

N^o d'ordre : 41/2008-4/phy

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
"HOUARI BOUMEDIENE"

FACULTÉ DE PHYSIQUE



MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER en PHYSIQUE

Spécialité : Physique Théorique de la Matière et des Hautes Énergies

Par

Ghezali karima

THÈME

**APPLICATION DU THÉORÈME DE NOETHER
POUR LA CONSTRUCTION DE LA THÉORIE
DES CHAMPS D'UNE PARTICULE ÉTENDUE,
À SYMÉTRIE INTERNE SCALAIRE.**

Soutenu publiquement, le 04/12/2008 devant le jury composé de :

Mr.	A. CHOUCHAOUI	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr.	A. SMIDA	Professeur	U.S.T.H.B.	Directeur de mémoire.
Mr.	M. HACHEMANE	Professeur	U.S.T.H.B.	Examineur.
Mme.	A. H. HAMICI	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examinatrice.
Mr.	A. CHAFA	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur.

Remerciements

Je remercie particulièrement Monsieur le Professeur *A.Smida*, mon directeur de thèse, de m'avoir accordé sa confiance et m'avoir donné l'opportunité de me diriger vers un domaine passionnant de la Physique. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur *A.Chouchaoui*, Professeur à l'Usthb, qui nous fait l'honneur de présider le jury de soutenance. J'adresse également mes plus vifs remerciements aux membres du jury, Madame *Hamici*, Monsieur *Hachemane* et Monsieur *Chafa*, pour avoir accepté de juger la qualité de ce travail et d'honorer le jury de soutenance.

Je remercie tout le collectif des enseignants et étudiants en PG, du laboratoire de physique théorique, tout particulièrement, Dr. *Hamici Amel*, et Pr. Hachemane. Je remercie mes ami(es) ainsi que, toutes les personne(s) et étudiant(e)s (de l'Ummto ou de l'Usthb) avec lesquels, je garde de bonnes amitiés.

Je ne saurais oublier de remercier, tout(e)s mes enseignant(e)s compétent(e)s, pour leurs savoir, sérieux et conscience.

Grand merci à vous mes très chers parents.

A Mas-n-sene :)

Table des matières

Introduction	1
1 Éléments de la théorie des groupes	5
1.1 Notions sur quelques structures mathématiques	5
1.1.1 Rappels et définitions	5
1.1.2 Algèbre et groupe de Lie	8
1.2 Espace-temps de Minkowski	13
1.2.1 Composantes contravariante et covariante d'un quadrivecteur	14
1.2.2 Caractéristiques	14
1.3 Transformations et groupes en physique	17
1.3.1 Groupe de Lorentz et de Poincaré	17
1.3.2 Transformations de Jauge	23
2 Symétries et lois d'invariance	25
2.1 Formalisme lagrangien en théorie des champs	25
2.1.1 Equations d'Euler-Lagrange	28
2.1.2 Lois de conservations	29
2.2 Symétries spatio-temporelles et théorème de Noether	34
2.2.1 Conservation de l'énergie-impulsion	34
2.2.2 Conservation du moment cinétique total	34
2.3 Symétries internes et courants de Noether	35
2.3.1 Invariance de jauge globale (premier type)	35
2.3.2 Invariance de jauge locale	36

3	Théorème de Noether - cas de la particule étendue -	38
3.1	La théorie fonctionnelle	38
3.1.1	Représentation ponctuelle	39
3.1.2	Représentation fonctionnelle d'un corpuscule	40
3.2	Principe de moindre action	43
3.3	Invariants dynamiques	44
3.3.1	Equations de champs	44
3.3.2	Grandeurs conservatives	46
3.4	Récapitulatif	47
4	Conclusion générale	49
	Bibliographie	49

Introduction

Historique et motivations

Pendant la deuxième moitié du XIX^{ème} siècle, des idées nouvelles et révolutionnaires ont été introduites en physique, elles ont frayé la voie à de nouveaux points de vue différents du point de vue classique. Dans sa théorie de la relativité générale, *Einstein* va encore plus loin. Il déduit une nouvelle théorie de la gravitation et prévoit des effets étonnants, comme la déviation de la lumière, qui pourtant n'a pas de masse, par la gravitation, ou encore que le temps passe plus vite sur terre que dans l'espace[1 – 2]. La relativité générale est une théorie prédictive et déterministe. Elle est construite sur la base de deux hypothèses fondamentales : la propriété de la covariance des lois physiques et la correspondance entre la gravitation et l'accélération. À ce jour, il n'existe pas d'observation qui contredise la relativité générale d'*Einstein*. Mais, il se trouve que cette dernière ne prend pas en compte toutes les propriétés physiques de la matière et de l'énergie, notamment celles correspondant à leur nature quantique[3 – 5].

Une théorie qui semblait allier les propriétés de la physique quantique et de la relativité restreinte est née en 1927 avec l'article fondateur de l'électrodynamique quantique par *Dirac*, c'est la théorie quantique des champs[6]. La façon dont la théorie des champs fut introduite par *Dirac* à partir des particules élémentaires est connue sous l'appellation de seconde quantification[7 – 8]. Dans le cadre de cette théorie, un formalisme puissant a été développé et rationalisé grâce à l'exploitation des propriétés de symétrie de jauge globale ou locale, censées gouverner le monde de la physique à l'échelle quantique[9 – 10]. Les

succès de l'électrodynamique quantique (QED ou théorie de jauge Abélienne), a conduit les théoriciens des années 1960 et 1970 à appliquer les concepts de la théorie quantique des champs aux théories de jauge non abéliennes, donnant finalement naissance à l'actuel Modèle Standard de la physique des particules[11 – 12]. Pourtant, et bien avant (durant les années 1930), les théoriciens se sont heurtés au problème d'apparition systématique d'infinis lors des calculs de grandeurs physiques censées être mesurables et finies : La divergence de la matrice de diffusion[13 – 14], qui ne fut entièrement surmontée qu'en 1948 avec l'invention d'une procédure systématique, "la renormalisation", due principalement au Japonais *Tomonaga* et aux américains *Schwinger* et *Feynman*. Grâce à cette procédure, ces divergences sont levées, néanmoins, elle affaiblit la cohérence des capacités de prédiction de cette théorie[14]. Le modèle standard est donc édifié sur une théorie de Jauge renormalisable $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ et décrit trois des quatre forces fondamentales s'exerçant entre les constituants élémentaires de la matière (quarks et les leptons) : l'interaction forte (chromodynamique quantique), l'interaction faible et l'interaction électromagnétique. Il a été remarquablement testé auprès des grands accélérateurs jusqu'à une énergie de l'ordre de la centaine de *Gev*[11], notamment avec la découverte des bosons de jauge de l'interaction faible au cours des années 70 – 80[14]. Ce modèle représente ainsi une illustration spectaculaire de la théorie quantique des champs, qui décrit très bien l'unification électrofaible mais qui semble incomplète à l'heure actuelle pour décrire valablement l'unification de l'interaction forte avec l'électrofaible[11].

L'insuffisance du modèle standard est motivé par des raisons, à la fois expérimentales et théoriques[15]. Nous citons dans ce sens : l'observation d'oscillations de neutrinos atmosphériques (montrant l'existence d'une masse pour les neutrinos), le problème de la masse manquante de l'univers, l'asymétrie matière-antimatière, et enfin, le problème conceptuel grave du modèle standard (connu sous le nom du problème de hiérarchie de Jauge) qui est celui de la déstabilisation du potentiel scalaire par les corrections radiatives. Les extensions du modèle standard en terme de théorie des champs sont nombreuses, et chacune aborde seulement un des problèmes lié à ce modèle. Par exemple, les théories des champs supersymétriques tentent la résolution du problème de la hiérarchie de jauge. Les théories de grande unification résolvent le problème de l'unification des couplages. Les théories de

Kaluza Klein expliquent l'origine des symétries de jauge par l'existence de dimension supplémentaires. La théorie des cordes généralise la théorie quantique des champs et repose sur deux hypothèses originales : d'abord, le cadre de la physique possède non pas quatre dimensions mais 10 ou 11, ensuite, ces objets fondamentaux ne sont plus ponctuels mais sont des cordes à une dimension ou même des objets de dimensions arbitraires (Membranes). L'hypothèse de la supersymétrie est comprise dans les développements actuels de la théorie des cordes[16 – 22], la théorie M est la plus récente, celle des cordes n'en serait que l'approximation. La difficulté du traitement de cette théorie est d'ordre mathématique, précisément géométrique[20]. Parallèlement à ces théories sus-citées, il existe aussi le modèle de la particule étendue[23 – 28], ce dernier considère la particule non pas comme un point, mais plutôt comme ayant une certaine extension qui prend en considération ses caractéristiques intrinsèques. L'idée de l'extension de la particule élémentaire est ancienne. En effet, *De Broglie* (1927) [29] a formulé, sa théorie de la double solution comme alternative à la théorie ondulatoire. Par la suite, *Destouches* la généralisa pour en faire la théorie fonctionnelle[30 – 31]. Elle consiste à remplacer un point x donné de l'espace, par une fonction ξ qui est dite "fonction physique" et dont la forme dépend du modèle utilisé. Ainsi l'influence de l'extérieur sur un système physique doit s'exercer non seulement sur ses caractéristiques dynamiques et sur les actions auxquelles il est soumis, mais aussi, sur ses caractéristiques propres (la représentation d'une particule par un point géométrique est une caractéristique non modifiable par l'extérieur). Différentes approches moyennant la géométrie différentielle et la stochasticité[26 – 29] ont été proposées dans ce sens. Une extension géométrico-stochastique, a été introduite en reconsidérant la notion de mesure, ainsi, la particule est décrite à la fois par la fonction d'onde habituelle et par une distribution relative aux erreurs de mesures en incorporant un paramètre de longueur l_0 de l'ordre de la longueur de *Planck*. La distribution précédente peut être interprétée comme la fonction d'onde propre de la particule rendant compte de son extension stochastique . L'introduction de la relativité dans cette théorie aboutit à une structure géométrique de *fibré* . Une autre théorie semi-classique attribue à la particule son propre espace interne, "espace de *de Sitter* de rayon de courbure R ". Le *fibré* en question possède l'espace-temps comme *base*, l'espace interne de *de Sitter* comme *fibre* et le groupe de *de Sitter* comme groupe structural

lié à l'interaction forte. L'interaction gravitationnelle peut être décrite par le sous-groupe de Lorentz déjà contenu dans le groupe de de Sitter ou bien par un groupe de Lorentz supplémentaire indépendant de celui-ci.[32 – 35]

Dans le présent travail, nous utilisons le théorème de *Noether* (théorème qui démontre essentiellement qu'à chaque type de symétrie présente dans le système étudié, on associe une loi de conservation typique) appliqué dans ce cas à une particule étendue définie par une fonctionnelle $\eta(x)$. Ce manuscrit, est présenté sous trois chapitres et une conclusion. Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions de la théorie des groupes[36 – 42], à savoir : les groupes de Lie, de jauge et de Poincaré et aussi, quelques définitions liées à l'espace quadri-dimensionnel de Minkowski. Dans le second chapitre nous expliquons le principe variationnel[43 – 49] qui a la propriété de générer des équations dynamiques qui sont invariantes précisément sous un certain groupe de transformations donné. Enfin, dans le chapitre trois, nous avons considéré une structure nouvelle de la particule, composée de deux modes : interne et externe construits sur un espace plat de Minkowski. Dans le mode externe (aspect ponctuel), la particule est localisée en un point x . par contre, dans le mode interne, la particule possède des degrés internes supplémentaire, via la fonction physique $\eta(x)$. ainsi la fonction d'onde interne devient une fonctionnelle. Nous avons ainsi essayé de construire une théorie lagrangienne correspondante en adoptant une approche naturelle. La densité lagrangienne doit dépendre de la fonctionnelle et de sa dérivée par rapport au champ scalaire. Nous terminons notre travail par une conclusion qui récapitule l'essentiel des étapes liées à l'application du théorème de Noether au cas de la particule étendue et qui a pour résultat, la déduction du tenseur energie-impulsion et du tenseur moment cinétique.

Chapitre 1

Eléments de la théorie des groupes

1.1 Notions sur quelques structures mathématiques

1.1.1 Rappels et définitions

Les symétries sont bien décrites par la théorie des groupes et nous devons présenter quelques définitions pour nous familiariser avec les méthodes de cette théorie. Nous nous intéressons surtout aux groupes de Lie qui sont particulièrement utiles en physique des particules. Ceux-ci sont caractérisés dans le cas de notre travail, par des transformations unitaires continues[35]

Groupe

Un ensemble G est muni d'une loi interne \perp , c'est à dire d'une application de $G \times G$ dans G et qui à tout couple d'éléments (x, y) associe $z = x \perp y$. L'ensemble G est un groupe si la loi interne \perp vérifie les trois propriétés suivantes.

a. La loi \perp est associative :

$$\forall x, y \text{ et } z \in G, (x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z). \quad (1.1.1)$$

b. Il existe un élément neutre e (unique), tel que:

$$\forall x \in G, e \perp x = x \perp e = x. \quad (1.1.2)$$

c. Finalement, tout élément x de G admet un symétrique y vis-à-vis de la loi \perp vérifiant

$$x \perp y = y \perp x = e. \quad (1.1.3)$$

Si de surcroît la loi \perp est commutative :

$$\forall x, y \in G, x \perp y = y \perp x, \quad (1.1.4)$$

Alors, le groupe est dit abélien.

