N° d'ordre: 03/2005-E/MT

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene.
Faculté des Sciences Mathématiques.

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat d'Etat en mathématiques

Spécialité : Analyse : Equations aux Dérivées Partielles

Par : Abdelkader BENABIDALLAH

Sujet :

APPLICATION DE LA METHODE ALIENOR AU CALCUL D'INTEGRALES MULTIPLES ET A L'OPTIMISATION GLOBALE ET EXISTENCE D'UNE SOLUTION FAIBLE DE L'EQUATION D'EULER DANS DES DOMAINES PLANS CONVEXES NON REGULIERS

Soutenue le : 17 Mars 2005, devant le jury composé de :

Mr R. BEBBOUCHI,	**Professeur,**	**U.S.T.H.B.**	**Président**
Mr N. BENOUAR,	**Professeur,**	**U.S.T.H.B.**	**Directeur de thèse**
Mr D. TENIOU,	**Professeur,**	**U.S.T.H.B.**	**Examinateur**
Mr K. BETINA,	**Professeur,**	**U.S.T.H.B.**	**Examinateur**
Mr Y. CHERRUAULT,	**Professeur,**	**Univ. PARIS VI**	**Examinateur**
Mr M. BOUSSALSSAL,	**Professeur,**	**E.N.S./KOUBA**	**Examinateur**

Toute ma gratitude va au Professeur N. BENOUAR qui m’a proposé le sujet et dirigé tout au long de cette thèse. Par ses nombreux conseils et encouragements amicaux, il m’a permis de mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier le Professeur Y. CHERRUAULT qui m’a accueilli dans son laboratoire le Medimat , et qui m’a communiqué un interêt passionné pour ce sujet développé dans son laboratoire.

J’exprime avec un vif plaisir tous mes remerciements au Professeur R.BEBBOUCHI qui m’a fait l’honneur de présider le jury de cette thèse, ainsi qu’au Professeur D. TENIOU directeur du laboratoire L.A.M.N.E.D.P., laboratoire dans lequel ce travail a été en partie réalisé et qui n’a eu de cesse de me prodiguer de judicieux conseils jusqu’à l’aboutissement de ce travail.

Que les Professeurs K. BETINA et M. BOUSSALSSAL trouvent ici l’expression de ma profonde gratitude pour l’interêt qu’ils ont manifesté pour ce travail et pour avoir pris part aux travaux du jury.

Je remercie d’une manière toute particulère ma petite famille qui a consenti beaucoup de sacrifices pour voir ce travail réalisé. Je n’oublierai pas de remercier mes amis et collègues et tout particulièrement L. BENAISSA pour l’aide et le soutien qu’ils m’ont apportés.

Table des matières

INTRODUCTION:
Beaucoup de problèmes scientifiques conduisent à l'évaluation d'intégrales ainsi qu'à la résolution de problèmes d'optimisation globale avec ou sans contrainte. En général, les calculs analytiques exacts relatifs à ces problèmes ne sont pas réalisables directement. On fait alors appel à des méthodes d'approximation. Parmi les plus couramment utilisées, on retrouve les méthodes classiques d'analyse numérique. Beaucoup d'entre elles, tant pour les problèmes d'optimisation que pour le calcul d'intégrales, sont efficaces en dimension une. Ces techniques s'avèrent rapidement sans interêt dès que la dimension augmente. Or le nombre de variables pour certains problèmes est très grand, il peut même s'avèrer si important que les progrés du calcul informatique ne seront jamais suffisants pour rendre ces techniques intéréssantes.
L'optimisation globale et locale est un domaine très développé dans la littérature. Beaucoup d'ouvrages traitent d'aspects classiques concernant l'optimisation (méthode du gradient, méthodes des variations locales,...). Ce problème a également été étudié par Y. Cherruault dans [17], dans le laboratoire qu'il dirige (Medimat) et au sein duquel a été développée la méthode des transformations réductrices ou Alienor qui permet de construire des courbes qui " remplissent " l'espace (au sens d'une α-densité qui sera définie ultérieurement). Signalons que seule la continuité de la fonction est imposée et qu'il n'est nul besoin d'avoir une régularité plus grande.
Cette méthode a également été utilisée avec succés en association avec la méthode décompositionnelle d'Adomian, dont les bases théoriques ont été élaborées au sein du Medimat [1], [19], pour résoudre les problèmes de contrôle optimal [22]. L'utilisation de la méthode décompositionnelle d'Adomian [2] permet de remplacer la fonctionnelle à minimiser qui dépend implicitement des contrôles par une fonctionnelle dépendante des contrôles et autonome par rapport aux contraintes reliant variables d'état et de contrôles. On peut alors appliquer directement, sans avoir à utiliser divers artifices, la méthode d'optimisation à cette dernière fonctionnelle.
Les avantages des méthodes basées sur les courbes qui remplissent l'espace [17] sont nombreuses:
- l'erreur de la méthode peut être évaluée car nous contrôlons le coefficient d'α-densité
- ces méthodes étant déterministes, il est possible de donner une estimation précise du temps de calcul d'un minimum global
-on peut transformer les problèmes d'intégration et d'optimisation en plusieurs dimensions en problèmes en une variable.
Par ailleurs, certains auteurs [29] ont développé des méthodes de simulation statistique, méthodes dites de Monte Carlo. Ces techniques sont très intéressantes puisque leur vitesse de convergence est indépendante de la dimension du problème mathématique étudié.Par contre, elles fournissent non pas la solution numérique du problème, mais un intervalle de confiance la contenant avec une probabilité donnée.
Ce document est formé de trois parties principales. La première est consacrée au calcul d'intégrales en plusieurs dimensions, la seconde partie traite des problèmes de l'optimisation globale avec ou sans contraintes toujours

en plusieurs dimensions, alors que dans la troisième partie, nous prouvons l'existence d'une solution faible de l'équation d'Euler dans des domaines plans convexes non réguliers.
La première partie se compose de trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous traitons de l'aspect théorique de l'approximation d'intégrales multiples par des intégrales simples. Le problème est d'abord étudié en dimension deux par l'utilisation des courbes α-denses plus précisement par la spirale d'archimède. Les résultats établis sont ensuite généralisés à une dimension quelconque. L'étude de l'erreur de cette méthode est également étudiée dans ce même chapitre. On y montre qu'elle ne dépend pas de la dimension du problème.
L'idée,qui nous a été suggérée par les professeurs Y.Cherruault et G.Mora et qui consiste à approcher une intégrale multiple par la longueur d'une courbe qui densifie le volume délimité par le graphe de la fonction intégrand,trouve sa justification théorique dans le deuxième chapitre.Signalons que ces calculs aboutissent au calcul, non pas de l'intégrale de la fonction f donnée, mais à l'intégrale de f avec un poids induit par la courbe α-dense utilisée. L'intégrale de f est ensuite obtenue par l'introduction d'un facteur qui compense l'effet de la fonction poids.
Les méthodes développées au chapitre un et deux aboutissent à l'approximation d'intégrales multiples par des intégrales simples de fonctions de nature oscillatoire, périodiques mais discontinues au chapitre un et continues mais non périodiques au chapitre deux. Cette remarque nous à inciter à développer au chapitre trois, des courbes qui densifient l'espace et qui permettent de donner une approximation d'intégrales multiples par des intégrales simples de fonctions périodiques régulières (la régularité pouvant être aussi grande que souhaitée, mais sans excéder la régularité de la fonction à intégrer).
Les intégrales simples de fonctions oscillatoires obtenues peuvent alors être évaluées. Nous avons adapté dans ce sens deux techniques:
-la méthode du trapèze generalisée qui donne d'excéllents résultats lorsque la fonction intégrand est une fonction périodique,
- la méthode de Filon qui permet d'évaluer les coefficients de Fourier de fonctions données.
Dans la seconde partie, nous étudions les problèmes de l'optimisation globale en plusieurs dimensions.Ces problèmes sont d'abord transformés par l'utilisation des courbes α-denses, en problèmes d'optimisation globale en une dimension. Dans [65], A.Ziadi a couplé avec succés, la méthode des transformations réductrices avec quelques méthodes classiques d'optimisation globale (méthode d'Evtuschenko, Brent, branch and Bound). Pour notre part, nous avons, dans une première étape, associé la méthode Alienor avec la transformation de Legendre-Fenchel qui permet le calcul d'une enveloppe convexe discrète de la fonction à minimiser. Dans la seconde étape, le problème de l'optimisation globale en une dimension est traité par l'utilisation des méthodes Monte Carlo.
Des essais numériques, basés sur ces techniques sont réalisés.
Dans la troisième partie, nous nous intéressons à l'écoulement d'un fluide parfait incompréssible dans un domaine plan convexe (de classe $\mathcal{C}^{0,1}$).
Plus précisément, on se propose de montrer que pour tout couple (u_0, f) de données pris dans des espaces convenables et que l'on précisera

ultérieurement, le problème précédent admet au moins une solution faible $(u\ ,\ p)$. Pour ce faire, on approchera l'ouvert Ω par une suite croissante d'ouverts polygonaux $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ inscrits dans Ω (Cf [50]), et on utilisera des inégalités à priori uniformes (par rapport à n), les techniques dévelop-pées dans [4], [5] et [38], ainsi que la fonction courant comme dans [60].

CHAPITRE 1

Courbes α-denses, Transformation de Legendre-Fenchel et Méthode de Monte Carlo

Courbes $\alpha -$ denses:

Transformation réductrice Alienor:

Soit deux variables x et y. Si l'on passe en coordonnées polaires (r,θ), on a :

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ \theta \geq 0. \tag{1.1.1}$$

Si nous relions r et θ par l'équation de la spirale d'Archimède

$$r = a\theta, \theta \geq 0 \tag{1.1.2}$$

où a est un paramètre positif fixé, nous obtenons:

$$x = a\theta\cos\theta,\ y = a\theta\sin\theta \tag{1.1.3}$$

Ainsi x et y sont exprimés à l'aide d'une unique variable θ, $\theta \geq 0$.
Cette transformation peut être généralisée à n variables [17]. Il suffit de relier les variables deux à deux. Pour le cas de trois variables x, y, z relions x et y à l'aide de θ_1 :

$$x = a\theta_1\cos\theta_1,\ y = a\theta_1\sin\theta_1$$

Puis on relie les deux variables qui restent z et θ_1 à l'aide de θ :

$$\theta_1 = a\theta\cos\theta, z = a\theta\sin\theta$$

Il est alors clair que x, y, et z s'expriment à l'aide de la seule variable θ.
En effet on a:

$$x = a^2\theta\cos\theta\cos(a\theta\cos\theta)$$

$$y = a^2\theta\cos\theta\sin(a\theta\cos\theta)$$

$$z = a\theta\sin\theta\ \theta \geq 0.$$

On voit que d'une façon générale on obtient :

$$x_i = h_i(\theta), \theta \geq 0, i = 1,\ldots n \tag{1.1.4}$$

avec des fonctions h_i qui font intervenir des fonctions cosinus et sinus.

Définition1.1.1.1:
On dit qu'un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^n$ est α-dense dans $\mathbb{R}^n$ où $\alpha \rangle 0$, si: pour tout point M de $\mathbb{R}^n$, il existe au moins un point $M^{'}$ de S tel que:

$$d(M,M^{'}) \leq \alpha$$

où d désigne la distance euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.1.1.1:
La spirale d'Archimède $r = a\theta$, $\theta \geq 0$, est πa –dense dans $\mathbb{R}^2$.

Preuve:
Deux points M_1 et M_2 sur deux spires consécutives d'angles polaires respectifs θ et $(\theta + 2\pi)$ sont séparés d'une distance:

$$d(M_1, M_2) = \mid a\theta - a(\theta + 2\pi) \mid = 2a\pi$$

Soit maintenant un point M de $\mathbb{R}^2$; la droite passant par O et M rencontre la spirale en deux points M_1 et M_2 de part et d'autre de M.
Dans le pire des cas M est au milieu de M_1 et M_2 , c'est-à-dire que:

$$d(M, S) \leq \frac{2\pi a}{2} = a\pi.$$

On peut démontrer le résultat de densification suivant qui généralise la proposition précédente.

Proposition 1.1.1.2:
Soit M un point de $\mathbb{R}^n$, on peut l'approcher par un point M' de la spirale généralisée définie par :

$$x_i = h_i(\theta)\ \theta \geq 0, i = 1, \ldots, n.$$

Preuve:
On trouvera une démonstration de ce résultat dans [17].

Une variante de la méthode Alienor:
On peut, au lieu de réduire deux à deux les variables, exprimer toutes les variables en fonction de θ en une seule étape [17].
C'est possible si l'on choisit bien les fonctions h_i de la transformation

$$x_i = h_i(\theta)\ , \theta \geq 0, i = 1, \ldots, n. \qquad 1.1.5$$

Dans [11] O.Bendiad et Y.Cherruault ont proposé la transformation réductrice

$$x_i = \varphi(t) h_i(t)\ , i = 1, \ldots, n \qquad 1.1.6$$

où φ est une fonction bornée et différentiable et où

$$H(t) = (h_1(t), \ldots, h_n(t))$$

est une fonction vectorielle périodique.
On peut montrer que (1.1.6) conduit à un sous-ensemble α-dense dans $\mathbb{R}^n$ et que le coefficient d'α-densité peut également être précisé.
On peut développer aussi une méthode un peu différente:
considérons la transformation:

$$x_i = a\theta \sin(\alpha_i \theta) \qquad 1.1.7$$

$$\alpha_1 = 1, i = 1, 2, \ldots n.$$

qui va réaliser une α-densité de $\mathbb{R}^n$.

La transformation Alienor modifiée:

Cette transformation décrite dans [3] densifie B=$\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, plus vite que la transformation Alienor.
On construit la courbe de la manière suivante:

$$\begin{cases} x_1 = a\sigma_2(\theta)\cos\sigma_2(\theta) \\ x_2 = a\sigma_2(\theta)\sin\sigma_2(\theta) \\ x_3 = h_3(\theta) \end{cases} \qquad 1.1.8$$

où

$$h_3 : [0, \theta_3] \to \mathbb{R}$$

est une fonction croissante , θ_3 étant la valeur maximale de θ pour couvrir B avec une précision ρ .
Soit $\theta_2 \in [0, \theta_3]$ tel que $M(\theta) \notin B$.
On définit σ_2 par:

$$\sigma_2 : [0, \theta_3] \to [0, \theta_2]$$

et qui vérifie :

$$\begin{cases} \sigma_2((2p+1)\theta_2) = \theta_2 \\ \sigma_2(2p\theta_2) = 0 \end{cases}$$

On démontre dans [3] que:

$$\sigma_2(\theta) = (-1)^{\beta_2(\theta)}[\theta - \theta_2(\theta) + \frac{1}{2}((-1)^{\beta_2(\theta)+1} + 1)\theta_2]$$

où:

$$\beta_2(\theta) = INT(\frac{\theta}{\theta_2})$$

et:

$$\theta_2 = [(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2]^{\frac{1}{2}}/2^q$$

Il en résulte que $\sigma_2(\theta)$ est $2\theta_2$ - périodique.

Proposition 1.1.2.1:
Soit $\alpha = a\pi$, la courbe paramétrée $\sum_3$ définie par :

$$\begin{cases} x_1 = h_1(\theta) - INT(\frac{h_1(\theta) - a_1}{b_1 - a_1})(b_1 - a_1) \\ x_2 = h_2(\theta) - INT(\frac{h_2(\theta) - a_2}{b_2 - a_2})(b_2 - a_2) \\ x_3 = a_3 + \frac{\theta}{\theta_3}(b_3 - a_3) \end{cases}$$

où:

$$h_1(\theta) = a\sigma_2(\theta)\cos(\sigma_2(\theta)) + C_1$$

$$h_2(\theta) = a\sigma_2(\theta)\sin(\sigma_2(\theta)) + C_2$$

est $\alpha\sqrt{2}$ dans B.
Ce résultat peut aisement être généralisé.

Proposition 1.1.2.2:
Soit $\alpha = \pi a$ un nombre strictement positif, on pose :

$$C_i = (a_i + b_i)/2, i = 1,2$$

Soit :

$$\theta_2 = [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2]/2a$$

On considère aussi:

$$\theta_j = \frac{(b_j - a_j)}{\alpha}\theta_{j-1}, 3 \leq j \leq n$$

et:

$$\beta_j(\theta) = INT(\theta/\theta_j)$$

$$\sigma_j(\theta) = (-1)^{\beta_j(\theta)}[\theta - (\beta_j(\theta) + \frac{1}{2}(((-1)^{\beta_j(\theta)}2 + 1))\theta_{j]}, 2 \leq j \leq n$$

Alors la courbe $\sum$ paramétrée par:

$$\begin{cases} x_j = h_j(\theta) - (b_j - a_j)INT(\dfrac{h_j(\theta) - a_j}{b_j - a_j}), \ j = 1,2. \\ x_j = a_j + \dfrac{\sigma_{j(\theta)}}{\theta_j}((b_j - a_j), \ j = 3,\ldots,n \\ \text{avec} \quad \begin{cases} h_1(\theta) = a\sigma_3(\theta)\cos(\sigma_2(\theta)) + C_1 \\ h_2(\theta) = a\sigma_3(\theta)\cos(\sigma_2(\theta)) + C_2 \end{cases} \end{cases}$$

est $\alpha\sqrt{n-1}$ dense dans B.

On peut également citer la transformation proposée par O.Bendiab dans [11].
Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1,\ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$,
et:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n, x_i = \varphi(t)h_i(t), t \geq 0\} \qquad 1.1.9$$

où φ est une fonction numérique d'une variable réelle, dérivable, bornée et telle que:

$$Mes(Ker\varphi) = 0$$

les fonctions h_i étant bornées et T-périodiques.
Ω étant borné il existe un réel t_{Max} tel que :

$$\tilde{S} = \{x \in \mathbb{R}, x_i = \varphi(t) h_i(t), t \in [0, t_{Max}]\}$$

soit inclus dans Ω.
φ est choisie de telle sorte que $\tilde{S}$ reste contenu dans Ω.
Soit :

$$b_f = \underset{[0,t_{Max}]}{Sup} \mid \varphi(t) \mid$$

et:

$$b_h = \| H(t) \| \quad \forall t \in [0, t_{Max}]$$

Proposition1.1.2.3:
1)- Si $n = 2m$ soit:

$$h_i(t) = \begin{cases} \dfrac{\cos t}{i\sqrt{m}} & si \;\; i \;\; est \;\; impair \\ \dfrac{\sin t}{i\sqrt{m}} & si \;\; i \;\; est \;\; pair \end{cases}$$

alors $\tilde{S}$ est $\sqrt{2}\, b_f b_h$ dense dans Ω.
2)- Si $n = 2m + 1$ soit :

$$h_i(t) = \begin{cases} \dfrac{\cos t}{(i-1)\sqrt{2m}} & si \;\; (i-1) \;\; est \;\; impair, i \neq 1 \\ \dfrac{\sin t}{(i-1)\sqrt{2m}} & si \;\; (i-1) \;\; est \;\; pair \\ \dfrac{\cos t}{\sqrt{2}} & si \;\; i = 1 \end{cases}$$

alors $\tilde{S}$ est $\sqrt{2}\, b_f b_h$ dense dans Ω.

Une transformation dûe à Y.Cherruault [17] , possède certaines ressemblances avec la précédente:
Dans $B = [-1, 1]^n$ on considère la transformation réductrice suivante:

$$x_i = a\theta \cos(\alpha_i \theta), \; i = 1, \ldots, n, \alpha_1 = 1 \qquad 1.1.10$$

Si l'on représente les fonctions x_i, on s'aperçoit que x_i oscille entre les deux droites d'équation $(a\theta)$ et $(-a\theta)$. Plus α_i est grand et plus les oscillations de $(\cos(\alpha_i\theta))$ sont nombreuses dans un intervalle de même longueur.
Pour que cette transformation densifie B, il sera necessaire de choisir les α_i en conséquence et intuitivement qu'il va falloir pour cela que les α_i soient croissants, de façon à ce que les fonctions x_i oscillent de plus en plus rapidement quand i augmente.
Citons pour terminer, une dernière transformation proposée par G.Mora

[46]:

Soit:

$$(S) : \begin{cases} h_1(t) = t \\ h_i(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(m^{i-1}\pi t)),\ i = 2,\dots,n \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad 1.1.11$$

Proposition 1.1.2.4:
(S) densifie $J = [0,1]^n$ avec un coefficient d'α-densité égal à

$$\alpha = \frac{1}{m}\sqrt{n-1}\,.$$

Une variante de cette transformation est par exemple :

$$h_i(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(m^i \pi t)), i = 1,\dots,n,\ t \in [0,1] \qquad 1.1.12$$

Analyse convexe:

Introduction:

La transformation de Legendre-Fenchel est un outil de l'analyse convexe [55] qui permet notamment le calcul de solutions d'équations d'Hamilton-Jacobi [26]. L'analogie entre cette transformation et la transformée de Fourier suggère la construction d'une transformation de Legendre-Fenchel discrète rapide en suivant l'exemple de la Fast-Fourier Transform (F.F.T). La transformation de Legendre dans $\mathbb{R}^n$ a, comme la transformation de Fourier la propriété de se factoriser naturellement en transformations de Legendre unidimensionnelles.Le travail réalisé dans cette thèse consiste à coupler, d'une part la méthode d'Alienor pour réduire le problème de l'optimisation globale dans $\mathbb{R}^n$ à un problème unidimensionnel et, d'autre part la transformation de Legendre-Fenchel discrète dans $\mathbb{R}$ .On ne considère ici que la transformation unidimensionnelle et plus précisèment la variante décrite dans le paragraphe suivant [42], [43].

Définitions:

Nous utiliserons les définitions et notations suivantes qu'on peut retrouver dans [36] et [55]. Soit I l'intervalle $[a,b]$ et u une fonction définie semi-continue inferieurement sur $[a,b]$.

Définition 1.2.2.1:
On appelle transformée de Legendre-Fenchel de u la fonction $u^{\times}$ définie par:

$$u^{\times}(s) = \underset{x \in I}{Max}\ \{xs - u(x)\}\ ,\ s \in \mathbb{R} \qquad 1.2.1$$

Remarque:
$u^\times$ est également appelée la conjuguée de u.

Définition 1.2.2.2:
On appelle fonction Argument correspondant à $u^\times$ la fonction notée h et définie par:

$$h(s) = Arg\max_{x \in I} \{xs - u(x)\}, \; s \in \mathbb{R} \qquad 1.2.2$$

Définition 1.2.2.3:
La transformée de Legendre-Fenchel de $u^\times$ notée $u^{\times\times}$ est appelée la biconjuguée de u.

Remarque:
$u^{\times\times}$ est l'enveloppe convexe de u.
Il est bien evidemment impossible de calculer $u^\times$ et $u^{\times\times}$ en tout point s de $\mathbb{R}$. On se restreindra par conséquent à un intervalle $[a^\times, b^\times]$ pour $u^\times$ et $[a^{\times\times}, b^{\times\times}]$ pour $u^{\times\times}$, intervalles que l'on discrétisera dans la suite.
Soit N un entier naturel non nul $(N = 2^p, p \in N)$
et I_N la subdivision de I donnée par :

$$I_N = \left\{ i\frac{b-a}{N}, i = 1, \ldots, N \right\}$$

Soit $M = 2^q$, $q \in N$
et :

$$J_M = \left\{ j\frac{b^\times - a^\times}{M}, j = 1, \ldots, M \right\}$$

une subdivision de $[a^\times, b^\times]$.

Définition 1.2.2.4:
On appelle transformée de Legendre-Fenchel discrète de u à N points, le vecteur:

$$\{(u_N^\times(s)), s \in J_M\}$$

où:

$$u_N^\times(s) = \underset{x \in I_N}{Max} \{xs - u(x)\}, \; \forall s \in J_M \qquad 1.2.3$$

Remarque:
On disposera, comme pour la transformation rapide de Fourier, d'une transformation de Legendre-Fenchel rapide si l'on est capable de calculer à partir de deux transformées à N points, une transformée à $2N$ points, au prix d'au plus $O(N)$ opérations arithmétiques, [14] . Le coût d'une transformation à N points sera alors de l'ordre de $O(NLog(N))$.

Déscription:

On utilisera les notations suivantes:

$$u^{\times}_{[a,b]}(s) = \underset{x\in[a,b]}{Max} \{xs - u(x)\}, s \in [a^{\times}, b^{\times}] \qquad 1.2.4$$

$$u^{\times}_{N}(s,\tau) = \underset{x\in I_N}{Max} \{xs - u(x-\tau)\} \qquad 1.2.5$$

$$H^{\times}_{N}(s,\tau) = \underset{x\in I_N}{Arg\max} \{xs - u(x-\tau)\} = \{x \in I_N, u^{\times}_N(s,\tau) = xs - u(x-\tau)\} \qquad 1.2.6$$

$h^{\times}_N(x)$ est un élèment de $H^{\times}_N(x)$

$$u^{\times\times}_{NM}(x) = \underset{s\in J_M}{Max} \{xs - u^{\times}_N(s)\} \qquad 1.2.7$$

$$H^{\times\times}_{NM}(x) = \underset{s\in J_M}{Arg\max} \{xs - u^{\times}(s)\} \qquad 1.2.8$$

$h^{\times\times}_{NM}(x)$ est un élèment de $H^{\times\times}_{NM}(x)$.

Remarque:

Soient p et q deux entiers naturels.On considère $\tilde{N} = 2^p$ et $\tilde{M} = 2^q$

1-si τ est égal à 0 on remarque que

$$u^{\times}_{\tilde{N}}(s,0) = u^{\times}_{\tilde{N}}(s), \forall s \in \mathbb{R}.$$

Le but donc de la transformée de Legendre-Fenchel discrète est de calculer $u^{\times}_{\tilde{N}}(s,0)$ et $H^{\times}_{\tilde{N}}(s,0)$ pour tout s dans $J_{\tilde{M}}$.

2- Notons que les entiers N et M que l'on utilisera sont de la forme :
$N = 2^i$, $i = 1,\ldots,p$ et $M = 2^j$, $j = 1,\ldots q$.

Donnons maintenant la description de la méthode permettant de passer de la transformée de Legendre à N points à la transformée de legendre à $2N$ points. Si l'on écrit:

$$I_{2N} = I_N \cup \left(I_N \setminus \frac{b-a}{2N}\right)$$

alors:

$$u^{\times}_{2N}(s,\tau) = Max\left\{\underset{x\in I_N}{Max} \{xs - u(x-\tau)\}, \underset{x\in I_N - \frac{b-a}{2N}}{Max} \{xs - u(x-\tau)\}\right\}$$

Avec le changement de variable $x' = x + \frac{b-a}{2N}$, on obtient:

$$u^{\times}_{2N}(s,\tau) = Max\left\{u^{\times}_N(s,\tau), u^{\times}_N(s,\tau + \frac{b-a}{2N}) - s\frac{b-a}{2N}\right\} \qquad 1.2.9$$

et

$$H_{2N}^{\times}(s,\tau) = \begin{cases} H_N^{\times}(s,\tau) \;\; si \;\; u_{2N}^{\times}(s,\tau) = u_N^{\times}(s,\tau) \\ H_N^{\times}(s,\tau + \frac{b-a}{2N}) - s\frac{b-a}{2N} \;\; sinon \end{cases} \quad 1.2.10$$

Afin d'estimer le coût de ces opérations notons que:

Lemme 1.2.3.1:

$$H_N^{\times}(.,\tau) : J_M \to P(J_M)$$

$$s \;\; \to \;\; H_N^{\times}(s,\tau)$$

est croissante, c'est-à-dire que si $s \leq s'$ alors:

$$\forall x \in H_N^{\times}(s,\tau), \forall y \in H_N^{\times}(s',\tau), x \leq y.$$

Preuve:
Pour tout réels s et s' on a:

$$u_N^{\times}(s,\tau) = h_N^{\times}(s,\tau)s - u(h_N^{\times}(s,\tau) - \tau) \geq h_N^{\times}(s',\tau)s - u(h_N^{\times}(s',\tau) - \tau)$$

$$u_N^{\times}(s',\tau) = h_N^{\times}(s',\tau)s' - u(h_N^{\times}(s',\tau) - \tau) \geq h_N^{\times}(s,\tau)s' - u(h_N^{\times}(s,\tau) - \tau)$$

Par addition des deux inégalités, on obtient:

$$(h_N^{\times}(s,\tau) - h_N^{\times}(s',\tau))(s - s') \geq 0.$$

De ce résultat découlent les formules optimales suivantes pour tout s dans
$\mathbb{R}$:

$$u_N^{\times}(s,\tau) = \underset{\substack{x \in I_N \\ H_N^{\times}(s-\frac{b-a}{2N},\tau) \leq x \leq H_N^{\times}(s+\frac{b-a}{2N},\tau)}}{Max} \{xs - u(x - \tau)\} \quad 1.2.11$$

et:

$$H_N^{\times}(s,\tau) = \underset{\substack{x \in I_N \\ H_N^{\times}(s-\frac{b-a}{2N},\tau) \leq x \leq H_N^{\times}(s+\frac{b-a}{2N},\tau)}}{ArgMax} \{xs - u(x - \tau)\} \quad 1.2.12$$

Un certain nombre de résultats de convergence ont été etablis dans [26]
et [41].

Proposition 1.2.3.1:
$u_{\tilde{N}}^{\times}$ converge simplement vers $u_{[a,b]}^{\times}$ quand p tend vers $(+\infty)$, si u est semi
continue inférieurement et minorée par une fonction affine.

