alpha|\hat{q}|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \operatorname{Re} \alpha, \quad (1.3.35)$$

$$\langle\hat{p}\rangle = \langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle = \sqrt{2\hbar m\omega} \operatorname{Im} \alpha, \quad (1.3.36)$$

$$\langle H\rangle = \langle\alpha|H|\alpha\rangle = \hbar\omega \left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \right). \quad (1.3.37)$$

- De façon générale la valeur moyenne $\langle A\rangle = \langle\alpha|A|\alpha\rangle$ dans ces états $|\alpha\rangle$ de n'importe quel opérateur A reproduit la grandeur classique correspondante.

1.4 Evolution d'états cohérents au cours du temps

Une fois défini les états cohérents de l'oscillateur harmonique, on s'intéresse maintenant à leur évolution au cours du temps. Si l'évolué d'un état cohérent initial reste toujours état cohérent au cours du temps, on dit que l'évolution temporelle est stable [92, 93].

On remarque facilement que les états cohérents $|\alpha\rangle$ sont stables [59, 60, 61], pour le voir, il suffit d'appliquer sur l'état $|\alpha\rangle$ initial l'opérateur d'évolution de l'oscillateur harmonique $e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$, $H = \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2})$:

$$|\alpha; t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\alpha\rangle. \quad (1.4.1)$$

L'évolué $|\alpha; t\rangle$ s'écrit donc:

$$|\alpha; t\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n e^{-i\omega t(n+\frac{1}{2})}}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.4.2)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}\omega t} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n e^{-i\omega nt}}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.4.3)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}\omega t} |\alpha(t)\rangle, \quad (1.4.4)$$

où $\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$.

Donc pour passer de l'état $|\alpha\rangle$ à son évolué $|\alpha; t\rangle$, il suffit de changer α en $\alpha e^{-i\omega t}$, et de multiplier le ket obtenu par $e^{-\frac{i}{2}\omega t}$ (qui est un facteur de phase globale sans conséquences physiques) [70]. Par conséquence, l'évolué $|\alpha; t\rangle$ reste toujours état propre de l'opérateur d'annihilation a au cours du temps, avec une valeur propre $\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$,

$$a|\alpha; t\rangle = \alpha(t)|\alpha; t\rangle. \quad (1.4.5)$$

Une autre conséquence de la stabilité temporelle des états $|\alpha\rangle$, réside en l'énergie moyenne prise dans les états $|\alpha; t\rangle$ est indépendante du temps:

$$\langle H \rangle = \langle \alpha; t | H | \alpha; t \rangle = \hbar\omega \left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \right) = \langle \alpha | H | \alpha \rangle. \quad (1.4.6)$$

CHAPITRE

2

Généralisation de la
notion d'états cohérents

2.1 Introduction

Après l'introduction des états cohérents de l'oscillateur harmonique, leur généralisation aux différents domaines de la physique régis par un formalisme Hamiltonien autre que celui de l'oscillateur harmonique, a focalisé un intérêt considérable [62, 63, 64]. Les états cohérents construits à partir des définitions **(a)**, **(b)** et **(c)** énumérées précédemment ont donné lieu à de différents types d'états cohérents:

Généralisation de la définition (a): Barut et Girardello [44] ont construit à partir de la définition **(a)** les états cohérents pour l'algèbre de Lie $su(1, 1)$ en exploitant sa série de représentation discrète. Gazeau et Klauder [45, 57] ont aussi repris la définition **(a)** pour la construction des états cohérents pour des Hamiltoniens qui possèdent un spectre discret ou continu. Les états cohérents construits selon l'approche utilisée par ces derniers sont appelés dans la littérature les états cohérents de Gazeau-Klauder (*GK coherent states*). Des états cohérents de ce type ont été construits par Antoine et al [46] pour une particule soumise à un potentiel de puits infini et à celui du potentiel de Pöschl-Teller.

Généralisation de la définition (b): Dans le cadre de la définition **(b)** basée sur l'action d'un opérateur de déplacement sur l'état du vide, Perelomov [49] et Gilmore [50, 51] ont montré indépendamment au début des années soixante-dix que les états cohérents sont intimement liés au groupe dynamique régissant les symétries du système physique étudié. L'idée derrière cette définition a été proposée par Klauder [47, 48] une décennie plus tôt. Ce résultat important a permis l'extension de la notion d'états cohérents pour une variété importante l'algèbres de Lie [62, 63, 64, 69]. Dans la littérature, les états cohérents construits à partir de la définition **(b)** sont appelés les états cohérents de Klauder-Perelomov (*KP coherent states*).

Généralisation de la définition (c): Dans la définition **(c)** qui définit les états cohérents comme étant des états qui réduisent au minimum la relation d'incertitude d'Heisenberg. Trifonov [54] a établi la forme la plus générale des Hamiltoniens qui minimisent la relation d'incertitude d'Heisenberg. Les états cohérents construits à partir de la définition **(c)** sont appelés les états intelligents (*Intelligent states*). Des états cohérents de ce type ont été

construits par Trifonov [56] pour les algèbres $su(2)$ et $su(1, 1)$, et Elkinani et al [52, 55] pour un système quantique arbitraire en utilisant la minimisation de la relation d'incertitude de Robertson-Schrödinger⁽¹⁾.

On se propose de présenter dans ce chapitre les généralisations des états cohérents basées sur les algèbres de Lie $su(1, 1)$ et $su(2)$ [64, 65, 66, 67].

2.2 Etats cohérents de l'algèbre $su(1, 1)$

2.2.1 Etats cohérents de Barut-Girardello

L'algèbre de Lie $su(1, 1)$ engendrée par les trois générateurs $\{K_+, K_-, K_3\}$, ($(K_+)^+ = K_-$) qui satisfont les relations de commutation suivantes:

$$[K_3, K_+] = K_+, \quad [K_3, K_-] = -K_-, \quad [K_+, K_-] = -2K_3. \quad (2.2.1)$$

L'espace de Fock sur le quel $\{K_+, K_-, K_3\}$ agissent est $\mathcal{H}_k = \{|n, k\rangle, (n = 0, 1, 2, \dots)\}$ et dont les actions sont données par:

$$K_+ |n, k\rangle = \sqrt{(n+1)(2k+n)} |n+1, k\rangle, \quad (2.2.2)$$

$$K_- |n, k\rangle = \sqrt{n(2k+n-1)} |n-1, k\rangle, \quad (2.2.3)$$

$$K_3 |n, k\rangle = (k+n) |n, k\rangle. \quad (2.2.4)$$

Où $|0, k\rangle$ est l'état du vide normalisé défini par:

$$K_- |0, k\rangle = 0, \quad \langle 0, k | 0, k\rangle = 1. \quad (2.2.5)$$

L'opérateur Casimir pour toute représentation unitaire irréductible indexée par un paramètre k dit indice de Bargman est défini par:

$$C = K_3^2 - K_2^2 - K_1^2 = k(k-1), \quad k = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \quad (2.2.6)$$

⁽¹⁾La relation d'incertitude d'Heisenberg n'est qu'un cas particulier d'une relation plus générale dite relation d'incertitude de Robertson-Schrödinger.

Où

$$K_{\pm} = K_1 \pm iK_2 \quad (2.2.7)$$

A partir de l'équation (2.2.2) les états $|n, k\rangle$ sont donnés par:

$$|n, k\rangle = \frac{(K_+)^n}{\sqrt{n!(2k)_n}} \frac{1}{\sqrt{n!}} |0, k\rangle. \quad (2.2.8)$$

Où $(2k)_n = 2k(2k+1)(2k+2)\dots(2k+n-1)$ désigne le symbole de Pochhammer⁽¹⁾. Ces états $|n, k\rangle$ satisfont les relations d'orthogonalité et de fermeture:

$$\langle m, k | n, k \rangle = \delta_{mn}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |n, k\rangle \langle n, k| = 1. \quad (2.2.9)$$

Barut et Girardello [44] ont étendu la définition **(a)** des états cohérents de l'oscillateur harmonique au cas de l'algèbre de Lie $su(1, 1)$ engendrée par les trois générateurs $\{K_+, K_-, K_3\}$ de la façon suivante:

Les états cohérents de Barut-Girardello [44] notés $|z\rangle$ sont définis comme états propres de l'opérateur d'annihilation K_- :

$$K_- |z\rangle = z |z\rangle, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.2.10)$$

La forme explicite de $|z\rangle$ est donnée par [44, 52, 66]:

$$|z\rangle = \frac{|z|^{k-\frac{1}{2}}}{\sqrt{I_{2k-1}(2|z|)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n! \Gamma(2k+n)}} |k, n\rangle, \quad (2.2.11)$$

où $I_{\nu}(z)$ est la fonction de Bessel modifiée du premier espèce:

$$I_{\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{\sqrt{n! \Gamma(\nu+n+1)}}, \quad (2.2.12)$$

et $\Gamma(z)$ la fonction Gamma:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{(p-1)} e^{-t} dt. \quad (2.2.13)$$

Les états cohérents de Barut-Girardello sont normalisés mais ne sont pas orthogonaux:

$$\langle z_1 | z_2 \rangle = \frac{I_{2k-1}(2\sqrt{z_1^* z_2})}{\sqrt{I_{2k-1}(2|z_1|) I_{2k-1}(2|z_2|)}}, \quad (2.2.14)$$

⁽¹⁾En mathématiques, le symbole de Pochhammer $(x)_n$ est utilisé en théorie des fonctions spéciales pour représenter la factorielle croissante $(x)_n = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$.

mais vérifient la résolution de l'identité:

$$\int d\mu(z, z^*) |z\rangle \langle z| = \mathbf{1}, \quad (2.2.15)$$

où

$$d\mu(z, z^*) = \frac{2}{\pi} F_{2k-1}(2|z|) I_{2k-1}(2|z|) dz^* dz, \text{ pour } k > 0, \quad (2.2.16)$$

et $F_\nu(z)$ est la fonction de Bessel modifiée du second espèce:

$$F_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty dy e^{-zy} (y^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}}, \text{ pour } \nu > -\frac{1}{2}. \quad (2.2.17)$$

Ainsi, les états cohérents de Barut-Girardello forment une base surcomplète.

2.2.2 Etats cohérents de Klauder-Perelomov

Les états cohérents de Klauder-Perelomov [47, 48, 49] sont basés sur l'extension de la définition (b) qui s'obtiennent par l'action d'un opérateur de déplacement sur un état de référence.

Dans le cas de l'algèbre de Lie $su(1, 1)$ ces états cohérents sont donnés par:

$$|\omega\rangle = e^{(\omega K_+ - \omega^* K_-)} |k, 0\rangle, \quad \omega \in \mathbb{C}. \quad (2.2.18)$$

Où $|k, 0\rangle$ est l'état de référence et $D(\omega) = e^{(\omega K_+ - \omega^* K_-)}$ est l'opérateur de déplacement qui peut s'écrire aussi sous les formes suivantes:

$$D(\omega) = e^{\eta K_+} e^{\log(1-|\eta|^2) K_3} e^{-\eta^* K_-}, \quad (2.2.19)$$

$$D(\omega) = e^{-\eta^* K_-} e^{-\log(1-|\eta|^2) K_3} e^{\eta K_+}, \quad (2.2.20)$$

où η est un paramètre complexe donné par:

$$\eta = \eta(\omega) \equiv \frac{\omega \tanh(|\omega|)}{|\omega|}, \quad (2.2.21)$$

et vérifiant la condition ($|\eta| < 1$) qui constitue une propriété importante pour ces états cohérents. La forme explicite de $|\omega\rangle$ est donnée par [49, 52, 65]:

$$|\omega\rangle = (1 - |\eta|^2)^k e^{\eta K_+} |k, 0\rangle \quad (2.2.22)$$

$$= (1 - |\eta|^2)^k \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\Gamma(n+2k)}{n! \Gamma(2k)}} \eta^n |k, n\rangle \equiv |\eta\rangle. \quad (2.2.23)$$

De même les états cohérents de Klauder-Perelomov sont normalisés mais ne sont pas orthogonaux car le produit scalaire n'est jamais nul:

$$\langle \eta_1 | \eta_2 \rangle = (1 - |\eta_1|^2)^k (1 - |\eta_2|^2)^k (1 - \eta_1^* \eta_2)^{-2k}. \quad (2.2.24)$$

La résolution de l'identité est vérifiée comme suit:

$$\int d\mu(\eta, \eta^*) |\eta\rangle \langle \eta| = \mathbf{1}, \quad (2.2.25)$$

où

$$d\mu(\eta, \eta^*) = \frac{2k-1}{\pi(1-|\eta|^2)^2} d\eta^* d\eta, \text{ pour } k > \frac{1}{2}. \quad (2.2.26)$$

On se propose de rappeler dans la section suivante les états cohérents obtenus par l'action d'une algèbre de Lie $su(2)$ [64, 65, 66, 67].

2.3 Etats cohérents de l'algèbre $su(2)$ ou atomiques

On considère la représentation de spin J de l'algèbre de Lie $su(2)$ engendrée par les trois générateurs $\{J_+, J_-, J_3\}$, $((J_+)^+ = J_-)$ qui satisfont les relations de commutation suivantes:

$$[J_3, J_+] = J_+, \quad [J_3, J_-] = -J_-, \quad [J_+, J_-] = 2J_3. \quad (2.3.1)$$

L'espace de Fock sur le quel agissent $\{J_+, J_-, J_3\}$ est $\mathcal{H}_J = \{|J, m\rangle, 0 \leq m \leq 2J\}$ et leurs actions sont données par:

$$J_+ |J, m\rangle = \sqrt{(m+1)(2J-m)} |J, m+1\rangle, \quad (2.3.2)$$

$$J_- |J, m\rangle = \sqrt{m(2J-m+1)} |J, m-1\rangle, \quad (2.3.3)$$

$$J_3 |J, m\rangle = (-J+m) |J, m\rangle. \quad (2.3.4)$$

Où $|J, 0\rangle$ est l'état du vide normalisé ($J_- |J, 0\rangle = 0$, $\langle J, 0 | J, 0 \rangle = 1$). Les états $|J, m\rangle$ sont donnés par:

$$|J, m\rangle = \frac{(J_+)^m}{\sqrt{m!(P)_{(m)}}} \frac{1}{\sqrt{m!}} |J, 0\rangle, \quad (2.3.5)$$

où $(P)_{(m)}^{(2J)} = 2J(2J-1)(2J-2)\dots(2J-m+1)$. Ces états $|J, m\rangle$ satisfont les relations d'orthogonalité et de fermeture:

$$\langle J, m | J, n \rangle = \delta_{mn}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} |J, m\rangle \langle J, m| = \mathbf{1}. \quad (2.3.6)$$

Les états cohérents de l'algèbre $su(2)$ ou atomiques [65, 66, 67] peuvent être générés à partir de l'action de l'opérateur de déplacement $D(z) = e^{(zJ_+ - z^*J_-)}$ sur l'état du vide:

$$|J, z\rangle = e^{(zJ_+ - z^*J_-)} |J, 0\rangle, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.3.7)$$

Où l'opérateur de déplacement peut être décomposé sous la forme suivante:

$$D(z) = e^{\lambda J_+} e^{\log(1+|\lambda|^2)J_3} e^{-\lambda^* J_-}, \quad (2.3.8)$$

ou

$$D(z) = e^{-\lambda^* J_-} e^{-\log(1+|\lambda|^2)J_3} e^{\lambda J_+}. \quad (2.3.9)$$

λ est un paramètre complexe donné par:

$$\lambda = \lambda(z) \equiv \frac{z \tan(|z|)}{|z|}, \quad (2.3.10)$$

qui constitue une propriété importante pour ces états cohérents. La forme explicite de $|J, z\rangle$ est donné par [65, 66, 67]:

$$|J, z\rangle = \frac{1}{(1+|\lambda|^2)^J} e^{\lambda J_+} |J, 0\rangle \quad (2.3.11)$$

$$= \frac{1}{(1+|\lambda|^2)^J} \sum_{m=0}^{2J} \sqrt{\frac{(P)_{(m)}^{(2J)}}{m!}} \lambda^m |J, m\rangle \equiv |J, \lambda\rangle. \quad (2.3.12)$$

La résolution de l'identité est vérifiée comme suit [67]:

$$\begin{aligned} \int \frac{(2J+1)}{\pi} \frac{\tan(|z|)(d^2z)}{(1+\tan^2(|z|))|z|} |J, z\rangle \langle J, z| &= \int \frac{(2J+1)}{\pi} \frac{\sin(2|z|)(d^2z)}{2|z|} |J, z\rangle \langle J, z| \\ &= \int \frac{(2J+1)}{\pi} \frac{(d^2\lambda)}{(1+|\lambda|^2)^2} |J, \lambda\rangle \langle J, \lambda| = \sum_{m=0}^{2J} |J, m\rangle \langle J, m| = \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

CHAPITRE

3

Etats cohérents

fermioniques

3.1 Introduction

Les états cohérents fermioniques sont définis [62, 79, 81] d'une façon analogue à celle des états cohérents usuels (bosoniques): Ils sont définis comme états propres des opérateurs d'annihilations, ils peuvent être définis également comme action d'un opérateur de déplacement sur le vide du système considéré. La différence par rapport aux états cohérents bosoniques, est que les variables de paramétrisation pour les états cohérents fermioniques ne sont pas des variables complexes ordinaires, mais sont des variables anticommutantes qui satisfont l'algèbre de Grassmann [82, 94].

Nous commencerons ce chapitre par un rappel des principales propriétés des variables de Grassmann, nous passerons ensuite en revue les définitions et les résultats appropriés concernant les états cohérents fermioniques [75, 76, 77, 79, 80].

3.2 L'algèbre de Grassmann

L'introduction des nombres anticommutants en physique, lié à la description des fermions, remonte à 1955 [94]. Ensuite, l'utilisation des variables de Grassmann est devenue plus systématique après l'extension par Berezin en 1966, de la méthode de la fonctionnelle génératrice à la seconde quantification des fermions [82]. Ces variables qui sont traditionnellement utilisées dans la formulation des intégrales de chemins pour les fermions [81], sont devenues après un outil très approprié à la description des systèmes de fermions [83]. Ceci est dû en fait à leurs propriétés spécifiques; ils sont l'analogie classique des opérateurs quantiques de Fermi, qui satisfont les relations d'anticommutation $[b_i, b_j^+]_+ = \delta_{ij}$ et ils sont nilpotentes: $(b_i)^2 = (b_j^+)^2 = 0$, cette dernière relation est la formulation algébrique du principe de l'exclusion de Pauli pour les fermions.