Anneau

Considérons un groupe abélien (G, \perp) muni d'une seconde loi interne \circ vérifiant les deux propriétés suivantes :

a. La loi \circ est associative :

$$\forall x, y \text{ et } z \in G, (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z). \quad (1.1.5)$$

b. La loi est distributive par rapport à la loi \perp

$$\begin{aligned} \forall x, y, a, b \in G, x \circ (a \perp b) &= (x \circ a) \perp (x \circ b) \\ (x \perp y) \circ a &= (x \circ a) \perp (y \circ a). \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

G a alors une structure d'anneau. Si de plus la loi est commutative, l'anneau est abélien.

Corps

Considérons un anneau (K, \perp, \circ) muni des deux lois internes \perp et \circ . L'ensemble K muni de la loi \perp est un groupe abélien dont l'élément neutre sera noté 0 . La loi \circ est associative et distributive par rapport à la loi \perp .

L'anneau K est un corps si l'ensemble K dépourvu de l'élément neutre 0 de la première loi interne \perp est un groupe vis à vis de la seconde loi interne \circ . Si de plus \circ est commutative, alors le corps K est abélien.

Espace vectoriel

Considérons le corps abélien (K, \perp, \circ) . L'ensemble V muni de la loi interne $+$ et de la loi externe \times sur le corps K est un espace vectoriel s'il vérifie les propriétés suivantes:

a. Tout d'abord, l'ensemble $(V, +)$ est un groupe abélien. Son élément neutre est le vecteur $\vec{\theta}$ tel que

$$\forall \vec{x} \in V, \vec{x} + \vec{\theta} = \vec{\theta} + \vec{x} = \vec{x}. \quad (1.1.7)$$

b. D'autre part, l'ensemble V est muni d'une loi externe sur K , autrement dit d'une application de $K \times V$ dans V qui à tout couple $(\alpha \in K, \vec{x} \in V)$ associe le vecteur $\vec{y} = (\alpha \times \vec{x}) \in V$. Cette loi externe \times doit satisfaire aux quatre propriétés suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \times (\vec{u} + \vec{v}) = (\alpha \times \vec{u}) + (\alpha \times \vec{v}), \\ (\alpha \perp \beta) \times \vec{u} = (\alpha \times \vec{u}) + (\beta \times \vec{u}), \\ (\alpha \circ \beta) \times \vec{u} = \alpha \times (\beta \times \vec{u}), \\ e \times \vec{u} = \vec{u}. \end{array} \right. \quad (1.1.8)$$

La dernière propriété porte sur l'élément neutre e de la seconde loi interne \circ du corps abélien K .

Représentation d'un groupe

La notion de représentation d'un groupe est fondamentale. Il s'agit d'étudier les différentes manières de faire agir des groupes sur des espaces vectoriels par des transformations linéaires[36]. Soient G et G' deux groupes. Une application $f : G \longrightarrow G'$, est un *morphisme* de groupes si pour tout x, y de G , $f(xy) = f(x)f(y)$. Si f est de plus bijective, alors f^{-1} est aussi un morphisme et on dit que f est un *isomorphisme* de G sur G' . Un isomorphisme de G sur lui-même s'appelle un automorphisme de G . Sur cette base, représenter un groupe G consiste donc à associer à tout élément g de G une application linéaire bijective ρ_g d'un espace vectoriel V dans lui-même. Celle-ci est alors une représentation linéaire du groupe G . L'application ρ_g est un automorphisme de V vérifiant pour tout $\alpha, \beta \in K, \vec{u}, \vec{v} \in V$ la propriété de linéarité

$$\rho_g\{(\alpha \times \vec{u}) + (\beta \times \vec{v})\} = (\alpha \times \rho_g\{\vec{u}\}) + (\beta \times \rho_g\{\vec{v}\}), \quad (1.1.9)$$

Quels que soient les éléments α et β du corps K sur lequel l'espace vectoriel V est construit et quels que soient les vecteurs \vec{u} et \vec{v} . En pratique, V est construit sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Nous nous concentrons ici sur les représentations de dimension finie et $n = \dim(V)$ est le degré de la représentation. L'application est un homomorphisme qui projette la structure du groupe G sur les automorphismes de V (que l'on représente par des matrices $n \times n$) et il vient que:

$$\begin{aligned}\rho_{g'.g} &= \rho_{g'} \circ \rho_g \\ \rho_e &= I_V \\ \rho_{g^{-1}} &= (\rho_g)^{-1}.\end{aligned}\tag{1.1.10}$$

On appelle représentation *triviale*, toute représentation telle que $\rho_g = I_V^{(1)}$, pour tout $g \in G$.

1.1.2 Algèbre et groupe de Lie

Considérons l'espace vectoriel $(V, +, \times)$ construit sur le corps abélien (K, \perp, \circ) . Supposons que V soit muni d'une seconde loi interne \star **bilinéaire** par rapport aux lois $+$ et \times qui vérifie alors les relations pour tous les éléments α et β de K et les vecteurs \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} de V ,

$$((\alpha \times \vec{x}) + (\beta \times \vec{y})) \star \vec{z} = (\alpha \times (\vec{x} \star \vec{z})) + (\beta \times (\vec{y} \star \vec{z})),\tag{1.1.11}$$

$$\vec{x} \star ((\alpha \times \vec{y}) + (\beta \times \vec{z})) = (\alpha \times (\vec{x} \star \vec{y})) + (\beta \times (\vec{x} \star \vec{z})).\tag{1.1.12}$$

L'espace vectoriel V est alors une algèbre. C'est une **Algèbre de Lie** si de plus le produit \star est d'une part antisymétrique

$$\vec{x} \star \vec{y} = -\vec{y} \star \vec{x},\tag{1.1.13}$$

et si d'autre part il vérifie l'identité de Jacobi

$$\vec{x} \star (\vec{y} \star \vec{z}) + \vec{z} \star (\vec{x} \star \vec{y}) + \vec{y} \star (\vec{z} \star \vec{x}) = 0.\tag{1.1.14}$$

L'**Algèbre de Lie** décrit le groupe au voisinage de l'identité et détermine donc ses propriétés locales. Deux groupes partageant une algèbre identique sont localement isomorphes mais peuvent avoir des propriétés globales complètement différentes.

⁽¹⁾ I_V = Identité sur V .

Considérons une algèbre de Lie \mathcal{A} construite sur \mathbb{R} et de dimension D dont les vecteurs se mettent sous la forme :

$$X = \sum_{a=1}^D \theta^a X_a. \quad (1.1.15)$$

Les paramètres θ^a sont réels. Les vecteurs X_a sont les générateurs de l'algèbre \mathcal{A} . Celle-ci se comporte comme l'espace vectoriel \mathbb{R}^D vis à vis de sa première loi interne $+$ et de sa loi externe \times . La seconde loi interne \star confère à \mathcal{A} sa structure d'algèbre, elle est définie par :

$$X \star Y = [X, Y], \quad (1.1.16)$$

Les générateurs X_a entretiennent entre eux les relations de commutation

$$[X_a, X_b] = C_{ab}^c X_c \quad (1.1.17)$$

où les coefficients réels C_{ab}^c sont les constantes de structure de l'algèbre de Lie qui vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} C_{k m}^i C_{i n}^r + C_{n k}^j C_{j m}^r + C_{m n}^l C_{l k}^r &= 0 \\ C_{a b}^c &= -C_{b a}^c \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Pour un groupe abélien, ces constantes sont nulles. Par définition, le rang d'une algèbre est le nombre de générateurs qui commutent entre eux et forment ainsi une sous-algèbre dite de Cartan. Si aucun des générateurs ne commute avec les autres, l'algèbre est alors de rang un. Un opérateur de casimir est un opérateur qui commute avec tous les générateurs du groupe. Pour les Algèbres et groupes semi-simple, le nombre de casimir que contient un groupe est égale a son rang.

Un groupe de Lie ($\text{Lie}\mathcal{G}$) construit à partir de l'algèbre \mathcal{A} est composé des éléments g qui s'écrivent formellement comme les exponentielles des vecteurs X de \mathcal{A} :

$$\mathcal{G} \equiv \{g = \exp(X) / X \in \mathcal{A}\}. \quad (1.1.19)$$

La relation précédente est formelle dans la mesure où "exp" dénote simplement une application de \mathcal{A} dans \mathcal{G} vérifiant les égalités :

$$\exp(tX) \cdot \exp(t'X) = \exp((t+t')X) \quad (1.1.20)$$

$$\exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1} \quad (1.1.21)$$

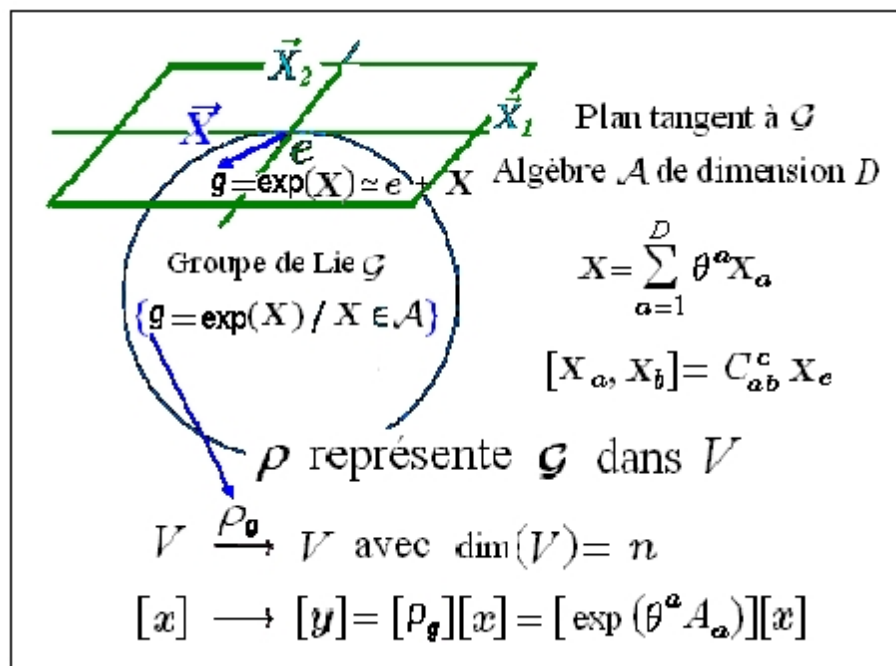
$$\exp(0) = e, \quad (1.1.22)$$

Notons que, quels que soient t et t' dans \mathbb{R} et quel que soit le vecteur X de l'algèbre \mathcal{A} , l'élément neutre de la loi interne \cdot de \mathcal{G} est noté e . Lorsque les paramètres θ^a sont petits en valeur absolue, le vecteur X est voisin du vecteur nul de sorte que l'élément correspondant g du groupe peut se comprendre comme le développement au premier ordre

$$g \simeq e + X = e + \sum_{a=1}^D \theta^a X_a. \quad (1.1.23)$$

L'algèbre peut être vue alors, comme le plan tangent au groupe \mathcal{G} en e [36].

Représentation de l'Algèbre et du groupe de Lie



Toutes ces notions deviennent plus claires lorsque le groupe de Lie est représenté par l'homomorphisme qui associe à chaque élément g du groupe un automorphisme de l'espace vectoriel V . Celui-ci est choisi de dimension n et l'élément g est associé à la matrice $n \times n$, permettant de transformer les coordonnées $[x]$ du vecteur \vec{x} en celles du vecteur \vec{y}

$$[y] = [\rho_g][x] = [\exp(\theta^a A_a)][x]. \quad (1.1.24)$$

Les matrices A_a représentent dans V les générateurs X_a de l'algèbre de Lie \mathcal{A} et entretiennent entre elles les mêmes relations de commutation

$$[A_a, A_b] = C_{ab}^c A_c. \quad (1.1.25)$$

L'ensemble des matrices suivant

$$A = \sum_{a=1}^D \theta^a A_a; \quad \theta^a \in \mathbb{R} \text{ avec } a = 1, \dots, n. \quad (1.1.26)$$

constitue une algèbre de Lie \mathcal{G} de structure identique à celle de \mathcal{A} dont la seconde loi interne est effectivement réalisée grâce au commutateur

$$A \star B = [A, B]. \quad (1.1.27)$$

Groupes de Lie

Un groupe continu est un groupe de Lie, si localement, on peut introduire une correspondance entre ses paramètres et \mathfrak{R}^d (ensemble des réels). Autrement dit, le groupe possède la structure d'une variété différentiable. On dit alors que d est la dimension du groupe de Lie. Les groupes de Lie sont classés selon leur propriétés algébriques (abélien, simple, semi-simple, résoluble, nilpotent), ou topologiques (connexe, simplement connexe, compact).

Les plus utilisés sont :

.O(n) est le groupe orthogonal sur \mathbb{R} d'ordre n , c'est à dire le groupe multiplicatif des matrices $n \times n$ réelles et orthogonales⁽¹⁾.

.SO(n) est le groupe spécial orthogonal sur \mathbb{R} d'ordre n , ie. le groupe multiplicatif des matrices $n \times n$ réelles orthogonales et de déterminant $\det M = 1$.

.U(n) est le groupe unitaire sur \mathbb{C} d'ordre n , i.e. le groupe multiplicatif des matrices $n \times n$ complexes unitaires.