(On rappelle que $\tilde{N} = 2^p$)
On peut également citer le résultat suivant:

Proposition 1.2.3.2:
Si u est semi continue superieurement sur $[a,b]$, soit $s \in \mathbb{R}$. Il existe

alors:

$$\tilde{x} \in [a,b]$$

tel que:

$$s\,\tilde{x} - u(\tilde{x}) = u^{\times}_{[a,b]}(s)$$

Si u est de classe $\mathbb{C}^2$ dans un voisinage de $\tilde{x}$ alors il existe un réel K positif tel que:

$$0 \leq u^{\times}_{[a,b]}(s) - u^{\times}_{\tilde{N}}(s) \leq \frac{K}{\tilde{N}^2}.$$

où K ne dépend que de a, b et u.

Remarque:
Comme $u^{\times}$ est définie sur $\mathbb{R}$, il reste à préciser la qualité de l'approximation de $u^{\times}$ par $u^{\times}_{[a,b]}$.
Pour simplifier le résultat restreignons nous à $[a,b] = [-a,a]$ pour a réel positif.

Proposition1.2.3.3:
Si u est semi continue inférieurement et si elle est minorée par une fonction affine alors:

$u^{\times}_{[-a,a]}$ converge simplement vers $u^{\times}$ sur $\mathbb{R}$.

Evolution du paramètre τ:

Le paramètre τ est introduit pour pouvoir mettre en place un algorithme permettant le calcul de la transformée de Legendre-Fenchel discrète convexe $u^{\times\times}_{\tilde{N}\tilde{M}}(s)$, $s \in J_{\tilde{M}}$ .Connaissant $u^{\times}_{N}(s,\tau)$ et $u^{\times}_{N}(s, \tau + \frac{b-a}{2N})$ à l'étape $N = 2^i$, nous pouvons calculer $u^{\times}_{2N}(s,\tau)$ en utilisant la formule (1.2.9)
Ceci peut être representé par l'arbre suivant décrit dans [41]:

$$\left.\begin{array}{c} \tau \\ \tau + \frac{b-a}{2N} \end{array}\right\} \longmapsto \tau \tag{1.2.13}$$

Si nous introduisons les notations suivantes:

$$\left.\begin{array}{r} f^i_k = \tau \\ f^i_{k+1} = \tau + \frac{b-a}{2N} \end{array}\right\} \longrightarrow f^i_{k+1} = \tau \tag{1.2.14}$$

$(f^i_k)_{k=1,\ldots,2^i}$ est le niveau i de l'arbre . Pour calculer les nombres de cet arbre on n'utilise que les nombres a, b et $\tilde{N} = 2^p$.
Pour $\tilde{N} = 8$ $(p = 3)$ par exemple on obtient comme dans [42]:

$$
\begin{array}{llll}
f_1^{p-3} = 0 & & & \\
f_2^{p-3} = \frac{b-a}{N/4} & f_1^{p-2} = 0 & & \\
f_3^{p-3} = \frac{b-a}{N/2} & & f_1^{p-1} = 0 & \\
f_4^{p-3} = \frac{b-a}{N/2} + \frac{b-a}{N/4} & f_2^{p-2} = \frac{b-a}{N/2} & & \\
f_5^{p-3} = \frac{b-a}{N} & & & f_1^{p} = 0 \\
f_6^{p-3} = \frac{b-a}{N} + \frac{b-a}{N/4} & f_3^{p-2} = \frac{b-a}{N} & & \\
f_7^{p-3} = \frac{b-a}{N} + \frac{b-a}{N/2} & & f_2^{p-1} = \frac{b-a}{N} & \\
f_8^{p-3} = \frac{b-a}{N} + \frac{b-a}{N/2} + \frac{b-a}{N/4} & f_4^{p-2} = \frac{b-a}{N} + \frac{b-a}{N/2} & &
\end{array}
$$

Pour $[a,b] = [0,1]$, voyons ce que nous obtenons pour les trois premières valeurs de $\tilde{N}$:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\tilde{N} = 2 & f_1^0 & & & & f_2^0 & & & & \\
 & 0 & & & & \frac{1}{2} & & & & 1 \\
\tilde{N} = 4 & f_1^0 & & f_3^0 & & f_2^0 & & f_4^0 & & \\
 & 0 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{2} & & \frac{3}{4} & & 1 \\
\tilde{N} = 8 & f_1^0 & f_5^0 & f_3^0 & f_7^0 & f_2^0 & f_6^0 & f_4^0 & f_8^0 & \\
 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{5}{8} & \frac{3}{4} & \frac{7}{8} & 1
\end{array}
$$

Maintenant, pour $\tilde{N} = 8$ calculons tout les élèments de l'arbre:

$$
\begin{array}{llllllllll}
N = 1 & f_1^0 & f_5^0 & f_3^0 & f_7^0 & f_2^0 & f_6^0 & f_4^0 & f_8^0 & \\
 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{5}{8} & \frac{3}{4} & \frac{7}{8} & 1 \\
N = 2 & f_1^1 & f_3^1 & f_2^1 & f_4^1 & & & & & \\
 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & & & & & 1 \\
N = 4 & f_1^2 & f_2^2 & & & & & & & \\
 & 0 & \frac{1}{8} & & & & & & & 1 \\
N = 8 & f_1^3 & & & & & & & & \\
 & 0 & & & & & & & & 1
\end{array}
$$

Méthode de Monte-Carlo:

Nombres aléatoires:

Définition 1.3.1.1:

Une grandeur ou une variable est dite aléatoire si sa valeur dépend d'un évènement aléatoire.

La variable aléatoire X est définie par la loi de répartition

$$p(X\langle x) = \phi(x)$$

où x est un nombre réel quelconque et ϕ une fonction connue (fonction de répartition). Les valeurs de la variable aléatoire s'appellent nombres aléatoires, [30].

Définition 1.3.1.2:
Si une variable aléatoire est munie d'une loi de répartition donnée, on dit que les nombres aléatoires correspondants sont répartis d'aprés cette loi.

Soient $x_{1,\dots}\ x_n,\dots$ les valeurs d'une même variable aléatoire X fournies par des épreuves indépendantes à conditions répétées. Alors la suite de nombres aléatoires $\{x_n\}$ est dite aléatoire, à loi de répartition correpondante. Nous nous interessons dans ce qui suit aux suites aléatoires à répartition uniforme sur l'intervalle $[0,1]$, [27].

Définition 1.3.1.3:
La suite $\{x_n\}$ est à répartition uniforme sur l'intervalle $[0,1]$, si on a pour tout sous-intervalle $[a,b]$ de $[0,1]$ la relation suivante:

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\ \frac{v_n(a,b)}{n} = b-a \qquad 1.3.1$$

où $v_n(a,b)$ représente le nombre d'élèments de la suite $\{x_n\}$ appartenant à $[a,b]$.

Ceci veut dire que la fréquence relative limite de la suite $\{x_n\}$ pour tout sous intervalle $[a,b]$ de $[0,1]$ est égale à la longueur de cette intervalle avec la probabilité 1.
Une suite aléatoire $\{x_n\}$ répartie uniformément sur le segment $[0,1]$, permet de construire une suite aléatoire $\{y_n\}$ à la loi de répartition ϕ.
Soit:

$$\phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \varphi(t)dt \qquad 1.3.2$$

la fonction de répartition correspondant à φ où φ est la densité de probabilité. Pour simplifier supposons que $x = \varphi(y)$ soit continue et strictement monotone. Alors en définissant y_n par la relation:

$$x_n = \varphi(y_n)\ n \geq 1 \qquad 1.3.3$$

on obtient pour tout x_n la suite aléatoire $\{y_n\}$ munie de la loi de répartition donnée ϕ.
Par construction la suite $\{y_n\}$ vérifie avec la probabilité 1 la relation

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\tilde{v}_n\ (a,b)}{n} = \int_a^b \varphi(t)dt$$

où $\tilde{v}_n\ (a,b)$ est le nombre d'élèments de la sous-suite $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans $[a,b]$.

Exemple:

Soit $\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$

On obtient de cette façon la suite aléatoire canonique $\{y_n\}$ obeïssant à la loi normale (gaussienne) et associée à la variable aléatoire Y d'espérance mathématique $MY = 0$ et de variance $DY = 1$.

Méthode d'obtention des nombres aléatoires:

Pour obtenir des nombres aléatoires, on peut utiliser les résultats de processus physiques aléatoires (jet de dés, roulette de casino: d'où le nom de la méthode). Pour résoudre des problèmes numériques par la méthode de Monté-Carlo, il faut avoir à sa disposition une grande quantité de nombres aléatoires.On se contente souvent en pratique, par l'utilisation de ce que l'on appelle les nombres pseudo-aléatoires. Ces nombres sont calculés à partir d'algorithmes assez complexes. Indiquons certains procédés bien simples pour obtenir des nombres pseudo-aléatoires, uniformément répartis dans $[0,1]$, [27]:

Supposons que ces nombres sont des fractions décimales propres d'un nombre fixe, s par exemple décimales significatives c'est-à-dire pouvant être mises sous la forme:

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \frac{\alpha_s}{10^s}$$

où α_i sont des chiffres prenant des valeurs dans $\{0,1,\ldots,9\}$.

Pour former le tableau des nombres aléatoires de la forme ci-dessus,uniformément répartis dans $[0,1]$, il suffit d'indiquer le mode d'obtention des chiffres α_i en respectant les conditions suivantes:

a) α_i est un échantillon aléatoire des nombres $0,1,2,\ldots,9$,
toutes les valeurs indiquées étant equiprobables et indépendantes.

b) le choix des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ n'influe nullement sur le choix de α_{i+1}.

Pour obtenir un nombre aléatoire à s rangs, cet échantillon est repris s fois.

Calcul d'intégrales par la méthode Monte-Carlo:

Soit $X^1, X^2, \ldots, X^N$, N vecteurs aléatoires indépendants et uniformément distribués dans $I_d = [0,1]^d$.

Un estimateur de

$$I = \int_{[0,1]^d} f(X)dX \tag{1.3.4}$$

est :

$$\tilde{f}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X^i) \tag{1.3.5}$$

$\tilde{f}_N$ est l'estimateur de Monte-Carlo standard.
On suppose que la variance σ^2 de $f(X)$ pour X vecteur aléatoire uniformément distribué dans $[0,1]^d$ est finie:
On rappelle dans [27] que:

$$\sigma^2(f) = \int_{I_d} f^2(X)dX - \left(\int_{I_d} f(X)dX\right)^2 \tag{1.3.6}$$

La variance de l'estimateur $\tilde{f}_N$ alors égale à $\frac{\sigma^2}{N}$.
Le théorème de la limite centrale permet de donner une idée de la distribution de cet estimateur pour N grand mais fini.On sait que :

$$\sqrt{N}\,\frac{\tilde{f}_N - I}{\sigma} \tag{1.3.7}$$

a appproximativement pour distribution une loi normale centrée réduite qui permet d'obtenir un intervalle de confiance pour I :

$$I \in \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X^i) - \frac{C_\alpha \sigma}{\sqrt{N}}, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X^i) + \frac{C_\alpha \sigma}{\sqrt{N}}\right] \tag{1.3.8}$$

au risque α, où $C_\alpha = \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ et ϕ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
La convergence d'une telle méthode est donc en $O(1/\sqrt{N})$, indépendamment de la dimension d du problème.
pour comparer l'efficacité de deux méthodes différentes de Monte-Carlo, on regarde à la fois les variances des deux estimateurs et les temps de calcul correspondants. Soient $\tilde{f}_N^1$ et $\tilde{f}_N^2$ deux estimateurs différents de Monte-Carlo, $\sigma^2(\tilde{f}_N^1)$ et $\sigma^2(\tilde{f}_N^2)$ leurs variances respectives et $t_1$et t_2 les temps de calcul necessaires pour les obtenir, l'efficacité de l'estimateur $\tilde{f}_N^k$ $(k = 1,2)$ est définie par:

$$\frac{1}{\sigma^2(\tilde{f}_N^k)t_k} \tag{1.3.9}$$

L'estimateur le plus efficace sera celui qui donnera le produit $\sigma^2(\tilde{f}_N^k)t_k$ le plus petit, c'est-à-dire celui qui donnera le plus rapidement une précision désirée. On remarquera que pour rendre plus efficace un estimateur,

il suffit de reduire sa variance sans pour autant augmenter significativement le temps de calcul.
Plusieurs techniques reduisant la variance sont présentées dans [58].Citons parmi elles, la méthode de la variance controlée, la méthode des variables stratifiées ou antithétiques, la méthode de l'echantillonnage stratifié, ou la méthode de l'echantillonnage préférentiel.

CHAPITRE 2

Approximation d’intégrales multiples par des intégrales simples.

Approximation d'intégrales doubles sur le disque unité de $\mathbf{R}^2$

Considérons le disque unité de $\mathbf{R}^2$

$$\mathbf{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

et la spirale d'Archimede définie pour $a \rangle 0,$ par:

$$\Gamma = \left\{(x(\theta), y(\theta)) \in \mathbf{R}^2 / x(\theta) = a\theta\cos\theta\ ,\ y(\theta) = a\theta\sin\theta\right\}$$

Nous choisissons pour des raisons de convenance a=$\frac{1}{2n\pi}$, où n est un entier naturel positif.
soit:

$$\theta_{\max} = \frac{1}{a} = 2n\pi \qquad 2.1.1$$

La courbe Γ pour $\theta \in [0, \theta_{\max}]$ est πa-dense dans **D**, [17].
Notons le point $(a\theta\cos\theta, a\theta\sin\theta)$ pour $\theta \in [0, \theta_{\max}]$ par

$$M(\theta) = (a\theta\cos\theta, a\theta\sin\theta) \qquad 2.1.2$$

Considérons maintenant la subdivision $(\theta_k)_{k=0}^{n}$ de l'intervalle $[0, 2\pi]$ donnée par:

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{n}, k = 0, \ldots, n-1. \qquad 2.1.3$$

La demi-droite d'angle polaire θ_k rencontre Γ en n points

$$M(\theta_k + 2p\pi), p = 0, \ldots, n-1. \qquad 2.1.4$$

Dans le but d'obtenir une approximation de

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

où f est une fonction continue sur **D,** utilisons la partition de **D** obtenue de cette manière. Soit $\mathbf{D}_1$ le sous-ensemble de **D** situé entre la dernière spire de Γ et $\delta\mathbf{D}$ la frontière de **D.**

Lemme 2.1.1:

$$\underset{a \to 0}{Lim}\ mes(\mathbf{D}_1) = 0 \qquad 2.1.5$$

Preuve:
On a de manière évidente que:

$$mes(\mathbf{D}_1) \leq 2\pi\sqrt{(x' - 1)^2 + (y' - 1)^2}$$

où :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M(2(n-1)\pi)$$

$$= \begin{pmatrix} 2a(n-1)\pi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2a\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$mes(\mathbf{D}_1) \leq 4\pi^2 a$$

et par conséquent:

$$\lim_{a\to 0} mes(\mathbf{D}_1) = 0.$$

Afin d'estimer $\int\int_D f(x,y)dxdy$, designons par p_k l'un des élèments de la subdivision précédemment construite et dont les sommets sont $M(\theta_k)$, $M(\theta_{k+1}), M(\theta_{k+n})$ et $M(\theta_{k+n+1}), k = 0,\ldots,n^2-1$.

Lemme 2.1.2:

$$mes(p_k) = \left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{n}\right)^3(n^2+2nk+n) \qquad 2.1.6$$

Preuve:

Soient A_1 le sous ensemble de **D** délimité par les demi-droites d'angle polaire θ_k et θ_{k+1}et l'arc de courbe de Γ d'éxtrémités $M(\theta_k)$ et $M(\theta_{k+1})$, A_2 le sous-ensemble de **D** délimité par les mêmes demi-droites et l'arc de courbe de Γ d'éxtrémités $M(\theta_{k+n})$ et $M(\theta_{k+n+1})$.
On a alors:

$$mes(A_1) = \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}}(\int_0^{r(\theta)} rdr)d\theta$$

$$= \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{a^2}{2}\theta^2 d\theta$$

$$= \frac{a^2}{6}(\frac{2\pi}{n})^3(3k^2+3k+1)$$

où: $r(\theta) = a\theta$
Nous pouvons de la même manière montrer que:

$$mes(A_2) = \frac{a^2}{6}(\frac{2\pi}{n})^3(3(k+n)^2+3(k+n)+1)$$

Il s'en suit que :

$$mes(p_k) = mes(A_2) - mes(A_1)$$

$$= \frac{a^2}{6}(\frac{2\pi}{n})^3(n^2 + 2nk + n).$$

Lemme 2.1.3:
Posons:

$$\theta_{k+\frac{1}{2}} = \theta_k + \frac{\pi}{n} \qquad 2.1.7$$

alors:

$$n^2 + 2nk + n = \frac{n^2}{\pi}(\pi + \theta_{k+\frac{1}{2}}) \qquad 2.1.8$$

Preuve:
Comme:

$$\theta_{k+\frac{1}{2}} = 2k\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n}$$

$$= \frac{\pi}{n}(2k + 1)$$

alors:

$$2k + 1 = \frac{\pi}{n}\theta_{k+\frac{1}{2}}$$

On obtient finalement que :

$$n^2 + 2nk + n = n^2 + n(2k + 1) = \frac{n^2}{\pi}(\pi + \theta_{k+\frac{1}{2}})$$

Théorème 2.1.1:
Si f est une fonction définie continue sur **D** alors:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \lim_{a\to 0} \int_0^{\frac{1}{a}} f(x(\theta),y(\theta))2\pi a^2\theta d\theta \qquad 2.1.9$$

Preuve:
Etape 1:

$$I = \int\int_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D/D_1} f(x,y)dxdy$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \iint_{D/D_1} f(x,y)dxdy$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n^2-1} mes(p_k)f(M(\theta_{k+\frac{1}{2}}))$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n^2-1} f(M(\theta_{k+\frac{1}{2}}))\ \frac{a^2}{2}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^3(\pi+\theta_{k+\frac{1}{2}})$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n^2-1} f(M(\theta_{k+\frac{1}{2}}))(\theta_{k+1}-\theta_k)(2\pi a^2)(\pi+\theta_{k+\frac{1}{2}}) \text{ voir (2.1.6) et (2.1.8)} \qquad 2.1.10$$

(2.1.10) est une approximation de $\int_0^{\frac{1}{a}} f(M(\theta))2\pi a^2(\pi+\theta)d\theta$

Comme on a:

$$|\lim_{a\to 0}\int_0^{\frac{1}{a}} f(M(\theta))2\pi a^2(\pi)d\theta\ | \le \lim_{a\to 0}\ [S.2(\pi a)^2(\frac{1}{a})] = 0$$

où :

$$S = \sup_D |\ f(x,y)\ |$$

alors (2.1.10) est une approximation de:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} f(M(\theta))2\pi a^2\theta d\theta \qquad 2.1.11$$

Etape 2:

Montrons maintenant que :

$$\lim_{a\to 0}\int_0^{\frac{1}{a}} f(M(\theta))2\pi a^2\theta d\theta = \iint_D f(x,y)dxdy$$

Posons d'abord:

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{a}} f(M(\theta))2\pi a^2\theta d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi n} f(M(\theta))\frac{\theta}{2\pi n^2}d\theta \qquad 2.1.12$$

$$= \frac{1}{2\pi n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{2i\pi}^{2(i+1)\pi} f(\frac{\theta}{2\pi n}(\cos\theta,\sin\theta))\theta d\theta$$

On considère aussi:

$$J_n = \frac{1}{2\pi n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{2i\pi}^{2(i+1)\pi} f(\frac{i+1}{2\pi n}(\cos\theta,\sin\theta))\theta d\theta \qquad 2.1.13$$

f étant uniformément continue sur **D**, pour tout $\varepsilon \rangle 0$ il existe un réel δ positif tel que:

$$\forall M_1,M_2 \in \mathbf{D}, d(M_1,M_2) \le \delta \text{ on a } |\ f(M_1)-f(M_2)\ | \le \varepsilon$$

on obtient alors que:

$$| \; I_n - \; J_n \; | \leq$$

$$\frac{1}{2\pi n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{2i\pi}^{2(i+1)\pi} \; | \; f(\frac{\theta}{2\pi n}(\cos\theta, \sin\theta)) \; - f(\frac{i+1}{2\pi n}(\cos\theta, \sin\theta)) \;\; | \; \theta d\theta$$

Soient: $M_1 = \frac{\theta}{2\pi n}(\cos\theta, \sin\theta)$ et $M_2 = \frac{i+1}{2\pi n}(\cos\theta, \sin\theta)$
alors:

$$d(M_1, M_2) = | \; \frac{\theta}{2\pi n} - \frac{i+1}{2\pi n} \; | \leq \frac{1}{n} \; , \forall\theta \in [2i\pi, 2(i+1)\pi].$$

Si $\frac{1}{n} \leq \delta$ nous obtenons que:

$$| \; I_n - \; J_n \; | \leq \frac{\varepsilon}{2\pi n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{[2(i+1)\pi]^2 - [2i\pi]^2}{2} \right)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\pi n^2} \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi^2(2i+1)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\pi n^2} \pi^2 n^2 = \pi\varepsilon.$$

Nous venons ainsi d'établir que:

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} J_n \qquad 2.1.14$$

Ecrivons maintenant J_n sous la forme suivante:

$$J_n = L_n + K_n \qquad 2.1.15$$

où :

$$L_n = \frac{1}{2\pi n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} f(\frac{i+1}{n}(\cos s, \sin s)) s ds \qquad 2.1.16$$

$$K_n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} f(\frac{i+1}{n}(\cos s, \sin s)) \frac{i}{n^2} ds \qquad 2.1.17$$

(ce résultat peut être démontré en utilisant le changement de variable
$\theta = s + 2i\pi$)
Nous obtenons alors l'inégalité suivante:

$$| \; L_n \; | \leq \frac{S}{2\pi n^2}(2\pi)^2 \sum_{i=0}^{n-1} 1 = \frac{2\pi S}{n}$$

Il en découle que:

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} K_n \qquad 2.1.18$$

Posons maintenant :

$$g_n(s) = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i+1}{n}(\cos s, \sin s)\right)\frac{i}{n^2},\ s \in [0, 2\pi] \qquad 2.1.19$$

Il est clair que:

$$|\ g_n(s)\ | \leq \frac{S}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i \leq S, \forall n \in \mathbb{N}^{\times}$$

et que:

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(s) = \int_0^1 f(r(\cos s, \sin s))rdr$$

$$= g(s), \forall s \in [0, 2\pi] \qquad 2.1.20$$

Nous pouvons affirmer, par application du théorème de Fubini [13] que g est intégrable sur $[0, 2\pi]$. Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue [12] nous permet alors de conclure que:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} g_n(s)ds = \int_0^{2\pi} g(s)ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 f(r(\cos\theta, \sin\theta))rdr\right]d\theta$$

$$= \iint_{\mathbf{D}} f(x, y,)dxdy.$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{i+1}{n}(\cos s, \sin s)\right)\frac{i}{n^2} ds$$

$$= \lim_{n\to+\infty} K_n$$

Le théorème 1 est ainsi démontré par utilisation de (2.1.18), (2.1.14) et (2.1.12).

Exemples:
1-Soit:

$$f_1(x, y) = 1, \forall (x, y) \in \mathbf{D}$$

$$\iint_{\mathbf{D}} f_1(x,y)dxdy = \pi$$

et:

$$\lim_{a\to 0} \int_0^{\frac{1}{a}} f_1(M(\theta))2\pi a^2\theta d\theta = \lim_{a\to 0} \left[2\pi a^2 \frac{\theta^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{a}} = \pi$$

2-Soit:

$$f_2(x,y) = x, \forall (x,y) \in \mathbf{D}$$

$$\iint_{\mathbf{D}} f_2(x,y)dxdy = 0$$

et:

$$\lim_{a\to 0} \int_0^{\frac{1}{a}} f_2(M(\theta))2\pi a^2\theta d\theta = \lim_{a\to 0} \int_0^{\frac{1}{a}} 2\pi a^3\theta^2 \cos\theta d\theta$$

$$\lim_{a\to 0} \left[2\pi a^3(\frac{1}{a^2} \sin \frac{1}{a})\right] - \lim_{a\to 0} [2\pi a^3 \int_0^{\frac{1}{a}} 2\theta \sin\theta d\theta] = 0$$

car:

$$\left| \int_0^{\frac{1}{a}} 2\theta \sin\theta d\theta \right| \leq \frac{1}{a^2}$$

3-Soit :

$$f_3(x,y) = x^2y^2, \forall (x,y) \in \mathbf{D}$$

$$\iint_{\mathbf{D}} f_2(x,y)dxdy = \frac{\pi}{24}$$

nous avons:

$$\lim_{a\to 0} \int_0^{\frac{1}{a}} f_3(M(\theta))2\pi a^2\theta d\theta = \lim_{a\to 0} \int_0^{\frac{1}{a}} 2\pi a^6\theta^5 \sin^2\theta \cos^2\theta d\theta$$

$$\lim_{a\to 0} (\frac{\pi a^6}{4}[\frac{1}{6a^6} - \frac{1}{4a^5} \sin \frac{4}{a} + \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{5}{a} \sin 4\theta d\theta]) = \frac{\pi}{24}$$

qui donne le même résultat.

Approximation d’intégrales doubles sur le carré $\mathbf{P}_2 = [\mathbf{0},\mathbf{1}] \times [0, 2\pi]$

Dans ce paragraphe nous utiliserons la fonction Argument notée arg qui est définie par: $arg : [0, +\infty[\to [0, 2\pi[$

$$\theta \quad \to \; arg\theta = \begin{pmatrix} 2\arctan(\tan(\frac{\theta-\pi}{2})) \; +\pi, \text{si } \theta \; \notin \; 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 \qquad\qquad , \qquad \text{si } \theta \; \in \; 2\pi\mathbb{Z} \end{pmatrix} \qquad 2.2.1$$

où $\quad 2\pi\mathbb{Z} = \{2\pi k, \forall k \in \mathbb{Z}\}$

Théorème 2.2.1:

Si f est une fonction définie continue sur P_2 alors:

$$\iint_{P_2} f(x,y)dxdy = \underset{a\to 0}{Lim} \; (2\pi a \int_0^{\frac{1}{a}} f(a\theta, \arg\theta)d\theta$$

Preuve:

Remarquons d'abord que la courbe $\{(a\theta, \arg\theta), \theta \in [0, \frac{1}{a}]\}$ est 2πa-dense dans P_2.

Etape 1:

$$I = \iint_{P_2} f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^{2\pi}[\frac{f(x,y)}{x}][xdxdy]$$

$$= \iint_D \frac{f(x(u,v),y(u,v))}{\sqrt{u^2+v^2}} \; dudv$$

où nous avons posé $u = x\cos y$ et $v = x\sin y$.

Nous obtenons alors en utilisant la formule (2.1.9) que:

$$I = \underset{a\to 0}{Lim} \; 2\pi a^2 \int_0^{\frac{1}{a}} [\frac{f(a\theta, \arg\theta)}{a\theta}]\theta d\theta$$

$$= \underset{a\to 0}{Lim} \; 2\pi a \int_0^{\frac{1}{a}} f(a\theta, \arg\theta)d\theta \qquad 2.2.2$$

car $x = \sqrt{u^2+v^2} \; = a\theta$ et $y = \arg\theta$

Etape 2:

Posons:

$$I_n = 2\pi a \int_0^{\frac{1}{a}} f(a\theta, \arg\theta)d\theta \quad où \; a = \frac{1}{2\pi n}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{2i\pi}^{2(i+1)\pi} f(a\theta, \arg\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{2i\pi}^{2(i+1)\pi} f(a\theta, \theta - 2i\pi)d\theta \qquad 2.2.3$$

Si nous introduisons la suite $(J_n)_{n\geq 1}$ définie par:

$$J_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{2i\pi}^{2(i+1)\pi} f(\frac{i+1}{n},\theta - 2i\pi)d\theta \qquad 2.2.4$$

alors nous pourrions montrer comme au paragraphe (2.1) que:

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\ I_n = \underset{n\to+\infty}{Lim}\ J_n \qquad 2.2.5$$

Etudions maintenant la suite $(J_n)_{n\geq 0}$.

$$J_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{2i\pi}^{2(i+1)\pi} f(\frac{i+1}{n},\theta - 2i\pi)d\theta$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{0}^{2\pi} f(\frac{i+1}{n},s)ds \qquad 2.2.6$$

où nous avons posé $s = \theta - 2i\pi$.
Considérons ensuite la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ définie par:

$$\forall n, n \geq 1, g_n(s) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i+1}{n},s), \forall s, s \in [0,2\pi].$$

Nous avons alors:

$$|\ g_n(s)\ | \leq \frac{S}{n}n = S$$

où:

$$S = \sup_{P_2} |\ f(x,y)\ |$$

et d'aprés [13]:

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\ g_n(s) = \int_0^1 f(x,s)ds$$

$$= g(s),\ \forall s, s \in [0,2\pi]$$

g étant evidemment intégrable sur $[0,2\pi]$.
Le théorème de convergence dominée de Lebesgue [31] entraine que:

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\ J_n = \underset{n\to+\infty}{Lim}\int_0^{2\pi} g_n(s)ds = \int_0^{2\pi} g(s)ds = \int_0^{2\pi}\int_0^1 f(x,s)ds$$

Il suffit enfin d'utiliser (2.2.5) pour démontrer le résultat.
Exemples:
1-Soit:

$$g_1\ (x,y) = 1, \forall\ (x,y) \in P_2,$$

$$\iint_{P_2} g_1\,(x,y)dxdy = 2\pi$$

D’autre part:

$$\underset{a\to 0}{Lim}\ 2\pi a\int_0^{\frac{1}{a}} g_1\,(a\theta,\arg\theta)d\theta = 2\pi a(\frac{1}{a}) = 2\pi$$

qui donne le résultat exact.
2-Soit

$$g_2\,(x,y) = xy, \forall\ (x,y) \in P_2$$

$$I_2 = \iint_{P_2} g_2\,(x,y)dxdy = \pi^2$$

Dans ce cas nous avons:

$$\underset{a\to 0}{Lim}\ 2\pi a\int_0^{\frac{1}{a}} g_2\,(a\theta,\arg\theta)d\theta$$

$$=\underset{n\to +\infty}{Lim}\ \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\int_{2i\pi}^{2(i+1)\pi} a\theta(\theta - 2i\pi)d\theta)$$

où: $a = \dfrac{1}{2\pi n}$

$$I_2 = \underset{n\to +\infty}{Lim}\ \frac{\pi^2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(2i + \frac{4}{3})$$

$$= Lim\frac{\pi^2}{n^2}(n(n-1) + \frac{4}{3}n) = \pi^2$$

3-Pour ce dernier exemple considérons :

$$g_3\,(x,y) = x\sin(\frac{y}{2}), \forall\ (x,y) \in P_2$$

$$I_3 = \iint_{P_2} g_3\,(x,y)dxdy = 2$$

et:

$$\underset{a\to 0}{Lim}\ 2\pi a\int_0^{\frac{1}{a}} g_3\,(a\theta,\arg\theta)d\theta$$

$$=\underset{n\to +\infty}{Lim}\ \frac{1}{2\pi n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(\ 8i\pi + 4\pi)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{4n\pi}{2\pi n^2}+\frac{8\pi}{2\pi n^2}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)\right] = 2$$

et la double intégrale est calculée exactement.

