N° d'ordre : 37/2010-M/PH

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE "HOUARI BOUMEDIENNE"

FACULTÉ DE PHYSIQUE

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magistère

en Physique

Spécialité : Physique théorique de la matière et des hautes énergies

Par

Frissou Naima

Sujet

Particule Intrinsequement et Stochastiquement Etendue

Soutenu publiquement, le 07 Juillet 2010 devant le jury composé de :

M.	**A-H. HAMICI**	Maître de conférences	à L'U.S.T.H.B.	Président.
M.	**M. HACHEMANE**	Professeur	à L'U.S.T.H.B.	Directeur de memoire.
M.	**A. SMIDA**	Professeur	à L'U.S.T.H.B.	Examinateur.
M.	**A. KELLOU**	Maître de conférences	à L'U.S.T.H.B.	Examinateur.
M.	**C. BENCHOUK**	Maître de conférences	à L'U.S.T.H.B.	Examinateur.

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire de Physique Théorique de l'U.S.T.H.B. sous la direction du Professeur Mahmoud HACHEMANE. Je lui adresse mes remerciements pour disponibilité et sa patience et pour ses précieux conseils.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Abdallah SMIDA Professeur à l'U.S.T.H.B. pour avoir accepter de présidé le jury de soutenance.

Je remercie également Monsieur Adbelhafid KELLOU Maître de conférences à l'U.S.T.H.B. pour avoir accepter d'honorer le jury de soutenance.

Je remercie également Monsieur Chafik BENCHOUK Maître de conférences à l'U.S.T.H.B d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Mes vifs remerciements sont adressés à madame Amel-Hiba HAMICI Maître de conférences à l'U.S.T.H.B. pour avoir accepter de juger le présent travail, pour ses sages conseils et pour sa présence.

Enfin, mon dévouement entier et mon total respect s'adressent à mes parents pour leur présence pendant toutes mes études.. Mes remerciements les plus vifs s'adressent à mes frères et soeurs . Je remercie également tout les membres de ma famille, et tout ceux que je n'ai pas cité.

Table des matières

INTRODUCTION

Vers les années cinquante, les symétries ont été utilisées non seulement pour décrire mais aussi pour bâtir de nouvelles théories de particules en interactions telles que les théories de Jauge. Ainsi, l'invariance par changement de coordonnées a guidé Einstein pour bâtir sa théorie [1]. Aussi, la plupart des lois fondamentales trouvées sont des conséquences de symétries, par exemple, le principe fondamental de la dynamique est une conséquence de l'invariance galiléenne et du principe de moindre action [2]. Même les propriétés intrinsèques des particules ont pu être exprimées en termes de symétries [2, 3].

La cinématique obéit également à des symétries qui se traduisent en lois de conservation: la symétrie de translation dans le temps conserve l'énergie, l'invariance par translation dans l'espace conserve l'impulsion et l'invariance par rotation conserve le moment cinétique. Aussi, il est important de savoir que les seuls lagrangiens qui conduisent à de bonnes équations sont ceux qui sont invariants sous des transformations de symétrie [4].

L'outil mathématique par lequel ces symétries sont décrites est la théorie des groupes. Ainsi, la symétrie $SU(2)$ permet de décrire les états de spin et de l'isospin des particules. L'homogénéité de l'espace-temps conserve l'énergie-impulsion et l'isotropie de l'espace conserve le moment angulaire, ceci a été formulé à partir du groupe de Poincaré qui traite aussi la gravitation. En effet, les groupes des symétries locales traitent les quatre forces, le groupe $U(1)$ décrit le champ électromagnétique, l'interaction faible est décrite par $SU(2)$ et l'interaction forte par $SU(3)$ [5].

Un groupe possède des représentations, cette notion de représentation est fondamentale. Il s'agit d'étudier les différentes manières dont agit un groupe sur des espaces vectoriels par des transformations linéaires.

Une représentation doit être irréductible afin de décrire les états d'une particule élémentaire localisée dans une région finie de l'espace selon la mécanique quantique conventionnelle. La physique moderne traite les particules élémentaires comme des objets ponctuels sans dimensions. Cependant, lorsque l'on passe au domaine relativiste, la notion de localisation ponctuelle est incompatible avec le principe de causalité relativiste [6] et la théorie des champs quantiques présente des termes infinis dans le calcul de la matrice de diffusion, ces termes sont supprimés par des techniques mathématiques (renormalisation) [4].

Pour remédier a cette situation, le problème de la non existence d'une valeur mesurée exacte et que chaque mesure est accompagnée d'erreurs a été souligné par Prugovecki [7], une approche considérant toute particule élémentaire comme ayant une extension au sens de la mesure a été alors construite. Cette extension est due à l'imperfection de l'appareil de mesure et elle est qualifiée de stochastique. Une observable n'est plus alors représentée par un nombre unique, mais par une valeur accompagnée d'une densité de probabilité que la valeur réelle soit différente de celle obtenue comme résultat de mesure.

La théorie stochastique n'est pas la seule théorie qui attribue un caractère non ponctuel aux particules quantiques. En effet, un point de vue opposé lui attribue une extension réelle : Destouches [**?**, **?**] tient compte de l'influence du reste de l'univers sur les caractéristiques internes de la particule pour mieux se rapprocher de la réalité physique. Il arrive à la conclusion que la particule doit être représentée par une fonction (fonction d'onde physique), et non par un point de l'espace, pour qu'elle puisse être influençable dans ces caractéristiques propres [**?**]. Donc, contrairement à la théorie stochastique, qui attribue à la particule une extension au sens de la mesure en prenant en considération l'imperfection de l'appareil de mesure, la théorie fonctionnelle attribue à la particule une extension intrinsèque en la décrivant par une onde physique non probabiliste.

En utilisant la théorie fonctionnelle, un modèle de particule étendue a été développé dans notre laboratoire [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]. Ce modèle a été amélioré dans le cas non relativiste en lui ajoutant une composante stochastique [**?**]. Le présent travail est une généralisation de cette amélioration dans le cadre relativiste pour des particules scalaires. Cette généralisation a déjà été réalisée dans le travail de Doctorat de Madame Hamici [**?**] qui s'est intéressé à la structure géométrique des espaces des états de la particule étendue et à son propagateur sans se pencher d'une manière détaillée sur les probabilités de localisation. Notre but est de compléter se travail en nous intéressant à ces probabilités.

Dans l'espace de Hilbert, support de la représentation espace des phases, les états cohérents généralisés $\{\eta_{q,p}; q \in M(1,3),\ p \in V_m^{\pm}\}$ forment un système surcomplet (overcomplete) [7] et sont obtenus en translatant une fonction η d'une quantité q et en la "boostant" de $v = \frac{p}{m}$. Les éléments η sont interprétés comme les vecteurs d'états propres d'une particule d'essai jouant le rôle d'un micro-détecteur au repos stochastique à l'origine d'un repère d'inertie [**?**]. L'élément $\eta_{q,p}$ correspond à l'état de la même particule ayant une position et une impulsion stochastiques $(q, p, \chi_{q,p})$, où $\chi_{q,p}$ est une fonction de confiance pour que la valeur réelle soit différente de la valeur mesurée (q, p). L'ensemble de ces états constituent un repère quantique qui confère à l'espace-temps un statut quantique [**?**].

La particule intrinsèquement étendue est d'abord décrite par une fonction d'onde $\varphi(x, \zeta)$ et supposée être composée de deux modes locaux, l'un externe (espace de configuration x) et l'autre interne (espace des impulsions ζ). Pour un système à deux corps, le premier mode pourrait être le centre de masse et le second la particule fictive en mouvement relatif. La fonction d'onde correspond à une décomposition de l'état quantique sur une base $|x, \zeta>$. On attribue ensuite une extension stochastique au mode externe car c'est lui qui correspond à la localisation globale de la particule. La fonction d'onde bilocale devient alors $\varphi(q, p; \zeta)$ et correspond à une décomposition sur une base $|\eta_{q,p}> \otimes |\zeta>$ où l'état parfaitement localisé $|x>$ est remplacé par l'état propre stochastique $|\eta_{q,p}>$ décrit par une fonction η rendant compte de l'imperfection de l'appareil de mesure.

Dans le premier chapitre, nous introduisons le groupe de Poincaré ainsi que son algèbre de lie dont on définira les générateurs et les opérateurs de Casimir. Nous présentons la mécanique quantique conventionnelle pour une particule relativiste. Les notions de bases sont introduites, telles que les représentations configuration et impulsion dans lesquelles on définit le système d'imprimitivité qui sont des opérateurs de projection donnant les probabilités. Ces dernières possèdent un sens physique acceptable dans l'espace des impulsions, contrairement à l'espace de configuration où la localisation de la particule présente des difficultés insurmontables [**?**]. En effet, le courant de probabilité est défini dans la représentation configuration à partir de l'équation de Klein-Gordon. Sa composante temporelle $j^0(x)$ n'est pas définie-positive. L'équation de Dirac ne règle pas ce problème et demeure insuffisante car bien que $j^0(x)$ soit positive, la variable x ne correspond pas à la position de la particule (impossibilité de définir un opérateur de position qui commute avec l'opérateur de masse) [**?**]. D'une façon générale, l'incompatibilité entre la notion de localisation ponctuelle et le principe de causalité [**?**] fait appel à une autre vision sur notre description de la nature, ainsi la notion d'une particule ponctuelle est remplacée par celle d'une particule étendue. Le deuxième chapitre présente la première description (stochastique) de la particule étendue élaborée par Prugovecki [**?**]. Nous y présentons la mécanique quantique stochastique pour des particules sans spin (la particule système et le micro-détecteur possèdent des spins nuls). Nous étudions la représentation espace des phases $U(a, \Lambda)$, sa décomposition en sous-représentations irréductibles, et la manière d'écrire les fonctions d'onde dans les sous-espaces de Hilbert correspondants à ces sous-représentations [**?**]. Nous abordons ensuite les systèmes de covariance (généralisations des systèmes d'imprimitivité), les probabilités et le propagateur libre. Nous passons à notre propre travail au troisième chapitre où la théorie stochastique est combinée avec le modèle de la particule étendue dans le but de décrire des particules étendues à la fois stochastiquement et intrinsèquement. Comme introduction, nous rappelons brièvement les résultats du cas non relativiste [**?**]. Dans une première généralisation, qui servira dans la limite non relativiste de la probabilité, nous considérons un mode interne relativiste alors que le mode externe demeure non relativiste. Ensuite, le cas où les deux modes sont relativistes est étudié pour un mode interne dans la représentation impulsion puis dans la représentation configuration, le mode externe étant toujours dans la représentation espace des phases. Au cours de ce développement progressif, on définit l'espace de Hilbert, les systèmes de covariance et les probabilités. Le calcul du propagateur libre précède la conclusion qui résume l'essentiel du présent travail.

Chapitre 1

Particule Relativiste Ponctuelle

En 1905, Einstein formula l'invariance relativiste [?]. Le principe de base de la théorie de la relativité restreinte est qu'il y a équivalence entre les repères d'inertie. Ceci entraîne l'équivalence entre les trois dimensions de l'espace et la dimension du temps. En choisissant l'espace de Minkowski comme modèle de l'espace physique, cette équivalence devient la conséquence d'une certaine symétrie de l'espace-temps. En effet, le groupe d'invariance des intervalles de cet espace (groupe d'isométrie) est le groupe de Poincaré composé de deux sous-groupes: le groupe de Lorentz et le groupe des translations à quatre dimensions. On a ainsi découvert le groupe de symétrie cinématique de l'espace-temps. De plus, on peut distinguer les particules par leur comportement sous l'action des transformations du groupe de Poincaré. C'est Wigner qui a donné l'initiative de cette idée en 1939 [24]. Il s'agit là d'un problème mathématique ardu, en effet le groupe de Poincaré ne possède aucune des bonnes propriétés permettant d'appliquer des théorèmes de la théorie des représentations car il n'est pas compact et il n'est pas simplement connexe. L'approche de Wigner avait comme fruit d'introduire la masse et le spin des particules. Pour traduire cette idée mathématiquement, introduisons quelques notions fondamentales dans l'étude du groupe de Poincaré.

1.1 Groupe et Algèbre de Lie

Un événement caractérisé par la position spatiale $\mathbf{x} = \{x^i; i = 1, 2, 3\}$ et le temps t est noté par $x = \{x^\mu; \mu = 0, 1, 2, 3\}$ où $x^{\mu=0} = ct$ et $x^{\mu=i} = x^i$. La distance entre deux événements, x_1^μ et x_2^μ, définit un quadri-vecteur $x^\mu = x_1^\mu - x_2^\mu$. Le carré du quadri-vecteur x est

$$x^2 = (x^0)^2 - \mathbf{x^2} \tag{1.1.1}$$

Ce carré peut être écrit comme

$$x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \tag{1.1.2}$$

$$g_{\mu\nu} = diag\,(1, -1, -1, -1) \tag{1.1.3}$$

où $g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique dont la forme est diagonale.

Le principe de la relativité stipule que les lois de base de la physique sont invariantes sous les translations quadri-dimensionnelles (homogénéité de l'espace-temps) et toutes les transformations linéaires de l'espace-temps qui laissent inchangé le carré des quadri-vecteurs (isotropie de l'espace temps) [**?**]. Présentons d'abord ces transformations linéaires qui sont appelées transformation de Lorentz.

1.1.1 Transformation de Lorentz Homogène

Une transformation de Lorentz homogène est une transformation Λ linéaire continue des vecteurs unitaires et des coordonnées:

$$e_\mu \rightarrow e'_\mu = e_\nu \Lambda_\mu^\nu \tag{1.1.4}$$

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \tag{1.1.5}$$

qui préserve le carré du quadri-vecteur [**?**]

$$x^2 = x'^2 \tag{1.1.6}$$

Des équations (1.1.2) et (1.1.5), on déduit que

$$g_{\mu\nu} \Lambda_\lambda^\mu \Lambda_\sigma^\nu = g_{\lambda\sigma} \tag{1.1.7}$$

L'équation (1.1.7) peut être réécrite sous forme matricielle convenable

$$\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g^{-1} \tag{1.1.8}$$

En prenant le déterminant de cette équation, on obtient $(\det\Lambda)^2 = 1$ de sorte que $\det\Lambda = \mp 1$. L'ensembles des transformations vérifiant $\det\Lambda = +1$ ne changent pas l'orientation de l'espace-temps [27], les éléments du volume ainsi que les angles entre les vecteurs. Prenons en considération l'équation (1.1.7) pour $\lambda = \sigma = 0$. On trouve que

$$(\Lambda_0^0)^2 - \sum_i (\Lambda_0^i)^2 = 1 \Rightarrow (\Lambda_0^0)^2 = \sum_i (\Lambda_0^i)^2 + 1 \geq 1 \tag{1.1.9}$$

On a deux solutions: $\Lambda_0^0 \leq -1$ qui sont des transformations avec renversement du temps et $\Lambda_0^0 \geq 1$ qui sont des transformations sans renversement du temps. Réellement, la transformation de Lorentz dépend de 6 paramètres car Λ est une matrice à 16 éléments vérifiant le système d'équation (1.1.7) correspondant à 16 contraintes dont seulement 10 sont indépendantes (à cause de la symétrie de g).

1.1.2 Le Groupe de Lorentz Propre

Toutes les transformations de Lorentz qui satisfont aux deux conditions, $\det\Lambda = +1$ et $\Lambda_0^0 \geq 1$, constituent un groupe appelé le groupe de Lorentz propre noté $L_+^\uparrow = SO(3,1)$, c'est le seul cas parmi les quatre possibilités ($\det\Lambda = \pm 1$ et $\Lambda_0^0 \geq 1$, $\Lambda_0^0 \leq -1$) [25] qui a une structure de groupe. Une telle transformation de Lorentz peut être écrite comme un produit de rotations et de boosts. Les rotations étant bien connues, on se limitera à la présentation des boosts.

Les transformations de Lorentz spéciales qui mélangent les coordonnées spatiales avec le temps sont appelées boosts (terminologie anglaise). La plus simple de celles-ci est une rotation hyperbolique Λ_{01} dans le plan (x^0, x^1) exprimant le faite qu'un repère se meut par rapport à l'autre avec une vitesse $\mathbf{v}^t = (v^1, 0, 0)$ parallèle à l'axe x^1, où $\mathbf{v}^t$ est le vecteur ligne (transposé d'un vecteur colonne). Son expression bien connue

$$x'^0 = \gamma_{\mathbf{v}}(x^0 + \frac{v^1}{c}x^1); \quad \gamma_{\mathbf{v}} = (1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2})^{-1/2} \tag{1.1.10}$$

$$x'^1 = \gamma_{\mathbf{v}}(\frac{v^1}{c}x^0 + x^1) \tag{1.1.11}$$

$$x'^2 = x^2 \tag{1.1.12}$$

$$x'^3 = x^3 \tag{1.1.13}$$

conduit à la forme suivante de la matrice:

$$(\Lambda_{01})^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh\Phi & \sinh\Phi & 0 & 0 \\ \sinh\Phi & \cosh\Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1.14}$$

C'est cette paramétrisation qui nous permet d'interpréter une transformation de Lorentz spéciale comme une rotation dans le plan (x^0, x^1) par un angle hyperbolique $\Phi = \tanh^{-1}(v^1/c)$. Comme $\Phi \in]-\infty, +\infty[$ varie dans un domaine infini, le groupe de Lorentz est non compact. De plus les boosts ne sont pas unitaires. Pour une direction quelconque de la vitesse, le boost de Lorentz agit comme suit [**?**]

$$x'^0 = \gamma_{\mathbf{v}}(x^0 + \frac{\mathbf{v}.\mathbf{x}}{c}); \;\; \mathbf{v}.\mathbf{x} = \Sigma_i v^i x^i = -v^i x_i \tag{1.1.15}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \frac{\mathbf{v}}{c}\gamma_{\mathbf{v}}(x^0 + \frac{\gamma_{\mathbf{v}}}{1+\gamma_{\mathbf{v}}}\frac{\mathbf{v}.\mathbf{x}}{c}) \tag{1.1.16}$$

En définissant le quadri-vecteur vitesse (sans dimension) $u = \frac{dx}{ds}$ (où $ds^2 = (dx^0)^2 - d\mathbf{x}^2 = (dx^0)^2 / \gamma_{\mathbf{v}}^2$ et $v = cu$)

$$u = \begin{pmatrix} u^0 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{\mathbf{v}} \\ \gamma_{\mathbf{v}}\mathbf{v}/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\Phi \\ \mathbf{n}sh\Phi \end{pmatrix}, \;\; \mathbf{n} = \mathbf{v}/||\mathbf{v}|| = \mathbf{u}/||\mathbf{u}|| \tag{1.1.17}$$

le boost de Lorentz $x^{\mu} = [\Lambda_v]^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$ devient

$$x'^0 = u^0 x^0 + \mathbf{u}.\mathbf{x}; \quad \mathbf{u}.\mathbf{x} = -u_i x^i \tag{1.1.18}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{u}x^0 + \mathbf{x} + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u}.\mathbf{x})}{1+u^0} \tag{1.1.19}$$

$$[\Lambda_v]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} [\Lambda_v]^0{}_0 = u^0 & [\Lambda_v]^0{}_i = u_i \\ [\Lambda_v]^i{}_0 = u^i & [\Lambda_v]^i{}_j = \delta^i{}_j + \frac{u^i u_j}{(v^0+1)} \end{pmatrix} \tag{1.1.20}$$

Remarquons que

$$u^0 = [\Lambda_v]^0{}_0 = ch\Phi \geq 1 \tag{1.1.21}$$

et que la relation (1.1.9) conduit à la propriété usuelle du quadri-vecteur vitesse

$$u^2 = (u^0)^2 - (\mathbf{u})^2 = (\Lambda_0^0)^2 - \sum_i (\Lambda_0^i)^2 = 1 \tag{1.1.22}$$

Ainsi, le boost de Lorentz est représenté en fonction des quadri-vitesses appartenant à la nappe positive C_1^+ de l'hyperboloide de masse unité [**?**]

$$C_1^+ = \left\{ u/(u^0)^2 - (\mathbf{u})^2 = 1, u^0 > 0 \right\} \tag{1.1.23}$$

1.1.3 Algèbre de Lie

En général, un élément d'un groupe de Lorentz s'écrit:

$$\Lambda(\omega) = \exp(-i\omega^i I_i) \quad i = 1,..,6 \tag{1.1.24}$$
$$I_i = i(\frac{\partial\Lambda(\omega)}{\partial\omega^i})_{\omega^i=0}$$

L'opérateur I_i est le générateur du groupe et ω^i est le paramètre de la transformation (l'angle hyperbolique d'un boost ou l'angle d'une rotation à trois dimensions). Une algèbre est un espace vectoriel muni d'une loi de composition interne multiplicative bi-linéaire et distributive par rapport à l'addition. A un groupe de Lie comme $SO(3,1)$, est associée une algèbre de Lie dont les vecteurs de base sont les générateurs I_i [26]. Autrement dit, l'opérateur $\omega^i I_i$ est un vecteur quelconque de cette algèbre. La loi multiplicative bi-linéaire est donnée par les crochets de Lie (le commutateur) qu'il suffit de définir sur les vecteurs de base

$$[I_i, I_j] = I_i I_j - I_j I_i = f_{ij}^k I_k \tag{1.1.25}$$

La connaissance des constantes de structure f_{ij}^k détermine donc l'algèbre de Lie [**?**].

Prenons comme exemple la rotation (1.1.14) et identifions i au couple $(1,0)$ désignant le plan de cette rotation, le générateur I_i au générateur $\frac{J_{10}}{\hbar}$ et le paramètre ω^i à l'angle hyperbolique $\omega^{10} = \Phi$. La transformation s'écrit

$$\Lambda_{10}(\omega) = \exp(\frac{-i}{\hbar}\omega^{10} J_{10}) \tag{1.1.26}$$

et le générateur est

$$J_{10} = i\hbar\,(d\Lambda_{10}/d\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1.27}$$

Ainsi, on trouve

$$J_{10} = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_{20} = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_{30} = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1.28}$$

pour les boosts et

$$J_{23} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_{31} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_{12} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1.29}$$

pour les rotations tridimensionnelles. Une transformation de Lorentz générale s'écrit alors

$$\Lambda(\omega) = \exp(-\frac{i}{2\hbar}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}) \tag{1.1.30}$$

$$[J_{\mu\nu}]^{\lambda}{}_{\sigma} = i\hbar(\delta^{\lambda}{}_{\mu} g_{\nu\sigma} - \delta^{\lambda}{}_{\nu} g_{\mu\sigma}) \tag{1.1.31}$$

avec une sommation sur l'indices μ et ν dans $\Lambda(\omega)$. Le facteur $1/2$ et dû à l'égalité des termes $\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}$ et $\omega^{\nu\mu}J_{\nu\mu}$ qui découle de l'antisymétrie $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ et $J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}$... Par exemple, $\omega^{10} = -\Phi = \tanh^{-1}(-v^1/c)$ correspond au mouvement dans le sens négatif et $J_{01} = \frac{d\Lambda}{d\omega^{01}} = -\frac{d\Lambda}{d\omega^{10}} = -J_{10}$. Le développement au premier ordre la matrice $\Lambda(\delta\omega)$ possède un forme simple compte tenu des expressions explicites de générateurs $J_{\mu\nu}$

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \delta\omega^{\mu}_{\nu} \tag{1.1.32}$$

Ces mêmes expressions explicites nous permettent de déduire les commutateurs (la loi interne multiplicative de l'algèbre de Lie) [**?**]

$$[J_{\alpha\beta}, J_{\mu\nu}] = -i\hbar\left(J_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - J_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} + J_{\beta\nu}g_{\alpha\mu} - J_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}\right) \tag{1.1.33}$$

En termes des générateurs des rotations $J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}J^{jk}$ et des générateurs des boosts $K_i = -iJ_{0i}$, ainsi que leurs angles respectifs $\theta^i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega^{jk}$ et $\omega^{0i} = \Phi^i$, on a

$$\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu} = i\Phi^i K_i + \theta^i J_i = -i\boldsymbol{\Phi}.\mathbf{K} - \boldsymbol{\theta}.\mathbf{J} \tag{1.1.34}$$

$$\Lambda = e^{\frac{-i}{2\hbar}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}} = e^{-\frac{1}{\hbar}\boldsymbol{\Phi}.\mathbf{K}+\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\theta}.\mathbf{J}} \tag{1.1.35}$$

On voit que Λ ne contient pas un i en facteur dans le terme de boost $\boldsymbol{\Phi}.\mathbf{K}$, elle n'est donc pas unitaire (en réalité, ceci est dû au fait que les J_{0i} ne soient pas hermétiques). De plus, l'algèbre de Lie de $SO(3,1)$ peut être réécrite sous la forme [**?**, **?**]

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}J_k \\ [K_i, J_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}K_k \\ [K_i, K_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}J_k \end{aligned} \tag{1.1.36}$$

Elle peut alors être réduite à un produit direct de deux algèbres de $SU(2)$ par une transformation dans une nouvelle base

$$\begin{aligned} M_i &= 1/2(J_i + K_i) \\ Q_i &= 1/2(J_i - K_i) \end{aligned} \tag{1.1.37}$$

hermétique et qui vérifie

$$
\begin{aligned}
[M_i, M_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk} M_k \\
[Q_i, Qj] &= i\hbar\epsilon_{ijk} Q_k \\
[M_i, Q_j] &= 0
\end{aligned}
\tag{1.1.38}
$$

Cette dernière forme est très utile dans la détermination des représentations spinorielles irréductibles du groupe de Lorentz, mais on ne va pas l'utiliser car on considère les particules scalaires.