.SU(n) est le groupe spécial unitaire sur \mathbb{C} d'ordre n , i.e. le groupe multiplicatif des matrices $n \times n$ complexes unitaires et de déterminant $\det M = 1$.

Algèbre de Lie du Groupe des Rotations $SO(3)$

La structure d'une algèbre de Lie est bien visible via sa représentation sur un espace vectoriel V au sein duquel l'étude est particulièrement simple. C'est le cas du groupe des rotations $SO(3)$. Considérons la rotation d'un angle θ autour d'un axe orienté par le vecteur unitaire \vec{u} . Décomposons cette rotation en une série de N rotations infinitésimales d'angle

⁽¹⁾Une matrice d'ordre n est *orthogonales* si : ${}^t M M = I$

$\varepsilon = \theta/N$. Une de celle-ci déplace tout point M en M' de sorte que

$$\overrightarrow{MM'} \simeq \varepsilon \vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}. \quad (1.1.28)$$

Les coordonnées (x, y, z) de M sont transformées en

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \simeq \left(I_3 + \vec{\varepsilon} \vec{A} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (1.1.29)$$

où le vecteur infinitésimal $\vec{\varepsilon} = \varepsilon \vec{u}$ pointe en direction de l'axe de rotation. Les trois composantes constituant le vecteur formel \vec{A} sont les matrices

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.1.30)$$

La rotation globale d'angle autour du vecteur \vec{u} est caractérisée par les trois coordonnées de $\vec{\theta} = \theta \vec{u}$. Elle s'obtient en effectuant successivement N rotations infinitésimales d'angle θ . Sa matrice s'écrit alors :

$$\mathcal{R}_{\vec{\theta}} = \left\{ I_3 + \frac{\vec{\theta} \cdot \vec{A}}{N} \right\}^N. \quad (1.1.31)$$

La fonction exponentielle est définie par :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (1.1.32)$$

En analysant le début du développement, on peut démontrer que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{x}{N} \right\}^N = e^x \quad (1.1.33)$$

Cette dernière relation permet de mettre sous forme exponentielle de nombreuses règles de transformation à partir de leur forme différentielle. D'où la forme exponentielle de la matrice décrivant la rotation $\vec{\theta}$ de $SO(3)$:

$$\mathcal{R}_{\vec{\theta}} = \exp \left(\vec{\theta} \cdot \vec{A} \right) = \exp \left(\theta^a A_a \right). \quad a = 1, 2, 3 \quad (1.1.34)$$

La représentation dans \mathbb{R}^3 d'un élément de $SO(3)$ est la matrice de rotation qui est aussi un élément d'un groupe de Lie dont l'algèbre est l'ensemble des vecteurs :

$$\vec{X} = \sum_{a=1}^3 \theta^a \vec{X}_a \quad \text{avec } \theta_a \in \mathbb{R}. \quad (1.1.35)$$

Les générateurs X_a vérifient les relations de commutation :

$$[X_a, X_b] = \varepsilon_{abc} X_c, \quad (1.1.36)$$

où ε_{abc} est la signature de la permutation de $\{1, 2, 3\}$ en $\{a, b, c\}$ et est nul si deux au moins des éléments a, b ou c sont égaux. L'algèbre de $SO(3)$ est donc isomorphe à l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^3 muni (en guise de seconde loi interne) du produit vectoriel.

1.2 Espace-temps de Minkowski

L'espace de configuration de Minkowski $M \equiv \mathbb{R}^4$ est un espace plan⁽¹⁾ quadri-dimensionnel et pseudo-euclidien $E_{1,3}$, c'est à dire qu'il possède une métrique \mathbf{g}_{ij} de signature $(1, 3)$ [41][50] :

$$\mathbf{g}_{ij} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (1.2.1)$$

Les coordonnées d'un point de l'espace de Minkowski sont notées x^i , avec $x^0 = ct$ (où t désigne le temps et c la vitesse de la lumière) et $\mathbf{x} = (x^\alpha) = (x^1, x^2, x^3)$ correspond aux composantes spatiales. De plus, nous considérons le système d'unité où $c = \hbar = 1$ pour lequel nous noterons indifféremment la composante temporelle par t ou x^0 . En fait, le produit scalaire⁽²⁾ des deux quadrivecteurs x et y est conservé :

$$(x, y) = \mathbf{g}_{ij} x^i y^j \quad (1.2.2)$$

En particulier, la pseudo-norme d'un quadrivecteur x est $x^2 = (x^0)^2 - \mathbf{x}^2$ et l'élément de longueur ou l'intervalle entre deux points voisins x^i et $x^i + dx^i$ est donné par la forme quadratique :

$$ds^2 = \mathbf{g}_{ij} dx^i dx^j \quad (1.2.3)$$

Le produit scalaire des vecteurs de base $\{e_i\}$ dans l'espace de Minkowski s'écrit⁽³⁾ :

$$e_i \cdot e_j = \mathbf{g}_{ij}, \quad (i, j = 0, 1, 2, 3) \quad (1.2.4)$$

⁽¹⁾Cet espace-temps de Minkowski beaucoup utilisé en théorie quantique des champs, n'a pas de courbure. Il est incompatible avec celui de la relativité générale, ce qui empêche par exemple de décrire un comportement quantique de l'interaction gravitationnelle et encore moins de préconiser une procédure d'unification de l'interaction gravitationnelle avec les trois autres interactions fondamentales.

⁽²⁾La convention de sommation d'Einstein est adopté quand les indices i, j, k prennent les valeurs 0, 1, 2, 3.

⁽³⁾Dorénavant les indices latins, d'espace-temps, iront de 0 à 3 et les indices grecs, d'espace, de 1 à 3.

1.2.1 Composantes contravariante et covariante d'un quadrivecteur

On dit qu'une composante spatiale ou temporelle du quadrivecteur position \mathbf{x} est contravariante (indices en haut) si :

$$x = x^i e_i \quad (1.2.5)$$

En parallèle, il existe pour n'importe quelle base et n'importe quel quadrivecteur des composantes covariantes (indices en bas) qui sont des projections orthogonales sur les vecteurs de base :

$$x_i = x e_i \quad (1.2.6)$$

Une des caractéristiques de ces composantes dans l'espace de Minkowski, est qu'elles ne sont pas confondues même si les vecteurs de base sont orthogonaux (comme pour la métrique euclidienne) :

$$x^0 = x_0, \quad x^\alpha = -x_\alpha \quad (1.2.7)$$

Le passage des composantes contravariantes aux composantes covariantes d'un quadrivecteur et vice-versa, s'effectue à l'aide du tenseur métrique :

$$x_j = \mathbf{g}_{ji} x^i, \quad x^i = \mathbf{g}^{ij} x_j \quad (1.2.8)$$

$$\mathbf{g}_{ji} = \mathbf{g}_{ij}, \quad \mathbf{g}^{ij} = [\mathbf{g}^{-1}]_{ij} \quad (1.2.9)$$

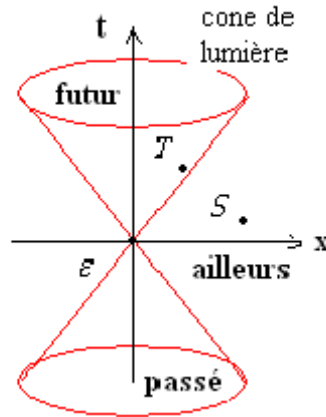
Le produit scalaire entre deux quadri-vecteurs x et y s'obtient par contraction des composantes contravariantes de l'un avec les composantes covariantes de l'autre

$$x \cdot y = x^i y_i = \mathbf{g}_{ij} x^i y^j = x^0 y^0 - \mathbf{xy} \quad (1.2.10)$$

1.2.2 Caractéristiques

La nature pseudo-euclidienne de l'espace de Minkowski fait que la norme d'un quadri-vecteur est non définie positive et peut donc prendre des valeurs positives, nulles ou négatives. Ceci conduit à classer les quadri-vecteurs en trois genres : le genre temps, le genre lumière et le genre espace.

Cette classification correspond à la position d'un événement par rapport à l'origine du cône de lumière pris comme origine des événements.



Dans les deux premiers cas, on distingue deux catégories selon le signe de la composante temporelle. Pour $x^0 > 0$, on se trouve dans la région du futur absolu, ces points correspondent à une évolution d'une ligne d'univers à partir de l'origine. La région du passé absolu est caractérisée par une composante temporelle $x^0 < 0$. Ses points correspondent à une évolution d'une ligne d'univers vers l'origine. L'extérieur du cône correspond à des événements de genre espace pour lesquels $x^2 < 0$.

Par suite de l'invariance de l'intervalle dans les transformations des coordonnées et systèmes de référentiels inertiels dans l'espace de Minkowski, la propriété d'être de genre lumière, espace ou temps est une propriété intrinsèque de l'intervalle. Deux événements séparés par un intervalle de genre lumière ou temps gardent un même ordre chronologique dans tous les référentiels inertiels et peuvent être reliés par un lien causal. Par contre, les événements séparés par un intervalle de genre espace n'ont pas cette propriété et ne peuvent donc avoir un lien causal.

Tout comme l'espace et le temps, l'énergie et l'impulsion tridimensionnelle d'une particule sont aussi intimement liées en relativité restreinte. En effet, ces dernières constituent les composantes du quadri-vecteur impulsion (ou énergie-impulsion).

Une particule élémentaire de masse m au repos, animée d'une vitesse v par rapport à un repère (R) et décrite dans le cadre de la relativité restreinte, ne peut avoir de dimension spatiale sans subir des déformations (la notion de solide n'existe pas en cinématique relativiste). En pratique, on l'assimile à un point géométrique sans dimension. Le quadri-vecteur

énergie-impulsion de cette particule est $p^i = mV^i$ où $V^i = dx^i/d\tau$ est le quadri-vecteur vitesse et τ est le temps propre :

$$p^i = \left(\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{mv^\alpha}{\sqrt{1-v^2}} \right) \equiv (p^0 = E, p^\alpha) \quad (1.2.11)$$

E est l'énergie totale de la particule et p^α son impulsion tridimensionnelle. Le produit scalaire dans l'espace des impulsions est donné par

$$p \cdot p = \mathbf{g}_{ij} p^i p^j \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \quad (1.2.12)$$

dont un cas particulier est celui de la contrainte (Cas de masse non nulle) :

$$p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \quad (1.2.13)$$

qui montrent que l'espace des impulsions quadri-dimensionnelles $C_m = \{p/p^2 = m^2, p \in E_{1,3}\}$ est un hyperboloïde à deux nappes tridimensionnelles

$$C_m = C_m^+ \cup C_m^- \quad (1.2.14)$$

$$C_m^\pm = \left\{ p/p^0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \right\} \quad (1.2.15)$$

correspondant aux valeurs positives et négatives de l'énergie $E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Les éléments de volume dans chaque nappe s'écrivent

$$d\Omega_m^\pm(p) = \frac{d^3\mathbf{p}}{\pm p^0} = \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \quad (1.2.16)$$

est correspondent à des mesures invariantes sur l'espace des impulsions car ils découlent de la mesure $d\Omega_m(p) = \delta(p^2 - m^2) d^4p$. A la limite des masses nulles, on tombe sur les deux parties supérieure et inférieure du cône de lumière

$$C_0^\pm = \left\{ p/p^0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2}, \mathbf{p} \in R^3 \right\} \quad (1.2.17)$$

La mesure invariante est alors donnée par

$$d\Omega_0^\pm(p) = \frac{d^3\mathbf{p}}{\pm p^0} = \frac{d^3\mathbf{p}}{\mathbf{p}} \quad (1.2.18)$$

Les quadri-vecteurs positions et impulsions se transforment de la même manière lors d'un changement de repère. Or, un changement de repère correspond à un élément du groupe de Lorentz homogène (ou de manière générale à un élément du groupe de Poincaré). Il se trouve que les grandeurs physiques (scalaires, vectorielles, tensorielles) forment des classes en fonction de leur comportement dans un changement de référentiel. En particulier, une grandeur scalaire ne change pas dans une telle transformation.

1.3 Transformations et groupes en physique

1.3.1 Groupe de Lorentz et de Poincaré

La théorie de la relativité restreinte étudie les évènements de l'espace-temps (un évènement est noté: $X = (t, x, y, z)$). Dans cette théorie, Einstein postule l'invariance de la vitesse de la lumière par changement de référentiel galiléen⁽¹⁾. Cela impose la conservation de la forme quadratique de Minkowski par un changement de référentiel. Cette dernière est linéaire à cause de l'homogénéité de l'espace et du temps. Notons \mathbf{g} la matrice de cette forme quadratique de Minkowski

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.3.1)$$

Le groupe de Lorentz est le groupe mathématique constitué par l'ensemble des transformations de Lorentz de l'espace de Minkowski. Pour une transformation des coordonnées appartenant au groupe de *Lorentz homogène*⁽²⁾, notons Λ la matrice de *Lorentz* et Ω^{kl} la matrice de rotation correspondante. Les transformations de *Lorentz* s'écrivent ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow x' = \Lambda x \\ x'^k = \Omega^k_l x^l. \end{array} \right\} \quad (1.3.2)$$

On peut définir l'ensemble $O(3,1)$ des transformations de l'espace de Minkowski qui représentent les changements de référentiels par :

$$\Lambda \in O(3,1) \iff \forall X, {}^t(\Lambda X)^\dagger g (\Lambda X) = {}^t X g X \quad (1.3.3)$$

$$\iff \forall X, {}^t X ({}^t \Lambda g \Lambda) X = {}^t X g X \quad (1.3.4)$$

⁽¹⁾Nous pouvons travailler ainsi dans un système d'unités où la vitesse de la lumière $c = 1$.