En effet, "l'espace de phase classique" de N fermions peut être identifié avec l'algèbre de Grassmann $\mathbb{C}B_{2N}$ [84] généré par l'ensemble $\{\xi_1^*, \dots, \xi_N^*, \xi_1, \dots, \xi_N\}$ de $2N$ variables de Grassmann complexes et indépendantes qui satisfont les relations d'anticommutation:

$$\{\xi_i, \xi_j\} = \xi_i \xi_j + \xi_j \xi_i = 0, \quad (3.2.1)$$

$$\{\xi_i, \xi_j^*\} = 0, \quad \{\xi_i^*, \xi_j^*\} = 0. \quad (3.2.2)$$

Par analogie avec les opérateurs quantiques de Fermi, ces variables sont nilpotentes:

$$\xi_i^2 = 0, \quad \xi_i^{*2} = 0. \quad (3.2.3)$$

On désigne par ψ un élément quelconque de l'ensemble $\{\xi_1^*, \dots, \xi_N^*, \xi_1, \dots, \xi_N\}$ des $2N$ éléments qui génèrent cette algèbre de Grassmann, alors ψ satisfait les propriétés suivantes:

- ψ commute avec les nombres complexes.
- ψ anticommute avec les opérateurs de Fermi b_i et b_i^+ .
- Le conjugué hermitique renverse l'ordre de toutes les quantités fermioniques:

$$(b_i^+ \psi + \psi^* b_i)^+ = \psi^* b_i + b_i^+ \psi. \quad (3.2.4)$$

- L'intégration est donnée par:

$$\int d\psi 1 = 0, \quad \int d\psi^* 1 = 0, \quad \int d\psi \psi = 1, \quad \int d\psi^* \psi^* = 1. \quad (3.2.5)$$

Pour une paire de variables ψ et ψ^* , on a:

$$\int d^2\psi = \int d\psi^* d\psi. \quad (3.2.6)$$

On note que les éléments différentiels $d\psi$ et $d\psi^*$ anticommulent entre eux mais ils commutent avec les nombres complexes,

$$d\psi d\psi^* = -d\psi^* d\psi. \quad (3.2.7)$$

De façon générale, l'intégration d'une fonction de variables de Grassmann $f(\psi, \psi^*)$ est équivalente à la différentiation à droite [53]:

$$\int d\psi f(\psi, \psi^*) = \overrightarrow{\partial}_\psi f(\psi, \psi^*), \quad (3.2.8)$$

$$\int d\psi^* f(\psi, \psi^*) = \overrightarrow{\partial}_{\psi^*} f(\psi, \psi^*), \quad (3.2.9)$$

où $\overrightarrow{\partial}_\psi$ et $\overrightarrow{\partial}_{\psi^*}$ désignent les dérivés à droite par rapport à ψ et ψ^* respectivement. En particulier on a:

$$\overrightarrow{\partial}_\psi 1 = 0, \quad \overrightarrow{\partial}_\psi \psi = 1, \quad \overrightarrow{\partial}_{\psi^*} 1 = 0, \quad \overrightarrow{\partial}_{\psi^*} \psi^* = 1. \quad (3.2.10)$$

A titre illustratif, on applique ces règles d'intégration et de différentiation sur l'exemple:

$$f(\psi, \psi^*) = A + B\psi + C\psi^* + D\psi\psi^*, \quad (3.2.11)$$

où A, B, C et D sont des nombres complexes quelconques.

$$\overrightarrow{\partial}_\psi(A + B\psi + C\psi^* + D\psi\psi^*) = B + D\psi^*, \quad (3.2.12)$$

$$\overrightarrow{\partial}_{\psi^*}(A + B\psi + C\psi^* + D\psi\psi^*) = C - D\psi. \quad (3.2.13)$$

$$\int d\psi(A + B\psi + C\psi^* + D\psi\psi^*) = B + D\psi^* \quad (3.2.14)$$

$$\int d\psi^*(A + B\psi + C\psi^* + D\psi\psi^*) = C - D\psi. \quad (3.2.15)$$

$$\int d\psi^* d\psi(A + B\psi + C\psi^* + D\psi\psi^*) = D \quad (3.2.16)$$

Ces variables de Grassmann vont nous permettre alors de définir les états cohérents fermioniques d'une manière équivalente à leurs analogues bosoniques [75, 76, 77, 79, 80].

3.3 Les concepts de base des états cohérents fermioniques

On considère les systèmes quantiques avec un nombre fini N de degrés de liberté fermioniques qui sont caractérisés par les opérateurs l'annihilation et de création b_i et b_i^+ , ($i = 1, 2, \dots, N$), qui obéissent aux relations canoniques d'anticommutation:

$$[b_i, b_i^+]_+ = b_i b_i^+ + b_i^+ b_i = 1, \quad (3.3.1)$$

$$[b_i, b_i]_+ = 0, \quad [b_i^+, b_i^+]_+ = 0. \quad (3.3.2)$$

L'espace de Hilbert correspondant est le N -produit tensoriel: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$ de l'espace de Hilbert à deux dimensions pour un degré de liberté:

$$\mathcal{H}_i = \{|0\rangle_i, |1\rangle_i\}. \quad (3.3.3)$$

L'action des opérateurs d'annihilation et de création b_i et b_i^+ sur \mathcal{H}_i est donnée par:

$$b_i |0\rangle_i = 0, \quad b_i |1\rangle_i = |0\rangle_i. \quad (3.3.4)$$

$$b_i^+ |0\rangle_i = |1\rangle_i, \quad b_i^+ |1\rangle_i = 0. \quad (3.3.5)$$

L'opérateur b_i annihile l'état fondamental $|0\rangle_i$, b_i^+ l'existe pour le ramener à l'état $|1\rangle_i$.

L'espace de Hilbert \mathcal{H} est engendré par les états propres de $b_i^+ b_i$:

$$b_i^+ b_i |n_1 n_2 \dots n_N\rangle = n_i |n_1 n_2 \dots n_N\rangle, \quad n_i = 0, 1, \quad (3.3.6)$$

où

$$|n_1 n_2 \dots n_N\rangle = |n_1\rangle_1 \otimes |n_2\rangle_2 \otimes \dots \otimes |n_N\rangle_N, \quad (3.3.7)$$

avec $|n\rangle_i$ un vecteur dans l'espace de Hilbert \mathcal{H}_i .

Avant de définir les états cohérents fermioniques qui correspondent au cas de N degrés de liberté, Définissons d'abord les états cohérents fermioniques dans le cas d'un degré de liberté ($N = 1$, donc les indices ne seront pas mentionnés), ces derniers sont donnés par [75, 76, 77, 79, 80]:

$$|\xi\rangle = D(\xi) |0\rangle \quad (3.3.8)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\xi^* \xi} e^{(b^+ \xi)} |0\rangle \quad (3.3.9)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\xi^* \xi} (|0\rangle - \xi |1\rangle). \quad (3.3.10)$$

Où l'opérateur de déplacement unitaire $D(\xi)$ est donné par,

$$D(\xi) = e^{(b^+ \xi - \xi^* b)} \quad (3.3.11)$$

$$= 1 + b^+ \xi - \xi^* b + (b^+ b - \frac{1}{2}) \xi^* \xi. \quad (3.3.12)$$

$D(\xi)$ est unitaire puisque:

$$D^+(\xi) = e^{(\xi^* b - b^+ \xi)}, \quad (3.3.13)$$

ce qui entraîne

$$D(\xi) D^+(\xi) = D^+(\xi) D(\xi) = \mathbf{1}. \quad (3.3.14)$$

$D^+(\xi)$ s'écrit aussi sous la forme,

$$D^+(\xi) = 1 + \xi^* b - b^+ \xi + (b^+ b - \frac{1}{2}) \xi^* \xi, \quad (3.3.15)$$

et satisfait les relations suivantes,

$$D^+(\xi)bD(\xi) = b + \xi\mathbf{1}, \quad (3.3.16)$$

$$D^+(\xi)b^+D(\xi) = b^+ + \xi^*\mathbf{1}. \quad (3.3.17)$$

L'action des variables de Grassmann ξ sur les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ est donnée par:

$$\xi|0\rangle = |0\rangle\xi, \quad \xi|1\rangle = -|1\rangle\xi. \quad (3.3.18)$$

En utilisant l'expression (3.3.16), on montre que les états cohérents $|\xi\rangle$ sont aussi des états propres de l'opérateur d'annihilation b ,

$$b|\xi\rangle = bD(\xi)|0\rangle \quad (3.3.19)$$

$$= D(\xi)D^+(\xi)bD(\xi)|0\rangle \quad (3.3.20)$$

$$= D(\xi)(b + \xi)|0\rangle = D(\xi)\xi|0\rangle \quad (3.3.21)$$

$$= \xi D(\xi)|0\rangle \quad (3.3.22)$$

$$= \xi|\xi\rangle. \quad (3.3.23)$$

L'adjoint hermitique de $|\xi\rangle$ est,

$$\langle\xi| = \langle 0|D^+(\xi) \quad (3.3.24)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi} \langle 0|e^{(\xi^*b)} \quad (3.3.25)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi} (\langle 0| + \xi^*\langle 1|). \quad (3.3.26)$$

$\langle\xi|$ est état propre à gauche de b^+ ,

$$\langle\xi|b^+ = \xi^*\langle\xi| = \langle\xi|\xi^*. \quad (3.3.27)$$

Ces états $|\xi\rangle$ sont normalisés,

$$\langle\xi|\xi\rangle = 1. \quad (3.3.28)$$

Le produit scalaire de deux états cohérents est donné par,

$$\langle\xi_1|\xi_2\rangle = e^{-\frac{1}{2}\xi_1^*\xi_1} e^{-\frac{1}{2}\xi_2^*\xi_2} e^{\xi_1^*\xi_2} \quad (3.3.29)$$

$$= e^{\left(-\frac{1}{2}\xi_1^*(\xi_1-\xi_2) + \frac{1}{2}(\xi_1^*-\xi_2^*)\xi_2\right)}. \quad (3.3.30)$$

Ces états cohérents forment une base surcomplète dans l'espace de Hilbert, c'est-à-dire qu'ils fournissent une résolution de l'identité $\mathbf{1}$ par l'intermédiaire de

$$\begin{aligned} \int d\xi^* d\xi |\xi\rangle\langle\xi| &= \int d\xi^* d\xi (|0\rangle\langle 0| - \xi |1\rangle\langle 0| + \xi^* |0\rangle\langle 1| - \xi^* \xi |1\rangle\langle 1|) \\ &= \int d\xi^* d\xi (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| \xi + \xi^* |0\rangle\langle 1| + \xi \xi^* |1\rangle\langle 1|) = \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

Toutes les propriétés ci-dessus peuvent être aisément généralisées au cas de $N > 1$ de degrés de liberté. Dans ce cas, ces états cohérents fermioniques [80] sont le produit tensoriel des états cohérents $|\xi_i\rangle$ du fermion i , à savoir:

$$|\psi\rangle = |\xi_1\rangle \otimes |\xi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\xi_N\rangle, \quad (3.3.32)$$

où

$$|\xi_i\rangle = (1 - \frac{1}{2}\xi_i^* \xi_i) (|0\rangle_i - \xi_i |1\rangle_i). \quad (3.3.33)$$

Les états cohérents fermioniques $|\psi\rangle$ forment une base surcomplète, la résolution de l'identité est donnée par:

$$\int d\mu(\psi, \psi^*) |\psi\rangle\langle\psi| = \mathbf{1}, \quad (3.3.34)$$

où

$$d\mu(\psi, \psi^*) = \prod_{i=0}^N d\xi_i^* d\xi_i. \quad (3.3.35)$$

Par exemple dans le cas de deux degrés de liberté ($N = 2$), ces états cohérents fermioniques s'écrivent [80]:

$$|\psi\rangle = |\xi_1\rangle \otimes |\xi_2\rangle \quad (3.3.36)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\psi^* \psi} (|00\rangle + |10\rangle \xi_1 + |01\rangle \xi_2 - |11\rangle \xi_1 \xi_2). \quad (3.3.37)$$

Son adjoint hermitique est,

$$\langle\psi| = \langle\xi_1| \otimes \langle\xi_2|, \quad (3.3.38)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\psi^* \psi} (\langle 00| + \xi_1^* \langle 10| + \xi_2^* \langle 01| - \xi_1^* \xi_2^* \langle 11|). \quad (3.3.39)$$

Où

$$\psi^* \psi = \xi_1^* \xi_1 + \xi_2^* \xi_2. \quad (3.3.40)$$

Après avoir présenté les concepts de base des états cohérents fermioniques, nous allons construire dans le chapitre prochain les états cohérents pour l'oscillateur fermionique forcé non-stationnaire. En outre, nous développerons dans la deuxième partie de cette thèse un schéma analogue pour la construction des états cohérents associés à un Hamiltonien pseudo-Hermitien à deux-niveaux.

CHAPITRE

4

Invariants et états

cohérents de l'oscillateur

fermionique forcé

4.1 Introduction à la théorie des invariants

L'objectif de ce chapitre est de construire les états cohérents de l'oscillateur fermionique forcé non-stationnaire à l'aide de la méthode des invariants et d'établir la forme la plus générale des Hamiltoniens qui préservent la cohérence⁽¹⁾ des états cohérents fermioniques. Nous commençons d'abord par une revue des résultats principaux établis pour l'oscillateur bosonique forcé. Nous étudierons ensuite la stabilité temporelle des états cohérents fermioniques et nous montrerons en utilisant l'analogie fermionique de la méthode des invariants utilisée par Trifonov et al dans le cas bosonique [102, 103, 104], que la forme la plus générale de l'Hamiltonien qui préserve la cohérence des états cohérents fermioniques est de la forme de l'oscillateur fermionique libre non-stationnaire. Nous traiterons ensuite le système le plus général de l'oscillateur fermionique forcé non-stationnaire, en construisant les états cohérents pour ce dernier à l'aide de la méthode des invariants [96, 102, 103].

La théorie des invariants de Lewis et Riesenfeld [96] est une méthode très efficace pour la résolution des systèmes quantiques dépendants du temps. Cette méthode révèle une relation simple entre les états propres de l'invariant et la solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps.

Dans le but d'illustrer cette théorie d'une manière simple, on considère un système physique décrit par un Hamiltonien $H(t)$ dépendant explicitement du temps. Lewis et Riesenfeld [96] ont montré qu'il est possible de construire un opérateur invariant qui dépend explicitement du temps $I(t)$ et qui vérifie:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I, H] = 0, \quad (4.1.1)$$

$$I(t) = I^+(t). \quad (4.1.2)$$

$I(t)$ s'exprime en fonction de l'opérateur d'évolution $U(t)$ de l'équation de Schrödinger ($i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t) = H(t)U(t)$) par:

$$I(t) = U(t)I(0)U^+(t). \quad (4.1.3)$$

⁽¹⁾C'est-à-dire des Hamiltoniens pour lesquels un état cohérent initial reste toujours état cohérent au cours du temps.

L'équation aux valeurs propres de $I(t)$ est donnée par:

$$I(t) |\lambda_n, t\rangle = \lambda_n |\lambda_n, t\rangle, \quad (4.1.4)$$

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial t} = 0, \quad (4.1.5)$$

où les valeurs propres λ_n sont indépendantes du temps et les $|\lambda_n, t\rangle$ est un choix de vecteurs propres de référence de $I(t)$. $I(t)$ possède une propriété remarquable que tout état propre de $I(0)$ évolue en un état propre de $I(t)$:

$$|\psi_n(t)\rangle = U(t) |\lambda_n, 0\rangle = e^{i\phi_n(t)} |\lambda_n, t\rangle. \quad (4.1.6)$$

Il en résulte à partir de l'équation de Schrödinger pour $|\psi_n(t)\rangle$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_n(t)\rangle = H(t) |\psi_n(t)\rangle, \quad (4.1.7)$$

que $\phi_n(t)$ satisfait la relation:

$$\frac{d\phi_n(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar} \langle \lambda_n, t | H | \lambda_n, t \rangle + i \langle \lambda_n, t | \frac{\partial}{\partial t} | \lambda_n, t \rangle, \quad (4.1.8)$$

dont le second membre de cette dernière équation, contient une partie dynamique et une partie géométrique.

4.2 Revue de la stabilité temporelle de l'oscillateur bosonique forcé

L'évolution temporelle des états cohérents a focalisé une grande attention depuis l'introduction par Glauber des états cohérents de l'oscillateur harmonique [59, 60, 61]. L'intérêt particulier est de déterminer la forme la plus générale de l'Hamiltonien pour le quel un état cohérent initial reste toujours état cohérent au cours du temps⁽¹⁾. Il a été établi que cet Hamiltonien a la forme de l'oscillateur bosonique forcé non-stationnaire [97, 98, 99, 100, 101]:

$$H_{cs} = \omega(t)a^+a + f(t)a^+ + f^*(t)a + \beta(t), \quad (4.2.1)$$

⁽¹⁾Dans la littérature, ces Hamiltoniens dits aussi qu'ils préservent la cohérence.

où $\omega(t)$ et $\beta(t)$ sont des fonctions réelles arbitraires et $f(t)$ est une fonction complexe arbitraire dépendantes du temps. Ici, "cohérence" signifie que l'état cohérent évolué $|z; t\rangle$,

$$i\frac{d}{dt}|z; t\rangle = H_{cs}|z; t\rangle, \quad (4.2.2)$$

reste toujours état propre de l'opérateur d'annihilation a qui définit cet état cohérent à l'instant initial⁽¹⁾ ($a|z\rangle = z|z\rangle$), avec une valeur propre dépendante du temps $z(t)$,

$$a|z; t\rangle = z(t)|z; t\rangle. \quad (4.2.3)$$

De cette dernière équation, on déduit que, à un facteur de phase près, que l'état cohérent évolué $|z; t\rangle$ s'écrit:

$$|z; t\rangle = e^{i\varphi(t)}|z(t)\rangle, \quad |z(t)\rangle = e^{a^+z(t)-z^*(t)a}|0\rangle. \quad (4.2.4)$$

La valeur propre dépendante du temps $z(t)$ obéit à l'équation du mouvement [97, 98, 99, 100, 101]:

$$i\dot{z} = \omega(t)z + f(t), \quad (4.2.5)$$

dont la solution prend la forme explicite ($z = z(0)$):

$$z(t) = ze^{-i\int_0^t \omega(t')dt'} - i \left(\int_0^t e^{i\int_0^{t'} \omega(\tau)d\tau} f(t')dt' \right) e^{-i\int_0^t \omega(t')dt'}. \quad (4.2.6)$$

Dans le cas particulier où ω est constante, nous avons:

$$z(t) = e^{-i\omega_0 t} \left(z - i\int_0^t e^{i\omega_0 t'} f(t')dt' \right). \quad (4.2.7)$$

La forme générale de l'Hamiltonien (4.2.1) qui préserve la cohérence établi initialement par Glauber-Mehta-Sudarshan, a été retrouvé plus tard par une autre méthode basée sur la théorie des invariants [102, 103]. En effet, il a été établi [104] qu'un Hamiltonien H quelconque préserve la cohérence si et seulement si il admet un opérateur invariant non-Hermitien $A(t)$ vérifiant, $[A(t), A^+(t)] = 1$, et est de la forme:

$$A(t) = U(t)aU^+(t) = \beta(t)a + \gamma(t), \quad (4.2.8)$$

⁽¹⁾C'est-à-dire a reste toujours indépendant du temps au cours de l'évolution.

où $U(t)$ est l'opérateur unitaire d'évolution et $A(t)$ l'opérateur annihilation.

En effet [104], l'oscillateur forcé (4.2.1) admet un opérateur invariant-annihilation $A(t)$ donné par:

$$A(t) = \beta(t)a + \gamma(t), \quad (4.2.9)$$

où

$$\beta(t) = e^{i \int_0^t \omega(t') dt'}, \quad \gamma(t) = i \int_0^t f(t') e^{i \int_0^{t'} \omega(\tau) d\tau} dt'. \quad (4.2.10)$$

Les états cohérents évolués $|z; t\rangle$ sont états propres de cet opérateur invariant-annihilation $A(t)$ avec des valeurs propres z indépendantes du temps⁽¹⁾,

$$A(t) |z; t\rangle = z |z; t\rangle. \quad (4.2.11)$$

$|z; t\rangle$ peut être aussi défini par l'action de l'opérateur de déplacement sur le vide $|0; t\rangle = U(t) |0\rangle$,

$$|z; t\rangle = e^{A^+(t)z - z^*A(t)} |0; t\rangle. \quad (4.2.12)$$

On note que l'opérateur dit invariant-annihilation $A(t)$ donné par l'équation (4.2.9) est différent de l'opérateur invariant $I(t)$ quadratique en a et a^+ qui a été construit et étudié par Lewis et Riesenfeld [96]. la relation entre ces deux invariants est donnée par [102]:

$$I(t) = A^+(t)A(t) + \frac{1}{2} \quad (4.2.13)$$

4.3 La stabilité temporelle de l'oscillateur fermionique forcé

La stabilité temporelle des états cohérents fermioniques est définie [95] de façon analogue à la stabilité temporelle des états cohérents bosoniques, à savoir; l'évolution d'un état cohérent initial $|\xi\rangle$ est stable, si son évolué $|\xi; t\rangle = U(t)|\xi\rangle$ (où $U(t)$ est l'opérateur d'évolution du système) reste toujours état propre de l'opérateur d'annihilation b au cours du temps,

$$b |\xi; t\rangle = \xi(t) |\xi; t\rangle. \quad (4.3.1)$$

⁽¹⁾Ces valeurs propres z sont indépendantes du temps car $A(t)$ est un invariant.

