N° d'ordre : 07/2005-E/MT

جامعة هواري بومدين للعلوم والتكنولوجيا
U S T H B

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE

FACULTE DES MATHEMATIQUES

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat D'Etat en Mathématiques

Spécialité : Analyse : Equations aux dérivées partielles

par : Amor KESSAB

THEMES

1/ Propagation des singularités pour des équations aux dérivées partielles à caractéristiques involutives multiples.

1/ Régularité Gevrey pour des équations gouvernant le mouvement d'un fluide micropolaire incompressible.

Soutenu le 21 /06/2005 devant le jury suivant :

M. ***R.Bebbouchi,*** professeur, U.S.T.H.B. Président.
M. ***A.Abid***, maître de conférences, U.S.T.H.B. Directeur de thèse.
M. ***Dj.Teniou***, professeur , U.S.T.H.B. Examinateur.
M. ***A.Boulkhemair***, professeur , Univ.de NANTES. Examinateur.
M. ***C. Bouzar***, professeur , Univ.Oran-Essenia. Examinateur.
M. ***A. Affane***, maître de conférences, U.ST.H.B. Examinateur.
.

Avant propos ,

Cette thèse n'a pu voir le jour sans douleurs pour un tas de raisons qu'il serait indécent de citer et pour un tas d'autres raisons qui tiennent plus à mon dévouement total à l'enseignement et à mon engagement à la postgraduation qu'à autre chose. IL faut avouer aussi que le métier que je pratique est difficile d'autant plus que j'ai mené cet humble travail en solitaire et j'ai bien conscience que je ne suis certainement pas allé au bout de mes efforts mais j'ai réalisé des idées auquelles j'ai toujours cru malgré l'adversité.Néanmois , l'ingratitude est une mauvaise compagnie et je dois remercier vivement les Prs.R.Bebbouchi d'avoir accepté sans hésitation aucune de présider ce jury, M.Abid de m'avoir "filé" les équations de "A.C.Eringen ", C.Bouzar et A.Boulkhemair de me faire l'honneur d'examiner cette thèse ainsi que Mr.A.Affane. Mais je me dois d'adresser des remerciements particulièrs au Pr.D.Teniou qui m'a toujours accordé tacitement son respect et sa confiance. Ses plusieurs lectures-remarques justes et pertinentes ont permis surtout à la seconde partie de prendre forme . Je n'omettrai pas de remercier ici tous les collègues qui m'ont toujours soutenu ainsi que mes anciens élèves qui, pour la plupart , sont aujourd'hui des collègues.
Mes excuses vont à mes enfants Zaki, Réda et Kami qui ont dû ces derniers temps souquer ferme et subir mes colères intempestives!

TABLE DES MATIERES.

PREMIERE PARTIE.

PROPAGATION DES SINGULARITES GEVREY POUR DES OPERATEURS A CARACTERISTIQUES INVOLUTIVES MULTIPLES.

Défiez-vous des ensorcellements et des attraits diaboliques de la géometrie.

Fénelon.

Il est connu aujourd'hui que la classe de Gevrey $G^s, 1 \leq s \leq \infty$, joue un rôle important dans la théorie des EDP comme une classe intermediaire entre le C^∞ et l'analytique. En effet certaines propriétés (régularité,singularités,hypoellipticité..) d'opérateurs differentiels (pseudo-differentiels) dans le cadre analytique ne sont plus vérifiées dans le cadre C^∞. Il est alors naturel d'étudier le comportement d'un opérateur differentiel (pseudo-defferentiel) dans la classe G^sd'autant plus qu'il a été prouvé que dans certaines situations, les singularités ne peuvent être que Gevrey. Nous montrons dans cette partie un résultat de propagation Gevrey en utilisant les outils de l'analyse microlocale et la théorie des opérateurs pseudo-differentiels analytiques.

.

1.Introduction :

L'objet de ce travail est d'étendre à la régularité Gevrey un résultat de J.M.Bony et P.Schapira [3] généralisé plus tard par J.M.Bony [2] sur la régularité analytique.Nous rappelons ce résultat. Soient P un opérateur différentiel à coefficients analytiques définis sur un ouvert $X \subset \mathbb{R}^n$d'ordre ν, p_ν son symbôle principal et V sa variété caractéristique :

$$V = \{(x,\xi) \in X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \,/\, p_\nu(x,\xi) = 0\}.$$

On fait sur P les hypothèses suivantes :

(1) V est une sous-variété involutive , réelle analytique de codimension d et la restrisction de la $1-$forme canonique $\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i dx_i$ à V est non nulle. Cette condition signifie que si $u_1(x,\xi),...,u_d(x,\xi)$ sont des fonctions réelles analytiques sur V ,homgènes de dégré 1 et dont les différentielles sont linéairement indépendantes sur V on :$\{u_i,u_j\} = 0$ sur V et $du_1,...,du_d$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i dx_i$ sont linéairement indépendantes sur V. V est alors feuilletée par les $d-$variétés integrales des champs Hamiltoniens H_{u_j} , $1 \leq j \leq d$. Ce sont ces $d-$feuilles qu'on appelle feuilles bicaractéristiques .

(2) p_ν s'annule exactement à l'ordre $m \geq 1$ sur V.

Cela veut dire que pour tout point (x,ξ) de V et tout vecteur $(\widetilde{x},\widetilde{\xi})$ transverse à V , il existe un réel a non nul tel que:

$$p_\nu(x+\varepsilon\widetilde{x},\xi+\varepsilon\widetilde{\xi}) = a.\varepsilon^m + o(\varepsilon^m) \text{ (voir [1] , [3]).}$$

Théorème 1.1 :(J.M.Bony-P.Schapira [3]).