Approximation d'une intégrale multiple par une intégrale simple:

Remarque:

Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]^2$ nous obtenons en posant $t = 2\pi y$

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy = \frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} f\left(x,\frac{t}{2\pi}\right)dxdt$$

$$=\lim_{a\to 0} \quad a\int_0^{\frac{1}{a}} f\left(a\theta,\frac{\arg\theta}{2\pi}\right)d\theta$$

Comme:

$$\frac{arg\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{2\pi}-k = \frac{\theta}{2\pi}-\left[\frac{\theta}{2\pi}\right]$$

si $\theta \in [2k\pi, 2(k+1)\pi[$

et où [.] désigne la partie entière.

Soient x_1 et x_2 les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par:

$$x_1(\theta) = a\theta \qquad 2.3.1$$

$$x_2(\theta) = \frac{\theta}{2\pi}-\left[\frac{\theta}{2\pi}\right] \qquad 2.3.2$$

nous obtenons alors :

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy = \lim_{a\to 0} \quad a\int_0^{\frac{1}{a}} f(x_1(\theta),x_2(\theta))d\theta$$

$$=\lim_{a\to 0}\int_0^1 f\left(t, \frac{t}{2\pi a}-\left[\frac{t}{2\pi a}\right]\right)dt$$

où l'on a posé: $t = a\theta$.

On a alors pour $a = \frac{1}{2\pi n}, n \in \mathbb{N}^\times$:

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t, nt-[nt])dt. \qquad 2.3.3$$

Nous pouvons maintenant établir le résultat général suivant:

Théorème 2.3.1:

Soit f une fonction continuement définie sur $[0,1]^d$ et x la courbe définie par:

$$\begin{aligned} x \,:\, [0,1] &\to \mathbb{R}^d \\ t \quad &\to x(t) \end{aligned}$$

où:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1(t) = t \\ x_{k+1}(t) = nx_k(t) - [nx_k(t)] \end{array} \right\} t \in [0,1], 1 \leq k \leq d-1 \qquad 2.3.4$$

.

alors:

$$\begin{aligned} &\int_{[0,1]^d} f(x_1, x_2, \ldots, x_d) dx_1 dx_2 \ldots dx_d \\ &= \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_d(t)) dt \end{aligned} \qquad 2.3.5$$

Preuve:

Nous démontrons ce résultat par récurrence:
Pour d=2 ce résultat a été établi en (2.3.3).
Supposons que le même résultat soit vrai pour l'entier (d-1):

$$\begin{aligned} &\int_{[0,1]^{d-1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}) dx_1 dx_2 \ldots dx_{d-1} \\ &= \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{d-1}(t)) dt \end{aligned} \qquad 2.3.6$$

démontrons le pour l'entier d.
Soit:

$$I_d = \int_{[0,1]^d} f(x_1, x_2, \ldots, x_d) dx_1 dx_2 \ldots dx_d$$

$$= \int_0^1 \left[\int_{[0,1]^{d-1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_d) dx_2 \ldots dx_d \right] dx_1$$

par [13] et qui donne si l'on utilise (2.3.6):

$$I_d = \int_0^1 \left[\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(x_1, x_2(t), \ldots, x_d(t)) dt \right] dx_1 \qquad 2.3.7$$

Afin de terminer la preuve du théorème, nous avons besoin du résultat suivant:

Lemme 2.3.1:

$$\int_0^1 \left[\underset{n\to+\infty}{Lim} \int_0^1 f(x_1, x_2(t), \dots, x_d(t))dt \right] dx_1$$
$$= \underset{n\to+\infty}{Lim} \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x_1, x_2(t), \dots, x_d(t))dt \right] dx_1 \qquad 2.3.8$$

Preuve:
Posons:

$$g_n(x_1) = \int_0^1 f(x_1, x_2(t), \dots, x_d(t))dt,\ x_1 \in [0,1]$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times},\ |\ g_n(x_1)\ | \leq S \quad \forall x_1 \in [0,1]$$

où:

$$S = \sup_{[0,1]^d} |\ f(x_1, x_2, \dots, x_d)\ |$$

et

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\ g_n(x_1) = \int_{[0,1]^{d-1}} f(x_1, x_2, \dots, x_d)dx_2 \dots dx_d$$

si l'on utilise (2.3.6).
Introduisons maintenant la fonction g définie sur $[0,1]$ par:

$$g(x_1) = \int_{[0,1]^{d-1}} f(x_1, x_2, \dots, x_d)dx_2 \dots dx_d \qquad 2.3.9$$

Il est bien connu [13] que g est intégrable sur $[0,1]$. Le théorème de Lebesgue [12] nous permet alors de conclure que:

$$\underset{n\to+\infty}{Lim} \int_0^1 g_n(x_1)dx_1 = \int_0^1 g(x_1)dx_1$$

c'est-à-dire que:

$$\underset{n\to+\infty}{Lim} \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x_1, x_2(t), \dots, x_d(t))dt \right] dx_1$$
$$= \int_{[0,1]^d} f(x_1, x_2, \dots, x_d)dx_1 dx_2 \dots dx_d \qquad 2.3.10$$

Rappelons que:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_2(t) = t \\ x_{k+1}(t) = nx_k(t) - [nx_k(t)] \end{array} \right\} \quad t \in [0,1], 2 \leq k \leq d-1. \qquad 2.3.11$$

Si nous posons:

$$h(x_1,t) = f(x_1,x_2(t),\ldots,x_d(t)) \quad t \in [0,1] \qquad 2.3.12$$

alors:

$$\int_0^1 \int_0^1 h(x_1,t)dx_1dt = \underset{m\to+\infty}{Lim} \int_0^1 h(x_1,t(x_1))dx_1$$

par la relation (2.3.3),
et où:

$$t(x_1) = mx_1 - [mx_1]$$

Il vient alors que:

$$\int_{[0,1]^d} f(x_1,x_2,\ldots,x_d)dx_1dx_2\ldots dx_d$$
$$= \underset{n\to+\infty}{Lim}\left[\underset{m\to+\infty}{Lim} \int_0^1 f(x_1,x_2(t(x_1)),\ldots,x_d(t(x_1)))dx_1\right]$$

Pour $n = m$ on obtient:

$$\int_{[0,1]^d} f(x_1,x_2,\ldots,x_d)dx_1dx_2\ldots dx_d$$
$$= \underset{n\to+\infty}{Lim} \int_0^1 f(x_1,x_2(t(x_1)),\ldots,x_d(t(x_1)))dx_1$$

Si l'on utilise:

$$\left\{\begin{array}{c} x_1(t) = x_1 \\ x_2(t(x_1)) \;\; = nx_1 - [nx_1] \\ x_{k+1}(t(x_1)) \;\; = nx_k - [nx_k] \end{array}\right\}, \; 2 \leq k \leq d-1$$

on aura alors:

$$\int_{[0,1]^d} f(x_1,x_2,\ldots,x_d)dx_1dx_2\ldots dx_d$$
$$= \underset{n\to+\infty}{Lim} \int_0^1 f(t,x_2(t),\ldots,x_d(t))dt.$$

qui achève la démonstration du théorème.

Erreur de la méthode:

Théorème 2.4.1:

Si f est lipschitzienne sur $[0,1]^d$ de constante de Lipschitz L,alors:

$$|\; I - I_n \;| \leq \frac{L}{dn} \qquad 2.4.1$$

où:

$$I = \int_{[0,1]^d} f(x_1,x_2,\ldots,x_d)dx_1dx_2\ldots dx_d$$

et

$$I_n = \int_0^1 f(t, x_2(t), \dots, x_d(t))dt \tag{2.4.2}$$

$(t, x_2(t), \dots, x_d(t))$ étant la courbe introduite en (2.3.4).

Preuve:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 f(t, x_2(t), \dots, x_d(t))dt \\ &= \int_0^1 f(t, nt - [nt], n^2t - n[nt] - [n^2t - n[nt]], \dots)dt \end{aligned}$$

Pour $\theta = nt$ on obtient que:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n}\int_0^n f(\frac{\theta}{n}, \theta - [\theta], n\theta - n[\theta] - [n\theta - n[\theta]], \dots)d\theta \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i_1=0}^{n-1}\int_{i_1}^{i_1+1} f(\frac{\theta}{n}, \theta - i_1, n(\theta - i_1) - [n(\theta - i_1)], \dots)d\theta \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i_1=0}^{n-1}\sum_{i_2=0}^{n-1}\int_{i_1+\frac{i_2}{n}}^{i_1+\frac{i_2+1}{n}} f(\frac{\theta}{n}, \theta - i_1, n(\theta - i_1) - i_2, \dots)d\theta \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i_1=0}^{n-1}\sum_{i_2=0}^{n-1}\cdots\sum_{i_{d-1}=0}^{n-1}\int_{i_1+\frac{i_2}{n}+\dots\frac{i_{d-1}}{n^{d-2}}}^{i_1+\frac{i_2+1}{n}+\dots\frac{i_{d-1}+1}{n^{d-2}}} f(\frac{\theta}{n}, \theta - i_1, n(\theta - i_1) - i_2, \dots)d\theta \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Posons:

$$a = i_1 + \frac{i_2}{n} + \dots \frac{i_{d-1}}{n^{d-2}} \tag{2.4.4}$$

et :

$$b = a + \frac{1}{n^{d-2}} \tag{2.4.5}$$

$$y_p(\theta) = n^{p-2}\theta - \sum_{j=1}^{p-1} n^{p-1-j} i_j \qquad 2 \leq p \leq d \tag{2.4.6}$$

Soit maintenant:

$$J_n = \frac{1}{n}\sum_{i_1=0}^{n-1}\sum_{i_2=0}^{n-1}\cdots\sum_{i_{d-1}=0}^{n-1}\int_a^b f(\frac{a}{n}, y_2(a), \dots, y_{d-1}(a), y_d(\theta))d\theta \tag{2.4.7}$$

nous obtenons alors:

$$| \ I_n - J_n \ | \leq \frac{1}{n} \sum_{i_1=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{n-1} \cdots \sum_{i_{d-1}=0}^{n-1} \int_a^b$$

$$| \ f(\frac{\theta}{n}, y_2(\theta), \ldots, y_{d-1}(\theta), y_d(\theta)) \ - f(\frac{a}{n}, y_2(a), \ldots, y_{d-1}(a), y_d(\theta)) \ | \ d\theta$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{i_1=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{n-1} \cdots \sum_{i_{d-1}=0}^{n-1} | \ b - a \ | \ L d(M_1, M_2)$$

où M_1 et M_2 sont les deux arguments de f apparaissant dans la formule précédente, $d(M_1,M_2)$ étant la distance qui les sépare.
Mais comme:

$$b - a = \frac{1}{n^{d-2}}$$

et:

$$d(M_1, M_2) \leq \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^{2(d-1)}$$

$$\leq \frac{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{2(d-1)}}{n^2 - 1}$$

alors:

$$| \ I_n - J_n \ | \leq \frac{L}{\sqrt{n^2 - 1}} \simeq \frac{L}{n} \qquad 2.4.8$$

pour n assez grand.
Donnons maintenant une majoration de $| \ I - J_n \ |$

$$| \ I - J_n \ | =$$

$$| \ \frac{1}{n} \sum_{i_1=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{n-1} \cdots \sum_{i_{d-1}=0}^{n-1} \int_a^b \ f(\frac{a}{n}, y_2(a), \ldots, y_{d-1}(a), y_d(\theta)) d\theta$$

$$- \int_{[0,1]^d} f(x_1, x_2, \ldots, x_d) dx_1 dx_2 \ldots dx_d \ |$$

Pour

$$s = y_d(\theta) = n^{d-2}\theta - \sum_{j=1}^{d-1} n^{d-1-j} i_j$$

(voir (2.4.6))
on obtient:

$$| \ I - J_n \ | \leq$$

$$\left| \ \frac{1}{n^{d-1}} \sum_{i_1=0}^{n-1}\sum_{i_2=0}^{n-1}\cdots\sum_{i_{d-1}=0}^{n-1} \int_0^1 f\left(\frac{a}{n}, y_2(a), \ldots, y_{d-1}(a), s\right) ds \right.$$

$$- \sum_{i_1=0}^{n-1}\sum_{i_2=0}^{n-1}\cdots\sum_{i_{d-1}=0}^{n-1} \int_{\frac{i_1}{n}}^{\frac{i_1+1}{n}} \cdots \int_{\frac{i_{d-1}}{n}}^{\frac{i_{d-1}+1}{n}}$$

$$\left. \int_0^1 f(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}, s) dx_1 \ldots dx_{d-1} ds \ \right|$$

$$\leq \int_0^1 \ \left| \ \frac{1}{n^{d-1}} \sum_{i_1=0}^{n-1}\sum_{i_2=0}^{n-1}\cdots\sum_{i_{d-1}=0}^{n-1} f\left(\frac{a}{n}, y_2(a), \ldots, y_{d-1}(a), s\right) \right.$$

$$\left. - \int_{\frac{i_1}{n}}^{\frac{i_1+1}{n}} \cdots \int_{\frac{i_{d-1}}{n}}^{\frac{i_{d-1}+1}{n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}, s) dx_1 \ldots dx_{d-1} \ \right| \ ds$$

$$\leq \int_0^1 \sum_{i_1=0}^{n-1}\sum_{i_2=0}^{n-1}\cdots\sum_{i_{d-1}=0}^{n-1} \int_{\frac{i_1}{n}}^{\frac{i_1+1}{n}} \cdots \int_{\frac{i_{d-1}}{n}}^{\frac{i_{d-1}+1}{n}}$$

$$\left| \ f\left(\frac{a}{n}, y_2(a), \ldots, y_{d-1}(a), s\right) - f(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}, s) dx_1 \ldots dx_{d-1} \ \right| \ ds$$

On peut montrer en utilisant (2.4.6) que:

$$\frac{a}{n} \in \left[\frac{i_1}{n}, \frac{i_1+1}{n} \right]$$

et que :

$$y_k(a) = n^{k-2}a - \sum_{j=1}^{k-1} (n^{k-1-j}) i_j \quad 2 \leq k \leq d-1$$

$$= [(n^{k-2})i_1 + (n^{k-3})i_2 + \ldots (n^{k-d})i_{d-1}] - [(n^{k-2})i_1 + (n^{k-3})i_2 + \ldots i_{k-1}]$$

$$= \frac{i_k}{n} + \frac{i_{k+1}}{n^2} + \ldots + \frac{i_{d-1}}{n^{d-k}} \qquad 2 \leq k \leq d-1$$

Il s’ensuit alors que:

$$y_k(a) \in \left[\frac{i_k}{n}, \frac{i_k+1}{n} \right], \ \ 2 \leq k \leq d-1 \tag{2.4.9}$$

et que:

$$| \ y_k(a) - x \ | \leq \frac{1}{n}, \ \ \forall \ x \in \left[\frac{i_k}{n}, \frac{i_k+1}{n} \right], 2 \leq k \leq d-1.$$

Nous obtenons par conséquent que:

$$| \ I - J_n \ | \leq \int_0^1 \{ \sum_{i_1=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{n-1} \dots \sum_{i_{d-1}=0}^{n-1}$$

$$\int_{\frac{i_1}{n}}^{\frac{i_1+1}{n}} \dots \int_{\frac{i_{d-1}}{n}}^{\frac{i_{d-1}+1}{n}} L \ \| \ Y(a) - X \ \|_1 \ dx_1 \dots dx_{d-1} \} ds$$

où :

$$Y(a) = (\frac{a}{n}, y_2(a), \dots, y_{d-1}(a)), X = (x_1, x_2, \dots, x_{d-1})$$

et

$$\| \ Z \ \|_1 \ = \sum_{j=1}^{d-1} | \ z_j \ |,$$

$z_j, j = 1, \dots, d-1$ étant les composantes de Z.
Alors:

$$| \ I - J_n \ | \leq \sum_{i_1=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{n-1} \dots \sum_{i_{d-1}=0}^{n-1}$$

$$\int_{\frac{i_1}{n}}^{\frac{i_1+1}{n}} \dots \int_{\frac{i_{d-1}}{n}}^{\frac{i_{d-1}+1}{n}} \sum_{k=1}^{d-1} | \ \frac{i_k}{n} + \dots \frac{i_{d-1}}{n} \ | \ dx_1 \dots dx_{d-1}$$

$$\leq L \frac{1}{n^{d-2}} \sum_{i_1=0}^{n-1} \sum_{i_2=0}^{n-1} \dots \sum_{i_{d-1}=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{d-1} \int_{\frac{i_k}{n}}^{\frac{i_k+1}{n}} \ | \ \frac{i_k}{n} + \dots \frac{i_{d-1}}{n} \ | \ dx_k$$

$$\leq \ L \left(\frac{1}{n^{d-2}} \right) \ (n^{d-1}) \ \sum_{k=1}^{d-1} \int_{\frac{i_k}{n}}^{\frac{i_k+1}{n}} \frac{1}{n} dx_k$$

$$\leq L \left(\frac{n^{d-1}}{n^{d-2}} \right) \left(\frac{d-1}{n^2} \right) = L \frac{d-1}{n}$$

Nous avons finalement:

$$| \ I - I_n \ | \leq | \ I - J_n \ | + | \ I_n - J_n \ | \leq \frac{L}{n} + \frac{L(d-1)}{n} = \frac{Ld}{n}$$

Remarques:
1-Ce même résultat peut être établi pour une fonction continue sur $[0,1]^d$, la constante de Lipschitz L de f étant remplacée par le coefficient d'uniforme continuité $\delta(\varepsilon)$ de f sur $[0,1]^d$.
2-L'estimation suivante de l'erreur e_n des formules quadratiques d'intégration sur l'espace de Sobolev $\mathbf{W}_2^1([0,1]^d)$ a été démontrée [53]

$$e_n[\mathbf{BW}_2^1([0,1]^d)] \ \simeq n^{-\frac{1}{d}}$$

où $\mathbf{BW}_2^1([0,1]^d)$ désigne la boule unité de $\mathbf{W}_2^1([0,1]^d)$.Pour une dimension d élevée, il sera nécessaire de choisir un nombre n de points de discrétisation trés grand. Pour que e_n soit inferieur à 10^{-3} il faudrait si $d = 100$ que $n \geq 10^{300}$. Par notre méthode et dans les mêmes conditions on utiliserait un coefficient d'α-densité $a = 2n\pi$ où n vérifierait:

$$\frac{Ld}{n} \leq 10^{-3}$$

qui entraine que:

$$n \geq L10^5$$

Tests numériques

$C.D.$ désigne la méthode des courbes α –denses (n étant égal à $(1/\alpha)$ où α désigne le coefficient d' α –densité), $M.C.$ désigne la méthode de Monte Carlo qui utilise m^d points (d étant la dimension) et k tests, et $C.D.\&\, M.C.$ désigne la combinaison des deux méthodes n, m et k désignant les mêmes paramètres. e est l'erreur de la méthode, tps est le temps de calcul en seconde.

Dans la table I on retrouve les résultats relatifs à la fonction f_1 définie sur $[0,1]^2$ par:

$$f_1(x,y) = Exp(-x^2 - y^2).$$

Dans la table II on retrouve les résultats relatifs à la fonction f_2 définie sur $[0,1]^3$ par:

$$f_2(x,y,z) = Exp(-x^2 - y^2 - z^2).$$

Dans la table III on retrouve les résultats relatifs à la fonction f_3 définie sur $[0,1]^{10}$ par:

$$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}) = Exp(\sum_{i=1}^{10} x_i).$$

Table I:

$C.D.$			$M.C.$			$C.D.\&\, M.C.$		
n	e	tps	(m,k)	e	tps	(n,m,k)	e	tps
100	0.000909	4	(50, 100)	0.000058	3	(100, 100, 100)	0.000179	1
200	0.000328	5	(100, 100)	0.000019	15	(1000, 500, 500)	0.000011	9

Table II:

$C.D$			$M.C.$			$C.D.\&\, M.C.$		
n	e	tps	(m,k)	e	tps	(n,m,k)	e	tps
100	0.076918	6	(10, 100)	0.031935	10	(100, 100, 100)	0.000304	1
200	0.024973	7	(30, 100)	0.002958	140	(1000, 500, 500)	0.000036	15

Table III:

	C.D.		M.C.			C.D. & M.C.		
n	e	tps	(m,k)	e	tps	(n,m,k)	e	tps
100	52.5704	11	(3,100)	34.3258	210	(100,100,100)	0.130182	90
200	40.2548	13	(4,10)	23.2295	310	(200,200,200)	0.013125	375

On constate dans les exemples (1) et (2) que la combinaison des deux méthodes est la plus performante des trois, alors que les résultats des deux premières méthodes sont comparables en petite dimension (2 ou 3). Dans le troisième exemple où la dimension est (10), la combinaison des deux méthodes reste de loin la plus performante, tandis que la méthode (C.D.) donne de meilleurs résultats que la méthode (M.C.).

CHAPITRE 3

Approximation d'intégrales multiples par des longueurs de courbes:

Introduction:

Dans le premier chapitre l'utilisation des courbes a-denses a permis d'établir une approximation d'intégrales multiples par des intégrales simples et ceci en densifiant le domaine $[0,1]^d$, où d est la dimension d'espace. Dans ce deuxième chapitre nous nous proposons de mettre en pratique une idée naturelle [20], [36] afin de mettre en évidence une nouvelle approximation d'intégrales multiples par des intégrales simples. Cette nouvelle idée consiste à densifier non pas le domaine de définition $[0,1]^d$ de f, mais le domaine

$$Hf = \{(x,y), x \in [0,1]^d, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

pour une fonction numérique définie sur $[0,1]^d$, $d \in \mathbf{N}^\times$. Nous établissons ensuite une approximation d'intégrales multiples sur $[0,1]^d$, par des longueurs de courbes a-denses, longueurs de courbes qui s'expriment evidemment par des intégrales simples. Contrairement aux résultats établis dans le chapitre 1, cette nouvelle méthode aboutit à l'intégrale de f avec un poids p.En dimension 2 par exemple, nous obtenons le résultat suivant:

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\ \frac{\pi}{2}\int_0^1 \ |\ \sin(n^2\pi t)\ |\ f(t,\frac{1}{2}(1-\cos(n\pi t))dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^1 \frac{f(x,y)}{\sqrt{y-y^2}}dxdy$$

L'intégrale de f sur $[0,1]^d$ peut -être alors obtenue en introduisant une fonction auxiliaire $g = f.p$, où p est la fonction poids de la formule précédente.

Approximation d'une intégrale simple par la longueur d'une courbe a-dense:

Soit f une fonction continuement dérivable sur $[0,1]$.
On note par Hf [24] , l'ensemble défini par:

$$Hf = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f(x)\right\} \qquad 3.2.1$$

pour une fonction f positive et par Γ_n , n étant un entier naturel positif, la courbe définie par:

$$\left\{\begin{array}{c} x(t) = t \\ y(t) = \frac{1}{2}(1-\cos(n\pi t))f(t) \end{array}\right\}, t \in [0,1] \qquad 3.2.2$$

Γ_n est $\frac{1}{n}$-dense dans Hf [45]. La longueur de Γ_n est notée par:

$$l(\Gamma_n) \qquad 3.2.3$$

Lemme 3.2.1:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} l(\Gamma_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2}\int_0^1 f(t)\ |\ \sin(n\pi t)\ |\ dt \qquad 3.2.4$$

Preuve:

$$\frac{1}{n} l(\Gamma_n) - \frac{\pi}{2}\int_0^1 f(t)\ |\ \sin(n\pi t)\ |\ dt$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^1 \{\sqrt{1 + \left[n\frac{\pi}{2}\left(\sin\ n\pi t\right)f(t) + \frac{1}{2}\left(1-\cos\ n\pi t\right)f'(t)\right]^2} - \frac{\pi}{2}f(t)\ |\ \sin\ n\pi t\ |\}dt$$

$$= \int_0^1 \{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \left[\frac{\pi}{2}\sin\ n\pi t.f(t) + \frac{1}{2n}\left(1-\cos\ n\pi t\right)f'(t)\right]^2} - \sqrt{\frac{\pi^2}{4}f^2(t)\sin^2 n\pi t}\}\ dt$$

Soit:

$$D(t) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \left[\frac{\pi}{2}\sin\ n\pi t.f(t) + \frac{1}{2n}\left(1-\cos\ n\pi t\right) f'(t)\right]^2} + \sqrt{\frac{\pi^2}{4}f^2(t)\ \sin^2 n\pi t}$$

alors:

$$\frac{1}{n} l(\Gamma_n) - \frac{\pi}{2}\int_0^1 f(t)\ |\ \sin(n\pi t)\ |\ dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\{\frac{1}{n^2} + \frac{\pi}{2n}\sin\ n\pi t\left(1-\cos\ n\pi t\right) f(t)f'(t) + \frac{1}{4n^2}(1-\cos n\pi t)^2(f'(t))^2\}}{D(t)}\ dt \qquad 3.2.5$$

Majorons les différents termes de l'expression précédente:

$$|\int_0^1 \frac{\frac{1}{n^2}}{D(t)}dt\ | \quad \leq \int_0^1 \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}dt = \frac{1}{n} \qquad 3.2.6$$

$$|\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{2n}\ \sin\ n\pi t(1-\cos n\pi t)\ f(t)f'(t)}{D(t)}\ dt\ |$$

$$\leq \int_0^1 \frac{\frac{\pi}{2n}\ |\ \sin\ n\pi t\ \|\ (1-\cos n\pi t)\ |\ \ f(t)\ |\ f'(t)\ |}{\frac{\pi}{2}\ |\ \sin\ n\pi t\ |\ f(t)}\ dt$$

$$\leq \frac{2}{n}M_1 \qquad 3.2.7$$

où :

$$M_0 = \sup_{[0,1]} f(t) \ , \ M_1 = \sup_{[0,1]} | \ f'(t) \ | \qquad 3.2.8$$

et :

$$| \int_0^1 \frac{\frac{1}{4n^2}(1-\cos n\pi t)^2 (f'(t))^2}{D(t)} \ dt \ |$$

$$\leq \int_0^1 \frac{\frac{1}{4n^2}(1-\cos n\pi t)^2 (f'(t))^2}{\frac{1}{n}}$$

$$\leq \frac{M_1^2}{n} \qquad 3.2.9$$

Nous deduisons à partir de (3.2.5), (3.2.6), (3.2.7) et (3.2.9) le résultat du lemme (3.2.1)
Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant:

Théorème 3.2.1:
Si f est lipschitzienne de constante de Lipschitz L $\rangle$ 0 alors:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2} \int_0^1 f(t) \ | \ \sin n\pi t \ | \ dt = \int_0^1 f(t)dt$$

Preuve:
Soit:

$$I_n = \frac{\pi}{2} \int_0^1 f(t). | \ \sin n\pi t \ | \ dt$$

Si nous posons $n\pi t = s$, nous obtenons alors:

$$I_n = \frac{1}{2n} \int_0^{n\pi} f(\frac{s}{n\pi}) \ | \ \sin s \ | \ ds$$

$$= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(\frac{s}{n\pi}) \ | \ \sin s \ | \ ds$$

Introduisons la suite $(K_n)_{n\geq 1}$ définie par:

$$K_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(\frac{k}{n}) \ | \ \sin s \ | \ ds$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$$

car:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(s)|\, ds = 2 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Nous obtenons alors:

$$| I_n - K_n |$$

$$\leq \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin s|\, |f(\frac{s}{n\pi}) - f(\frac{k}{n})|\, ds$$

$$\leq \frac{L}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\frac{s}{n\pi} - \frac{k}{n}|\, ds$$

$$\leq \frac{L}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n}\pi = \frac{L\pi}{4n}$$

Mais comme [13]:

$$\lim_{n\to+\infty} K_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(t)dt$$

et:

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} K_n$$

la démonstration du théorème 3.1.1 est entièrement achevée.