Les états cohérents évolués $|\xi; t\rangle$ sont états propres de l'opérateur invariant-annihilation $B(t) = U(t)bU^\dagger(t)$. Cela signifie que les opérateurs $B(t)$ et b doivent commuter (nous supposons que $\xi(t)$ et ξ commutent). La forme générale de l'opérateur $B(t)$ est une combinaison linéaire de b , b^\dagger et $b^\dagger b$. Une telle combinaison commute avec b sous certaines restrictions. Tenant compte du fait que les invariants $B(t)$ et $B^\dagger(t)$ doivent obéir à l'algèbre des fermions donnée par les équations (3.3.1) et (3.3.2), nous déduisons que $[b, B(t)] = 0$ si et seulement si $B(t)$ est proportionnel à b : $B(t) = \beta(t)b$. Ainsi, l'Hamiltonien qui vérifie la cohérence devrait admettre un invariant de la forme:

$$B(t) = \beta(t)b, \quad (4.3.2)$$

où $\beta(t)$ est une fonction complexe arbitraire dépendante du temps. Pour obtenir maintenant l'Hamiltonien H_{fCS} qui préserve la cohérence dans le cas fermionique, on applique la définition de l'invariant $B(t)$,

$$\frac{\partial}{\partial t}B(t) - i[B(t), H] = 0, \quad (4.3.3)$$

à l'opérateur (4.3.2). La forme générale l'un Hamiltonien H qui pourra éventuellement préserver la cohérence dans le cas fermionique est une combinaison linéaire de b , b^\dagger et $b^\dagger b$:

$$H = \omega(t)b^\dagger b + f(t)b^\dagger + f^*(t)b + g(t), \quad (4.3.4)$$

où $\omega(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions réelles dépendantes du temps. La substitution de cette dernière expression de H dans l'équation (4.3.3) pour $B(t)$ produit les deux conditions:

$$\dot{\beta} = i\beta\omega, \quad 0 = \beta f. \quad (4.3.5)$$

Ces conditions simples sont faciles à résoudre, $f(t) = 0$, $\beta(t) = e^{i\int_0^t \omega(\tau)d\tau}$, conduisant à l'Hamiltonien:

$$H_{fCS} = \omega(t)b^\dagger b + g(t), \quad (4.3.6)$$

qui préserve la cohérence dans le cas fermionique. Donc l'évolué $|\xi; t\rangle$ d'un état cohérent initial $|\xi\rangle$ qui est régi par l'Hamiltonien H_{fCS} reste toujours état propre de b avec la valeur propre

$$\xi(t) = \beta^{-1}(t)\xi = e^{-i\int_0^t \omega(\tau)d\tau}\xi. \quad (4.3.7)$$

Les résultats (4.3.6) et (4.3.7) sont similaires dans la forme mais non identiques à ceux du cas bosonique (4.2.1) et (4.2.6) respectivement. L'Hamiltonien (4.3.6) qui préserve la cohérence dans le cas fermionique est de la forme de l'oscillateur fermionique **libre** non-stationnaire (c'est-à-dire non forcé), tandis que l'Hamiltonien (4.2.1) qui préserve la cohérence dans le cas bosonique est de la forme de l'oscillateur bosonique **forcé** non-stationnaire. La section suivante est consacrée à l'étude en détail de l'oscillateur fermionique forcé non-stationnaire.

4.4 Construction des l'invariants

Nous considérons la forme la plus générale de l'oscillateur fermionique forcé non-stationnaire, décrit par l'Hamiltonien (4.3.4). Les trois opérateurs b , b^+ et $N = b^+b$ satisfont les relations de commutation qui vérifient une algèbre fermée:

$$[b, N] = b, \quad [b^+, N] = -b^+, \quad [b, b^+] = 1 - 2N. \quad (4.4.1)$$

On introduit les opérateurs dits du spin J_i ($j = 1, 2, 3$) donnés par,

$$J_1 = \frac{1}{2}(b^+ + b), \quad J_2 = \frac{1}{2i}(b^+ - b), \quad J_3 = b^+b - \frac{1}{2}. \quad (4.4.2)$$

Les opérateurs J_i vérifient l'algèbre $su(2)$:

$$[J_k, J_l] = i\epsilon_{klm}J_m. \quad (4.4.3)$$

Il est commode d'utiliser les opérateurs $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$ qui satisfont les relations de commutation suivantes:

$$[J_+, J_-] = 2J_3, \quad [J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad (4.4.4)$$

où $J_+ = b^+$, $J_- = b$. D'où l'Hamiltonien (4.3.4) s'écrit en fonction des ces opérateurs sous la forme:

$$H = \omega(t)J_3 + f(t)J_+ + f^*(t)J_- + g(t) + \frac{\omega(t)}{2}. \quad (4.4.5)$$

On se propose de construire les opérateurs invariants $B(t)$ et $B^+(t)$ non-Hermitiens associés à notre système (4.3.4), (4.4.5) sous la forme de combinaison linéaire des générateurs du

groupe $su(2)$ ci-dessus, à savoir:

$$B(t) = \nu_-(t)J_- + \nu_+(t)J_+ + \nu_3(t)J_3, \quad (4.4.6)$$

$$B^+(t) = \nu_+^*(t)J_- + \nu_-^*(t)J_+ + \nu_3^*(t)J_3, \quad (4.4.7)$$

où $\nu_{\pm}(t)$, $\nu_3(t)$ sont des fonctions complexes dépendantes du temps.

En substituant (4.4.6), (4.4.5) dans (4.3.3), on trouve le système différentiel suivant pour les paramètres de $B(t)$:

$$\dot{\nu}_3 = 2i(\nu_+f^* - \nu_-f), \quad (4.4.8)$$

$$\dot{\nu}_+ = i(\nu_3f - \nu_+\omega), \quad (4.4.9)$$

$$\dot{\nu}_- = i(\nu_-\omega - \nu_3f^*). \quad (4.4.10)$$

Les solutions de ce système différentiel linéaire du premier ordre (4.4.8)-(4.4.10) sont déterminées par les conditions initiales: $\nu_{\pm}(0) = \nu_{0,\pm}$, $\nu_3(0) = \nu_{0,3}$. Si nous voulons que les invariants $B(t)$ et $B^+(t)$ soient des opérateurs qui satisfont l'algèbre des fermions, c'est-à-dire obéissent aux conditions:

$$B^2(t) = 0, \quad [B(t), B^+(t)]_+ = 1, \quad (4.4.11)$$

nous avons qu'à prendre $\nu_{0,\pm}$ et $\nu_{0,3}$ telles que:

$$\nu_{0,3}^2 = -4\nu_{0,+}\nu_{0,-}, \quad |\nu_{0,-}| + |\nu_{0,+}| = 1. \quad (4.4.12)$$

En effet, nous trouvons pour $B^2(t)$ et $[B(t), B^+(t)]_+$:

$$B^2(t) = \nu_+\nu_- + \frac{1}{4}\nu_3^2 \equiv \lambda_1(\nu_{\pm}, \nu_3), \quad (4.4.13)$$

$$[B(t), B^+(t)]_+ = |\nu_-|^2 + |\nu_+|^2 + \frac{1}{2}|\nu_3|^2 \equiv \lambda_2(\nu_{\pm}, \nu_3).$$

Les quantités $\lambda_1(\nu_{\pm}, \nu_3)$, $\lambda_2(\nu_{\pm}, \nu_3)$ s'avèrent être deux "constantes du mouvement" pour le système (4.4.8)-(4.4.10), car leurs dérivées premières par rapport au temps s'annulent:

$$\frac{d}{dt}\lambda_1 \equiv \frac{d}{dt}(\nu_+\nu_- + \frac{1}{4}\nu_3^2) = 0, \quad (4.4.14)$$

$$\frac{d}{dt}\lambda_2 \equiv \frac{d}{dt}(|\nu_-|^2 + |\nu_+|^2 + \frac{1}{2}|\nu_3|^2) = 0.$$

Par conséquent, nous pouvons fixer les valeurs de ces deux constantes tel que $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$, et tel que la condition (4.4.11) soit satisfaite:

$$\nu_+\nu_- + \frac{1}{4}\nu_3^2 = 0, \quad |\nu_-|^2 + |\nu_+|^2 + \frac{1}{2}|\nu_3|^2 = 1. \quad (4.4.15)$$

Si on prend

$$\nu_-(0) = 1, \quad \nu_+(0) = 0 = \nu_3(0), \quad (4.4.16)$$

on a

$$B(0) = b. \quad (4.4.17)$$

Dans le cas particulier de l'oscillateur fermionique libre, $f(t) \equiv 0$, les solutions du système d'équations (4.4.8)-(4.4.10) sont obtenues facilement sous la forme:

$$\nu_{\pm}(t) = \nu_{0,\pm} e^{\pm i \int^t \omega(\tau) d\tau}, \quad \nu_3 = \nu_{0,3}, \quad (4.4.18)$$

où $\nu_{0,\pm}$, $\nu_{0,3}$ sont des constantes. Pour ces solutions, on remarque que les expressions $\lambda_1(\nu_{\pm}, \nu_3)$, $\lambda_2(\nu_{\pm}, \nu_3)$ sont des constantes comme a été prévu:

$$\lambda_1 = \nu_{0,-}\nu_{0,+} + \nu_{0,3}^2/4, \quad \lambda_2 = |\nu_{0,-}|^2 + |\nu_{0,+}|^2 + |\nu_{0,3}|^2/2. \quad (4.4.19)$$

A partir des équations (4.4.13), (4.4.15), nous constatons que l'invariant $B(t)$ prend maintenant la forme $B_{\text{so}}(t)$,

$$B_{\text{so}}(t) = \nu_{0,-} e^{-i\varphi(t)} b + \nu_{0,+} e^{i\varphi(t)} b^+ + 2\sqrt{-\nu_{0,-}\nu_{0,+}} \left(b^+ b - \frac{1}{2} \right), \quad (4.4.20)$$

où

$$\varphi(t) = \int^t \omega(\tau) d\tau \quad \text{et} \quad |\nu_{0,-}| + |\nu_{0,+}| = 1, \quad (4.4.21)$$

et les phases de $\nu_{0,\pm}$ sont arbitraires.

Considérons maintenant avec plus de détail, l'oscillateur fermionique forcé non-stationnaire, c'est-à-dire $f(t) \neq 0$. Pour ce système, nous pouvons exprimer les trois paramètres $\nu_{\pm}(t)$, $\nu_3(t)$ en fonction de l'un d'eux, qui doit obéir à une équation différentielle du second ordre. Exprimons $\nu_3(t)$ et $\nu_-(t)$ en fonction de $\nu_+(t)$ et de ses dérivés. Nous obtenons:

$$\nu_3 = -\frac{i}{f}(\dot{\nu}_+ + i\nu_+\omega), \quad (4.4.22)$$

$$\nu_- = \frac{1}{2f^2} \left[\ddot{\nu}_+ + \left(i\omega - \frac{\dot{f}}{f} \right) \dot{\nu}_+ + \left(2ff^* + i\omega - i\frac{\omega\dot{f}}{f} \right) \nu_+ \right]. \quad (4.4.23)$$

En Prenant la dérivé première par rapport au temps des deux côtés de l'équation (4.4.23) et en utilisant l'équation (4.4.10) et (4.4.22), nous trouvons l'équation du troisième ordre pour $\nu_+(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2f^2} \ddot{\nu}_+ &= \frac{3\dot{f}}{2f^3} \ddot{\nu}_+ - \left(2\frac{f^*}{f} + \frac{\omega^2}{2f^2} + \frac{i\dot{\omega}}{2f^2} + \frac{3\dot{f}^2}{2f^4} - i\frac{\omega\dot{f}}{f^3} - \frac{\ddot{f}}{2f^3} \right) \dot{\nu}_+ - \\ &\left(\frac{\dot{f}^*}{f} + \frac{\omega\dot{\omega}}{2f^2} - \frac{\omega^2\dot{f}}{2f^3} - \frac{f^*\dot{f}}{f^2} - i\frac{3\omega\dot{f}}{2f^3} + \frac{i\ddot{\omega}}{2f^2} - \frac{i\omega\ddot{f}}{2f^3} + i\frac{3\omega\dot{f}^2}{2f^4} \right) \nu_+. \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

En outre, si nous trouvons une intégrale première de l'équation (4.4.24), alors nous pouvons exprimer ν_- en fonction de ν_+ et $\dot{\nu}_+$, en éliminant la dérivé seconde dans l'équation (4.4.23). On peut vérifier que l'expression de λ en fonction de ν_+ , $\dot{\nu}_+$ et $\ddot{\nu}_+$ est une intégrale première de l'équation (4.4.24) (c'est à dire: $d\lambda/dt = 0$),

$$\lambda = \frac{4}{f^2} \left[2\nu_+\ddot{\nu}_+ - \dot{\nu}_+^2 - 2\nu_+\dot{\nu}_+\frac{\dot{f}}{f} + 4\nu_+^2 \left(|f|^2 + \frac{\omega^2}{4} + i\frac{\dot{\omega}}{2} - i\frac{\omega\dot{f}}{2f} \right) \right]. \quad (4.4.25)$$

Nous considérons cette dernière équation comme étant une équation différentielle du second ordre pour ν_+ , qui dépend de la constante arbitraire λ et en supposant que $\nu_+ \neq 0$, nous obtenons une expression plus compacte pour ν_- en fonction de ν_+ et $\dot{\nu}_+$,

$$\nu_- = \frac{\lambda}{16\nu_+} - \frac{1}{4f^2\nu_+} (\omega\nu_+ - i\dot{\nu}_+)^2, \quad (4.4.26)$$

c'est-à-dire

$$\nu_- = (\lambda/4 - \nu_3^2)/4\nu_+. \quad (4.4.27)$$

L'intégrale première λ de l'équation (4.4.24) est proportionnelle à la constante du mouvement λ_1 du système (4.4.8)-(4.4.10): $\lambda_1 = \lambda/16$.

Ainsi, les opérateurs $B(t)$, $B^+(t)$ des équations (4.4.6) et (4.4.7) sont des invariants pour le système de l'oscillateur fermionique forcé (4.3.4), (4.4.5) si $\nu_+(t)$ est une solution non nulle de l'équation différentielle du second ordre (4.4.25) avec une constante λ quelconque, et ν_3 et ν_- sont données par les équations (4.4.22) et (4.4.26) respectivement. Ils obéissent à la condition de l'algèbre des fermions (4.4.11) si $\lambda_1 = 0 = \lambda$ et $\lambda_2 = 1$. Au lieu de fixer $\lambda_2 = 1$,

nous pouvons redéfinir $B(t) \rightarrow B(t)/\sqrt{\lambda_2}$, c'est-à-dire prendre l'invariant d'une forme qui est valable pour toute constante du mouvement non-négative $\lambda_2 = |\nu_-|^2 + |\nu_+|^2 + |\nu_3|^2/2$,

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \left[\frac{1}{f} (\nu_+ \omega - i\dot{\nu}_+) (b^+ b - \frac{1}{2}) + \nu_+ b^+ - \frac{1}{4f^2 \nu_+} (\omega \nu_+ - i\dot{\nu}_+)^2 b \right], \quad (4.4.28)$$

où ν_+ est la solution de l'équation (4.4.25) avec $\lambda = 0$.

Dans ce cas, les équations (4.4.24), (4.4.26) et (4.4.22) se simplifient si nous posons:

$$\nu_+(t) = \frac{1}{2} \epsilon^2(t). \quad (4.4.29)$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \nu_- &= -\frac{1}{2f^2} \left(\frac{\omega}{2} \epsilon - i\dot{\epsilon} \right)^2, \\ \nu_3 &= \frac{1}{f} \left(\frac{\omega}{2} \epsilon^2 - i\epsilon \dot{\epsilon} \right), \end{aligned} \quad (4.4.30)$$

où $\epsilon(t)$ vérifie l'équation auxiliaire:

$$\ddot{\epsilon} - \frac{f}{f} \dot{\epsilon} + \Omega(t) \epsilon = 0, \quad (4.4.31)$$

$$\Omega(t) = |f(t)|^2 + \frac{1}{4} \omega^2(t) + \frac{i}{2} \dot{\omega} - \frac{i}{2} \omega \frac{f}{f}. \quad (4.4.32)$$

Cette équation (4.4.31) admet λ_2 donné par l'équation (4.4.13) comme intégrale première:

$$\lambda_2 = \frac{|\epsilon|^4}{4} \left(1 + \frac{2}{|f|^2} \left| \frac{\omega}{2} \epsilon - i\dot{\epsilon} \right|^2 + \frac{1}{|f|^4} \left| \frac{\omega}{2} \epsilon - i\dot{\epsilon} \right|^4 \right). \quad (4.4.33)$$

Dans l'équation (4.4.31), le terme proportionnel à $\dot{\epsilon}$ peut être éliminé par la substitution de

$$\epsilon = \epsilon' \exp \left(\frac{1}{2} \int^t \frac{f}{f}(\tau) d\tau / f(\tau) \right), \quad (4.4.34)$$

ce qui conduit à une équation auxiliaire plus simple:

$$\ddot{\epsilon}' + \Omega'(t) \epsilon' = 0, \quad (4.4.35)$$

$$\Omega'(t) = |f(t)|^2 + \frac{1}{4} \omega^2(t) + \frac{i}{2} \dot{\omega} - \frac{i}{2} \omega \frac{f}{f} + \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{f}}{f} \right) - \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^2. \quad (4.4.36)$$

• Il est intéressant de noter que les opérateurs invariants dans le cas de l'oscillateur bosonique forcé, ont été obtenus [102, 103] en termes des solutions de la même équation auxiliaire (4.4.35).

4.5 Etats cohérents de l'oscillateur fermionique forcé

Nous définissons [95] les états cohérents pour notre système décrit par l'Hamiltonien (4.3.4), (4.4.5), comme états propres de l'opérateur invariant-annihilation $B(t)$ donné par l'équation (4.4.28):

$$B(t)|\xi; t\rangle = \xi|\xi; t\rangle. \quad (4.5.1)$$

Puisque $B(t)$ est un invariant pour notre système (4.3.4), (4.4.5), donc les valeurs propres ξ sont indépendantes du temps. Les expressions de $|\xi; t\rangle$ en fonction de ξ , $B(t)$, $B^+(t)$ et du vide $|0; t\rangle$ de $B(t)$, sont analogues à celles que nous avons donné par les équations (3.3.10), (3.3.23) pour les états cohérents fermioniques "canoniques" $|\xi\rangle$ en termes de ξ , b , b^+ et du vide $|0\rangle$ de b . En particulier, on a

$$|\xi; t\rangle = e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi} (|0; t\rangle - \xi B^+(t)|0; t\rangle). \quad (4.5.2)$$

Il reste donc à construire le nouveau état du vide $|0; t\rangle$ de $B(t)$ selon la définition de ses équations:

$$B(t)|0; t\rangle = 0, \quad (4.5.3)$$

$$i\frac{d}{dt}|0; t\rangle = H|0; t\rangle. \quad (4.5.4)$$

On pose

$$|0; t\rangle = \alpha_0(t)|0\rangle + \alpha_1(t)|1\rangle. \quad (4.5.5)$$

En substituant cette dernière expression (4.5.5) dans les équations (4.5.3) et (4.5.4), on trouve:

$$\alpha_1(t) = \alpha_0(t) \frac{\nu_3^*(t)}{2\nu_+^*(t)}, \quad (4.5.6)$$

$$\alpha_0(t) = \sqrt{|\nu_+(t)|} \exp \left[-\frac{i}{2} \left(\varphi_{\nu_+}(t) + \int^t (2g(\tau) + \omega(\tau)) d\tau \right) \right], \quad (4.5.7)$$

où φ_{ν_+} est la phase de $\nu_+(t)$.

L'état $|\xi; t\rangle$ représente l'évolution exacte de l'état cohérent initial $|\xi\rangle$ avec des conditions initiales qui sont données par l'équation (4.4.16): $|\xi; 0\rangle = |\xi\rangle$. Comme nous l'avons montré

dans la section (4.3), l'évolué $|\xi; t\rangle$ d'un état cohérent initial pourrait être état propre de b si l'oscillateur fermionique n'est pas "forcé", c'est-à-dire si $f(t) = 0$.

Notons que la dépendance du temps des états cohérents $|\xi; t\rangle$ est obtenue par l'intermédiaire des solutions du système d'équations classiques (4.4.8)-(4.4.10). Ces dernières sont les mêmes équations classiques dans le cas des états cohérents bosoniques [102, 103].