1.1.4 Les translations

L'action d'une translation $T\,(a)$, où a est le quadri-vecteur translation de l'espace-temps, s'écrit

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} \tag{1.1.39}$$

Il est évident que l'ensemble de toutes les translations constitue un groupe abélien isomorphe à $(\mathbf{R}^4, +)$. La loi de groupe étant

$$T\,(a)\,T\,(a') = T\,(a + a') \tag{1.1.40}$$

La forme exponentielle sera donc

$$T(a) = \exp(\frac{-i}{\hbar} a^{\mu} P_{\mu}) \tag{1.1.41}$$

Les générateurs des translations constituent une base d'une l'algèbre de Lie commutative

$$T\,(a)\,T\,(a') = T\,(a')\,T\,(a) \Rightarrow [P_{\mu}, P_{\nu}] = 0 \tag{1.1.42}$$

1.1.5 Le groupe de Poincaré

Le Groupe de Poincaré est l'ensemble des transformations de l'espace-temps plan de Minkowski qui laissent invariantes la différence entre deux quadri-vecteurs [**?**]

$$(x' - y')^2 = (x - y)^2 \tag{1.1.43}$$

Un élément du groupe de Poincaré, noté par $g(a, \Lambda)$, est constitué d'une translation spatio-temporelle par un quadri-vecteur a^μ et une transformation propre de Lorentz Λ

$$(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R) \mapsto (a = (b, \mathbf{a}), \Lambda = \Lambda_v R);\ \ v = \gamma_{\mathbf{v}}(c, \mathbf{v}) \tag{1.1.44}$$

ce qui induit la transformation des coordonnées:

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \tag{1.1.45}$$

Pour deux transformations de Lorentz successives on a

$$(a, \Lambda) \to (a', \Lambda') \to x'' = \Lambda'\Lambda x + (\Lambda' a + a') \tag{1.1.46}$$

d'où la loi de groupe

$$g(a', \Lambda')g(a, \Lambda) = g(\Lambda' a + a', \Lambda'\Lambda) \tag{1.1.47}$$

Un élément du groupe de Poincaré peut être factorisé sous la forme suivante

$$g(a, \Lambda) = T(a)\Lambda \tag{1.1.48}$$

pour laquelle la loi de groupe devient

$$T(a')\Lambda' T(a)\Lambda = T(\Lambda' a + a')\Lambda'\Lambda \tag{1.1.49}$$

Un cas particulier correspond à $a' = 0$ et $\Lambda' = \Lambda^{-1}$

$$\Lambda T(a)\Lambda^{-1} = T(\Lambda a) \tag{1.1.50}$$

de sorte que pour a' quelconque, on

$$g(a', \Lambda)T(a)g^{-1}(a', \Lambda) = T(\Lambda a) \tag{1.1.51}$$

Ainsi les translations constituent un sous-groupe invariant du groupe de Poincaré [**?**]. Ceci signifie que ce dernier n'est ni simple ni semi-simple. Le sous-groupe de Lorentz étant non compact et non connexe (constitué de quatre parties disjointes correspondant à $\det(\Lambda) = \pm 1$, $\Lambda^0{}_0 < 0$ et $\Lambda^0{}_0 > 0$) [27], le groupe de Poincaré l'est aussi.

La forme exponentielle du groupe de Poincaré est

$$g(a, \Lambda) = \exp \frac{-i}{\hbar} \left(a^\mu P_\mu + \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu} \right) \tag{1.1.52}$$

Ces générateurs $\{P_\mu, M_{\mu\nu}\}$ constitue l'algèbre de lie du groupe de Poincaré composée de celle du sous-groupe des translations, du sous-groupe de Lorentz et de celle de la composition d'une translation et d'une transformation de Lorentz (relation déduite de (1.1.50))

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0 \qquad (1.1.53) \\ [J_{\alpha\beta}, J_{\mu\nu}] &= -i\hbar \left(J_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - J_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} + J_{\beta\nu} g_{\alpha\mu} - J_{\beta\mu} g_{\alpha\nu} \right) \\ [P_\mu, J_{\rho\sigma}] &= i\hbar (g_{\mu\rho} P_\sigma - g_{\mu\sigma} P_\rho) \end{aligned}$$

La première et la seconde relation traduisent le fait que les translations et les transformations de Lorentz constituent des sous-groupes (le crochet de Lie est nul pour un sous-groupe abélien et fermé pour chaque sous-groupe). La dernière relation indique que le groupe de Poincaré n'est pas un produit direct du groupe de Lorentz par celui des translations (ils ne commutent pas), la conséquence physique de ceci est la contraction des longueurs et la dilatation des temps sous les transformations spéciales de Lorentz les (boosts).

Le groupe de Poincaré admet deux opérateurs de Casimir (invariants), l'opérateur de masse $P^2 = P_\mu P^\mu$ et l'opérateur $W^2 = W^\mu W_\mu$ qui s'exprime en fonction du vecteur de Pauli-Lubansky [**?**]

$$W^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} J_{\nu\lambda} P_\sigma \tag{1.1.54}$$

Les valeurs propres de ces deux opérateurs définissent respectivement la masse et le spin des particules élémentaires

$$\begin{aligned} P^2 &= P_\mu P^\mu \to m^2 c^2 \qquad (1.1.55) \\ W^2 &= \hbar^2 s(s+1) m^2 c^2 \end{aligned}$$

Le couple (m, s) détermine un sous-espace propre commun à P^2 et W^2. Ce sous-espace contient les états décrivant une particule de masse m et de spin s (pour les particule sans masse, au lieu de s on aura l'hélicité) et constitue un espace de représentation irréductible du groupe de Poincaré [24]. A partir de ces représentations, on construit les équations du mouvement telles que l'équation de Klein-Gordon, de Dirac, de Maxwell, etc.... Dans notre travail, nous nous intéressons au cas scalaire uniquement.

1.2 Représentation impulsion

On commence par décrire la représentation impulsion car elle possède de bonnes propriétés. L'espace de Hilbert $L^2(V_m^{\pm})$ est constitué des fonctions $\tilde{\varphi}$ définies sur l'hyperboloïde de masse m

$$\begin{aligned} V_m &= V_m^+ \cup V_m^- \\ V_m^{\pm} &= \{k/k^2 = m^2c^2,\ k^0 = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2c^2}\} \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Les translations n'affectent pas les impulsions (vecteurs libres). Par conséquent, le groupe de Poincaré agit avec sa composante de Lorentz seulement

$$k \mapsto k' = \Lambda k = \Lambda_v(k^0, R\mathbf{k}) \tag{1.2.2}$$

tout en respectant l'invariance de la mesure relativiste [28]

$$d\Omega_m(k) = \delta(k^2 - m^2c^2)dk^4 = \frac{d\mathbf{k}}{2\sqrt{\mathbf{k}+m^2c^2}} \tag{1.2.3}$$

La bonne propriété de cette représentation est que $\tilde{\varphi}(k)$ peut être vue comme amplitude de probabilité dans la représentation impulsion. L'interprétation de $\mid \varphi(k) \mid^2$comme densité de probabilité dans l'espace des impulsions repose sur l'existence d'une représentation scalaire unitaire et irréductible $\tilde{U}(a,\Lambda)$ du groupe de Poincaré dans $L^2(V_m^{\pm})$. Une représentation est une application $\tilde{U}$ associant à chaque $g\,(a,\Lambda)$ un opérateur $\tilde{U}(a,\Lambda)$ qui agit dans $L^2(V_m^{\pm})$ est vérifiant

$$\tilde{U}(a_1,\Lambda_1)\tilde{U}(a_2,\Lambda_2) = \tilde{U}(a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1\Lambda_2) \tag{1.2.4}$$

En effet, la forme suivante

$$\tilde{U}(a,\Lambda) : \tilde{\varphi} \mapsto \tilde{\varphi}' = \left[\tilde{U}(a,\Lambda)\tilde{\varphi}\right] \tag{1.2.5}$$
$$\tilde{\varphi}'(k) = \left[\tilde{U}(a,\Lambda)\tilde{\varphi}\right](k) = \exp(\frac{i}{\hbar}a.k)\varphi(\Lambda^{-1}k)$$

est unitaire car elle préserve le produit scalaire

$$\langle \varphi_1 \mid \varphi_2 \rangle_{V_m^\pm} = \int\limits_{V_m^\pm} \varphi_1^*(k)\varphi_2(k)d\Omega_m(k) \tag{1.2.6}$$

dans $L^2(V_m^\pm)$ à cause de l'invariance (1.2.3). La représentation (1.2.5) est irréductible [29] au sens qu'il n'y a aucun sous-espace dans $L^2(V_m^\pm)$ qui soit invariant pour tous les $\tilde{U}(a,\Lambda)$ quand (a,Λ) décrit tout le groupe de Poincaré [**?**]. On dit aussi que $L^2(V_m^\pm)$ est un sous-espace invariant minimal.

En termes d'algèbre de Lie, si P^μ est le générateur des translations dans l'espace-temps, alors

$$\tilde{U}(a,I) = \exp(\frac{i}{\hbar}a.P) \tag{1.2.7}$$

En choisissant une translation infinitésimale δa^μ dans l'équation (1.2.5) que l'on développe au premier ordre, on trouve

$$(P_\mu\varphi)(k) = k_\mu\varphi(k) \tag{1.2.8}$$

Ceci permet de définir, pour chaque région (ensemble de Borel) $\tilde{B}$ dans V_m^+ ou V_m^-, les probabilités au moyen de l'opérateur de projection $E^{\tilde{P}}(B)$ [**?**]

$$(E^{\tilde{P}}(B)\tilde{\varphi})(k) = \chi_B(k)\tilde{\varphi}(k) \tag{1.2.9}$$

où $\chi_B(k)$ est la fonction caractéristique

$$\chi_B(k) = \begin{cases} 1 & si \quad k \in B \\ 0 & si \quad k \notin B \end{cases} \tag{1.2.10}$$

De l'équation (1.2.5) on a

$$U(a,\Lambda)E^{\tilde{P}}(B)U^{-1}(a,\Lambda) = E^{\tilde{P}}(\Lambda B) \tag{1.2.11}$$

A cause de cette propriété, l'ensemble $\{\tilde{U}(a,\Lambda), E^{\tilde{P}}(B)\}$ est appelé un système d'imprimitivité [?, ?]. La relation (1.2.9) montre que

$$P_{\varphi}(B) = \langle \varphi \mid E^{\tilde{P}}(B)\varphi\rangle_{V_m^{\pm}} = \int\limits_{B\cap V_m^{\pm}} \mid \tilde{\varphi}(k) \mid^2 d\Omega_m(k) \tag{1.2.12}$$

de sorte que si l'on interprète les P^{μ} comme opérateurs impulsions, $P_{\varphi}(B)$ devient la probabilité pour que les valeurs de l'impulsion relativiste k appartiennent à $B \subset V_m^{\pm}$ où, par convention, V_m^{+} est associé à la particule et V_m^{-} à l'anti-particule. Cette interprétation et renforcée par le fait, qu'en utilisant (1.2.3) à limite $c \to \infty$, la probabilité $P_{\varphi}(B)$ tend vers la probabilité non relativiste

$$P_{\psi}(B) = \int\limits_{B} \mid \tilde{\psi}(\mathbf{k}) \mid^2 d\mathbf{k} \tag{1.2.13}$$

si l'on identifie $\tilde{\varphi}(k)$ à la fonction d'onde non relativiste(1) $\tilde{\psi}(\mathbf{k})$ [?]

$$\tilde{\varphi}(k) = \tilde{\psi}(\mathbf{k});\ k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2c^2} \tag{1.2.14}$$

En résumé, la représentation impulsion permet de décrire les particules élémentaires de masse m car elle donne une interprétation probabiliste cohérente des fonctions propres $\tilde{\varphi}(k)$ du premier Casimir (opérateur de masse) du groupe de Poincaré (en vertu de (1.2.8))

$$M^2\tilde{\varphi}(k) = \frac{P_{\mu}P^{\mu}}{c^2}\tilde{\varphi}(k) = \frac{k_{\mu}k^{\mu}}{c^2}\tilde{\varphi}(k) = m^2\tilde{\varphi}(k) \tag{1.2.15}$$

Malheureusement, cette interprétation n'est pas valable dans la représentation configuration que l'on décrira dans la section suivante.

(1) On devrait écrire $\varphi(k) = \sqrt{2mc}\tilde{\psi}(\mathbf{k})$ mais nous avons repris les résultats de la référence [7] sans modification dans les deux premiers chapitres. Dans le troisième chapitre, nous présenterons notre propre calcul.

1.3 Représentation configuration

On va définir une représentation unitaire et irréductible dans l'espace de configuration analogue à la représentation non relativiste. Le rôle de l'espace tri-dimensionnel non relativiste est joué par une hyperplan σ de l'espace de Minkowski

$$\sigma = \{x \mid x^0 = n.x = 0\},\ n^0 = 1,\ n^1 = n^2 = n^3 = 0 \tag{1.3.1}$$

dont l'élément de volume et représenté par un quadri-vecteur $d\sigma\,(x)$

$$d\sigma_\mu(x) = \frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma \tag{1.3.2}$$

normal à l'hyperplan σ. Il a donc la même direction que n et s'écrit

$$d\sigma_0(x) = dx^1dx^2dx^3; \quad d\sigma_j = 0 \tag{1.3.3}$$

L'évolution temporelle nous fait passer de l'hyperplan $x^0 = 0$ à l'hyperplan $x^0 = ct$ correspondant à l'instant t. Dans le cas général, σ est une hypersurface genre espace.

La représentation configuration $\hat{U}\,(a, \Lambda)$ doit donc agir sur les fonction $\hat{\varphi}\,(x) \in L^2(\sigma)$. Pour assurer son unitarité et son irréductibilité, il est convenable de la lier à la représentation impulsion par un opérateur unitaireW_0

$$L^2(\sigma^\pm) = W_0L^2(V_m^\pm) \tag{1.3.4}$$

Cet opérateur n'est autre que la transformée de Fourier-Plancherel

$$\hat{\varphi} = W_0\tilde{\varphi} \tag{1.3.5}$$

$$\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}^\pm(x) = (2\pi\hbar)^{\frac{-3}{2}}\int_{V_m^\pm}\exp(-\frac{i}{\hbar}x.k)\tilde{\varphi}(k)d\Omega_m(k) \tag{1.3.6}$$

L'unitarité de la transformée de Fourier-Plancherel garantit l'égalité des produits scalaires

$$\langle W_0\tilde{\varphi}_1 \mid W_0\tilde{\varphi}_2\rangle_{\sigma^\pm} = \langle\tilde{\varphi}_1 \mid \tilde{\varphi}_2\rangle_{V_m^\pm} \tag{1.3.7}$$

où le produit scalaire dans $L^2(\sigma^\pm)$ est défini par

$$\langle \hat{\varphi}_1 \mid \hat{\varphi}_2 \rangle_{\sigma^{\pm}} = \pm i\hbar \int_{\sigma} \hat{\varphi}_1^*(x) \overleftrightarrow{\partial^{\mu}} \hat{\varphi}_2(x) d\sigma^{\mu}(x) \tag{1.3.8}$$

$$\hat{\varphi}_1^*(x) \overleftrightarrow{\partial^{\mu}} \hat{\varphi}_2(x) = \hat{\varphi}_1^*(x) \left[\partial^{\mu} \hat{\varphi}_2(x)\right] - \left[\partial^{\mu} \hat{\varphi}_1^*(x)\right] \hat{\varphi}_2(x) \tag{1.3.9}$$

Elle permet aussi de trouver la représentation configuration $\hat{U}$ équivalente à la représentation impulsion $\tilde{U}$ (en utilisant (1.3.5) et (1.2.5))

$$\begin{aligned} &\hat{U}(a,\Lambda) = W_0 \tilde{U}(a,\Lambda) W_0^{-1} \\ &\hat{U}(a,\Lambda) : \hat{\varphi}(x) \mapsto \hat{\varphi}'(x) = \hat{\varphi}(\Lambda^{-1}(x-a)) \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

Avec des transformations infinitésimales δa^{μ} et $\delta\Lambda = \Lambda\left(\delta\omega^{\mu\nu}\right)$ dans (1.3.10), on peut montrer que l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré prend la forme suivante dans la représentation configuration

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\mu} &= i\hbar \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = W_0 \tilde{P}_{\mu} W_0^{-1} \\ \hat{M}_{\mu\nu} &= x_{\mu} \hat{P}_{\nu} - x_{\nu} \hat{P}_{\mu} = W_0 \tilde{M}_{\mu\nu} W_0^{-1} \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

où évidemment

$$\hat{U}(a,\Lambda) = \exp -\frac{i}{\hbar}\left(a^{\mu}\hat{P} + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\hat{M}_{\mu\nu}\right) \tag{1.3.12}$$

Le premier opérateur de Casimir $\hat{P}^2 = -\hbar^2\partial_{\mu}\partial^{\mu} = -\hbar^2\Box$ conduit alors à l'équation de Klein-Gordon de la mécanique quantique relativiste conventionnelle

$$\left(\Box + m^2c^2/\hbar^2\right)\hat{\varphi}(x) = 0 \tag{1.3.13}$$

qui décrit une particule de spin zéro et de masse m. En effet, les fonctions $\hat{\varphi}(x)$ doivent être des fonctions propres de $\hat{P}^2$ avec la valeur propre m^2c^2 car elles appartiennent à l'espace de représentation irréductible $L^2\left(\sigma^{\pm}\right)$ qui doit être, en vertu de son irréductibilité, un sous-espace propre du Casimir [**?**]. En effet, les fonctions de $L^2\left(\sigma^{\pm}\right)$ possède la forme (1.3.5) et sont donc solutions de l'équation de Klein-Gordon. Par convention, les solutions appartenant à $L^2\left(\sigma^{+}\right)$ sont interprétées comme décrivant des particules d'énergie positive $E = k^0c =$

$\sqrt{\mathbf{k}^2c^2 + m^2c^4}$ (car $k \in V_m^+$), et les solutions appartenant à $L^2(\sigma^-)$ sont interprétées comme décrivant des antiparticules d'énergie négative $E = k^0c = -\sqrt{\mathbf{k}^2c^2 + m^2c^4}$ (car $k \in V_m^-$).

Contrairement à la représentation impulsion, la représentation configuration ne possède pas d'interprétation cohérente en termes de probabilité de localisation de la particule dans une région de l'espace-temps de Minkowski. On aborde maintenant la présentation des inconsistances incohérentes à cette représentation qui tente de décrire une localisation ponctuelle.

1.4 Incohérence de la notion de localisabilité ponctuelle

Nous citons dans cette section les inconsistances de la théorie quantique relativiste concernant la localisation des particules ponctuelles en suivant l'approche de Prugovecki car ce problème dépasse le cadre de notre travail. La localisation est décrite par la probabilité de présence dans une région de l'espace (densité de courant) et l'opérateur position. Présentons ces problèmes avant de terminer avec le théorème de Hegerfeldt qui constitue le preuve finale de l'incohérence de la notion de localisabilité ponctuelle.

1.4.1 Densité de courant et équation de Klein-Gordon

Considérons la probabilité de détecter une particule dans un région $\hat{B}$ de σ qui s'exprime au moyen de la densité de courant j^μ

$$P_\sigma^x(\hat{B}) = \int_{\hat{B}} j^\mu(x) d\sigma_\mu(x); \; \hat{B} \subset \sigma \tag{1.4.1}$$

où $j^\mu(x)$ est donné par

$$j^\mu(x) = \frac{\imath\hbar}{2m} \hat{\varphi}^*(x) \overleftrightarrow{\partial^\mu} \hat{\varphi}(x) \tag{1.4.2}$$

Dans un référentiel où σ est un hyperplan d'équation $x^0 = const$, on retrouve la forme habituelle (voir (1.3.1) et (1.3.3))

$$P_\sigma^x(\hat{B}) = \int_{\hat{B}} j^0(x) dx; \quad \hat{B} \subset \sigma = \{x \mid x^0 = const\} \tag{1.4.3}$$

Pour que cette probabilité soit conservée à tout instant $t = x^0/c$, il suffit que le courant $j^\mu(x)$ vérifie l'équation de continuité

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0; \ \partial_\mu = \partial/\partial x^\mu \tag{1.4.4}$$

Ce qui est bien le cas pour les fonctions $\hat{\varphi}$ de la représentation configuration car celles-ci sont des solutions de l'équation de Klein-Gordon. Cependant, $j^\mu(x)$ dans (1.4.2) ne peut être interprété comme courant de probabilité puisque sa composante $j^0(x)$ n'est pas définie-positive et ne peut être une densité de probabilité. En réalité, même si l'on se restreint aux solutions d'énergie positive, il peut y avoir des régions de l'espace de Minkowski où $j^0\,(x)$ est négative (voir détails et références citées dans [**?**]).