Remarques:

1- La suite $| \frac{\pi}{2}\sin(n\pi t) |_{n\geq 1}$ est faiblement convergente dans $\mathbf{L}^{\infty}([0,1])$ vers la fonction constante 1. Il suffit afin d'établir ce résultat d'utiliser comme dans [59] la densité de $\mathbf{C}^1([0,1])$ dans $\mathbf{L}^1([0,1])$.

2-Le théorème 3.2.1 est vérifié par toute fonction appartenant à $\mathbf{L}^1([0,1])$.

Approximation d'une intégrale double par la longueur d'une courbe a-dense:

Soit f une fonction continuement différentiable sur $[0,1]^2$. Posons:

$$Hf = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in [0,1]^2, 0 \leq z \leq f(x,y)\} \qquad 3.3.1$$

Pour n entier naturel positif, considérons la courbe Λ_n, définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & t \\ y(t) & = & \frac{1}{2}(1-\cos n\pi t) \\ z(t) & = & \frac{1}{2}(1-\cos n^2\pi t) f(t, y(t)) \end{array} \right\} \quad t \in [0,1] \qquad 3.3.2$$

La courbe Λ_n est $\frac{\sqrt{2}}{n}$ –dense dans Hf [18], [24].

Lemme 3.3.1:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} l(\Lambda_n) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 f(t, \tfrac{1}{2}(1-\cos n\pi t)) \ |\sin n^2\pi t| \ dt \qquad 3.3.3$$

où $l(\Lambda_n)$ est la longueur de la courbe Λ_n.

Preuve:

$$\frac{1}{n^2} l(\Lambda_n) - \frac{\pi}{2} \int_0^1 f(t, \tfrac{1}{2}(1-\cos n\pi t)) \ |\sin n^2\pi t| \ dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{1}{n^4} + \frac{\pi^2}{4n^2}\sin^2 n\pi t}{D(t)}$$

$$+ \frac{\frac{1}{4n^4}(1-\cos n^2\pi t)^2 \left[\frac{\partial f}{\partial x}(t, \tfrac{1}{2}(1-\cos n\pi t) + \frac{n\pi}{2}\sin n\pi t)\frac{\partial f}{\partial y}(.,.) \right]^2}{D(t)}$$

$$+ \frac{\frac{\pi}{2n^2}\sin n^2\pi t (1-\cos n^2\pi t) f(t) \left[\frac{\partial f}{\partial x}(.,.) + \frac{n\pi}{2}\sin n\pi t \frac{\partial f}{\partial y}(.,.) \right]}{D(t)} \ dt \qquad 3.3.4$$

où :

$$D(t) = \{ \frac{1}{n^4} + \frac{\pi^2}{4n^2}\sin^2 n\pi t$$

$$+ [\frac{\pi}{2}\sin n^2\pi t . f(.) + \frac{1}{2n^2} + (1-\cos n^2\pi t)\frac{\partial f}{\partial x}(.) + \frac{n\pi}{2}\sin n\pi t \frac{\partial f}{\partial y}(.)]^2 \}^{\frac{1}{2}}$$

$$\{ \frac{\pi^2}{4}(\sin n^2\pi t)^2 f^2(.) \}^{\frac{1}{2}}$$

Mais comme on a:

$$\int_0^1 \frac{\frac{1}{n^4}}{D(t)}\, dt \leq \frac{1}{n^2} \qquad 3.3.5$$

$$\int_0^1 \frac{\frac{\pi^2}{4n^2}\sin^2 n\pi t}{D(t)}\, dt$$

$$\leq \int_0^1 \frac{\frac{\pi^2}{4n^2}\sin^2 n\pi t}{\frac{\pi}{2n}\ |\ \sin n\pi t\ |}\, dt \leq \frac{\pi}{2n} \qquad 3.3.6$$

$$\int_0^1 \frac{\frac{1}{4n^4}(1-\cos n^2\pi t)^2\left[\frac{\partial f}{\partial x}(.)+\frac{n\pi}{2}\sin n\pi t\frac{\partial f}{\partial y}(.)\right]^2}{D(t)}\, dt$$

$$\leq \int_0^1 \frac{\frac{1}{4n^4}(1-\cos n^2\pi t)^2\left[\frac{\partial f}{\partial x}(.)+\frac{n\pi}{2}\sin\ n\pi t\ \frac{\partial f}{\partial y}(.)\right]^2}{\frac{1}{n}}\, dt$$

$$\leq \frac{2}{n^3}M_x^2 + \frac{\pi^2}{2n}M_y^2 \qquad 3.3.7$$

où

$$M_x = \sup_{[0,1]^2} \left|\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ \right| \quad , \quad M_y = \sup_{[0,1]^2} \left|\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ \right|$$

et:

$$\left|\ \int_0^1 \frac{\frac{\pi}{2n^2}(\sin n^2\pi t)(1-\cos n^2\pi t) f\left(t,\frac{1}{2}(1-\cos n\pi t)\right)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(.)+\frac{n\pi}{2}(\sin n\pi t)\frac{\partial f}{\partial x}(.)\right]}{D(t)}\, dt\ \right|$$

$$\leq \int_0^1 \frac{\frac{\pi}{2n^2}\ |\ \sin n^2\pi t\ |\ 2f\left(t,\frac{1}{2}(1-\cos n\pi t)\right)\ \left|\ \frac{\partial f}{\partial x}(.)+\frac{n\pi}{2}(\sin n\pi t)\frac{\partial f}{\partial x}(.)\ \right|}{\frac{\pi}{2}\ |\ \sin n^2\pi t\ |\ f(t,\frac{1}{2}(1-\cos n\pi t))}\, dt$$

$$\leq \int_0^1 \frac{2}{n^2}\left(M_x + \frac{n\pi}{2}M_y\right)dt$$

$$= \frac{2M_x}{n^2} + \frac{\pi M_y}{n} \qquad 3.3.8$$

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} l(\Lambda_n) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 |\sin n^2\pi t| \, f(t, \frac{1}{2}(1-\cos n\pi t))dt.$$

en vertu de (3.3.5), (3.3.6), (3.3.7) et (3.3.8).
Nous pouvons maitenant établir le théorème suivant :

Théorème 3.3.1:
Si f est lipschitzienne de constante de Lipschitz $L \rangle 0$ sur $[0,1]^2$ alors:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2}\int_0^1 |\sin n^2\pi t| \, f(t, \tfrac{1}{2}(1-\cos n\pi t))dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^1 \frac{f(x,y)}{\sqrt{y-y^2}} dxdy$$

Preuve:
Soit:

$$J_n = \frac{\pi}{2}\int_0^1 |\sin n^2\pi t| \, f(t, \frac{1}{2}(1-\cos n\pi t))dt \qquad 3.3.9$$

Pour $s = nt$ nous obtenons:

$$J_n = \frac{\pi}{2n}\int_0^n |\sin n\pi s| \, f(\tfrac{s}{n}, \tfrac{1}{2}(1-\cos \pi s))ds$$

$$= \frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} |\sin n\pi s| \, f(\tfrac{s}{n}, \tfrac{1}{2}(1-\cos \pi s))ds$$

$$J_n = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 |\sin n\pi u| \, f(\tfrac{u+k}{n}, \tfrac{1}{2}(1-(-1)^k\cos \pi u))du$$

où l'on a posé $s-k=u$.
Introduisons maintenant la suite $(K_n)_{n\geq 1}$, défine par :

$$K_n = \frac{\pi}{2n}\sum^{n-1}\int_0^1 |\sin n\pi u| \, f(\tfrac{k}{n}, \tfrac{1}{2}(1-(-1)^k\cos \pi u))du$$

Comme :

$$|\ J_n - K_n\ | \le \frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 |\ \sin n\pi u\ |\ \tfrac{L}{n}du$$
$$= \frac{L}{n}$$

et que:

$$\int_0^1 |\ \sin(n\pi u)\ |\ du = \tfrac{2}{\pi}$$

alors :

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\ J_n = \underset{n\to+\infty}{Lim}\ K_n . \qquad 3.3.10$$

Nous pouvons écrire K_n sous la forme:

$$K_n = \frac{\pi}{2n}\int_0^1\left[\sum_{k\,pair} f(\tfrac{k}{n}, \tfrac{1}{2}(1-\cos\pi u)) + \sum_{k\,impair} f(\tfrac{k}{n}, \tfrac{1}{2}(1+\cos\pi u))\right] |\ \sin n\pi u\ |\ du$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{2}{n}\left[\sum_{k\,pair} f(\tfrac{k}{n}, \tfrac{1}{2}(1-\cos\pi u)) + \sum_{k\,impair} f(\tfrac{k}{n}, \tfrac{1}{2}(1+\cos\pi u))\right] |\ \sin n\pi u\ |\ du \qquad 3.3.11$$

Comme:

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\ \frac{2}{n}\sum_{k\,pair} f(\tfrac{k}{n}, \tfrac{1}{2}(1-\cos\pi u))$$

$$= \int_0^1 f(x, \tfrac{1}{2}(1-\cos\pi u))dx$$

et:

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\ \frac{2}{n}\sum_{k\,impair} f(\tfrac{k}{n}, \tfrac{1}{2}(1+\cos\pi u))$$

$$= \int_0^1 f(x, \tfrac{1}{2}(1-\cos\pi u))dx$$

on peut en déduire si l'on utilise (3.3.11), [6] et [10] que:

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\ K_n = \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi}{4}\int_0^1\left[\int_0^1\left\{f(x, \tfrac{1}{2}(1+\cos\pi u)) + f(x, \tfrac{1}{2}(1-\cos\ \pi u))\right\}dx\right]du$$

Si nous posons: $y = \tfrac{1}{2}(1+\cos\pi u)$ dans la première intégrale et,
$y = \tfrac{1}{2}(1-\cos\pi u)$ dans la seconde on obtient que:

$$\lim_{n\to+\infty} K_n = \frac{\pi}{4}\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{\pi}\left[\int_0^1 \frac{f(x,y)}{\sqrt{y-y^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{f(x,y)}{\sqrt{y-y^2}}\,dx\right]dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^1 \frac{f(x,y)}{\sqrt{y-y^2}}dxdy$$

Le théorème 3.3.1 est ainsi entièrement démontré.

Remarques:

1- Pour calculer $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy$ nous pouvons introduire la fonction g définie par:

$$g(x,y) = \sqrt{y-y^2}\,f(x,y) \qquad \forall\,(x,y) \in [0,1]^2$$

Nous avons en premier lieu que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2}\int_0^1 g(t,\frac{1}{2}(1-\cos n\pi t))\ \ |\sin n^2\pi t|\ dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^1 \frac{g(x,y)}{\sqrt{y-y^2}}dxdy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy$$

et en second lieu que:

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 f(t,\frac{1}{2}(1-\cos n\pi t))\ \ |\sin n\pi t|\,|\sin n^2\pi t|\ dt \qquad 3.3.12$$

2- Le résultat du théorème 3.3.1 reste vrai pour une fonction continuement définie sur $[0,1]^2$.

3- Nous pouvons démontrer le théorème 3.3.1 d'une autre façon: le résultat est vérifié par la fonction $f(x,y) = x^i y^j$, pour tout couple $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.

Nous avons (voir (3.3.9)):

$$J_n = \frac{\pi}{2}\int_0^1 |\sin n^2\pi t|\ f(t,\tfrac{1}{2}(1-\cos n\pi t))dt$$

Alors d'aprés (3.3.10), on a:

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\ J_n = \frac{1}{2}\frac{1}{i+1}\int_0^1\left[\frac{1}{2}(1-\cos\pi u\right]^j + \left[\frac{1}{2}(1+\cos\ \pi u)\right]^j du$$

$$= \frac{1}{2(i+1)}\int_0^1\left[\ \sin^{2j}\left(\frac{\pi u}{2}\right) + \cos^{2j}\left(\frac{\pi u}{2}\right)\right] du$$

Pour $t = \frac{u\pi}{2}$ il vient que:

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\ J_n = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{i+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{2j}t+\cos^{2j}t)dt$$

Or on peut aisément montrer que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2j}t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2j}t\ \ dt$$

De l'égalité $\cos(\frac{\pi}{2}-t) = \sin t,\ \forall\ t\in\mathbb{R}$
il découle que :

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\ J_n = \frac{2}{\pi(i+1\ )}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{2j}t)dt$$

Posons maintenant:

$$I_j = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{2j}t)dt\quad ,\quad \forall j\geq 1$$

alors:

$$I_j = \int_0^1[\sin^{(2j-2)}t]\quad[\frac{1-\cos 2t}{2}]dt$$

qui donne si l'on intégre par parties:

$$I_j\quad = \left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\sin^{(2j-2)}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)(j-1)\cot s.\sin^{2j-3}t\ dt$$

$$= \frac{\pi}{4} - (j-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t.\cos t.\sin^{2j-3}tdt + (j-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t.\sin^{2j-3}dt$$

$$= \frac{\pi}{4} - (j-1)[\frac{t\sin^{2j-2}t}{2j-2}]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+ (j-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2j-2}t}{2(j-1)}dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{2j-2}t-\sin^{2j}t)dt$$

et par conséquent:

$$I_j = \frac{1}{2} I_{j-2} + (j-1)I_{j-2} - (j-1)I_{j-1}$$

qui implique que:

$$I_j = \frac{2j-1}{2j} I_{j-2}$$

Si on utilise que:

$$I_0 = \frac{\pi}{2}$$

et un raisonnement par récurrence, on obtient que:

$$I_j = \frac{(2j)!}{\left[2^j\left(j!\right)\right]^2} \frac{\pi}{2}$$

et par suite que :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{(2j)!}{\left[2^j\left(j!\right)\right]^2} \frac{1}{(i+1)}$$

D'autre part on a:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^i y^j}{\sqrt{y-y^2}} dxdy = \frac{1}{\pi(i+1)} \int_0^1 \frac{y^j}{\sqrt{y-y^2}} dy$$

Pour $y = \frac{1}{2}(1-\cos \pi u)$ on obtient:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{y^j}{\sqrt{y-y^2}} dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(1-\cos \pi u)\right]^j du$$

$$= \int_0^1 \sin^{2j}\left(\frac{\pi u}{2}\right) du = \frac{2}{\pi} I_j$$

car $du = \dfrac{dy}{\pi\sqrt{y-y^2}}$.

On en déduit que:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^i y^j}{\sqrt{y-y^2}} dxdy = \frac{(2j)!}{(i+1)\left[2^j\left(j!\right)\right]^2}$$

Ce résultat ayant été démontré pour toutes les fonctions $x^i y^j$, $\forall\ (i,j) \in \mathbb{N}^2$, il est alors vérifié par tout polynôme $p(x,y)$. Par densité de l'ensemble des polynômes [66] dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]^2$ pour la norme

$$\| f \| = \sup_{[0,1]^2} | f(x,y) | ,$$

on achève cette deuxième démonstration du théorème 3.3.1.

Approximation d'une intégrale double par densification de $[0,1]^2$:

La courbe Π_n définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & t \\ y(t) & = & \frac{1}{2}(\cos n\pi\, t) \end{array} \right\}, \; t \in [0,1] \qquad 3.4.1$$

est $\frac{1}{n}$ -dense dans $[0,1]^2$ (voir [45]).
La densification de $[0,1]^2$ par Π_n nous permettra de démontrer le résultat suivant:

Théorème 3.4.1:
Si f est lipschitzienne sur $[0,1]^2$, de constante de Lipschitz $L \rangle 0$, alors:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy \qquad 3.4.2$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2} \int_0^1 \; |\; \sin n\pi t \;|\; f(t, \tfrac{1}{2}(1-\cos n\pi t))dt$$

Preuve:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\; dxdy$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right) dx$$

Pour $nx - k = s$, on obtient :

$$I = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \int_0^1 f(\tfrac{s+k}{n}, y)\; dsdy.$$

Soit la suite $\left(K_n \right)_{n\geq 1}$ définie par :

$$K_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \int_0^1 f(\tfrac{k}{n}, y)\; dsdy.$$

Il est évident que :

$$K_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \int_0^1 f(\tfrac{k}{n}, y)\; dsdy.$$

Comme:

$$\mid I - K_n \mid \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \int_0^1 \mid f(\tfrac{s+k}{n}, y) - f(\tfrac{k}{n}, y) \mid dsdy$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \int_0^1 L \frac{s}{n} dsdy$$

$$\leq \frac{L}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} 1 \quad \leq \quad \frac{L}{n}$$

Nous en déduisons alors que :

$$\underset{n \to +\infty}{Lim} K_n = I$$

Cependant, nous avons pour $y = \frac{1}{2}(1 - \cos(t + k)\pi),\ k \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 f(\tfrac{k}{n}, y) dy = \frac{\pi}{2} \int_0^1 f(\tfrac{k}{n}, \tfrac{1}{2}(1 - (-1)^k \cos \pi t)) \sin \pi t dt$$

et:

$$K_n = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 f(\tfrac{k}{n}, \frac{1}{2}(1 - (-1)^k \cos \pi t)) \sin \pi t dt$$

Désignons par L_n l'expression:

$$L_n = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 f(\tfrac{t+k}{n}, \tfrac{1}{2}(1 - (-1)^k \cos \pi t)) \sin \pi t dt$$

Comme établi en (3.3.10) nous pouvons aisement montrer que:

$$\underset{n \to +\infty}{Lim} K_n = \underset{n \to +\infty}{Lim} L_n = I$$

Par conséquent, si on pose $s = \dfrac{t + k}{n}$ on obtient:

$$L_n = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(s, \tfrac{1}{2}(1 - \cos n\pi s)) \sin(ns - k)\pi . ds$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(s, \tfrac{1}{2}(1 - \cos n\pi s))(-1)^k \sin n\pi s . ds$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(s, \tfrac{1}{2}(1-\cos n\pi s)) \quad | \sin n\pi s \ |.ds$$

c’est-à-dire que:

$$\underset{n\to+\infty}{Lim} \ \frac{\pi}{2} \int_0^1 f(t, \tfrac{1}{2}(1-\cos n\pi t)) \quad | \sin n\pi t \ | \ dt = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy$$

Remarques:

1-L’utilisation de l’uniforme continuité de f sur $[0,1]^2$, au lieu de la condition de Lipschitz utilisée dans les théorèmes 3.2.1, 3.3.1 et 3.4.1 permet d’établir les mêmes résultats pour des fonctions continues seulement.

2-Les théorèmes 3.3.1 et 3.4.1 peuvent être démontrés pour des fonctions continuement définies sur $[0,1]^d$. Dans $\mathbb{R}^3$ par exemple les formules suivantes peuvent être établies:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \underset{n\to+\infty}{Lim} \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \int_0^1 f(t, \frac{1}{2}(1-\cos n\pi t), \frac{1}{2}(1-\cos n^2\pi t)) \quad | \sin n\pi t \ || \ \sin n^2\pi t \ | \ \sin n^3\pi t \ | \ dt. \quad 3.4$$

$$= \underset{n\to+\infty}{Lim} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int_0^1 f(t, \frac{1}{2}(1-\cos n\pi t), \frac{1}{2}(1-\cos n^2\pi t)) \ | \sin n\pi t \ || \ \sin n^2\pi t \ | \ dt \qquad 3.4.4$$

Conclusion:

Dans ce paragraphe nous avons développé un nouveau procédé d’approximation d’intégrales multiples par des intégrales simples basé sur la densification de l’ensemble noté *Hf*. Cette méthode qui utilise la longueur des courbes a-denses utilisées pour densifier *Hf* n’aboutit pas directement à l’intégrale de f sur $[0,1]^d$ mais à une intégrale avec poids. L’introduction d’une fonction auxiliaire permet ensuite l’obtention de formules d’approximation de l’intégrale de f sur $[0,1]^d$. La comparaison des formules (3.3.12) et (3.4.2) et des formules (3.4.3) et (3.4.4) montre qu’il est plus intéressant de densifier le domaine d’intégration $[0,1]^d$ que l’ensemble *Hf* pour des raisons de convergence: dans (3.4.2) et (3.4.4) il apparait un terme de nature oscillatoire en moins que dans (3.3.12) et (3.4.3).

CHAPITRE 4

Méthodes numériques de calcul d’intégrales oscillatoires

Introduction:

L'utilisation des courbes a-denses nous a permis d'établir dans le premier et deuxième chapitres des formules d'approximation d'intégrales multiples par des intégrales simples. Dans le premier chapitre les fonctions d'une seule variable apparaissant dans les formules d'approximation sont périodiques mais discontinues alors que celles qui apparaissent dans les formules d'approximation du deuxième chapitre sont continues mais non périodiques.

Ceci d'une part, d'autre part la nature oscillatoire des fonctions d'une seule variable qui apparaissent dans les formules d'approximation précédemment établies nous a incité à nous intéresser au calcul effectif de leurs intégrales. A cet effet nous adaptons deux méthodes numériques.

Approximation d'intégrale multiples par des intégrales de fonctions périodiques .

Résultats préliminaires:

Considérons la fonction numérique y définie par:

$$y(t) = \frac{1}{2}(1 + v(t)) \qquad 4.2.1.1$$

où :

$$v(t) = \frac{-3\cos^5(\pi t) + 10\cos^3(\pi t) - 15\cos(\pi t)}{8}, \ t \in \mathbb{R} \qquad 4.2.1.2$$

Lemme 4.2.1.1:

$$|\ y'(t)\ | \quad \in \quad \mathbf{C}^4([0,2],\mathbb{R}) \qquad 4.2.1.3$$

Preuve:
On peut aisément voir que:

$$y'(t) = \frac{15\pi}{16}\sin^5\pi,\ t \in [0,2]$$

$$y'(1) = 0$$

$$y''(t) = \frac{75\pi^2}{16}\cos\pi t.\sin^4\pi t,\ t \in [0,2]$$

$$y''(1) = 0$$

$$y'''(t) = -\frac{75\pi^3}{16}\sin^5\pi t + 75\cos^2\pi t.sin^3\pi t,\ t \in [0,2]$$

$$y'''(1) = 0$$

$$y^{(4)}(t) = -\frac{975\pi^4}{16}\cos\ \pi \sin^4 \pi t\ + \frac{900\pi^4}{16}\cos^3 \pi t.\sin^2 \pi t, t \in [0,2]$$

$$y^{(4)}(1) = 0$$

et finalement:

$$y^{(5)}(t) = \frac{975\pi^5}{16}\sin^5 \pi t - \frac{225\pi^5}{2}\sin^3 \pi t.\cos^2 \pi t + \frac{225\pi^5}{2}\sin \pi t.\cos^4 \pi t$$

$$y^5(1) = 0$$

Ces différents résultats permettent de voir que le lemme 4.2.1.1
est verifié.

Lemme 4.2.1.2:
Si $k \in \mathbb{N}^{\times}$ alors:

$$y(t+k) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^k v(t)) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{4.2.1.4}$$

Preuve:
$\forall t \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{N}$, on a:

$$y(t+k) = \frac{1}{2}(1 + v(t+k))$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \frac{-3\cos^5(\pi(t+k)) + 10\cos^3(\pi(t+k)) - 15\cos(\pi(t+k))}{8}$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \frac{-3\cos^5(\pi t).(-1)^{5k} + 10\cos^3(\pi t).(-1)^{3k} - 15\cos(\pi t).(-1)^k}{8}$$

$$= \frac{1}{2}(1 + (-1)^k v(t))$$

Approximation d'une intégrale double par une intégrale simple:

Soit f une fonction numérique définie sur $[0,1]^2$.

Théorème 4.2.2.1:
Si f est lipschitzienne sur $[0,1]^2$ de constante de Lipschitz L, $L\rangle 0$ alors:

$$\underset{k\to+\infty}{Lim}\ \frac{1}{k}\int_0^1 f(y(t), y_k(t))\ \ |\ y'(t)\ ||\ y_k'(t)\ |\ dt$$

$$= 4\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy. \qquad 4.2.2.1$$

où la fonction y_k est définie par:

$$y_k(t) = y(kt), \forall t \in \mathbb{R} \qquad 4.2.2.2$$

Preuve:
Notons par:

$$I_k = \frac{1}{k}\int_0^1 f(y(t),y_k(t)) \;\; | \; y'(t) \; || \; y'_k(t) \; | \; dt \qquad 4.2.2.3$$

et par $s = kt$
Nous obtenons alors:

$$I_k = \frac{15\pi}{16k^2}\int_0^k f(y(\frac{s}{k}),y_k(\frac{s}{k})) \;\; | \; \sin^5\frac{\pi s}{k} \; || \; ky'(s) \; | \; ds$$

car:

$$y'_k(t) = [y(kt]' = k.y'(kt).\ ky'(s)$$

$$I_k = \frac{15\pi}{16k}\int_0^k f(y(\frac{s}{k}),y\ (s)) \;\; | \; \sin^5\frac{\pi s}{k} \; || \; y'(s) \; | \; ds$$

$$= \frac{15\pi}{16k}\sum_{i=0}^{k-1}\int_i^{i+1} f(y(\frac{s}{k}),y(s)) \;\; | \; \sin^5\frac{\pi s}{k} \; || \; y'(s) \; | \; ds$$

Pour $u = s - i$, nous avons:

$$I_k = \left(\frac{15\pi}{16}\right)^2\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\int_0^1 f(y(\frac{u+i}{k}),y\ (u+i)) \;\; | \; \sin^5\frac{\pi(u+i)}{k} \; || \; \sin^5\pi(u+i) \; | \; du$$

Introduisons maintenant la suite $(J_k)_{k\geq 1}$ définie par :

$$J_k = \left(\frac{15\pi}{16}\right)^2\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\int_0^1 f(y(\frac{i}{k}),\frac{1}{2}(1+(-1)^i v(u))) \;\; | \; \sin^5\frac{\pi i}{k} \; | \; \sin^5\pi u du \qquad 4.2.2.4$$

Nous pouvons énoncer et démontrer alors le lemme suivant:

Lemme 4.2.2.1:

$$\forall k \geq 1, | \; I_k - J_k \; | \leq \frac{C}{k} \qquad 4.2.2.5$$

où C est indépendante de k

Preuve:

$$|\ I_k - J_k\ |$$

$$\leq \left(\frac{15\pi}{16}\right)^2 \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} | \int_0^1 [f(y(\frac{u+i}{k}), \frac{1}{2}(1+(-1)^i v(u))$$

$$\sin^5 \frac{\pi(i+u)}{k} \sin^5 \pi u \ - f(y(\frac{i}{k}), \frac{1}{2}(1+(-1)^i v(u)) \sin^5 \frac{\pi i}{k} \sin^5 \pi u] du \ |$$

$$\leq \ (\frac{15\pi}{16})^2 \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ \int_0^1 \ |\ f(y(\frac{u+i}{k}), \frac{1}{2}(1+(-1)^i v(u)) \sin^5 \frac{\pi(i+u)}{k}$$

$$\sin^5 \pi u - f(y(\frac{u+i}{k}), \frac{1}{2}(1+(-1)^i v(u)) \sin^5 \frac{\pi i}{k} \sin^5 \pi u \ |\ du$$

$$+ (\frac{15\pi}{16})^2 \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ \int_0^1 \ |\ [f(y(\frac{u+i}{k}), \frac{1}{2}(1+(-1)^i v(u)) \sin^5 \frac{\pi i}{k}$$

$$\sin^5 \pi u \ \ - f(y(\frac{i}{k}), \frac{1}{2}(1+(-1)^i v(u)) \sin^5 \frac{\pi i}{k} \sin^5 \pi u \ |\ du$$

$$\leq (\frac{15\pi}{16})^2 \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ [\int_0^1 M \ |.\sin^5 \frac{\pi(i+u)}{k}.-\sin^5 \frac{\pi i}{k} \ |\ du + \int_0^1 L \ |\ y(\frac{u+i}{k}) - y(\frac{i}{k})\ |\ du]$$

où:

$$C = \sup_{[0,1]^2} |\ f(x,y)\ | \qquad 4.2.2.6$$

Comme:

$$|.\sin^5 t_1.-\sin^5 t_2\ | \leq\ 5\ |\ t_1 - t_2\ |, \quad \forall t_1, \forall t_2 \in \mathbb{R}$$

et:

$$|\ \ y(t_1) - y(t_2)\ \ | \leq |\ t_1 - t_2\ | \sup_{\mathbb{R}} |\ y'(t)\ |$$

$$\leq \quad \frac{15\pi}{16} \ \ |\ t_1 - t_2\ |$$

alors :

$$|\ I_k - J_k\ | \leq (\frac{15\pi}{16})^2 \frac{1}{k}[\sum_{i=0}^{k-1} \{M.\frac{5\pi}{k} + L\frac{15\pi}{16k}\}]$$

$$\leq (\frac{15\pi}{16})^2 \frac{1}{k}[M.5\pi + L\frac{15\pi}{16}]$$

$$\leq (\frac{15\pi}{16})^2 \frac{1}{k}\pi[M.5 + L\frac{15}{16}]$$

qui termine la démonstration du lemme 4.2.2.1.
Il nous reste à montrer que :

$$\lim_{k\to+\infty} J_k = 4\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy.$$

car comme on vient de le voir:

$$\lim_{k\to+\infty} J_k = \lim_{k\to+\infty} I_k.$$

Rappelons que:

$$J_k = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\int_0^1 f(y(\frac{i}{k}), \frac{1}{2}(1+(-1)^i v(u)) \quad |\ \sin^5\frac{\pi i}{k}\ |\ \sin^5 \pi u du$$

$$= 2(\frac{15\pi}{16})^2\int_0^1\{\frac{1}{2k}\sum_{i\ pair} f(y(\frac{i}{k}), \frac{1}{2}(1+v(u)) \quad |\ \sin^5\frac{\pi i}{k}\ |\ \sin^5\pi u$$

$$\frac{1}{2k}\sum_{i\ impair} f(y(\frac{i}{k}), \frac{1}{2}(1-v(u)) \quad |\ \sin^5\frac{\pi i}{k}\ |\ \sin^5\pi u\} du$$