Notre méthode de construction des invariants diffère légèrement de la méthode de Lewis-Riesenfeld [96] (développée pour l'oscillateur bosonique). Lewis et Riesenfeld ont construit un invariant Hermitien factorisé comme le produit de deux opérateurs de création et d'annihilation. Pour se connecter à leur approche, nous supposons que nous avons construit un invariant Hermitien $N(t)$ et nous avons trouvé les opérateurs $\tilde{B}(t)$ et $\tilde{B}^+(t)$ qui le factorisent: $N(t) = \tilde{B}^+(t)\tilde{B}(t)$. Il est clair que $\tilde{B}(t)$ est différent de notre invariant $B(t)$ à un facteur de phase près:

$$\tilde{B}(t) = e^{i\varphi(t)}B(t). \quad (4.5.8)$$

Nous pouvons alors construire d'une façon standard les états propres de $N(t)$:

$$N(t)|\widetilde{0}; t\rangle = 0 \quad \text{et} \quad N(t)|\widetilde{1}; t\rangle = |\widetilde{1}; t\rangle, \quad (4.5.9)$$

et de $\tilde{B}(t)$

$$\tilde{B}(t)|\widetilde{\xi}; t\rangle = \xi|\widetilde{\xi}; t\rangle, \quad (4.5.10)$$

$$|\widetilde{\xi}; t\rangle = \left(1 - \frac{1}{2}\xi^*\xi\right) \left[|\widetilde{0}; t\rangle - \xi|\widetilde{1}; t\rangle\right]. \quad (4.5.11)$$

Mais les états $|\widetilde{\xi}; t\rangle$ n'obéissent pas à l'équation de Schrödinger, car en général les $\tilde{B}(t)$ ne sont pas des invariants. Afin d'obtenir des états $|n; t\rangle$ et $|\xi; t\rangle$, on devrait multiplier les états propres $|\widetilde{n}; t\rangle$ ci-dessus, $n = 0, 1$, par des facteurs de phase:

$$|n; t\rangle = e^{i\phi_n(t)}|\widetilde{n}; t\rangle, \quad n = 0, 1, \quad (4.5.12)$$

$$|\xi; t\rangle = \left(1 - \frac{1}{2}\xi^*\xi\right) \left[e^{i\phi_0(t)}|\widetilde{0}; t\rangle - \xi e^{i\phi_1(t)}|\widetilde{1}; t\rangle\right], \quad (4.5.13)$$

qui satisfont aux équations:

$$\frac{d}{dt}\phi_n = \langle\widetilde{n}; t|i\frac{\partial}{\partial t} - H|\widetilde{n}; t\rangle, \quad n = 0, 1. \quad (4.5.14)$$

Evidemment l'état (4.5.13) est état propre de $\tilde{B}(t)$ avec une valeur propre dépendante du temps:

$$\xi(t) = \xi \exp(i\varphi(t)), \quad \varphi(t) = \phi_1(t) - \phi_0(t). \quad (4.5.15)$$

La phase $\varphi(t) = \phi_1(t) - \phi_0(t)$ qui contient deux contributions, une géométrique φ^G et une dynamique $\varphi^D = \varphi - \varphi^G$ [73],

$$\varphi^G(t) = i \int_0^t \left(\langle \widetilde{1; t'} | \frac{\partial}{\partial t'} \widetilde{1; t'} \rangle - \langle \widetilde{0; t'} | \frac{\partial}{\partial t'} \widetilde{0; t'} \rangle \right) dt' \quad (4.5.16)$$

$$= \varphi(t) + \int_0^t \left(\langle \widetilde{1; t'} | H | \widetilde{1; t'} \rangle - \langle \widetilde{0; t'} | H | \widetilde{0; t'} \rangle \right) dt'. \quad (4.5.17)$$

- Dans ce chapitre, nous avons généralisé les premiers résultats sur la cohérence des Hamiltoniens et les opérateurs invariants du cas bosonique au cas fermionique. Nous avons mis en relief, contrairement à la cohérence des Hamiltoniens dans le cas bosonique, la forme la plus générale des Hamiltoniens qui préservent la cohérence dans le cas fermionique.

On se propose dans la seconde partie de cette thèse, de traiter le formalisme des états cohérents dans le cadre d'une nouvelle mécanique quantique non-Hermitienne.

Partie II

Etats cohérents en mécanique quantique non-Hermitienne

La deuxième partie de cette thèse est consacrée à la construction des états cohérents dits pseudo-fermioniques pour les systèmes à deux-niveaux décrits par des Hamiltoniens pseudo-Hermitiens. Ces systèmes sont en fait, les atomes à deux-niveaux en interaction avec un champ électromagnétique classique, utilisés couramment dans le domaine de l'optique quantique [32, 37, 38].

Dans le cinquième chapitre nous ferons une présentation historique de la mécanique quantique non-Hermitienne depuis 1959. Cette présentation montre comment des théories non-Hermitiennes ont été employées avant son développement à partir de 1998. Dans le but de déterminer les critères auxquels la mécanique quantique non-Hermitienne doit répondre, nous rappellerons les concepts de base de la mécanique quantique conventionnelle, définie par un Hamiltonien Hermitien.

Le sixième chapitre fournit un examen détaillé de la théorie quantique PT -symétrique développée par Bender et al [1]-[7] depuis 1998. Nous donnerons les définitions et les propriétés élémentaires de la PT -symétrie. Nous discuterons ensuite les deux cas des PT -symétries brisées et non-brisées. Nous définirons aussi l'opérateur de conjugaison C , introduit par Bender [3] dans le but de définir un CPT -produit scalaire ayant une norme positive. Ceci comme alternative au PT -produit scalaire qui ne possède pas toujours une norme positive. Nous ferons également une comparaison entre la théorie quantique Hermitienne et PT -symétrique.

Au septième chapitre, nous présenterons la théorie quantique pseudo-Hermitienne développée par Mostafazadeh [15]-[24] depuis 2002. Nous donnerons d'abord une présentation historique de la pseudo-Hermiticité. Ensuite, nous donnerons les définitions et les propriétés de la pseudo-Hermiticité. Le chapitre se termine par l'examen d'une classe d'Hamiltoniens pseudo-Hermitiens qui possèdent une base biorthonormée complète.

Au huitième chapitre, nous allons étudier en détails les systèmes à deux-niveaux décrits par des Hamiltoniens pseudo-Hermitiens. Les propriétés PT -symétriques et de pseudo-Hermiticité de ces systèmes seront aussi présentées puis discutées.

Le neuvième chapitre, portera sur la construction des états cohérents pseudo-fermioniques pour les systèmes à deux-niveaux décrits par des Hamiltoniens pseudo-Hermitiens, où les paramètres de base sont les variables de Grassmann [82]. Nous allons tout d'abord introduire les opérateurs pseudo-fermioniques d'annihilation et de création b et $b^\# = \eta^{-1}b^+\eta$ associés à notre Hamiltonien H . Où η est l'opérateur linéaire, Hermitien et inversible qui assure la pseudo-Hermiticité de l'Hamiltonien $H^\# = \eta^{-1}H^+\eta$. En termes des opérateurs b et $b^\#$, H est factorisé sous la forme de l'oscillateur pseudo-fermionique: $H = \Omega \left(b^\#b - \frac{1}{2} \right)$. Nous allons ensuite refaire la même procédure pour H^+ ; c'est-à-dire, nous allons introduire également des opérateurs pseudo-fermioniques d'annihilation $\tilde{b} = \eta b \eta^{-1}$ et de création $\tilde{b}^{\#'} = \eta \tilde{b}^+ \eta^{-1}$ associés à H^+ . En termes des opérateurs \tilde{b} et $\tilde{b}^{\#'}$, H^+ est factorisé sous la forme: $H^+ = \Omega \left(\tilde{b}^{\#'}\tilde{b} - \frac{1}{2} \right)$. Une fois que nous aurons introduit tous les ingrédients relatifs aux états cohérents, nous construirons les états cohérents pseudo-fermioniques et nous étudierons leur évolution temporelle.

Nous terminerons cette partie, par une conclusion dans laquelle nous discuterons nos résultats.

CHAPITRE

5

Emergence des théories quantiques non-Hermitiennes

5.1 Les repères historiques d'une mécanique quantique non-Hermitienne

L'utilisation des Hamiltoniens non-Hermitiens en physique remonte à une période lointaine. En 1959, Wu [85] a utilisé un Hamiltonien non-Hermitien pour la description des "sphères de Bose". Il a montré que l'énergie de l'état fondamental de ce système est réelle et il a conjecturé que tous les niveaux d'énergie sont réels. Ce résultat était en contradiction avec le résultat antérieur, qui stipulait que l'énergie de l'état fondamental pour ce même système était divergente. Wu avait constaté que l'utilisation d'un Hamiltonien non-Hermitien résolvait ce problème de divergence. Néanmoins, l'auteur n'avait pas fourni de justification pour introduire d'autres Hamiltoniens non-Hermitiens à spectres réels.

En 1967, Wong [87] a présenté quelques résultats sur les propriétés spectrales d'une classe d'Hamiltoniens non-Hermitiens dits "physiquement raisonnables", en se basant sur la théorie des perturbations. Il a remarqué que les Hamiltoniens des systèmes fermés sont Hermitiens, mais quand une interaction extérieure surgit, l'Hamiltonien perd son Hermécticité. Par conséquent, sa classe d'Hamiltoniens non-Hermitiens physiquement raisonnables s'écrit sous une forme perturbative [86, 87]:

$$H = H_0 + gH_1, \tag{5.1.1}$$

où H_0 est un Hamiltonien Hermitien, H_1 est un Hamiltonien non-Hermitien à spectre discret, et g est un paramètre réel. Il a appelé cette classe d'Hamiltoniens dissipatifs, mais il n'a pas donné une définition complète à ce dernier terme. L'auteur a établi plusieurs propriétés relatives à ces Hamiltoniens. Cependant, la réalité du spectre n'a pas été mentionné dans son document. En outre, les valeurs propres complexes semblent être admis, mais il n'a pas fourni une explication dont la façon avec laquelle ces valeurs propres complexes pourraient éventuellement être physiquement raisonnables.

Bender et Wu en 1969 [88] ont proposé une alternative à la méthode basée sur la théorie des perturbations, dans le but de calculer l'énergie de l'état fondamental. Ils ont traité le

modèle de l'oscillateur anharmonique, décrit par l'Hamiltonien:

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}x^2 + \lambda x^4, \quad (5.1.2)$$

où λ est un paramètre complexe. Aucune allusion n'a été faite de façon explicite aux Hamiltoniens Hermitiens ou non-Hermitiens et leur approche bute sur le problème de divergence. Ce problème a été résolu plus tard en utilisant la théorie des perturbations normalisées.

En 1975, Haydock et Kelly [89] ont utilisé des Hamiltoniens non-Hermitiens pour déterminer la densité d'états pour un pseudo-potentiel chimique. Ils ont montré que ce dernier a donné lieu à des interactions de nature non-Hermitienne entre les électrons orbitaux. Ils ont aussi illustré leurs résultats en déterminant la structure électronique de l'arsenic cristallin. *Cela a été l'un des premiers documents à dire explicitement que l'Hermiticité était une condition suffisante mais pas nécessaire pour avoir un spectre réel* [86, 89].

En 1980, Stedman et Bulter [90] ont publié un article sur la symétrie d'inversion du temps dans le cadre des applications de la théorie des groupes. En particulier, ils ont mis l'accent sur l'effet des règles de sélection de l'inversion du temps dans les groupes de rotation $so(3)$. Ce fut la première référence [86] qui liait le terme "opérateur d'inversion du temps" et l'opération de conjugaison complexe, comme il est utilisé actuellement dans les PT et CPT -symétries.

En 1981, Faisal et Moloney [35] ont établi une formulation quantique du processus du déclin par leur conversion de l'équation de Shrödinger pour des Hamiltoniens Hermitiens au cas non-Hermitien. Ils ont établi que, les états qui subissent le processus du déclin ne peuvent pas avoir une forte énergie, et que la largeur d'un tel niveau d'énergie peut être représentée par une composante qui est complexe. En outre, ces énergies complexes correspondent aux valeurs propres de l'Hamiltonien non-Hermitien associé au processus du déclin.

En 1997 Hatano et Nelson [91] ont justifié l'utilisation d'un spectre complexe pour interpréter l'existence d'une partie imaginaire dans l'énergie d'un semi-conducteur sur le quel est appliqué un champ magnétique externe.

Tous ces travaux repèrent et utilisent les propriétés remarquables des Hamiltoniens non-Hermitiens. Néanmoins, ces Hamiltoniens ne correspondaient à aucune théorie quantique qui possède une base fondamentale ou analytique. *Des théories non-Hermitiennes à spectres réels qui ont des bases analytiques ont paru dans la littérature à partir de 1998.*

En effet, Bender et al (1998) et Mostafazadeh (2002) *ont introduit des idées originales à la mécanique quantique non-Hermitienne.* Ils ont présenté deux alternatives à la théorie quantique conventionnelle⁽¹⁾, à savoir *la PT-symétrie* introduite par Bender et al [1]-[7], et *la pseudo-Hermiticité* introduite par Mostafazadeh [15]-[24]. De ce fait, *ces deux nouvelles théories quantiques forment une base fondamentale de la mécanique quantique non-Hermitienne.*

Dans le but de faire la comparaison avec les théories quantiques PT-symétrique et pseudo-Hermitienne, nous récapitulerons dans la section suivante la théorie de la mécanique quantique conventionnelle définie par un Hamiltonien Hermitien. Nous répéterons ces procédures dans les deux chapitres suivants pour des Hamiltoniens PT-symétriques et pseudo-Hermitiens.

5.2 Revue de la théorie quantique Hermitienne

Nous passerons en revue dans cette section, les concepts de base de la mécanique quantique conventionnelle, définie par un Hamiltonien Hermitien.

- L'espace des états de la mécanique quantique Hermitienne est un espace de Hilbert⁽²⁾ \mathcal{H} , de dimension finie ou infinie. Dans cet espace, les vecteurs d'états dans la configuration de Dirac sont représentés par les kets $|\psi\rangle$, et sur les quels les opérateurs agissent. Cet espace

⁽¹⁾C'est-à-dire définie par un Hamiltonien Hermitien.

⁽²⁾L'espace de Hilbert, par définition, est un espace vectoriel qui, pour les besoins de la mécanique quantique, est défini sur le corps des nombres complexes.

\mathcal{H} est muni du produit scalaire standard défini positif⁽¹⁾⁽²⁾:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int dx [\phi(x)]^* \psi(x). \quad (5.2.1)$$

• Par définition, l'opérateur adjoint A^+ d'un opérateur A est défini par⁽³⁾:

$$\langle A^+ \phi | \psi \rangle = \langle \phi | A \psi \rangle = \forall |\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}. \quad (5.2.2)$$

On note que $|A\psi\rangle$ est une notation pour désigner le ket $|A\psi\rangle = A|\psi\rangle$. Le bras associé au ket $A|\psi\rangle$ est $\langle A\psi| = \langle \psi|A^+$. Rappelons aussi que le conjugué hermitique d'une expression quelconque s'obtient en:

(i) Renversant l'ordre des termes, (ii) transformant: Les opérateurs en leurs adjoints, les kets en bras et réciproquement, les nombres en leurs complexes conjugués.

Un opérateur A est dit Hermitien (ou self-adjoint) si $A^+ = A$. Si $A|\phi\rangle = |\chi\rangle$, d'où pour tout vecteur $|\psi\rangle$,

$$\langle \phi | A^+ | \psi \rangle = \langle \psi | A | \phi \rangle^* = \langle \psi | \chi \rangle^* = \langle \chi | \psi \rangle, \quad (5.2.3)$$

ceci entraîne que la valeur moyenne d'une observable A Hermitienne est réelle:

$$\langle a \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle, \quad A = A^+ \implies \langle a \rangle = \langle a \rangle^*. \quad (5.2.4)$$

• Les fonctions propres d'un Hamiltonien Hermitien sont donc orthogonales. L'orthogonalité signifie que le produit scalaire de deux fonctions propres des différentes valeurs propres est nul:

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle = 0, \quad (m \neq n) \quad (5.2.5)$$

⁽¹⁾On définira d'autres types de produits scalaires par la suite.

⁽²⁾Ce produit scalaire possède les propriétés suivantes:

$$\langle \phi | \psi \rangle^* = \langle \psi | \phi \rangle$$

$$\langle \phi | \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 \rangle = \lambda_1 \langle \phi | \psi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \phi | \psi_2 \rangle$$

$$\langle \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 | \psi \rangle = \lambda_1^* \langle \phi_1 | \psi \rangle + \lambda_2^* \langle \phi_2 | \psi \rangle$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = |\psi|^2 = 0 \iff |\psi\rangle = 0$$

⁽³⁾La conjugaison Hermitienne est une opération réciproque : $(A^+)^+ = A$.

• La norme de n'importe quel vecteur est positive, car l'Hamiltonien H est Hermitien. Ceci signifie que nous pouvons normaliser les fonctions propres de H de sorte que la norme de chaque fonction propre soit l'unité:

$$\langle \psi_n | \psi_n \rangle = 1. \quad (5.2.6)$$

• Pour la relation de fermeture, le théorème de la théorie d'opérateurs linéaires sur des espaces de Hilbert, stipule que les fonctions propres d'un Hamiltonien Hermitien sont complètes. Ceci signifie que n'importe quel vecteur (de norme finie) dans l'espace de Hilbert peut être exprimé comme combinaison linéaire des fonctions propres de H . L'expression formelle de la relation de fermeture dans l'espace des coordonnées est la reconstruction de l'opérateur d'unité (la fonction delta de Dirac⁽¹⁾) comme somme des fonctions propres:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\psi_n(x)]^* \psi_n(y) = \delta(x - y). \quad (5.2.7)$$

Il est à noter d'abord que la fonction delta de Dirac est utilisée dans le cas d'une représentation sur une base continue. Dans le cas d'une représentation sur une base discrète, le symbole de Kronecker δ_{mn} est utilisé.

• Evolution temporelle et unitarité: Supposons donné un Hamiltonien H , opérateur Hermitien de l'espace de Hilbert \mathcal{H} , il génère une dynamique dans \mathcal{H} . Un vecteur $|\psi(0)\rangle$ évolue selon la trajectoire $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$, déterminée par l'équation de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle. \quad (5.2.8)$$

Soit par intégration:

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{-iHt}{\hbar}} |\psi(0)\rangle = U_t |\psi(0)\rangle. \quad (5.2.9)$$

L'opérateur d'évolution $U_t = e^{\frac{-iHt}{\hbar}}$ étant unitaire⁽²⁾. Notons que si A est Hermitien, et si α est un nombre réel, alors $e^{i\alpha t}$ est unitaire. Dans une transformation unitaire, un opérateur

⁽¹⁾La fonction delta de Dirac, noté $\delta(x - x_0)$ est définie de sorte que, pour une fonction $f(x)$ infiniment différentiable: $\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0)$. En particulier, $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - x_0) = 1$.

⁽²⁾Un opérateur S est unitaire s'il est l'inverse de son adjoint $UU^+ = U^+U = I$

unitaire S permet d'établir une correspondance entre vecteurs et opérateurs de l'espace de Hilbert \mathcal{H} , à savoir:

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = S|\psi\rangle, \quad \langle\psi| \rightarrow \langle\psi'| = \langle\psi|S^+, \quad A \rightarrow A' = SAS^+, \quad (5.2.10)$$

c'est ce qu'on appelle la transformation unitaire associée à S .

Comme conséquence de (5.2.9), le produit scalaire est automatiquement conservé au cours du temps:

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|\psi(0)\rangle. \quad (5.2.11)$$

D'où la norme $|\psi| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$ du vecteur d'états d'un système reste constante au cours du temps. *C'est une condition nécessaire de cohérence de la théorie qui découle de l'Hermiticité de l'Hamiltonien H .*

Après avoir présenté les concepts de base de la mécanique quantique conventionnelle, nous présentons au chapitre prochain la théorie quantique PT-symétrique.

CHAPITRE

6

La théorie quantique

PT-symétrique:

Ingrédients et formalisme

6.1 Introduction

La mise en évidence des valeurs propres réelles et positives de nombreux Hamiltoniens non-Hermitiens soulève une question évidente: Est-ce qu'un Hamiltonien non-Hermitien définit une théorie de la mécanique quantique physiquement acceptable. Rappelons qu'une théorie quantique physiquement acceptable doit:

(i) Avoir un spectre d'énergie entièrement réel et borné inférieurement.

(ii) Avoir un espace de Hilbert des vecteurs d'états qui est muni d'un produit scalaire ayant une norme positive.

(iii) Avoir une évolution temporelle unitaire.

Nous présentons dans ce chapitre la nouvelle théorie quantique PT -symétrique introduite par Bender et al [1]-[7]. Nous ferons à la fin de ce chapitre une comparaison avec la théorie quantique Hermitienne.