⁽²⁾Les transformations homogène de Lorentz sont des transformations linéaires continues Λ de l'espace-temps qui préservent le produit scalaire entre deux quadri-vecteurs .

L'ensemble $O(3, 1)$ est un sous-groupe fermé de $GL(4, \mathbb{R})$. C'est donc un groupe de Lie, appelé groupe de Lorentz caractérisé par :

$$\Lambda \in O(3, 1) \iff {}^t \Lambda g \Lambda = g \quad (1.3.5)$$

$$\Rightarrow \det \Lambda = \pm 1 \quad (1.3.6)$$

Eléments du groupe de Lorentz

▷ Les rotations laissent invariante la vitesse de la lumière. On notera $R_3(\theta)$ la rotation autour de l'axe z . Sa matrice est donnée par :

$$R_3(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.3.7)$$

$R_1(\theta)$ et $R_2(\theta)$ sont les rotations autour des deux autres axes déduites par permutation des lignes et colonnes de la matrice $R_3(\theta)$. On vérifie aisément que ces matrices appartiennent à $O(3, 1)$.

▷ Les transformation de Lorentz pure de vitesse v (ou boost) suivant l'axe x , sont :

$$\Lambda_1(v) = \begin{pmatrix} ch(\alpha) & -sh(\alpha) & 0 & 0 \\ -sh(\alpha) & ch(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.3.8)$$

avec $th(\alpha) = \frac{v}{c}$. On appelle α , rapidité de la transformation. De même on a par permutation des lignes et des colonnes deux autres boosts suivant les autres axes. L'interprétation physique du boost est le passage à un référentiel en translation uniforme de vitesse v suivant un axe donné par rapport au premier référentiel.

▷ Citons également deux transformations importantes appartenant au groupe de Lorentz: le renversement du temps, de matrice \mathcal{T} , et la parité, de matrice \mathcal{P} données ci-dessous :

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.3.9)$$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.3.10)$$

Notons que l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz est de dimension 6. C'est l'ensemble :

$$O(3, 1) = \{X \in M(3, \mathbb{R} / Xg + g^t X = 0)\} \quad (1.3.11)$$

La démonstration est faite en utilisant la caractérisation de l'algèbre de Lie par l'exponentielle, c'est-à-dire :

$$X \in O(3, 1) \iff \forall t \in \mathbb{R}, e^{itX} \in O(3, 1) \quad (1.3.12)$$

Notons qu'il existe 6 sous-groupes à un paramètre du groupe de Lorentz : les trois types de rotations paramétrées par leur angle θ , et les trois boost paramétrés par leur rapidité α . Il se trouve donc qu'une base de l'algèbre de Lie s'écrit sous forme des générateurs infinitésimaux de ces sous-groupes :

$$iJ_3 = \frac{d}{d\theta} R_3(\theta)|_{\theta=0} \quad (1.3.13)$$

$$iK_1 = \frac{d}{d\alpha} \Lambda_1(\alpha)|_{\alpha=0} = \frac{d}{dv} \Lambda_1(v)|_{v=0} \quad (1.3.14)$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 K_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Une base de l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz est donnée par les matrices $J_1, J_2, J_3, K_1, K_2, K_3$. Les relations de commutation sont données par calcul simple par :

$$[J_1, J_2] = iJ_3, \quad [J_1, K_1] = 0, \quad [J_1, K_2] = iK_3, \quad [K_1, K_2] = -iJ_3 \quad (1.3.15)$$

Groupe de Poincaré

En 1905, Einstein énonce la fameuse théorie de la relativité restreinte, et en 1916, il formule l'invariance relativiste, on a ainsi découvert que le groupe de symétrie de la cinématique est le groupe de Lorentz et son extension, le groupe de Poincaré. Les équations de la relativité (restreinte ou générale⁽¹⁾) sont invariantes sous des transformations du groupe de Poincaré. La quantité conservée qui en résulte n'est rien d'autre que l'énergie et l'impulsion mais définies au sens relativiste, on l'appelle le tenseur (4-vecteur) énergie-impulsion.

⁽¹⁾L'équation d'Einstein s'écrit :

$$R_{\mu\nu} - 1/2g_{\mu\nu}(R - 2\Lambda) = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

est une équation différentielle, locale, non linéaire, comprenant explicitement dix équations. Λ est la fameuse constante cosmologique. Les $g_{\mu\nu}$ sont les composantes du tenseur métrique qui rend compte de la courbure de l'espace-temps. $R_{\mu\nu}$ les composantes du tenseur de *Ricci* entièrement déterminé quand on se donne les $g_{\mu\nu}$, il rassemble toute l'information concernant l'énergie, la pression et la quantité de mouvement de la matière et des champs électromagnétiques. Les variations locales du tenseur métrique sont reliées à la distribution locale de la matière et de l'énergie sous toutes ses formes.

Ce groupe $P = I SO(1, 3)$ (dit aussi, groupe de Lorentz inhomogène) est défini donc, comme étant le groupe qui conserve le produit scalaire des deux quadrivecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} et laisse invariante la mesure de l'espace de Minkowski, de signature $(1, 3)$.

Le groupe de Poincaré contient deux sous-groupes : le groupe des translations spatio-temporelle T et le groupe de Lorentz L :

$$P = \{p = a_T l \mid a_T \in T, l \in L\} \quad (1.3.16)$$

Son action sur l'espace de Minkowski est donnée par :

$$x^i \longrightarrow x'^i = \Lambda^i_j x^j + a^i. \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (1.3.17)$$

Λ^μ_ν est la représentation matricielle du groupe de Lorentz et a^μ est le quadrivecteur de la translation spatio-temporelle.

L'action d'un élément $g(a, l) \in P$ sur les points de l'espace-temps de Minkowski peut être écrite sous la forme d'une matrice 5×5 :

$$\begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda \in L, \quad a \in \mathbb{R}^4 \quad (1.3.18)$$

La loi de multiplication du groupe est le produit de deux transformations successives de Poincaré, ce qui donne :

$$g(a, l)g(a', l') = g(la' + a, ll') \quad (1.3.19)$$

On peut facilement déduire de la loi du groupe que l'élément inverse est $g(-l^{-1}a, l^{-1})$ et que les translations forment un sous-groupe invariant ($lT(a)l^{-1} = T(la)$) abélien du groupe de Poincaré. Une translation finie et infinitésimale peuvent se mettre respectivement sous la forme

$$T(a) = \exp(-ia^i P_i) \quad (1.3.20)$$

$$T(\delta a) = I - i\delta a^i P_i \quad (1.3.21)$$

En utilisant la forme matricielle, les générateurs du groupe des translations peuvent se mettre sous la forme

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.3.22)$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad (1.3.23)$$

En pratique, les générateurs des translations spatiales P^α ; ($\alpha = 1, 2, 3$), s'identifient à l'opérateur impulsion \mathbf{P} et le générateur temporel à l'opérateur d'énergie E (ou l'hamiltonien du système). Ces générateurs ont la forme différentielle bien connue

$$P_i = i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.3.24)$$

et se transforment comme les composantes d'un quadri-vecteur sous l'action du groupe de Lorentz

$$\Lambda P_i \Lambda^{-1} = [\Lambda]_i^l P_l \quad (1.3.25)$$

Le caractère abélien du groupe des translations et la forme explicite de ses générateurs montrent que son algèbre de Lie est commutative

$$[P_i, P_j] = 0 \quad (1.3.26)$$

Le groupe de Poincaré est donc un groupe à dix paramètres réels, dont les générateurs sont les générateurs de ses sous-groupes. L'Algèbre de Lie du groupe de Poincaré contient les relations de commutation propres à chaque sous-groupe et les relations de commutations sont :

$$\begin{aligned} [P_i, P_j] &= 0 \\ [J_1, P_0] &= 0, \quad [J_1, P_1] = 0, \quad [J_1, P_2] = P_3 \\ [K_1, P_0] &= P_1, \quad [K_1, P_1] = P_0, \quad [K_1, P_2] = 0 \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

On remarque ainsi les caractéristiques suivantes :

-Le caractère abélien du groupe des translations et la forme explicite de ses générateurs montrent que son algèbre de Lie est commutative.

-Le moment cinétique est conservé.

-L'observable K n'est pas une constante de mouvement.

1.3.2 Transformations de Jauge

Par opposition aux symétries précédentes qui sont des symétries de type géométrique, il existe toutefois, d'autres types de symétries continues. On les appelle symétries internes. Ces symétries ne sont pas faciles à visualiser justement à cause de cette différence. Lorsque l'on regarde les équations, on constate qu'il peut exister des opérations, analogues aux rotations ou transformations géométriques, mais sur des paramètres internes (au lieu des variables positions et temps). Ce sont des symétries tout à fait analogues. Mais au lieu de modifier des variables tel que la position ou le temps, elles modifient d'autres variables dans les équations.

Les théories de jauge furent proposées par Yang et Mills en 1954. Elles ont été essentiellement élaborées dans les années cinquante et soixante. Mais elles n'ont jamais cessé de connaître des développements très importants depuis. En physique théorique, une théorie de jauge est une théorie des champs basée sur un groupe de symétrie locale, appelé groupe de jauge, définissant une « invariance de jauge »⁽¹⁾. Dire qu'une équation de champs donnée possède une symétrie *interne*, cela implique qu'il existe une (ou plusieurs) transformation agissant sur les champs selon[39] :

$$u_i(x) \rightarrow u'_i(x) = \mathbf{A}_k^i u^k(x). \quad (1.3.28)$$

En général la matrice \mathbf{A} de dimension $(N \times N)$ n'est pas unique. L'ensemble des matrices \mathbf{A} forme un groupe G , cette symétrie est qualifiée d'**interne** puisqu'elle transforme les champs sans agir sur l'espace-temps : les coordonnées ne sont pas affectées par la transformation.

⁽¹⁾L'expression « invariance de jauge » a été introduite en 1918 par le mathématicien Hermann Weyl.

Considérons les transformations qui sont des fonctions analytiques des paramètres infinitésimaux ω_I (on somme sur I) :

$$u_i \longrightarrow u'_i(\omega) = u_i e^{i\omega} \quad (1.3.29)$$

Le groupe G est alors un groupe de *Lie*.

On peut se restreindre à des transformations infinitésimales et poser que :

$$\begin{aligned} \Lambda_k^j &= \delta_k^j + i\omega_I (T^I)_k^j \\ u'_i &= u_i + \delta u_i \\ \delta u_i &= i\omega_I (T^I)_i^k u_k \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

L'ensemble des matrices linéairement indépendantes T^I forme un ensemble de **générateurs** de l'**algèbre de Lie** du groupe G . Les symétries sont de deux types : lorsque les paramètres ω_I sont indépendants du point de l'espace-temps, la symétrie est dite *globale*. elle transforme les champs de la même façon dans tout l'espace-temps. Par contre on peut envisager des transformations laissant l'action invariante et qui agissent différemment selon le point dans l'espace-temps:

$$u_j(x) \longrightarrow u'_j(x) = \Lambda_j^k(x) u_k(x) \quad (1.3.31)$$

Dans ce cas, les paramètres sont des fonctions $\omega_I(x)$ et la transformation est une symétrie de jauge locale

Chapitre 2

Symétries et lois d'invariance

Les lois d'invariance sont à la base de la construction des théories de la physique des particules. On parle de symétrie en physique, lorsqu'il ya invariance d'un ensemble de lois donné, sous une transformation dite de symétrie. Parmi les transformations pour lesquelles le lagrangien et son action sont invariants, on a respectivement : la translation quadri-dimensionnelle des coordonnées, les rotations dans un espace quadri-dimensionnel et les transformations de jauge des fonctions du champ.

$$\begin{aligned}x_i &\longrightarrow x'_i = x_i + a_i; \\x_i &\longrightarrow x'_i = a_{ij}x^j; \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \\u_k &\longrightarrow u'_k = u_k e^{i\alpha} \quad k = 0, \dots, N \\u_k^* &\longrightarrow u_k^{*'} = u_k^* e^{-i\alpha}\end{aligned}$$

2.1 Formalisme lagrangien en théorie des champs

En règle générale, les symétries des équations sont essentielles pour permettre la classification et l'interprétation de leurs solutions. Une équation symétrique sous un trop grand groupe de transformations permettra des phénomènes qu'il sera difficile d'interpréter. Il y a donc un intérêt à avoir une méthode permettant à partir d'un groupe de symétries, d'obtenir des équations dynamiques invariantes précisément sous ce groupe. Le formalisme Lagrangien, à l'aide du théorème de Noether, accomplit cette fonction.

Le lagrangien \mathcal{L} est une fonction scalaire (sur un espace de configuration) qui doit être bornée inférieurement. Cette formulation, indépendamment de l'expression effective de \mathcal{L} , permet de tirer les conséquences de l'idée que l'action est la somme au cours du temps d'actions instantanées. Généralement, elle permet d'accroître la complexité du modèle par simple ajout de termes : le Lagrangien d'un produit de systèmes non couplés est la somme des Lagrangiens de chaque système, et le couplage se traduit par l'addition d'un terme d'interaction.