L'application du théorème de la convergence dominée de Lebesgue [12] comme dans [7], nous permet alors de conclure que:

$$\lim_{k\to+\infty} J_k = 2(\frac{15\pi}{16})^2\int_0^1\{\int_0^1 f(y(t), \frac{1}{2}(1+v(u)) \quad |\ \sin^5\pi t\ |\ dt$$

$$\int_0^1 f(y(t), \frac{1}{2}(1-v(u)) \quad |\ \sin^5\pi t\ |\ dt\}\sin^5\pi u du \qquad 4.2.2.7$$

Soient $x = y(t)$ et $z = \frac{1}{2}(1+v(u))$, alors:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,z)dxdz$$

$$= \left(\frac{15\pi}{16}\right)^2 \int_0^1 \int_0^1 f\left(y(t), \frac{1}{2}(1+v(u))\right) \mid \sin^5 \pi t \mid \sin^5 \pi u dt du \qquad 4.2.2.8$$

Pour $x = y(t)$ et $z = \dfrac{1}{2}(1 - v(u))$, nous avons:

$$\left(\frac{15\pi}{16}\right)^2 \int_0^1 \int_0^1 f\left(y(t), \frac{1}{2}(1-v(u))\right) \mid \sin^5 \pi t \mid \sin^5 \pi u dt du$$

$$= -\int_0^1 \int_1^0 f(x,z)dxdz = \int_0^1 \int_0^1 f(x,z)dxdz \qquad 4.2.2.9$$

(4.2.2.8) et (4.2.2.9) terminent cette démonstration:

$$\lim_{k \to +\infty} J_k = 4 \int_0^1 \int_0^1 f(x,z)dxdz = \lim_{k \to +\infty} I_k .$$

Remarque :
On peut démontrer comme dans [8] et dans le paragraphe 2.4 que:

$$\mid I - I_k \mid \leq \frac{A}{k} \qquad 4.2.2.10$$

où A est une constante indépendante de k.
Dans le but d'utiliser une méthode numérique d'intégration de fonctions périodiques, nous avons besoin d'établir maintenant le résultat suivant :

Lemme 4.2.2.2:
Si k est pair alors:

$$\begin{aligned} &\int_1^2 f(y(t), y_k(t)) \mid y'(t) \mid \mid y'_k(t) \mid dt \\ &= \int_0^1 f(y(t), y_k(t)) \mid y'(t) \mid \mid y'_k(t) \mid dt \end{aligned} \qquad 4.2.2.11$$

preuve:
Soit $s = 2 - t$, alors:

$$\int_1^2 f(y(t), y_k(t)) \mid y'(t) \mid \mid y'_k(t) \mid dt$$

$$= \int_0^1 f(y(2-s), y_k(2-s)) \mid y'(2-s) \mid \mid y'_k(2-s) \mid ds$$

On peut aisément voir que :

$$y(2-s) = y(s) \;\; \forall s \in \mathbb{R}$$

parce que la fonction $(\cos \pi t)$ est paire et périodique de période 2, que $y'(t)$ est impaire périodique de période 2, et que:

$$|\; y'(2-s) \;| = y'(s), \forall s \in [0,1]$$

Il nous reste à calculer $y_k(2-s)$ et $y'_k(2-s)$:

$$y_k(2-s) = y\,(k(2-s)) \;\; = y\,(2k - sk)$$

$$y(-sk) = y\,(sk) = y_k\,(s)$$

et:

$$|\; y'_k(2-s) \;| = k \;|\; y'(k(2-s)) \;\; | = k \;|\; y'(-ks) \;|$$

$$= k \;|\; -y'(ks) \;| = k \;|\; y'(ks) \;| = |\; y'_k(s) \;|.$$

Nous obtenons par conséquent que:

$$\int_1^2 f(y(t), y_k(t)) \;\; |\; y'(t) \;||\; y'_k(t) \;|\; dt$$

$$= \;\int_0^1 f(y(t), y_k(t)) \;\; |\; y'(t) \;||\; y'_k(t) \;|\; dt$$

qui achève la démonstration du lemme 4.2.2.2.

Corollaire 4.2.2.1:
Si f est lipschitzienne sur $[0,1]^2$ de constante de Lipschitz L et si k est pair alors:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,z)dxdz = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{8k} \int_0^2 f(y(t), y_k(t)) \;\; |\; y'(t) \;||\; y'_k(t) \;|\; dt \qquad 4.2.2.12$$

Preuve:
La preuve de ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème 4.2.2.1. et du lemme 4.2.2.2.

Remarque :
Il est évident que la fonction g définie par:

$$g(t) = \frac{1}{k} f(y(t), y_k(t)) \;\; |\; y'(t) \;||\; y'_k(t) \;| \qquad 4.2.2.13$$

est 2-périodique et appartient à $\mathbf{C}^3([0,2], \mathbb{R})$ (voir lemme 4.2.1.1), pourvu que f soit dans $\mathbf{C}^3([0,1]^2, \mathbb{R})$.
Rappelons le théorème suivant relatif à l'approximation d'intégrales de fonctions périodiques [28], théorème qui va nous permettre d'obtenir une approximation du second membre de (4.2.2.12).

Théorème 4.2.2.2:
Soit g une fonction périodique de période $(b-a), (b\rangle a)$ et de classe $\mathbf{C}^{2k+1}(\mathbb{R})$ vérifiant $|g^{(2k+1)}(t)| \leq B \ \forall t \in \mathbb{R}$,
alors:

$$|\int_a^b g(t)dt - T_m(g)| \leq B\frac{(b-a)^{2k+2}}{2^{2k}} \frac{\zeta(2k+1)}{\pi^{2k+1} m^{2k+1}} \qquad 4.2.2.14$$

où :

$$T_m(g) = h[\frac{1}{2}g(a) + \sum_{i=0}^{m-1} g(a+ih) + \frac{1}{2}g(b)]$$

$$h = \frac{b-a}{m}$$

et:

$$\zeta(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{j^k} \quad \text{la fonction zeta de Riemann.}$$

Nous étudions afin de conclure, l'erreur de cette méthode basée sur les courbes a-denses périodiques. Pour ce faire, démontrons le lemme suivant.

Lemme 4.2.2.3:
La fonction g définie par (4.2.2.13) verifie:

$$|g'''(t)| \leq C_1 k, \ \forall t \in \mathbb{R} \qquad 4.2.2.15$$

où C_1 dépend de $\| f \|_{\mathbf{C}^3([0,1]^2, \mathbb{R})}$, mais ne dépend pas de k.

Preuve:
Rappelons en premier lieu que:

$$g(t) = \frac{1}{k} f(y(t), y_k(t)) \ |y'(t)| \, |y'_k(t)|, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

alors :

$$g'(t) = \frac{1}{k}\{[\frac{\partial f}{\partial x}(,)y'(t) + y'_k(t).\frac{\partial f}{\partial y}(,)] \ |y'(t)| \, |y'_k(t)|$$

$$+ f(,)[|y'(t)|]' \, |y'_k(t)| + f(,) \ |y'(t)| \, [|y'_k(t)|]'$$

qui implique que :

$$|g'(t)| \leq C_2.k$$

où C_2 dépend uniquement de $\| f \|_{\mathbf{C}^1([0,1]^2,\mathbb{R})}$.
La démonstration du lemme 4.2.2.3 peut être alors achevée en dérivant g' deux fois encore et en utilisant des arguments similaires à ceux développés ci-dessus.

Théorème 4.2.2.3:

$$E(g) = \left| \int_0^2 g(t)dt - T_{k^2}(g) \right| \leq \frac{4C_1\,\zeta(3)}{\pi^3\,k^3}$$

C_1 étant la constante apparaissant dans (4.2.2.15) et où:

$$g(t) = \frac{1}{8k} f(y(t), y_k(t)) \;\; |\, y'(t)\, |\,|\, y'_k(t)\, |$$

$$T_{k^2}(g) = h[\frac{1}{2}g(0) + \sum_{i=0}^{k^2-1} g(ih) + \frac{1}{2}g(2)]$$

et: $h = \dfrac{2}{k^2}$

Preuve:
Le théorème 4.2.2.2 et le lemme 4.2.2.3 entrainent que:

$$E(g) \leq \frac{2^4 M\;\zeta(3)}{2^2\,\pi^3\,m^3}$$

où:

$$M = \sup_{[0,2]} \;|\, g'''(t)\, |$$

Il en découle alors que:

$$E(g) \leq C_1 \frac{2^2\,k^3\,\zeta(3)}{\pi^3\,m^3}$$

Pour $m = k^2$ on obtient que:

$$E(g) \leq C_1 \frac{2^2\,\zeta(3)}{\pi^3\,k^3}$$

Remarque:
1) On peut utiliser une autre fonction y telle que:

$$|\, y'\, | \in \mathbf{C}^{2p+1}([0,2])$$

et qui vérifie les mêmes propriétés que celles de la fonction en (4.2.1.1) et (4.2.1.2). Ceci nous permettra de choisir dans le théorème 4.2.2.3 $m = 2k$, et d'obtenir que:

$$E(g) \leq C_1 \frac{2^2 \zeta(3)}{\pi^3 2^{2p+1}}$$

si bien évidemment $f \in \mathbf{C}^{2p+1}([0,1]^2, \mathbb{R})$, et d'avoir pour $p = 5$ par exemple que:

$$E(g) = O(10^{-3})$$

2) Ces résultats peuvent être démontrés en dimension plus élevée ($d \geq 3$). Dans $\mathbb{R}^3$ par exemple on pourra utiliser la courbe a–dense suivante:

$$\gamma(t) = \begin{Bmatrix} y(t) \\ y_k(t) \\ y_{k^2}(t) \end{Bmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Méthode de Filon

Nous commençons ce paragraphe par le rappel du principe de la méthode de Filon. Pour une fonction g définie sur $[a,b]$ on subdivise $[a,b]$ en $2N$ sous-intervalles d'égale longueur $h = \dfrac{b-a}{2N}$.

Sur chaque sous-intervalle $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, on approche g par un pôlynome de degré deux par interpolation aux trois points de la subdivision dans $[x_{2i}, x_{2i+2}]$. Ceci nous permettra alors de mettre en évidence une approximation de l'intégrale $\int_a^b g(t)\sin ktdt$. Plus précisément on a le théorème suivant:

Théorème 4.3.1 :
Soient:

$$S_{2N} = \frac{1}{2} g(a).\sin ka + \sum_{i=1}^{N-1} g(a+2ih).\sin k(a+2ih) + \frac{1}{2} g(b).\sin kb$$

$$S_{2N-1} = \sum_{i=0}^{N-1} g(a+(2i+1)h).\sin k(a+(2i+1)h)$$

et:

$$\theta = kh$$
$$\alpha = \alpha(\theta) = (\theta^2 + \theta \sin\theta \cos\theta - 2\sin^2\theta)/\theta^3$$
$$\beta = \beta(\theta) = 2(\theta(1+\cos^2\theta) - 2\sin\theta\cos\theta)/\theta^3$$
$$\gamma = \gamma(\theta) = 4(\sin\theta - \theta\cos\theta)/\theta^3$$

alors:

$$\int_a^b g(t)\sin kt dt \approx h\left\{-\alpha[g(b)\cos kb - g(a)\cos ka] + \beta S_{2N} + \gamma S_{2N-1}\right\} \qquad 4.3.1$$

Si on désigne par E l'erreur de la méthode de Filon, et si $\theta\langle 1$ alors:

$$|\ E\ | \leq (b-a)MH(\theta)h^3 \qquad 4.3.2$$

où :

$$H(\theta) = \left|\ \frac{\sin\theta}{3\theta^2} + \frac{\sin\theta}{\theta^3} - \frac{\sin\theta}{\theta^4}\ \right| \qquad 4.3.3$$

$$M = \sup_{[a,b]} |\ f^{(3)}(t)\ | \qquad 4.3.4$$

La démonstration de ces résultats peut être trouvée dans [28] et [35].
Notre contribution est de donner une estimation de:

$$I_k(f) = \frac{\pi}{2}\int_0^1 f(t, \frac{1}{2}(1-\cos k\pi t))\ |\ \sin k\pi t\ |\ dt \qquad 4.3.5$$

pour des entiers k élevés comme établi en (4.2.1).
Posons :

$$g(t) = f(t, \frac{1}{2}(1-\cos k\pi t))$$

$$\pi t = s$$

nous obtenons alors :

$$I_k(f) = \frac{1}{2}\int_0^\pi g(\frac{s}{\pi})\ |\ \sin ks\ |\ ds$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \int_{\frac{i\pi}{k}}^{\frac{(i+1)\pi}{k}} g(\frac{s}{\pi})\ |\ \sin ks\ |\ ds$$

Appliquons la méthode de Filon à $\int_{\frac{i\pi}{k}}^{\frac{(i+1)\pi}{k}} g(\frac{s}{\pi})\ |\ \sin ks\ |\ ds$ où l'intervalle $[\frac{i\pi}{k}, \frac{(i+1)\pi}{k}]$ est subdivisé en $2j$ sous-intervalles d'égale longueur

$$h = \frac{\pi}{2kj} \qquad 4.3.6$$

On obtient alors que:

Théorème 4.3.2:

$$I_k(f) \approx$$

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} h \left\{ \begin{array}{c} \alpha\,[f(\frac{i+1}{k}, \frac{1}{2}\,(1-(-1)^{i+1}) + f(\frac{i}{k}, \frac{1}{2}\,(1-(-1)^{i})] \\ +\beta \displaystyle\sum_{p=1}^{j-1} f(\frac{ij+p}{jk}, \frac{1}{2}\,(1-\cos(\pi\frac{ij+p}{jk}))\sin\frac{p\pi}{j} \\ +\gamma \displaystyle\sum_{p=0}^{j-1} f(\frac{2ij+2p+1}{2jk}, \frac{1}{2}\,(1-\cos(\pi\frac{2ij+2p+1}{2jk})) \\ \sin\frac{(2p+1)\pi}{2j} \end{array} \right\} \qquad 4.3.7$$

où:

$$h = \frac{\pi}{2kj}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(\theta) = (\theta^2 + \theta\sin\theta\cos\theta - 2\sin^2\theta)/\theta^3 \\ \beta &= \beta(\theta) = 2(\theta(1+\cos^2\theta) - 2\sin\theta\cos\theta)/\theta^3 \\ \gamma &= \gamma(\theta) = 4(\sin\theta - \theta\cos\theta)/\theta^3 \end{aligned} \qquad 4.3.8$$

Preuve:
L'application du théorème 4.3.1 à l'intégrale suivante:

$$I_k^i = \int_{\frac{i\pi}{k}}^{\frac{(i+1)\pi}{k}} g(\frac{s}{\pi})\ |\ \sin ks\ |\ ds \qquad 4.3.9$$

où $h = \frac{\pi}{2kj}$ entraine que :

$$\int_{\frac{i\pi}{k}}^{\frac{(i+1)\pi}{k}} g(\frac{s}{\pi}) \ | \ sinks \ | \ ds \qquad 4.3.10$$

$$\approx h\left[-\alpha[g(\frac{i+1}{k})cos(i+1)\pi - g(\frac{i}{k})cosi\pi] + \beta S^{\,i}_{2j} + \gamma S^{\,i}_{2j-1} \right] \quad = \quad A_k^{i,j}$$

où:

$$\left\{ \begin{array}{c} S^i_{2j} = \frac{1}{2} g(\frac{i}{k}) \sin i\pi \\ + \sum_{p=1}^{j-1} g(\frac{i}{k} + \frac{p}{jk}) \sin(\frac{(ij+p)\pi}{j}) + \frac{1}{2} g(\frac{i+1}{k}) \sin(i+1)\pi \\ S^i_{2j-1} = \sum_{p=0}^{j-1} g(\frac{i}{k} + \frac{2p+1}{2jk}) \sin(i + \frac{(2p+1)\pi}{2j}) \end{array} \right\} \qquad 4.3.11$$

Comme:

$$\sin(\frac{(ij+p)\pi}{j}) = (-1)^{\,i} \sin(\frac{p\pi}{j})$$

et :

$$\sin(i + \frac{(2p+1)}{2j})\pi = (-1)^{\,i} \sin(\frac{(2p+1)\pi}{2j})$$

nous obtenons alors que:

$$S^{\,i}_{2j} = \sum_{p=1}^{j-1} g(\frac{i}{k} + \frac{p}{jk})(-1)^{\,i} \sin(\frac{p\pi}{j}) \qquad 4.3.12$$

et:

$$S^{\,i}_{2j-1} = \sum_{p=0}^{j-1} g(\frac{i}{k} + \frac{2p+1}{2jk})(-1)^{\,i} \sin(\frac{(2p+1)\pi}{2j}) \qquad 4.3.13$$

Il en découle alors par sommation sur i :

$$I_k(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{\,i} \int_{\frac{i\pi}{k}}^{\frac{(i+1)\pi}{k}} g(\frac{s}{\pi}) \ | \ \sin ks \ | \ ds$$

$$\approx \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \left\{ \begin{array}{c} h[-\alpha[g(\frac{i+1}{k})(-1)^{i+1} + g(\frac{i}{k})(-1)^{i+1}] \\ +\beta(-1)^i \displaystyle\sum_{p=1}^{j-1} g(\frac{i}{k}+\frac{p}{jk})\sin(\frac{p\pi}{j}) \\ +\gamma(-1)^i \displaystyle\sum_{p=0}^{j-1} g(\frac{i}{k}+\frac{2p+1}{2jk})\sin(\frac{(2p+1)\pi}{2j})] \end{array} \right\}$$

d'où :

$$I_k(f) \approx \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1} h[-\alpha[g(\frac{i+1}{k}) + g(\frac{i}{k})] + \beta\sum_{p=1}^{j-1} g(\frac{i}{k}+\frac{p}{jk})\sin(\frac{p\pi}{j})$$
$$+\gamma\sum_{p=0}^{j-1} g(\frac{i}{k}+\frac{2p+1}{2jk})\sin(\frac{(2p+1)\pi}{2j})]$$

c'est-à-dire que:

$$I_k(f) \approx$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1} h \left\{ \begin{array}{c} \alpha[f(\frac{i+1}{k},\frac{1}{2}(1-(-1)^{i+1}) + f(\frac{i}{k},\frac{1}{2}(1-(-1)^{i})] \\ +\beta \displaystyle\sum_{p=1}^{j-1} f(\frac{ij+p}{jk},\frac{1}{2}(1-\cos(\pi\frac{ij+p}{jk})))sin\frac{p\pi}{j} \\ +\gamma \displaystyle\sum_{p=0}^{j-1} f(\frac{2ij+2p+1}{2jk},\frac{1}{2}(1-\cos(\pi\frac{2ij+2p+1}{2jk}))) \\ \sin\frac{(2p+1)\pi}{2j} \end{array} \right\} \qquad 4.3.14$$

Nous nous proposons maintenant d'étudier l'erreur de cette méthode inspirée de la méthode de Filon.

Proposition 4.3.1:
Soit f une fonction appartenant à $\mathbf{C}^3([0,1]^2,\mathbb{R})$ et

$$I_{kj} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1} h$$

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha\,[f(\frac{i+1}{k},\frac{1}{2}\,(1-(-1)^{\,i+1})+\,f(\frac{i}{k},\frac{1}{2}\,(1-(-1)^{\,i})] \\ +\beta\,\sum_{p=1}^{j-1}\,f(\frac{ij+p}{jk},\frac{1}{2}\,(1-\cos(\pi\frac{ij+p}{jk})))\,\sin\frac{p\pi}{j} \\ +\gamma\,\sum_{p=0}^{j-1}\,f(\frac{2ij+2p+1}{2jk},\frac{1}{2}\,(1-\cos(\pi\frac{2ij+2p+1}{2jk}))) \\ \sin\frac{(2p+1)\pi}{2j} \end{array}\right\}$$

où k est pair, alors :

$$|\;I_k(f)-I_{kj}\;| \quad \leq \frac{\pi^4 CH(\theta)}{8jh^{\,3}} \qquad 4.3.15$$

où $H(\theta)$ est la fonction:

$$H(\theta)\;=\mid\;\frac{\sin\theta}{3\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\theta^3}-\frac{\sin\theta}{\theta^4}\;\mid \qquad 4.3.16$$

qui apparait dans (4.3.3) et C une constante qui ne dépend pas de k et j mais de $\|\;f\;\|_{\mathbf{C}^{\,3}([0,1]^{\,2},\mathbb{R})}$

Preuve:
On obtient si l'on utilise le théorème 4.3.2 que:

$$|\;I_k^i-A_k^{i,j}\;|\leq\;\frac{\pi}{k}C_{\,i}H(\theta)h^{\,3}$$

où:

$$h\;=\;\frac{\pi}{2kj},\qquad C_{\,i}\;=\;\sup_{[\frac{i\pi}{k},\frac{(i+1)\pi}{k}]}\;|\;g^{(3)}(s)\;|$$

et :

$$g(s)\;=\;f(\frac{s}{\pi},\frac{1}{2}(1-cosks))$$

Comme:

$$C_i\;\leq\;Ck^{\,3}\qquad\forall\;i\;=\;0,\ldots,k-1$$

où C dépend uniquement de $\|\;f\;\|_{\mathbf{C}^{\,3}([0,1]^{\,2},\mathbb{R})}$ comme en (4.2.2.15).
On obtient alors que:

$$|\;I_k^i-A_k^{i,j}\;|\quad\leq\;\frac{\pi}{k}C\,k^{\,3}H(\theta)(\frac{\pi}{2jk})h^{\,3}$$

$$\leq \quad \frac{C\pi^4}{8kj^3} H(\theta)$$

qui donne par sommation sur i que:

$$| \ I_k(f) - I_{kj} \ | \quad \leq \quad \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} | \ I_k^i - A_k^{i,j} \ | \quad \leq \quad \frac{C\pi^4}{16j^3} H(\theta)$$

Remarques:

1) On peut aisement voir que $\underset{\theta \to +0}{Lim} \ H(\theta) = 0$.

2) Le même résultat peut être démontré en dimension d. Pour calculer

$$(\frac{\pi}{2})^{d-1} \int_0^1 f(t, \frac{1}{2}(1 - \cos k\pi t), \frac{1}{2}(1 - \cos k^2\pi t), \ldots, \frac{1}{2}(1 - \cos k^{d-1}\pi t))$$

$$| \ \sin k\pi t \ | \ldots | \ \sin k^d \pi t \ | \ dt$$

on subdivise $[0,1]$ en k^{d-1} (d étant la dimension d'espace) intervalles d'égale longueur; chacun d'eux étant divisé ensuite en $2j$ sous-intervalles. On remarque qu'il sera judicieux de prendre k égal à 2^N pour que les racines de $| \ \sin k^i \pi t \ |$ soient également racines de $| \ \sin k^j \pi t \ |$ pour $j \geq i$.

Conclusion:

Nous avons développé dans ce chapitre deux procédés permettant le calcul effectif d'intégrales de fonctions oscillatoires obtenues par l'utilisation de courbes α-denses à partir d'intégrales multiples.

La méthode basée sur les courbes α-denses périodiques reste perfectible comme signalé précédemment. On peut en effet choisir des courbes α-denses périodiques dont la régularité est plus élèvée que celle utilisées dans ce chapitre. Cette régularité permet d'établir la convergence de la méthode pourvu que f soit également régulière. Il est possible aussi d'utiliser des fonctions splines au lieu des arcs de parabole de la méthode de de Filon [32], [45]. On peut également faire une interpolation pôlynomiale de degré élevé (superieur à deux), comme établi dans [33] et [44].

CHAPITRE 5

Optimisation globale

Introduction:

Les problèmes de l'optimisation globale en plusieurs dimensions ont été étudiés par Y. Cherruault et ses collègues (voir [17], [18], [49] et [63]). L'utilisation des courbes α-denses leur a permis de transformer ces problèmes en problèmes d'optimisation globale en une dimension. Dans [63], A.Ziadi, G.Mora et Y.Cherruault ont couplé la méthode des transformations réductrices avec quelques méthodes comme la méthode d'Evtuschenko, de Brent ou Branch and Bound.La difficulté essentielle rencontrée dans [17], [18], [48], [63], réside dans le choix du pas $\Delta\theta$ de discrétisation. Dans le cas où $\Delta\theta$ est constant la distance entre les deux points $M(\theta)$ et $M(\theta+\Delta\theta)$ augmente avec θ. Pour que cette distance reste constante (égale au coefficient d'α-densité), il sera necessaire de choisir un pas $\Delta\theta$ de discrétisation variable de la forme $\Delta\theta = \frac{\alpha}{a\theta}$.

Pour notre part, nous nous proposons dans ce chapitre de coupler la méthode Alienor avec la transformation de Legendre-Fenchel pour calculer une enveloppe convexe discrète de la fonction à minimiser. Nous utilisons pour cela un algorithme rapide proposé par Y.Brenier dans [14] et développé par Y.Lucet dans [42] et [43]. Dans une seconde étape nous couplerons la méthode Alienor avec le méthode de Monte Carlo.

Optimisation globale sans contrainte:

Considerons le problème d'optimisation globale suivant:

$$\underset{x\in[0,1]^d}{GlobMin}\ f(x) \qquad 5.1.1$$

où f est une fonction définie continue sur $[0,1]^d$.
(d est un entier positif)
Nous introduisons pour cela la courbe Γ d'équation $x(t),\ t\in[0,1]$ définie par:

$$x_1(t) = t$$

$$x_i(t) = \frac{1}{2}(1-\cos n^{i-1}t), i = 2,\ldots d, t\in[0,1] \qquad 5.1.2$$

Il a été démontré dans [46] que Γ est $\frac{\sqrt{d-1}}{n}$-dense dans $[0,1]^d$.
On note par g la fonction définie sur $[0,1]$ par:

$$g(t) = f(x(t)), t\in[0,1] \qquad 5.1.3$$

Le problème d'optimisation globale devient:

$$\underset{t\in[0,1]}{GlobMin}\ g(t) \qquad 5.1.4$$

Nous pouvons alors établir le résultat suivant:

Theorem 5.2.1:
Tous les minimums de f peuvent être approchés par des minimums de g.

On peut trouver une démonstration de ce résultat dans [21] et [23].

Remarque:
La réciproque de ce résultat est fausse : certains minimiseurs de g ne sont pas des minimiseurs de f.
Comme signalé dans l'introduction, nous allons déterminer les minimums de la fonction g en utilisant la méthode de Legendre-Fenchel. Plus précisément nous allons calculer les valeurs de l'enveloppe convexe de g relativement à une suite de points dans $[0,1]$.

Exemple 5.2.1:
Soit:

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - \frac{1}{2})^2$$

qui réalise son minimun global 0 au point

$$x = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$$

5.2.1-a: Nous utilisons pour cet exemple la courbe :

$$\Gamma_s(t) = \begin{cases} t \\ \frac{1}{2}(1 - \sin n^{i-1}\pi t), \quad i = 2, \ldots, 5 \end{cases}, t \in [0,1]$$

Nous avons évalué les valeurs de la conjuguée discrète sur $[-1,1]$ pour $p = 6$, $q = 8$ et les valeurs de l'enveloppe convexe discrète sur $[0,1]$ pour $p_1 = q_1 = 9$. Nous avons obtenu pour $n = 10$, les résultats suivants en trois secondes:

$$g^{\times\times}(0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5) = 0,$$

avec les notations précédentes:
$g^{\times\times}$ est la bi-conjuguée ou l'enveloppe convexe discrète de g, où g est donnée par:

$$g(t) = f(x(t)), t \in [0,1]$$

5.2.1-b: Pour le même exemple utilisons une autre courbe α-dense dans $[0,1]^5$.

$$\Gamma_c(t) = \begin{cases} t \\ \frac{1}{2}(1 - \cos n^{i-1}\pi t), \quad i = 2, \ldots, 5 \end{cases}, t \in [0,1]$$

Pour les mêmes paramètres nous obtenons:
le minimiseur $\bar{x}$ de $g^{\times\times}$ est:

$$(0.45448, 0.59946, 0.586237, 0.419057, 0.472402)$$

et:

$$g^{\times\times}(\bar{x}) \;= 0.195134.$$

Ces résultats ont été obtenus aprés trois secondes.

Si on désigne maintenant par $(1/n)$ le coefficient d'α –densité, par p le nombre de points aléatoires dans [0,1] et par k le nombre de tests réalisés par la méthode de Monte Carlo combinée à la méthode Alienor, on a alors les résultats suivants:

(n,p,k)	*Erreur*	*temps*
$(10,100,100)$	0.024331	4
$(50,300,300)$	0.012722	24

Exemple 5.2.2:
Soit:

$$f_2(x) = \exp[f_1(x)] \;= e^{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\frac{1}{2})^2}$$

qui réalise son minimun global 1 au point:

$$x = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$$

5.2.2-a: Pour les mêmes paramètres utilisés dans l'exemple (V-1-1-a) nous obtenons:

$$\bar{x} = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$$

et:

$$g^{\times\times}(\bar{x}) \;= 1.$$

au bout de trois secondes également.