On suppose que P verifie (1) et (2) . Soit $u \in D'(X)$. Alors :

$$WF_a(u)\backslash WF_a(Pu) \text{ est réunion des feuilles bicaractéristiques.}$$

Ici $WF_a(u)$ désigne le front d'onde analytique.

Plus tard J.M.Bony [2] a généralisé le théorème 1.1 pour un opérateur non-micro--caractéristique suivant une direction dont le symbole principal s'annule à l'ordre $m \geq 1$. Dans le cadre Gevrey , nous prouvons le résultat suivant : Soit $\rho \in V$ et Γ_ρ la feuille bicaractéristique de V passant par ρ. On suppose que X contient 0.

(3) On suppose en outre que p_ν s'annule exactement à l'ordre $m \geq 1$ sur V prés de chaque point de Γ_ρ c'est à dire que pour chaque point (x_0, ξ^0) de Γ_ρ il existe un voisinage U de (x_0, ξ^0) et une constante positive C verifiant :

$$\frac{1}{C}\left\{d_V(x,\xi)\right\}^m \leq |p_\nu(x,\xi)| \leq C\left\{d_V(x,\xi)\right\}^m \ , \ (x,\xi) \in U$$

$d_V(x,\xi)$ désigne la distance Euclidienne du point (x,ξ) à V.

On suppose enfin que P verifie la condition suivante , dite condition de Levy d'ordre s_0, $s_0 \in [1, m[$:

(4) $$P = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha U^\alpha \ , \ U^\alpha = U_1^{\alpha_1} ... U_d^{\alpha_d}$$

où A_α est un opérateur pseudodifférentiel analytique d'ordre inférieuer ou égal à :

$$\nu - m + (s_0 - 1).\frac{m - |\alpha|}{s_0}$$

et U_j , $1 \leq j \leq d$, un opérateur pseudodifferentiel analytique dont le symbole principal est $u_j(x,\xi)$. Remarquons que si $s_0 = 1$, on retrouve ce que l'on appelle la condition de Levy usuelle ([2] et [16]) et que la condition (4) telle qu'elle est écrite est énoncée , est écrite de façon invariante. Nous verrons plus loin que (4) est en faite une condition sur les termes d'ordre inferieur de P. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.2 : Soit $s \in \left]1, \frac{s_0}{s_0 - 1}\right[$ .On suppose que P verifie (1) , (3) et (4) . Si $u \in D'(X)$ est telle que $\Gamma_\rho \cap WF_G^s(P^* u) = \emptyset$, alors :

ou bien $\Gamma_\rho \subset WF_G^s(u)$ ou bien $\Gamma_\rho \cap WF_G^s(u) = \emptyset$.

Ici WF_G^s désigne le front d'onde Gevrey d'ordre s .(voir L.Hormander [7],O.Liess [10],[14] et paragraphe 2 de ce même travail).

Exemples :

1/ Soit $P(x, t, \dfrac{\partial}{\partial x})$ un opérateur differentiel sur $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t^p$ qui pour chaque t fixé est elliptique en x.

Le front d'onde de u, de $Pu = 0$, se propage le long des feuilles définies par :

$$\xi = 0, \ t = cste \ , \tau = cste.$$

2/ Soient $(P_i)_{i=1,...r.}$ des opérateurs differentiels de même ordre et de partie principale réelle.

Soit $P\ :\ P=\sum_{i=1}^{r} P_i^{2m}+Q$, Q d'ordre inferieur.

On suppose que les dP_i et la 1-forme canonique sont linéairement indépendants et que les crochets $\{P_i,P_j\}$ sont nuls sur $V=\{(x,\xi)/p_i(x,\xi)=0,\forall i\}$.

Il y a propagation des singularités Gevrey le long des $r-$feuilles de $Pu=0$.

Remarque 1.3 :

a/ Dans le cadre analytique , c'est à dire $s=1$, bien entendu il n'y a pas de condition sur les termes d'ordre inferieur de l'opérateur P , cas traité dans une plus grande généralité par N.Hanges-J.Sjostrand [5] dont nous suivant la méthode lorsque $s>1$.

b/ Sans la condition (4) on a seulement :

Théorème 1.4 : Soit $s\in\left]1,\frac{m}{m-1}\right[$.

Soient P ,V , Γ_ρ verifiant (1) et (3) et $u\in D'(X)$ telle que :

$$\Gamma_\rho\cap WF_G^s(P^*u)=\emptyset \text{ alors :}$$

$$\text{ou bien } \Gamma_\rho\subset WF_G^s(u) \text{ ou bien } \Gamma_\rho\cap WF_G^s(u)=\emptyset.$$

Ce dernier résultat a été prouvé dans un précédent travail (A.Kessab [7]) dans le cas particulier :

$$V=\left\{(x,\xi)\in T^*X\backslash\{0\}\,/\,\xi^{''}=0\right\}\ o\grave{u}\ \xi=(\xi^{'},\xi^{''})\ ,\xi^{''}\in\mathbb{R}^d.$$

c/ Si P verifie (3) , P^* verifie aussi la même condition et l'on peut remplacer P^* par P,dans le théorème 1.4.

d/ Si $m=1$, on pose $\frac{m}{m-1}=\infty$. En particulier on sait déjà que la partie de $WF_G^s(u)\backslash WF_G^s(Pu)$ où $\frac{\partial p_\nu}{\partial x}=0$ est invariante sous le flot Hamiltonien de p_ν (voir L.Hormander [7]).