Principe de moindre action

Dans sa version originale, la formulation lagrangienne des lois consiste à faire dériver les lois du mouvement (équations du mouvement) d'un principe unique, le principe de moindre action. Le principe de moindre action en mécanique classique consiste à décrire la trajectoire suivie par une particule, comme celle minimisant une certaine grandeur qu'on nomme action. Étant donné un espace de configurations \mathcal{M} (de Minkowski), cette grandeur prend la forme suivante⁽¹⁾ :

$$\mathcal{S}_t(q) = \int_0^t \mathcal{L}(q(\tau), \dot{q}(\tau), \tau) d\tau \quad (2.1.1)$$

ce principe se traduit analytiquement par :

$$\delta\mathcal{S} = 0, \quad (2.1.2)$$

Pour des variations de trajectoires δq nulles aux limites et pour lesquelles la variation de \mathcal{S} en q est nulle, la trajectoire $q(t)$ satisfait en tout temps à l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q(\tau), \dot{q}(\tau), \tau) = \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q(\tau), \dot{q}(\tau), \tau) \right] \quad (2.1.3)$$

Le passage du cas classique au cas des champs, se fait en considérant non plus des trajectoires : $t \mapsto q(t) \in \mathbb{R}^d$, mais des champs: $(t, q) \in \mathbb{R}^{d+1} \mapsto \varphi(t, q) \in \mathbb{R}^n$. Autrement dit, la théorie des champs peut être obtenue formellement en généralisant les expressions pour plusieurs degrés de liberté à une infinité non dénombrable de degrés de liberté. En prenant les coordonnées des points de l'espace pour représenter les indices de ces degrés de

⁽¹⁾ q dénote la trajectoire, où: $\tau \mapsto q(\tau)$

liberté, on aura les substitutions suivantes :

$$\begin{aligned} i &\rightarrow \vec{x}, & j &\rightarrow \vec{y}, \\ \sum_i &\rightarrow \int d^3x \\ \delta_{ij} &\rightarrow \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

$\delta(\vec{x} - \vec{y})$ est la fonction de Dirac à trois dimensions.

Fonctions du champ

On appelle fonction de champ $u_i(x)$, une fonction unique (à une composante), ou plusieurs fonctions (à plusieurs composantes), définies dans chaque système de référence à quatre dimensions x^μ . Sachant que la matrice de transformation Λ , est entièrement déterminée par la matrice de transformation L de Lorentz, alors :

$$x \rightarrow x' = Lx \tag{2.1.5}$$

$$u(x) \rightarrow u'(x') = \Lambda u(x) \tag{2.1.6}$$

Citons dans ce contexte, les trois sortes de champs les plus utilisés, à savoir :

Le champ scalaire

C'est le cas le plus simple. Ce sont des champs réels ou complexes sans spin. Les transformations agissant sur ce type de champ ont pour générateur $S^{\mu\nu} = 0$. Elles correspondent à la représentation triviale, de dimension 1, de l'algèbre de Lie. Elles agissent donc sur un champ unique $u(x)$ pour lequel $u'(x') = u(x)$.

Le champ vectoriel

Le champ vectoriel est un quadrivecteur de champs $V^\mu(x)$, utilisé dans la description d'une particule de spin entier. Leurs transformation de Lorentz utilise des générateurs $S^{\mu\nu}$ de la forme : $(S^{\mu\nu})^\rho_\sigma = i(\eta^{\mu\rho}\delta^\nu_\sigma - \eta^{\nu\rho}\delta^\mu_\sigma)$

Le champ spinoriel

Ces champs permettent la description de particule de spin $\frac{1}{2}$. Sachant qu'il en existe des généralisations pour les spins demi-entier plus élevés.

2.1.1 Equations d'Euler-Lagrange

La densité lagrangienne est une fonction des seuls champs $u_i(x)$ et de leurs dérivées première $\partial_\mu u_i(x)$, (x est un point de l'espace-temps $x = (t, x)$). Les équations du champ sont des équations différentielles du second ordre qu'on obtient moyennant le principe de moindre action. Généralement on considère le lagrangien comme une fonction scalaire réelle des variables du champ $u_i(x)$, et de leurs dérivées premières $\partial_k u_i$. Le lagrangien⁽¹⁾ local, prend la forme :

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(u_i, \partial_k u_i), \quad (2.1.7)$$

Soit l'action \mathcal{A} , et soit le volume quadri-dimensionnel Ω :

$$\mathcal{A} = \int_{\Omega} dx \mathcal{L}(u_i(x), \partial_k u_i(x)) \quad (2.1.8)$$

Calculons la variation de l'action :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A} &= \delta \int_{\Omega} dx \mathcal{L}(u_i(x), \partial_k u_i) \\ &= \int_{\Omega} dx \delta [\mathcal{L}(u_i(x), \partial_k u_i)] \\ &= \int_{\Omega} dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k u_i} \delta \partial_k u_i \right] \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Comme, la variation locale commutent avec l'opérateur de dérivation : $\left\{ \delta \overset{\sim}{\partial}_k u_i = \partial_k \delta u_i \right\}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A} &= \int_{\Omega} d\mathbf{x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k u_i} \partial_k \delta u_i \right] \\ &= \int_{\Omega} d\mathbf{x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \delta u_i + \partial_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k u_i} \delta u_i \right) - \partial_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k u_i} \right) \delta u_i \right] \\ &= \int_{\Omega} d\mathbf{x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \delta u_i - \partial_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k u_i} \right) \delta u_i \right] + \int_{\Omega} dx \partial_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k u_i} \delta u_i \right) \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Le dernier terme de cette équation (l'intégrale de volume quadri-dimensionnel), peut être remplacé à l'aide du théorème d'*Ostrogradski*⁽²⁾, par une intégrale de surface tri-dimensionnelle

⁽¹⁾Il s'agit réellement, d'une densité lagrangienne. Par abus de langage, nous employons souvent le terme lagrangien.

⁽²⁾Ce théorème permet de réduire le calcul d'une intégrale sur un volume à celui d'une intégrale sur la surface du volume: $\int_V \operatorname{div} X dV = \int_{\partial V} X \cdot n \cdot ds$; Où X est un champ scalaire et n la normale à la surface d'intégration ∂V , frontière de V .

qui délimite ce volume⁽¹⁾ [48].

$$\int_{\Omega} dx \partial_k \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k u_i} (\delta u_i) \right] = \int_{\Sigma} dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k u_i} (\delta u_i) n(x) \quad (2.1.11)$$

Comme la variation des fonctions du champ à la limite du volume est nulle, alors l'intégrale de surface \int_{Σ} disparaît et la variation de l'action s'écrit donc sous la forme :

$$\delta \mathcal{A} = \int_{\Omega} d\mathbf{x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i(x)} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k u_i} \right] \delta u_i \quad (2.1.12)$$

D'après le principe de moindre action :

$$\delta \mathcal{A} = \int_{\Omega} dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i(x)} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k u_i)} \right] \delta u_i = 0, \quad (2.1.13)$$

Du fait que δu_i à l'intérieur de l'intégrale est différente de zéro, cette dernière condition n'est observée que si :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i(x)} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k u_i)} = 0. \quad (2.1.14)$$

Cette dernière formule représente les équations d'**Euler-Lagrange** (ou équations du mouvement). Elles déterminent la dynamique des N champs u_i pour $i = 1, \dots, N$.

Afin que les équations du champ fournies par l'action, soient invariantes par les transformations de *Lorentz*, nous imposons à l'action \mathcal{A} d'être invariante par les transformations indiquées, d'où l'invariance du lagrangien, car un élément de volume quadri-dimensionnel (dx), est un invariant de Lorentz.

2.1.2 Lois de conservations

D'après le théorème de Noether, l'invariance de ce lagrangien, et donc des équations d'Euler-Lagrange par rapport à certaines symétries, engendre l'existence d'une certaine grandeur qui se conserve pour chacune d'elles. Il est possible de montrer qu'à chaque symétrie continue correspond une valeur conservée. Intuitivement cela semble logique. S'il y a quelque chose qui fait que l'évolution du système est invariante sous certaines transformations, alors il semble logique de pouvoir trouver une quantité qui est également invariante sous l'évolution.

⁽¹⁾Le passage d'une intégrale sur le volume à une intégrale de surface s'explique intuitivement par le fait qu'il suffit de mesurer ce qui entre et sort de la surface (la composante normale à la surface du champ) pour mesurer l'évolution de ce qui se passe à l'intérieur du volume. Outre l'intéressant passage du volume à la surface, ce théorème permet de calculer la valeur moyenne de la différentielle d'un champ à l'aide des valeurs de ce champ sur la surface. On gagne ainsi un ordre dans l'expression des différentielles.

Théorème de Noether

Le théorème de Noether est souvent utilisé par la physique théorique, où tout phénomène est abordé en termes de symétrie d'espace, de charges, et même de temps. Voici respectivement, son énoncé et sa démonstration : *A toute transformation continue des coordonnées, annulant la variation de l'action, et pour laquelle la loi de transformation des fonctions de champ est également donnée, correspond un certain invariant, c'est-à-dire une combinaison des fonctions de champ et de leurs dérivées qui se conserve.* **E. Noether**[44].

Afin de démontrer ce théorème, nous considérons ces transformations infinitésimales des coordonnées et des champs qui sont respectivement :

$$x^k \rightarrow x'^k = x^k + \delta x^k \quad (2.1.15)$$

$$u_i(x) \rightarrow u'_i(x') = u_i(x) + \delta u_i(x) \quad (2.1.16)$$

tel que :

$$\delta x^k = X_j^k \delta w^j \quad (2.1.17)$$

$$\delta u_i(x) = \Psi_{ij}(x) \delta w^j \quad (2.1.18)$$

Avec : δw^j est un paramètre infiniment petit de la transformation, X_j^k est la matrice de transformation des coordonnées et Ψ_{ij} est la matrice de transformation des fonctions de champ.

δu_i est la variation de la fonction de champ, due aussi bien au changement de sa forme, qu'au changement de son argument :

$$\delta u_i(x) = u'_i(x') - u_i(x) = \bar{\delta} u_i(x) + \bar{\bar{\delta}} u_i(x) \quad (2.1.19)$$

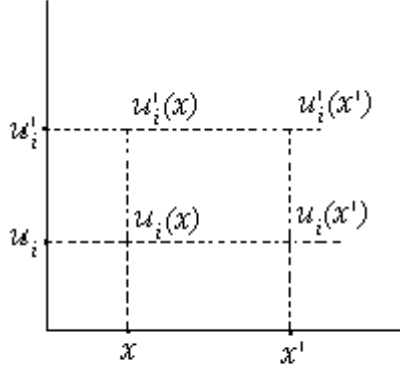


Figure.(3). variation de la fonction du champ.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\delta}u_i(x) = u'_i(x) - u_i(x) \\ \bar{\bar{\delta}}u_i(x) = u'_i(x') - u_i(x) \end{array} \right.$$

* $\bar{\bar{\delta}}u_i(x)$ est la variation de la même fonction conditionnée par le changement de l'argument

:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\delta}}u_i(x) &= u_i(x') - u_i(x) \\ &= u_i(x) + \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_k} \delta x_k - u_i(x) \\ &= \partial_k u_i(x) \delta x^k. \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

* $\bar{\delta}u_i(x)$ est la variation de forme de la fonction du champ, pour la même valeur de l'argument :

$$\bar{\delta}u_i(x) = u'_i(x) - u_i(x) \quad (2.1.21)$$

La variation de la forme s'écrit compte tenu de l'équation (2.1.20) et (2.1.21):

$$\begin{aligned} \bar{\delta}u_i(x) &= \delta u_i(x) - \bar{\bar{\delta}}u_i(x) \\ &= \left[\Psi_{ij} - \frac{\partial u_i(x)}{\partial x^k} X_j^k \right] \delta \omega^j. \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

La variation ($\delta\mathcal{A}$) de l'action se compose de celle du lagrangien et de celle du domaine d'intégration :

► La variation du domaine d'intégration :

$$\begin{aligned} \delta(dx) &= dx' - dx = \frac{dx}{dx^i} \delta(dx^i) \\ &= dx \partial_k \delta x^k \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

► La variation totale du lagrangien $\delta\mathcal{L}$, est égale à la somme de la variation $\bar{\delta}\mathcal{L}$ de la forme et de la variation $\bar{\bar{\delta}}\mathcal{L}$ par rapport aux coordonnées. Donc :

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i}\bar{\delta}u_i + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k u_i)}\right)\bar{\delta}(\partial_k u_i) \quad (2.1.24)$$

Aussi, nous avons :

$$\bar{\bar{\delta}}\mathcal{L} = \partial_k\mathcal{L}\delta x^k \quad (2.1.25)$$

Alors,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \bar{\delta}\mathcal{L} + \bar{\bar{\delta}}\mathcal{L} \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i}\bar{\delta}u_i + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k u_i)}\right)\bar{\delta}(\partial_k u_i) + \partial_k\mathcal{L}\delta x^k \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

En remplaçant (2.1.24) et (2.1.25) dans la variation de l'action on obtient :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A} &= \int dx (\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_k\delta x^k) \\ \delta\mathcal{A} &= \int dx \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i}\bar{\delta}u_i + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k u_i)}\right)\bar{\delta}(\partial_k u_i) + \partial_k\mathcal{L}\delta x^k + \mathcal{L}\partial_k\delta x^k \right) \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

L'intégration par partie du deuxième terme, nous permet de réécrire cette dernière équation sous cette forme :

$$\delta\mathcal{A} = \int dx \left(\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i} - \partial_k \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k u_i)} \right) \right] \bar{\delta}u_i + \partial_k \left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k u_i)} \right) \bar{\delta}u_i + \mathcal{L}\delta x^k \right] \right) \quad (2.1.28)$$