5.2.2-b: Si nous utilisons maintenant les paramètres de l'exemple (V-1-1-b), nous obtenons alors les résultats suivants:

	$p=6, q=8$ $p_1=q_1=9, n=10$	$p=7, q=9$ $p_1=q_1=10, n=20$
x_1	0.544547	0.523809
x_2	0.585239	0.462630
x_3	0.429063	0.462728
x_4	0.573365	0.460770
x_5	0.549009	0.5
$g^{\times\times}(\bar{x})$	1.02231	1.0049
temps de calcul	$3\ s$	$4\ s$

La combinaison des méthodes de Monte Carlo et Alienor a donné les résultats suivants:

(n,p,k)	*Erreur*	*temps*
$(10,100,100)$	0.024272	4
$(50,300,300)$	0.003547	25

Exemple 5.2.3:
Soit:

$$f_3(x) = 4(x_1-\frac{1}{2})^2+3(x_2-\frac{1}{2})^2+2(x_3-\frac{1}{2})^2+2(x_4-\frac{1}{2})^2+(x_5-\frac{1}{2})^2$$

$$-(x_1-\frac{1}{2})[-4(x_2-\frac{1}{2})-2(x_3-\frac{1}{2})+2(x_4-\frac{1}{2})+2(x_5-\frac{1}{2})]$$

$$-2(x_2-\frac{1}{2})(x_4-\frac{1}{2})+2(x_3-\frac{1}{2})(x_4-\frac{1}{2})+2(x_4-\frac{1}{2})(x_5-\frac{1}{2})$$

f_3 réalise son minimum 0 au point :

$$x = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5).$$

5.2.3-a: les paramètres de l'exemple (V-1-1-a) permettent d'obtenir en trois secondes les résultats suivants:

$$\bar{x} = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$$

et:

$$g^{\times\times}(\bar{x}) = 0.$$

5.2.3-b: L'utilisation de la courbe Γ_c permet d'obtenir les resultats du tableau ci-dessus:

	$p=6, q=8$ $p_1=q_1=9, n=10$	$p=7, q=9$ $p_1=q_1=10, n=20$
x_1	0.544731	0.470871
x_2	0.582336	0.528210
x_3	0.458320	0.531695
x_4	0.535770	0.499132
x_5	0.535690	0.508652
$g^{\times\times}(\bar{x})$	0.26969	0.178070
temps de calcul	$3\ s$	$4\ s$

La combinaison des méthodes de Monte carlo et Alienor a donné les résultats suivants:

(n,p,k)	*Erreur*	*temps*
$(10,100,100)$	0.008261	10
$(50,300,300)$	0.005595	76

Exemple 5.2.4:
Soit:

$$f_4(x)=\sum_{i=1}^{10}(x_i-\frac{1}{2})^2$$

qui réalise son minimum 0 au point:

$$x=(0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5)$$

5.2.4-a: Si l'on densifie $[0,1]^{10}$ par la courbe Γ_s définie par:

$$\Gamma_s(t)=\begin{cases} t \\ \frac{1}{2}(1-\sin n^{i-1}\pi t), \quad i=2,\ldots,10 \end{cases}, t\in[0,1]$$

nous obtenons pour $p=7,\ q=9,\ p_1=q_1=10$ et $n=10$

$$\bar{x}=(0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5)$$

et:

$$g^{\times\times}(\bar{x})=0$$

aprés un temps de calcul de 45 secondes.

5.2.4-b: Si l'on densifie $[0,1]^{10}$ par la courbe Γ_c définie par:

$$\Gamma_c(t) = \begin{cases} t \\ \frac{1}{2}(1-\cos n^{i-1}\pi t), \ \ i = 2,\ldots,\ 10 \end{cases} ,t \in [0,1]$$

nous obtenons:

	$p = 7, q = 9$ $p_1 = q_1 = 10, n = 10$	$p = 8, q = 10$ $p_1 = q_1 = 11, n = 20$
x_1	0.644545	0.578578
x_2	0.414725	0.488530
x_3	0.428703	0.570640
x_4	0.569759	0.563050
x_5	0.585106	0.536930
x_6	0.430400	0.454808
x_7	0.58669	0.518536
x_8	0.414519	0.462728
x_9	0.426635	0.460768
x_{10}	0.549009	0.499967
$g^{\times\times}(\bar{x})$	0.210632	0.132354
temps de calcul	$45\ s$	$59\ s$

La combinaison des méthodes de Monte Carlo et Alienor a donné les résultats suivants:

(n,p,k)	*Erreur*	*temps*
$(10,100,100)$	0.238219	13
$(50,300,300)$	0.162022	45

Optimisation globale avec contraintes:

On considère dans ce paragraphe les problèmes de l'optimisation globale avec contraintes de la forme:

$$\underset{x \in K}{GlobMin} f(x) \qquad 5.2.1$$

où K est un sous-ensemble fermé de $[-1,1]^d$ défini par:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^d \ / \ h(x) \leq 0\} \qquad 5.2.2$$

On suppose que h est une fonction continue. On utilise dans ce cas la courbe Γ, α-dense dans $[-1,1]^d$ et définie par:

$$\Gamma = \{(x_1(t), x_2(t), \ldots x_d(t)\}$$

où:

$$\begin{cases} x_1(t) = t \\ x_i(t) = \cos n^{i-1}(t), i = 2, \ldots, d, \end{cases} \quad t \in [-1, 1]. \qquad 5.2.3$$

Rappelons que n est un entier qui tend vers l'infini. $\overset{\circ}{K}$ est l'interieur de $K.$ Pour des raisons de simplicité, mais sans perte de généralité on peut supposer que 0 appartient à $\overset{\circ}{K}$.
Nous avons alors à étudier deux cas:
1er cas:

$$f(0) = \underset{x \in K}{GlobMin}\ f(x)$$

Le problème de l'optimisation globale avec contraintes est résolu exactement.
2ème cas:

$$f(0) \rangle \underset{x \in K}{GlobMin}\ f(x).$$

Introduisons dans ce cas la fonction p définie par:

$$p(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h(x(t))}{|\ h(x(t)\ |}\right) = \begin{cases} 1 \ \ if \ \ x(t) \in \overset{\circ}{K} \cap \Gamma \\ 0 \ \ if \ \ x(t) \notin \overset{\circ}{K} \cap \Gamma \end{cases} \qquad 5.2.4$$

et la fonction g définie par:

$$g(t) = f(p(t).x(t)), t \in [-1, 1] \qquad 5.2.5$$

Nous avons bien évidemment que:

$$g(t) = \begin{cases} f(x(t)), \ \ if \ \ x(t) \in \overset{\circ}{K} \\ f(0), \ \ if \ \ x(t) \notin K \end{cases}$$

Nous obtenons alors de cette manière que:

$$\underset{\substack{t \in [-1,1] \\ x(t) \in K}}{GlobMin.} f(x(t)) = \underset{t \in [-1,1]}{GlobMin.} g(t) \qquad 5.2.6$$

car : $si \ \ x(t) \notin K \ \ alors \ \ g(x(t)) = f(0) \neq \underset{x \in K}{GlobMin.} f(x).$

Le problème de l'optimisation globale avec contraintes se transforme en un problème d'optimisation globale sans contraintes d'une fonction dépendante d'une seule variable et que nous traitons comme dans le paragraphe précédent.
Remarquons que l'on a calculé dans les essais numériques qui suivent $g^{\times}$ sur $[-3, 3]$ pour $N = 2^p$, $M = 2^q$ et $g^{\times\times}$ sur $[-1, 1]$ pour $N_1 = 2^{p_1}$ et

$M_1 = 2^{q_1}$

Exemple 5.3.1:
Soient:

$$f_5(x) = (x_1 - \frac{1}{2})^2 + \sum_{i=2}^{5} x_i^2$$

$$\mathbf{K} = \{x \in \mathbb{R}^5 / h(x) = (\sum_{i=1}^{5} |\ x_i\ |) - 1 \leq 0\}$$

Nous avons alors que:

$$\underset{x \in K}{GlobMin}\, f_5(x) = f(0.5, 0, 0, 0, 0) = 0$$

Deux tests numériques que nous présentons ci aprés ont été réalisés:

	$p = 6, q = 8$ $p_1 = q_1 = 9, n = 20$	$p = 7, q = 9$ $p_1 = q_1 = 10, n = 30$
x_1	0.52869	0.51612
x_2	0.22981	-0.05064
x_3	0.07454	-0.05073
x_4	0.07845	-0.04808
x_5	0.2210^{-11}	-0.12728
$g^{\times\times}(\bar{x})$	0.0653512	0.023912
temps de calcul	$10\ s$	$36\ s$

La combinaison des méthodes de Monte Carlo et Alienor a donné les résultats suivants:

(n, p, k)	*Erreur*	*temps*
$(10, 100, 100)$	0.081575	6
$(50, 300, 300)$	0.015812	47

Exemple 5.3.2:
On considère dans cet exemple la fonction f_6 définie sur $[-1, 1]^5$ par:

$$f_6(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \exp[(x_4 - \frac{1}{2})^2 + (x_5 - \frac{1}{2})^2]$$

$$\mathbf{K} = \{x \in \mathbb{R}^5 / h(x) = (\sum_{i=1}^{5} x_i^2) - 1 \leq 0\}$$

Nous avons alors que: $\underset{x\in\mathbf{K}}{GlobMin}\ f_6(x) = f(0,0,0,0.5,0.5) = 1.$

	$p = 6, q = 8$ $p_1 = q_1 = 9, n = 10$	$p = 7, q = 9$ $p_1 = q_1 = 10, n = 20$
x_1	0.03542	0.02363
x_2	0.08421	0.04552
x_3	0.14214	-0.12138
x_4	0.54298	0.52404
x_5	0.57301	0.55078
$g^{\times\times}(\bar{x})$	1.09173	1.03062
temps de calcul	$9\ s$	$59\ s$

La combinaison des méthodes de Monte Carlo et Alienor a donné les résultats suivants:

(n,p,k)	*Erreur*	*temps*
$(10,100,100)$	0.124423	6
$(50,300,300)$	0.016294	47

Remarque:
Pour un problème d'optimisation avec plusieurs contraintes de la forme:

$$\underset{x\in K}{GlobMin} f(x)$$

où:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^d / \ h_i(x) \leq 0, i = 1,\ldots,k\}$$

nous pouvons utiliser la fonction:

$$p(t) = \prod_{i=1,k} p_i(t)$$

où:

$$p_i(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h_i(x(t))}{|\ h_i(x(t)\ |}\right), i = 1,\ldots,k$$

Conclusion:
Notons en premier lieu que nous avons obtenu des résultats exacts dans les exemples (5.2.1- a), (5.2.2- a) et (5.2.3- a) car la courbe α-dense utilisée dans ces trois exemples passe par le point où f réalise son minimum global. Ces différents exemples montrent aussi en deuxième lieu que les erreurs sur le minimiseur et sur le minimum global aussi bien pour les problèmes d'optimisation globale sans contraintes qu'avec contraintes sont d'autant plus petites que les parametres n et p tendent vers l'infini.

Par ailleurs, ces calculs montrent que la combinaison des méthodes Alienor et Monte Carlo est plus performante que la combinaison des méthodes Alienor et la transformation de Legendre Fenchel. Ceci s'explique par le fait que le calcul d'une enveloppe convexe discrète passe par le calcul de la conjuguée discrète, calcul qu'il serait necessaire d'occulter pour rendre plus efficace la méthode.
Signalons également que nous pouvons traiter tout problème d'optimisation globale sur un sous ensemble borné Ω quelconque de $\mathbb{R}^d$ défini par une équation du type

$$h(x) \leq 0$$

où h est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$, en utilisant la même technique développée dans le deuxième paragraphe de ce chapitre.

CHAPITRE 6

ECOULEMENT D’UN FLUIDE PARFAIT INCOMPRESSIBLE DANS DES DOMAINES CONVEXES NON REGULIERS DU PLAN

Introduction et notations

Introduction

Le problème auquel on s'interesse, dans ce chapitre, est le modèle mathématique de l'écoulement d'un fluide parfait incompressible dans un tube Q_T de section Ω, où Ω est un ouvert convexe du plan.

Les équations qui régissent ce phénomène de la mécanique des fluides sont données par:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u = f - \nabla p & \text{dans} \quad Q_T \\ \nabla.u = 0 & \text{dans} \quad Q_T \\ u.\eta = 0 & \text{sur} \ \sum_T \\ u(0) = u_0 & \text{dans} \quad \Omega \end{cases}$$

où:

1) u et p sont les inconnues du problème, $u = (u_1, u_2)$ est la vitesse d'un point de Ω à un instant t et p désigne la presssion.

2) f et u_0 sont les données du problème.

3) Si on désigne par Γ la frontière de Ω, alors : $Q_T =]0,T[\times\Omega$,

$\sum_T =]0,T[\times\Gamma$ et $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ est la normale extérieure à Γ.

Posé en 1755, par le mathématicien Suisse L. Euler (1707 - 1783), le problème qui porte son nom, n'a vu de résultats serieux qu'à partir de 1932 avec la publication des travaux de J. Leray. En 1963, V.I. Yudovich s'est intéressé à ce problème et a prouvé des résultats d'existence et d'unicité pour des données régulières et un ouvert régulier (Cf [60]). En 1967, T. Kato a étudié et donné des résultats concernant la solution classique de ces équations (Cf [37]). En 1973, C. Bardos a complété ces résultats en considérant des données moins régulières (Cf [4]). Enfin en 1981, A. Benabidallah et S. Khelifa (Cf [5] et [38]) ont complété les travaux de C. Bardos en étudiant les équations d'Euler dans des ouverts polygonaux avec des conditions comparables à celles prises en [4].

Plus précisément, on se propose de montrer [39] que pour tout couple de données (u_0, f) pris dans des espaces convenables et que l'on précisera ultérieurement, le problème précédent admet au moins une solution faible $(u\ ,\ p)$. Pour ce faire, on approchera l'ouvert Ω par une suite croissante d'ouverts polygonaux $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ inscrits dans Ω (Cf [50]), et on utilisera des inégalités à priori uniformes (par rapport à n), les techniques développées dans [4], [5] et [38], ainsi que la fonction courant comme dans [60].

Notations:

Soit $\tilde{O}$ un ouvert de classe $\mathbb{C}^{0,1}$, dont la frontière est $\partial\tilde{O}$ et η la normale unitaire extérieure. Pour un élèment $u \in (H^s(\tilde{O}))^2$, $s \geq 0$ on note:

$$div(u) = \nabla.u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$
$$rot(u) = \nabla \wedge u = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

On définit aussi les espaces:

$H(\tilde{O}) = \{u \in (L^2(\tilde{O}))^2 \,;\, \nabla.u = 0 \text{ dans } \tilde{O} \,;\, u.\eta = 0 \text{ sur } \partial\tilde{O}\}$
$V(\tilde{O}) = \{u \in (H^1(\tilde{O}))^2 \,;\, \nabla.u = 0 \text{ dans } \tilde{O} \,;\, u.\eta = 0 \text{ sur } \partial\tilde{O}\}$
$V'(\tilde{O})$ le dual topologique de $V(\tilde{O})$
$Y(\tilde{O}) = L^2((0,t);(H^1(\tilde{O}))^2)$.

On désigne par:

$$a(u,v) = \int_{\tilde{O}} (\nabla u.\nabla v)dx = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\int_{\tilde{O}} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}dx$$

forme bilinéaire sur $V(\tilde{O}) \times V(\tilde{O})$.

$$b(u,v,w) = \int_{\tilde{O}}((u.\nabla)v).wdx = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\int_{\tilde{O}} u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}w_j dx$$

forme trilinéaire sur $V(\tilde{O}) \times V(\tilde{O}) \times .V(\tilde{O})$.

Remarque 6.1.1:
On remarque que pour un élèment u de $(L^2(\tilde{O}))^2$ dont la divergence $(\nabla.u)$ est dans $L^2(\tilde{O})$, on peut définir la trace normale $u.\eta$ comme un élèment du dual de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\tilde{O})$; ainsi la définition de $H(\tilde{O})$ est licite (Cf [57]).

Préliminaires

.
Dans ce paragraphe, on s'attachera à évaluer une constante de majoration pour le Laplacien avec condition de dirichlet dans un polygone plan convexe d'une part, et à établir une estimation à priori pour la solution variationnelle de l'équation d'Euler perturbée d'autre part. Construisons dans un premier temps la suite de polygones $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont il a été question ci-dessus.

Proposition 6.2.1:
Soit Ω un ouvert convexe borné du plan. Alors il existe k systèmes d'axes tels que la frontière Γ de Ω soit représentée comme graphe de k fonctions lipschitziennes Φ_j ; $1 \leq j \leq k$.

Conséquence 6.2.1:
On se propose maintenant de construire une suite croissante, au sens de l'inclusion, de polygones plans convexes bornés notés $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ inscrits

dans Ω. Soit Γ_* un morceau de Γ, graphe d'une fonction Φ_*, de la proposition 6.2.1

$$\overline{\Gamma_*} = \{(x, \Phi_*(x)\ ,\ a \leq x \leq b\}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on subdivise l'intervalle [a,b] en 2^n sous intervalles;

$$\{a, a+h, \ldots, a+kh, \ldots, b\}\ ,\ \text{où } h = \frac{b-a}{2^n}$$

on définit alors la courbes $\sum_n^*$ linéaire par morceau obtenue en joignant les points de Γ_* dont les abscisses sont les points de la subdivision. En répétant la même opération pour chaque carte, on obtient un ouvert Ω_n inscrit dans Ω. Par construction Ω_n est convexe et $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ et on a le résultat:

Proposition 6.2.2:

Si on désigne par Ψ_n^* la fonction définie sur $[a,b]$ et dont le graphe est $\sum_n^*$, alors on a :

(i) Ψ_n^* est lipschitzienne de même constante que Φ_* et la suite $(\Psi_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers Φ_*.

(ii) Ψ_n^* est presque partout dérivable, à dérivée bornée indépendemment de n.

(iii) $((\Psi_n^*)')_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement presque partout vers (Φ_*').

Proposition 6.2.3:

Les ouverts Ω_n vérifiant une condition de Lipschitz uniforme en n, il existe alors une suite d'opérateurs de prolongement notée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que:

$$P_n : H^s(\Omega_n) \to H^s(\Omega) \quad , \quad s \in \{0,1,2\}$$

et:

$$P_n(u)_{/\Omega_n} = u \quad , \quad \forall\ u \in H^s(\Omega_n)$$

$$\| P_n \|_{L(H^s(\Omega_n), H^s(\Omega))} \leq C_0$$

où C_0 est une constante indépendante de n.

Remarque 6.2.2:

Les différents résultats qu'on vient de rappeler sont issus des travaux réalisés dans [16], [50] et [51]. A présent introduisons les outils dont on se servira pour montrer l'existence d'une solution faible.

Proposition 6.2.4:

Soit Θ un polygone plan convexe borné. On désigne par g un élèment de $L^\infty(\Theta)$; Alors l'unique solution h du problème :

$$\begin{cases} -\Delta h = g & dans \;\; \Theta \\ h = 0 & sur \;\; \partial\Theta \end{cases}$$

qui appartient à $L^{\infty}(\Theta)$ est telle que $\dfrac{\partial h}{\partial \eta} \in L^{\infty}(\partial\Theta)$. De plus on a:

$$\left\| \frac{\partial h}{\partial \eta} \right\|_{L^{\infty}(\partial\Theta)} \leq \| g \|_{L^{\infty}(\Theta)} .\exp(2M + d)$$

où $M = \| h \|_{L^{\infty}(\partial\Theta)}$ et $d = diam(\Theta)$.

Preuve:

Compte tenu du fait que la laplacien est invariant par translation et par rotation, on peut se ramener au cas de figure ci-dessous, ce qui nous permettra d'avoir l'estimation suscitée pour le côté Γ_i:

On procède à un changement de fonction en posant:

$$p(x_1, x_2) = -1 + \exp(2h(x_1, x_2))$$

ainsi:

$$\Delta p = 2(\Delta h).\exp(2h) + 4(\| \nabla h \|_0^2 .\exp(2h);$$

d'où:

$$\Delta p \geq 2(\Delta h)\exp(2h)$$

$$\Delta p \geq -2 \| g \|_{L^{\infty}(\Theta)} \exp(2h)$$

En posant $M = \| h \|_{L^{\infty}(\Theta)}$ il vient que:

$$\Delta p \geq -2 \| g \|_{L^{\infty}(\Theta)} \exp(2M)$$

On définit la fonction :

$w(x_1, x_2) = p(x_1, x_2) + m\exp(-x_2);$

avec $m = a_0 \, exp(d)$, $a_0 = 2 \| g \|_{L^{\infty}(\Theta)} \exp(2M)$ et $d = diam(\Theta)$.

On remarque alors que :

(i)

$$\Delta w = \Delta p + m\exp(-x_2)$$

$$\Delta w \geq -a_0 + a_0 \exp(d - x_2)$$

Comme $(x_1, x_2) \in \Theta$ alors:

$$x_2 \leq d \;\text{ et }\; \exp(d - x_2) \geq 1$$

ainsi:

$$\Delta w \geq 0$$

(ii)

$$\underset{\partial\Theta}{Max} \; w(x_1, x_2) = 0 + \underset{\partial\Theta}{Max} \; m\exp(-x_2) = m$$

Vu que $(x_1, x_2) \in \Theta$, alors :

$$x_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \exp(-x_2) \leq 1.$$

et par conséquent, la fonction $w(x_1, x_2)$ vérifie:

$$\begin{cases} \Delta w \geq 0 \quad \text{dans} \quad \Theta \\ \underset{\partial\Theta}{Max}\ w = \underset{\Gamma_i}{Max}\ w = m \end{cases}$$

Cette fonction $w(x_1,x_2)$ est alors une sous solution (Cf [56]); elle atteint son maximum sur le bord de Θ. Par suite :

$$w(x_1,x_2) \leq m \ , \quad \forall\ (x_1,x_2) \in \Theta.$$

Comme $p(x_1,x_2)$ et $\exp(-x_2)$ sont dans $W^{2,s}(\Theta)$, $s > 2$ et en vertu du fait que $W^{2,s}(\Theta)$ s'injecte continuement dans $C^{1,\alpha}(\overline{\Theta})$ (Cf [52]), on peut affirmer que $w \in C^{1,\alpha}(\overline{\Theta})$et en tout point de Γ_i , on a:

$$\frac{\partial w}{\partial x_2}(x,0) = \lim_{x_2 \to 0^+} \frac{w(x,x_2) - w(x,0)}{x_2} \leq 0$$

donc:

$$\frac{\partial w}{\partial x_2} \leq 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_i$$

or

$$\frac{\partial w}{\partial x_2} = \frac{\partial p}{\partial x_2} - m \quad \text{sur} \ \ \Gamma_i$$

qui entraine que:

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} \leq m \quad \text{sur} \ \ \Gamma_i$$

Par construction de la fonction h on:

$h(x_1,x_2) = \dfrac{1}{2}Log(1 + p(x_1,x_2))$; ainsi, on obtient:

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x_2} \quad \text{sur} \quad \Gamma_i$$

vu que $p = 0$ sur Γ_i; enfin:

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} \leq \frac{1}{2}m \quad \text{sur} \quad \Gamma_i$$

ou encore:

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} \leq \ \| \ g \ \|_{L^\infty(\Theta)} \ \exp(2M + d) \quad \text{sur} \quad \Gamma_i.$$

En considérant à présent une autre fonction test à savoir :

$$w(x_1,x_2) = 1 - \exp(-2h(x_1,x_2)) \ - m\exp(-x_2)$$

on montre aisément par un raisonnement analogue au précédent que:

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} \geq -\frac{1}{2}m \quad \text{sur} \quad \Gamma_i$$

ou encore:

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} \geq - \ \| \ g \ \|_{L^\infty(\Theta)} \ \exp(2M + d) \quad \text{sur} \quad \Gamma_i.$$

On conclut alors que:

$$\underset{\Gamma_i}{Max} \left| \ \frac{\partial h}{\partial x_2} \ \right| \leq \| \ g \ \|_{L^\infty(\Theta)} \ \exp(2M + d) \ .$$

En reprenant ce raisonnement pour chacun des côtés Γ_j de $\partial\Theta$ (qui sont en nombre fini) on aura:

$$\| \ \frac{\partial h}{\partial \eta} \ \|_{L^\infty(\partial\Theta)} \ \leq \| \ g \ \|_{L^\infty(\Theta)} \ \exp(2M + d).$$

Remarque 6.2.2:
En ce qui concerne la contante M on peut donner l'estimation suivante (Cf [56]:

$$M \leq 4(1+d^2)(2mes\Theta)^{\frac{1}{4}} \parallel g \parallel_{L^\infty(\Theta)} .$$

Proposition 6.2.5:
Soit Θ un ouvert polygonal plan borné. On désigne par g un élèment de $L^\infty(\Theta)$. Alors l'unique solution h du problème :

$$\begin{cases} -\Delta h = g & \text{dans} \quad \Theta \\ h = 0 & \text{sur} \quad \partial\Theta \end{cases}$$

qui appartient à $L^\infty(\Theta)$ est telle que $\dfrac{\partial h}{\partial x_k} \in L^\infty(\partial\Theta)$, $k \in \{1,2\}$. De plus on a:

$$\parallel \frac{\partial h}{\partial x_k} \parallel_{L^\infty(\partial\Theta)} \leq \parallel g \parallel_{L^\infty(\Theta)} \exp(2M+d) \ , \forall\, k \in \{1,2\}$$

où $M = \parallel h \parallel_{L^\infty(\Theta)}$ et $d = diam(\Theta)$

Preuve:
On a:

$$\frac{\partial h}{\partial x_k} = \alpha_1^k \frac{\partial h}{\partial \eta} + \alpha_2^k \frac{\partial h}{\partial \tau} \quad \text{sur} \quad \partial\Theta$$

où τ est le vecteur tangent unitaire tel que (η,τ) soit direct. De plus:

$$(\alpha_1^k)^2 + (\alpha_2^k)^2 = 1 \ , \ \forall k \in \{1,2\}$$

et compte tenu du fait que h est nulle sur $\partial\Theta,$ il vient que :

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = 0 \quad \text{sur} \ \partial\Theta$$

et par conséquent:

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x_k} \right| \leq 1. \left| \frac{\partial h}{\partial \eta} \right| \quad \text{sur} \quad \partial\Theta \ , \forall k \in \{1,2\}$$

On peut conclure en se référant à la proposition 6.2.4 que:

$$\parallel \frac{\partial h}{\partial x_k} \parallel_{L^\infty(\partial\Theta)} \leq \parallel g \parallel_{L^\infty(\Theta)} \exp(2M+d) \ , \forall k \in \{1,2\}$$

Proposition 6.2.6:
Soit Θ un polygone plan convexe. On désigne par g un élèment de $L^\infty(\Theta)$. Alors l'unique solution h du problème :

$$\begin{cases} -\Delta h = g & \text{dans} \quad \Theta \\ h = 0 & \text{sur} \quad \partial\Theta \end{cases}$$

appartient à $W^{1,\infty}(\Theta)$. De plus on a:

$$\parallel \frac{\partial h}{\partial x_k} \parallel_{L^\infty(\partial\Theta)} \leq K \parallel g \parallel_{L^\infty(\Theta)} (mes\,\Theta)^{1+\frac{1}{4}}) + \parallel g \parallel_{L^\infty(\Theta)} \exp(2M+d)$$

où $M = \parallel h \parallel_{L^\infty(\Theta)}$, $d = diam(\Theta)$ et K indépendant de Θ , de h et de g.

Preuve:
(1) Le fait que h appartienne à $W^{1,\infty}(\Theta)$ découle de :

(i) h est l'unique solution de:

$$\begin{cases} -\Delta h = g & \text{dans} \quad \Theta \\ h = 0 & \text{sur} \quad \partial\Theta \end{cases}$$

(ii) Θ étant un polygone plan convexe, alors h appartient à l'espace $W^{2,s}(\Theta)$, $2 < s < s_0$. De façon plus précise, si l'on se réfère à [51], on a:

$$s_0 = 1 + \frac{\epsilon}{2},\ \epsilon = \underset{k}{Inf}\ (\frac{2}{2-\alpha_k}),\quad \alpha_k = \frac{\pi}{w_k}$$

où les w_k sont les angles du polygone Θ.