1.4.2 Densité de courant et équation de Dirac

Pour pallier aux insuffisances de l'équation de Klein-Gordon, Dirac a proposé une autre équation d'onde relativiste

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = o \tag{1.4.5}$$

où $\psi(x)$ est un bispineur et les γ^μ des matrices (4×4) appelées les matrices de Dirac. Le courant est donné par

$$j^\mu(x) = \overline{\psi(x)}\gamma^\mu\psi(x); \ \overline{\psi(x)} = \psi^*(x)\gamma^0 \tag{1.4.6}$$

On voit que $j^0(x)$ est définie-positive. Cependant, Foldy et Wouthuysen ont découvert une transformation qui lie chaque solution $\psi(x)$ de l'équation de Dirac à un bispineur $\psi_{FW}(x)$ qui vérifie l'équation suivante

$$i\hbar\partial_0\psi_{FW}(x) = \gamma^0(\mathbf{P}^2 + m^2c^2)^{1/2}\psi_{FW}(x) \tag{1.4.7}$$

où $\mathbf{P}$ est l'opérateur de composantes P^j

$$(P_j\psi_{FW})(x) = i\hbar\partial_j\psi_{FW}(x) \tag{1.4.8}$$

Chaque composante φ de $\psi_{_{FW}}(x)$ satisfait alors à l'équation

$$i\partial_0\varphi(x) = \pm((-\boldsymbol{\nabla}^2 + m^2c^2/\hbar^2)^{1/2}\varphi(x) \tag{1.4.9}$$

et coïncide donc avec une solution d'énergie positive ou négative de l'équation de Klein-Gordon. Ceci signifie que j^0 est définie-positive parce que l'équation de Klein-Gordon a été transformée de telle manière que l'opérateur

$$X_D^j : \psi(x) \mapsto x^j\psi(x) \tag{1.4.10}$$

qui devrait décrire la position d'une particule de spin 1/2 ne laisse pas l'espace des états d'énergie positive invariant. Ceci laisse le problème de la localisation non résolu même pour l'équation de Dirac [**?**].

1.4.3 Opérateur position

Intéressons nous aussi à l'opérateur position dont un premier candidat

$$(\hat{Q}^\mu\hat{\varphi})(x) = x^\mu\hat{\varphi}(x);\ \ \varphi \in L^2(\sigma^+) \tag{1.4.11}$$

inclut la composante Q^0 susceptible de définir un opérateur du temps. Ce choix possède la propriété de covariance

$$\hat{U}^{-1}(a,\Lambda)\hat{Q}^\mu\hat{U}(a,\Lambda) = a^\mu I + \Lambda^\mu_\nu\hat{Q}^\nu \tag{1.4.12}$$

qui peut facilement être déduite de la définition (1.3.10) de $\hat{U}(a,\Lambda)$. Cet opérateur vérifie aussi les relations de commutations canoniques relativistes

$$\left[\hat{Q}^\mu, \hat{Q}^\nu\right] = \left[\hat{P}^\mu, \hat{P}^\nu\right] = 0;\ \ \left[\hat{Q}^\mu, \hat{P}^\nu\right] = -i\hbar g^{\mu\nu} \tag{1.4.13}$$

et permet d'écrire le générateur infinitésimal $M^{\mu\nu}$sous la forme

$$\hat{M}^{\mu\nu} = \hat{Q}^\mu\hat{P}^\nu - \hat{Q}^\nu\hat{P}^\mu \tag{1.4.14}$$

mais les $\hat{Q}^j$ ne laissent pas $L^2(\sigma^+)$ invariant car ils ne commutent pas avec l'opérateur de masse $c^2M^2 = \hat{P}_\mu\hat{P}^\mu$

$$\left[\hat{Q}^{\mu}, \hat{P}^{\mu}\hat{P}^{\nu}\right] = -2\imath\hbar\hat{P}^{\mu} \neq 0 \tag{1.4.15}$$

dont résulte l'équation de Klein-Gordon. Par conséquent, les $\hat{Q}^j$ décrivent la localisation des états qui n'ont pas une masse bien définie (qui ne correspondent pas une particule élémentaire bien définie).

Un autre choix s'est porté sur l'opérateur position $\hat{X}^j$ relativiste réalisé par l'identification (1.2.14) des fonctions d'onde relativiste et non relativiste. Par conséquent, l'action de l'opérateur $\tilde{X}^j$ dans la représentation impulsion relativiste s'identifie avec l'action non relativiste

$$(\tilde{X}^j\tilde{\varphi})(k) = i\hbar\frac{\partial}{\partial k^j}\tilde{\varphi}(\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2c^2}, \mathbf{k}) \tag{1.4.16}$$

Le problème principal de cet opérateur est le fait qu'il ne soit pas hermétique. En effet,

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\varphi}_1 \mid \tilde{X}^j\tilde{\varphi}_2\rangle_{V_M^+} &= \int\limits_{R^3} \tilde{\varphi}_1^*(i\hbar\frac{\partial\tilde{\varphi}_2}{\partial k^j})\frac{d\mathbf{k}}{2(\mathbf{k}^2 + m^2c^2)^{1/2}} \\ &= \int\limits_{R^3}(i\hbar\frac{\partial\tilde{\varphi}_1}{\partial k^j} - \frac{i\hbar k^j\tilde{\varphi}_1}{(\mathbf{k}^2 + m^2c^2)})^*\tilde{\varphi}_2\frac{d\mathbf{k}}{2(\mathbf{k}^2 + m^2c^2)^{1/2}} \\ &\neq \langle\tilde{X}^j\tilde{\varphi}_1 \mid \tilde{\varphi}_2\rangle_{V_M^+}\end{aligned} \tag{1.4.17}$$

Ceci implique que $\hat{X}^j$ n'est pas une observable et ne peut être un opérateur de position. Malgré cela, certains chercheurs on émis l'idée que ces valeurs propres complexes peuvent décrire une particule étendue où la partie réelle représente la position moyenne de cette particule et la partie imaginaire représente son diamètre [7]. Cette idée ne propose pas un procédé opérationnel de mesure de ces valeurs et sa théorie n'est pas manifestement covariante.

Un troisième opérateur relativiste $\tilde{X}^j_{NW}$ proposé par Newton et Wigner

$$(\tilde{X}^j_{NW}\widetilde{\varphi})(k) = (i\hbar\frac{\partial}{\partial k^j} - \frac{1}{2}\frac{i\hbar k^j}{(\mathbf{k}^2 + m^2c^2})\widetilde{\varphi}((\mathbf{k}^2 + m^2c^2)^{1/2}, \mathbf{k})) \tag{1.4.18}$$

est lié à au deuxième opérateur $\tilde{X}^j$ par

$$\tilde{X}^j = \tilde{X}^j_{NW} + i\frac{\hbar}{2}\frac{\tilde{P}_j}{\tilde{\mathbf{P}}^2 + m^2c^2} \tag{1.4.19}$$

Les opérateurs X^j_{NW} commutent et sont hermétiques

$$\langle\tilde{\varphi}_1 \mid \tilde{X}^j_{NW}\tilde{\varphi}_2\rangle_{V_M^+} = \langle\tilde{X}^j_{NW}\tilde{\varphi}_1 \mid \tilde{\varphi}_2\rangle_{V_M^+} \tag{1.4.20}$$

De plus, il y a une transformation unitaire U_{NW} de $L^2(V_m^+)$ à $L^2(\mathbf{R}^3)$

$$U_{NW} : \tilde{\varphi}(k) \mapsto \Phi_{NW}(y) = (\Phi_y \mid \tilde{\varphi}\rangle_{V_m^+} = \int\limits_{V_m^+} \Phi_y^*(k)\tilde{\varphi}(k)d\Omega_m(k) \tag{1.4.21}$$

où $\Phi_y(k)$ sont les fonctions propres de $\tilde{X}^j_{NW}$

$$\Phi_y(k) = (2\pi\hbar)^{-3/2}k_0^{1/2}\exp(\frac{i}{\hbar}y.k) \tag{1.4.22}$$

et le symbole $(\Phi_y \mid$ rappelle qu'elles ne constituent qu'une base développement des états physiques (c'est-à-dire, l'analogue de la base $\langle\mathbf{y}| = (\mathbf{y}|$ dans le cas non relativiste, voir appendice B de la référence [**?**]). Autrement dit, la fonction $\Phi_y(k)$ est supposée décrire une particule relativiste ponctuelle de spin zéro localisée à l'origine du système de référence quand $y = 0$, car pour $y^0 = 0$

$$(\Phi_y \mid \tilde{X}^j_{NW}\tilde{\varphi}\rangle_{V_m^+} = (y^i\Phi_y \mid \tilde{\varphi}\rangle_{V_m^+} = y^i\Phi_{NW}(y) \tag{1.4.23}$$

De plus, on a l'égalité des produits scalaire

$$\langle\tilde{\varphi}_1 \mid \tilde{\varphi}_2\rangle_{V_m^+} = \int\limits_{R^3}(U_{NW}\tilde{\varphi}_1)^*(y)(U_{NW}\tilde{\varphi}_2)(y)d\mathbf{y} \tag{1.4.24}$$

et la surjectivité $L^2(R^3) = U_{NW}\ L^2(V_m^+)$ de sorte que U_{NW} soit unitaire. Ceci que les opérateurs $U_{NW}\tilde{X}^j_{NW}U^{-1}_{NW}$ et $U_{NW}\tilde{P}^jU^{-1}_{NW}$ vérifient les relations de commutations canoniques relativistes grâce à leurs expressions dans la représentation de Schrödinger

$$\begin{aligned}(U_{NW}\tilde{X}^j_{NW}\tilde{\varphi})(y) &= y^j(U_{NW})\tilde{\varphi}(y) \\ (U_{NW}\tilde{P}^j\tilde{\varphi})(y) &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial y^j}(U_{NW}\tilde{\varphi})(y)\end{aligned} \tag{1.4.25}$$

Le problème de ces opérateurs est que $\Phi_{NW}(y)$ ne se transforme pas d'une manière covariante sous $U(a, \Lambda)$, si Λ est une transformation de Lorentz pure

$$\Phi'_{NW}(y) = (U_{NW}\Phi')(y) \neq \Phi'_{NW}(\Lambda^{-1}(y - a)) \tag{1.4.26}$$

Tous les problèmes cités dans cette section ont en réalité une origine profonde. Il s'agit su théorème de Hegerfeldt qui stipule que, dans la théorie quantique relativiste d'une particule, il n'y a aucun état qui soit localisable dans une région finie de l'espace et qui obéisse en même temps au principe de causalité relativiste [**?**]. Cette impasse semble être évitée en considérant des particules qui ne peuvent jamais être localisées dans une région finie. C'est l'objet du deuxième chapitre qui utilise des représentations espace des phases pour décrire ce type de particules.

Chapitre 2

Mécanique Quantique Stochastique Relativiste

On va commencer par décrire la représentation espace des phases, puis passer à la localisation, au système de covariance, aux propagateurs avant de finir par le courant de probabilité. Pour une meilleure compréhension, il est préférable de résumer d'abord la théorie stochastique pour une particule non relativiste.

2.1 Particule stochastique non relativiste

Dans le cas non relativiste, la localisation stochastique est décrite par un système de covariance constitué par la représentation du groupe de Galilée $U(g) = U(b, \mathbf{q}, \mathbf{v} = \mathbf{p}/m, R)$ et l'opérateur positif (qui n'est pas un opérateur de projection) [**?**]

$$\mathbf{P}_{\xi}(B) = \int_B \left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle d\mathbf{q}d\mathbf{p} \left\langle\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right| \; ; \qquad \mathbf{q}, \mathbf{p} \in \Gamma = \mathbf{R}^6 \tag{2.1.1}$$

défini sur des régions B dans l'espace des phases non relativiste $\Gamma = \mathbf{R}^6$. Les états $\left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle$ sont obtenus de l'état $|\xi\rangle$ par une translation d'une quantité $\mathbf{q}$ et un boost de vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$. Dans la représentation impulsion, cela correspond à l'action de $\tilde{U}(b = 0, \mathbf{q}, \mathbf{v} = \mathbf{p}/m, R = I) = \tilde{U}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ [**?**, **?**]

$$\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{k}) = (\tilde{U}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\tilde{\xi})(\mathbf{k}) \ = \exp[\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}.\mathbf{q}]\tilde{\xi}\,(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \tag{2.1.2}$$

La fonction $\tilde{\xi}(\mathbf{k})$ appartient à $L^2(\mathbf{R}^3)$, a pour norme $||\tilde{\xi}|| = (2\pi\hbar)^{-3/2}$ et elle est invariante par rotation. Son analogue dans la représentation espace de phase est le vecteur d'état propre ξ utilisé dans la définition de $\mathbf{P}_\xi(B)$. Quand $B = \Gamma$, ce dernier devient un opérateur de projection de $L^2\,(\Gamma)$ vers un sous-espace noté $L^2\,(\mathbf{\Gamma}_\xi)$ où il fournit une résolution de l'identité (relation de fermeture)

$$\int_\Gamma \left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle d\mathbf{q}d\mathbf{p}\left\langle\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right| = \mathbf{1}_{L^2(\mathbf{\Gamma}_\xi)} \tag{2.1.3}$$

L'espace de Hilbert $L^2\,(\mathbf{\Gamma}_\xi)$ supporte une représentation espace des phases irréductible et unitaire. Il contient des fonctions d'onde de carré sommable reliées aux fonctions d'onde des représentations, configuration et impulsion, par l'action des opérateurs unitaires $\hat{W}_\xi$ et $\tilde{W}_\xi$ [**?**]

$$\psi_\xi\,(\mathbf{q},\mathbf{p}) = (\tilde{W}_\xi\tilde{\psi})\,(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \int \tilde{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{k})\tilde{\psi}(\mathbf{k})d\mathbf{k} \tag{2.1.4}$$

$$= (\hat{W}_\xi\hat{\psi})\,(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \int \hat{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{x})\hat{\psi}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \tag{2.1.5}$$

La probabilité que la mesure simultanée de la position et de l'impulsion stochastique donnent la valeur $(\mathbf{q},\mathbf{p})$ dans $B \subset \Gamma$ est donnée par (l'indice ξ de ψ_ξ sera omis et sous-entendu pour alléger la notation)

$$P^\xi_\psi(B) =< \psi|\mathbf{P}_\xi(B)\psi >= \int_B d\mathbf{q}\,d\mathbf{p}\ |\psi\,(\mathbf{q},\mathbf{p})|^2 \tag{2.1.6}$$

Si la valeur $(\mathbf{q},\mathbf{p})$ est effectivement obtenue, cela ne signifie pas que la particule possède réellement cette valeur, mais n'importe quelle autre valeur voisine avec une certaine distribution due à l'imperfection de l'appareil de mesure [34]. La différence fondamentale entre la mécanique quantique stochastique et la mécanique quantique conventionnelle est que cette dernière ne considère que des mesures précises et interprète le résultat $\mathbf{q}$ (ou $\mathbf{p}$) de la mesure comme exact, donc comme position réelle (ou impulsion réelle) de la particule. La distribution stochastique se détermine au moyen de la probabilité marginale que le résultat $\mathbf{q}$ de la mesure de la position appartienne à l'ensemble $\Delta_1 \in \mathbf{R}^3$, c'est-à-dire que $B = \Delta_1 \times \mathbf{R}^3$,

$$P_{\psi}^{\xi}(\Delta_1 \times \mathbf{R}^3) = \int_{\Delta_1} d\mathbf{q} \int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{x}\hat{\chi}_{\mathbf{q}}^{\xi}(\mathbf{x}) \left|\hat{\psi}(\mathbf{x})\right|^2 \tag{2.1.7}$$

$$\hat{\chi}_{\mathbf{q}}^{\xi}(\mathbf{x}) = (2\pi\hbar)^3 \left|\hat{\xi}(\mathbf{x}-\mathbf{q})\right|^2 \tag{2.1.8}$$

La distribution $\hat{\chi}_{\mathbf{q}}^{\xi}(\mathbf{x})$ peut être interprétée comme densité de probabilité conditionnelle que la lecture de la position donne la valeur $\mathbf{q}$ alors que la position réelle est en $\mathbf{x}$ [34]. Comme $\left|\hat{\psi}(\mathbf{x})\right|^2$ représente la densité de probabilité qu'elle soit localisée en $\mathbf{x}$, l'intégrale $\int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{x}\hat{\chi}_{\mathbf{q}}^{\xi}(\mathbf{x}) \left|\hat{\psi}(\mathbf{x})\right|^2$ est la densité de probabilité que la mesure donne $\mathbf{q}$ indépendamment de la position réelle $\mathbf{x}$. Cependant, une fois la valeur $\mathbf{q}$ obtenue, on peut interpréter $\hat{\chi}_{\mathbf{q}}^{\xi}(\mathbf{x})$ comme densité de probabilité que la valeur réelle soit $\mathbf{x}$. Cette dernière ne pouvant jamais être déterminée par la mesure, la distribution $\hat{\chi}_{\mathbf{q}}^{\xi}(\mathbf{x})$ décrit alors une extension stochastique (au sens de la mesure) de la particule. Il en est de même de la probabilité marginale que la mesure de l'impulsion $\mathbf{p}$ soit contenue dans l'ensemble $\Delta_2 \in \mathbf{R}^3$

$$P_{\psi}^{\xi}(\mathbf{R}^3 \times \Delta_2) = \int_{\Delta_2} d\mathbf{p} \int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{k}\tilde{\chi}_{\mathbf{p}}^{\xi}(\mathbf{k}) \left|\tilde{\psi}(\mathbf{k})\right|^2 \tag{2.1.9}$$

$$\tilde{\chi}_{\mathbf{p}}^{\xi}(\mathbf{k}) = (2\pi\hbar)^3 \left|\tilde{\xi}(\mathbf{k}-\mathbf{p})\right|^2 \tag{2.1.10}$$

où $\chi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}) = (2\pi\hbar)^3 \mid \tilde{\xi}(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \mid^2$ [?, ?] est la densité de probabilité que la mesure de l'impulsion donne $\mathbf{p}$ quand la particule a l'impulsion $\mathbf{k}$ [34].

La particule est alors stochastiquement étendue et ne peut jamais être localisée avec une précision infinie. L'appareil de mesure, qui est décrit par $\hat{\chi}_{\mathbf{q}}^{\xi}(\mathbf{x})$ (ou $\tilde{\chi}_{\mathbf{p}}^{\xi}(\mathbf{k})$), acquiert un caractère quantique en interprétant la fonction $\hat{\xi}$ comme fonction d'onde propre d'une particule d'essai stochastiquement étendue, jouant le rôle de micro-détecteur (réel ou imparfait) qui est au repos stochastique à l'origine d'un système de référence classique. L'état $\left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle$ est alors interprété comme le vecteur d'état d'un tel détecteur localisé à la position stochastique $\mathbf{q}$ et possédant une impulsion stochastique $\mathbf{p}$.

En résumé, ce que l'on mesure ce ne sont pas les valeurs précises $\mathbf{x}$ et $\mathbf{k}$ de la position et de l'impulsion respectivement, mais les valeurs stochastiques $\left(\mathbf{q}, \hat{\chi}_{\mathbf{q}}(\mathbf{x})\right)$ et $\left(\mathbf{p}, \tilde{\chi}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k})\right)$ [?]. et ceci reflète l'imperfection de l'appareil de mesure [?]. L'interprétation de $P_{\psi}^{\xi}(B)$

se reformule d'une manière compacte en disant que c'est la probabilité que la valeur stochastique $\left(\mathbf{q},\mathbf{p};\chi^{\xi}_{\mathbf{qp}}(\mathbf{x},\mathbf{k}) = \hat{\chi}^{\xi}_{\mathbf{q}}(\mathbf{x})\,\tilde{\chi}^{\xi}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k})\right)$ appartienne à la région B de l'espace des phases stochastique $\Gamma_\xi = \left\{\left(\mathbf{q},\mathbf{p};\chi_{\mathbf{qp}}\right)/\left(\mathbf{q},\mathbf{p}\right)\in\Gamma\right\}$.

Dans le cas relativiste, la fonction ξ est notée η et l'équivalent de l'espace des phases Γ est une hypersurface Σ de l'espace des phases relativiste. Abordons ces notions dans la section suivante.

2.2 Espace des phases stochastique relativiste

L'espace des phases relativiste $M^{\pm}_m = M(1,3)\times V^{\pm}_m$ est le produit cartésien de l'espace de Minkowski et de l'espace des impulsions relativiste [**?**]. Le groupe de Poincaré agit dans l'espace des phases selon

$$\begin{aligned} q \mapsto q' = a + \Lambda q; \quad q\in M(1,3) \\ p \longrightarrow p' = \Lambda p, \quad p\in V^{\pm}_m \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Dans l'équation (2.2.1), Λ est une transformation propre de Lorentz. Chacune de ces transformations peut être uniquement décomposée sous la forme suivante [38]:

$$\Lambda = \Lambda_v R, \quad R\in SO(3) \tag{2.2.2}$$

où Λ_v est un boost de quadri-vitesse $(c\gamma_{\mathbf{v}},\mathbf{v}\gamma_{\mathbf{v}})$. Alors, la transformation a la forme:

$$q^0 \mapsto q'^0 = \gamma_{\mathbf{v}}(x^0 + \frac{\mathbf{v}.R\mathbf{q}}{c});\ \gamma_{\mathbf{v}} = (1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2})^{-1/2} \tag{2.2.3}$$

$$\mathbf{q}\mapsto\mathbf{q}' = R\mathbf{q} + \mathbf{v}\ (q^0 + \frac{\gamma_{\mathbf{v}}}{\gamma_{\mathbf{v}}+1}\frac{\mathbf{v}.\mathbf{Rq}}{c})\gamma_{\mathbf{v}}/c \tag{2.2.4}$$

Pour définir un espace des phases analogue à l'espace des phases non relativiste, on considère une hypersurface genre espace σ dans l'espace de Minkowski [**?**]. Cette hypersurface s'identifie à un hyperplan σ_{q^0} correspondant à un instant q^0 constant. On peut alors définir un espace des phases relativiste à six dimensions en adoptant l'hypersurface

$$\Sigma_m = \Sigma_m^+ \cup \Sigma_m^- \ , \quad \Sigma_m^\pm = \sigma \times V_m^\pm \tag{2.2.5}$$

L'élément de volume (mesure) covariant dans Σ_m s'écrit

$$d\Sigma_m(q,p) = 2\epsilon(p^0)p^\nu d\sigma_\nu(q)\delta(p^2 - m^2c^2)d^4p \tag{2.2.6}$$
$$\epsilon(p^0) = \pm 1 \ \text{ pour } p^0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}$$

où $d\sigma_\nu$ est dans la direction n^ν de la normale à σ au point q. Dans un référentiel où $q^0 = const$ pour tout $q \in \sigma$, on aura (voir chapitre 1)

$$d\Sigma_m(q,p) = d\mathbf{q}d\mathbf{p}, \ \ q^0 = const \tag{2.2.7}$$

2.3 Représentation espace des phases relativiste

Considérons l'espace de Hilbert $L^2(\Sigma_m^\pm)$ des fonctions $\varphi\,(q,p)$ de carré sommable par rapport au produit scalaire [**?**]

$$\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle_{\Sigma_m^\pm} = \int_{\Sigma_m^\pm} \varphi_1^*(q,p)\varphi_2(q,p)d\Sigma_m(q,p) \tag{2.3.1}$$

L'action du groupe de Poincaré sur ces fonctions est donnée par la représentation unitaire espace des phases (dans le cas scalaire) [7]

$$(U\,(a,\Lambda)\,\varphi)(q,p) = \varphi\left(\Lambda^{-1}(q-a), \Lambda^{-1}p\right) \tag{2.3.2}$$

où

$$(a = (b, \mathbf{a}), \Lambda = \Lambda_v R), \quad v = c\frac{dx}{ds} = \gamma_{\mathbf{v}}(c, \mathbf{v}) \tag{2.3.3}$$

Cette représentation est réductible, afin de décrire une particule élémentaire elle doit être irréductible. Ainsi on doit décomposer la représentation (2.3.2) en des sous-représentations irréductibles, l'espace de Hilbert $L^2(\Sigma_m^\pm)$ se décompose alors en une somme de sous-espaces invariants minimaux $L^2(\Sigma_{m,\eta}^\pm)$ [**?**]

$$L^2(\Sigma_m^\pm) = \oplus_\eta L^2(\Sigma_{m,\eta}^\pm) \tag{2.3.4}$$

Où chaque sous-espace est déterminé par une fonction η qui sera présentée ci-dessous. La représentation $U(G)$ se décompose également en des sous-représentations [?]

$$U(G) = \oplus_\eta U^\eta(G) \tag{2.3.5}$$

Chaque sous-représentation $U^\eta(G)$ extraite de $U(G)$ est une représentation irréductible et unitaire.