Enfin, compte tenu des équations d'Euler-lagrange, la variation de l'action se réduit à cette forme :

$$\delta\mathcal{A} = \int dx \partial_k \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_k u_i} \bar{\delta}u_i + \mathcal{L}\delta x^k \right) \quad (2.1.29)$$

En remplaçant les transformations par leurs écritures matricielles, on aura :

$$\delta\mathcal{A} = \int dx \delta\omega^j \partial_k \left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_k u_i} [\Psi_{ij} - \partial_n u_i X_j^n] \right) + \mathcal{L}X_j^k \right] \quad (2.1.30)$$

Si nous définissons le terme θ_j^k qui s'écrit sous la forme:

$$\theta_i^k = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_k u_j} (\partial_n u_i X_j^n - \Psi_{ij}) - \mathcal{L}X_i^k. \quad (2.1.31)$$

On aura bien la variation de l'action qui s'écrit :

$$\delta\mathcal{A} = - \int dx \partial_k \theta_j^k \delta\omega^j = 0 \quad (2.1.32)$$

Cette variation de l'action est nulle. Etant donné que sous le signe de cette dernière intégrale, les paramètres de transformation et le volume d'intégration sont arbitraires et différent de zéro; en égalant à zéro les dérivées fonctionnelles de l'action par rapport aux paramètres $\delta\omega^j$ on obtient que :

$$\frac{\delta A}{\delta\omega^j} = -\partial_k\theta_j^k = 0 \quad (2.1.33)$$

C'est la forme différentielle de la loi de conservation. Pour écrire la loi de conservation sous une forme intégrale équivalente, nous séparons dans l'équation (2.1.33) les deux parties temporelle et spatiale pour effectuer l'intégration par rapport à l'espace tridimensionnel :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A} &= 0 \\ \implies \int dv\partial_0\theta_j^0 - \int dv\partial_\alpha\theta_j^\alpha &= 0. \quad \alpha = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

Le champ est nul aux limites du volume, dans la direction du genre espace, donc :

$$\int dv\partial_\alpha\theta_j^\alpha = 0$$

La forme intégrale de la loi de conservation s'écrit alors :

$$\partial_{x_0} \int dv\theta_j^0 = 0 \quad (2.1.35)$$

Le terme $\left\{ \int dv\theta_j^0 \right\}$ représente la grandeur conservative qui ne varie pas en fonction du temps. Ainsi à la transformation continue, pour laquelle l'action est invariante, correspond une certaine grandeur conservative. Ces grandeurs sont généralement : l'énergie-impulsion, le moment cinétique total (orbital et spinoriel) et le courant (charge). L'action A possède une symétrie s'il existe un ensemble de transformations des champs u_i et des coordonnées d'espace-temps laissant A invariante. l'ensemble de toutes les symétries de l'action forme nécessairement un groupe de symétrie.

2.2 Symétries spatio-temporelles et théorème de Noether

2.2.1 Conservation de l'énergie-impulsion

Du fait de l'invariance de l'action par rapport aux translations quadri-dimensionnelles. Du fait aussi que les fonctions du champ ne changent pas dans les translations :

$$\delta u_i(x) = 0 \quad (2.2.1)$$

La matrice Ψ_{ji} s'annule aussi. Ajoutons à ça, le fait que, compte tenu de l'équation (2.1.17), la matrice de transformation X_i^k et pour un choix convenable de paramètres, peut s'écrire :

$$X_i^k = \delta_i^k = g_i^k. \quad (2.2.2)$$

Dans ce cas, la formule de la grandeur conservative est une grandeur qui se transforme comme un tenseur d'ordre deux; c'est le tenseur Energie-impulsion :

$$T_i^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k u_j} (\partial_n u_j g_i^k) - \mathcal{L} g_i^k \quad (2.2.3)$$

La composante temporelle P_0 traduit l'énergie du champ et la composante spatiale, est celle de l'impulsion du champ :

$$P_j = \int d\mathbf{x} T_{0j}. \quad (2.2.4)$$

Revenons à l'équation (2.2.3), la densité d'énergie du champ (hamiltonien) s'écrit :

$$T_{00} = \frac{\partial L}{\partial \partial_0 u_i} (\partial_0 u_i) - \mathcal{L} \quad (2.2.5)$$

On déduit qu'à l'invariance de l'action par translations quadri-dimensionnelles, correspond la loi de conservation du qudri-vecteur d'énergie-impulsion.

2.2.2 Conservation du moment cinétique total

La conservation du moment cinétique total est obtenue dans le cas de l'invariance de l'action par rotation des coordonnées. La matrice de transformation des coordonnées s'écrit :

$$X_{\mu[\rho\sigma]} = g_{\rho\mu} x_\sigma - g_{\sigma\mu} x_\rho, (\rho \leq \sigma). \quad (2.2.6)$$

La matrice de transformation par rotation des fonctions de champ est de la forme :

$$\Psi_{i[\rho\sigma]} = A_{i[\rho\sigma]}^j u_j. \quad (2.2.7)$$

la forme de la matrice $A_{ij:[\rho\sigma]}$ est liée aux transformations de *Lorentz*. Nous réécrivons donc l'équation (2.1.33) de la manière suivante :

$$M_{[\rho\sigma]}^\mu = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu u_i} \partial_\rho u_i - \mathcal{L} \delta_\rho^\mu \right] x_\sigma - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu u_i} \partial_\sigma u_i - \mathcal{L} \delta_\sigma^\mu \right] x_\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu u_i} \Psi_{i[\rho\sigma]}. \quad (2.2.8)$$

Elle traduit la forme conservative du moment cinétique.

2.3 Symétries internes et courants de Noether

2.3.1 Invariance de jauge globale (premier type)

Soit un Lagrangien décrivant une particule chargée libre :

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(u(x), \partial_k u(x)) \quad (2.3.1)$$

Ce Lagrangien est invariant pour les transformations de jauge globales (θ , est un paramètre qui ne dépend pas de l'espace, c'est une jauge globale) :

$$u'(x) = e^{ie\theta} u(x) \quad (2.3.2)$$

Par le théorème de Noether, il correspond à cette invariance respectivement, un courant conservé et une charge, la charge électrique, constante du mouvement :

$$j_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_i)} u_i \quad (2.3.3)$$

$$Q = \int d\mathbf{x} j_0(x) \quad (2.3.4)$$

Autrement dit, à la conservation de la charge électrique est associé un ensemble de transformations :

$$U(\theta) = e^{ie\theta} \quad (2.3.5)$$

Formant un groupe $U(1)$ que l'on appellera le groupe de jauge global. Pour trouver la grandeur conservative qui correspond à l'invariance de l'action par rapport aux transformations de jauge, nous devons d'abord écrire les matrices de transformation $X_{\mu\nu}$ et Ψ_{ij} correspondantes, puis les remplacer dans l'équation (2.1.33).

Sachant que dans le cas des transformations de Jauge, les coordonnées ne changent pas:

$$\delta x_\mu = 0 \Rightarrow X_\mu^\nu = 0 \quad (2.3.6)$$

et la matrice des transformations infinitésimales des fonctions de champ pour une charge

" z " s'écrit:

$$\begin{aligned} \Psi_i &= izu_i(x), \\ \Psi_i^* &= -izu_i^*(x) \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

elle est déduite comme suite : Pour une transformation de Jauge infinitésimale ($\theta \rightarrow 0$), l'équation (2.3.2) s'écrit:

$$\begin{aligned} u_i'(x) &= (1 + i\theta z) u_i(x) = u_i(x) + i\theta z u_i(x), \\ u_i^{*'}(x) &= (1 - i\theta z) u_i^*(x) = u_i^*(x) - i\theta z u_i^*(x) \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

la variation des fonctions est:

$$\begin{cases} \delta u_i(x) = u_i'(x) - u_i(x) = i\theta z u_i(x), \\ \delta u_i^*(x) = u_i^{*'}(x) - u_i^*(x) = -i\theta z u_i^*(x) \end{cases} \quad (2.3.9)$$

Passons à l'équation du courant, en remplaçant par (2.3.9) on trouve:

$$j^\mu = iz \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_i^*)} u_i^* - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_i)} u_i \right). \quad (2.3.10)$$

C'est le quadrivecteur courant, qui vérifie bien l'équation de continuité :

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (2.3.11)$$

La charge est obtenue par l'intégrale de la composante temporelle du courant, et s'écrit donc:

$$Q = \int d\mathbf{x} j_0(x) = iz \int d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 u_i^*)} u_i^* - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 u_i)} u_i \right) \quad (2.3.12)$$

2.3.2 Invariance de jauge locale

Si l'on permet maintenant au paramètre θ de dépendre des points de l'espace temps $\theta = \theta(x)$, l'invariance sera brisée car

$$\partial_\mu u'_i(x) = e^{ie\theta} \partial_\mu U_i(x) + ie \partial_\mu \theta e^{ie\theta} u_i(x) \quad (2.3.13)$$

Pour restaurer l'invariance, il est nécessaire de supprimer le dernier terme en introduisant un nouveau champ A_μ par la substitution :

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \quad (2.3.14)$$

où A'_μ est la transformé de A_μ selon l'équation :

$$A'_\mu = +\partial_\mu \theta A_\mu \quad (2.3.15)$$

Alors,

$$(D_\mu u_i)' = e^{ie\theta} (D_\mu u_i) \quad (2.3.16)$$

D_μ est appelé la dérivée covariante et le Lagrangien devient

$$\mathcal{L}(u_i, D_\mu u_i) \quad (2.3.17)$$

Soit par exemple pour le cas d'un champ électromagnétique : Outre les termes libres, il contient un terme couplant A_μ au courant J^κ appelé terme d'interaction électromagnétique minimale.

Il est clair que d'autres termes invariants peuvent être ajoutés au Lagrangien, notamment un terme ne contenant que A_μ ,

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.3.18)$$

où $F_{\mu\nu}$ est le tenseur de champ électromagnétique :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.3.19)$$

Nous notons que d'autres termes invariants de jauge qui tiennent compte des champs matériels u_i sont encore possibles .

Chapitre 3

Théorème de Noether - cas de la particule étendue -

Nous considérons dans ce chapitre, la formulation et les fondements de la construction du formalisme lagrangien pour la théorie des champs des particules étendues. Par particule étendue, on sous entend que la particule n'est pas localisée en un point x^μ , mais elle possède des degrés de liberté supérieurs que nous proposons de décrire au moyen de la fonction d'onde de la particule. Cette dernière dépendra alors des degrés de liberté externes au moyen de la variable x , et internes au moyen de la fonction η .

3.1 La théorie fonctionnelle

La théorie fonctionnelle peut être considérée comme la généralisation de théorie de la double solution, émise par Louis de Broglie en 1927. A l'époque, La mécanique ondulatoire génèrait un certain nombre de questions principales. D'abord, il y'avait la question de la signification physique de l'onde dont la mécanique ondulatoire décrit les propriétés : est-ce que l'onde décrivait une onde réelle de nature inconnue, ou était un simple modèle mathématique à signification seulement statistique ? Ensuite, il y'avait la question de la place de la notion de particule, et de la dualité onde-corpuscule : Selon la mécanique ondulatoire, toute l'information est contenue dans la fonction d'onde ; il n'y a pas de place à priori pour la notion de corpuscule (par exemple, des notions comme la trajectoire des corpuscules

perdent leur sens). Or, Louis de Broglie n'acceptait pas une perte de réalité de la notion de corpuscule et de sa trajectoire. Il rechercha par conséquent, entre 1924 et 1927, une théorie qui permettrait de donner un sens physique autant à la fonction d'onde de Schrödinger qu'au concept de corpuscule. Cette théorie est la théorie de l'onde pilote ou théorie de la double solution [29]. Dans cette section, nous donnons un aperçu général sur la théorie fonctionnelle des corpuscules, telle qu'elle fut proposée par J.L Destouches [30].

3.1.1 Représentation ponctuelle

Un corpuscule est par définition, toute partie d'un système physique qui est insécable par des procédés de morcellements donnés. Si de plus, cette insécabilité est vérifiée pour tout procédé de morcellement, ce corpuscule est dit : corpuscule élémentaire. Maintenant, l'identité géométrique associée à ce corpuscule, sera naturellement un point ! Car, l'indivisibilité du point traduit adéquatement l'insécabilité du corpuscule. C'est pour cette seule raison que les diverses propriétés du corpuscule vont se trouver exprimées au moyen d'entités géométriques fonction du point figuratif. A titre d'exemple, en mécanique classique et en mécanique quantique, on associe les entités scalaires pour la masse et la charge, les vecteurs pour le moment dipolaire et le moment magnétique, spineur pour le spin, etc.

Mais le problème qui se pose, est qu'il y a une forte possibilité (voire certitude) d'existence de grandeurs observables encore ignorées, et qui ne se laisseront pas décrire de cette manière

Corpuscule et univers

En pratique, et afin d'étudier un certain phénomène physique pendant un intervalle de temps donné, on est amené à utiliser différentes approximations. Dans la majorité des cas, il est lieu de considérer que le système physique (un corpuscule libre par exemple), est une partie bien distinguée du reste de l'univers et nous pouvons par un choix adéquat, atténuer cette coupure avec l'extérieur du système étudié, au moyen d'une action globale décrite par un champ de forces. Autrement dit, l'échange entre le système physique et le milieu externe est observé à travers une interaction moyenne globale dite champ extérieur via une fonction

donnée $F(P, t)$ de point et du temps (scalaire, vecteur ou tenseur). Cette interaction peut aussi être complétée par un champ aléatoire qui tient compte des fluctuations autour de la valeur moyenne, provoquées par le mouvement des corpuscules de l'environnement.