(2) Il nous reste à prouver l'inégalité citée ci-dessus. Pour cela on dérive l'équation par rapport à x_k , $k \in \{1,2\}$:

$$\begin{cases} -\Delta(\dfrac{\partial h}{\partial x_k}) = \dfrac{\partial g}{\partial x_k} & \text{dans} \quad \Theta \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_k} \in L^\infty(\partial\Theta) \end{cases}$$

On écrit ensuite:

$$\frac{\partial h}{\partial x_k} = h_1 + h_2$$

où h_1 et h_2 sont solutions de:

$$\begin{cases} -\Delta(h_1) = \dfrac{\partial g}{\partial x_k} & \text{dans} \quad \Theta \\ h_1 = 0 & \text{sur} \quad \partial\Theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta(h_2) = 0 & \text{dans} \quad \Theta \\ h_2 = \dfrac{\partial h}{\partial x_k} & \text{sur} \quad \partial\Theta \end{array} \right\}$$

On a alors (Cf [56]):
(i)

$$\| h_1 \|_{L^\infty(\Theta)} \leq K \| g \|_{L^\infty(\Theta)} (mes\ \Theta)^{1+\frac{1}{4}}$$

où K ne dépend ni de Θ, ni de h, ni de g ni de h_1.
(ii) mais aussi:

$$\| h_2 \|_{L^\infty(\Theta)} \leq \| \frac{\partial h}{\partial x_k} \|_{L^\infty(\Theta)} \leq \| g \|_{L^\infty(\Theta)} \exp(2M + d)$$

car h_2 est en même temps une sous solution et une sur solution.
Enfin:

$$\begin{aligned} &\| \frac{\partial h}{\partial x_k} \|_{L^\infty(\Theta)} \leq \| h_1 \|_{L^\infty(\Theta)} + \| h_2 \|_{L^\infty(\Theta)} \\ &\leq K \| g \|_{L^\infty(\Theta)} (mes\Theta)^{1+\frac{1}{4}} + \| g \|_{L^\infty(\Theta)} \exp(2M + d)\ \forall\ k \in \{1,2\} \end{aligned}$$

Remarque 6.2.3:
On rappelle à présent un résultat qu'on utilisera plus loin et dont la

démonstration est faite dans [41].

Proposition 6.2.7:
Soient O un ouvert de $\mathbb{R}^q$, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(O), p \in]1,+\infty[$ telle que :

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers a,
- $\| a_n \|_{L^\infty(\Theta)}$ est bornée indépendemment de n.

Alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers a dans $L^p(O)$.

Remarque 6.2.4:
Nous rappelons que la solution faible de l'équation d'Euler dans un polygone plan convexe Θ a été obtenue comme valeur d'adhérence de la suite de fonctions $(u_\nu)_{\nu>0}$ et dont chaque élèment est solution de l'équation d'Euler perturbée (Cf [5]), à savoir:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u_\nu \in L^\infty((0,T);V(\Theta)) \text{ tel que : } (u_\nu)'_t \in L^\infty((0,T);V'(\Theta)) \\ \left\{\begin{array}{ll} < (u_\nu)'_t\,,\, z >_{V'\times V} + \nu a(u_\nu,z) + b(u_\nu,u_\nu,z) =< f,z >_{L^2}\,, & \forall z \in V(\Theta) \\ u_\nu(0) = u_0 & \text{dans } \Theta \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$u_0 \in V(\Theta)$ et $f \in Y(\Theta)$.

Proposition 6.2.8:
La solution u_ν du problème précédent vérifie:

$$\| \nabla \wedge u_\nu \|_{L^2}^2 \leq 2\exp(2T)(\| u_0 \|_{V(\Theta)} + \| f \|_{Y(\Theta)}^2 \qquad 6.2.1$$

Si de plus $(\nabla \wedge u_0) \in L^\infty(\Theta)$ et $(\nabla \wedge f) \in L^\infty((0,T);L^\infty(\Theta))$ on

a alors l'estimation:

$$\begin{array}{l} \| \nabla \wedge u_\nu \|^2_{L^\infty((0,T);L^\infty(\Theta))} \\ \leq C_1 \| \nabla \wedge u_0 \|^2_{L^\infty(\Theta)} + \| \nabla \wedge f \|_{L^\infty((0,T);L^\infty(\Theta))} \end{array} \qquad 6.2.2$$

C_1 est indépendante de T, ν, u_0 , f, u_ν, et Θ.

Preuve:
Pour la première estimation se référer à [5], pour la seconde à [4].

Remarque 6.2.5:
Il est clair que ces deux estimations à priori restent valables pour la limite d'une sous suite quelconque de $(u_\nu)_{\nu>0}$ et en particulier pour la solution de l'équation d'Euler dans un polygone plan convexe.

Existence d'une solution faible

Soient u_0 et f deux élèments respectifs de $V(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ tels que $(\nabla \wedge u_0) \in L^\infty(\Omega)$ et $(\nabla \wedge f) \in L^\infty(Q_T)$. Pour un entier n fixé , on notera par f_n la restriction de la fonction f à Ω_n et par ψ_n l'unique solution de :

$$\begin{cases} -\Delta(\psi_n) = \nabla \wedge u_0 & \text{dans} \quad \Omega_n \\ \psi_n = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_n \end{cases}$$

on pose alors : $u_{0,n} = (\frac{\partial\psi_n}{\partial x_2}, -\frac{\partial\psi_n}{\partial x_1})$.

Remarque 6.3.1:

(1) Il est clair que $\nabla \wedge u_{0,n}$, de par sa définition, est la restriction à Ω_n de $\nabla \wedge u_0$ et par conséquent $\nabla \wedge u_{0,n} \in L^\infty(\Omega_n)$.

(2) En se référant à [34], on peut affirmer que :

$$\| u_{0,n} \|^2_{V(\Omega_n)} \leq \| \psi_n \|^2_{H^2(\Omega_n)} \leq (1 + C_2) \mid \Delta\psi_n \mid^2_{L^2(\Omega_n)}$$
$$\| u_{0,n} \|^2_{V(\Omega_n)} \leq (1 + C_2) \| u_0 \|^2_{V(\Omega)}$$

où la constante C_2 est égale à $(diam\,\Omega)^2(1 + ((diam\,\Omega)^2)$.

A présent, on introduit la fonction vitesse u_n, solution faible de l'équation d'Euler dans Ω_n pour les données $u_{0,n}$ et f_n. Plus exactement (Cf [5]) u_n est solution du problème (E_n):

$$(E_n) : \begin{cases} Trouver\ u_n \in L^2((0,T);V(\Omega_n))\ tel\ que :\ (u_n)'_t \in L^2((0,T);V'(\Omega_n)) \\ \begin{cases} < (u_n)'_t\,,\, z >_{V' \times V} + b(u_n,u_n,z) =< f_n, z >_{L^2}\ ,\ \forall z \in V(\Omega_n) \\ u_n(0) = u_{0,n} \qquad\qquad dans\ \ \Omega_n \end{cases} \end{cases}$$

On considère la fonction courant (Cf [60]) associée à u_n , notée φ_n, solution de:

$$\mathcal{E}_n \begin{cases} -\Delta(\varphi_n) = \nabla \wedge u_n & \text{dans} \quad \Omega_n \\ \varphi_n = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega_n \end{cases}$$

il vient alors que:

$$u_n = (\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}, -\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1})$$

On peut énoncer les lemmes suivants:

Lemme 6.3.1:

La solution du problème (E_n) est telle que:

(i) u_n est un élèment de $L^\infty((0,T);V(\Omega_n))$.

(ii) $(\nabla \wedge u_n)$ est un élèment de $L^\infty((0,T);L^\infty(\Omega_n))$

(iii) $(u_n)'_t$ est un élèment de $L^2((0,T);H(\Omega_n))$.

Preuve:

(i) L'appartenance de u_n à $L^\infty((0,T);V(\Omega_n))$ est démontrée dans [5];

(ii) Ce résultat est immédiat. En effet l'inégalité (6.2.2) reste valable pour u_n puisqu'elle est obtenue comme limite d'une sous suite de $(u_{n,\nu})_{\nu>0}$ (Cf [5]), en vertu de la remarque 6.2.4:

$$\| \nabla \wedge u_n \|_{L^\infty((0,T);L^\infty(\Omega n))} \leq C_1(\| \nabla \wedge u_{0,n} \|_\infty + \| \nabla \wedge f_n \|_\infty$$

f_n et $(\nabla \wedge u_{0,n})$ étant respectivement les restrictions de f et de $(\nabla \wedge u_0)$ à Ω_n:

Comme:

$$\| \nabla \wedge f_n \|_\infty \leq \| \nabla \wedge f \|_{L^\infty(Q_T)}$$

et:

$$\| \nabla \wedge u_{0,n} \|_\infty \leq \| \nabla \wedge u_0 \|_{L^\infty(\Omega)}$$

alors:

$$\| \nabla \wedge u_n \|_{L^\infty((0,T);L^\infty(\Omega n))} \leq C_1(\| \nabla \wedge f \|_{L^\infty(Q_T)} + \| \nabla \wedge u_0 \|_{L^\infty(\Omega)})$$

(iii) Rappelons que u_n vérifie:

$$< (u_n)'_t, z >_{V'' \times V} + b(u_n, u_n, z) =< f_n, z >_{L^2} , \forall z \in V(\Omega_n)$$

Vu la proposition 6.2.6, la définition de u_n et le fait que $(\nabla \wedge u_n)$ appartient à $L^\infty((0,T);L^\infty(\Omega_n))$ on peut écrire en utilisant la fonction courant:

$$\| u_n \|_{L^\infty((0,T);(L^\infty(\Omega_n))^2)} \leq \left\{K(mes\ \Omega_n)^{1+\frac{1}{4}} + \exp(2M+d)\right\} \| \nabla \wedge u_n \|_{L^\infty((0,T);L^\infty(\Omega n))}$$

ainsi:

$$< (u_n)'_t, z >_{V'' \times V} \leq (\| f_n \|_0 + \| u_n \|_\infty \| u_n \|_V) \| z \|_0 , \forall z \in V(\Omega_n).$$

Comme $V(\Omega_n) \hookrightarrow H(\Omega_n) \hookrightarrow V'(\Omega_n)$ avec densité (Cf [5]), et en vertu du théorème de Hahn-Banach on déduit le résultat énoncé et l'estimation:

$$\| (u_n)'_t \|^2_{L^2((0,T);H(\Omega n))} \leq 2(\| f_n \|^2_{L^2((0,T);(L^2(\Omega_n))^2)} + \| u_n \|^2_\infty \| u_n \|^2_{L^2((0,T);V(\Omega n))})$$

Lemme 6.3.2:

La fonction courant φ_n, associée à u_n, solution du problème $(\mathcal{E}_n)$ est telle que $(\varphi_n)'_t$ existe et appartient à $L^2((0,T);H^1_0(\Omega n))$.

Preuve:

φ_n est solution du problème $(\mathcal{E}_n)$ et $u_n = (\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}, -\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1})$, alors:

(i)

$$(u_n)'_t = \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}\right), -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}\right)\right) = \left(\frac{\partial(\varphi_n)'_t}{\partial x_2}, -\frac{\partial(\varphi_n)'_t}{\partial x_1}\right).$$

Il est entendu que cette dérivation est faite au sens de $\mathcal{D}'(Q_{T,n})$. De plus d'après le lemme 6.3.1, $(u_n)'_t \in L^2((0,T);H(\Omega n))$, qui nous permet d'écrire que:

$$(u_n)'_t.\eta = 0 \text{ sur } \partial\Omega_n.$$

$$(u_n)'_t.\eta = \frac{\partial}{\partial\tau}(\varphi_n)'_t \text{ sur } \partial\Omega_n.$$

et par suite:

$$(\varphi_n)'_t = cste \text{ sur } \partial\Omega_n$$

(ii) Il est clair que $-\Delta(\varphi_n)'_t = \nabla \wedge (u_n)'_t$
égalité ayant lieu dans $\mathrm{H}^{-1}(\Omega_n)$
Par conséquent $(\varphi_n)'_t$ est solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta(\varphi_n)'_t = \nabla \wedge (u_n)'_t \\ (\varphi_n)'_t = cste \text{ sur } \partial\Omega_n \end{cases}$$

Il vient alors que $(\varphi_n)'_t \in L^2((0,T);H^1(\Omega n))$, mais puisque $\varphi_n \in L^2((0,T);H^2(\Omega n))$ on peut conclure que $\varphi_n \in W(\Omega n)$,

$$W(\Omega n) = \left\{w \in L^2((0,T);H^2(\Omega n)) \text{ tel que } \frac{\partial w}{\partial t} \in L^2((0,T);H^1(\Omega n))\right\}$$

On montre aisément par un procédé de régularisation que $\mathcal{D}(Q_{T,n})$ est dense dans $W(\Omega n)$. D'où:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_n/_{\partial\Omega_n}) = (\varphi_n)'_t \; sur \; \partial\Omega_n$$

cette dernière égalité ayant lieu dans $L^2((0,T);H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega n))$.
Comme $\varphi_n/_{\partial\Omega_n} = 0$, $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_n/_{\partial\Omega_n}) = 0$, et $(\varphi_n)'_t$ est l'unique solution de:

$$\begin{cases} -\Delta(\varphi_n)'_t = \nabla \wedge (u_n)'_t \\ (\varphi_n)'_t = 0 \text{ sur } \partial\Omega_n \end{cases}$$

$\nabla \wedge (u_n)'_t \in L^2((0,T);H^{-1}(\Omega n))$ implique que :

$$(\varphi_n)'_t \in L^2((0,T);H^1_0(\Omega n)).$$

Notations:

On notera par θ_n et par v_n les fonctions suivantes:

$$\theta_n = P_n(\varphi_n) \ \ et \ \ v_n = \left(\frac{\partial\theta_n}{\partial x_2}, -\frac{\partial\theta_n}{\partial x_1}\right)$$

où P_n est l'opérateur de prolongement de la proposition 6.2.3.

Proposition 6.3.1:

La suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$) ainsi définie est bornée indépendemment de n dans $L^\infty((0,T);H^2(\Omega))$ (resp. dans $L^\infty((0,T);(H^1(\Omega)^2)))$.

Preuve:

Par construction de θ_n et de v_n, on a l'estimation:

$$\| v_n \|^2_{H^1(\Omega)^2} \leq \| \theta_n \|^2_{H^2(\Omega)} \leq C_0 \| \varphi_n \|^2_{H^2(\Omega_n)}$$

qui donne si l'on se référe à [34] :

$$\| v_n \|^2_{H^1(\Omega)^2} \leq \| \theta_n \|^2_{H^2(\Omega)} \leq C_0(1+C_2) \| \Delta\varphi_n \|^2_{L^2(\Omega_n)}$$

ou encore:

$$\| v_n \|^2_{H^1(\Omega)^2} \leq \| \theta_n \|^2_{H^2(\Omega)} \leq C_0(1+C_2) \| \nabla \wedge u_n \|_{L^2(\Omega n)}$$

où C_1 et C_2 sont les mêmes constantes utilisées précédemment. En vertu de l'inégalité (6.2.1), des remarques 6.2.4 et 6.3.1 et du fait que:

$$\| f_n \|_{Y(\Omega_n)} \leq \| f \|_{Y(\Omega)}$$

il vient que :

$$\| v_n \|^2_{H^1(\Omega)^2} \leq \| \theta_n \|^2_{H^2(\Omega)} \leq C_3\Big(\| u_{0,n} \|^2_{V(\Omega n)} + \| f_n \|^2_{Y(\Omega_n)} \Big);$$

et si l'on pose
$C_3 = 2\exp(2T)C_0(1+C_2)$ et $C_4 = C_3(1+C_2)$ on aura:

$$\| v_n \|^2_{H^1(\Omega)^2} \leq \| \theta_n \|^2_{H^2(\Omega)} \leq C_4\Big(\| u_0 \|^2_{V(\Omega)} + \| f \|^2_{Y(\Omega)} \Big).$$

Remarque 6.3.2:

La suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$) étant bornée dans $L^\infty((0,T);H^2(\Omega))$ (resp. dans $L^\infty((0,T);(H^1(\Omega)^2))$), on peut en extraire une sous suite (Cf [15] notée par commodité $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$) convergeant vers un élèment θ (resp. v) dans $L^\infty((0,T);\ H^2(\Omega))$ faible * (resp. dans $L^\infty((0,T);(H^1(\Omega)^2))$ faible *). De plus on a le résultat suivant:

Proposition 6.3.2:
La limite θ appartient à $L^\infty((0,T);H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$.

Preuve:
La preuve de cette proposition se fait en trois étapes.

Etape 1:
Montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}$ fixé, $(\theta_n)'_t$ existe et appartient à $L^2((0,T);H^1(\Omega))$. On rappelle que $\theta_n(t,.)=P_n\varphi_n(t,.)$, et pour presque tout $t_0\in(0,T)$ on a:

$$(\theta_n)'_t(t_0,.)=\underset{t\to t_0}{Lim}\frac{\varphi_n(t,.)-\varphi_n(t_0,.)}{t-t_0}\quad dans\quad H^1(\Omega_n)$$

$$P_n(\varphi_n)'_t(t_0,.)=\lim_{t->t_0}\frac{P_n\varphi_n(t,.)-P_n\varphi_n(t_0,.)}{t-t_0}\qquad dans\ H^1(\Omega)$$

$$P_n(\varphi_n)'_t(t_0,.)=\lim_{t->t_0}\frac{\theta_n(t,.)-\theta_n(t_0,.)}{t-t_0}\qquad dans\ H^1(\Omega)$$

ainsi pour presque tout $t_0\in(0,T)$, $(\theta_n)'_t$ existe et :

$$(\theta_n)'_t=P_n(\varphi_n)'_t\in L^2((0,T);H^1(\Omega)).$$

Etape 2 :
Montrons que la sous suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers θ dans $L^2((0,T);H^{2-\varepsilon}(\Omega))$ fort pour tout $\varepsilon\in]0,1[$. En effet, au vu de l'étape 1, et des propriétés de l'opérateur de prolongement P_n, il est clair que :

$$\|\ (\theta_n)'_t\ \|^2_{L^2((0,T);H^1(\Omega))}\ \leq C_0.\|\ (\varphi_n)'_t\ \|^2_{L^2((0,T);H^1(\Omega_n))}$$

$$\|\ (\theta_n)'_t\ \|^2_{L^2((0,T);H^1(\Omega))}\ \leq C_0.(1+C_2).\|\ (u_n)'_t\ \|^2_{(L^2(Q_{T,n}))^2}$$

en se référant à la proposition **6.2.6**, et les démonstrations de la proposition **6.3.1** et du lemme **6.3.1**, on peut affirmer que :

$$\|\ (u_n)'_t\ \|^2_{(L^2(Q_{T,n}))^2}\ \leq 2.\Big(\|\ f\ \|^2_{(L^2(Q_T))^2}\ +C_*^2.C_4\big(\|\ u_0\ \|^2_{V(\Omega)}\ +\|\ f\ \|^2_{Y(\Omega)}\ \big)\Big)$$

ainsi :

$$\|\ (\theta_n)'_t\ \|^2_{L^2((0,T);H^1(\Omega))}\ \leq C_6$$

avec :

$$C_6=2.C_0.(1+C_2)\Big(\|\ f\ \|^2_{(L^2(Q_T))^2}\ +C_*^2.C_4\big(\|\ u_0\ \|^2_{V(\Omega)}\ +\|\ f\ \|^2_{Y(\Omega)}\ \big)\Big)$$

de plus comme la sous suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers θ dans $L^2((0,T);H^2(\Omega))$

faible , alors la sous suite $((\theta_n)'_t)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (θ'_t) dans $L^2((0,T);H^1(\Omega))$ faible; l'utilisation d'un théorème de compacité (Cf [40]) nous permet de conclure que la sous suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers θ dans $L^2((0,T);H^{2-\varepsilon}(\Omega))$ fort pour tout $\varepsilon \in]0,1[$.

Etape 3 :

Montrons à présent que pour tout $t \in (0,T)$ on a :

$$\theta = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Soit alors $x_* \in \Gamma$ et soit $x_n \in \partial\Omega_n$ tels que :

$$d\left(x_*, \partial\Omega_n\right) = d(x_*, x_n).$$

Ainsi :

$$x_* = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \theta(x_*) = \lim_{n\to\infty} \theta(x_n);$$

il suffit alors pour conclure de prouver que : $\lim\limits_{n\to\infty} \theta(x_n) = 0.$ On a :

$$0 \leq |\ \theta(x_n) - \theta_n(x_n)\ | \leq \sup_{x\in\overline{\Omega}} |\ \theta(x) - \theta_n(x)\ |$$

mais par construction $\theta(x_n) = \varphi_n(x_n)$ puisque $x_n \in \partial\Omega_n$.
Or φ_n est l'unique solution du problème $\mathcal{E}_n$ donc $\varphi_n(x_n) = 0,$ par suite :

$$0 \leq |\ \theta(x_n)\ | \leq \sup_{x\in\overline{\Omega}} |\ \theta(x) - \theta_n(x)\ |$$

Au vu de l'étape 2, et en se référant à [52], on peut dire que pour presque tout $t \in (0,T)$ la sous suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers θ dans $C^0\left(\bar{\Omega}\right)$. Par conséquent :

$$\lim_{n\to\infty} \theta(x_n) = 0 \Rightarrow \theta(x_*) = 0.$$

Comme x_* est un point quelconque de Γ, on peut confirmer que :

$$\theta = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Enfin de ces trois étapes, il vient que : $\theta \in L^\infty((0,T);H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))$.

Conséquence 6.3.1:

La limite v de la sous suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $L^\infty((0,T),V(\Omega))$.
En effet, on rappelle que :

▸ $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers θ dans $L^\infty((0,T);H^2(\Omega))$ faible*
▸ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v dans $L^\infty((0,T);(H^1(\Omega))^2)$ faible*
▸ $\theta \in L^\infty((0,T);H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))$
▸ et $v_n = (\dfrac{\partial\theta_n}{\partial x_2}, -\dfrac{\partial\theta_n}{\partial x_1})$.

par suite :

$$v = (\frac{\partial\theta}{\partial x_2}, -\frac{\partial\theta}{\partial x_1}) \Rightarrow \nabla. v = 0;$$

de plus

$$v.\eta = \frac{\partial\theta}{\partial\tau} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T \text{ vu que } \theta \in H_0^1(\Omega) \text{ p.p dans } (0,T);$$

d'où le résultat escompté.

Conséquence 6.3.2:
La sous suite $\left((v_n)_t'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(v)_t'$ dans $L^2((0,T);(L^2(\Omega))^2)$ faible. En effet, au cours de la démonstration de la proposition 6.3.2 (étape 2), on a prouvé que la sous suite $\left((\theta_n)_t'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(\theta)_t'$ dans $L^2((0,T);H^1(\Omega))$ faible; il est alors clair que la sous suite $\left((v_n)_t'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(v)_t'$ dans $L^2((0,T);(L^2(\Omega))^2)$ faible.

Remarque 6.3.3:
Maintenant on est en mesure de prouver que l'équation d'Euler possède au moins une solution faible dans Ω. Mais d'abord, nous prouverons quelques lemmes de convergence dont nous aurons besoin.
Pour un élément quelconque $z \in V(\Omega)$, on définit υ_n comme étant l'unique solution de :

$$\begin{cases} -\Delta\upsilon_n = \nabla \wedge z & \text{dans } \Omega_n \\ \upsilon_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_n \end{cases}$$

et l'on pose $z_n = (\frac{\partial\upsilon_n}{\partial x_2}, -\frac{\partial\upsilon_n}{\partial x_1})$.

Lemme 6.3.3:
On a :
$< (u_n)_t', z_n >_{V'\times V}$ converge vers $< (v)_t', z >_{V'\times V}$ dans $L^1(0,T)$ faible.

Preuve.
On rappelle que (lemme 6.3.1, conséquence 6.3.2) :

$$(u_n)_t' \in L^2((0,T);H(\Omega_n)) \ , \ (v_n)_t' \ \text{ et } \ (v)_t' \in L^2((0,T);(L^2(\Omega))^2);$$

ainsi, la dualité $V' \times V$ se transforme en produit scalaire dans L^2.
On écrit alors :

$$< (u_n)_t', z_n >_{0,\Omega_n} - < (v)_t', z >_{0,\Omega} = D_n(t) - < (v)_t' - (v_n)_t', z >_{0,\Omega}$$

où

$$D_n(t) = < (u_n)_t', z_n >_{0,\Omega_n} - < (v_n)_t', z >_{0,\Omega}$$

et au vu de la conséquence 6.3.2,

$$< (v_n)_t' - (v)_t', z >_{0,\Omega} \text{ tend vers 0 dans } L^1(0,T) \text{ fort;}$$

donc pour prouver ce lemme, il suffit de montrer que $D_n(t)$ tend vers 0 dans $L^1(0,T)$ faible :

-1- On montre d'abord que:

$$D_n(t) \quad \text{tend vers 0 presque partout sur} \quad (0,T).$$

En effet :

$$D_n(t) = < (u_n)'_t, z_n - z >_{0,\Omega_n} - < (v)'_t, z >_{0,\Omega\setminus\Omega_n}$$

on a utilisé le fait que $(u_n)'_t$ et $(v_n)'_t$ coincident sur Ω_n : $(\theta_n)'_t = P_n(\varphi_n)'_t$

i) En ce qui concerne $< (u_n)'_t, z_n - z >_{0,\Omega_n}$, on a l'estimation :

$$| < (u_n)'_t, z_n - z >_{0,\Omega_n} | \leq \| (u_n)'_t \|_{0,\Omega_n} \| z - z_n \|_{0,\Omega_n} .$$

D'une part, se référant à l'étape 2 de la démonstration de la proposition 6.3.2, on peut affirmer que $\| (u_n)'_t \|_{0,\Omega_n}$ est bornée indépendamment de n.

D'autre part, vu que si on note $\chi_n = P_n v_n$, alors :

$$\| \chi_n \|^2_{H^2(\Omega)} \leq C_0 . \| v_n \|^2_{H^2(\Omega_n)} \leq C_0(1 + C_2) \| z \|^2_{V(\Omega)}$$

et de la suite $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous suite, notée par commodité $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui converge vers χ unique solution de :

$$\begin{cases} -\Delta\chi = \nabla \wedge z & \text{dans } \Omega \\ \chi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad et\ z = \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right);$$

il vient alors que $P_n v_n$ converge vers χ dans $H^2(\Omega)$ faible, et donc dans $H^1(\Omega)$ fort (Cf [52]), en n'onbliant pas que $P_n v_n = v_n$ sur Ω_n, on peut conclure que $\| z - z_n \|_{0,\Omega_n}$ tend vers 0. Par suite :

$$< (u_n)'_t, z_n - z >_{0,\Omega_n} \text{ tend vers 0.}$$

(ii) En ce qui concerne $< (v_n)'_t, z >_{0,\Omega\setminus\Omega_n}$:
on a l'estimation

$$| < (v_n)'_t, z >_{0,\Omega\setminus\Omega_n} | \leq \| (v_n)'_t \|_{0,\Omega} \| z \|_{0,\Omega\setminus\Omega_n} ;$$

comme :

$$\| (v_n)'_t \|^2_{0,\Omega} \leq \| (\theta_n)'_t \|^2_{H^1(\Omega)} \leq C_0 \| (\varphi_n)'_t \|^2_{H^1(\Omega_n)} \leq C_0(1 + C_2) \| (u_n)'_t \|^2_{0,\Omega_n}$$

ainsi :

$$| < (v_n)'_t, z >_{0,\Omega\setminus\Omega_n} \leq C_6 \| z \|_{0,\Omega\setminus\Omega_n} \leq C_6 . (mes(\Omega\setminus\Omega_n))^{\frac{1}{4}} . \| z \|_{(L^4(\Omega))^2}$$

vu que $z \in V(\Omega)$. Par suite :

$$| < (v_n)'_t, z >_{0,\Omega_n} \text{ tend vers 0.}$$

En conclusion, on peut affirmer que $D_n(t)$ tend vers 0 presque partout sur $(0,T)$ quand n tend vers $+\infty$.

-2- De plus, en vertu de la proposition 6.2.7 et du fait que les sous suites

$((v_n)'_t)_{n\in\mathbb{N}}$, $((u_n)'_t)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement bornées dans $L^2((0,T);(L^2(\Omega))^2$, $L^2((0,T);(L^2(\Omega_n))^2$ et $(L^2(\Omega_n))^2$ alors :

$$D_n(t) \text{ tend vers } 0 \text{ dans } L^2(0,T) \text{ faible}$$

et donc

$$< (u_n)'_t \ , z_n >_{0,\Omega_n} \text{ tend vers } < (v)'_t \ , z >_{0,\Omega} \text{ dans } L^1(0,T) \text{ faible}$$

Lemme 6.3.4: On a :

$$b(u_n,u_n,z_n) \text{ converge vers } b(u,v,z) \text{ dans } L^1(0,T) \text{ faible.}$$

Preuve :

Dans l'étape 2 de la démonstration de la proposition 6.3.2, on a prouvé que la sous suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers θ dans $L^2((0,T);(H^{2-\varepsilon}(\Omega))$ fort pour tout $\varepsilon \in]0,1[$; ainsi la sous suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v dans $L^2((0,T);(H^{1-\varepsilon}(\Omega))^2)$ fort pour tout $\varepsilon \in]0,1[$; comme de plus la sous suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v dans $L^2(\ (0,T);\ (H^1(\Omega))^2)$ faible (Cf remarque 6.3.2) alors pour $z \in V(\Omega)$, $i \in \{1.2\}$, $j \in \{1.2\}$ il vient que :

$$v_{n,i}.z_j \text{ tend vers } v_i.z_j \text{ dans } L^2(Q_T) \text{ fort}$$

$$\frac{\partial v_{n,j}}{\partial x_i} \text{ tend vers } \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \text{ dans } L^2(Q_T) \text{ faible}$$

ainsi :

$$b(v_n,v_n,z) \text{ tend vers } b(v,v,z) \text{ dans } L^1(0.T) \text{ faible.}$$

Pour prouver ce lemme, il suffit de montrer que $B_n(t)$ tend vers 0 dans $L^1(0.T)$ faible sachant que :

$$B_n(t) = b(v_n,v_n,z) - b(u_n,u_n,z_n).$$

-1- On commence d'abord par montrer que :

$B_n(t)$ tend vers 0 presque partout sur $(0,T)$.