Dans la partie 2 nous énonçons les notations et rappelons certaines définitions et notions utilisées.Nous rappelons dans la partie 3 quelques notions de geometrie symplectique. Dans la partie 4, on se ramène à :

$$V=\left\{(x,\xi)\in T^*X\backslash\{0\}\,/\,\xi^{''}=0\right\}$$

à l'aide d'opérateurs integraux de Fourier analytiques. Dans la partie 5, on montre que la condition de Levy permet de reprendre la méthode de [8] avec quelques modifications que l'on précisera .

2.Notations, définitions et rappels :

Définitions 2.1 :

a) Symboles : Soient $r \in \mathbb{R}$ et $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert.

On note Λ^r l'espace des fonctions $u(z,\lambda)$ définies sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$ et verifiant :

(i) $u(z,\lambda)$ est holomorphe en z , pour tout $\lambda > 0$.

(ii) Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$|u(z,\lambda)| \leq c.\lambda^r, \lambda \geq 1, z \in K.$$

On dira que $u(z,\lambda)$ est un symbole analytique d'ordre fini r.

b) Symboles analytiques classiques et réalisation de symboles analytiques classiques :

Soit $(a_k(.))_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω et telle que :

$\forall$ compact K de $\Omega, \exists C \geq 0$ satisfaisant :

$$|a_k(z)| \leq C^{k+1}.k^k \ , \ z \in K \ , k \in \mathbb{N}.$$

Un symbole analytique classique formel dans Ω d'ordre 0 est alors la donnée de la serie formelle :

$$\sum_{k\geq 0} a_k(z).\lambda^{-k}.$$

Soit maintenant Ω_1 relativement compact de Ω.Une fonction $a(z,\lambda)$ définie sur $\Omega_1 \times \mathbb{R}_+$ est une réalisation de $\sum\limits_{k\geq 0} a_k(z).\lambda^{-k}$ dans Ω_1 si $a(z,\lambda)$ est holomorphe en z et s'il existe $\varepsilon > 0$ telle que :

$$\left| a(z,\lambda) - \sum_{0\leq k\leq \lambda/eC} a_k(z).\lambda^{-k} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon}.e^{-\varepsilon\lambda} \ , \ \lambda \geq 1, z \in \Omega_1.$$

Ici C est une constante telle que : $|a_k(z)| \leq C^{k+1}.k^k$,sur Ω_1. Une réalisation est donc :

$$a(z,\lambda) = \sum_{0 \leq k \leq \lambda/eC} a_k(z).\lambda^{-k}.$$

<u>Définitions 2.2 </u>: Phase Gaussienne et résolution de l'identité .

Soit $(x_0, \xi^0) \in T^*\mathbb{R}^n$. Notons $\alpha = (\alpha_x, \alpha_\xi) \in \mathbb{C}^{2n}$.

Soit $\varphi(x,y,\alpha)$ une fonction analytique définie dans un voisinage complexe V du point réel (x_0, x_0, x_0, ξ^0) et verifiant :

(i) $\varphi = 0$ *et* $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \alpha_\xi$ *lorsque* $x = y = \alpha_x$.

(ii) *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour* (x,y,α) *réel on ait* :

$$Im\varphi(x,y,\alpha) \geq C.\left(|x-\alpha_x|^2 + |y-\alpha_x|^2\right).$$

Une telle fonction sera appelée phase Gaussienne et s'écrit :

$$\varphi(x,y,\alpha) = (x-y)\alpha_\xi + h(x,y,\alpha)$$

où $h(x,y,\alpha) = \bigcirc\left(|x-\alpha_x|^2 + |y-\alpha_x|^2\right)$ avec , pour (x,y,α) *réel* :

$$Imh(x,y,\alpha) \geq C.\left(|x-\alpha_x|^2 + |y-\alpha_x|^2\right).$$

Soient maintenant $W \subset\subset \mathbb{R}^{2n}$ un voisinage ouvert de (x_0, ξ^0) et φ une phase Gaussienne comme ci-dessus. Soit aussi a un symbole analytique classique sur $V \times \mathbb{R}_+$ avec $W \subset\subset \bigtriangledown V = \{(x,\xi)/(x,x,x,\xi) \in V\}$.

On considère une troncature χ : $\chi(x,y,\alpha) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{4n})$ égale à 1 prés de $\left\{x = y = \alpha_x/\alpha \in \overline{W}\right\}$.

On définit alors l'operateur pseudo-differentiel formel A par :

$$Au(x,\lambda) = \lambda^{\frac{3n}{2}} \iint e^{i\lambda\varphi(x,y,\alpha)}.a(x,y,\alpha,\lambda)u(y,\lambda)dyd\alpha$$

et sa “réalisation” A^W définie par :

$$A^W \;:\; D'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$A^W u(x,\lambda) = \lambda^{\frac{3n}{2}} \iint_{\alpha\in W} e^{i\lambda\varphi(x,y,\alpha)}.a(x,y,\alpha,\lambda)\chi(x,y,\alpha)u(y)dyd\alpha$$