6.2 Nouvelle théorie quantique PT -symétrique

6.2.1 Définitions et propriétés

Par définition [1], un Hamiltonien non-Hermitien H est dit PT -symétrique s'il satisfait la relation,

$$H = H^{PT}. \quad (6.2.1)$$

Où

$$H^{PT} = (PT)H(PT). \quad (6.2.2)$$

Ainsi, l'opérateur PT commute avec H ,

$$[H, PT] = 0, \quad (6.2.3)$$

où le symbole P est un opérateur linéaire appelé l'opérateur de parité (ou d'espace-réflexion) et dont son action sur les opérateurs position et impulsion x et p est:

$$PxP = -x \quad \text{et} \quad PpP = -p. \quad (6.2.4)$$

T est l'opérateur d'inversion du temps, l'effet de T sur l'opérateur x est invariant, mais l'effet de T sur l'opérateur p est de changer son signe:

$$TxT = x \quad \text{et} \quad TpT = -p. \quad (6.2.5)$$

En plus T change le signe du nombre complexe imaginaire pure i :

$$TiT = -i. \quad (6.2.6)$$

L'équation (6.2.6) démontre que T n'est pas un opérateur linéaire; T est dit anti-linéaire. En outre, Puisque P et T sont des opérateurs de réflexion, leurs carrés est égal à l'opérateur identité:

$$P^2 = T^2 = \mathbf{1}. \quad (6.2.7)$$

Finalement, les opérateurs P et T commutent:

$$[P, T] = 0. \quad (6.2.8)$$

Si tous les états propres $|\psi_n\rangle$ de l'Hamiltonien PT -symétrique H sont états propres de l'opérateur PT , on dit que la PT -symétrie de H est non-brisée "*unbroken PT -symmetry*".

$$[H, PT] = 0, \quad PT|\psi_n\rangle = \pm|\psi_n\rangle. \quad (6.2.9)$$

S'il existe des états propres de l'Hamiltonien PT -symétrique H qui ne sont pas des états propres de l'opérateur PT , la PT -symétrie de H est dite spontanément brisée "*broken PT -symmetry*".

$$[H, PT] = 0, \quad PT|\psi_n\rangle \neq \pm|\psi_n\rangle. \quad (6.2.10)$$

6.2.2 Le PT -produit scalaire

La différence majeure entre les théories quantiques non-Hermitienne et Hermitienne, réside dans le choix de la définition du produit scalaire. Pour examiner l'orthogonalité des fonctions propres d'un Hamiltonien PT -symétrique H , on doit préciser le produit scalaire utilisé. (Deux vecteurs peuvent être orthogonaux par rapport à un produit scalaire et non

orthogonaux par rapport à un autre produit scalaire). Par analogie avec le produit scalaire pour les Hamiltoniens Hermitiens ($H = H^+$), Bender [3] a introduit dans un premier temps un produit scalaire dit " PT -produit scalaire" associé aux Hamiltoniens PT -symétriques, défini par,

$$\langle \phi | \psi \rangle_{PT} = \int dx [PT\phi(x)]\psi(x), \quad (6.2.11)$$

où

$$PT\phi(x) = [\phi(-x)]^*. \quad (6.2.12)$$

Ce PT -produit scalaire pour les fonctions propres $|\phi_n\rangle$ de H est défini par,

$$\langle \phi_m | \phi_n \rangle_{PT} = \int dx [PT\phi_m(x)]\phi_n(x) = \int dx [\phi_m(-x)]^*\phi_n(x) = (-1)^n \delta_{mn}. \quad (6.2.13)$$

Donc les normes de ces fonctions propres sont donnés par,

$$\int dx [PT\phi_n(x)]\phi_n(x) = \int dx [\phi_n(-x)]^*\phi_n(x) = (-1)^n. \quad (6.2.14)$$

La relation de fermeture s'écrit donc,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \phi_n(x)\phi_n(y) = \delta(x - y). \quad (6.2.15)$$

Cependant, la définition (6.2.11) pour un produit scalaire est insuffisante pour formuler une théorie quantique valable, car la norme $(-1)^n$ d'un état n'est pas nécessairement positive. Ceci a incité Bender à construire un nouveau produit scalaire avec une norme positive; c'est le CPT -produit scalaire.

6.3 L'opérateur de conjugaison C et le CPT -produit scalaire

6.3.1 Définition et propriétés de C

En effet, Bender [3] a introduit un nouvel opérateur linéaire C qui est l'opérateur de conjugaison, dans le but de construire un produit scalaire avec une norme positive. C commute simultanément avec H et PT et représente une symétrie de H .

L'opérateur linéaire C est représenté dans l'espace des coordonnées par la somme des fonctions propres de l'Hamiltonien,

$$C(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x)\phi_n(y). \quad (6.3.1)$$

On vérifie que le carré de C est égal à l'identité:

$$\int dy C(x, y)C(y, z) = \delta(x - z). \quad (6.3.2)$$

Ainsi, les valeurs propres de C sont ± 1 . En outre, C commute avec H . Par conséquent, puisque C est linéaire, l'action de C sur les fonctions propres ϕ_n de H est donnée par,

$$C\phi_n(x) = \int dy C(x, y)\phi_n(y) \quad (6.3.3)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \phi_m(x) \int dy \phi_m(y)\phi_n(y) = (-1)^n \phi_n(x). \quad (6.3.4)$$

On a

$$P^2 = C^2 = \mathbf{1}, \quad (6.3.5)$$

mais

$$P \neq C, \quad (6.3.6)$$

car P est réel, tandis que C est complexe. L'opérateur parité dans l'espace des coordonnées est explicitement réel,

$$P(x, y) = \delta(x + y), \quad (6.3.7)$$

alors que l'opérateur C est complexe car c'est une somme de produits des fonctions complexes. C ne commute pas avec les opérateurs P ou T séparément, mais commute avec l'opérateur PT . Pour construire l'opérateur C , nous suivons ses trois propriétés algébriques de base, à savoir:

-) C commute avec l'opérateur PT ,

$$[C, PT] = 0. \quad (6.3.8)$$

-) Le carré de C est égale à l'opérateur identité,

$$C^2 = \mathbf{1}. \quad (6.3.9)$$

-) C commute avec H ,

$$[C, H] = 0. \quad (6.3.10)$$

6.3.2 le CPT -produit scalaire

Le CPT -produit scalaire est défini ainsi comme suit,

$$\langle \phi | \psi \rangle_{CPT} = \int dx [CPT\phi(x)]\psi(x), \quad (6.3.11)$$

où

$$CPT\phi(x) = \int dy C(x, y)\phi^*(-y). \quad (6.3.12)$$

Ce CPT -produit scalaire est défini-positif, et les fonctions propres de H sont orthonormées,

$$\langle \phi_m | \phi_n \rangle_{CPT} = \int dx [CPT\phi_m(x)]\phi_n(x) = \delta_{mn}. \quad (6.3.13)$$

Donc ce CPT -produit scalaire satisfait toutes les conditions pour que la théorie quantique définie par H soit unitaire [6]. La relation de fermeture s'écrit,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x)[CPT\phi_n(y)] = \delta(x - y). \quad (6.3.14)$$

6.4 Comparaison de la mécanique quantique Hermitienne et PT -symétrique

Dans la formulation de la théorie quantique conventionnelle définie par un Hamiltonien Hermitien, l'espace de Hilbert des états est muni du produit scalaire usuel (5.2.1), qui est défini par rapport au conjugué hermitique de Dirac (l'opération du transposé et du complexe conjugué). L'Hamiltonien est alors choisi et les vecteurs propres et les valeurs propres de l'Hamiltonien sont déterminés. En revanche, le produit scalaire pour une théorie quantique définie par un Hamiltonien non-Hermitien PT -symétrique H , dépend de l'Hamiltonien lui-même. On doit trouver les états propres de H avant de connaître l'espace de Hilbert et le produit scalaires associé à la théorie, car l'opérateur C est défini et construit en fonction des

états propres de H . L'espace de Hilbert, qui se compose de toutes les combinaisons linéaires complexes des états propres de H , et le CPT -produit scalaire sont déterminés par ces états propres.

Bender [6] a montré que, comme dans le cas d'un Hamiltonien Hermitien ordinaire, l'évolution temporelle dans la théorie déterminée par un Hamiltonien PT -symétrique H , est exprimée aussi par l'opérateur $e^{\frac{-i}{\hbar}Ht}$. Si $\psi_0(x)$ est un vecteur initial donné qui appartient à l'espace de Hilbert engendré par les états propres de H , alors son évolué à l'instant t quelconque est $\psi_t(x)$ donné par,

$$\psi_t(x) = e^{\frac{-i}{\hbar}Ht}\psi_0(x) \tag{6.4.1}$$

La norme de $\psi_t(x)$ prise avec le CPT -produit scalaire ne change pas au cours du temps, car H commute avec l'opérateur CPT .

CHAPITRE

7

La théorie quantique
pseudo-Hermitienne

7.1 Introduction

Le concept de pseudo-Hermiticité a été présenté dans les années 40 par Dirac et Pauli [26, 27, 28] et plus tard discuté par Lee et Sudarshan [29, 30], qui essayaient de résoudre les problèmes qui surgissent dans la quantification en électrodynamique et d'autres théories quantiques de champ, dans lesquelles les états de normes négatives apparaissent comme conséquence de la renormalisation. Une autre notion liée à la pseudo-Hermiticité est la quasi-Hermiticité, cette dernière a été discutée en détail en 1992 par Scholtz et al [25], qui ont montré comment construire une transformation similaire des opérateurs Hermitiens vers les opérateurs quasi-Hermitiens correspondants et ils ont également considéré les transformations correspondantes des produits scalaires sur l'espace de Hilbert de dimension infini.

7.2 La pseudo-Hermiticité

Par définition [15], un opérateur linéaire $H: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ qui agit sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} est dit pseudo-Hermitien, s'il existe un opérateur linéaire, Hermitien et inversible $\eta: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tel que:

$$H^+ = \eta H \eta^{-1}. \quad (7.2.1)$$

Pour un Hamiltonien pseudo-Hermitien H donné, l'opérateur η qui satisfait (7.2.1) n'est pas unique [20, 21]. Si on fait un choix particulier de η , on dit que H est η -pseudo-Hermitien. On peut exprimer la condition (7.2.1) sous la forme:

$$H^\# = H, \quad (7.2.2)$$

où

$$H^\# = \eta^{-1} H^+ \eta, \quad (7.2.3)$$

est le pseudo adjoint de H [15].

La condition (7.2.1) se réduit à l'Hermiticité ordinaire quand l'opérateur η est égal à l'identité $\mathbf{1}$. Donc la pseudo-Hermiticité est une généralisation de l'Hermiticité. Cette condition (7.2.1) se réduit à la PT -symétrie quand $\eta = P$, où P est l'opérateur parité.

La conjugaison pseudo-Hermitienne ($\#$) possède les mêmes propriétés que la conjugaison Hermitienne ($+$), à savoir:

- a) $\mathbf{1}^\# = \mathbf{1}$,
- b) $(A^\#)^\# = A$,
- c) $(AB)^\# = B^\# A^\#$,
- d) $(\alpha A + \beta B)^\# = \alpha^* A^\# + \beta^* B^\#$.

Où A et B sont des opérateurs linéaires, $\mathbf{1}$ est l'opérateur identité, α et $\beta \in \mathbb{C}$, α^* et β^* sont les complexes conjugués de α et β respectivement.

De façon générale, le conjugué pseudo-Hermitien d'une expression quelconque s'obtient en:

-) Renversant l'ordre des termes.
-) Transformant: Les opérateurs en leurs pseudo-adjoints, les kets en bras et réciproquement, les nombres en leurs complexes conjugués.

7.3 Hamiltoniens pseudo-Hermitiens ayant une base biorthonormée complète

Soit H un Hamiltonien linéaire diagonalisable ayant un spectre discret réel et nondégénéré. On dit que H admet une base biorthonormée complète $\{|\psi_n\rangle, |\phi_n\rangle\}$ [35, 87], si et seulement si H satisfait les relations suivantes:

$$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle, \quad (7.3.1)$$

$$H^+ |\phi_n\rangle = E_n |\phi_n\rangle, \quad (7.3.2)$$

$$\langle \phi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}, \quad (7.3.3)$$

$$\sum_n |\phi_n\rangle \langle \psi_n| = \sum_n |\psi_n\rangle \langle \phi_n| = \mathbf{1}. \quad (7.3.4)$$

Où E_n sont les valeurs propres de H . Dans cette base $\{|\psi_n\rangle, |\phi_n\rangle\}$, H et H^+ s'écrivent sous la forme,

$$H = \sum_n E_n |\psi_n\rangle \langle \phi_n|, \quad (7.3.5)$$

$$H^+ = \sum_n E_n |\phi_n\rangle \langle \psi_n|. \quad (7.3.6)$$

En plus, comme principal résultat de [15], l'opérateur défini-positif⁽¹⁾ η_+ qui satisfait la relation de pseudo-Hermiticité $H^+ = \eta_+ H \eta_+^{-1}$ est donné explicitement par,

$$\eta_+ = \sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n|. \quad (7.3.7)$$

Son inverse η_+^{-1} est donné par,

$$\eta_+^{-1} = \sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|. \quad (7.3.8)$$

Il existe un produit scalaire [16, 17] défini-positif dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} qui rend H Hermitien⁽²⁾, c'est-à-dire, $\prec \psi, H\phi \succ = \prec H\psi, \phi \succ$, défini par [21, 22],

$$\prec \psi, \phi \succ = \langle \psi | \eta_+ \phi \rangle. \quad (7.3.9)$$

Où $\psi, \phi \in \mathcal{H}$, et $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel dans \mathcal{H} , et η_+ est l'opérateur donné si-dessus. On note que le *CPT*-produit scalaire définit dans la section (6.3), qui est introduit par Bender [3, 4, 6], est un cas particulier du produit scalaire (7.3.9) introduit par Mostafazadeh [21, 22]

⁽¹⁾Un opérateur est défini-positif s'il est Hermitien et possède un spectre réel strictement positif.

⁽²⁾Comme a été défini dans la section (5.2), l'opérateur adjoint A^+ d'un opérateur linéaire A , est défini dans le cadre du produit scalaire usuel $\langle \cdot | \cdot \rangle$ à travers la condition $\langle A^+ \phi | \psi \rangle = \langle \phi | A \psi \rangle$. On dit que A est Hermitien si $A^+ = A$.

CHAPITRE

8

Systemes à deux-niveaux

8.1 Présentation du modèle

Les systèmes à deux-niveaux décrits par des Hamiltoniens Hermitiens et non-Hermitiens représentent des modèles simples et non triviaux en mécanique quantique, et ont été intensivement étudiés pour leurs divers applications dans les modélisations des interactions des particules du spin $\frac{1}{2}$ et la description des états résonnants, en RMN (la résonance magnétique nucléaire) et les qubits en informatique quantique. Une grande partie de la littérature sur les Hamiltoniens non-Hermitiens est consacrée à l'étude des systèmes à deux-niveaux [20, 32, 37, 40, 41, 42].

Dans le présent travail, on considère un atome à deux-niveaux en interaction avec un champ électromagnétique [32, 37, 38]. Le vecteur d'état est représenté par:

$$|\psi\rangle = C'_a(t)|+\rangle + C'_b(t)|-\rangle, \quad (8.1.1)$$

où $|+\rangle$ et $|-\rangle$ sont respectivement les vecteurs de base des niveaux supérieur et inférieur. C'_a et C'_b sont respectivement les amplitudes de présence dans les états $|+\rangle$ et $|-\rangle$. Ces amplitudes sont dépendantes du temps dues aux interactions:

-) L'interaction résonnante entre le champ électromagnétique et le moment dipolaire atomique entre les deux niveaux.
-) Les effets de damping des niveaux supérieur et inférieur sont décrits phénoménologiquement par les constantes du déclin γ_a et γ_b respectivement (γ_a et γ_b sont réelles).

L'équation de Schrödinger dans la configuration d'interaction et dans l'approximation des ondes tournantes RWA⁽¹⁾ est donnée par [32, 38] :

$$i\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} C'_a(t) \\ C'_b(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i\gamma_a & \omega^* \\ \omega & -i\gamma_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_a(t) \\ C'_b(t) \end{pmatrix}. \quad (8.1.2)$$

⁽¹⁾RWA: Signifie en anglais "*the rotating wave approximation*". Cette approximation est dite aussi l'approximation séculaire, c'est à dire quand la fréquence du champ électromagnétique ω est au voisinage de la résonance ($\omega \simeq \omega_0$), les termes en $e^{\pm i(\omega-\omega_0)t}$ sont beaucoup plus lentement variables en temps que les termes en $e^{\pm i(\omega+\omega_0)t}$ qui oscillent très rapidement et sont en moyenne nuls dans le temps. Donc on néglige ces derniers termes [39].

Où ω représente le terme d'interaction radiation-atome entre les deux niveaux (ω^* est le complexe conjugué de ω).

On introduit une transformation dépendante du temps $U(t)$ dans l'espace des états, tel que:

$$|\psi\rangle \rightarrow U(t)|\psi\rangle, \quad (8.1.3)$$

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{-\Gamma t} & 0 \\ 0 & e^{\Gamma t} \end{pmatrix}, \quad (8.1.4)$$

$$\Gamma = \frac{1}{4}(\gamma_a + \gamma_b). \quad (8.1.5)$$

Les amplitudes dans la nouvelle représentation sont données par

$$C_a(t) = \exp(\Gamma t)C'_a(t), \quad (8.1.6)$$

$$C_b(t) = \exp(\Gamma t)C'_b(t). \quad (8.1.7)$$

Le système est alors décrit par le nouvel Hamiltonien non-Hermitien,

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i\delta & \omega^* \\ \omega & i\delta \end{pmatrix}, \quad (8.1.8)$$

où

$$\delta = \frac{1}{2}(\gamma_a - \gamma_b). \quad (8.1.9)$$

8.2 Diagonalisation du Hamiltonien

Les valeurs propres $E_{1,2}$ et le système biorthonormé complet $\{|\psi_{1,2}\rangle, |\phi_{1,2}\rangle\}$ associé à l'Hamiltonien H (8.1.8) qui satisfait par définition [35, 87] les relations:

$$H |\psi_{1,2}\rangle = E_{1,2} |\psi_{1,2}\rangle, \quad (8.2.1)$$

$$H^+ |\phi_{1,2}\rangle = E_{1,2} |\phi_{1,2}\rangle, \quad (8.2.2)$$

$$\langle \phi_1 | \psi_1 \rangle = \langle \phi_2 | \psi_2 \rangle = 1, \quad (8.2.3)$$

$$\langle \phi_1 | \psi_2 \rangle = \langle \phi_2 | \psi_1 \rangle = 0, \quad (8.2.4)$$

$$|\phi_1\rangle \langle \psi_1| + |\phi_2\rangle \langle \psi_2| = \mathbf{1}, \quad (8.2.5)$$

$$|\psi_1\rangle \langle \phi_1| + |\psi_2\rangle \langle \phi_2| = \mathbf{1}, \quad (8.2.6)$$

sont donnés explicitement par:

$$E_1 = -\frac{\Omega}{2}, \quad E_2 = \frac{\Omega}{2}. \quad (8.2.7)$$

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \begin{pmatrix} \frac{-\omega^* \sqrt{\Omega+i\delta}}{|\omega|} \\ \sqrt{\Omega-i\delta} \end{pmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \begin{pmatrix} \frac{\omega^* \sqrt{\Omega-i\delta}}{|\omega|} \\ \sqrt{\Omega+i\delta} \end{pmatrix}. \quad (8.2.8)$$

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \begin{pmatrix} \frac{-\omega^* \sqrt{\Omega-i\delta}}{|\omega|} \\ \sqrt{\Omega+i\delta} \end{pmatrix}, \quad |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \begin{pmatrix} \frac{\omega^* \sqrt{\Omega+i\delta}}{|\omega|} \\ \sqrt{\Omega-i\delta} \end{pmatrix}. \quad (8.2.9)$$

Où $\Omega = \sqrt{|\omega|^2 - \delta^2}$.

Ayant diagonalisé l'Hamiltonien H (8.1.8), on se propose d'étudier ses propriétés PT-symétriques.