La fonction $\eta(q,p)$ est un élément de $L^2(\Sigma^\pm_{m,\eta})$ avec lequel on peut définir un vecteur $\eta_{q,p}$ obtenu par une translation quadri-dimensionnelle q et un boost de quadri-vitesse $v = p/m$ [?]

$$\eta_{q,p}(q',p') = (U(q,\Lambda_v)\eta)(q',p') = \eta(\Lambda_v^{-1}(q'-q), \Lambda_v^{-1}p') \tag{2.3.6}$$

On peut alors choisir une famille $\{\eta_{q,p}/q \in M(1,3), \quad p \in V^\pm_m\}$ qui constitue un système sur-complet dans $L^2(\Sigma^\pm_{m,\eta})$. Autrement dit, les états physiques $|\varphi_\eta\rangle$ se décomposent selon

$$\begin{aligned}
\mid \varphi_\eta\rangle &= \int_{\Sigma^\pm_m} \varphi_\eta(q,p) d\Sigma_m(q,p) \mid \eta_{q,p}\rangle \\
\mid \varphi_\eta\rangle &= \int_{\substack{q^0=const\\ p\in V^\pm_m}} \varphi_\eta(q,p) d\mathbf{q}d\mathbf{p} \mid \eta_{q,p}\rangle \\
\varphi_\eta(q,p) &= \langle \eta_{q,p} \mid \varphi\rangle_{\Sigma^\pm_m}
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Ainsi, on a défini un opérateur de projection E^η de $L^2(\Sigma^\pm_m)$ sur $L^2(\Sigma^\pm_{m,\eta})$

$$E^\eta = \int_{\Sigma^\pm_m} \mid \eta_{q,p}\rangle d\Sigma_m(q,p) \langle \eta_{q,p} \mid \tag{2.3.8}$$

La restriction de cet opérateur au sous-espace $L^2(\Sigma^\pm_{m,\eta})$ donne une résolution de l'identité (la relation de fermeture)

$$E^\eta = \int_{\Sigma^\pm_m} \mid \eta_{q,p}\rangle d\Sigma_m(q,p) \langle \eta_{q,p} \mid = 1_{L^2(\Sigma^\pm_{m,\eta})} \tag{2.3.9}$$

Pour justifier les considérations précédentes faisons le lien de la représentation espace des phases avec la représentation impulsion. Pour montrer que la représentation $U^\eta(G)$ est unitaire et irréductible, il suffit de trouver un opérateur unitaire W_η qui la lie à la représentation impulsion que l'on sait être unitaire et irréductible. Pour cela, considérons alors une fonction $\tilde{\eta}(k)$ réelle et invariante par rotation sur l'espace des impulsions $k \in V^\pm_m$. Ceci implique que $\tilde{\eta}$ dépend exclusivement du module de $\mathbf{k}$ (et non pas de l'orientation de $\mathbf{k}$) ou tout simplement de $k^0 = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2c^2}$ alors [?]

$$\tilde{\eta}(k) = \mathring{\eta}(mck^0), \quad k = (k^0, k) \in V_m^{\pm} \tag{2.3.10}$$

où $\mathring{\eta}$ est une fonction d'une seule variable k^0 vérifiant [?]

$$mck^0 = (mc, 0).k = (\Lambda_v(mc, 0).\Lambda_v k = p.\Lambda_v k, \quad p = mv \tag{2.3.11}$$

On obtient de (2.3.10) que

$$\tilde{\eta}(\Lambda_v^{-1}k) = \mathring{\eta}(mc(\Lambda_v^{-1}k)^0) = \mathring{\eta}(p.k) \tag{2.3.12}$$

Maintenant, on définit la transformation W_η de l'espace $L^2(V_m^{\pm})$ vers $L^2(\Sigma_{m,\eta}^{\pm})$ [?]

$$W_\eta : \tilde{\varphi} \mapsto \varphi_\eta \tag{2.3.13}$$

$$\varphi_\eta(q, p) = \int_{V_m^{\pm}} \tilde{\eta}_{q,p}^*(k)\tilde{\varphi}(k)d\Omega_m(k) \tag{2.3.14}$$

$$= \int_{V_m^{\pm}} \exp(\frac{-i}{\hbar}q.k)\mathring{\eta}(p.k)\tilde{\varphi}(k)d\Omega_m(k) \tag{2.3.15}$$

$$d\Omega_m(k) = \frac{d\mathbf{k}}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2c^2}} \tag{2.3.16}$$

Le vecteur $\tilde{\eta}_{q,p}$ est obtenu par une translation quadri-dimensionnelle q et un boost de quadri-vitesse $v = p/m$,

$$\tilde{\eta}_{q,p}(k) = (\tilde{U}(q, \Lambda_v)\tilde{\eta})(k) = \exp(\frac{i}{\hbar}q.k)\tilde{\eta}(\Lambda_v^{-1}k) \tag{2.3.17}$$

En réalité cette dernière fonction est l'analogue de (2.3.6) dans l'espace des impulsions

$$\eta = W_\eta\tilde{\eta} \tag{2.3.18}$$

$$U(q, \Lambda_v)\eta = W_\eta\tilde{U}(q, \Lambda_v)\tilde{\eta}$$

En effet, W_η commute les représentations espace des phases et impulsion. De plus, il définit une isométrie de $L^2(V_m^{\pm})$ à $L^2(\Sigma_m^{\pm})$, car pour chaque valeur de $q^0 \in \mathbb{R}^1$, le produit scalaire (2.3.7) dans l'espace des phases devient

$$\langle \varphi_1 \mid \varphi_2 \rangle_{\Sigma_m^\pm} = \int\limits_{\mathbf{R}^6} d\mathbf{q}d\mathbf{p} \int\limits_{V_m^\pm . V_m^\pm} d\Omega_m(k')d\Omega_m(k) \exp(\frac{i}{\hbar} q.(k'-k)) \tag{2.3.19}$$
$$\times\, \tilde{\eta}(\Lambda_v^{-1}k')\tilde{\eta}^*(\Lambda_v^{-1}k)\tilde{\varphi}_1^*(k')\tilde{\varphi}_2(k)$$

L'intégration sur $\mathbf{q}$ donne la fonction $(2\hbar\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}'-\mathbf{k})$, alors:

$$\langle \varphi_1 \mid \varphi_2 \rangle_{\Sigma_m^\pm} = \pm(2\pi\hbar)^3 \int\limits_{R^3} d\mathbf{p} \int\limits_{V_m^\pm} d\Omega_m(k) 2(k^0)^{-1} \mid \tilde{\eta}(\Lambda_v^{-1}k) \mid^2 \tilde{\varphi}_1^*(k)\tilde{\varphi}_2(k) \tag{2.3.20}$$
$$= \pm(2\pi\hbar)^3 \int\limits_{R^3} d\mathbf{p} \int\limits_{V_m^\pm} d\Omega_m(k) 2(k^0)^{-1} \mid \mathring{\eta}(p.k) \mid^2 \tilde{\varphi}_1^*(k)\tilde{\varphi}_2(k)$$

L'égalité des produits scalaires dans l'espace des phases et l'espace des impulsions

$$\langle \varphi_1 \mid \varphi_2 \rangle_{\Sigma_m^\pm} = \int\limits_{V_m^\pm} \widetilde{\varphi}_1^*(k)\widetilde{\varphi}_2(k)d\Omega_m(k) = \langle \tilde{\varphi}_1 \mid \tilde{\varphi}_2 \rangle_{V_m^\pm} \tag{2.3.21}$$

est par conséquent vérifiée si et seulement si:

$$\int_{p=mv} d\mathbf{p} \mid \mathring{\eta}(p.k) \mid^2 = \pm 2k^0(2\pi\hbar)^{-3} \tag{2.3.22}$$

On peut montrer [**?**] que cette dernière relation est équivalente à la normalisation de $\tilde{\eta}$

$$\int\limits_{k\in V_m^\pm} \mid \tilde{\eta}(k) \mid^2 d\mathbf{k} = 2mc(2\pi\hbar)^{-3} \tag{2.3.23}$$

L'opérateur W_η est un opérateur unitaire entre $L^2(V_m^\pm)$ et $L^2(\Sigma_{m,\eta}^\pm)$ si $\tilde{\eta}$ est invariante par rotation et normalisée conformément à (2.3.23). Maintenant, on doit montrer que la représentation espace des phases choisie est équivalente à la sous représentation impulsion

$$U^\eta = W_\eta \tilde{U} W_\eta^{-1} \tag{2.3.24}$$

Pour cela cherchons

$$(W_\eta \tilde{U}(a,\Lambda)\tilde{\varphi})(q,p) = \int_{V_m^\pm} \exp(\frac{-i}{\hbar}(q-a).k)\eta^*(p.k)\tilde{\varphi}(\Lambda^{-1}k)d\Omega_m(k) \tag{2.3.25}$$

Posons $k' = \Lambda^{-1}k$ et tenons compte de l'invariance de $d\Omega_m(k)$, $(q-a).k$ et $p.k$ sous Λ. On trouve alors

$$(W_\eta \tilde{U}(a,\Lambda)\tilde{\varphi})(q,p) = \int_{V_m^\pm} \exp\left[\frac{-i}{\hbar}k'.\Lambda^{-1}(q-a)\right]\eta^*(k'.\Lambda^{-1}p)\tilde{\varphi}(k')d\Omega_m(k') \quad (2.3.26)$$
$$= (W_\eta\tilde{\varphi})(\Lambda^{-1}(q-a),\Lambda^{-1}p) \quad (2.3.27)$$

Cette dernière relation est équivalente à (2.3.24) et achève la preuve que la sous représentation espace des phases est irréductible. Une autre conséquence de l'isométrie de W_η est

$$\varphi_\eta(q,p) = \langle \eta_{q,p} \mid \varphi\rangle_{\Sigma_m^\pm} = \langle \tilde{\eta}_{q,p} \mid \tilde{\varphi}\rangle_{V_m^\pm} \quad (2.3.28)$$

et le fait que la famille $\left\{\mid \tilde{\eta}_{q,p}\rangle,\ \ (q,p)\in\Sigma_m\right\}$ constitue une résolution de l'identité dans $L^2(V_m^\pm)$

$$\int_{p\in V_m^\pm} \mid \tilde{\eta}_{q,p}\rangle d\Sigma(q,p)\langle\tilde{\eta}_{q,p}\mid = \tilde{1}_\pm \quad (2.3.29)$$
$$\int_{\substack{q^0=const\\ p\in V_m^\pm}} \mid \tilde{\eta}_{q,p}\rangle d\mathbf{q}d\mathbf{p}\langle\tilde{\eta}_{q,p}\mid = \tilde{1}_\pm \quad (2.3.30)$$

L'évolution dans le temps est décrite par

$$U(-t,\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{I}) = \exp(-\frac{i}{\hbar}\frac{\mathbf{P}^2}{2m}t) \quad (2.3.31)$$

où

$$P^\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial q_\mu} \quad (2.3.32)$$

Considérons alors le premier Casimir $M^2 = c^{-2}P^\mu P_\mu$ du groupe de Poincaré et utilisons le fait que l'espace $L^2(\Sigma_{m,\eta}^\pm)$ doit être un sous-espace propre de M^2 avec la valeur propre m^2

$$M^2\varphi_\eta(q,p) = c^{-2}P^\mu P_\mu\varphi_\eta(q,p) \quad (2.3.33)$$
$$= m^2\varphi_\eta(q,p)$$

Donc, $\varphi_\eta(q,p)$ vérifie l'équation de Klein-Gordon

$$\left(\Box_q + m^2c^2/\hbar^2\right)\varphi(q,p) = 0; \qquad P^\mu P_\mu = -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial q_\mu}\frac{\partial}{\partial q^\mu} = -\hbar^2\Box_q$$

Terminons cette section par la remarque que la fonction $\widetilde{\eta}(k)$ est notée $\tilde{\xi}(\mathbf{k})$ dans le cas non relativiste et satisfait

$$\tilde{\xi}\left(R\mathbf{k}\right) = \tilde{\xi}\left(\mathbf{k}\right) \tag{2.3.34}$$

$$\left\langle \tilde{\xi} \middle| \tilde{\xi} \right\rangle^{1/2} = (2\pi\hbar)^{-3/2} \tag{2.3.35}$$

On peut alors établir une correspondance entre $\tilde{\xi}(\mathbf{k})$ et $\tilde{\eta}(k)$ en posant

$$\tilde{\eta}(k) = (2mc)^{1/2}\tilde{\xi}(\mathbf{k}); \quad k = (k^0, \mathbf{k}) \in V_m^\pm \tag{2.3.36}$$

Cette propriété sera utile dans l'étude des probabilités et de la localisation dans l'espace des phases.

2.4 Localisation dans l'espace des phases relativiste

Considérons l'ensemble des opérateurs $\mathbf{E}_\eta\left(B\right)$

$$\mathbf{E}_\eta\left(B\right) = \int_B \left|\eta_{q,p}\right\rangle d\Sigma_m\left(q,p\right)\left\langle\eta_{q,p}\right|; \qquad q,p \in \Sigma^\pm_{m,\eta}, \quad B \subset \Sigma^\pm_{m,\eta} \tag{2.4.1}$$

$$d\Sigma_m(q,p) = d\sigma\left(q\right)d\Omega_m(k)$$

La probabilité est définie par la valeur moyenne de $\mathbf{E}_\eta\left(B\right)$

$$P^\eta_\varphi\left(B\right) = \left\langle\varphi_\eta\middle|\mathbf{E}\left(B\right)\varphi_\eta\right\rangle = \int_B d\Sigma^\pm_m\left(q,p\right)\left|\varphi_\eta\left(q,p\right)\right|^2 \tag{2.4.2}$$

C'est la probabilité d'observer une particule dans l'état φ aux positions stochastiques $(q,p) \in B$. On va expliquer le sens de cette phrase en calculant les probabilités marginales pour des repères où $d\Sigma(q,p)$ prend la forme $d\mathbf{q}d\mathbf{p}$, puis justifier la validité de (2.4.2) en passant à la limite ponctuelle. Pour $q^0 = Const$, intégrons sur la région $B = \sigma_{q^0} \times \tilde{B}$ pour que la mesure de l' impulsion stochastique donne une valeur $p \in \tilde{B}$

$$P_{\varphi}^{\eta}\left(\tilde{B}\right) = \int_{R^3\times\tilde{B}} \mid \varphi_{\eta}(q,p) \mid^2 d\mathbf{q}d\mathbf{p} \tag{2.4.3}$$

$$= \int_{\tilde{B}} \rho^{\eta}(p)d\mathbf{p} \tag{2.4.4}$$

En utilisant (2.3.15) et la propriété d'unitarité de la transformé de Fourier, on aboutit à [?]

$$\rho^{\eta}(p) = \pm 2(k^0)^{-1}(2\pi\hbar)^{-3}\int_{V_m^{\pm}} \mid \tilde{\eta}(\Lambda_v^{-1}.k) \mid^2 \mid \widetilde{\varphi}(k) \mid^2 d\Omega_m(k) \tag{2.4.5}$$

Introduisons $k_{(p)} = \Lambda_v^{-1}k$, où $p = mv$, comme une nouvelle variable d'intégration et faisons appel à la relation (2.3.36) et à la fonction de confiance non relativiste ci-dessous [?],

$$\overline{\chi}_{\mathbf{p}}^{\xi}\left(\mathbf{k}\right) = \left(2\pi\hbar\right)^3 \mid \hat{\xi}\left(\mathbf{k}-\mathbf{p}\right) \mid^2 \tag{2.4.6}$$

Après avoir utilisé l'invariance $d\Omega_m(k) = d\Omega_m(k_{(p)})$, on trouve

$$\rho^{\eta}(p) = \pm mc\int_{R^3} \overline{\chi}_0^{\xi}(\mathbf{k}_p) \mid \tilde{\varphi}(\Lambda_v k_p) \mid^2 \left[2(\Lambda_v k_p)^0\right]^{-1} \frac{d\mathbf{k}_p}{k_p^0} \tag{2.4.7}$$

Dans le cas non relativiste [?], la fonction de confiance $\overline{\chi}_0^{\xi}(\mathbf{k}_p)$ est interprétée comme la densité de probabilité que l'appareil de mesure donne la valeur $(\mathbf{k}_p)$ quand la particule est au repos. Ce décalage est interprété comme une extension stochastique (dans l'espace des impulsions). Par conséquent, la limite ponctuelle pour l'impulsion s'écrit

$$\overline{\chi}_0^{\xi}(\mathbf{k}_p) \longrightarrow \delta^3(\mathbf{k}_p) \tag{2.4.8}$$

En remplaçant cette limite dans (2.4.7) et en intégrant par rapport à $\mathbf{k}_p$, le quadri-vecteur k_p devient $k_p = (\pm mc, \mathbf{0})$. Par conséquent, $k = \Lambda_v k_p = \Lambda_v(\pm mc, \mathbf{0}) = p$ et $\rho^{\eta}(p)$ devient

$$\rho^{\eta}(p) \longrightarrow (2p^0)^{-1} \mid \tilde{\varphi}(p) \mid^2 \tag{2.4.9}$$

Ainsi, à cette limite, la probabilité marginale stochastique tend vers la probabilité de la mécanique quantique relativiste conventionnelle

$$\int_{\tilde{B}} d\mathbf{p}\int_{R^3} \mid \varphi(q,p) \mid^2 d\mathbf{q} \rightarrow \int_{\tilde{B}} \mid \tilde{\varphi}(p) \mid^2 d\Omega_m(p) \tag{2.4.10}$$

Si nous essayons de calculer la densité de probabilité dans la représentation configuration

$$\rho^{\eta}(q) = \int_{R^3} \mid \varphi(q,p) \mid^2 dp \tag{2.4.11}$$

nous nous apercevrons que l'intégration sur p ne peut pas être effectuée. Ceci est en accord avec le théorème de Hegerfeldt qui confirme qu'une telle représentation n'existe pas. Malgré cela, on peut montrer que la densité $\mid \varphi(q,p) \mid^2$possède une signification physique en passant à la limite non relativiste [**?**]. Montrons d'abord que cette densité tend vers la densité non relativiste pour une particule au repos stochastique $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Dans ce cas, la fonction d'onde dans la représentation espace des phases est

$$\left[W_\eta \tilde{\varphi}\right](q,p) \mid_{\mathbf{p}=\mathbf{0}} = (2mc)^{1/2} \int\limits_{V_m^{\pm}} \exp(-\frac{i}{\hbar} q.k) \tilde{\xi}^*(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(k) \frac{d\mathbf{k}}{\pm 2k_0} \tag{2.4.12}$$

Comparons $\varphi(q,p)$ avec son homologue non relativiste [**?**] $\tilde{H}_0$ est l'Hamiltonien dans la représentation impulsion

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{q},\mathbf{p},t) &= \left(W_\xi \exp(\frac{-i}{\hbar}\tilde{H}_0 t)\tilde{\psi})\right)(\mathbf{q},\mathbf{p}) \\ &= \int_{R^3} \exp(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{q}.\mathbf{k})\tilde{\xi}^*(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \left[\exp(\frac{-i}{\hbar}\tilde{H}_0 t)\tilde{\psi}\right](\mathbf{k})d\mathbf{k} \\ &= \int_{R^3} \exp(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{q}.\mathbf{k})\tilde{\xi}^*(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \exp(\frac{-i\mathbf{k}^2}{2m\hbar}t)\tilde{\psi}(\mathbf{k})d\mathbf{k} \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

pour des impulsions k proches de la limite non relativiste

$$\pm k^0 = (k^2 + m^2c^2)^{1/2} \approx mc\left(1 + \frac{\mathbf{k}^2}{2m^2c^2}\right) \tag{2.4.14}$$

En utilisant (2.4.14), (2.4.12) et la relation

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}) = \varphi(k), \quad k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \tag{2.4.15}$$

on trouve que

$$\varphi(q,p) = (W_\eta \tilde{\psi})(q,p) \tag{2.4.16}$$

On constate alors que $\mid \varphi(q,p) \mid^2$ est une bonne approximation du cas non relativiste

$$| \varphi(q,p) |^2 = | \psi(\mathbf{q},\mathbf{p},t) |^2 + O(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2c^2}) \tag{2.4.17}$$

pour $|t| = |q^0/c|$ suffisamment petit. Par conséquent, $| \varphi(q,p) |^2$peut donc être vue comme densité de probabilité approximative au point stochastique $\left(q, p, \chi^\eta_{q,p}\right)$ où [**?**]

$$\chi^\eta_{q,p}(\mathbf{x},\mathbf{k}) = \hat{\chi}^\xi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x})\tilde{\chi}^\xi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}); \qquad \mathbf{p} = \mathbf{0} \tag{2.4.18}$$

Pour une impulsion $\mathbf{p}$ non nulle, la relation précédente reste valable dans le repère lié au microdétecteur représenté par $\eta_{q',p'}$ car $\mathbf{p}' = \mathbf{0}$. Un observateur lié au laboratoire mesurera la même probabilité qu'un observateur lié au microdétecteur

$$\chi^\eta_{q,p}(\mathbf{x},\mathbf{k})d\mathbf{x}d\mathbf{k} = \hat{\chi}^\xi_{\mathbf{q}'}(\mathbf{x}')\tilde{\chi}^\xi_{\mathbf{p}'}(\mathbf{k}')d\mathbf{x}'d\mathbf{k}'; \qquad \mathbf{p}' = \mathbf{0} \tag{2.4.19}$$

Le passage au repère du laboratoire se fait en utilisant, dans le second membre de l'égalité précédente, le boost de Lorentz $q' = \Lambda_v^{-1}q$, $p' = \Lambda_v^{-1}p$, $x' = \Lambda_v^{-1}x$ et $k' = \Lambda_v^{-1}k$. Il en découle que

$$d\mathbf{x}'d\mathbf{k}' = \left(1 - \frac{\mathbf{k}.\mathbf{p}}{k^0p^0}\right) d\mathbf{x}d\mathbf{k} \tag{2.4.20}$$

$$\chi^\eta_{q,p}(\mathbf{x},\mathbf{k}) = \frac{p^0k^0}{p.k}\hat{\chi}^\xi_0\left(\mathbf{x} - \mathbf{q} - \frac{\mathbf{p}.(\mathbf{x}-\mathbf{p})}{p^0(mc+p^0)}\mathbf{p}\right)\tilde{\chi}^\xi_0\left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{p}}{mc}(k^0 - \frac{\mathbf{p}.\mathbf{k}}{mc+p^0})\right) \tag{2.4.21}$$

Cette fonction de confiance dans l'espace des phases relativiste ne peut se mettre sous la forme d'un produit de la fonction de confiance de l'espace de configuration et d'impulsion comme dans le cas non relativiste. Ainsi, l'espace des phase stochastique relativiste peut être défini en termes de comme

$$M^\pm_{m,\eta} = \{\zeta = (\zeta, \chi_\zeta)/\zeta = (q,p) \in M^\pm_m = M(1,3) \times V^\pm_m\} \tag{2.4.22}$$

Les hypersurfaces de $M^\pm_{m,\eta}$ correspondant à l'espace Γ_ξ non relativiste sont

$$\Sigma^\pm_{m,\eta} = \{\zeta = (\zeta, \chi_\zeta)/\zeta \in \Sigma^\pm_m = \sigma \times V^\pm_m\} \tag{2.4.23}$$

A cause de (2.4.21), $M^\pm_{m,\eta}$ et $\Sigma^\pm_{m,\eta}$ ne sont pas des produits cartésiens de l'espace de configuration stochastique et celui des impulsions stochastique. De plus, à cause de (2.4.17), les fonction $\varphi(q,p)$ de $L^2\left(\Sigma^{\pm}_{m,\eta}\right)$ ne sont interprétées comme amplitudes des densités de probabilité stochastique que dans l'approximation où la masse m des particules d'essai est très grande [?]. Ceci signifie que les microdétecteurs ont un comportement classique ce qui ne correspond pas à l'hypothèse fondamentale de la théorie stochastique. Ce problème est réglé en passant à une formulation géométrique de la théorie qui dépasse le cadre de ce travail [?].