On note $\sigma_A = e^{-i\lambda x\xi}A(e^{i\lambda(.)\xi})$ le symbole complet de l'operateur A. Si $\sigma_A = 1$ on dira que :

$$\pi_{\alpha,\lambda}(x,y) = \lambda^{\frac{3n}{2}} e^{i\lambda\varphi(x,y,\alpha)}.a(x,y,\alpha,\lambda)$$

est une "résolution" de l'identité et l'on écrira :

$$Iu(x,\lambda) = \iint \pi_{\alpha,\lambda}(x,y).u(y)dyd\alpha$$

pour dire que A est formellement l'identité et l'on a l'écriture évidente de I^W l'operateur réalisation correspondant à I. Notons aussi le résultat technique suivant : (voir [Sj]-15) Si P est un opérateur differentiel à coefficients analytiques, il existe un symbole analytique classique $\widetilde{a}\,(x,y,\alpha,\lambda)$ (réalisation) à valeurs dans les (2n-1) formes en α tel que:

$$\widetilde{\pi}_{\alpha,\lambda}(x,y) = e^{i\lambda\varphi(x,y,\alpha)}.\widetilde{a}(x,y,\alpha,\lambda).\chi(x,y,\alpha)\ verifie:$$

$$\left[P, I^W\right] = \int_{\alpha\in\partial W} \widetilde{\pi}_{\alpha,\lambda} + R_\lambda^{-\infty}.$$

ou l'on suppose ∂W au moins régulier par morceaux et où $R_\lambda^{-\infty}$ est un operateur régularisant dont le noyau est à décroissance exponentielle dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ uniformément en λ.

Si $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, on écrira alors :

$$(5) \qquad \left[P, I^W\right] u(x,\lambda) = \int_{\alpha\in\partial W} \widetilde{\pi}_{\alpha,\lambda} + \bigcirc(e^{-\delta\lambda}) = R^{\partial W}u(x,\lambda) + \bigcirc(e^{-\delta\lambda})$$

où $\bigcirc(e^{-\delta\lambda})$ est une fonction à décroissance exponentielle en λ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Définition 2.3 : Classe de Gevrey :

Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $G^s(\Omega)$ l'espace de Gevrey de classe $s \geq 1$ défini comme suit :

$$G^s(\Omega)=\begin{cases} f\in C^{\infty}(\Omega)/Pour\ tout\ compact\ K\ de\ \Omega\ il\ existe \\ \ une\ constante\ C=C(K)\ positive\ verifiant\ : \\ \qquad\qquad \underset{x\in K}{Sup}\,|D^{\alpha}f(x)|\leq C^{|\alpha|+1}.(\alpha!)^s. \end{cases}$$

<u>Exemples de fonctions Gevrey :</u>

1/ $\forall s\geq 2:\ u(x)=\begin{cases} e^{\dfrac{1}{1-s}.x^{1-s}} \ ,\ x\geq 0 \\ \quad 0\ ,\ x\leq 0\end{cases}$

$u\in G^{\rho}$ avec $\rho=\dfrac{s}{s-1}$.

2/ Soient $\frac{1}{2}\leq\rho\leq 1\ ,\ \rho_0\geq 1$.

$$u(x)=\int_{\rho_0}^{+\infty}e^{-\lambda^{\rho}+i\lambda x}d\lambda\ :\quad u\in G^{1/\rho}\ .$$

<u>Définition 2.4:</u> (Définition du front d'onde Gevrey).

a/ Soient X et Y deux ouverts de $\mathbb{R}^n$.

On note $H^r(X\times X\times Y)$ l'espace des fonctions $a(x,y,\xi,\lambda)$ définies sur $X\times X\times Y\times\mathbb{R}_+$,$C^{\infty}$ en (y,ξ) et telles que :

Pour tout compact K de $X\times X\times Y$ il existe une constante $C>0$ verifiant :

$$\forall\alpha\in\mathbb{N}^n:|D_x^{\alpha}a(x,y,\xi,\lambda)|\leq C^{|\alpha|+1}.\alpha!\lambda^r\ ,\ (x,y,\xi)\in K\ ,\ \lambda\geq 1.$$

Les éléments de H^r sont des vrais symboles analytiques d'ordre r en la variable x.

b/ Soit Y un ouvert , $Y\subset\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.

Soient $u\in\mathcal{E}'(X)\ ,\ (x_0,\xi^0)\in X\times Y$ et $a\in H^r$.

On dira que $(x_0,\xi^0)\notin WF_G^s u$ s'il existe un voisinage U de x_0 , un voisinage V de ξ^0et une constante positive ε telle que :

$$T_{\lambda}u(y,\xi)=\int e^{i\lambda\left\{(y-x)\xi+i\frac{\lambda^{\frac{1}{s}-1}}{2}(x-y)^2\right\}}.a(x,y,\xi,\lambda)u(x)dx=\bigcirc\left(e^{-\varepsilon\lambda^{\frac{1}{s}}}\right)$$

uniformément pour $(y,\xi)\in U\times V\ ,\ \lambda\geq 1$.

Proposition-Définition 2.5 :

Soit W_0 un petit voisinage de (x_0, ξ^0) et X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x_0.

Soit I^{W_0} une résolution de l'identité et $u \in D'(X)$:

$$I^{W_0}u(x,\lambda) = \lambda^{\frac{3n}{2}} \iint\limits_{\alpha \in W_0} e^{i\lambda\varphi(x,z,\alpha)}.a(x,z,\alpha,\lambda)\chi(x,z,\alpha)u(z)dzd\alpha.$$

Ici $a(x,z,\alpha,\lambda)$ est un symbole analytique dans toutes les variables (réalisation).