8.3 Les propriétés PT -symétriques des systèmes à deux-niveaux

Nous étudions maintenant les propriétés PT -symétriques de l'Hamiltonien H (8.1.8). L'opérateur parité P des systèmes à deux-niveaux peut être défini suivant la méthode de Bender et al [3] par:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.3.1)$$

de sorte que

$$P^2 = \mathbf{1}, \quad P = P^{-1}. \quad (8.3.2)$$

Ensuite Mostafazadeh [21] et Ahmed [31] ont introduit l'opérateur de parité généralisé pour les systèmes à deux-niveaux, qui est défini par:

$$P = |\phi_2\rangle\langle\phi_2| - |\phi_1\rangle\langle\phi_1|, \quad (8.3.3)$$

et est égal à

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\omega^*}{|\omega|} \\ \frac{\omega}{|\omega|} & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.3.4)$$

Différentes définitions ont été introduites pour l'opérateur d'inversion du temps T [21, 31]. Dans notre cas, on adopte aussi comme la cas de la parité la représentation introduite par Bender et al [3], à savoir:

$$T = K_0, \quad (8.3.5)$$

où K_0 est l'opérateur du complexe conjugué. On a:

$$K_0^2 = \mathbf{1}, \quad (PT)^2 = \mathbf{1}. \quad (8.3.6)$$

On trouve que PT commute avec H , c'est-à-dire:

$$PK_0HK_0^{-1}P^{-1} = H. \quad (8.3.7)$$

L'opérateur de conjugaison C , pour les systèmes à deux-niveaux, est défini par [21],

$$C = |\psi_2\rangle\langle\phi_2| - |\psi_1\rangle\langle\phi_1|, \quad (8.3.8)$$

qui est donné par:

$$C = \frac{1}{\Omega} \begin{pmatrix} -i\delta & \omega^* \\ \omega & i\delta \end{pmatrix} \quad (8.3.9)$$

$$= \frac{2}{\Omega} H. \quad (8.3.10)$$

Nous en déduisons de cette dernière équation que C s'écrit en fonction de l'Hamiltonien H , d'où $C^2 = \mathbf{1}$ et commute avec l'Hamiltonien H . Cette propriété d'invariance élimine les produits scalaires négatifs [3, 32].

8.4 La pseudo-Hermiticité des systèmes à deux-niveaux

L'Hamiltonien H donné par l'équation (8.1.8) est diagonalisable, son déterminant est réel, $\det H = (\delta^2 - |\omega|^2)/4$ et sa trace est nulle. Donc, H est pseudo-Hermitien, car il vérifie le théorème 3 de la référence [19], qui stipule que toute matrice 2×2 ayant une trace nulle, est pseudo-Hermitienne si et seulement si son déterminant est réel.

En effet, l'Hamiltonien H satisfait la relation de pseudo-Hermiticité $H^+ = \eta H \eta^{-1}$ définie par Mostafazadeh [15], où η est donné par:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i\delta\omega^*}{|\omega|^2} \\ -\frac{i\delta\omega}{|\omega|^2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.4.1)$$

Il est à noter ici qu'il existe trois cas pour les valeurs propres de H , à savoir:

Cas 1: Les valeurs propres sont réelles (c'est-à-dire $|\omega|^2 > \delta^2$): Cette condition est très intéressante en optique quantique, elle correspond au cas où l'interaction du dipôle est large par rapport aux effets de damping. Dans ce cas la fréquence de Rabi ordinaire $|\omega|/2$ est remplacée par la "pseudo fréquence de Rabi" $\Omega/2$ [32].

Cas 2: Les valeurs propres sont imaginaires pures (c'est-à-dire $|\omega|^2 < \delta^2$): H reste toujours pseudo-Hermitien sous cette condition, car son déterminant est toujours réel.

Cas 3: Les valeurs propres sont nulles (c'est-à-dire $|\omega|^2 = \delta^2$): Ce cas correspond au cas dégénéré où les amplitudes $C'_a(t)$, $C'_b(t)$ sont données par [32]:

$$C'_a(t) = (1 - \delta t) \exp(-\Gamma t), \quad (8.4.2)$$

$$C'_b(t) = (i\omega t/2) \exp(-\Gamma t). \quad (8.4.3)$$

En raison de l'existence du facteur exponentiel $\exp(-\Gamma t)$ dans les amplitudes, aucune divergence ne se produit dans notre système [43].

Ayant étudié toutes les propriétés relatives à l'Hamiltonien non-Hermitien H (8.1.8). On se propose dans le prochain chapitre de construire les états cohérents pseudo-fermioniques qui lui sont associés.

CHAPITRE

9

Les états cohérents

pseudo-fermioniques et

évolution temporelle

9.1 Introduction

Ce chapitre sera consacré à l'extension de la notion d'états cohérents fermioniques aux systèmes à deux-niveaux décrits par des Hamiltoniens pseudo-Hermitiens. On introduira d'abord les opérateurs pseudo-fermioniques d'annihilation et de création b et $b^\#$, qui nous permettront de factoriser H sous une forme semblable à celle de l'oscillateur harmonique: $H = \Omega(b^\#b - \frac{1}{2})$. On construira ensuite des états cohérents pseudo-fermioniques paramétrisés à l'aide des variables de Grassmann. On montrera que ces états cohérents vérifient toutes les propriétés clés des états cohérents usuels. On terminera ce chapitre par une conclusion dans laquelle on discutera nos résultats.

9.2 Opérateurs de création et d'annihilation

Dans tout ce qui suit, nous considérons le cas des valeurs propres réelles (c'est-à-dire $|\omega|^2 > \delta^2$). On peut vérifier que dans ce régime l'opérateur η donné par l'équation (8.4.1) est défini-positif, car ce dernier est relié à l'opérateur défini-positif⁽¹⁾ η_+ par la relation:

$$\eta = \frac{\Omega}{|\omega|} \eta_+, \quad (9.2.1)$$

compte tenu de l'équation (7.3.7), η_+ s'écrit aussi sous la forme:

$$\eta_+ = |\phi_1\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2|. \quad (9.2.2)$$

Maintenant, on introduit l'opérateur d'annihilation b associé à l'Hamiltonien H (8.1.8),

$$b = \frac{1}{2\Omega} \begin{pmatrix} -|\omega| & \frac{-\omega^*(\Omega+i\delta)}{|\omega|} \\ \frac{\omega(\Omega-i\delta)}{|\omega|} & |\omega| \end{pmatrix}, \quad (9.2.3)$$

son adjoint b^+ s'écrit (Ω est réel),

$$b^+ = \frac{1}{2\Omega} \begin{pmatrix} -|\omega| & \frac{\omega^*(\Omega+i\delta)}{|\omega|} \\ \frac{-\omega(\Omega-i\delta)}{|\omega|} & |\omega| \end{pmatrix}, \quad (9.2.4)$$

⁽¹⁾On rappelle qu'un opérateur est défini-positif s'il est Hermitien et possède un spectre réel strictement positif.

et son opérateur pseudo-adjoint $b^\#$ défini par:

$$b^\# = \eta^{-1} b^+ \eta, \quad (9.2.5)$$

s'écrit

$$b^\# = \frac{1}{2\Omega} \begin{pmatrix} -|\omega| & \frac{\omega^*(\Omega-i\delta)}{|\omega|} \\ \frac{-\omega(\Omega+i\delta)}{|\omega|} & |\omega| \end{pmatrix}. \quad (9.2.6)$$

On se propose maintenant d'examiner les propriétés de $b^\#$ et b . D'abord, $b^\#$ et b réalisent une généralisation pseudo-Hermitienne de l'algèbre des fermions, à savoir;

$$b^2 = b^{\#2} = 0, \quad (9.2.7)$$

$$[b, b^\#]_+ = b b^\# + b^\# b = 1. \quad (9.2.8)$$

$b^\#$ et b peuvent donc s'appeler des opérateurs de création et d'annihilation des fermions pseudo-Hermitiens [24]. Leurs actions sur les états $|\psi_i\rangle$ est:

$$b |\psi_1\rangle = 0, \quad b |\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle, \quad (9.2.9)$$

$$b^\# |\psi_2\rangle = 0, \quad b^\# |\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle. \quad (9.2.10)$$

L'opérateur b annihile l'état inférieur $|\psi_1\rangle$, et $b^\#$ l'excite en un état $|\psi_2\rangle$.

L'opérateur pseudo-fermionique quadratique $N = b^\# b$ obéit aux relations habituelles d'anticommuation:

$$[N, b]_+ = b, \quad [N, b^\#]_+ = b^\#. \quad (9.2.11)$$

En termes d'opérateurs b et $b^\#$, l'Hamiltonien H (8.1.8) est factorisé (à une constante additive près) sous une forme semblable à celle de l'oscillateur harmonique bosonique libre,

$$H = \Omega \left(b^\# b - \frac{1}{2} \right). \quad (9.2.12)$$

En prenant le conjugué hermitique des deux côtés de cette dernière équation (9.2.12), nous obtenons:

$$H^+ = \Omega (b^+ \eta b \eta^{-1} - \frac{1}{2}) \quad (9.2.13)$$

$$= \Omega \eta \eta^{-1} (b^+ \eta b \eta^{-1} - \frac{1}{2}) \eta \eta^{-1} \quad (9.2.14)$$

$$= \eta H \eta^{-1}. \quad (9.2.15)$$

Il en résulte que b et $b^\#$ sont respectivement des opérateurs pseudo-fermioniques d'annihilation et de création pour les systèmes à deux-niveaux pseudo-Hermitiens (aux valeurs propres réelles). Ceci est confirmé dans la limite Hermitienne $\delta = 0$ de l'Hamiltonien H , on obtient alors $\eta = 1$ et $b^\# = b^+$. Donc la généralisation pseudo-Hermitienne de l'algèbre des fermions est réduite à l'algèbre habituelle des fermions. Le système quantique ayant un Hamiltonien de la forme (9.2.12) devrait désigné sous le nom de l'oscillateur pseudo-fermionique.

Après avoir défini les opérateurs pseudo-fermioniques d'annihilation et de création associés à l'Hamiltonien H (8.1.8), on se propose de construire les états cohérents pseudo-fermioniques qui lui sont associés.

9.3 Construction des états cohérents pseudo-fermioniques

Nous suivons la même méthode utilisée dans les références [75, 76, 77, 78, 79] pour les états cohérents fermioniques des systèmes Hermitiens, pour construire les états cohérents pseudo-fermioniques des systèmes pseudo-Hermitiens.

Les états cohérents pseudo-fermioniques, et comme dans le cas des états cohérents fermioniques, seront paramétrisés par les variables de Grassmann complexes ξ .

On définit l'opérateur de déplacement $D(\xi)$ comme suit:

$$D(\xi) = e^{(b^\# \xi - \xi^* b)} \quad (9.3.1)$$

$$= 1 + b^\# \xi - \xi^* b + \left(b^\# b - \frac{1}{2} \right) \xi^* \xi. \quad (9.3.2)$$

Son pseudo-adjoint $D^\#$ est donné par:

$$D^\#(\xi) = e^{(\xi^* b - b^\# \xi)} \quad (9.3.3)$$

$$= 1 + \xi^* b - b^\# \xi + \left(b^\# b - \frac{1}{2} \right) \xi^* \xi. \quad (9.3.4)$$

Ces deux opérateurs satisfont les relations suivantes,

$$D^\#(\xi) b D(\xi) = b + \xi \mathbf{1}, \quad (9.3.5)$$

$$D^\#(\xi) b^\# D(\xi) = b^\# + \xi^* \mathbf{1}. \quad (9.3.6)$$

Les variables de Grassmann ξ anticommutes avec b et $b^\#$,

$$\xi b = -b\xi, \quad \xi^* b = -b\xi^*, \quad (9.3.7)$$

$$\xi b^\# = -b^\# \xi, \quad \xi^* b^\# = -b^\# \xi^*. \quad (9.3.8)$$

L'action des ξ sur l'opérateur d'annihilation b et sur le système biorthonormé complet $\{|\psi_{1,2}\rangle, |\phi_{1,2}\rangle\}$ associé à H est donnée comme suit:

$$\xi|\psi_1\rangle = |\psi_1\rangle\xi, \quad \xi|\psi_2\rangle = -|\psi_2\rangle\xi, \quad (9.3.9)$$

$$\xi|\phi_1\rangle = |\phi_1\rangle\xi, \quad \xi|\phi_2\rangle = -|\phi_2\rangle\xi, \quad (9.3.10)$$

La conjugaison pseudo-Hermitienne renverse l'ordre de toutes les quantités fermioniques, les opérateurs et les variables de Grassmann:

$$(b^\# \xi + \xi^* b)^\# = \xi^* b + b^\# \xi. \quad (9.3.11)$$

En utilisant les formules explicites de D et $D^\#$, et les relations d'anticommutation entre les opérateurs b , $b^\#$ et les variables de Grassmann, on établit que les $D(\xi)$ sont pseudo-unitaires:

$$D^\#(\xi)D(\xi) = D(\xi)D^\#(\xi) = 1. \quad (9.3.12)$$

Nous définissons maintenant les états cohérents pseudo-fermioniques $|\xi\rangle$ comme états propres de l'opérateur d'annihilation b ,

$$b|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle. \quad (9.3.13)$$

La valeur propre ξ de b est une variable de Grassmann complexe.

L'adjoint hermitique de l'état cohérent est $\langle\xi|$ et il est état propre à gauche de b^\dagger ,

$$\langle\xi|b^\dagger = \langle\xi|\xi^* = \xi^*\langle\xi|. \quad (9.3.14)$$

Afin d'utiliser la relation

$${}_\eta\langle\xi|b^\# = {}_\eta\langle\xi|\xi^*, \quad (9.3.15)$$

on définit

$${}_\eta\langle\xi| \equiv (|\xi\rangle)^\# := \langle\xi|\eta. \quad (9.3.16)$$

De même que les états cohérents usuels [59, 60, 61] et les états cohérents fermioniques [75, 76, 77, 78, 79], nos états cohérents $|\xi\rangle$ peuvent être construits à partir de l'état fondamental $|\psi_1\rangle$ par l'action de l'opérateur pseudo-unitaire $D(\xi)$ sur $|\psi_1\rangle$:

$$|\xi\rangle = D(\xi) |\psi_1\rangle \quad (9.3.17)$$

$$= e^{(b^\# \xi - \xi^* b)} |\psi_1\rangle \quad (9.3.18)$$

$$= e^{-\frac{1}{2} \xi^* \xi} e^{b^\# \xi} |\psi_1\rangle \quad (9.3.19)$$

$$= e^{-\frac{1}{2} \xi^* \xi} (|\psi_1\rangle - \xi |\psi_2\rangle). \quad (9.3.20)$$

L'adjoint hermitique de cet état cohérent est:

$$\langle \xi | = e^{-\frac{1}{2} \xi^* \xi} (\langle \psi_1 | + \xi^* \langle \psi_2 |), \quad (9.3.21)$$

Les états cohérents $|\xi\rangle$ sont aussi des états propres de l'opérateur d'annihilation b ,

$$b |\xi\rangle = b D(\xi) |\psi_1\rangle \quad (9.3.22)$$

$$= D(\xi) D^\#(\xi) b D(\xi) |\psi_1\rangle \quad (9.3.23)$$

$$= D(\xi) (b + \xi) |\psi_1\rangle = D(\xi) \xi |\psi_1\rangle \quad (9.3.24)$$

$$= \xi D(\xi) |\psi_1\rangle \quad (9.3.25)$$

$$= \xi |\xi\rangle. \quad (9.3.26)$$

Le produit scalaire

$$\langle \xi | \xi \rangle = \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle + (\langle \psi_2 | \psi_2 \rangle - \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle) \xi^* \xi - 2i \text{Im}(\xi \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle) \neq 1, \quad (9.3.27)$$

n'est pas normalisé.

9.4 Propriétés élémentaires

On peut simplement vérifier en utilisant les équations (9.3.9), (9.3.10) et (3.2.5) que l'intégrale de $|\xi\rangle\langle\xi|d\xi^*d\xi$ n'a pas comme résultat l'opérateur identité $\mathbf{1}$, c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} \int d\xi^*d\xi|\xi\rangle\langle\xi| &= \int d\xi^*d\xi (|\psi_1\rangle\langle\psi_1| - \xi|\psi_2\rangle\langle\psi_1| + \xi^*|\psi_1\rangle\langle\psi_2| - \xi^*\xi(|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|)) \\ &= (|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|) \neq \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (9.4.1)$$

donc la base n'est pas surcomplète⁽¹⁾. Pour éviter ce problème on utilise le système biorthonormé [35, 37, 87] d'un Hamiltonien non-Hermitien, c'est-à-dire, le système biorthonormé complet $\{|\psi_{1,2}\rangle, |\phi_{1,2}\rangle\}$ associé à H qui vérifie les relations (8.2.1)-(8.2.6).

Avec cette idée à l'esprit, nous présentons une autre famille continue des états propres $|\widetilde{\xi}\rangle$ de l'opérateur \widetilde{b} qui annihile l'état fondamental $|\phi_1\rangle$ de H^+ ,

$$\widetilde{b}|\widetilde{\xi}\rangle = \xi|\widetilde{\xi}\rangle, \quad (9.4.2)$$

$$\widetilde{b}|\phi_1\rangle = 0, \quad \widetilde{b}|\phi_2\rangle = |\phi_1\rangle. \quad (9.4.3)$$

L'opérateur \widetilde{b} est donné explicitement par,

$$\widetilde{b} = \frac{1}{2\Omega} \begin{pmatrix} -|\omega| & \frac{-\omega^*(\Omega-i\delta)}{|\omega|} \\ \frac{\omega(\Omega+i\delta)}{|\omega|} & |\omega| \end{pmatrix}. \quad (9.4.4)$$

\widetilde{b} est relié à b par la relation,

$$\widetilde{b} = \eta b \eta^{-1}. \quad (9.4.5)$$

On prend le conjugué hermitique de cette dernière relation, b^+ s'écrit alors sous la forme:

$$b^+ = \eta \widetilde{b}^+ \eta^{-1}. \quad (9.4.6)$$

On a b^+ est η' -pseudo-Hermitien à \widetilde{b} , où $\eta' = \eta^{-1}$. Dénotant cette conjugaison pseudo-Hermitienne par $\#'$, on obtient la paire d'opérateurs pseudo-fermioniques \widetilde{b} et $\widetilde{b}^{\#'}$ qui réalisent

⁽¹⁾On dit que des états cohérents forment une base surcomplète, s'ils vérifient la résolution de l'identité: $\int d\xi^*d\xi|\xi\rangle\langle\xi| = \mathbf{1}$.

aussi une généralisation pseudo-Hermitienne de l'algèbre des fermions;

$$\tilde{b}\tilde{b}^{\#'} + \tilde{b}^{\#'}\tilde{b} = 1, \quad (9.4.7)$$

$$\tilde{b}^2 = (\tilde{b}^{\#'})^2 = 0. \quad (9.4.8)$$

$\tilde{b}^{\#'}$ est donné explicitement par:

$$\tilde{b}^{\#'} = \frac{1}{2\Omega} \begin{pmatrix} -|\omega| & \frac{\omega^*(\Omega+i\delta)}{|\omega|} \\ \frac{-\omega(\Omega-i\delta)}{|\omega|} & |\omega| \end{pmatrix}. \quad (9.4.9)$$

En termes d'opérateurs \tilde{b} et $\tilde{b}^{\#'}$, H^+ est factorisé sous la forme,

$$H^+ = \Omega \left(\tilde{b}^{\#'}\tilde{b} - \frac{1}{2} \right). \quad (9.4.10)$$

En raison de l'algèbre pseudo-fermionique (9.4.7)-(9.4.8), l'opérateur de déplacement correspondant est:

$$\tilde{D}(\xi) = e^{(\tilde{b}^{\#'}\xi - \xi^*\tilde{b})}, \quad (9.4.11)$$

et vérifie:

$$\tilde{D}^{\#'}(\xi)\tilde{D}(\xi) = \tilde{D}(\xi)\tilde{D}^{\#'}(\xi) = \mathbf{1}, \quad (9.4.12)$$

$$\tilde{D}^{\#'}(\xi)\tilde{b}\tilde{D}(\xi) = \tilde{b} + \xi\mathbf{1}. \quad (9.4.13)$$

On construit les états cohérents $|\widetilde{\xi}\rangle$ selon le même schéma donné précédemment pour les $|\xi\rangle$ (voir les équations (9.3.17)-(9.3.20)),

$$|\widetilde{\xi}\rangle = \tilde{D}(\xi)|\phi_1\rangle \quad (9.4.14)$$

$$= e^{(\tilde{b}^{\#'}\xi - \xi^*\tilde{b})}|\phi_1\rangle \quad (9.4.15)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi} e^{\tilde{b}^{\#'}\xi}|\phi_1\rangle \quad (9.4.16)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi} (|\phi_1\rangle - \xi|\phi_2\rangle). \quad (9.4.17)$$

L'adjoint hermitique de $|\widetilde{\xi}\rangle$ est,

$$\langle\widetilde{\xi}| = e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi} (\langle\phi_1| + \xi^*\langle\phi_2|). \quad (9.4.18)$$