2.5 Système de covariance dans l'espace des phases relativiste

Désignons par F l'espace de configuration, des impulsions, ou l'espace des phases (ou tout autre espace physique). La famille de toutes les applications E associant aux domaines B de l'espace F les opérateurs de projection $E(B)$ agissant dans H, est une mesure à valeurs projectives (PV-measure, en anglais) [?] si les propriétés suivantes sont vérifiées:

$$E(M) = 1 \tag{2.5.1}$$

$$E(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \Sigma_{i=1}^{\infty} E(B_i), \ \ B_i \cap B_j = \oslash, \, i \neq j \tag{2.5.2}$$

Une telle mesure constitue un système d'imprimitivité pour une représentation unitaire $U(g)$, d'un groupe de symétries G, [30, ?] si

$$U(g)E(B)U^{-1}(g) = E(gB) \ , \ \ gB = \{g(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in B\} \tag{2.5.3}$$

Dans le cas du groupe de Poincaré et la représentation impulsion, l'opérateur de projection

$$(E^{\tilde{P}}(B)\tilde{\varphi})(k) = \chi_B(k)\tilde{\varphi}(k) \tag{2.5.4}$$

a été utilisé dans le premier chapitre, où $\chi_B(k)$ est la fonction caractéristique

$$\chi_B(k) = 1 \text{ si } k \in B \ , 0 \text{ si } \ \notin B \tag{2.5.5}$$

La probabilité que la mesure donne une valeur appartenant à B, est donnée par la valeur moyenne de l'opérateur de projection $E^{\tilde{P}}(B)$ dans l'état $\tilde{\varphi}$

$$p = \left\langle \tilde{\varphi} \mid E^{\tilde{P}}(B)\tilde{\varphi} \right\rangle = \int_B \tilde{\varphi}^*(k)\tilde{\varphi}(k)d\Omega_m(k) \tag{2.5.6}$$

La propriété d'imprimitivité

$$\tilde{U}(g)E^{\tilde{P}}(B)\tilde{U}^{-1}(g) = E^{\tilde{P}}(gB)\ ,\ \ gB = \{\Lambda k, k \in B\} \tag{2.5.7}$$

se déduit aussi de la définition (2.5.4) et exprime l'invariance de la probabilité après la transformation $\tilde{U}\,(g)$

$$\left\langle \tilde{\varphi}\ \hat{U}^{-1}(g)|E(gB)\tilde{U}(g)\tilde{\varphi} \right\rangle = \left\langle \tilde{\varphi} \mid E^{\tilde{P}}(B)\tilde{\varphi} \right\rangle \tag{2.5.8}$$

Les autres propriétés du système d'imprimitivité expriment les propriétés des probabilités.

Parmi ces propriétés, celle qui impose que le système d'imprimitivité soit un opérateur de projection n'est pas indispensable selon certain chercheurs. Il suffirait alors qu'ils soient des opérateurs positifs et le système d'imprimitivité décrirait une mesure non précise. C'est le cas de la théorie stochastique où il a été nommé système de covariance. Considérons les opérateurs $E^\eta(B)$, $B \subset \Sigma^\pm_{m,\eta}$, qui sont donnés par l'intégrale

$$E^\eta(B) = \int_B \left|\tilde{\eta}_{q,p}\right\rangle d\Sigma_m(q,p) \left\langle\tilde{\eta}_{q,p}\right| \tag{2.5.9}$$

L'interprétation de $\varphi(q,p)$ comme amplitude de probabilité aux points $(q,p) \in \Sigma^\pm_{m,\eta}$ implique que (2.3.28)

$$P_\eta(B) = \langle\tilde{\varphi} \mid E^\eta(B)\tilde{\varphi}\rangle_{V^\pm_m} \tag{2.5.10}$$

est la probabilité que la mesure donne un résultat appartenant à la région $B \subset \Sigma_{m,\eta}$.

Cependant, $E^\eta(B)$ donne lieu au système de covariance

$$\tilde{U}(g)E^\eta(B)\tilde{U}^{-1}(g) = E^\eta(gB) \tag{2.5.11}$$

seulement si on limite $g = (a, \Lambda)$ au sous-groupe $\varrho(\sigma)$ qui est égale au produit semi-direct des translations spatiales et des rotations qui laisse l'hypersurface $\Sigma^\pm_m = \sigma \times V^\pm_m$ invariante [?]. Introduisons alors l'opérateur à valeur positive [?]

$$\tilde{F}_\eta(B^\circ) = \int_{-\infty}^{+\infty} E^\eta(B_{q^\circ})dq^0 \tag{2.5.12}$$

$$B_{q^\circ} = \left\{(q,p)/(q,p) \in \Sigma_{m,\eta}^{q^\circ} \cap B^\circ\right\} \tag{2.5.13}$$

défini pour une région B° dans $M_{m,\eta}^{\pm}$ où $q \in \mathbb{R}^1$. Les $\Sigma_{m,\eta}^{(q^0)\pm}$ sont définies dans le même repère stochastique de repos où les hypersurfaces correspondantes $\Sigma_m^{(q^0)\pm} = \sigma_{q^0} \times V_m^{\pm}$ sont des hyperplans à $q^0 = const$.

Les opérateurs $\tilde{F}_\eta(B^0)$ constituent une mesure à valeurs opératorielles positives (POV en anglais) sur les régions de $M_{m,\eta}^{\pm}$ dont les opérateurs agissent dans $L^2(V_m^{\pm})$. De plus, il constituent un système de covariance par rapport à $\widetilde{U}(a,\Lambda)$ [**?**]

$$\tilde{U}(g)\tilde{F}_\eta(B^0)\tilde{U}^{-1}(g) = \tilde{F}_\eta(gB^0) \tag{2.5.14}$$

Pour montrer que (2.5.14) est vraie, on doit réécrire (2.5.12) sous une forme covariante. Pour cela, on doit réécrire le produit scalaire

$$\langle \varphi_1 \mid \varphi_2 \rangle_{\Sigma_{m,\eta}^{\pm}} = \int_{\Sigma_m^{\pm\circ}} \varphi_1^*(\zeta)\varphi_2(\zeta)d\Sigma_m(\zeta) \tag{2.5.15}$$

dans le sous-espace $L^2(\Sigma_{m,\eta}^{\pm})$ de $L^2(\Sigma_m^{\pm})$ sous la forme covariante [**?**]

$$\langle \varphi_1 \mid \varphi_2 \rangle_{\Sigma_{m,\eta}^{\pm}} = \frac{i\hbar}{Z_\eta} \int_{\Sigma_m^{\pm}} \varphi_1^*(\zeta)\overleftrightarrow{\partial_\mu}\varphi_2(\zeta)d\sigma^\mu(q)d\Omega_m(p) \tag{2.5.16}$$

$$\varphi_1^*(\zeta)\overleftrightarrow{\partial_\mu}\varphi_2(\zeta) = \varphi_1^*(q,p)\frac{\partial}{\partial q^\mu}\varphi_2(q,p) - \varphi_2(q,p)\frac{\partial}{\partial q^\mu}\varphi_1^*(q,p) \tag{2.5.17}$$

Où $Z_\eta > 0$ est une constante de normalisation. Pour établir (2.5.16) et calculer Z_η, travaillons dans un repère où $\Sigma_{m,\eta}^{\pm}$ correspond à l'hyper-plan $q^0 = const$ et $d\sigma^\mu(q)$ est donnée par $d\sigma^0 = d\mathbf{q}$, $d\sigma^1 = d\sigma^2 = d\sigma^3 = 0$. Alors, (2.5.15) aura la forme

$$\langle \varphi_1 \mid \varphi_2 \rangle_{\Sigma_{m,\eta}^{\pm}} = \int_{\substack{q^\circ = cst \\ p \in V_m^{\pm}}} \varphi_1^*(q,p)\varphi_2(q,p)d\mathbf{q}d\mathbf{p} \tag{2.5.18}$$

Calculons maintenant le second membre de (2.5.16) dans le même repère (sans la constante Z_η)

$$i\hbar \int\limits_{q^\circ=cst} \varphi_1^*(\zeta)\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi_2(\zeta)d\mathbf{q}d\Omega_m(p) = (2\pi\hbar)^3 \int\limits_{p\in V_m^\pm} d\Omega_m(p) \int\limits_{V_m^\pm} d\Omega_m(k) \mid \eta(p.k) \mid^2 \widetilde{\varphi}_1^*(k)\widetilde{\varphi}_2(k) \tag{2.5.19}$$

Inversons l'ordre d'intégration de k et p dans (2.5.19) et introduisons le changement de variable $p = \Lambda_k p'$ tout en rappelant que $\Lambda_k^{-1}k = (mc, \mathbf{0})$. On remarque alors que l'intégrale

$$\int\limits_{V_m^\pm} \mid \eta(p.k) \mid^2 d\Omega_m(p) = \int\limits_{V_m^\pm} \mid \eta(mcp'_0) \mid^2 d\Omega_m(p') \tag{2.5.20}$$

est indépendante de k, et en posant

$$\begin{aligned} Z_\eta &= (2\pi\hbar)^3 \int\limits_{p\in V_m^\pm} \mid \eta(mcp_0) \mid^2 d\Omega_m(p) \\ &= (2\pi\hbar)^3 mc \int\limits_{R^3} \mid \widetilde{\xi}(\mathbf{k}) \mid^2 \frac{d\mathbf{k}}{(\mathbf{k}^2 + m^2c^2)^{1/2}} \end{aligned} \tag{2.5.21}$$

on trouve

$$i\hbar \int\limits_{q^\circ=const} \varphi_1^*(\zeta)\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi_2(\zeta)d\mathbf{q}d\Omega_m(p) = Z_\eta \langle \tilde{\varphi}_1 \mid \tilde{\varphi}_2 \rangle_{V_m^\pm} \tag{2.5.22}$$

$$i\hbar \int\limits_{q^\circ=const} \varphi_1^*(\zeta)\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi_2(\zeta)d\sigma^0 d\Omega_m(p) = Z_\eta \langle \varphi_1 \mid \varphi_2 \rangle_{\Sigma_{m,\eta}^\pm} \tag{2.5.23}$$

La dernière expression provient du fait que $d\sigma^0 = d\mathbf{q}$ et de l'unitarité de W_η. Cette expression est écrite d'une manière covariante et montre que (2.5.16) est vraie, mais pas globalement vrai dans $L^2(\Sigma_m^\pm)$ puisque Z_η dépend de η. En utilisant $\varphi(\zeta) = \langle \tilde{\eta}_{q,p} \mid \tilde{\varphi} \rangle_{V_m^\pm}$, nous pouvons écrire

$$\langle \widetilde{\varphi}_1 \mid \widetilde{\mathbf{F}}_\eta(B)\widetilde{\varphi}_2 \rangle_{V_m^\pm} = \frac{i\hbar}{Z_\eta} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dq^\circ \int\limits_{B_{q^\circ}} \varphi_1^*(\zeta)\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi_2(\zeta)d\mathbf{q}d\Omega_m(p) \tag{2.5.24}$$

pour chacune $\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2 \in L^2(V_m^{\pm})$. On obtient l'expression covariante suivante:

$$\widetilde{\mathbf{F}}_\eta(B) = \frac{i\hbar}{Z_\eta} \int\limits_B dq^4 d\Omega_m(p) \mid \widetilde{\eta}_{q,p}\rangle n^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \langle \widetilde{\eta}_{q,p} \mid \tag{2.5.25}$$

Compte tenu de l'invariance de $dq^4 d\Omega_m(p)$ et $n^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu$, la relation $[U^{-1}(a,\Lambda)\varphi](\zeta) = \langle \tilde{\eta}_{q,p} \mid \tilde{U}^{-1}(a,\Lambda)\tilde{\varphi}\rangle_{V_m^{\pm}} = \langle \tilde{\eta}_{\Lambda q+a,\Lambda p} \mid \tilde{\varphi}\rangle_{V_m^{\pm}}$ permet de retrouver facilement l'équation (2.5.14) qui veut dire que $\widetilde{\mathbf{F}}_\eta(B)$ et $U(a,\Lambda)$ constituent un système de covariance du groupe de Poincaré dans l'espace des phases relativiste $M_{m,\eta}^{\pm}$.

On réécrit maintenant les deux systèmes de covariances dans le représentation espace des phases

$$E_\eta(B) = W_\eta \tilde{E}_\eta W_\eta^{-1} = \int\limits_B \mid \eta_\zeta\rangle d\Sigma_m(\zeta) \langle \eta_\zeta \mid, \ B \subset_{\Sigma_{m,\eta}^{\pm}} \tag{2.5.26}$$

$$F_\eta(B^0) = \frac{i\hbar}{Z_\eta} \int\limits_{B^0} dq^4 d\Omega_m(p) \mid \eta_\zeta\rangle n^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu) \langle \eta_\zeta \mid \tag{2.5.27}$$

au lieu de (2.5.9) et (2.5.25), respectivement, de sorte que

$$U(a,R) E_\eta(B) U^{-1}(a,R) = P_\eta(q+RB), \ (a,R) \in \varepsilon(\sigma) \tag{2.5.28}$$

$$U(a,\Lambda) F_\eta(B^0) U^{-1}(a,\Lambda) = F_\eta(q+\Lambda B^0), \ (a,\Lambda) \in M_{m,\eta}^{\pm} \tag{2.5.29}$$

Dans (2.5.26) et (2.5.27), nous avons introduit par analogie avec

$$(W_\xi \hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p}})(q',p') = \int\limits_{R^3} \hat{\xi}^*_{\mathbf{q}',\mathbf{p}'}(\mathbf{x}) \hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{2.5.30}$$

les états propres dans la représentation espace des phases

$$\eta_{q,p} = W_\eta \widetilde{\eta}_{q,p} = W_\eta \tilde{U}(q, \Lambda_{p/m}) \tilde{\eta} \tag{2.5.31}$$

Etant donné (2.3.28) et l'unitarité de W_η, on a pour $\zeta, \zeta' \in \Sigma_m^{\pm}$

$$\eta_\zeta(\zeta') = \langle \tilde{\eta}_{\zeta'} \mid \tilde{\eta}_\zeta\rangle_{V_m^{\pm}} = \langle \eta_{\zeta'} \mid \eta_\zeta\rangle_{\Sigma_m^{\pm}} \tag{2.5.32}$$

Cette dernière relation donne le propagateur relativiste dans $M^{\pm}_{m,\eta}$ [?]

$$K_\eta(q',p',q,p) = \langle \widetilde{\eta}_{q',p'} \mid \widetilde{\eta}_{q,p} \rangle_{V_m^\pm} = \int\limits_{V_m^\pm} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(q'-q).k\right] \eta^*(p'.k)\eta(p.k)d\Omega_m(k) \qquad (2.5.33)$$

Les deux propriétés de ce propagateur sont:

$$K^*_\eta(\zeta',\zeta) = K_\eta(\zeta,\zeta') \qquad (2.5.34)$$

$$K_\eta(\zeta',\zeta) = \int\limits_{\Sigma_m^\pm} K_\eta(\zeta',\zeta'')K_\eta(\zeta'',\zeta)d\Sigma_m(\zeta'') \qquad (2.5.35)$$

2.6 Courants de probabilité et de charge

En mécanique quantique conventionnelle non relativiste, la probabilité $dP(\mathbf{x},t)$ de trouver à l'instant t la particule dans l'élément de volume $d\mathbf{x}$ situé au point $\mathbf{x}$ est

$$dP(\mathbf{x},t) = \rho(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} \qquad (2.6.1)$$

La densité de probabilité

$$\rho(\mathbf{x},t) = |\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x},t)|^2 \qquad (2.6.2)$$

est conservée dans un volume infinitésimal $d^3\mathbf{x}$ autour de $\mathbf{x}$. Localement, la conservation s'exprime par le fait que la densité $\rho(\mathbf{x},t)$ et la densité de courant

$$\mathbf{j}(\mathbf{x},t) = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*(\mathbf{x},t)\nabla\psi(\mathbf{x},t) - \psi(\mathbf{x},t)\nabla\psi^*(\mathbf{x},t)\right] \qquad (2.6.3)$$

satisfont à l'équation de continuité [?]

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \nabla.\mathbf{j}(\mathbf{x},t) = 0 \qquad (2.6.4)$$

En mécanique quantique stochastique non relativiste [?], on définit aussi une densité de probabilité

$$\rho^\xi(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = |\psi(\mathbf{q},\mathbf{p},t)|^2 \qquad (2.6.5)$$

et un courant de probabilité

$$\mathbf{j}^{\xi}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)=\frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^{*}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)\nabla\psi(\mathbf{q},\mathbf{p},t)-\psi(\mathbf{q},\mathbf{p},t)\nabla\psi^{*}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)\right] \tag{2.6.6}$$

qui satisfont à l'équation de continuité [?]

$$\frac{\partial\rho^{\xi}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)}{\partial t}+\nabla_{\mathbf{q}}.\mathbf{j}^{\xi}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)=0 \tag{2.6.7}$$

Ces définitions sont données dans l'espace des phases. On peut en déduire une densité de probabilité et une densité de courant dans l'espace de configuration par intégration sur l'impulsion

$$\rho^{\xi}(\mathbf{q},t)=\int_{\mathbf{R}^3}\rho^{\xi}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)d\mathbf{p} \tag{2.6.8}$$

$$\mathbf{j}^{\xi}(\mathbf{q},t)=\int_{\mathbf{R}^3}\mathbf{j}^{\xi}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)d\mathbf{p}=\int_{\mathbf{R}^3}\frac{\mathbf{p}}{m}\rho^{\xi}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)d\mathbf{p} \tag{2.6.9}$$

$$0=\frac{\partial\rho^{\xi}(\mathbf{q},t)}{\partial t}+\nabla.\mathbf{j}^{\xi}(\mathbf{q},t) \tag{2.6.10}$$

Les derniers membres des deux premières définitions sont analogues aux définitions classiques relatives à un ensemble de particules décrites par une fonction de distribution classique $\rho^{cl}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)=\rho^{\xi}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$. De plus, à la limite ponctuelle

$$\hat{\chi}_{\mathbf{q}}^{\xi}(\mathbf{x})=(2\pi\hbar)^{3}\mid\hat{\xi}(\mathbf{x}-\mathbf{q})\mid^{2}\rightarrow\delta(\mathbf{x}-\mathbf{q}) \tag{2.6.11}$$

les deux densités stochastiques tendent vers leurs homologues conventionnelles (ponctuelles)

$$\rho^{\xi}(\mathbf{q},t)\rightarrow\rho(\mathbf{x},t)\text{ et }\mathbf{j}^{\xi}(\mathbf{q},t)\rightarrow\mathbf{j}(\mathbf{x},t) \tag{2.6.12}$$

Etendons la définition de la densité de courant stochastique au cas relativiste [?]

$$j_{\eta}^{\mu}(q)=\pm2\int_{V_m^{\pm}}\frac{p^{\mu}}{m}\mid\varphi(q,p)\mid^{2}d\Omega_{m}(p) \tag{2.6.13}$$

C'est un quadri-vecteur courant de probabilité covariant sous la transformation (a,Λ)

$$j_{\eta}^{\mu}(q)\rightarrow j_{\eta}^{\prime\mu}(q^{\prime})=\Lambda_{\nu}^{\mu}j_{\eta}^{\nu}(q) \tag{2.6.14}$$

et sa composante temporelle $j_{\eta}^{0}(q)$ s'identifie avec une densité de probabilité (voir (2.3.16) et (2.4.11)) définie-positive

$$\rho_\eta(q) = \int_{\mathbf{R}^3} \mid \varphi(q,p) \mid^2 d\mathbf{p}, \qquad p^0 = \pm(\mathbf{p}^2 + m^2c^2)^{1/2} \tag{2.6.15}$$

Moyennant quelques calculs, on peut montrer que le courant $j_\eta^\mu(q)$ est conservé [?]

$$\frac{\partial}{\partial q^\mu} j_\eta^\mu(q) = 0 \tag{2.6.16}$$

à condition que la fonction $\mathring{\eta}(mck^0) = \tilde{\eta}(k)$ soit réelle [?].

On peut définir aussi un courant de charge dans l'espace des phases stochastique $M_{m,\eta}^\pm$

$$J_\eta^\mu(q) = \frac{i\hbar}{mZ_\eta} \int_{V_m^\pm} d\Omega_m(p) \varphi_1^*(q,p) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi_2(q,p) \tag{2.6.17}$$

qui est covariant

$$J_\eta^\mu(q) \to J_\eta'^\mu(q') = \Lambda_\nu^\mu J_\eta^\nu(q) \tag{2.6.18}$$

est conservé

$$\frac{\partial}{\partial q^\mu} J_\eta^\mu(q) = 0 \tag{2.6.19}$$

car $\varphi_1(q,p)$ et $\varphi_2(q,p)$ sont supposées être des solutions de l'équation de Klein-Gordon pour chaque p fixé dans $V_m^\pm$.

Les densité, de probabilité $\rho^\xi(\mathbf{q},t)$ et de courant $j^\xi(\mathbf{q},t)$, stochastiques non relativistes sont généralisées dans le cas relativiste par les densités, de courant de probabilité $j_\eta^\mu(q)$ et de courant de charge $J_\eta^\mu(q)$. Cependant, et contrairement au cas non relativiste, ces deux derniers courants ne tendent pas vers le courant de charge conventionnel $j^\mu(q)$ à la limite ponctuelle [?]. Ceci explique en partie l'impossibilité de trouver une densité de probabilité définie-positive en mécanique quantique conventionnelle relativiste, et implique que la théorie stochastique qui possède ces densités peut fournir une base physique dépourvue des inconsistances de la théorie conventionnelle.

Chapitre 3

Particule stochastiquement et intrinsèquement étendue

Le modèle de la particule étendue décrit la particule par une fonction d'onde $\psi(x, y)$ où x représente la position d'un mode quantique local (sous-particule) évoluant dans un espace temps-externe et y représente celle d'un mode quantique dans un espace-temps interne. Le premier peut correspondre au centre de masse et le second au mouvement relatif dans un problème à deux corps. Nous nous proposons de quantifier le mode externe par la méthode stochastique. Ceci parce que sa localisation correspond à celle de la particule étendue en tant que tout dans l'espace-temps externe. Le mode interne demeure ponctuel. Nous commençons par résumer les résultats du cas non relativiste [**?**, **?**]. Ces résultats seront généralisés aux cas où seul le mode interne est relativiste et décrit par la représentation impulsion. Ces deux cas servirons à justifier les interprétations physiques du cas où les deux modes sont relativistes. Le mode externe étant décrit par la représentation espace des phases, le mode externe sera considéré dans la représentation impulsion puis dans la représentation configuration. La propagation clôturera ce chapitre.