Les deux assertions suivantes sont équvalentes :

(i) $(x_0, \xi^0) \notin WF^s_G u.$

(ii) Il existe un voisinage V_0 de (x_0, ξ^0) et une constante $\varepsilon > 0$ tels que :

$$\int e^{i\lambda h(x,y,\xi,\lambda)}.I^{W_0}u(y,\lambda)dy = \bigcirc \left(e^{-\varepsilon\lambda^{\frac{1}{s}}}\right)$$

uniformément pour $(x,\xi) \in V_0$ avec :

$$h(x,y,\xi,\lambda) = (x-y)\xi + i\frac{\lambda^{\frac{1}{s}-1}}{2}(x-y)^2.$$

Definition 2.6:(Déformation). Soient X, Y deux espaces vectoriels topologiques.

a/ On appelle "déformation" (de X dans Y) une application η continue de $I \times X$ dans Y où $I = [0,1]$.

b/ Soient f et g deux applications continues de X dans Y. On dit que g est le "produit d'un processus de déformation" appliqué à f s'il existe une déformation $\eta : I \times X \to Y$ telle que:

$$\forall x \in X : \ \eta(0,x) = f(x) \ et \ \eta(1,x) = g(x).$$

(On dit que f est homotope à g).

Définition 2.7 :(Contour d'integration). Soient W un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\Gamma : W \to \mathbb{C}^n$ une application.

On dit que Γ est un contour d'integration si Γ est injective, de differentielle injective (plongement) et C^∞ au voisinage de $\overline{W}$.

<u>Définition 2.8</u> : (Phase stationnaire ou méthode du “col”)

Soient $U \subset \mathbb{C}^n$ un voisinage ouvert de 0, φ une fonction holomorphe sur U avec $z = 0$ comme unique point critique. On suppose : $\varphi(0) = 0$, $det\varphi''(0) \neq 0$ ($z = 0$ point critique non dégénéré).

Soit $V \subset\subset U$ un voisinage ouvert de 0 et supposons que :

sur $V_{\mathbb{R}} = V \cap \mathbb{R}^n$: $\mathcal{R}e\varphi(x) \geq 0$ et sur $\partial V_{\mathbb{R}}$: $\mathcal{R}e\varphi(x) > 0$.

Avec ces données , on a le résultat suivant :

Pour toute fonction holomorphe u,bornée sur U, il existe deux constantes C , $\varepsilon > 0$ telles que:

$$\int_{V_{\mathbb{R}}} e^{-\lambda\varphi(x)} u(x)dx = \sum_{0 \leq k \leq \lambda/C} (2\pi)^{n/2} (k!\lambda^{\frac{n}{2}+k})^{-1}.[\tfrac{1}{2}\widetilde{\Delta}]^k (\tfrac{u}{J})(0) + R(\lambda).$$

où $|R(\lambda)| \leq \dfrac{1}{\varepsilon}.e^{-\varepsilon\lambda}.\underset{z\in U}{Sup}\,|u(z)|$, $\lambda \geq 1$, $\widetilde{\Delta} = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial \widetilde{z}_j^{\,2}}$, $J = \pm det\dfrac{d\widetilde{z}}{dz}$

$\widetilde{z}_j$ étant des coordonnées obtenues par application du lemme de Morse à φ.

<u>Définition 2.9</u> :(Pseudo-convexité)

a / Fonction sous-harmonique : Une fonction f définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$ est dite sous-harmonique si :

(i) f est semi continue superieurement ($f^{-1}([-\infty, r[)$ ouvert , $\forall r \in \mathbb{R}$).

$(ii) \forall K \subset\subset \Omega, \forall h \in C(K)$, harmonique dans $\overset{\circ}{K}$ on a :

$$h \geq f \ sur\ \partial K \Rightarrow h \geq f \ sur\ K.$$

b / Une fonction f définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$ est dite plurisousharmonique (psh) sur Ω si :

(i) f est semi continue superieurement.

$(ii)\, \forall z \in \mathbb{C}^n, \forall \omega \in \mathbb{C}^n$: $\tau \mapsto f(z + \tau\omega)$ est sous-harmonique dans son ouvert de définition.

c / Un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ est dit pseudo-convexe si :

$\exists f$ psh sur Ω telle que : $\forall r \in \mathbb{R}$: $\Omega_r = \{z \in \Omega / f(z) < r\} \subset\subset \Omega$.

<u>3/Notions de geometrie symplectique</u> :([4])

<u>3.1/ Variétés symplectiques</u> :

1/ Une variété M est dite symplectique si elle est munie d'une 2-forme fermée σ ($d\sigma = 0$) qui confère à chaque espace tangent T_xM une structure d'espace vectoriel symplectique .

2/ Exemple fondamental : Soit maintenant X une variété C^∞ (ou même analytique réelle ou complexe).On munit alors $M = T^*X = \underset{\rho\in X}{\cup} \{\rho\} \times T^*_\rho X$, d'une structure (canonique) de variété symplectique de la façon suivante :

Soit $\pi : \; T^*X \longrightarrow X$ la projection canonique sur la base X.

$$(x,\xi) \longmapsto \pi(x,\xi) = x$$

Pour $(x,\xi) \in T^*X$, considérons $D_{(x,\xi)}\pi$ l'application lineaire tangente de π :

$$D_{(x,\xi)}\pi : T_{(x,\xi)}(T^*X) \longrightarrow T_xX$$

On définit sur T^*X la 1-forme canonique (dite forme de Liouville) α par :

$$\alpha_{(x,\xi)} = \xi \circ D_{(x,\xi)}\pi : \; \forall v \in T_{(x,\xi)}(T^*X), \; \alpha_{(x,\xi)}(v) = \xi[D_{(x,\xi)}\pi(v)]$$

qui est une $1-$forme (une section) sur T^*X.

La 2-forme differentielle $\sigma = -d\alpha$ est une forme symplectique sur $M = T^*X$:

$\forall(x,\xi) \in T^*X$: $\sigma_{(x,\xi)}$ est une forme bilineaire alternée non dégénérée et fermée sur $T_{(x,\xi)}(T^*X)$.