Insuffisance d'une représentation ponctuelle

Dans toutes les approximations citées ci-dessus, on néglige d'une part, la réaction du système sur le reste de l'univers et d'autre part, les actions individuelles de chaque élément de la partie extérieure au système sur les éléments de ce dernier. Si donc nous voulons remédier à la situation, il faut que l'extérieur exerce une influence non seulement sur les actions auxquelles le système est soumis, mais encore sur ses caractéristiques propres. Pour cette raison, la représentation d'un corpuscule par un point géométrique, donc à caractère non modifiable par l'extérieur, s'avère insuffisante.

3.1.2 Représentation fonctionnelle d'un corpuscule

Pour qu'un corpuscule soit influençable dans ces propres caractéristiques, il doit nécessairement se trouver déterminé par une infinité d'éléments. Seulement, il faut tenir compte du fait que tout système physique doit être défini au moyen d'un nombre fini de variables (possibilités expérimentales effectives). Or, l'entité mathématique associée à une telle représentation physique (caractère à la fois infinie mais dénombrable), ne sera autre qu'une fonction u (choisie à valeurs complexes) appartenant à un espace séparable (\mathfrak{R}_u) (espace abstrait de Fréchet).

$$u \in (\mathfrak{R}_u) \tag{3.1.1}$$

Selon le fait que le corpuscule a une caractéristique interne s'exprimant au moyen d'une grandeur à nombre fini de valeurs (comme le spin...), la fonction u peut se décomposer en un ensemble fini et déterminé de fonctions u_i . La fonction u ou cet ensemble de fonction u_i constitue la représentation fonctionnelle d'un corpuscule.

Si de plus, nous tenons compte du principe de rattachement spatial qui dit qu'*un élément mathématique d'une théorie physique qui possède une signification physique se rattache de quelque manière au temps et à l'espace*, alors nous devons fixer les arguments de notre

fonction u considérée par hypothèse comme un élément physique décrivant un corpuscule. Ces arguments seront un point variable \mathbf{P} de l'espace physique et une variable temporaire \mathbf{T} parcourant l'ensemble des instants de l'observateur, donc, ni \mathbf{T} ni \mathbf{P} n'ont de signification physique, seule la fonction $u = u(\mathbf{P}, \mathbf{T})$ en a une.

Représentation géométrique d'un corpuscule

La représentation fonctionnelle ne supprime pas la représentation géométrique au moyen d'un point M . Seulement, il est défini par la fonction u qui représente la totalité des caractères physiques du corpuscule. Autrement dit, M est une fonctionnelle de u

$$M = F[u]$$

Notons que la notation $M = \text{sing}(u)$, utilisée par de Broglie dans sa théorie de 1927, signifie que M correspond à une singularité où u prend une valeur très grande ce qui signifie qu'une quasi totalité de l'énergie est concentrée en M . Ceci justifie l'identification de ce dernier avec le corpuscule. Cette conception n'apparaîtra dans le cas de la théorie fonctionnelle que dans l'approximation linéaire.

Champ et onde physique

Un champ est par définition une fonction de point et du temps, alors dans ce sens, la fonction $u(\mathbf{P}, \mathbf{T})$ est un champ. Dans la théorie fonctionnelle, l'emploi du mot "onde" est étendu au champ de la fonction $u(\mathbf{P}, \mathbf{T})$ qui est appelée *onde physique*. Voici donc les différentes représentations d'un corpuscule selon chaque théorie donnée :

▷ En théorie classique, le point $M(t)$ désigne la position d'un objet ponctuel à un instant t donné.

▷ En mécanique ondulatoire, M peut être aussi une variable libre désignant un corpuscule et argument de la fonction d'onde prévisionnelle $\psi(M, t)$.

▷ En théorie fonctionnelle, le corpuscule est représenté par le champ $u(\mathbf{P}, \mathbf{T})$ qui joue le rôle de M . Ce qui joue alors le rôle de $\psi(M, t)$ est l'onde fonctionnelle qui se propage dans l'espace fonctionnel (\mathfrak{R}_u) et dont les points sont les fonctions u , on la note $X[u, t]$. Quand on ne cherche à calculer des prévisions que pour des grandeurs liées à l'aspect géométrique,

c'est-à-dire à la position, on peut alors construire à partir de l'onde fonctionnelle $X[u, t]$ une fonction de point de l'espace-temps : $\Psi(M, t) = \Psi[\text{sing}(u), t]$ qu'on appelle ainsi, l'onde prévisionnelle et qui est l'équivalent de $\psi(M, t)$.

Postulats

Pour mieux illustrer les principes de la théorie fonctionnelle générale du corpuscule telle qu'elle fut proposée par Destouches, nous citons ci-dessous, les trois premiers postulats sur lesquels est fondée cette théorie :

1) *Un corpuscule est représenté par une fonction à valeurs complexes u (ou par un ensemble fini de fonctions u_i) de l'espace-temps qui appartient à un certain espace fonctionnel séparable,*

$$u(P, T) \in (\mathfrak{R}_u) \quad (3.1.2)$$

2) *Un corpuscule est représenté au point de vue géométrique par un point de l'espace physique qui est une certaine fonctionnelle de u ,*

$$M = F[u(P, T)] \quad (3.1.3)$$

3) *La fonction u obéit à une équation de la forme*

$$\varepsilon(u) = Q\left(u, \nabla, \frac{\partial}{\partial t}\right) \quad (3.1.4)$$

où $\varepsilon(\psi) = 0$ désigne une équation d'onde linéaire d'une mécanique ondulatoire usuelle (comme l'équation de Schrödinger) et Q , une expression complexe non linéaire de u et de ses dérivées⁽¹⁾.

Le présent travail se fixe comme objectif de construire une théorie lagrangienne pour des particules étendues décrites par une onde physique (champs scalaire) $\eta(x)$ et une onde fonctionnelle $u_i(\eta(x))$.

⁽¹⁾Notons que l'équation (3.1.4) s'obtient en adoptant un modèle réaliste pour la fonction u . Destouches l'a associée à un globule fluide de sorte que les équations hydrodynamiques classiques conduisent à (3.1.4).

3.2 Principe de moindre action

Conformément à la théorie fonctionnelle, nous considérons une fonctionnelle $u_i(\eta(x))$, qui dépend d'un champs scalaire $\eta(x)$. La densité lagrangienne pour un champ $\eta(x)$ s'écrit en fonction de sa fonctionnelle u_i , et de sa dérivée ∂_η :

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(u_i(\eta(x)), \partial_\eta u_i(\eta(x))) \quad (3.2.1)$$

L'intégrale de cette dernière sur l'espace quadri-dimensionnel, définit l'action :

$$\mathcal{A}(u_i) = \int d\mathbf{x} \mathcal{L}(u_i(\eta(x)), \partial_\eta u_i(\eta(x))) \quad (3.2.2)$$

Le principe de moindre action rappelle, stipule que l'action est minimale sous les transformation infinitésimales des coordonnées et des fonctions du champs. Il faudra donc calculer la variation de l'action, puis l'annuler. La condition d'invariance est ensuite vérifiée si les équations d'Euler-Lagrange le sont. Dans ce qui suit, nous effectuons une integration sur dx^k uniquement et admetons qu'il n'ya pas de sommation⁽¹⁾ sur k . La variation de l'action est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}(u_i(\eta)) &= \delta \int_{\Omega} dx \mathcal{L}(u_i(\eta), \partial_\eta u_i(\eta)) \\ &= \int_{\Omega} dx \delta [\mathcal{L}u_i(\eta), \partial_\eta u_i(\eta)] \\ &= \int_{\Omega} dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i(\eta)} \delta u_i(\eta) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\eta u_i} \delta \partial_\eta u_i(\eta) \right] \\ &= \int_{\Omega} dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i(\eta)} \delta u_i(\eta) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\eta u_i} \delta [\partial_k \eta(x)]^{-1} \partial_k u_i(\eta) \right] \\ &= \int_{\Omega} dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i(\eta)} \delta u_i(\eta) + [\partial_k \eta(x)]^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\eta u_i} \partial_k \delta u_i(\eta) \right] \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \partial_k \left[[\partial_k \eta(x)]^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\eta u_i} \delta u_i(\eta) \right] &= \partial_k \left[[\partial_k \eta(x)]^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\eta u_i} \right] \delta u_i(\eta) \\ &\quad + [\partial_k \eta(x)]^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\eta u_i} \partial_k \delta u_i(\eta) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

⁽¹⁾Pour $\begin{cases} x_0^k = -\infty \\ x_1^k = +\infty \end{cases} \delta u_i(x)|_{x^k=x_0^k} = \delta u_i(x)|_{x^k=x_1^k} = 0$

$$\int dx \partial_k \left[[\partial_k \eta(x)]^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\eta u_i} \delta u_i(\eta) \right] = \int d^3 x \left[[\partial_k \eta(x)]^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\eta u_i} \delta u_i(\eta) \right]_{x_a^k}^{x_1^k} = 0 \quad (3.2.5)$$

Ce qui nous donne que :

$$\begin{aligned} \int dx [\partial_k \eta(x)]^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\eta u_i} \partial_k \delta u_i(\eta) &= \int dx \partial_k \left[[\partial_k \eta(x)]^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\eta u_i} \delta u_i(\eta) \right] \\ &\quad - \int dx \partial_k \left[[\partial_k \eta(x)]^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\eta u_i} \right] \delta u_i(\eta) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

$$= 0 - \int dx \partial_k \left[[\partial_k \eta(x)]^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\eta u_i} \right] \delta u_i(\eta) \quad (3.2.7)$$

Alors la variation de l'action s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}(u_i(\eta)) &= \int_\Omega dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i(\eta)} \delta u_i(\eta) - [\partial_k \eta(x)]^{-1} \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\eta u_i} \delta u_i(\eta) \\ &= \int_\Omega dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i(\eta)} - [\partial_k \eta(x)]^{-1} \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\eta u_i} \right] \delta u_i(\eta) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

L'équation finale, possédant une forme semblable aux équations d'Euler-lagrange, est l'équation de mouvement de la fonctionnelle $u_i(\eta)$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i(\eta)} - [\partial_k \eta(x)]^{-1} \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\eta u_i} = 0 \quad (3.2.9)$$

3.3 Invariants dynamiques

3.3.1 Equations de champs

Considérons respectivement les transformations, des coordonnées, du champ scalaire $\eta(x)$ et de la fonctionnelle $u_i(\eta)$ suivantes :

$$x^l \longrightarrow x'^l = x^l + X_k^l \delta \omega^k, \quad k = 1, \dots, s \quad (3.3.1)$$

$$\eta(x) \longrightarrow \eta'(x') = \eta(x) + \psi_{ik} \delta \omega^k \quad (3.3.2)$$

$$u_i(\eta(x)) \longrightarrow u'_i(\eta'(x')) = u_i(\eta(x)) + \Psi_{ik} \delta \omega^k \quad (3.3.3)$$

Les variations des coordonnées du champs scalaire et de la fonctionnelle sont ainsi exprimées par les grandeurs X , ψ et Ψ . La variation δu_i se décompose en une variation $\bar{\delta} u_i$ de forme et en une variation par rapport à l'argument $\eta(x)$:

$$\delta u_i = \bar{\delta} u_i + \partial_\eta u_i \delta(\eta) \quad (3.3.4)$$

Calculer la variation de l'action, nous mène à calculer la variation de chaque terme de l'équation qui la définit :

$$A = \int \mathcal{L}(x) dx = \int \mathcal{L}(u_i, \partial_\eta u_i) dx \quad (3.3.5)$$

Cela veut dire que :

$$\delta A = 0 \implies \int dx \delta \mathcal{L} + \int \mathcal{L} \delta(dx) = 0 \quad (3.3.6)$$

Calculons δA :

$$\begin{aligned} \delta A &= \int dx (\bar{\delta} \mathcal{L} + \partial_\eta (\mathcal{L}) \delta(\eta) + \mathcal{L} \partial_k (\delta x^k)) \\ &= \int dx (\bar{\delta} \mathcal{L} + [\partial_k \eta(x)]^{-1} \partial_k \mathcal{L} \delta(x^k) + \mathcal{L} \partial_k (\delta x^k)) \\ &= \int dx (\bar{\delta} \mathcal{L} + \partial_k (\mathcal{L} \delta x^k)) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \bar{\delta} \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \bar{\delta} u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\eta u_i)} \partial_\eta \bar{\delta} u_i \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \bar{\delta} u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\eta u_i)} \left[\partial_k^\wedge \eta(x) \right]^{-1} \partial_k^\wedge \bar{\delta} u_i \quad (\text{pas de somme sur } \hat{k}) \\ &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - \partial_k^\wedge \left[\left[\partial_k^\wedge \eta(x) \right]^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\eta u_i)} \right] \right] \bar{\delta} u_i + \partial_k^\wedge \left[\left[\partial_k^\wedge \eta(x) \right]^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\eta u_i)} \bar{\delta} u_i \right] \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Ainsi on retrouve bien les équations du mouvement au premier terme de cette dernière équation. En remplaçant $\bar{\delta} \mathcal{L}$ par son équation dans celle de δA , on aboutit à :

$$\delta A = \int dx \partial_k^\wedge \left[\left[\partial_k^\wedge \eta(x) \right]^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\eta u_i)} \bar{\delta} u_i \right] + \partial_k (\mathcal{L} \delta x^k) \quad (3.3.9)$$

Sachant qu'il n'y a pas de sommation sur \hat{k} , on réécrit cette dernière équation pour chaque valeur de \hat{k} et on additionne membre à membre les quatre équations, on obtient ainsi :

$$\delta A = \int dx \partial_k \left[\frac{1}{4} [\partial_k \eta(x)]^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\eta u_i)} \bar{\delta} u_i + \mathcal{L} \delta x^k \right] = 0 \quad (3.3.10)$$

On a obtenu ainsi une variation de l'action qui contient uniquement une divergence $\{\partial_k\}$.