3.1 Cas non relativiste

Le mode interne n'est pas accessible par une mesure directe. Nous n'avons donc pas besoin de le décrire par la théorie stochastique. Seule la localisation globale du système étendu dans l'espace externe est déterminée à laide des micro-détecteurs stochastiques. Les états physiques appartiennent à l'espace de Hilbert [**?**]

$$H_\xi = L^2(\mathbf{\Gamma}_\xi) \otimes L^2\left(\mathbf{R}^3\right) \tag{3.1.1}$$

qui est un produit tensoriel de l'espace stochastique externe et de l'espace configuration ponctuel interne, le produit scalaire dans cet espace est donné par

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int_{\mathbf{R}^9} \psi^*(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y})\,\psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y})\,d\mathbf{q}d\mathbf{p}d\mathbf{y} \tag{3.1.2}$$

On peut définir une fonction d'onde stochastique de la particule intrinsèquement étendue ainsi

$$\psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}) = \left\langle\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}|\psi\right\rangle = \int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{x}\hat{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{x})\hat{\psi}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{3.1.3}$$

$$\left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}\right\rangle = \left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle \otimes |\mathbf{y}\rangle \tag{3.1.4}$$

Dans la représentation configuration, $\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}$ s'écrit

$$\hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}') = \hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{y}'-\mathbf{y}) \tag{3.1.5}$$

Les vecteurs $\left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}\right\rangle$ sont des états propres d'un micro-détecteur avec un mode interne ponctuel.

L'espace H_ξ est l'espace support du produit de la représentation $U(G)$ de l'espace des phases de Galilée externe et de la représentation configuration induite du groupe de Galilée interne $\hat{U}'(G')$. Définissons le système de covariance par rapport $U(G) \otimes \hat{U}'(G')$ par [**?**]

$$\mathbf{P}_\xi(\Delta\times\Delta') = \int_{\Delta,\Delta'} \left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}\right\rangle d\mathbf{q}d\mathbf{p}d\mathbf{y} \left\langle\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}}\right| \tag{3.1.6}$$

$$= \int_{\Delta} \left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle d\mathbf{q}d\mathbf{p} \left\langle\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right| \otimes \int_{\Delta'} |\mathbf{y}\rangle\, d\mathbf{y}\, \langle\mathbf{y}| \tag{3.1.7}$$

où Δ est une région de l'espace des phases externes Γ et Δ' une région de l'espace de configuration interne $\mathbf{R}^3$. L'équation (3.1.7) montre que (3.1.6) est le produit direct entre le système de covariance externe par rapport à $U(G)$ avec le système d'imprimitivité interne par rapport à $\hat{U}'(G')$. La probabilité est la valeur moyenne de l'opérateur défini en (3.1.6), elle est donnée par

$$P^\xi_\psi(\Delta\times\Delta') = \langle\psi|\mathbf{P}_\xi(\Delta\times\Delta')\psi\rangle = \int_{\Delta'} d\mathbf{y} \int_{\Delta} d\mathbf{q}\,d\mathbf{p}\,|\psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y})|^2 \tag{3.1.8}$$

L'intégration sur $d\mathbf{q}\,d\mathbf{p}$ donne la probabilité qu'une mesure stochastique soit effectuée et que le résultat soit dans Δ, alors que l'intégration sur $d\mathbf{y}$ donne la probabilité que le mode interne soit effectivement localisé dans la région Δ'. Ainsi, les composantes marginales suivantes [**?**]

$$\mathbf{P}_\xi(\Delta) \equiv \mathbf{P}_\xi(\Delta \times \mathbf{R}^3) = \int_B \left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle d\mathbf{q}d\mathbf{p} \left\langle\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right| \otimes \mathbf{1} \tag{3.1.9}$$

forment un système de covariance par rapport à $U\,(G) \equiv U\,(G) \otimes 1$ et leur correspond la probabilité

$$P^\xi_\Psi(\Delta \times \mathbf{R}^3) = \left\langle\psi|\mathbf{P}_\xi(\Delta \times \mathbf{R}^3)\psi\right\rangle = \int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{y} \int_\Delta d\mathbf{q}\,d\mathbf{p}\ \left|\psi\,(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y})\right|^2 \tag{3.1.10}$$

Au système d'imprimitivité par rapport à $U'\,(G') \equiv 1 \otimes U'\,(G')$

$$P_\xi(B') \equiv P_\xi(\Gamma \times B') = 1 \otimes \int_{\Delta'} |\mathbf{y}\rangle\, dy\, \langle\mathbf{y}| \tag{3.1.11}$$

correspond la probabilité

$$P^\xi_\psi(\Gamma \times \Delta') = \langle\psi|\mathbf{P}_\xi(\Gamma \times \Delta')\psi\rangle = \int_{\Delta'} d\mathbf{y} \int_\Gamma d\mathbf{q}\,d\mathbf{p}\ \left|\psi\,(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y})\right|^2 \tag{3.1.12}$$

Les probabilités marginales $P_\xi(\Delta_1)$ et $P_\xi(\Delta_2)$, que la mesure de $\mathbf{q}$ donne une valeur appartenant à la région Δ_1 de l'espace de configuration externe et que la mesure de $\mathbf{p}$ donne une valeur appartenant à la région Δ_2 de l'espace des impulsions externe, sont données par les valeurs moyennes suivantes [**?**]:

$$P_\xi(\Delta_1) = \langle\psi|\mathbf{P}_\xi(\Delta_1)\psi\rangle \tag{3.1.13}$$

$$P_\xi(\Delta_2) = \langle\psi|\mathbf{P}_\xi(\Delta_2)\psi\rangle \tag{3.1.14}$$

$$\mathbf{P}_\xi(\Delta_1) \equiv \mathbf{P}_\xi(\left(\Delta_1 \times \mathbf{R}^3\right) \times \mathbf{R}^3) = \int_{\Delta_1} d\mathbf{q} \int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{p} \left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle \left\langle\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right| \otimes \mathbf{1} \tag{3.1.15}$$

$$\mathbf{P}_\xi(\Delta_2) \equiv \mathbf{P}_\xi(\left(\mathbf{R}^3 \times \Delta_2\right) \times \mathbf{R}^3) = \int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{q} \int_{\Delta_2} d\mathbf{p} \left|\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right\rangle \left\langle\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\right| \otimes \mathbf{1} \tag{3.1.16}$$

Elles prennent la forme

$$\begin{aligned} P_\xi(\Delta_1) &= \int_{\Delta_1} d\mathbf{q} \int_{\mathbf{R}^6} d\mathbf{p}\, d\mathbf{y}\, |\psi\left(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}\right)|^2 \\ &= \int_{\Delta_1} d\mathbf{q} \int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{x} \hat{\chi}^\xi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) \int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{y}\, \left|\hat{\psi}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right|^2 \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

$$\begin{aligned} P_\xi(\Delta_2) &= \int_{\Delta_2} d\mathbf{p} \int_{\mathbf{R}^6} d\mathbf{q}\, d\mathbf{y}\, |\psi\left(\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}\right)|^2 \\ &= \int_{\Delta_2} d\mathbf{p} \int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{k} \tilde{\chi}^\xi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{y}\, \left|\tilde{\psi}(\mathbf{k},\mathbf{y})\right|^2 \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Les fonctions de confiance sont celles de la théorie stochastique non relativiste [**?**]

$$\hat{\chi}^\xi_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) = (2\pi\hbar)^3 \left|\hat{\xi}(\mathbf{x}-\mathbf{q})\right|^2 \tag{3.1.19}$$

$$\tilde{\chi}^\xi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}) = (2\pi\hbar)^3 \left|\tilde{\xi}(\mathbf{k}-\mathbf{p})\right|^2 \tag{3.1.20}$$

On remarque que le résultat obtenu est le même que celui de la mécanique quantique stochastique sauf que la densité de probabilité $|\hat{\psi}\left(\mathbf{x}\right)|^2$ d'une particule ponctuelle a été remplacée par la densité de probabilité marginale $\int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{y} \left|\hat{\psi}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right|^2$ d'une particule intrinsèquement étendue.

Intéressons nous maintenant à la propagation en considérant un temps t mesuré par un observateur externe et une variable temporelle interne y^0. Nous pouvons définir le propagateur suivant:

$$K_\xi(t',\mathbf{q}',\mathbf{p}',y';t,\mathbf{q},\mathbf{p},y) = \left\langle \xi_{\mathbf{q}',\mathbf{p}';\mathbf{y}'} | \mathcal{U} \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\mathbf{y}} \right\rangle \tag{3.1.21}$$

$$= \left\langle \xi_{\mathbf{q}',\mathbf{p}'} | U_{(t'-t)} \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \right\rangle \left\langle \mathbf{y}' | \hat{U}'_{(y'^0-y^0)} | \mathbf{y} \right\rangle \tag{3.1.22}$$

$$\mathcal{U} = U_{(t'-t)} \otimes \hat{U}'_{(y'^0-y^0)} \tag{3.1.23}$$

où $y = (y^0, \mathbf{y})$. L'opérateur d'évolution externe est

$$U_{(t'-t)} = \exp \frac{-i}{\hbar} H_0(t'-t) \tag{3.1.24}$$

et l'opérateur dans un espace-temps interne est

$$\hat{U}'_{(y'^0-y^0)} = \exp \frac{-i}{\hbar} \hat{H}'_0(y'^0-y^0) \tag{3.1.25}$$

$\hat{H}_0'$ est l'Hamiltonien interne dans la représentation configuration. Les paramètres m et μ sont respectivement la masse externe et interne. Le propagateur total est alors le produit du propagateur stochastique externe libre [34]

$$K_\xi(t', \mathbf{q}', \mathbf{p}'; t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{k} \exp[\frac{i\mathbf{k}^2 (t-t')}{2m\hbar}] \tilde{\xi}^*_{\mathbf{q}',\mathbf{p}'}(\mathbf{k}) \, \tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{k}) \tag{3.1.26}$$

et du propagateur ponctuel interne libre [34]

$$\hat{\Pi}(y'-y) = \left(\frac{\mu}{2\pi i\hbar(y'^{\circ} - y^{\circ})} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{ \frac{i\mu(\mathbf{y}' - \mathbf{y})^2}{2\hbar(y'^{\circ} - y^{\circ})} \right\} \tag{3.1.27}$$

3.2 Mode externe non relativiste et mode interne relativiste

Nous considérons une particule non relativiste ayant un mode interne relativiste, la dynamique du mode externe de masse m est étudiée par la mécanique quantique stochastique non relativiste et celle du mode interne ponctuel de masse μ, par la mécanique quantique conventionnelle relativiste. En se rapprochant de la réalité, nous pouvons comparer le mode externe au centre de masse d'un atome, qui évolue dans un espace-temps accessible à la mesure (susceptible d'avoir une extension stochastique), tandis que le mode interne, qui évolue dans un espace-temps inaccessible à la mesure, pourrait représenter le mouvement relatif d'un électron. La localisation globale de la particule système est déterminée par les particules d'essai stochastiquement étendues dans l'espace-temps externe. L'état physique $\mid \psi \rangle$ représentant les deux modes de la particule appartient à l'espace de Hilbert

$$H_\xi \equiv L^2_\xi(\Gamma) \times L^2(C^{\mu,+}) \tag{3.2.1}$$
$$C^{\mu,+} = \left\{ \zeta \; / \; \zeta^i \zeta_i = \mu^2, \zeta^0 > 0 \right\}$$
$$\Gamma = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) / \quad (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbf{R}^6\}$$

L'espace des phases externe Γ correspond à la mécanique quantique stochastique, et comme les interprétations probabilistes dans le cas relativiste ne peuvent se faire dans la représentation configuration qui est réductible, l'espace des impulsions internes $C^{\mu,+}$ correspond à la mécanique quantique relativiste conventionnelle. Définissons le produit scalaire dans l'espace total par

$$\langle \psi \mid \psi \rangle = \int_{R^6 \times C^{\mu,+}} \psi^*(\mathbf{q}, \mathbf{p};\zeta)\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p};\zeta) d\mathbf{q} d\mathbf{p} d\Omega(\zeta) \tag{3.2.2}$$

$$d\Omega(\zeta) = \frac{d\boldsymbol{\zeta}}{\zeta^0}$$

où $\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p};\zeta)$ est la fonction d'onde stochastique de la particule intrinsèquement étendue

$$\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p};\zeta) = \langle \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\zeta} \mid \psi \rangle \tag{3.2.3}$$

$$= \langle \tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p};\zeta} \mid \tilde{\psi} \rangle \tag{3.2.4}$$

$$= \int_{R^3} d\mathbf{k} \tilde{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{k}) \tilde{\psi}(\mathbf{k},\zeta) \tag{3.2.5}$$

Le vecteur d'état propre du micro-détecteur $\mid \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\zeta} \rangle = \mid U_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \xi \rangle \otimes \mid \tilde{\varphi}_\zeta \rangle$ est défini par la fonction

$$\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p};\zeta}(\mathbf{k}, \zeta') = \zeta^0 \tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{k}) \delta(\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}') \tag{3.2.6}$$

La dernière expression (3.2.5) de $\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p};\zeta)$ découle alors de la définition du produit scalaire dans $L^2(\mathbf{R}^3) \times L^2(C^{\mu,+})$

$$\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p};\zeta) = \langle \tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p};\zeta} \mid \tilde{\psi} \rangle = \int_{R^6} d\mathbf{k} \frac{d\boldsymbol{\zeta}'}{2\zeta'^0} \tilde{\xi}^*_{\mathbf{q},\mathbf{p};\zeta}(\mathbf{k}, \zeta') \tilde{\psi}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\zeta}') \tag{3.2.7}$$

L'égalité de ce produit scalaire avec celui de H_ξ, permet d'écrire la relation (3.2.5).

Pour définir les probabilités, considérons un ensemble Δ dans l'espace des phases externe Γ et un ensemble Δ' de l'espace des impulsions interne $C^{\mu,+}$. Définissons alors le système de covariance par l'expression formelle

$$E^\xi(\Delta \times \Delta') = \int_{\Delta,\Delta'} \mid \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\zeta} \rangle d\mathbf{q} d\mathbf{p} d\Omega(\zeta) \langle \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\zeta} \mid \tag{3.2.8}$$

Cette dernière équation est un produit tensoriel du système de covariance du mode externe et du système d'imprimitivité du mode interne

$$E^{\xi}(\Delta \times \Delta') = \int_{\Delta} \mid \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \rangle d\mathbf{q} d\mathbf{p} \langle \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \mid \otimes \int_{\Delta'} \mid \tilde{\varphi}_{\zeta} \rangle \frac{d\boldsymbol{\zeta}}{\zeta^0} \langle \tilde{\varphi}_{\zeta} \mid \tag{3.2.9}$$

La probabilité est la valeur moyenne de ce système de covariance

$$\begin{aligned} P^{\xi}_{\psi}(\Delta \times \Delta') &= \langle \psi \mid E^{\xi}(\Delta \times \Delta')\psi \rangle \\ &= \int_{\Delta,\Delta'} \langle \psi \mid \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\zeta} \rangle d\mathbf{q} d\mathbf{p} \frac{d\boldsymbol{\zeta}}{\zeta^0} \langle \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p};\zeta} \mid \psi \rangle \\ &= \int_{\Delta'} \frac{d\boldsymbol{\zeta}}{\zeta^0} \int_{\Delta} d\mathbf{q} d\mathbf{p} \mid \psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\zeta) \mid^2 \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

De la relation (3.2.9), on définit les composantes marginales ainsi:

$$\begin{aligned} E^{\xi}(\Delta) = E^{\xi}(\Delta \times C^{\mu,+}) &= \int_{\Delta} \mid \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \rangle d\mathbf{q} d\mathbf{p} \langle \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \mid \times \mathbf{1} \\ E^{\xi}(\Delta') = E^{\xi}(\Gamma \times \Delta') &= \mathbf{1} \times \int_{\Delta'} \mid \tilde{\varphi}_{\zeta} \rangle \frac{d\boldsymbol{\zeta}}{\zeta^0} \langle \tilde{\varphi}_{\zeta} \mid \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

La première est un système de covariance par rapport à $U(G) \equiv U(G) \otimes \mathbf{1}$ et la seconde est un système d'imprimitivité par rapport à $U'(G') \equiv \mathbf{1} \otimes U'(G')$. Les probabilités marginales correspondantes sont

$$\begin{aligned} P^{\xi}_{\psi}(\Delta \times C^{\mu,+}) = \langle \psi \mid E^{\xi}(\Delta \times R^3)\psi \rangle &= \int_{C^{\mu,+}} \frac{d\boldsymbol{\zeta}}{\zeta^0} \int_{\Delta} d\mathbf{q} d\mathbf{p} \mid \psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\zeta) \mid^2 \\ P^{\xi}_{\psi}(\Gamma \times \Delta') = \langle \psi \mid E^{\xi}(\Gamma \times \Delta')\psi \rangle &= \int_{\Delta'} \frac{d\boldsymbol{\zeta}}{\zeta^0} \int_{\Gamma} d\mathbf{q} d\mathbf{p} \mid \psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\zeta) \mid^2 \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

$P^{\xi}_{\psi}(\Delta \times C^{\mu,+})$ est la probabilité que le résultat de la mesure de la position et de l'impulsion stochastiques soit dans Δ, quelque soit l'impulsion interne. $P^{\xi}_{\psi}(\Gamma \times \Delta')$ est la probabilité que le mode interne ait une impulsion comprise dans Δ', sans que la mesure de la position et de l'impulsion du mode externe soit réalisée. Si l'on fait la mesure de la position du mode externe seulement ou de son impulsion seulement , on doit utiliser les deux systèmes de covariance suivants:

$$\begin{aligned} E^{\xi}(\hat{\Delta}) = E^{\xi}(\hat{\Delta} \times R^3 \times C^{\mu,+}) &= \int_{\hat{\Delta}} d\mathbf{q} \int_{R^3} d\mathbf{p} \mid \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \rangle \langle \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \mid \times \mathbf{1} \\ E^{\xi}(\hat{\Delta}) = E^{\xi}(R^3 \times \tilde{\Delta} \times C^{\mu,+}) &= \int_{R^3} d\mathbf{q} \int_{\tilde{\Delta}} d\mathbf{p} \mid \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \rangle \langle \xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \mid \times \mathbf{1} \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

La probabilité marginale que la mesure de la position stochastique donne une valeurs $\mathbf{q}$ dans $\hat{\Delta}$ est

$$\begin{aligned}\langle\psi \mid E^{\xi}(\hat{\Delta})\psi\rangle &= \int_{C^{\mu,+}} \frac{d\boldsymbol{\zeta}}{\zeta^0} \int_{\hat{\Delta}} d\mathbf{q} \int_{R^3} d\mathbf{p} \mid \psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\zeta) \mid^2 \\ &= \int_{\hat{\Delta}} d\mathbf{q} \int_{R^3} d\mathbf{x} \hat{\chi}^{\xi}_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) \int_{C^{\mu,+}} \frac{d\boldsymbol{\zeta}'}{\zeta^0} \mid \psi(\mathbf{x};\zeta) \mid^2\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

La probabilité marginale que la mesure de l'impulsion stochastique donne une valeurs $\mathbf{p}$ dans $\tilde{\Delta}$ est

$$\begin{aligned}\langle\psi \mid E^{\xi}(\tilde{\Delta})\psi\rangle &= \int_{C^{\mu,+}} \frac{d\boldsymbol{\zeta}}{\zeta^0} \int_{R^3} d\mathbf{q} \int_{\tilde{\Delta}} d\mathbf{p} \mid \psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\zeta) \mid^2 \\ &= \int_{\hat{\Delta}} d\mathbf{q} \int_{R^3} d\mathbf{k} \tilde{\chi}^{\xi}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}) \int_{C^{\mu,+}} \frac{d\boldsymbol{\zeta}'}{\zeta^0} \mid \psi(\mathbf{k};\zeta) \mid^2\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Comme dans la section précédente, on obtient un résultat identique à celui de la théorie stochastique, à l'exception du fait que la densité marginale $\int_{C^{\mu,+}} \frac{d\boldsymbol{\zeta}}{\zeta^0} \mid \psi(\mathbf{k};\zeta) \mid^2$d'une particule intrinsèquement étendue a été substituée à la densité de probabilité $\mid \psi(\mathbf{k}) \mid^2$.

3.3 Mode interne dans la représentation impulsion

Avant d'utiliser la théorie stochastique, considérons une particule étendue relativiste dans les représentations impulsion externe et impulsion interne non stochastiques. L'espace de Hilbert [**?**],

$$L^2(V_m^{\pm} \times C^{\mu,+}) \tag{3.3.1}$$

$$V_m^{\pm} = \left\{ k \ / k^0 = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2c^2} \right\} \tag{3.3.2}$$

$$C^{\mu,+} = \left\{ \zeta \ / \ \zeta^0 = +\sqrt{\boldsymbol{\zeta}^2 + \mu^2} \right\} \tag{3.3.3}$$

des fonctions de carré sommable $\varphi(k,\zeta)$ sur, respectivement, les espaces des impulsions externe et interne, est l'espace support de la représentation unitaire $\tilde{U}^{\mu}_m$ suivante

$$\left[\tilde{U}^{\mu}_m \varphi\right](k,\zeta) = \exp\left[\imath\left(\frac{a.k}{\hbar} + a'.\zeta\right)\right] \varphi\left(\Lambda^{-1}k, \Lambda'^{-1}\zeta\right) \tag{3.3.4}$$

$$\tilde{U}^{\mu}_m = \tilde{U}_m(a,\Lambda) \otimes \tilde{U}^{\mu}(a',\Lambda') \tag{3.3.5}$$

$\tilde{U}_m(P)$ et $\tilde{U}^\mu(P')$ sont des représentations irréductibles des groupes de Poincaré externe et interne. Les vecteurs de $L^2(V_m^\pm \times C^{\mu,+})$ peuvent décrire des états réels d'une particule étendue composée d'un mode quantique externe ponctuel de masse m et d'un mode interne de masse μ. Nous avons considéré les représentations non spinorielles des modes quantiques ponctuels.

Les probabilités pour que les modes externe et interne aient respectivement des impulsions k et ζ dans $\tilde{B}$ et $\tilde{B}'$, sont définies par

$$P_\varphi\left(\tilde{B}\times\tilde{B}'\right)=\left\langle\varphi|\mathbf{P}\left(\tilde{B}\times\tilde{B}'\right)\varphi'\right\rangle \tag{3.3.6}$$

Les opérateurs de projection [**?**],

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\tilde{B}\times\tilde{B}'\right)&=\int_{\tilde{B}\times\tilde{B}'}d\Omega(k)d\Omega(\zeta)\left|\tilde{\varphi}_{k,\zeta}\right\rangle\left\langle\tilde{\varphi}_{k,\zeta}\right|\\ \varphi_{k,\zeta}\left(k',\zeta'\right)&=\left(\tilde{\phi}_k\otimes\tilde{\varphi}_\zeta\right)\left(k',\zeta'\right)\\ &=k^0\zeta^0\delta\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right)\delta\left(\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\zeta}'\right)\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

définis sur les ensembles $\left(\tilde{B}\times\tilde{B}'\right)$, constituent un système d'imprimitivité par rapport à $\tilde{U}_m^\mu$

$$\tilde{U}_m^\mu\mathbf{P}\left(\tilde{B}\times\tilde{B}'\right)\left[\tilde{U}_m^\mu\right]^{-1}=\mathbf{P}\left(\left((a,\Lambda)\tilde{B}\times(a',\Lambda')\tilde{B}'\right)\right) \tag{3.3.8}$$

Puisque les probabilités ne peuvent être calculées dans la représentation configuration pour les particules ponctuelles localisées au sens strict, nous allons utiliser la théorie stochastique pour la localisation dans l'espace externe et la théorie des représentations induites pour l'espace interne.