Si $x = (x_1, ..., x_n)$ est un système de coordonnées locales sur X et si $\xi_1, ..., \xi_n$ sont les coordonnées duales,alors $(x,\xi) = (x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n)$ est un système de coordonnées associé sur T^*X et $(dx_1, ..., dx_n, d\xi_1, ..., d\xi_n)$ la base de $T^*(T^*X)$ associée à ce système alors :

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \xi_i dx_i \text{ et } \sigma = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge d\xi_i.$$

3/ Une sous-variété Y de T^*X est dite involutive (respectivement isotrope, Lagrangienne) si en chaque point $y \in Y$, T_yY est un sous-espace vectoriel involutive (respect.isotrope , Lagrangien) de T^*X.

Exemple : Soient $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ et $\Lambda_\varphi = \{(x, d\varphi(x)), \; x \in X\} \subset T^*X$.

Λ_φ est une sous-variété de T^*X de dimension $n = dimX$ et φ est appelée fonction génératrice de Λ_φ.On a : $T_{(x_0,\varphi(x_0))}\Lambda_\varphi = \{(h, d^2\varphi(x_0).h)/h \in \mathbb{R}^n\}$ et si $(p,q) \in T_{(x_0,\varphi(x_0))}\Lambda_\varphi$:

$$q_k = \sum_{i=1}^{n} \partial^2_{ki}\varphi(x_0).p_i.$$

On verifie que $\sigma\{(p,q),(p',q')\} = \sum_{i=1}^{n}(p_iq'_i - p'_iq_i) = 0$ et donc Λ_φ est isotrope. Comme

$dim\Lambda_\varphi = n$ elle est aussi involutive , c'est à dire une sous-variété Lagrangienne.

3.2/ Transformation symplectique et fonction génératrice : :

1/ Rappelons d'abord le lemme de Darboux.

Lemme de Darboux:

Soit $(M;\sigma)$ une variété symplectique. Pour tout $m_0 \in M$ il existe un voisinage ouvert U *de* m_0 *dans* M et un diffeomorphisme ϕ de U dans un ouvert V de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\phi^*(\sum_{i=1}^n d\xi_i \wedge dx_i) = \sigma \; on \; U.$$

2/ Soient M et N deux variétés symplectiques de même dimension et $\kappa : M \to N$ une application C^∞.On dit que κ est une transformation canonique (ou symplectique) si : $\kappa^*\sigma_N = \sigma_M$.

Une telle application est nécessairement un diffeomorphisme local.

3/ Soioent $q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n$ des coordonnées locales symplectiques sur M -c'est à dire : $\sigma_M = \sum_1^n dp_j \wedge dq_j$-on montre que :

(i) $\kappa : M \to T^*\mathbb{R}^n$ est une transformation canonique ssi : $p_j = \xi_j \circ \kappa$, $q_j = x_j \circ \kappa$ forment un système de coordonnés symplectiques locales.

(ii) $\kappa : M \to N$ est canonique ssi $Graphe(\kappa) = C_\kappa \subset N \times M$ est une variété lagrangienne pour la forme symplectique $\sigma_N - \sigma_M$.

4/ Fonction génératrice:

Soient N et M deux ouverts de $T^*\mathbb{R}^n$et notons : $\kappa(y,\eta) = (x,\xi)$.

Le point 3/(ii) montre que C_κ est lagrangien pour $\sum_1^n d\xi_j \wedge dx_j - \sum_1^n d\eta_j \wedge dy_j$.

Si : $C_\kappa \to T^*\mathbb{R}^n, (x,\xi,y,\eta) \mapsto (y,\eta)$ est un difféomorphismze local alors (localement) C_κ est de la forme :

$$\xi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\eta) \; , \; y = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(x,\eta) \text{ où } \varphi \text{ est une fonction } C^\infty.$$

De façon équivalente : $\kappa : (\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(x,\eta),\eta) \to (x, \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,\eta))$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial\eta}(x,\eta) \neq 0$.

La fonction φ est appelée fonction génératrice.

3.3/ Champs hamiltoniens : Notons encore H l'isomorphisme :

$$H : T^*(T^*X) \to T(T^*X)$$

associé à $\sigma = -d\alpha$ déjà introduit . Soit U un ouvert de $M = T^*X$. Si f est une fonction

$C^\infty(U,\mathbb{R})$, on appelle champ hamiltonien de f -noté H_f-le champ de vecteurs image de df par H : $H_f = H(df)$ que l'on définit aussi par :

$(*)$ $i(H_f)\sigma = df$ où i est l'opérateur de contraction (ou produit interieur de σ avec H_f) .

Cette définition donne pour $(*)$: $\forall v \in T_{(x,\xi)}M$ (section de T^*X) :

$$[i(H_f)\sigma]v = \sigma(H_f, v)$$

Il s'en suit qu'en coordonnées locales : $H_f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \xi_i}.\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}.\frac{\partial}{\partial \xi_i} \overset{déf}{=} \frac{\partial f}{\partial \xi}.\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial}{\partial \xi}..$
Remarquons que ce paragraphe est valable sur toute variété symplectique et non seulement sur $M = T^*X$.

3.4/ Crochet de Lie , crochet de Poisson :

Crochet de poisson : Soient f et $g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$. On définit le crochet suivant , appelé crochet de Poisson ,par :

$$\{f,g\} = -\sigma(H_f, H_g)$$

Remarquons que :

1/ $\{f,g\} = -\{g,f =\} H_f(g) = -H_g(f) = dg(H_f) = -df(H_g)$.

2/$H_{\{f,g\}} = [H_f, H_g]$.