En utilisant les expressions (9.4.12) et (9.4.13), on montre que les états cohérents $|\widetilde{\xi}\rangle$ sont aussi des états propres de l'opérateur d'annihilation \widetilde{b} ,

$$\widetilde{b}|\widetilde{\xi}\rangle = \widetilde{b}\widetilde{D}(\xi)|\phi_1\rangle \quad (9.4.19)$$

$$= \widetilde{D}(\xi)\widetilde{D}^{\#'}(\xi)\widetilde{b}\widetilde{D}(\xi)|\phi_1\rangle \quad (9.4.20)$$

$$= \widetilde{D}(\xi)(\widetilde{b} + \xi)|\phi_1\rangle = \widetilde{D}(\xi)\xi|\phi_1\rangle \quad (9.4.21)$$

$$= \xi\widetilde{D}(\xi)|\phi_1\rangle \quad (9.4.22)$$

$$= \xi|\widetilde{\xi}\rangle. \quad (9.4.23)$$

Le produit scalaire entre $|\widetilde{\xi}| \langle \widetilde{\xi}|$ prend la forme:

$$\langle \widetilde{\xi}|\widetilde{\xi}\rangle = \langle \phi_1|\phi_1\rangle + (\langle \phi_2|\phi_2\rangle - \langle \phi_1|\phi_1\rangle)\xi^*\xi - 2i\text{Im}(\xi\langle \phi_1|\phi_2\rangle) \neq 1. \quad (9.4.24)$$

Tandis que

$$\langle \widetilde{\xi}|\xi\rangle = \langle \phi_1|\psi_1\rangle + (\langle \phi_2|\psi_2\rangle - \langle \phi_1|\psi_1\rangle)\xi^*\xi - 2i\text{Im}(\xi\langle \phi_1|\psi_2\rangle) \quad (9.4.25)$$

$$= \langle \phi_1|\psi_1\rangle = 1, \quad (9.4.26)$$

et

$$\langle \xi|\widetilde{\xi}\rangle = \langle \psi_1|\phi_1\rangle + (\langle \psi_2|\phi_2\rangle - \langle \psi_1|\phi_1\rangle)\xi^*\xi - 2i\text{Im}(\xi\langle \psi_1|\phi_2\rangle) \quad (9.4.27)$$

$$= \langle \psi_1|\phi_1\rangle = 1. \quad (9.4.28)$$

Ces deux dernières équations ont été obtenues en utilisant le système biorthonormé complet $\{|\psi_{1,2}\rangle, |\phi_{1,2}\rangle\}$ qui vérifie les relations:

$$\langle \phi_1|\psi_1\rangle = \langle \phi_2|\psi_2\rangle = 1, \quad (9.4.29)$$

$$\langle \phi_1|\psi_2\rangle = \langle \phi_2|\psi_1\rangle = 0. \quad (9.4.30)$$

$$|\phi_1\rangle\langle\psi_1| + |\phi_2\rangle\langle\psi_2| = 1, \quad (9.4.31)$$

$$|\psi_1\rangle\langle\phi_1| + |\psi_2\rangle\langle\phi_2| = 1. \quad (9.4.32)$$

On dit que les $|\xi\rangle$ et $|\widetilde{\xi}\rangle$ sont bi-normalisés.

De façon générale,

$$\langle \xi_1 | \widetilde{\xi}_2 \rangle = \langle \widetilde{\xi}_1 | \xi_2 \rangle \quad (9.4.33)$$

$$= \xi_1^* \xi_2 + \frac{1}{4} (2 - \xi_1^* \xi_1) (2 - \xi_2^* \xi_2), \quad (9.4.34)$$

La résolution de l'identité est maintenant vérifiée comme suit:

$$\begin{aligned} \int d\xi^* d\xi |\xi\rangle \langle \widetilde{\xi}| &= \int d\xi^* d\xi (|\psi_1\rangle \langle \phi_1| - \xi |\psi_2\rangle \langle \phi_1| + \xi^* |\psi_1\rangle \langle \phi_2| - \xi^* \xi \mathbf{1}) \\ &= \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (9.4.35)$$

et

$$\begin{aligned} \int d\xi^* d\xi \langle \widetilde{\xi} | \xi \rangle &= \int d\xi^* d\xi (|\phi_1\rangle \langle \psi_1| - \xi |\phi_2\rangle \langle \psi_1| + \xi^* |\phi_1\rangle \langle \psi_2| - \xi^* \xi \mathbf{1}) \\ &= \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (9.4.36)$$

Les équations (9.4.35) et (9.4.36) peuvent être facilement vérifiées en utilisant les expressions de $|\xi\rangle$ et $|\widetilde{\xi}\rangle$ en fonction de $|\psi_n\rangle$ et $|\phi_n\rangle$ ($n = 1, 2$) données respectivement par les équations (9.3.20) et (9.4.17)) et les règles de la permutation (9.3.9), (9.3.10) et de l'intégration (3.2.5).

On aboutit donc aux résultats suivants:

-) En raison des équations (9.4.26), (9.4.28), (9.4.35) et (9.4.36), le système continu $\{|\xi\rangle, |\widetilde{\xi}\rangle\}$ forme une base bi-normée et bi-surcomplète.

-) De même, les deux ensembles d'opérateurs pseudo-unitaires $D(\xi)$, $\widetilde{D}(\xi)$ peuvent s'appeler bi-unitaires,

$$D(\xi) \widetilde{D}^+(\xi) = 1 = \widetilde{D}^+(\xi) D(\xi). \quad (9.4.37)$$

On note aussi que $D(\xi)$ est η -pseudo-unitaire, alors que $\widetilde{D}(\xi)$ est η' -pseudo-unitaire avec $\eta' = \eta^{-1}$.

Ayant construit les états cohérents pseudo-fermioniques pour notre système décrit par l'Hamiltonien H (8.1.8), on se propose dans la section suivante d'étudier leur évolution temporelle.

9.5 L'évolution temporelle d'états cohérents pseudo-fermioniques

On s'intéresse maintenant à l'étude de l'évolution temporelle de ces états cohérents pseudo-fermioniques. On dit que des états cohérents vérifient la **stabilité temporelle**, si l'évolué de tout état cohérent initial reste toujours état cohérent au cours du temps [92, 93]. Dans le cas des états cohérents usuels $|\alpha\rangle$ décrits dans les sections (1.3) et (1.4), l'évolué $|\alpha; t\rangle$ d'un état cohérent $|\alpha\rangle$ est stable en utilisant l'opérateur d'évolution de l'oscillateur harmonique $e^{\frac{-i}{\hbar}Ht}$, $H = \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2})$:

$$|\alpha; t\rangle = e^{\frac{-i}{\hbar}Ht}|\alpha\rangle. \quad (9.5.1)$$

Les résultats suivants ont été établis dans la section (1.4):

-) Pour passer de l'état $|\alpha\rangle$ à son évolué $|\alpha; t\rangle$, il suffit de changer α en $\alpha e^{-i\omega t}$, et de multiplier le ket obtenu par $e^{-i\omega t/2}$ (qui est un facteur de phase globale sans conséquences physiques) [70]:

$$|\alpha\rangle \longrightarrow |\alpha; t\rangle = e^{-i\omega t/2}|\alpha(t)\rangle, \quad \text{avec } \alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}. \quad (9.5.2)$$

-) L'évolué $|\alpha; t\rangle$ reste toujours état propre de l'opérateur d'annihilation a au cours du temps, avec une valeur propre $\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$:

$$a|\alpha; t\rangle = \alpha(t)|\alpha; t\rangle. \quad (9.5.3)$$

Dans le cas des états cohérents pseudo-fermioniques $\{|\xi\rangle, |\widetilde{\xi}\rangle\}$, l'ensemble des paramètres sont les variables complexes de Grassmann ξ , l'évolution temporelle est dite stable si les états évolués $|\xi; t\rangle$ et $|\widetilde{\xi}; t\rangle$ restent toujours états cohérents au cours du temps et restent états propres des opérateurs d'annihilation b et \widetilde{b} respectivement,

$$b|\xi; t\rangle = \xi(t)|\xi; t\rangle, \quad (9.5.4)$$

$$\widetilde{b}|\widetilde{\xi}; t\rangle = \xi(t)|\widetilde{\xi}; t\rangle. \quad (9.5.5)$$

Ceci implique que les états cohérents évolués $|\xi; t\rangle$ et $|\widetilde{\xi}; t\rangle$ doivent former un système bi-normé et bi-surcomplet. Considérons d'abord l'évolution d'un état cohérent initial $|\xi\rangle$. Son

évolué $|\xi; t\rangle$ est donné par:

$$|\xi; t\rangle = \exp(-iHt)|\xi\rangle, \quad (\hbar = 1). \quad (9.5.6)$$

$$\text{avec } |\xi; 0\rangle \equiv |\xi\rangle.$$

On utilise l'expression (9.3.20) de $|\xi\rangle$ et le fait que les $|\psi_{1,2}\rangle$ sont des états propres de H (avec les valeurs propres $E_{1,2}$), on obtient:

$$|\xi; t\rangle = e^{-iE_1 t} \left(1 - \frac{1}{2} \xi^* \xi \right) |\psi_1\rangle - e^{-iE_2 t} \xi |\psi_2\rangle \quad (9.5.7)$$

$$= e^{-iE_1 t} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \xi^* \xi \right) |\psi_1\rangle - e^{-i(E_2 - E_1)t} \xi |\psi_2\rangle \right]. \quad (9.5.8)$$

Compte tenu de

$$E_1 = -\Omega/2 \equiv -E, \quad E_2 = \Omega/2 \equiv E. \quad (9.5.9)$$

On récrit alors la dernière équation sous la forme:

$$|\xi; t\rangle = e^{iEt} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \xi^*(t) \xi(t) \right) |\psi_1\rangle - \xi(t) |\psi_2\rangle \right] \quad (9.5.10)$$

$$= e^{iEt} |\xi(t)\rangle, \quad (9.5.11)$$

$$\text{où } \xi(t) = e^{-i2Et} \xi.$$

Ce qui manifeste la stabilité temporelle de l'évolution de l'état cohérent $|\xi\rangle$. On note que le facteur global dépendant du temps e^{iEt} est un facteur de phase globale; puisque les E_i sont réelles, donc sans conséquences physiques. Cette évolution temporelle peut être résumée de la façon suivante:

•) Pour passer de l'état $|\xi\rangle$ à son évolué $|\xi; t\rangle$, il suffit de changer ξ en $\xi(t) = \xi e^{-i2Et}$, et de multiplier le ket obtenu par e^{iEt} :

$$|\xi\rangle \longrightarrow |\xi; t\rangle = e^{iEt} |\xi(t)\rangle, \quad (9.5.12)$$

$$\text{avec } \xi(t) = \xi e^{-i2Et}.$$

•) L'évolué $|\xi; t\rangle$ reste toujours état propre de l'opérateur d'annihilation b au cours du temps, avec une valeur propre $\xi(t) = \xi e^{-i2Et}$:

$$b|\xi; t\rangle = \xi(t)|\xi; t\rangle. \quad (9.5.13)$$

D'une façon semblable on établit que l'évolué $|\widetilde{\xi}; t\rangle$ d'un état initial $|\widetilde{\xi}\rangle$, est stable:

$$|\widetilde{\xi}; t\rangle = e^{-iH^+t}|\widetilde{\xi}\rangle \quad (9.5.14)$$

$$= e^{-iE_1t} \left(1 - \frac{1}{2}\xi^*\xi \right) |\phi_1\rangle - e^{-iE_2t}\xi|\phi_2\rangle \quad (9.5.15)$$

$$= e^{-iE_1t} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\xi^*\xi \right) |\phi_1\rangle - e^{-i(E_2-E_1)t}\xi|\phi_2\rangle \right] \quad (9.5.16)$$

$$= e^{iEt} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\xi(t)^*\xi(t) \right) |\phi_1\rangle - \xi(t)|\phi_2\rangle \right] \quad (9.5.17)$$

$$= e^{iEt}|\widetilde{\xi}(t)\rangle, \quad \text{avec} \quad \xi(t) = \xi e^{-i2Et}. \quad (9.5.18)$$

$|\widetilde{\xi}; t\rangle$ reste aussi état propre de \widetilde{b} au cours du temps, avec une valeur propre $\xi(t) = \xi e^{-i2Et}$:

$$\widetilde{b}|\widetilde{\xi}; t\rangle = \xi(t)|\widetilde{\xi}; t\rangle. \quad (9.5.19)$$

9.6 Résultats et discussion

Les résultats (9.5.11) et (9.5.18) indiquent que l'ensemble des états cohérents pseudo-fermioniques évolués $\{|\xi; t\rangle, |\widetilde{\xi}; t\rangle\}$ est **bi-normé** et **bi-surcomplet**. Car on a:

$$\langle \xi; t | \widetilde{\xi}; t \rangle = \langle \xi(t) | \widetilde{\xi}(t) \rangle = 1, \quad (9.6.1)$$

$$\langle \widetilde{\xi}; t | \xi; t \rangle = \langle \widetilde{\xi}(t) | \xi(t) \rangle = 1, \quad (9.6.2)$$

et

$$\int d\xi^*(t) d\xi(t) |\xi; t\rangle \langle \widetilde{\xi}; t| = \mathbf{1}, \quad (9.6.3)$$

$$\int d\xi^*(t) d\xi(t) |\widetilde{\xi}; t\rangle \langle \xi; t| = \mathbf{1}. \quad (9.6.4)$$

Voir (**appendice 1**) pour les détails des calculs des expressions (9.6.1), (9.6.2), (9.6.3) et (9.6.4). On remarque ici que les états cohérents évolués $|\xi; t\rangle$ et $|\widetilde{\xi}; t\rangle$ sont différents des états cohérents $|\xi(t)\rangle$ et $|\widetilde{\xi}(t)\rangle$ respectivement, seulement à des facteurs de phase près (e^{iEt}) sans conséquences physiques, car E est réel. Enfin, on note qu'un autre système complémentaire des états cohérents, qui forment aussi un ensemble **bi-normé** et **bi-surcomplet** peut être construit d'une façon symétrique en utilisant les opérateurs $b^\#$ et $\widetilde{b}^\#$, qui annihilent "les états des niveaux supérieurs" $|\psi_2\rangle$ et $|\phi_2\rangle$ de H et H^+ respectivement.

Conclusions et perspectives

- Dans la première partie de cette thèse, nous avons généralisé les premiers résultats sur la cohérence des Hamiltoniens et les opérateurs invariants, du cas bosonique au cas fermionique.
- Nous avons montré que le système quantique qui préserve la cohérence, correspond à l'oscillateur fermionique **libre** non-stationnaire (c'est-à-dire non-forcé).
- Nous avons aussi construit, à l'aide de la méthode des invariants, les états cohérents pour l'oscillateur fermionique **forcé** non-stationnaire et nous avons introduit deux opérateurs invariants non-Hermitiens qui sont aussi des opérateurs d'annihilation et de création.
- Dans la seconde partie de cette thèse, nous avons tout d'abord étudié en détails les systèmes à deux-niveaux décrits par des Hamiltoniens non-Hermitiens, ensuite nous avons mis en relief leurs propriétés PT -symétriques et de pseudo-Hermiticité.
- Nous avons ensuite introduit les opérateurs pseudo-fermioniques d'annihilation et de création b et $b^\# = \eta^{-1}b^+\eta$ associés à notre Hamiltonien H . Où η est l'opérateur linéaire, Hermitien et invertible qui assure la pseudo-Hermiticité de notre Hamiltonien $H = \eta^{-1}H^+\eta$. En termes d'opérateurs b et $b^\#$, H est factorisé sous la forme de l'oscillateur pseudo-fermionique:
$$H = \Omega \left(b^\#b - \frac{1}{2} \right).$$
- Nous avons alors repris la même procédure pour H^+ . C'est-à-dire que nous avons introduit des opérateurs pseudo-fermioniques d'annihilation $\tilde{b} = \eta b \eta^{-1}$ et de création $\tilde{b}^{\#'} = \eta \tilde{b}^+ \eta^{-1}$ associés à H^+ . En termes d'opérateurs \tilde{b} et $\tilde{b}^{\#'}$, H^+ est factorisé sous la forme:
$$H^+ = \Omega \left(\tilde{b}^{\#'}\tilde{b} - \frac{1}{2} \right).$$
- Une fois que tous les ingrédients appropriés aux états cohérents ont été introduits, nous avons construit les états cohérents dits pseudo-fermioniques pour les systèmes à deux-niveaux décrits par des Hamiltoniens pseudo-Hermitiens.
- Les états cohérents pseudo-fermioniques construits ont comme indice de base les variables de Grassmann. Ils sont définis d'une façon analogue à celle des états cohérents fermioniques; c'est-à-dire comme états propres de l'opérateur d'annihilation. Nous avons montré que ces états cohérents peuvent être définis également comme action d'un opérateur de déplacement sur le vide.

• A la différence des états cohérents fermioniques, l'ensemble des états cohérents pseudo-fermioniques $\{|\xi\rangle, |\widetilde{\xi}\rangle\}$ est **bi-normé** et **bi-surcomplet**. En ce sens, le système des états cohérents pseudo-fermioniques, peut être considéré comme un analogue du système bi-orthonormé des états propres de l'Hamiltonien pseudo-Hermitien H [87, 35].

• Nous avons montré que ces états cohérents pseudo-fermioniques vérifient les mêmes propriétés de base que celles des états cohérents fermioniques, à savoir:

a) *Ils sont bi-normalisés,*

b) *Ils possèdent la continuité de l'indice de base,*

c) *Ils vérifient la résolution de l'identité,*

d) *Ils satisfont la stabilité temporelle; c'est-à-dire les états cohérents évolués $|\xi; t\rangle$ et $|\widetilde{\xi}; t\rangle$ restent toujours des états propres respectivement des opérateurs pseudo-fermioniques d'annihilation b et \widetilde{b} , et le système reste toujours **bi-normé** et **bi-surcomplet** au cours du temps.*

• Dans la limite Hermitienne $\eta = 1$, il en résulte: $H = H^+$, $b^\# = b^+$, $\widetilde{b} = b$. Donc les états cohérents $|\xi\rangle$ coïncident avec les états cohérents $|\widetilde{\xi}\rangle$ ($|\xi\rangle \equiv |\widetilde{\xi}\rangle$), qui représentent le recouvrement du système **bi-normé** vers le système **normé** et du système **bi-surcomplet** vers le système **surcomplet**.

• En outre, tous nos résultats ainsi que toutes les formules relatives à ces derniers, sont en accord avec les résultats précédents pour les états cohérents fermioniques dans la limite Hermitienne, à savoir:

1) Ils sont en accord avec les résultats de Cahill, Lee et Klauder [75, 76, 80].

2) Ils sont en accord avec nos résultats précédents, d'une part dans le cas Hermitien, relatifs à l'évolution nonadiabatique des états cohérents fermioniques du spin 1/2 dans un champ magnétique variable [73], et d'autre part, dans le cas des évolutions adiabatiques, examiné par Maamache et al [78].

• En fin, on tient à souligner que l'approche développée dans cette thèse, représente une généralisation pseudo-Hermitienne du formalisme d'états cohérents fermioniques à un

degré de liberté. La généralisation de ce formalisme à un système fermionique à N degrés de liberté ($N \geq 2$) pourrait faire l'objet d'investigations futures.

Appendices

Appendice 1: Les états cohérents pseudo-fermioniques évolués forment un système bi-normé et bi-surcomplet.

On se propose d'établir les équations (9.6.1), (9.6.2), (9.6.3) et (9.6.4) relatives à l'ensemble des états cohérents pseudo-fermioniques évolués $\{|\xi; t\rangle, |\widetilde{\xi}; t\rangle\}$, qui forment aussi un système **bi-normé** et **bi-surcomplet**.