Les états localisés (dans l'espace externe) correspondent alors à l'espace de Hilbert

$$H_{m,\eta}^\mu=L^2(\Sigma_{m,\eta}^\pm\times C^{\mu,+}) \tag{3.3.9}$$

des fonctions $\varphi\left(q,p,\zeta\right)$ définies sur l'espace des impulsions internes $C^{\mu,+}$ et sur l'espace des phases externe $\Sigma_m^\pm$.

La représentation globale $\bar{U}$ agit comme suit

$$\left(\bar{U}\varphi\right)(q,p,\zeta)=\exp\left[\imath a'.\zeta\right]\varphi\left(\Lambda^{-1}\left(q-a\right),\Lambda^{-1}p,\Lambda'^{-1}\zeta\right) \tag{3.3.10}$$

$$\bar{U}=U(a,\Lambda)\otimes\tilde{U}^\mu(a',\Lambda') \tag{3.3.11}$$

où $U(P)$ est une représentation de l'espace des phases externe irréductible, et $\tilde{U}^{\mu}(P')$ une représentation impulsion interne irréductible.

$$\langle\varphi|\varphi'\rangle = \int_{\Sigma_m^{\pm},C^{\mu,+}} d\Sigma(q,p)d\Omega\left(\zeta\right)\varphi^{*}(q,p,\zeta)\varphi'(q,p,\zeta) \tag{3.3.12}$$

$$d\Sigma(q,p) = p_k d\sigma^k\left(q\right)d\Omega\left(p\right) \tag{3.3.13}$$

Pour $q^0 = Const$ (lorsque σ est un hyperplan), l'élément de mesure $d\Sigma(q,p)$ est égale $d\mathbf{q}d\mathbf{p}$.

Nous pouvons définir des opérateurs positifs sur des régions $B \subset (\Sigma_m^{\pm} \times C^{\mu,+})$

$$E\left(B\right) = \int_B d\Sigma\left(q,p\right)d\Omega\left(\zeta\right)\left|\eta_{q,p,\zeta}\right\rangle\left\langle\eta_{q,p,\zeta}\right| \tag{3.3.14}$$

$$\eta_{q,p,\zeta} = \eta_{q,p}\otimes\tilde{\varphi}_{\zeta}$$

$$\tilde{\varphi}_{\zeta}\left(\zeta'\right) = \zeta^0\delta(\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\zeta}') \tag{3.3.15}$$

L'opérateur $E\left(B\right)$ peut être réécrit sous la forme d'un produit tensoriel

$$\begin{aligned} E\left(B\right) &= E_{\eta}\left(\breve{B}\right)\otimes E\left(\tilde{B}'\right), \qquad B = \left(\breve{B}\times\tilde{B}'\right)\subset\left(\Sigma_m^{\pm}\times C^{\mu,+}\right) \\ &= \int_{\breve{B}}\left|\eta_{q,p}\right\rangle d\Sigma\left(q,p\right)\left\langle\eta_{q,p}\right|\otimes\int_{\tilde{B}'}\left|\tilde{\varphi}_{\zeta}\right\rangle d\Omega\left(\zeta\right)\left\langle\tilde{\varphi}_{\zeta}\right| \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

Les $E\left(\tilde{B}\right)$ constituent un système d'imprimitivité par rapport à la représentation interne irréductible

$$\tilde{U}^{\mu}\left(g'\right)E\left(\tilde{B}'\right)\tilde{U}^{\mu}\left(g'^{-1}\right) = E\left(g'\tilde{B}'\right) \tag{3.3.17}$$

Et $E_{\eta}\left(\breve{B}\right)$ constituent un système de covariance de l'espace des phases stochastique externe par rapport à $U\left(a,\Lambda\right)$ seulement si on se limite au sous-groupe $\varepsilon(\sigma)$ des translations spatiales et des rotations qui laissent $\Sigma_m^{\pm} = \sigma\times V_m^{\pm}$ invariante.

$$U(a,R)E_{\eta}\left(\breve{B}\right)U^{-1}(a,R) = E_{\eta}(a+R\breve{B}),\ (a,R)\in\varepsilon(\sigma) \tag{3.3.18}$$

L'opérateur $E_{\eta}\left(\breve{B}\right)$ est déterminé par les vecteurs d'état propre $\eta_{q,p}$ décrivant une particule au point $\left(q,p,\chi_{q,p}\right)$ de l'espace des phases stochastique. Tandis que les états impropres φ_{ζ} sont interprétés comme des états localisés ponctuellement dans l'espace des impulsion internes. Ainsi, les vecteurs $\eta_{q,p,\zeta} = \eta_{q,p}\otimes\tilde{\varphi}_{\zeta}$ peuvent être interprétés comme les vecteurs d'états propres de particules étendues intrinsèquement et stochastiquement. En d'autres termes, les modes externes sont localisés au sens stochastique alors que les modes internes sont strictement localisés. Vérifions cette affirmation en étudiant les probabilité marginales.

3.3.1 Probabilité marginale pour l'impulsion

Calculons la probabilité marginale

$$P_\varphi(B) = \int_B d\Sigma(q,p)\, d\Omega(\zeta)\, |\varphi(q,p,\zeta)|^2 \tag{3.3.19}$$

pour que la mesure de l'impulsion stochastique donne une valeur $\mathbf{p} \in \tilde{B}$. Pour cela, l'intégration doit porter sur la région $B = \sigma_{q^0} \times \tilde{B} \times C^{\mu,+}$ où l'hypersurface σ_{q^0} s'identifie à $\mathbf{R}^3$ car elle est définie par $q^0 = Const$ (une constante correspondant à l'instant où l'on calcule la probabilité). L'utilisation de l'opérateur $\tilde{W}_\eta$:

$$\varphi(q,p,\zeta) = \left[\tilde{W}_\eta \tilde{\varphi}\right](q,p,\zeta) = \int_{V_m^\pm} \widetilde{\eta}^*_{q,p}(k')\widetilde{\varphi}(k',\zeta) d\Omega_m(k') \tag{3.3.20}$$

nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} P_\varphi(B) = &\int_{\mathbf{R}^3\times\tilde{B}\times C^{\mu,+}} d\Sigma(q,p)\, d\Omega(\zeta) \\ &\times \int_{V_m^\pm} \widetilde{\eta}^*_{q,p}(k')\widetilde{\varphi}(k',\zeta)d\Omega_m(k') \int_{V_m^\pm} \widetilde{\eta}_{q,p}(k)\widetilde{\varphi}^*(k,\zeta)d\Omega_m(k) \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

où l'élément d'intégration de l'espace des phases s'écrit

$$d\Sigma(q,p) = d\mathbf{q}d\mathbf{p} \tag{3.3.22}$$

et la fonction d'onde propre s'écrit

$$\begin{aligned} \widetilde{\eta}_{q,p}(k) &= \exp(\frac{i}{\hbar}q.k)\widetilde{\eta}(\Lambda_v^{-1}k) \\ q.k &= q^0k^0 - \mathbf{q}.\mathbf{k} \\ k^0 &= \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2c^2} \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

En permutant les intégrales, la probabilité marginale devient

$$\begin{aligned} P_\varphi(B) = &\int_{\tilde{B}\times C^{\mu,+}} d\mathbf{p}d\Omega(\zeta) \int_{V_m^\pm}\int_{V_m^\pm}\int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{q}\exp(\frac{i}{\hbar}q.(k-k'))\widetilde{\eta}(\Lambda_v^{-1}k') \\ &\times \widetilde{\varphi}^*(k',\zeta)\widetilde{\eta}^*(\Lambda_v^{-1}k)\widetilde{\varphi}(k,\zeta)d\Omega_m(k')d\Omega_m(k) \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

Utilisons maintenant la relation bien connue

$$\int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{q} \exp(\frac{i}{\hbar} q.(k-k')) = (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \exp(\frac{i}{\hbar} q^0.(k^0 - k'^0)) \tag{3.3.25}$$

L'intégration par rapport à $d\Omega_m(k') = \frac{d\mathbf{k}'}{2k'^0}$ donne alors

$$P_\varphi (B) = (2\pi\hbar)^3 \int_{\tilde{B}\times C^{\mu,+}} d\mathbf{p} d\Omega (\zeta) \int_{V_m^\pm} \left|\widetilde{\eta}(\Lambda_v^{-1} k)\right|^2 \left|\widetilde{\varphi}(k,\zeta)\right|^2 \frac{d\Omega_m(k)}{2k^0} \tag{3.3.26}$$

Ce dernier résultat est analogue à celui de la mécanique quantique stochastique relativiste car on peut le réécrire sous la forme

$$P_\varphi (B) = (2\pi\hbar)^3 \int_{\tilde{B}} d\mathbf{p} \int_{V_m^\pm} \frac{d\Omega_m(k)}{2k^0} \left|\widetilde{\eta}(p.k)\right|^2 \int_{C^{\mu,+}} \left|\widetilde{\varphi}(k,\zeta)\right|^2 d\Omega (\zeta) \tag{3.3.27}$$

Nous constatons que la seule différence est la présence de l'intégrale $\int_{C^{\mu,+}} \left|\widetilde{\varphi}(k,\zeta)\right|^2 d\Omega (\zeta)$ au lieu du carré $\left|\widetilde{\varphi}(k)\right|^2$. Si de plus, la fonction d'onde de la particule étendue, $\widetilde{\varphi}(k,\zeta) = \widetilde{\varphi}(k)u(\zeta)$, se factorise en une partie externe $\widetilde{\varphi}(k)$ et une partie interne $u(\zeta)$, la probabilité marginale de la particule étendue ne différera de celle de la mécanique quantique stochastique que par un facteur de normalisation.

3.3.2 Probabilité marginale pour la configuration

Calculons la probabilité marginale

$$P_\varphi (B) = \int_B d\Sigma (q,p) \, d\Omega (\zeta) \left|\varphi (q,p,\zeta)\right|^2 \tag{3.3.28}$$

Pour $q^0 = Const$, l'intégration doit porter sur la région $B = \hat{B} \times V_m^\pm \times C^{\mu,+}$ pour que la mesure de la position stochastique donne une valeur $\mathbf{q} \in \hat{B}$. De la même façon que précédemment, en utilisant l'opérateur $\tilde{W}_\eta$

$$\varphi (q,p,\zeta) = \left[\tilde{W}_\eta \tilde{\varphi}\right] (q,p,\zeta) = \int_{V_m^\pm} \widetilde{\eta}^*_{q,p}(k')\widetilde{\varphi}(k',\zeta) d\Omega_m(k') \tag{3.3.29}$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} P_\varphi (B) = & \int_{\mathbf{R}^3\times\hat{B}\times C^{\mu,+}} d\Sigma (q,p) \, d\Omega (\zeta) \\ & \times \int_{V_m^\pm} \widetilde{\eta}^*_{q,p}(k')\widetilde{\varphi}(k',\zeta) d\Omega_m(k') \int_{V_m^\pm} \widetilde{\eta}_{q,p}(k)\widetilde{\varphi}^*(k,\zeta) d\Omega_m(k) \end{aligned} \tag{3.3.30}$$

En permutant les intégrales, la probabilité marginale devient

$$P_{\varphi}(B) = \int_{\hat{B}\times C^{\mu,+}} d\mathbf{q}d\Omega(\zeta) \int_{V_m^{\pm}} d\Omega_m(k') \int_{V_m^{\pm}} d\Omega_m(k) \int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{p}\exp(\frac{i}{\hbar}q.(k-k')) \tag{3.3.31}$$
$$\times \widetilde{\eta}^*(\Lambda_v^{-1}k')\widetilde{\eta}(\Lambda_v^{-1}k)\widetilde{\varphi}^*(k,\zeta)\widetilde{\varphi}(k',\zeta)$$

L'intégration sur $\mathbf{p}$ ne peut pas se faire à cause du terme $\widetilde{\eta}^*(\Lambda_v^{-1}k')\widetilde{\eta}(\Lambda_v^{-1}k)$ où $p = mv$. Malgré cette impossibilité de localisation d'une particule relativiste, on peut montrer que $|\varphi(q,p,\zeta)|^2$ possède en effet une interprétation physique quand on la compare à son homologue non relativiste en suivant les mêmes étapes que celles de la comparaison de $\varphi(q,p)$ et $\psi(\mathbf{q},\mathbf{p})$. En effet, l'identification [**?**]

$$\tilde{\eta}(k) = \eta(mck^0) = (2mc)^{1/2}\widetilde{\xi}(\mathbf{k}),\ \ k = (k^0,\mathbf{k}) \in V_m^{\pm} \tag{3.3.32}$$

permet d'écrire

$$(W_\eta\widetilde{\varphi})(q,p,\zeta) = \int_{V_m^{\pm}} \exp(-\frac{i}{\hbar}q.k)\eta^*(p.k)\widetilde{\varphi}(k,\zeta)d\Omega_m(k) \tag{3.3.33}$$

dans le repère de repos stochastique du mode externe

$$\mathbf{p} = \mathbf{0} \Rightarrow p^0 = \pm mc \tag{3.3.34}$$

sous la forme

$$(W_\eta\widetilde{\varphi})(q,p,\zeta)\ |_{\mathbf{p}=\mathbf{0}} = \int_{V_m^{\pm}} \exp(-\frac{i}{\hbar}q.k)\eta^*(p.k)\widetilde{\varphi}(k,\zeta)d\Omega_m(k) \tag{3.3.35}$$

Ainsi, pour $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ on a

$$p\cdot k = p^0k^0 - \mathbf{p}.\mathbf{k} = p^0k^0 = \pm mck^0 \tag{3.3.36}$$

donc

$$\eta^*(p.k) = \eta^*(mck^0) = (2mc)^{1/2}\tilde{\xi}^*(\mathbf{k}) \tag{3.3.37}$$

De cette égalité on obtient

$$(W_\eta\widetilde{\varphi})(q,p,\zeta)\ |_{\mathbf{p}=\mathbf{0}} = (2mc)^{1/2}\int_{V_m^{\pm}} \exp(-\frac{i}{\hbar}q.k)\tilde{\xi}^*(\mathbf{k})\widetilde{\varphi}(k,\zeta)d\Omega_m(k) \tag{3.3.38}$$
$$= (2mc)\int_{V_m^{\pm}} \exp(\frac{i}{\hbar}\mathbf{q}.\mathbf{k})\tilde{\xi}^*(\mathbf{k})\exp(-\frac{i}{\hbar}q^0k^0)\widetilde{\psi}(\mathbf{k},\zeta)\frac{d\mathbf{k}}{\pm 2k^0}$$

La dernière égalité est une conséquence de l'identification

$$\tilde{\varphi}(k,\zeta) = (2mc)^{1/2}\tilde{\psi}(\mathbf{k},\zeta), \qquad k^0 = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2c^2} \tag{3.3.39}$$

Or, la fonction d'onde stochastique non relativiste s'écrit

$$\psi(\mathbf{q},\mathbf{p},t;\zeta) = \left(W_\xi\widetilde{\psi}\right)(\mathbf{q},\mathbf{p},t;\zeta) = \int_{\mathbf{R}^3} \exp(\frac{i}{\hbar}\mathbf{q}.\mathbf{k})\tilde{\xi}^*(\mathbf{k}-\mathbf{p})\tilde{\psi}(\mathbf{k},t;\zeta)d\mathbf{k} \tag{3.3.40}$$

de sorte que pour $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, on ait

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{q},\mathbf{p},t;\zeta)\mid_{\mathbf{p=0}} &= \left(W_\xi \exp(-\frac{i}{\hbar}\tilde{H}_0 t)\tilde{\psi}\right)(\mathbf{q},\mathbf{p};\zeta)\mid_{\mathbf{p=0}} \\ &= \int_{\mathbf{R}^3} \exp(\frac{i}{\hbar}\mathbf{q}.\mathbf{k})\tilde{\xi}^*(\mathbf{k})\left(\exp(-\frac{i}{\hbar}\tilde{H}_0 t)\tilde{\psi}\right)(\mathbf{k};\zeta)d\mathbf{k} \\ &= \int_{\mathbf{R}^3} \exp(\frac{i}{\hbar}\mathbf{q}.\mathbf{k})\tilde{\xi}^*(\mathbf{k})\exp(-\frac{i}{\hbar}\frac{\mathbf{k}^2}{2m}t)\tilde{\psi}(\mathbf{k};\zeta)d\mathbf{k} \end{aligned} \tag{3.3.41}$$

Pour $q^0 = ct$, si $\left|\tilde{\psi}(\mathbf{k};\zeta)\right|$ est non nulle uniquement dans un voisinage de $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ où

$$\pm k^0 = (\mathbf{k}^2 + m^2c^2)^{1/2} \approx mc\left(1 + \frac{\mathbf{k}^2}{2m^2c^2}\right) \tag{3.3.42}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(q,p,\zeta)\mid_{\mathbf{p=0}} \approx \exp -\frac{i}{\hbar}tmc^2 \times \\ \int_{\mathbf{R}^3} \exp(\frac{i}{\hbar}\mathbf{q}.\mathbf{k})\tilde{\xi}^*(\mathbf{k})\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{\mathbf{k}^2 t}{2m}\right)\widetilde{\psi}(\mathbf{k},\zeta)\left(1 - \frac{\mathbf{k}^2}{2m^2c^2}\right)d\mathbf{k} \end{aligned} \tag{3.3.43}$$

En remarquant que $\mathbf{k}^2\exp(\frac{i}{\hbar}\mathbf{q}.\mathbf{k}) = -\hbar^2\nabla^2_{\mathbf{q}}\exp(\frac{i}{\hbar}\mathbf{q}.\mathbf{k})$, puis en faisant sortir $\left(\hbar^2\nabla^2_{\mathbf{q}}/2m^2c^2\right)$ de l'intégrale, la comparaison de (3.3.38) et (3.3.41), nous permet d'écrire

$$\varphi(q,p,\zeta)\mid_{\mathbf{p=0}} \approx \left[\psi(\mathbf{q},\mathbf{p},t;\zeta)\mid_{\mathbf{p=0}} + \frac{\mathbf{P}^2}{2m^2c^2}\psi(\mathbf{q},\mathbf{p},t;\zeta)\right]\exp -\frac{i}{\hbar}tmc^2 \tag{3.3.44}$$

$$\mathbf{P} = -i\hbar\nabla_{\mathbf{q}} \quad \text{(représentation espace des phases)}$$

Les densités de probabilités stochastiques, relativiste et non relativiste, sont alors liées par

$$|\varphi(q,p;\zeta)|^2 = |\psi(\mathbf{q},\mathbf{p},t;\zeta)|^2 + O\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2c^2}\right) \tag{3.3.45}$$

On retrouve ainsi une relation analogue à celle de la théorie stochastique. Comme la validité de la signification physique de $\psi(\mathbf{q},\mathbf{p};\zeta)$ a été vérifiée dans la section précédente, la validité de l'interprétation de $|\varphi(q, p; \zeta)|^2$ comme densité de probabilité, au point stochastique $(q, p; \chi_{q,p})$ et au point d'impulsion interne ζ, se trouve ainsi confirmée. Rappelons que l'expression de $\chi_{q,p}$ est donnée par la relation (2.4.21) et que cette interprétation est approximative et d'autant meilleure que la masse m est grande.

3.4 Mode interne dans la représentation configuration

Nous allons définir les états localisés correspondant à l'espace de Hilbert

$$H_{m,\eta} = L^2(\Sigma^{\pm}_{m,\eta}) \times L^2(M') \tag{3.4.1}$$

Ces derniers sont décrits par les fonctions $\psi(q, p, \xi)$ définies sur l'espace des phases externe $\Sigma^{\pm}_{m}$ et sur l'espace-temps interne de Minkowski M .

Comme on considère une symétrie composée de deux groupes de Poincaré, on peut définir deux représentations respectives agissant sur $H_{m,\eta}$. La représentation espace des phases $U(P)$ agit dans le sous-espace externe $L^2(\Sigma^{\pm}_{m,\eta})$ et la représentation $\hat{U}(P')$ agit dans le sous-espace interne $L^2(M')$.

Le produit direct des représentations $\bar{U} = U(a, \Lambda) \otimes \hat{U}(a', \Lambda')$ agit sur ces fonctions $\psi(q, p, \xi)$

$$\left(\bar{U}\psi\right)(q, p, \xi) = \psi\left(\Lambda^{-1}(q - a), \Lambda^{-1}p, \Lambda'^{-1}(\xi - a')\right) \tag{3.4.2}$$

de telle manière que la représentation de l'espace des phases $U(a, \Lambda)$ transforme les variables externes (q, p) et la représentation configuration induite $\hat{U}(a', \Lambda')$ transforme la variable interne ξ. La première représentation est irréductible et la seconde est réductible. La représentation $\bar{U}(a, \Lambda)$ est unitaire par rapport au produit scalaire suivant :

$$\langle\psi|\psi'\rangle = \int_{\Sigma^{\pm}_{m}, M'} d\Sigma(q, p) d\xi \psi^*(q, p, \xi)\psi'(q, p, \xi) \tag{3.4.3}$$

où la mesure invariante $d\Sigma(q, p) = d\mathbf{q}d\mathbf{p}$ pour les hypersurfaces σ définies par $q^0 = Const.$

On définit les fonctions d'ondes propres suivantes

$$\eta_{q,p;\xi}(k, \xi') = \tilde{\eta}_{q,p}(k)\,\psi_{\xi}(\xi') = \tilde{\eta}_{q,p}(k)\,\delta(\xi' - \xi) \tag{3.4.4}$$

Le choix de la forme de $\eta_{q,p;\xi}(k,\xi')$ est en accord avec le fait que la localisation dans l'espace externe est stochastique alors qu'elle reste ponctuelle dans l'espace interne. Elle permet le passage de $L^2(V_m^{\pm}, M')$ dont le produit scalaire est

$$\langle\psi|\psi'\rangle = \int_{V_m^{\pm},M'} d\Omega(k)\, d\xi \psi^*(k,\xi)\psi'(k,\xi) \tag{3.4.5}$$

à $H_{m,\eta}$. La fonction d'onde d'une particule étendue peut alors être écrite sous la forme

$$\psi(q,p,\xi) = \langle\eta_{q,p;\xi}|\psi\rangle = \int_{V_m^{\pm}} \tilde{\eta}^*_{q,p}(k)\,\psi(k,\xi)\, d\Omega(k) \tag{3.4.6}$$

Un système de covariance par rapport a $U(P)\times\hat{U}(P')$ peut être défini pour les régions $B = \left(\breve{B}\times\hat{B}'\right) \subset (\Sigma_m^{\pm}\times M')$

$$E(B) = E\left(\breve{B}\right)\otimes P\left(\tilde{B}'\right) \tag{3.4.7}$$

$$E\left(\breve{B}\times B'\right) = \int_{\breve{B},\hat{B}'} d\Sigma(q,p)\, d\xi \left|\eta_{q,p;\xi}\right\rangle\left\langle\eta_{q,p;\xi}\right| \tag{3.4.8}$$

En utilisant la relation $\left|\eta_{q,p;\xi}\right\rangle = \left|\eta_{q,p}\right\rangle\otimes\left|\psi_{\xi}\right\rangle$, on peut réécrire (3.4.8) sous forme de produit tensoriel d'un système de covariance du mode externe et d'un système d'imprimitivité qui déterminent la probabilité de présence dans une région B

$$P_{\varphi}(B) = \int_B d\Sigma(q,p)\, d\xi \left|\psi(q,p,\xi)\right|^2 \tag{3.4.9}$$

3.4.1 Probabilité marginale pour l'impulsion

Pour mesurer une impulsion stochastique $p\in\tilde{B}$, on intègre sur la région $B = \sigma_{q^0}\times\tilde{B}\times M'$ où l'hypersurface σ_{q^0} s'identifie à $\mathbf{R}^3$ pour $q^0 = Const$

$$\begin{aligned} P_{\psi}\left(\tilde{B}\right) &= \left\langle\psi|E\left(\mathbf{R}^3\times\tilde{B}\times M'\right)\psi\right\rangle \\ &= \int_{\mathbf{R}^3\times\tilde{B}\times M'} d\mathbf{q}d\mathbf{p}d\xi|\psi(q,p,\xi)|^2 \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

En utilisant (3.4.6), cette probabilité devient

$$\begin{aligned} P_{\psi}\left(\tilde{B}\right) = &\int_{\tilde{B}\times M'} d\mathbf{p}d\xi \int_{V_m^{\pm}} d\Omega_m(k') \int_{V_m^{\pm}} d\Omega_m(k) \int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{q}\exp\left(\frac{i}{\hbar}q.(k-k')\right) \\ &\times \widetilde{\eta}(\Lambda_v^{-1}k')\widetilde{\eta}^*(\Lambda_v^{-1}k)\psi^*(k',\xi)\psi(k,\xi) \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

L'intégration sur $d\mathbf{q}$ puis $d\Omega_m(k')$ simplifie d'avantage l'expression précédente

$$P_\psi\left(\tilde{B}\right) = (2\pi\hbar)^3 \int_{\tilde{B}} d\mathbf{p} \int_{V_m^\pm} \frac{d\Omega_m(k)}{2k^0} \left|\widetilde{\eta}(p.k)\right|^2 \int_{M'} |\psi(k,\xi)|^2 \, d\xi \tag{3.4.12}$$

Cette expression est analogue à la probabilité marginale de la théorie stochastique dans laquelle la densité $|\tilde{\varphi}(k)|^2$ est remplacée par l'intégrale $\int_{M'} |\psi(k,\xi)|^2 \, d\xi$. Cependant, et contrairement à l'intégrale $\int_{C^+} |\tilde{\varphi}(k,\zeta)|^2 \, d\Omega(\zeta)$ qui possède une interprétation probabiliste habituelle, l'intégrale $\int_{M'} |\psi(k,\xi)|^2 \, d\xi$ puise son interprétation de la méthode de quantification par les représentations induites [**?**, 27]. La densité de probabilité que le mode externe ait l'impulsion k et que le mode interne soit localisé au point ξ est donnée par $|\psi(k,\xi)|^2$. Dans ce cas, le mode interne peut être réel ou virtuel, c'est-à-dire qu'il peut correspondre à une représentation irréductible ou réductible du groupe de Poincaré interne P'. L'intégrale $\int_{M'} |\psi(k,\xi)|^2 \, d\xi$ s'interprète alors comme une somme sur toutes les alternatives au sens de Feynman [41].