Remarquons aussi que $\sigma(H_f, H_f) = 0$ entraine que f est constante le long des courbes du champ hamiltonien H_f puisque $\sigma(H_f, H_f) = H_f(f)$. Mais on peut voir aussi que :

$$d(f \circ \gamma)(t) = (df)_{\gamma(t)}.\gamma'(t) = (df)_{\gamma(t)}.(H_f(\gamma(t)) = 0.$$

3.5/ Théorème de Frobenius et feuilles bicaracteristiques :

1/Définitions :

a/ Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension n. On appelle "distribution" (C^∞)(ou système tangent dans M) de dimension p , la donnée en tout point x de M , d'un sous-espace D_x de T_xM verifiant l'une des deux conditions équivalentes :

(i) Au voisinage de chaque point x , D_x est engendrée par $p-$champs de vecteurs $C^\infty, X_1, ..., X_p$ $(p \leq n)$ lineairements indépendants.

(ii) Au voisinage de chaque point x , D_x est définie par $(n-p)$ formes differentielles de degré 1 , lineairement indépendantes , c'est à dire :

$$D_x = \underset{1\leq j\leq n-p}{\cap} \{Ker\alpha_j\} \ , \ \alpha_j \text{ étant une 1-forme sur } M.$$

La distribution D est alors : $D = \underset{x\in M}{\cup} D_x$.

b/ Un champ de vecteur X sur M est dit tangent à D si $\forall x \in M : X(x) \in D_x$.

c/ De même une sous-variété V de M est dite tangente à D si $\forall x \in V : T_xV \subset D_x$.

d/ Une sous-variété V de M est dite variété integrale de D si $\forall x \in V : T_xV = D_x$.

2/ Distribution integrable :

On dit que la distribution D est integrable si par chaque point de M passe une variété integrale de D. Dans ce cas , chaque point de M est alors contenu dans une unique variété integrale maximale (feuille) , les variétés maximales constituant une partition de M appelée "feuilletage" de M. Si V est une variété integrale de D , alors toute courbe tangente à D qui rencontre V est entièrement contenue dans V.

3/ Théorème de Frobenius :

Soit D une distribution C^∞. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) D est integrable .

(ii) Pour tout champs de vecteurs X et Y tangents à D alors : $[X, Y] \in D$.

Application :

1/Soit V une sous-variété d'une variété symplectique M de dimension $2n$,définie localement par :

$f_1 = \cdots = f_p = 0$ avec $f_j \in C^\infty(M)$ et df_j linéairement indépendantes sur V.Alors :

V involutive $\Leftrightarrow \{f_i, f_j\} = 0$ sur V.

2/ Si V est involutive alors les $T_mV^{\perp}$, $m \in M$, forme un système tangent integrable dans V.

Remarquons enfin que :

(i) Si de plus $dimM = 2p$, alors V est Lagrangienne.

(ii) Dans la situation du point 7.2/ , les feuilles bicaracteristiques (sous-variétés integrales associées aux distributions $\rho \mapsto T_\rho V^\perp$) Γ_ρ sont obtenues en integrant successivement les champs hamiltoniens H_{f_i} passant par ρ.

4.Opérateurs integraux de Fourier et réduction de V à $\Lambda = \left\{\xi'' = 0\right\}$.

4.1.Opérateurs integraux de Fourier analytiques :

Dans cette partie on suit pas à pas [5].

Soit κ une transformation canonique analytique d'un voisinage du point $(y_0, \eta^0) \in T^*X \setminus \{0\}$ dans $T^*\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et soit $\kappa(y_0, \eta^0) = (x_0, \xi^0)$. Aprés un changement de variable en y , on peut supposer que κ est engendrée par une fonction $S = S(x, \eta)$ telle que :.

$$Graphe(\kappa) = \left\{ (S'_\eta(x, \eta), \eta, x, S'_x(x, \eta) \right\}.$$

On va associer à κ des opérateurs integraux de Fourier adaptés à nos calculs. Au voisinage du point (x_0, x_0, y_0, η^0) on considère une phase Gaussienne de la forme :

$$\psi(x, y, \alpha) = S(x, \alpha_\xi) - y.\alpha_\xi + \frac{i}{2} \left\{ (S'_\eta(x, \alpha_\xi) - \alpha_x)^2 + (S'_\eta(x, \alpha_\xi) - y)^2 \right\}$$

où $\alpha = (\alpha_x, \alpha_\xi)$ et S'_η la dérivée par rapport à la seconde variable.

On considère alors des opérateurs de la forme :

(6) $$Fu(x, \lambda) = \lambda^{3n/2} \iint e^{i\lambda\psi(x,y,\alpha)}.a(x, y, \alpha, \lambda).u(y)dyd\alpha$$

où $u \in D'(X)$ et $a(x, y, \alpha, \lambda)$ une réalisatioàn de symboles analytiques classiques, elliptique, définie au voisinage de (x_0, x_0, y_0, η^0) (voir [15]).