Compte tenu des expressions de $|\xi; t\rangle$ et $|\widetilde{\xi}; t\rangle$ données respectivement par les équations (9.5.11) et (9.5.18). On a:

$$\begin{aligned} \langle \xi; t | \widetilde{\xi}; t \rangle &= \langle \xi(t) | \widetilde{\xi}(t) \rangle \\ &= \langle \psi_1 | \phi_1 \rangle + (\langle \psi_2 | \phi_2 \rangle - \langle \psi_1 | \phi_1 \rangle) \xi^*(t) \xi(t) - 2i \text{Im}(\xi(t) \langle \psi_1 | \phi_2 \rangle), \\ &= \langle \psi_1 | \phi_1 \rangle = 1. \end{aligned}$$

Car $\{|\psi_{1,2}\rangle, |\phi_{1,2}\rangle\}$ forment un système biorthonormé complet qui vérifie les relations:

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 | \psi_1 \rangle &= \langle \phi_2 | \psi_2 \rangle = 1, \\ \langle \phi_1 | \psi_2 \rangle &= \langle \phi_2 | \psi_1 \rangle = 0, \\ |\phi_1\rangle \langle \psi_1| + |\phi_2\rangle \langle \psi_2| &= \mathbf{1}, \\ |\psi_1\rangle \langle \phi_1| + |\psi_2\rangle \langle \phi_2| &= \mathbf{1}. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{\xi}; t | \xi; t \rangle &= \langle \widetilde{\xi}(t) | \xi(t) \rangle, \\ &= \langle \phi_1 | \psi_1 \rangle + (\langle \phi_2 | \psi_2 \rangle - \langle \phi_1 | \psi_1 \rangle) \xi^*(t) \xi(t) - 2i \text{Im}(\xi(t) \langle \phi_1 | \psi_2 \rangle), \\ &= \langle \phi_1 | \psi_1 \rangle = 1. \end{aligned}$$

La résolution de l'identité est réalisée de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \int d\xi^*(t) d\xi(t) |\xi; t\rangle \langle \widetilde{\xi}; t| &= \int d\xi^*(t) d\xi(t) |\xi(t)\rangle \langle \widetilde{\xi}(t)| \\ &= \int d\xi^*(t) d\xi(t) (|\psi_1\rangle \langle \phi_1| - \xi(t) |\psi_2\rangle \langle \phi_1| + \xi^*(t) |\psi_1\rangle \langle \phi_2| - \xi^*(t) \xi(t) \mathbf{1}) \\ &= \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
 \int d\xi^*(t)d\xi(t)|\widetilde{\xi;t}\rangle\langle\xi;t| &= \int d\xi^*(t)d\xi(t)|\widetilde{\xi(t)}\rangle\langle\xi(t)| \\
 &= \int d\xi^*(t)d\xi(t)(|\phi_1\rangle\langle\psi_1| - \xi(t)|\phi_2\rangle\langle\psi_1| + \xi^*(t)|\phi_1\rangle\langle\psi_2| - \xi^*(t)\xi(t)\mathbf{1}) \\
 &= \mathbf{1}.
 \end{aligned}$$

Ici, on a utilisé les mêmes règles de permutation (9.3.9), (9.3.10) et de l'intégration (3.2.5) pour les variables de Grassmann $\xi(t)$ dépendant du temps. A savoir,

$$\begin{aligned}
 \xi(t)|\psi_1\rangle &= |\psi_1\rangle\xi(t), & \xi(t)|\psi_2\rangle &= -|\psi_2\rangle\xi(t). \\
 \xi(t)|\phi_1\rangle &= |\phi_1\rangle\xi(t), & \xi(t)|\phi_2\rangle &= -|\phi_2\rangle\xi(t).
 \end{aligned}$$

Et

$$\int d\xi(t)\mathbf{1} = 0, \quad \int d\xi^*(t)\mathbf{1} = 0, \quad \int d\xi(t)\xi(t) = 1, \quad \int d\xi^*(t)\xi^*(t) = 1.$$

Appendice 2: La formule de Baker-Campbell-Hausdorff.

La formule de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) est très utile dans le domaine des états cohérents, elle permet le réarrangement des produits des exponentiels des opérateurs linéaires.

Soient deux opérateurs linéaires A et B d'une algèbre de Lie. La formule de (BCH) donne l'expression de $\log(e^A e^B)$ en tant que série entière dans l'algèbre de Lie engendrée par A et B :

$$e^A e^B = e^{\left(A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]-\frac{1}{12}[B,[A,B]]-\frac{1}{24}[B,[A,[A,B]]]+\dots\right)}$$

Dans le cas particulier où A et B commutent avec $[A, B]$, c'est-à-dire:

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0.$$

On a alors

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}.$$

Cette dernière est une formule clé dans le domaine des états cohérents.

Bibliographie

- [1] C. M. Bender, S. Boettcher, Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having PT Symmetry, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5243-5246 (1998).
- [2] C. M. Bender, M. V. Berry, A. Mandilara, Generalized PT symmetry and real spectra, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, L467-L471 (2002).
- [3] C. M. Bender, D. C. Brody, H. F. Jones, Complex Extension of Quantum Mechanics, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 270401-270404 (2002).
- [4] C. M. Bender, D. C. Brody, H. F. Jones, Erratum: Complex Extension of Quantum Mechanics, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 119902 (2002).
- [5] C. M. Bender, P. N. Meisinger, Q. Wang, Calculation of the hidden symmetry operator in PT-symmetric quantum mechanics, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 1973-1983 (2003).
- [6] C. M. Bender, Making sense of non-Hermitian Hamiltonians, *Rep. Prog. Phys.* **70**, 947-1018 (2007).
- [7] C M. Bender, Four easy pieces, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 9993-10012 (2006).
- [8] A. Khare, B. M. Mandal, A PT-invariant potential with complex QES eigenvalues, *Phys. Lett. A* **272**, 53-56 (2000).
- [9] F. Cannata, M. Ioffe, R. Roychoudhury, P. Roy, A new class of PT-symmetric Hamiltonians with real spectra, *Phys. Lett. A* **281**, 305-310 (2001).

- [10] M. Znojil, Exactly solvable models with PT-symmetry and with an asymmetric coupling of channels, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 4047-4061 (2006).
- [11] P. Dorey, C. Dunning, R. Tateo, Supersymmetry and the spontaneous breakdown of PT-symmetry, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, L391-L400 (2001).
- [12] P. Dorey, C. Dunning, R. Tateo, Spectral equivalences, Bethe ansatz equations, and reality properties in PT-symmetric quantum mechanics, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 5679-5704 (2001).
- [13] K. Shin, On the Reality of the Eigenvalues for a Class of PT -Symmetric Oscillators, *Commun. Math. Phys.* **229**, 543-564 (2002).
- [14] E. Caliceti, S. Graffi, J. Sjostrand, Spectra of PT-symmetric operators and perturbation theory, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 185-193 (2005).
- [15] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry: The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian, *J. Math. Phys.* **43**, 205-214 (2002).
- [16] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry.II. A complete characterization of non-Hermitian Hamiltonians with real spectrum, *J. Math. Phys.* **43**, 2814-2816 (2002).
- [17] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry.III. Equivalence of Pseudo-Hermiticity and the presence of antilinear symmetries, *J. Math. Phys.* **43**, 3944-3951 (2002).
- [18] A. Mostafazadeh, On the pseudo-Hermiticity of a class of PT-symmetric Hamiltonians in one dimension, *Mod. Phys. Lett. A* **17**, 1973-1977 (2002).
- [19] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity for a class of nondiagonalizable Hamiltonians, *J. Math. Phys.* **43**, 6343-6352 (2002).

-
- [20] A. Mostafazadeh, Pseudo-supersymmetric quantum mechanics and isospectral pseudo-Hermitian Hamiltonians, *Nucl. Phys. B* **640**, 419-434 (2002).
- [21] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity and generalized PT- and CPT-symmetries, *J. Math. Phys.* **44**, 974-989 (2003).
- [22] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermitian description of PT-symmetric systems defined on a complex contour, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 3213-3234 (2005).
- [23] A. Mostafazadeh, Physical aspects of pseudo-Hermitian and PT-symmetric quantum mechanics, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 11645-11679 (2004).
- [24] A. Mostafazadeh, Statistical origin of pseudo-Hermitian supersymmetry and pseudo-Hermitian fermions, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 10193-10207 (2004).
- [25] F. G. Scholtz, H. B. Geyer, F. J. W. Hahne, Quasi-Hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle, *Ann. Phys.* **213**, 74-101 (1992).
- [26] W. Pauli, On Dirac's New Method of Field Quantization, *Rev. Mod. Phys.* **15**, 175-207 (1943).
- [27] S. N. Gupta, On the Calculation of Self-Energy of Particles, *Phys. Rev.* **77**, 294-295 (1950).
- [28] S. N. Gupta, Theory of Longitudinal Photons in Quantum Electrodynamics, *Proc. Phys. Soc. Lond.* **63**, 681-691 (1950).
- [29] T. D. Lee, G. C. Wick, Negative metric and the unitarity of the S-matrix, *Nucl. Phys. B* **9**, 209-243 (1969).
- [30] E. C. G. Sudarshan, Quantum Mechanical Systems with Indefinite Metric. I, *Phys. Rev.* **123**, 2183-2193 (1961).
- [31] Z. Ahmed, C-, PT- and CPT-invariance of pseudo-Hermitian Hamiltonians, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 9711-9719 (2003).

- [32] Y. Ben-Aryeh, A. Mann, I. Yaakov, Rabi oscillations in a two-level atomic system with a pseudo-Hermitian Hamiltonian, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 12059-12066 (2004).
- [33] A. Bohr, B. R. Mottelson, *Nuclear Structure vol.1 section 2.4*, (Benjamin, New York, 1969).
- [34] D. Baye, G. Lévai, J. M. Sparenberg, Phase-equivalent complex potentials, *Nucl. Phys. A* **599**, 435-456 (1996).
- [35] F. H. M. Faisal, J. V. Moloney, Time-dependent theory of non-Hermitian Schrodinger equation: Application to multiphoton-induced ionisation decay of atoms, *J. Phys. B: Cond. Mat.* **14**, 3603-3620 (1981).
- [36] W. E. Lamb, R. R. Schlicher, M. O. Scully, Matter-field interaction in atomic physics and quantum optics, *Phys. Rev. A* **36**, 2763-2772 (1987).
- [37] J. Garrison, E. Wright, Complex geometrical phases for dissipative systems, *Phys. Lett. A* **128**, 177-181 (1988).
- [38] P. Meystre, M. Sargent, *Elements of quantum optics*, (Springer, Berlin, 1990).
- [39] M. Le Bellac, *Physique quantique*, (EDP Sciences, Paris, 2004).
- [40] H. Choutri, M. Maamache, S. Menouar, Geometric Phase for a Periodic Non-Hermitian Hamiltonian, *J. Kor. Phys. Soc* **40**, 358-360 (2002).
- [41] G. Dattoli, A. Torre, R. Magnani, Non-Hermitian evolution of two-level quantum systems, *Phys. Rev. A* **42**, 1467-1475 (1990).
- [42] A. Mondragon, E. Hernandez, Berry phase of a resonant state, *J. Phys. A: Math. Gen.* **29**, 2567-2585 (1996).
- [43] T. Stehmann, W. D. Heiss, F. E. Scholtz, Observation of exceptional points in electronic circuits, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 7813-7819 (2004).

-
- [44] A. O. Barut, L. Girardello, New “Coherent” States associated with non-compact groups, *Commun. Math. Phys.* **21**, 41-55 (1971).
- [45] J. P. Gazeau, J. R. Klauder, Coherent states for systems with discrete and continuous spectrum, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**, 123-132 (1999).
- [46] J. P. Antoine, J. P. Gazeau, P. M. Monceau, J. R. Klauder, K A. Penson, Temporally stable coherent states for infinite well and Pöschl–Teller potentials, *J. Math. Phys.* **42**, 2349-2387 (2001).
- [47] J. R. Klauder, Continuous-Representation Theory. I. Postulates of Continuous-Representation Theory, *J. Math. Phys.* **4**, 1055-1058 (1963).
- [48] J. R. Klauder, Continuous-Representation Theory. II. Generalized Relation between Quantum and Classical Dynamics, *J. Math. Phys.* **4**, 1058-1073 (1963).
- [49] A. M. Perelomov, Coherent states for arbitrary Lie group, *Commun Math. Phys.* **26**, 222-236 (1972).
- [50] R. Gilmore, Geometry of symmetrized states, *Ann. Phys. (NY)* **74**, 391-463 (1972).
- [51] R. Gilmore, Baker-Campbell-Hausdorff formulas, *J. Math. Phys.* **15**, 2090-2092 (1974).
- [52] A. H. El Kinani, Etats Cohérents et intelligents généralisés pour des systèmes quantiques exactement solubles, (Thèse de Doctorat, Université Mohammed V Rabat, 2006).
- [53] F. Madouri, Autour des Etats Cohérents Déformés et du Modèle du Hubbard avec phonons, (Thèse de Doctorat d’Etat, Université Mohammed V Rabat, 2007).
- [54] D. A. Trifonov, Coherent states and uncertainty relations, *Phys. Lett. A* **48**, 165-166 (1974).
- [55] A. H. El Kinani, M. Daoud, Generalized intelligent states for an arbitrary quantum system, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 5373-5387 (2001).

- [56] D. A. Trifonov, Robertson intelligent states, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30**, 5941-5957 (1997).
- [57] J. R. Klauder, Coherent states for the hydrogen atom, *J. Phys. A: Math. Gen.* **29**, L293-L298 (1996).
- [58] E. Schrodinger, Der stetige Ubergang von der Mikro-zur Makromechanik, *Natur-wiss.* **14**, 664-666 (1926).
- [59] R. J. Glauber, Photon Correlations, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 84-86 (1963).
- [60] R. J. Glauber, The Quantum Theory of Optical Coherence, *Phys. Rev.* **130**, 2529-2539 (1963).
- [61] R. J. Glauber, Coherent and Incoherent States of the Radiation Field, *Phys. Rev.* **131**, 2766-2788 (1963).
- [62] J. R. Klauder, B. S. Skagerstam, *Coherent States - Applications in Physics and Mathematical Physics*, (World Scientific, Singapore, 1985).
- [63] W. M. Zhang, D. H. Feng, R. Gilmore, Coherent states : Theory and some applications, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 867-927 (1990).
- [64] A. M. Perelomov, *Generalized Coherent States and their Applications* (Springer-Verlag, Berlin, 1986).
- [65] K. Fujii, A Universal Disentangling Formula for Coherent States of Perelomov's Type, arXiv:hep-th/9907049.
- [66] K. Funahashi, T. Kashiwa, S. Sakoda and K. Fujii, Coherent states, path integral, and semiclassical approximation, *J. Math. Phys.* **36**, 3232-3253 (1995).
- [67] K. Fujii, Basic properties of coherent and generalized coherent operators revisited, *Mod. Phys. Lett. A.* **16**, 1277-1286 (2001).

-
- [68] L. Mandel, E. Wolf, Optical coherence and quantum optics, (Cambridge University Press, 1995).
- [69] S. Twareque Ali, J. P. Antoine, J. P. Gazeau, U. A. Mueller, Coherent states and their generalizations: a Mathematical overview, *Rev. Math. Phys.* **7**(7), 1013-1104 (1995).
- [70] C. C. Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, *Mécanique quantique Tome 1*, (Hermann Editeurs, Paris, 1977).
- [71] B. Bagchi, C. Quesne, Creation and annihilation operators and coherent states for the PT-symmetric oscillator, *Mod. Phys. Lett. A* **16**, 2449-2455 (2001).
- [72] B. Roy, P. Roy, Coherent states of non-Hermitian quantum systems, *Phys. Lett. A* **359**, 110-113 (2006).
- [73] M. Maamache and O. Cherbal, Evolution of Grassmannian invariant-angle coherent states and nonadiabatic Hannay's angle, *Eur. Phys. J. D* **6**, 145-148 (1999).
- [74] O. Cherbal, M. Drir, M. Maamache and D. A. Trifonov, Fermionic coherent states for pseudo-Hermitian two-level systems, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 1835-1844 (2007).
- [75] K. E. Cahill, R J. Glauber, Density operators for fermions, *Phys. Rev. A* **59**, 1538-1555 (1999).
- [76] C. J. Lee, Covariance and uniqueness of the canonical fermion coherent state, *Phys. Rev. A* **46**, 6049-6051 (1992).
- [77] S. Abe, Adiabatic holonomy and evolution of fermionic coherent state, *Phys. Rev. D* **39**, 2327-2331 (1989).
- [78] M. Maamache, J. P. Provost, G. Vallée, Comment on "Adiabatic holonomy and evolution of fermionic coherent state", *Phys. Rev. D* **46**, 873-875 (1992).
- [79] J. Ohnuki, T. Kashiwa, Coherent States of Fermi Operators and the Path Integral, *Prog. Theo. Phys.* **60**, 548-564 (1978).

- [80] G. Junker and J. R. Klauder, Coherent-state quantization of constrained fermion systems, *Eur. Phys. J. C.* **4**, 173-183 (1998).
- [81] J. L. Martin, The feynman principle for a fermi system, *Proc. Roy. Soc. London A* **251**, 543-549 (1959).
- [82] F. A. Berezin, *The Method of Second Quantization*, (Academic Press, New York, 1966).
- [83] F. A. Berezin, M. S. Marinov, Particle spin dynamics as the grassmann variant of classical mechanics, *Ann. Phys.* **104**, 336-362 (1977).
- [84] J. F. Cornwell, *Group theory in physics, volume 3*, (Academic Press, London, 1989).
- [85] T. T. Wu, Ground State of a Bose System of Hard Spheres, *Phys. Rev.* **115**, 1390 - 1404 (1959).
- [86] D. R. Gilson, An introduction and brief topical review of non-Hermitian quantum mechanics with real spectra, (Master of Science Thesis, University of Hull, 2008).
- [87] J. Wong, Results on Certain Non-Hermitian Hamiltonians, *J. Math. Phys.* **8**, 2039-2042 (1967).
- [88] C. M. Bender and T. T. Wu, Anharmonic Oscillator, *Phys. Rev.* **184**, 1231-1260 (1969).
- [89] R. Haydock and M. J. Kelly, Electronic structure from non-hermitian representations of the Hamiltonian, *J. Phys. C.* **8**, L290-L293 (1975).
- [90] G. E. Stedman and P. H. Butler, Time reversal symmetry in applications of point group theory, *J. Phys. A: Math. Gen.* **13**, 3125-3140 (1980).
- [91] N. Hatano and D. R. Nelson, Vortex pinning and non-Hermitian quantum mechanics, *Phys. Rev. B.* **56**, 8651-8673 (1997).

-
- [92] D. A. Trifonov, Generalized intelligent states and squeezing, *J. Math. Phys.* **35**, 2297-2308 (1994).
- [93] B. A. Nikolov, D. A. Trifonov, Dynamics of Generalized Coherent States I. Exact and stable evolution, *Commun. JINR E2-81-797*, Dubna, 198. [quant-ph/0407260]
- [94] P. T. Matthews, A. Salam, Propagators of quantized field, *Nuovo Cimento* **2**, 120-134 (1955).
- [95] O. Cherbal, M. Drir, M. Maamache and D. A. Trifonov, Invariants and Coherent States for Nonstationary Fermionic Forced Oscillator, arXiv:quant-ph/0903.3312, submitted to *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*.
- [96] H.R. Lewis, W.B. Riesenfeld, An Exact Quantum Theory of the Time-Dependent Harmonic Oscillator and of a Charged Particle in a Time-Dependent Electromagnetic Field, *J. Math. Phys.* **10**, 1458-1473 (1969).
- [97] R. J. Glauber, Classical behavior of systems of quantum oscillators, *Phys. Lett.* **21** 650-652 (1966).
- [98] C. L. Mehta and E. C. G. Sudarshan, Time evolution of coherent states, *Phys. Lett.* **22**, 574-576 (1966).
- [99] C. L. Mehta, P. Chand, E.C.G. Sudarshan and R. VEDAM, Dynamics of Coherent States, *Phys. Rev.* **157**, 1198-1206 (1967).
- [100] D. Stoler, Most-general minimality-preserving Hamiltonian, *Phys. Rev. D* **11**, 3033-3034 (1975).
- [101] Y. Kano, A remark on time evolution of coherent states, *Phys. Lett. A* **56**, 7-8 (1976).
- [102] I.A. Malkin, V.I. Manko, D.A. Trifonov, Coherent States and Transition Probabilities in a Time-Dependent Electromagnetic Field, *Phys. Rev. D* **2**, 1371-1385 (1970); *N. Cimento A* **4**, 773 (1971).

- [103] A. Holz, N -dimensional anisotropic oscillator in a uniform time-dependent electromagnetic field, *Lett. Nuovo Cimento* **4**, 1319-1323 (1970).
- [104] D.A. Trifonov, *Bulg. J. Phys.* **2**, 303 (1975); D.A.Trifonov, Preprint ICTP IC/75/2 (1975). The expressions of quantum fluctuations σ_q^2 and σ_p^2 (formulas (18) and (15)) should be interchanged.