3.4.2 Probabilité marginale pour la configuration

Dans ce cas, on doit choisir une région $B = \hat{B} \times V_m^\pm \times M'$ où $\hat{B} \subset \sigma_{q^0}$. La probabilité est

$$\begin{aligned} P_\psi\left(\tilde{B}\right) &= \left\langle \psi | E\left(\hat{B} \times V_m^\pm \times M'\right) \psi \right\rangle \\ &= \int_{\hat{B} \times V_m^\pm \times M'} d\mathbf{q} d\mathbf{p} d\xi |\psi\left(q,p,\xi\right)|^2 \end{aligned} \tag{3.4.13}$$

Comme dans le cas où le mode interne est décrit par la représentation impulsion, l'utilisation (3.4.6) donne expression impossible à intégrer. On peut reprendre la même procédure de comparaison avec le cas non relativiste pour justifier l'interprétation de $|\psi\left(q,p,\xi\right)|^2$ comme densité de probabilité de localisation stochastique (approximative) du mode externe au point $\left(q,p;\chi_{q,p}\right)$ et de localisation précise du mode interne (réel ou virtuel) au point ξ.

3.5 Propagateur

Le produit tensoriel des composantes irréductibles de U et $\hat{U}$ peut être obtenu par l'opérateur de commutation [?]

$$I^{\mu}_{\eta} = (W_{\eta} \otimes I^{\mu}) \tag{3.5.1}$$
$$I^{\mu}_{\eta} : L^2(V^{\pm}_m \times C^{\mu,+}) \to \left(L^2(\Sigma^{\pm}_{m,\eta}) \otimes \hat{H}^{\mu}\right) \subset L^2(\Sigma^{\pm}_m, M')$$
$$\varphi(k,\zeta) \longmapsto \left[I^{\mu}_{\eta}\varphi\right](q,p,\xi)$$

L'application W_η est l'opérateur unitaire de commutation de $L^2(V^{\pm}_m)$ vers le sous-espace $L^2(\Sigma^{\pm}_{m,\eta}) \subset L^2(\Sigma^{\pm}_m)$. La commutation signifie que [?, ?]

$$W_{\eta}\tilde{U}_m(a,\Lambda) = U(a,\Lambda)\, W_{\eta} \tag{3.5.2}$$

L'opérateur I^{μ} commute les représentations induites agissant dans $L^2(C^{\mu,+})$ et $\hat{H}^{\mu} = I^{\mu}L^2(M') \subset \hat{H} = L^2(M')$

$$I^{\mu}\tilde{U}^{\mu}(a',\Lambda') = \hat{U}^{\mu}(a',\Lambda')\, I^{\mu} \tag{3.5.3}$$

où $\hat{U}^{\mu}(a',\Lambda')$ est la restriction de $\hat{U}(a',\Lambda')$ au sous-espace $\hat{H}^{\mu}$. Cette sous-représentation est irréductible.

Les deux opérateurs W_η et I^{μ} sont des transformations intégrales [?, ?]. Par conséquent, l'opérateur I^{μ}_{η} agit de la façon suivante [?]:

$$\left[I^{\mu}_{\eta}\varphi\right](q,p,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{V^{\pm}_m, C^{\mu,+}} \exp\left[-\imath\left(\frac{k}{\hbar}.q + \zeta.\xi\right)\right] \times$$
$$\mathring{\eta}(k.p)\,\varphi^{\mu}_{m}(p,\zeta)d\Omega(k)d\Omega(\zeta). \tag{3.5.4}$$

Rappelons que la fonction $\mathring{\eta}$, reliée au vecteur d'état propre $\tilde{\eta}(k)$, est réelle et normalisée

$$\mathring{\eta}\left(k^0\right) = \tilde{\eta}(k) \Leftrightarrow \mathring{\eta}(p.k) = \tilde{\eta}\left(\Lambda^{-1}_p k\right) \tag{3.5.5}$$
$$\int_{k\in V^{\pm}_m} |\tilde{\eta}(k)|^2 d\mathbf{k} = 2mc\,(2\pi\hbar)^{-3} \Leftrightarrow \int_{p\in V^{\pm}_m} |\mathring{\eta}(k.p)|^2 d\mathbf{p} = \pm 2k^0\,(2\pi\hbar)^{-3}.$$

L'opérateur de projection $\mathbf{P}_\eta$ de $L^2(\Sigma^{\pm}_m)$ sur $L^2(\Sigma^{\pm}_{m,\eta})$ est déterminé par les vecteurs d'état propre $\eta_{q,p}$

$$\mathbf{P}_{\eta} = \int_{\Sigma^{\pm}_m} \left|\eta_{q,p}\right\rangle d\Sigma(q,p)\left\langle\eta_{q,p}\right| \tag{3.5.6}$$

La famille $\left\{\eta_{q,p}/\left(q,p\right)\in\Sigma_m^{\pm}\right\}$ constitue une résolution de l'identité dans $L^2(\Sigma_{m,\eta}^{\pm})$ alors que les états impropres $\psi_\xi(\xi')=\delta(\xi-\xi')$ produisent une résolution de l'identité dans $\hat{H}$. On peut voir ces derniers comme des états ponctuels localisés dans l'espace-temps internes. Ainsi, les vecteurs $\eta_{q,p,\xi}=\eta_{q,p}\otimes\psi_\xi$ sont des états propres de particules dont les modes externes sont localisés stochastiquement alors que les modes internes sont localisés au sens strict.

Le second opérateur de commutation peut être défini par [**?**]

$$J_\eta^\mu=\left(W_\eta^{-1}\otimes J^\mu\right) \tag{3.5.7}$$

$$J_\eta^\mu:L^2(\Sigma_{m,\eta}^{\pm}\times M')\to L^2(V_m^{\pm}\times C^{\mu,+})$$

$$\varphi\left(q,p,\zeta\right)\longmapsto\left[J_\eta^\mu\varphi\right]\left(k,\zeta\right)$$

Sa forme intégrale est

$$\varphi(k,\zeta)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\Sigma_m^{\pm},M'}d\Sigma(q',p')d\xi'\exp\left[\imath\left(\frac{k}{\hbar}.q'+\xi'.\zeta\right)\right]\mathring{\eta}\left(k.p'\right)\varphi\left(q',p',\xi'\right) \tag{3.5.8}$$

La combinaison des opérateurs I_η^μ et J_η^μ conduit à la détermination du propagateur. En effet, l'opérateur

$$K_\eta^\mu=I_\eta^\mu J_\eta^\mu=\left(K_\eta\otimes\Pi^\mu\right) \tag{3.5.9}$$

réalise la transformation suivante

$$K_\eta^\mu:L^2(\Sigma_{m,\eta}^{\pm}\times M')\to L^2(\Sigma_{m,\eta}^{\pm})\otimes\hat{H}^\mu \tag{3.5.10}$$

$$\varphi\left(q',p',\xi'\right)\longmapsto\left[K_\eta^\mu\Psi\right]\left(q,p,\xi\right).$$

dont la forme intégrale est

$$\left[K_\eta^\mu\varphi\right]\left(q,p,\xi\right)=\int d\Sigma(q',p')d\xi' K_\eta^\mu\left(q,p,\xi;q',p',\xi'\right)\varphi\left(q',p',\xi'\right) \tag{3.5.11}$$

$$K_\eta^\mu\left(q,p,\xi;q',p',\xi'\right)=\int_{V_m^{\pm},}\exp\left[-\imath\frac{k}{\hbar}.\left(q-q'\right)\right]\mathring{\eta}\left(k.p\right)\mathring{\eta}\left(k.p'\right)d\Omega(k) \tag{3.5.12}$$

$$\times\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{C^{\mu,+}}d\Omega(\zeta)\exp\left[-\imath\zeta.\left(\xi-\xi'\right)\right] \tag{3.5.13}$$

Par conséquent, le noyau

$$K_\eta^\mu\left(q,p,\xi;q',p',\xi'\right)=K_\eta\left(q,p;q',p'\right)\Pi^\mu\left(\xi,\xi'\right) \tag{3.5.14}$$

est le produit du propagateur stochastique externe

$$K_\eta\left(q,p;q',p'\right)=\int_{V_m^+}d\Omega(k)\tilde{\eta}^*_{q,p}\left(k\right)\tilde{\eta}_{q',p'}\left(k\right) \tag{3.5.15}$$

et du propagateur ponctuel interne

$$\Pi^\mu\left(\xi-\xi'\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^3}\int_{C^{\mu,+}}d\Omega\left(\zeta\right)\exp-\imath\zeta.\left(\xi-\xi'\right) \tag{3.5.16}$$

Nous pouvons maintenant écrire le propagateur de la particule étendue comme une amplitude de transition entre les états propres localisés

$$K^\mu_\eta\left(q,p,\xi;q',p',\xi'\right)=\left\langle\eta_{q,p,\xi}|K_\eta\eta_{q',p',\xi'}\right\rangle=\left\langle\eta_{q,p}|\eta_{q',p'}\right\rangle\left\langle\psi_\xi|\Pi^\mu\psi_{\xi'}\right\rangle$$

$$K_\eta\left(q,p;q',p'\right)=\left\langle\eta_{q,p}|\eta_{q',p'}\right\rangle \tag{3.5.17}$$

$$\Pi^\mu\left(\xi-\xi'\right)=\left\langle\psi_\xi|\Pi^\mu\psi_{\xi'}\right\rangle \tag{3.5.18}$$

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons pu améliorer le modèle de la particule étendue relativiste en attribuant à la particule une extension stochastique et intrinsèque. Nous n'avons considéré que des spins nuls. Nous avons commencé par présenter la mécanique quantique relativiste pour une particule scalaire libre. Nous avons étudié la représentation espace des phases du groupe de Poincaré. Dans un premier temps, nous avons présenté le groupe de Poincaré dont les représentations unitaires et irréductibles décrivent des particules de masse m et de spin s. En étudiant ces représentations dans l'espace impulsion et configuration, nous avons abouti à des incohérences dues à l'incompatibilité de la notion de ponctualité et le principe de causalité relativiste [**?**]. Puis, nous avons résumé la Mécanique Quantique Stochastique Relativiste qui se propose comme solution à ces inconsistances. Ainsi, nous avons construit les espaces de Hilbert des états possibles de cette particule au moyen des états propres $|\eta\rangle$ du micro-détecteur, et leurs représentations susceptibles de décrire des particules élémentaires. En effet, l'espace de Hilbert des fonctions d'onde dans l'espace des phases est décomposable en sous-espaces irréductibles H^{η}. La représentation $U(a, \Lambda)$ qui agit dans cet espace se décompose en sous-représentations irréductibles U^{η}. Nous avons défini de nouveaux opérateurs à valeurs positives (POV) qui donnent des interprétations probabilistes et qui constituent un système de covariance avec la représentation U^{η}, ces POV expriment la localisation stochastique dans l'espace des phases. A la limite ponctuelle, nous avons retrouvé les probabilités de la mécanique quantique relativiste conventionnelle dans la représentation impulsion. La probabilité marginale pour la position n'a pas, une telle limite. La comparaison entre les carrés des fonction d'onde stochastique relativiste et non relativiste a permis d'attribuer au cas relativiste l'interprétation de densité de probabilité stochastique approximative. En exprimant la probabilité, nous avons présenté la fonctions de confiance $\chi_{q,p}(\mathbf{x},\mathbf{k})$ et son interprétation physique. Nous avons donné aussi l'expression du propagateur relativiste libre qui décrit l'évolution de ce type de particule.

Le courant de probabilité a été défini ainsi que l'équation de continuité qu'il satisfait. Notons qu'à la limite, ce courant de la théorie stochastique ne tend pas vers le courant problématique de la mécanique quantique relativiste conventionnelle, ce qui nous a permis de conclure que la théorie stochastique peut être une amélioration de la mécanique quantique relativiste conventionnelle.

Notre propre contribution décrit la particule intrinsèquement et stochastiquement étendue. Pour cette particule, nous avons repris les mêmes raisonnements et calculs que ceux de la théorie stochastique mais avec un mode interne ponctuel en plus. Dans le premier cas, nous avons pris le mode interne dans la représentation impulsion et nous avons considéré deux situations pour le mode externe stochastique. Commençons par la première situation où nous avons calculé la probabilité marginale pour l'impulsion externe. Le vecteur d'état propre stochastique qui décrit le micro-détecteur possède une partie externe stochastique et une partie interne ponctuelle. Aussi, le système de covariance est le produit tensoriel du système de covariance dans l'espace des phases externe, par le système d'imprimitivité de l'espace des impulsion interne. On déduit des résultats que la seule différence avec la mécanique quantique stochastique relativiste est la présence de la dernière intégrale $\int_{C^{\mu,+}} |\widetilde{\varphi}(k,\zeta)|^2 \, d\Omega\,(\zeta)$ au lieu du carré $|\widetilde{\varphi}(k)|^2$.

Dans la deuxième situation, nous avons calculé la probabilité marginale pour la position externe. Comme pour la théorie stochastique, cette probabilité n'existe pas mais la densité relativiste $|\varphi\,(q,p;\zeta)|^2$ tend vers la densité non relativiste $|\psi\,(\mathbf{q},\mathbf{p},t;\zeta)|^2$ que nous avons étudiée et qui possède une interprétation acceptable. Par conséquent, $|\varphi\,(q,p;\zeta)|^2$ peut être interprété comme densité de probabilité, au point stochastique $\left(q,p;\chi_{q,p}\right)$ et au point d'impulsion interne ζ. Cette interprétation est approximative et d'autant meilleure que la masse m est grande.

Pour le deuxième cas où le mode interne a été étudié dans la représentation configuration, les systèmes de covariance ont été écrit sous forme de produit tensoriel de la partie externe stochastique relativiste et de la partie interne ponctuelle relativiste. La probabilité marginale pour l'impulsion externe est analogue à la probabilité marginale de la théorie stochastique car seulement la densité $|\tilde{\varphi}(k)|^2$ est remplacée par l'intégrale $\int_{M'} |\psi(k,\xi)|^2 \, d\xi$. Cette dernière intégrale possède une interprétation probabiliste non conventionnelle mais introduite dans la méthode des représentations induites (La densité de probabilité que le mode externe ait l'impulsion k et que le mode interne se trouve au point ξ est donnée par $|\psi(k,\xi)|^2$. Dans ce cas, le mode interne peut être réel ou virtuel, c'est-à-dire qu'il peut correspondre à une représentation irréductible ou réductible du groupe de Poincaré interne P'). L'intégrale $\int_{M'} |\psi(k,\xi)|^2 \, d\xi$ s'interprète alors comme une somme sur toutes les alternatives au sens de Feynman [41].

La dernière situation correspond aux calcul de la probabilité marginale pour la position externe avec un mode interne dans la représentation configuration. L'expression obtenue est impossible à intégrer. Nous en avons conclu que $|\psi(q,p,\xi)|^2$ s'interprète comme densité de probabilité de localisation stochastique (approximative) du mode externe au point $\left(q,p;\chi_{q,p}\right)$ et de localisation précise du mode interne (réel ou virtuel) au point ξ.

Nous avons terminé notre travail par le calcul du propagateur libre qui est le produit tensoriel d'un propagateur stochastique externe par un propagateur interne conventionnel.

Tous ces résultats sont réconfortant et incitent à essayer de concrétiser ce modèle pour un hadron où les modes internes correspondraient aux quarks. Les courants n'ont pas été étudiés et méritent un travail séparé.

Bibliographie

[1] L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie Quantique Relativiste* Tome I, Mir, Moscou (1972).

[2] W. Greiner, B.Müller, *Mécanique Qantique symétries,* Springer, Berlin (1999).

[3] M.Gell-Mann, Phys. Rev. **125**, 1067 (1962).

[4] B. Delamotte, *Un Soupçon de Théorie des Groupes : Groupe des Rotations et Groupe de Poincaré* , Notes de cours de 3e cycle de l'Ecole doctorale de physique de la région parisienne, http://www.lpthe.jussieu.fr/DEA/ (date de publication 1996)

[5] N. Nélipa, *Physique des Particules Elémentaires*, Mir, Moscou (1981)

[6] G.C. Hegerfeldt, Phys. Rev. **D10**, 3320 (1974)

[7] E. Prugovečki, *Stochastic Quantum Mechanics and Quantum Space-Time*, Reidel, Dordrecht (1984).

[8] J. L. Destouches, *Corpuscules et Champs en Théorie Fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris (1958).

[9] J.L. Destouches, *La Quantification en Théorie Fonctionnelle des Corpuscules*, Gauthier-Villars, Paris (1956).

[10] M. Hachemane, *Conception Géométro-Différentielle de la Particule Etendue et sa Quantification par la Méthode des Représentations Induites, Symétrie de De Sitter*, Thèse de Magistère, USTHB, Alger (1994).

[11] A. Smida, M. Hachemane and M. Fellah, Found. Phys. **25**, 1769 (1995).

[12] M. Hachemane, M. A. Benbitour and A. Smida, Found. Phys. **27**, 579 (1997).

[13] A. Smida, M. Hachemane and A.-H. Hamici, Found. Phys. **28**, 1367 (1998).

[14] M. Hachemane, A. Smida and R. Djelid, *Found. Phys.* **29**, 1479 (1999).

[15] A.Smida, A.H Hamici, M.Hachemane, Annales de la Fondation Louis de Broglie **25**, 137 (2000).

[16] A. Smida, M. Hachemane, R. Djelid and A.-H. Hamici, Found. Phys. **30**, 287 (2000).

[17] Y. Oualili, *La Stochasticité pour la Particule Etendue*, Mémoire de Magistère, USTHB, Alger (2006).

[18] A.H. Hamici, *L'interaction dans la Conception Géométro-différentielle de la Particule Etendue : Espace-Temps Plan,* Thèse de Doctorat, USTHB, Alger (2007).

[19] A. Smida, M. Hachemane, A-H. Hamici, Y. Oualili, Int. J. Theo. Phys. 47, 1459 (2008).

[20] D. Benrabia, M. Hachemane, A. Smida and A.-H. Hamici, J. Phys. A: Math. Theor. 41 No 30 (1 August 2008) 304005 (9pp)

[21] E. Prugovecki, *Principles of Quantum General Relativity* , World Scientific Publishing, Singapore (1995).

[22] S. T. Ali, E. Prugovecki, Acta Appl. Math. **6**, 19-45 (1986).

[23] W.K. Tung, *Group Theory in Physics* World Scientific Publishing, Singapore (1985).

[24] E. P. Wigner, Ann. Math **40**, 149 (1939).

[25] S. U. Roman, H. K. Urbantke, Relativity, Groups, Particles-Special *Relativity and Relativistic Symmetry in Fields and Particle Physics*, Springer, Wien, N.Y (1992)

[26] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Groupe et Symétries Groupes Finis, Groupes et Algèbres de Lie, Représentations*, Editions de l'Ecole Polythechniques (2006).

[27] K. Bouchachia, *Les Modes de Spin 1/2 dans le Modèle Géométro-Différentiel de la Particule Etendue*, Mémoire de Magistère, USTHB, Alger (2005).

[28] M.E. Noz, Y.S. Kim, *Phase Space Picture of Quantum Mechanics-Group Theoritical Approach*, World Scientific Publishing, London,New Jersey (1991).

[29] Y. S. Kim, M. E. Noz, *Theory and Application of Poincare Group*, Reidel Publishing Company, Dordrecht (1986).

[30] M.B. Mensky, *The Method of Induced Representations: Space-Time and the Concept of Particles* [en russe] Nauka, Moscow (1976).

[31] G.W. Mackey, *The Theory of Group Representations*, Lectures notes, Univ. Chicago (1955).

[32] S. T. Ali, E. Prugovecki, J. Math. Phys **17**, 219 (1977).

[33] E. Prugovecki, Phys. Rev D **18**, 3655 (1978).

[34] R. Zamoum, *Etude des particules Etendues Stochastique avec Spin*, Mémoire de Magistère, USTHB, Alger (2008).

[35] S. T. Ali, E. Prugovecki, Physica **89**, 78 (1977).

[36] E. Prugovecki, J. Math. Phys **19**, 2260 (1978).

[37] S. T. Ali, E. Prugovecki, J. Math. Phys **17**, 517 (1977).

[38] N. N. Bogolubov, A. A. Logunov, A. I. Oksak, I. T. Todorov, *General Principles of Quantum Field Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1990).

[39] N. Giovannini, J. Math. Phys **22**, 2389 (1981).

[40] C. C. Tannoudji, B. Diu, F. Loloë, *Mécanique Quantique* Tome I, Paris, Hermann (1977).

[41] Richard P. Feynman and André R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals,* McGraw-Hill, New York (1965). .