On écrit donc que :

$$\partial_k \left[\frac{1}{4} [\partial_k \eta(x)]^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\eta u_i)} \bar{\delta} u_i + \mathcal{L} \delta x^k \right] = 0 \quad (3.3.11)$$

C'est la condition d'invariance.

3.3.2 Grandeurs conservatives

Rappelons que les expressions matricielles des variations de forme de la fonctionnelle u_i et de la coordonnée x s'écrivent:

$$\begin{aligned} \bar{\delta} u_i &= (\Psi_{ik} - \partial_\eta u_i \psi_{ik}) \delta \omega^k \\ \delta x^l &= X_k^l \delta \omega^k \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Ainsi et avec la condition d'invariance on peut écrire la forme finale du courant conservatif:

$$\Theta_k^l = \frac{1}{4} [\partial_k \eta(x)]^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\eta u_i)} (\Psi_{ik} - \partial_\eta u_i \psi_{ik}) + \mathcal{L} X_k^l \quad (3.3.13)$$

Tenseur energie-impulsion

Pour les translations, la transformation des coordonnées se traduit par le symbole δ_k^l de kronecker. Les variations du champ scalaire et de la fonctionelle sont nulles :

$$X_k^l = \delta_k^l \quad (3.3.14)$$

$$\psi_{ik} = 0 \quad (3.3.15)$$

$$\Psi_{ik} = 0 \quad (3.3.16)$$

Ainsi, la grandeur conservative lié à l'énergie-impulsion interne s'écrit :

$$T_k^l = \mathcal{L} \delta_k^l \quad (3.3.17)$$

Moment cinétique total

Une rotation de lorentz, s'effectue dans un plan mn . L'indice k doit être remplacé par (mn) dans les paramètres ω et dans toutes les expressions qui en découlent. Le courant qui dans ce cas est le tenseur moment cinétique.

$$\omega^k \rightarrow \omega^{(mn)}$$

En tenant compte des expressions explicites des transformations des coordonnées, du champ scalaire et de la fonctionnelle, nous déduisons la forme finale du tenseur moment cinétique. Notons que la variation du champ scalaire est nulle et que celle de la fonctionnelle est donnée par le générateur A du groupe de lorentz dans cette representation :

$$X_{(mn)}^l = \delta_m^l x_n - \delta_n^l x_m \quad (3.3.18)$$

$$\psi_{(mn)} = 0 \quad (3.3.19)$$

$$\Psi_{i(mn)} = A_{i(mn)}^j u_j \quad (3.3.20)$$

On aboutit ainsi à l'expression du tenseur Moment cinétique :

$$M_{(mn)}^l = \frac{1}{4} [\partial_l \eta]^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\eta u_i} \left(A_{i(mn)}^j u_j \right) + \mathcal{L} [\delta_m^l x_n - \delta_n^l x_m] \quad (3.3.21)$$

3.4 Récapitulatif

Voici deux tableaux qui résument le travail developpé dans ce manuscrit :

	Particule ponctuelle
Champs	$u_i(x)$
Lagrangien	$L(x) = L(u_i, \partial_k u_i)$
Grandeur conservative	$\theta_i^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k u_j} (\partial_n u_i X_j^n - \Psi_{ij}) - \mathcal{L} X_i^k$
Tenseur energie-impulsion	$T_i^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k u_j} (\partial_n u_j X_i^n) - \mathcal{L} g_i^k$
Moment cinétique	$M_{[\rho\sigma]}^\mu = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu u_i} \partial_\rho u_i - \mathcal{L} \delta_\rho^\mu \right] x_\sigma - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu u_i} \partial_\sigma u_i - \mathcal{L} \delta_\sigma^\mu \right] x_\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu u_i} \Psi_{i[\rho\sigma]}$
Courant	$j^\mu = iz \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_i^*)} u_i^* - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u_i)} u_i \right)$
Charge	$Q = \int d\mathbf{x} j_0(x) = iz \int d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 u_i^*)} u_i^* - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 u_i)} u_i \right)$

	Particule étendue
Fonctionnelle	$u_i(\eta(x))$
Lagrangien	$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(u_i(\eta(x)), \partial_\eta u_i(\eta(x)))$
Grandeur conservative	$\Theta_k^l = \frac{1}{4} [\partial_k \eta(x)]^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\eta u_i)} (\Psi_{ik} - \partial_\eta u_i \psi_{ik}) + \mathcal{L} X_k^l$
Tenseur energie-impulsion	$T_k^l = \mathcal{L} \delta_k^l$
Moment total	$M_{(mn)}^l = \frac{1}{4} [\partial_l \eta]^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\eta u_i} \left(A_{i(mn)}^j u_j \right) + \mathcal{L} [\delta_m^l x_n - \delta_n^l x_m]$.
Courant	\
Charge	\

Chapitre 4

Conclusion générale

La théorie fonctionnelle préconise la conception des particules élémentaires comme des objets étendus et non rigides. Pour celà, elle remplace le point x par une fonction $\eta(x)$ et la fonction d'onde par une fonctionnelle $u_i(\eta(x))$.

Dans ce travail, nous avons essayé de construire une théorie lagrangienne correspondante en adoptant une approche naturelle. La densité lagrangienne doit dépendre de la fonctionnelle et de sa dérivée par rapport au champ scalaire. Cependant, nous avons choisi une action qui est une intégrale sur l'espace-temps et non sur le champ scalaire.

Le principe de moindre action conduit à des équations d'Euler-Lagrange contenant un terme inhabituel $[\partial_k \eta(x)]^{-1}$ sans sommation sur l'indice k . Les variations des coordonnées du champ scalaire et de la fonctionnelle sont exprimées par les grandeurs x , ψ et Ψ . Ces trois quantités et les dérivées des champs suffisent pour exprimer le courant conservatif déduit du théorème de Noether. L'application de ce théorème au cas de la particule étendue, a permis la déduction du tenseur énergie-impulsion T_k^l et du tenseur moment cinétique $M_{(mn)}^l$.

Dans ce travail, nous n'avons pas tenu compte de l'influence de la matière sur les paramètres (les espaces restent plans). Aussi, l'interaction entre les deux modes (interne et externe) a été ignoré pour faciliter le calcul et l'interprétation physique. Les champs ont été considéré comme étant scalaires et classique. L'étude de l'interaction entre les modes, aussi la quantification des champs avec éventuellement des symétries différentes sera une bonne perspective pour ce travail. L'application à des cas concrets, montrera la validité des résultats obtenus.

Bibliographie

- [1] **J. Eisenstaedt** : Einstein et la relativité générale, CNRS, Paris (sur l'histoire de la relativité générale). (2002)
- [2] **L. Blanchet** : La relativité générale et la spirale infernale des étoiles binaires, article de : compactes Images de la Physique 2005, édité par E. Falgarone et al. éditions du C.N.R.S. p. 51(2005)
- [3] **JM. Souriau** : Annales de l'Institut d'Henri Poincaré. section A. tome 20 n° 40.(1974).P(315 – 365)
- [4] **R. M. Wald** : General Relativity, The University of Chicago Press, Chicago.(1984)
- [5] **S. Weinberg** : Gravitation and Cosmology, John Wiley, New-York. (1972)
- [6] **R.F Bilialov** : Annales de l'Institut Henri Poincaré. section A. tome 20 n° 3.(1974). P (257 – 267)
- [7] **R.P. Feynmane** : Quantum electrodynamics: includes reprints of original articles (1949), Perseus, (1961)
- [8] **P.A.M. Dirac** : Quelques problèmes de mécanique quantique, Annales de l'Institut Henri Poincaré. tome 1 n° 4.(1930).P (357 – 400)
- [9] **R. P. Feynman** : QED. Princeton University Press, (1985)
- [10] **P.A.M. Dirac** : Proc. Roy. Soc. London, t. A167 . (1938), p148

-
- [11] **L. Marleau** : Introduction à la physique des particules, Département de Physique, Université Laval, Quebec, Canada. (2006)
- [12] **J-P. Blaizot** : Symetries & Physique Microscopique, ellipses (1997).
- [13] The Quantum Theory of Fields, Volume1, Fondations Cambridge University Press (1995).
- [14] **R. Nataf** : Introduction à la physique des particules, Masson, (1988).
- [15] **P. Brax** : Super symétrie et dimmension supplémentaire, Thèse d'habilitation, université Paris XI, (2003).
- [16] **J.W. Norbury** : Quantum field theory, University of Wisconsin-Milwaukee, (2000)
- [17] **C.M. Hull and P.K. Townsend** : The 11th dimension arises nonperturbatively in string theory, Nucl. Phys. B438(1995)109
- [18] **J. Polchinski** : What is string theory, Institute for Theoretical Physics, University of California (1994)
- [19] **P. Ramond** : Field theory: a modern primer, 2nd ed. Perseus, (1989)
- [20] **B. de Wit, M. Luscher, and H. Nicolai** : Problems quantizing membranes, Nucl. Phys. B305(1988) 545
- [21] **M.B. Green, J.H. Schwarz, and E. Witten** : Superstring theory, volume 2. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, (1987).
- [22] **P.A. Collins and R.W. Tucker**, Nucl. Phys. B112(1976) 150
- [23] **M. Hachemane** : "Conception Géométrique-différentielle de la particule Etendue et sa Quantification par la Méthode des Représentations Induite-Symétrie de de Sitter", Thèse de Magister, USTHB, Alger (1994)
- [24] **M. Hachemane, M.A. Benbitour and A. Smida**, found. phys.27, (1997), 645.
- [25] **M. Hachemane, A. Smida and R. Djelid**, found. phys.29, (1999), 1479.

-
- [26] **A. Smida, M. Hachemane, and Fellah**, found. phys.25, (1995), 1769.
- [27] **A. Smida, M. Hachemane, and A.H. Hamici**, found. phys.28, (1998), 1367
- [28] **A. Smida, M. Hachemane, R. Djelid, and A.H. Hamici** : On External and Internal Properties of Extended Elementary Objects, found. phys.30,(2000), n° 2.
- [29] **M. Bitbol** : Jean-Louis Destouches, Théorie de la prévision et individualité, Philosophia Scientiae, 5(1), 1 – 30, (2001).
- [30] **J.L. Destouches et F. Aeschlimann** : Les systèmes de corpuscules en théorie fonctionnelle. Hermann (1958).
- [31] **J.L. Destouches** : La Quantification en Théorie Fonctionnelle des Corpuscules, Gautier-Villars (1956).
- [32] **W. Dreschler**, J. Math. Phys, 18, (1977) p. 1358.
- [33] **W. Dreschler**, Found. Phys, 7, (1977), p. 629.
- [34] **W. Dreschler** Fortschr, Phys. 23, (1975), p. 607
- [35] **W. Greiner, B. Muller** : Mécanique Quantique-symétries, springer, Berlin (1999)
- [36] **A.W. Joshi** : Group Theory for Physicists, Wiley Eastern Limited (1977)
- [37] **M. Pétrachéne & E. Trifanov** : Application de la Théorie des Groupes à la Mécanique Quantique, Masson (1970)..
- [38] **Y.S.Kim & Marilyn.E.Noiz** : Theory and application of Poincaré group, Reidel publishing company (1986)
- [39] **N.P. Konopleva, V.N. Popov** : Gauge Fields, Harwood academic publishers (1981)
- [40] **Y. Kosmann-Schwarzbach** : Groupes et Symétries, édition presses de l'école polytechnique. (2003)
- [41] **GL. Naber** : The geometry of Minkowski spacetime. In applied mathematical sciences 92.S pringer-Verlage . N.Y. inc (1992)

- [42] **Landau et Liftchitz** : Théorie des champs, édition Mir, Moscou (1970)
- [43] **J-P. Derendinger** : Théorie Quantique des Champs, Presses Polytechniques et universitaires Romandes (2001).
- [44] **N. Bogolioubov et D. V. Chirkov** : Introduction à la Théorie Quantique des Champs, Dunod, Paris (1960).
- [45] **P. Salati** : Introduction à la théorie quantique des champs, Grenoble & de Savoie, (2005).
- [46] **N. Nelipa** : Physique des particules élémentaires. Edition Mir, Moscou (1981)
- [47] **David Sénéchal** : Notes de cours, Faculté des Sciences, Université de Sherbrooke. (2000)
- [48] **V. Smirnov** : Cours de mathématiques supérieures, tome 2, édition Mir, Moscou (1970)
- [49] **A. Kolmogorov, S. Fomine** : Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Editions Mir-Moscou. (1977)
- [50] **P-E. Hladik** : Le calcul tensoriel en physique. Edition Dunod, (1999)