En effet :

$$B_n(t) = \int_{\Omega_n} (u_{n,i}.\frac{\partial u_{n,j}}{\partial x_i}.(z_j - z_{n,j}))_{(t,x)}dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_n} (v_{n,i}.\frac{\partial v_{n,j}}{\partial x_i}.z_j)_{(t,x)}dx$$

on a utilisé le fait que u_n et v_n coincident sur Ω_n $(\theta_n = P_n(\varphi_n))$.

(i) En ce qui concerne $I_{n,1}(t) = \int_{\Omega_n} (u_{n,i}.\frac{\partial u_{n,j}}{\partial x_i}.(z_j - z_{n,j}))_{(t,x)}dx$:

on a l'estimation :

$$|\ I_{n,1}(t)\ | \leq \|\ u_n\ \|_\infty \ .\|\ u_n\ \|_{V(\Omega_n)}\ .\|\ z - z_n\ \|_{0,\Omega_n}.$$

D'une part, en se référant à la démonstration du lemme 6.3.1, ainsi qu'à [5], on peut affirmer que :

$$\| u_n \|_\infty \leq C_* \text{ et } \| u_n \|_{V(\Omega_n)} \leq C_4(\| u_0 \|_{V(\Omega)} + \| f \|^2_{Y(\Omega)}).$$

D'autre part, on a montré ci-haut (démonstration du lemme 6.3.3) que:

$$\| (z - z_n) \|_{0,\Omega_n} \text{ tend vers 0 quand } n \text{ tend vers } +\infty$$

ce qui implique que $I_{n,1}(t)$ tend vers 0 presque partout sur $(0,T)$.

(ii) En ce concerne $I_{n,2}(t) = \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_n} (v_{n,i}.\dfrac{\partial v_{n,j}}{\partial x_i}.z_j)_{(t,x)}dx$:

on a l'estimation

$$| I_{n,2}(t) | \leq \| v_n \|_{(L^4(\Omega)^2} . \| v_n \|_{V(\Omega)} . \| z \|_{(L^4(\Omega))^2}.$$

Si on désigne par C_8 la constante d'injection de $(H^1(\Omega) \hookrightarrow (L^4(\Omega)^2$ alors:

$$| I_{n,2}(t) | \leq C_8 \| v_n \|^2_{V(\Omega)} . \| z \|_{(L^4(\Omega\setminus\Omega_n))^2}.$$

et si l'on se référe à la démonstration de la proposition 6.3.1, il vient :

$$\| v_n \|^2_{(H^1(\Omega)^2} \leq \|\theta_n\|^2_{H^2(\Omega} \leq c_4(\|u_0\|^2_{V(\Omega)} + \|f\|^2_{Y(\Omega)})$$

ainsi en remarquant que :

$$\|z\|_{(L^4(\Omega\setminus\Omega_n))^2} \leq (mes(\Omega\setminus\Omega_n))^{\frac{1}{4}}.\|z\|_{(L^\infty(\Omega))^2};$$

on peut conclure que $I_{n,2}(t)$ tend vers 0 presque partout sur (0,T).
En conclusion, on peut affirmer que $B_n(t)$ tend vers 0 presque partout sur (0,T) quand n tend vers $+\infty$.

-2- De plus, au vu des estimations faites sur $I_{n,1}(t)$ et $I_{n,2}(t)$, il est tout à fait clair que la sous suite $(B_n(t))_{n\in N}$ est bornée indépendamment de n dans $L^2(0,T)$. En vertu de la proposition 6.2.7 :

$$B_n(t) \text{ tend vers 0 dans } L^2(0,T) \text{ faible}$$

et donc

$$b(u_n,u_n,z_n) \text{ tend vers } b(v,v,z) \text{ dans } L^1(0,T) \text{ faible}$$

Lemme 6.3.5:
On a :

$$< f_n,z_n >_{0,\Omega_n} \text{ converge vers } < f,z >_{0,\Omega} \text{ dans } L^1(0,T) \text{ faible}$$

Preuve :
On pose $F_n(t) =< f_n,z_n >_{0,\Omega_n} -< f,z >_{0,\Omega}$

-1- On commence d'abord par montrer que :

$$F_n(t) \text{ tend vers 0 presque partout sur } (0,T).$$

En effet :

$$F_n(t) =< f_n, z_n - z >_{0,\Omega_n} \quad -< f, z >_{0,\Omega\setminus\Omega_n}$$

du fait que f_n et f coincident sur Ω_n. Ainsi :

$$| \ F_n(t) \ | \leq \| \ f \ \|_{0,\Omega_n} \ .(\| \ z_n - z \ \|_{0,\Omega_n} \ + \| \ z \ \|_{0,\Omega\setminus\Omega_n}$$

par référence à la démonstration du lemme 6.3.3 (partie -1-(i)) :

$$\| \ z_n - z \ \|_{0,\Omega_n} \ \text{tend vers 0 ,}$$

de plus, comme $z \in V(\Omega)$:

$$\| \ z \ \|_{0,\Omega\setminus\Omega_n} \ \leq \ mes(\Omega\setminus\Omega_n))^{\frac{1}{4}} . \| \ z \ \|_{(L^4(\Omega))^2}$$

par suite, on peut affirmer que $F_n(t)$ tend vers 0 presque partout sur $(0,T)$ quand n tend vers $+\infty$.

-2- Par ailleurs, les estimations faites sur $F_n(t)$ impliquent que :

$$\| \ F_n(t) \ \|_{L^2(0,T)} \ \leq T. \| \ f \ \|_{0,\Omega} \ .(C_0 + C_{10}).$$

La sous suite $(F_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée indépendamment de n dans $L^2(0,T)$; en vertu de la proposition 6.2.7 on conclut que :

$$F_n(t) \text{ tend vers 0 } \ \text{dans} L^2(0,T) \text{ faible}$$

et donc

$$< f_n, z_n - z >_{0,\Omega_n} \ \text{ tend vers } \ < f, z >_{0,\Omega} \ \text{ dans } L^1(0,T) \text{ faible}$$

Lemme 6.3.6:
on a:

$$< u_n, z_n >_{0,\Omega_n} \ \text{ converge vers } \ < v, z >_{0,\Omega} \ \text{ dans } L^1(0,T) \text{ faible}$$

Preuve :
La démonstration de ce lemme, se fait exactement de la même manière que celle du lemme 6.3.3.

Lemme 6.3.7:
On a :

$$< u_{0,n}, z_n >_{0,\Omega_n} \ \text{ converge vers } \ < u_0, z >_{0,\Omega} \text{ dans } \mathbb{R}$$

Preuve :
On pose : $A_n =< u_0, z >_{0,\Omega} \ -< u_{0,n}, z_n >_{0,\Omega_n}$.
-1- On commence d'abord par écrire que :
$A_n =< u_0 - u_{0,n} , z >_{0,\Omega_n} \ +< u_0, z >_{0,\Omega\setminus\Omega_n} \ +< u_{0,n}, z - z_n >_{0,\Omega_n}$
(i) En ce qui concerne $< u_0 - u_{0,n} , z >_{0,\Omega_n}$ on a :

$$|< u_0 - u_{0,n} \ , z >_{0,\Omega_n} \ | \leq \| \ z \ \|_{0,\Omega} \ . \| \ u_0 - u_{0,n} \ \|_{0,\Omega_n}$$

on montre aisément que $\| \ u_0 - u_{0,n} \ \|_{0,\Omega_n}$ tend vers 0, exactement comme on l'a fait pour $\| \ z - z_n \ \|_{0,\Omega_n}$ dans la démonstration du lemme 6.3.3.
Par suite $< u_0 - u_{0,n} \ , z >_{0,\Omega_n}$ tend vers 0.

(ii) En ce qui concerne $< u_0 \ , z >_{0,\Omega \setminus \Omega_n}$ on a :

$$|< u_0 \ , z >_{0,\Omega \setminus \Omega_n} \ | \leq \| \ u_0 \ \|_{0,\Omega} \ . \| \ z \ \|_{0,\Omega \setminus \Omega_n}$$
$$\leq \| \ u_0 \ \|_{0,\Omega} \ . \| \ z \ \|_{(L^4(\Omega))^2} \ . (mes(\Omega \setminus \Omega_n))^{\frac{1}{4}}$$

par conséquent

$$< u_0 \ , z >_{0,\Omega \setminus \Omega_n} \text{ tend vers 0.}$$

(iii) En ce qui concerne $< u_{0,n}, z - z_n >_{0,\Omega_n}$ on a :

$$|< u_{0,n}, z - z_n >_{0,\Omega_n} \ | \leq \| \ u_{0,n} \ \|_{0,\Omega_n} \ . \| \ z - z_n \ \|_{0,\Omega_n}$$

d'après la remarque 6.3.1 il vient que:

$$< u_{0,n}, z - z_n >_{0,\Omega_n} \ | \leq (1 + C_2)^{\frac{1}{2}} \ \| \ u_0 \ \|_{V(\Omega)} \ \| \ z - z_n \ \|_{0,\Omega_n}$$

Comme il a été démontré au lemme 6.3.3 que $\| \ z - z_n \ \|_{0,\Omega_n}$ tend vers 0, on conclut que:

$$< u_{0,n}, z - z_n >_{0,\Omega_n} \quad \text{tend vers 0.}$$

De (i), (ii) et (iii) on peut affirmer que A_n tend vers 0 dans $\mathbb{R}$.

Théorème 6.3.1:
Soit $u_0 \in V(\Omega)$ et $f \in Y(\Omega)$ tels que $(\nabla \Lambda u_0) \in L^\infty(\Omega)$ et $(\nabla \Lambda f) \in L^\infty(Q_T)$ alors le problème:

$$\begin{cases} Trouver \ v \ \in \ L^2((0,T);V(\Omega)) \ \ tel \ que : \ (v)'_t \ \in \ L^2((0,T);V'(\Omega)) \\ \quad \begin{cases} < (v)'_t \ , \ z >_{V' \times V} \ + b(v,v,z) \ =< f, z >_{L^2} \ , \ \ \forall \ z \in V(\Omega) \\ \quad v(0) \ = \ u_0 \qquad\qquad\qquad\qquad dans \ \ \Omega \end{cases} \end{cases}$$

admet au moins une solution dans $L^\infty((0,T); \ V(\Omega))$, obtenue comme valeur d'adhérence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie dans notations 6.3.1.

Preuve:
Elle se fait en deux étapes:
Etape 1: Montrons que la limite de la sous suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la remarque 6.3.2., qu'on a désignée par v, vérifie l'équation:

$$< (v)'_t, z >_{V' \times V} \ + b(v,v,z) \ =< f, z >_{L^2(\Omega)} \ , \ \forall \ z \in V(\Omega)$$

Soit donc z un élèment quelconque de $V(\Omega)$, on définit alors z_n comme dans la remarque 6.3.3. On revient à u_n solution faible de l'équation d'Euler dans le polygone plan convexe Ω_n:

$$< (u_n)'_t, z_n >_{V' \times V} + b(u_n, u_n, z_n) = \ < f_n, z_n >_{L^2}$$

En vertu des lemmes 6.3.3, 6.3.4 et 6.3.5 on peut conclure :
i- $< (u_n)'_t, z_n >_{V' \times V}$ tend vers $< (v)'_t, z >_{V' \times V}$ dans $L^1(0,T)$ faible,
ii- $b(u_n, u_n, z_n)$ tend vers $b(v, v, z)$ dans $L^1(0,T)$ faible,
iii- $< f_n, z_n >_{L^2(\Omega_n)}$ tend vers $< f, z >_{L^2(\Omega)}$ dans $L^1(0,T)$ faible.
d'où le résultat.

Etape 2: Il nous reste à prouver que $v(0)$ existe, et que $v(0) = u_0$.
1) Comme $v \in L^2((0,T);(L^2(\Omega))^2)$ et que $(v)'_t \in L^2((0,T);(L^2(\Omega))^2)$ en vertu de la première étape de la démonstration de la proposition 6.3.2, alors $v \in H^1((0,T);(L^2(\Omega))^2)$ qui prouve que $v(0)$ existe.

2) Revenons une fois encore à l'équation vérifiée par u_n:

$$< (u_n)'_t, w >_{V' \times V} + b(u_n, u_n, w) = \ < f_n, w >_{0,\Omega_n} \ , \ \forall \ w \in V(\Omega_n)$$

Puisque $(u_n)'_t \in L^2((0,T);(L^2(\Omega_n))^2)$ alors:

$$< (u_n)'_t, w >_{0,\Omega_n} + b(u_n, u_n, w) = \ < f_n, w >_{0,\Omega_n} \ , \ \forall w \in V(\Omega_n)$$

.

Comme de plus les injections:

$$V(\Omega_n) \hookrightarrow H(\Omega_n) \hookrightarrow V'(\Omega_n)$$

sont continues, avec densité (Cf [5]), on peut affirmer (Cf [57]), au vu des propriétés de u_n que:

$$< (u_n)'_t, w >_{0,\Omega_n} \ = \frac{d}{dt}(< u_n, w >_{0,\Omega_n} \ )$$

ainsi:

$$\frac{d}{dt}(< u_n, w >_{0,\Omega_n} \ ) + b(u_n, u_n, w) =< f_n, w >_{0,\Omega_n} \ , \ \forall w \in V(\Omega_n)$$

En particulier si $w = z_n$, on aura:

$$\frac{d}{dt}(< u_n, z_n >_{0,\Omega_n} \ ) + b(u_n, u_n, z_n) =< f_n, z_n >_{0,\Omega_n}$$

Soit à présent Ψ une fonction de $\mathcal{C}^1((0,T);\mathbb{R})$ telle que $\Psi(T) = 0$, on aura:

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(< u_n, z_n >_{0,\Omega_n})\Psi(t)dt + \int_0^T b(u_n, u_n, z_n)\Psi(t)dt = \int_0^T (< f_n, z_n >_{0,\Omega_n})\Psi(t)dt$$

En vertu du fait que Ψ et $< u_n, z_n >_{0,\Omega_n}$ appartiennent à $H^1((0,T))$, l'application de la formule de Green (Cf [52]), donne:

$$-\int_0^T (< u_n, z_n >_{0,\Omega_n})\Psi'(t)dt + \int_0^T b(u_n, u_n, z_n)\Psi(t)dt$$

$$= \int_0^T (< f_n, z_n >_{0,\Omega_n})\Psi(t)dt - \Psi(0) < u_n(0), z_n >_{0,\Omega_n}$$

Au vu des lemmes 6.3.4, 6.3.5, 6.3.6 et 6.3.7 il vient que :

$$-\int_0^T (< v, z >_{0,\Omega})\Psi'(t)dt + \int_0^T b(v, v, z)\Psi(t)dt =$$

$$\int_0^T (< f, z >_{0,\Omega})\Psi(t)dt - \Psi(0) < u_0, z >_{0,\Omega}$$

Ψ et $< v, z >_{0,\Omega}$ étant dans $H^1((0,T))$, l'application de la formule de Green entraine:

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(< v, z >_{0,\Omega})\Psi(t)dt + \int_0^T b(v, v, z)\Psi(t)dt$$

$$= \int_0^T (< f, z >_{0,\Omega})\Psi(t)dt + \Psi(0) < v(0) - u_0, z >_{0,\Omega}$$

Comme v est solution de :

$$< (v)'_t, z >_{0,\Omega} + b(v, v, z) =< f, z >_{0,\Omega} \ , \ \forall\, z \in V(\Omega)$$

on peut, comme précédemment montrer que v vérifie:

$$\frac{d}{dt} < v,z >_{0,\Omega} + b(v,v,z) =< f,z >_{0,\Omega} \quad \forall\, z \in V(\Omega)$$

d'où:

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(< v,z >_{0,\Omega})\Psi(t)dt + \int_0^T b(v,v,z)\Psi(t)dt = \int_0^T (< f,z >_{0,\Omega})\Psi(t)dt$$

Par conséquent:

$$\Psi(0) < v(0) - u_0, z >_{0,\Omega} = 0 \quad \forall\, z \in V(\Omega)$$

Dans le cas particulier où $\Psi(0) = 1$, on aura:

$$< v(0) - u_0, z >_{0,\Omega} = 0 \quad \forall\, z \in V(\Omega)$$

Sachant que $V(\Omega)$ est dense dans $H(\Omega)$, on peut conclure que :

$$v(0) - u_0 = 0$$

Conclusion:

Comme on peut le voir, il nous a été possible de prouver l'existence d'une solution faible pour l'équation d'Euler dans un convexe plan avec des données à régularité minimale. Concernant l'unicité de la solution, les techniques connues permettant d'établir l'unicité nécessitent une régularité de la solution dont on ne dispose pas dans notre cas: il y a un seuil de régularité de la solution qu'on ne peut pas dépasser même pour des données très régulières (Cf proposition 6.2.6). Cela est dû au fait que le domaine est lipschitzien. La question de l'unicité reste donc ouverte.

Conclusion et perspectives:

La dépendance de l'erreur de l'approximation des intégrales multiples par les méthodes classiques de l'analyse numérique a poussé certains auteurs à parler de ' malédiction des méthodes quadratiques'. Les résultats originaux basés sur les courbes a-denses présentés dans cette thèse permettent de calculer des intégrales mutiples par des intégrales simples; l'erreur qui en découle étant indépendante de la dimension de l'espace. La souplesse liée à cette méthode a permis d'approcher des intégrales multiples par des intégrales simples de fonctions périodiques et d'adapter ensuite les méthodes du trapèze généralisée et de Filon à ce type d'intégrales.

Les problèmes de l'optimisation globale en plusieurs dimensions ont pu être également traités. En les transformant en problèmes d'optimisation globale de fonctions d'une seule variable, il nous a été possible d'utiliser la transformation de Legendre Fenchel et les méthodes de Monte Carlo pour les traiter. La combinaison des méthodes des courbes α-denses et de Monte Carlo a donné de meilleurs résultats que la méthode de Monte Carlo aussi bien pour le calcul d'intégrales multiples que pour les problèmes d'optimisation globale.

Il ressort de tout ce qui a été décrit dans cette thèse que l'application des courbes a-denses au calcul d'intégrales multiples et aux problèmes de l'optimisation globale, est un moyen efficace. Signalons cependant une difficulté majeure liée à cette technique: les fonctions d'une seule variable obtenue par réduction de la dimension sont de type oscillatoire. Il sera judicieux, pour le plein essor de cette méthode, d'adapter les techniques existantes ou d'en developper de nouvelles pour le calcul aussi bien d'intégrales simples de fonctions oscillatoires que de l'optimum de telles fonctions.

Comme on a pu le voir, il nous a été possible de prouver l'existence d'une solution faible pour l'équation d'Euler dans un convexe plan avec des données à régularité minimale. Concernant l'unicité de la solution, les techniques connues permettant d'établir l'unicité nécessitent une régularité de la solution dont on ne dispose pas dans notre cas: il y a un seuil de régularité de la solution qu'on ne peut pas dépasser même pour des données très régulières. Cela est dû au fait que le domaine est lipschitzien. La question de l'unicité reste donc ouverte.

BIBLIOGRAPHIE:

[1]-Abbaoui, K.," Les fondements mathématiques de la méthode décompositionnelle d'Adomian et application à la résolution de problèmes issus de la biologie et de la médecine", Thèse de l'Université Paris VI, 4-10-1995.

[2]-Adomian,G.,"Solving frontier problems of physics: the decompositionnelle method", Kluwer Acad. Pub. (1994).

[3]-Ammar, H., Cherruault,Y., " Approximation of a several variables function by a one variable function and application to global optimization", Math. Comput. Modelling, Vol. 18, N^0. 2, pp. 17-21, (1993).

[4]-Bardos, C., "Existence et unicité de l'équation d'Euler en dimension deux.", J. Math. Anal. Appl.; Vol 40 (1972), 769-790.

[5]- Benabidallah, A., "Existence d'une solution faible de l'équation d'Euler dans un polygone plan convexe.", Thèse de magister de l'U.S.T.H.B.,(1981)

[6]-Benabidallah, A., Cherruault,Y., tourbier, Y., Mora, G.,"Approximation of multiple integrals by simple integrals", Kybernetes Vol. 30 N^0.9/10, (2001).

[7]-Benabidallah, A., Cherruault,Y., Mora, G.,"Approximation of multiple integrals by length of α-dense curves", Kybernetes Vol.31, N^0.7/8 pp. 1133-1147, (2002).

[8]-Benabidallah, A., Cherruault,Y., tourbier, Y.," Approximation method error of multiple integrals by simple integrals", Kybernetes Vol. 32 N^0.3, pp.343-353, (2003).

[9]-Benabidallah, A., Cherruault,Y., Mora, G.,"Approximation of multiple integrals by simple integrals involving periodic functions", To appear in Kybernetes.

[10]-Benabidallah, A., Cherruault,"Global optimisation via a-dense curves", To appear in Kybernetes.

11]-Bendiab, O., Cherruault, Y., "A new method for global optimization", Int. J.of Biomed.Comp.38, p.177-180, (1995);

[12]-Bourbaki,N.,"Elèments de mathématiques:Fascicule XIII-'Intégration', Chapitre 1, 2, 3, 4, Hermann, (1973).

[13]-Bourbaki,N.,"Elèments de mathématiques:Fascicule XXI-'Intégration', Chapitre 5, Hermann, (1967).

[14]-Brenier, Y., " Un algorithme rapide pour le calcul de transformées de Legendre-Fenchel discrètes", C.R.A.S., Paris, Tome 308, Série I, pp. 587-589, (1989).

[15]-Cea, J., "Optimisation: Théorie et algorithmes", Dunod, 1968.

[16]-Chenais, D., "Un résultat d'existence dans un problème d'identification de domaines", J. Math. Anal. Appl.; N° 2, (1975), 189-219.

[17]-Cherruault, Y., " Modèles et méthodes mathématiques pour les sciences du vivant", P.U.F. (1998).

[18]-Cherruault, Y.," Optimisation: Méthodes locales et globales", P.U.F. (1999).

[19]-Cherruault, Y.," Convergence of Adomian method", Kybernetes, Vol. 18, N^0.2, p. 31-38, (1989).

[20]-Cherruault, Y.," Convergence of decomposition methods and appli-

cation to biological systems", Int.J. of Biomed.Comp.36, p. 193-197, (1994).
[21]-Cherruault, Y.," New deterministic methods for global optimization and application to biomedecine", Int.J. of Biomed.Comp.27, p. 215-229, (1991).
[22]-Cherruault, Y.," Méthodes pour le contrôle optimal de systèmes biologiques", Journées MEDIMAT, (1994).
[23]-Cherruault,Y., "Global optimization in biology and medecine", Math. Comp.Modelling, Vol. 20, N^0. 6, pp. 119-132, (1994).
[24]-Cherruault,Y., Mora,G., Tourbier,Y., "A new method for calculating multiple integrals", Kybernetes Vol. 31 , N^0. 1, pp. 124-129, (2002).
[25]-Cherruault,Y., Guillez, A., "Quelques méthodes numériques pour la résolution d'équations intégrales non linéaires", Note aux C.R.A.S., (1980).
[26]- Corrias, L., "Fast Legendre -Fenchel transform and applications to Hamilton-Jacobi equations", Siam J.Numer.Anal., Vol 33, pp. 1534-1558, (1996).
[27]-Coulibaly, I., " Contributions à l'analyse numérique des méthodes quasi-Monte Carlo", Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1, (1997).
[28]-Davis, P.J., Rabinowitz, P., "Method of numerical integration", Academic Press. New-York, San-Francisco, London, (1975).
[29]-Decker,K.M., "The Monte Carlo Method: Theory and Application", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 89: pp. 463-483, (1991).
[30]-Demidovitch,B., Maron, S., " Elements de calcul numérique", Edition Mir, Moscou, (1973).
[31]-Dieudonne,J., " Elements d'analyse", tome 2, Gauthiers-Villars,Paris.
[32]-Einarson, B., "Numerical calculation of Fourier integrals with cubic splines", B.I.T., Numerical mathematics, 8, pp. 279-286, (1968).
[33]-Flinn,E.A., "A modification of Filon's method of numerical integration", J.A.C.M. 7, pp. 181-184, (1960).
[34]-Grisvard, P.,"Alternative de Freedholm relatrive au problème de Dirichlet dans un polygone ou polyhèdre", Boll. Unio. Math. Ita; N° 5 (1972); 132-164.
[35]-Havie, T., "Error derivation in Romberg integration", B.I.T., Numerical Mathematics.12, pp. 516-527, (1972).
[36]-Hiriart-Urruty, J.B., Lemarechal, C., "Convex analysis and minimization algorithms", A series of comprehensive studies in mathematics, Springer Verlag, Berlin, (1993).
[37]-Kato, T., "on classical solutions of the two dimensional non-stationary Euler equation" , Arch.Rational Mech. Anal.; N° 25 (1967), 188-200.
[38]-Khelifa, S., "Existence, unicité, et approximation de la solution faible de l'équation d'Euler dans un carré ", Thèse de magister de l'U.S.T.H.B., (1981)
[39]-Khelifa, S., Benabidallah, A., Moussaoui, M.A., " Sur l'écoulement d'un fluide parfait incompressible dans des domaines non réguliers du plan", Maghreb Math. Rev., Vol. 11, N° 2, Dec. 2002., pp. 197-221.

[40]-Ladyzenskaia, O.A., Uralceva, "Equations aux dérivées partielles de type elliptique", Dunod, 1969.
[41]-Lions, J.L., "Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires", Dunod-Gauthier-Villard, 1969.
[42]-Lucet, Y.,"A fast computional algorithm for Legendre-Fenchel transform", Comp.Opt. and Applic. Vol. 6, pp. 27-57, (1996).
[43]-Lucet, Y., "Faster than the fast Legendre transform, the linear time Legendre transform", Numerical Algorithm, Vol. 16, pp. 171-185, (1997).
[44]-Luke, Y., " The special functions and their approximation", Vol. II, Academic Press, New-York, (1969).
[45]-Melnik, K.N., Melnik, R.V.N., "Optimal by order quadrature formulae for fast oscillatory functions with inaccurately given a priori information", J.Comput.Appl.Math.110, N^0. 1, pp. 45-72, (1999).
[46]-Mora, G., Cherruault,Y., Benabidallah, A., tourbier, Y., " Approximating multiple integrals via α-dense curves", Kybernetes Vol.31 N^0.2, pp.292-304, (2002).
[47]-Mora, G., Cherruault,Y.,"Characterisation and generation of α-dense curves", Computers Math.Applic.,Vol. 33, N^0. 9, pp. 83-91, (1997).
[48]-Mora, G., Cherruault,Y., "The theoretic calculation time associated to α-dense curves", Kybernetes Vol.27 N^0.8/9, pp. 919-939, (1998).
[49]-Mora, G., Cherruault,Y., " An approximation method for the optimization of continuous functions of n variables by densifying their domains", Kybernetes Vol.28 N^0.2, pp. 164-180, (1999).
[50]-Moussaoui, M. A., "Régularité de la solution d'un problème à dérivée oblique", C.R.A.S. Paris, Tome 279 (16 décembre 1974), série A (1974), 869-872.
[51]-Moussaoui, M. A., "Etude dans les espaces de holder de problèmes aux limites elliptiques dans un secteur plan, et dans les espaces de Sobolev d'un problème à dérivée oblique dans un polygone plan", Thèse de doctorat es-sciences de l'Université de Nice , (1977).
[52]-Necas, J., "Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques", Masson et Cie, 1967.
[53]-Novak, E., "Is there a curse of dimension for integration?", Eleventh International Conference on Domain Décomposition Methods.
[54]-Ralston, A., Rabinowitz, P., "A First Curse In Numerical Analysis", MacGraw-Hill.
[55]-Rockafellar, R.T., "Convex analysis", Princeton University, (1970).
[56]-Stampacchia, G., "Problèmes elliptiques du second ordre à coefficients discontinus", Presses de l'Université de Montréal, 1965.
[57]-Temam, R., "Navier-Stokes equations", North Holland, 1975.
[58]-Tuffin,B.,"Simulation accélérée par les méthodes Monte Carlo et quasi Monte Carlo: théorie et applications", Thèse de l'Université Rennes 1, (1997).
[59]-Vo-Khac-Khoan, "Distributions-Analyse de Fourier-Opérateurs aux dérivées partielles",
[60]-Yudovich , V.I.," Non-stationary flow of an ideal incompressible liquid", Z.Vycish.Mat.i Fiz,Tom.3, N° 6 (1363), 1032-1066.
[61]-Ziadi, A., Cherruault,Y., "Generation of α-dense curves and application to global optimization", Kybernetes Vol. 29 N^0.1, pp. 71-82,

(2000).
[62]-Ziadi, A., Cherruault,Y., "Generation of α-dense curves in a cube of $\mathbb{R}^n$", Kybernetes Vol. 27 N^0.4, pp. 416-425, (1998).
[63]-Ziadi, A., Cherruault,Y., Mora, G.,"Global optimization, a new variant of the Alienor Method ", Comp. Math. with Applic. Vol. 41 N^0. 1/2, pp. 63-71, (2001).
[64]-Ziadi, A., Cherruault,Y., Mora, G., "The existence of α-dense curves with minimal length in a metric space", Kybernetes Vol. 29 N^0.1, 2, (2000).
[65]-Ziadi, A., "Optimisation globale: Contribution à l'étude de la méthode de la transformation réductrice Alienor"
Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Setif, (2000).
[66]-Kantorovich, L.V, Akilov, G.P.,"Fonctional analysis in normed spaces", International monograph in Pure and Applied Mathematics, Volume 48. (1964)