Soit W un petit voisinage de (y_0, η^0) et $\chi \in C_0^\infty$,égale à 1 prés de :

$$\left\{ (x, y, \alpha) / \ y = \alpha_x = S'_\eta(x, \alpha_\xi) \right\}.$$

On considère alors la réalisation de l'opérateur F :

$$F^W \ : \ D'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

(7) $$F^W u(x, \lambda) = \lambda^{3n/2} \iint_W e^{i\lambda\psi(x,y,\alpha)}.a(x, y, \alpha, \lambda).\chi(x, y, \alpha).u(y)dyd\alpha.$$

On verifie que ψ est non dégénérée au sens de Hormander (voir [4]), que la variété critique est :

$$C_\psi = \left\{ (x, y, \alpha) / \ y = \alpha_x = S'_\eta(x, \alpha_\xi) \right\}$$

et que la valeur critique de ψ est donnée par :

$$\psi(x,y,\alpha) = S(x,\alpha_\xi) - y.\alpha_\xi.$$

On retrouve ainsi la phase que l'on associe classiquement à la transformation κ.Remarquons aussi que prés du point (x_0, x_0, y_0, η^0) on a :

$$\Lambda_\psi = \left\{(S'_\eta(x,\eta), \eta, x, S'_x(x,\eta)\right\} = Graphe(\kappa).$$

Posons maintenant : $\psi^*(x,y,\alpha) = -\overline{\psi}(x,y,\alpha)$ et considérons :

(8) $$Gu(x,\lambda) = \lambda^{3n/2} \iint e^{i\lambda\psi^*(x,y,\alpha)}\ .b(x,y,\alpha,\lambda).u(y)dyd\alpha.$$

En composant formellement et en appliquant le théorème de la phase stationnaire complexe à la phase :

$$H:\ (z,\beta) \longrightarrow \psi(x,z,\beta) + \psi^*(z,y,\alpha)$$

on montre formellement que l'on a :

(9) $$(F \circ G)u(x,\lambda) = \lambda^{3n/2} \iint e^{i\lambda\mu(x,y,\alpha)}\ .c(x,y,\alpha,\lambda).u(y)dyd\alpha.$$

où $c(x,y,\alpha,\lambda)$ est un symbole analytique défini prés de (x_0, x_0, y_0, η^0) et :

$$\mu(x,y,\alpha) = S(x,y) - S(x,\alpha_\xi) + \frac{i}{2}(S'_\eta(x,\alpha_\xi) - \alpha_x)^2.$$

En remplaçant dans (9) α par $\kappa(\alpha)$, on retrouve une phase comme dans la résolution de l'identité de [15]. En effet :

$$\kappa(S'_\eta(y,\alpha_\xi), \alpha_\xi) = (y, S'_x(y,\alpha_\xi)).$$

En outre si F est elliptique -c'est à dire $a(x,y,\alpha,\lambda)$ elliptique-on sait d'aprés [17] qu'il existe un symbole analytique $b(x,y,\alpha,\lambda)$-donc un opérateur G-tel que :

$$F \circ G = \P\ (composition\ formelle).$$

On a :

$$^tG(e^{i\lambda\mu(x,y,\alpha)}.a(x,y,\alpha,\lambda)) = e^{i\lambda\mu(x,y,\alpha)}.c(x,y,\alpha,\lambda).$$

L'opérateur C correspondant à $c(x,y,\alpha,\lambda)$ verifie :

$$\sigma_C = 1 \text{ (symbole complet).}$$

Donc : $C = \lambda^{3n/2}\int e^{i\lambda\mu(x,y,\alpha)}\ .c(x,y,\alpha,\lambda)d\alpha$ est une résolution de l'identité.

Nous considérons aussi dans la partie 3 , une résolution de l'identité avec une phase $\phi(x,y,\alpha)$ réelle analytique verifiant:

$$(10) \qquad \begin{cases} (i)\ \phi = 0 \text{ et } \frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \alpha_\xi \text{ lorsque } x = y = \alpha_x \\ (ii) \text{ Il existe } c > 0 \text{ telle que pour } (x,y,\alpha) \text{ réel on ait:} \\ Im\phi(x,y,\alpha) \geq c(|x-\alpha_x|^2 + |y-\alpha_x|^2) \end{cases}$$

et nous noterons I une telle résolution de l'identité .

Remarquons que si P est un opérateur differentiel d'ordre ν , on en fait un opérateur pseudodifferentiel d'ordre ν en conjuguant formellement $\lambda^{-\nu}P$ par F et G :

$$(11) \qquad \widetilde{P} = \lambda^{-\nu}FPG$$

avec :

$$\widetilde{P}u(x,\lambda) = \lambda^{3n/2}\iint e^{i\lambda\mu(x,y,\alpha)}.f(x,y,\alpha,\lambda).u(y)dyd\alpha$$

où $f(x,y,\alpha,\lambda)$ est une réalisation de symboles analytiques classiques.

D'autre part on sait que les symboles principaux de $\widetilde{P}$ et de $\lambda^{-\nu}P$ sont liés par la relation :

$$\widetilde{p}\circ\kappa = p \text{ (voir [5]).}$$

4.2.Réduction de V à $\Lambda = \left\{(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\ :\ \xi'' = 0\right\}$

L'hypothèse (1) nous assure l'existence d'une transformation canonique analytique κ d'un voisinage du point $(y_0,\eta^0) \in T^*X\backslash\{0\}$ dans un voisinage du point $(x_0,\xi^0)T^*\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ qui envoie $V = p_\nu^{-1}(0)$ sur :

$$\Lambda = \left\{(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\ :\ \xi'' = 0\right\}\ ,\ \xi = (\xi',\xi''), \xi'' \in \mathbb{R}^d. \text{ (voir [2] et [3])}$$

Soit le point $(0,\xi_0',0) \in \Lambda$, $\xi_0' \in \mathbb{R}^{n-d}\backslash\{0\}$.

Les feuilles $\widetilde{\Gamma}$ transformées des feuilles Γ_ρ par κ sont de la forme :

$$\widetilde{\Gamma} = \left\{(x,\xi) \in \Lambda/\ (x',\xi') = constante\right\}.$$

Soit Γ celle qui passe par le point $(0,\xi_0^{'},0)$:

$$\Gamma=\left\{(x,\xi)\in\Lambda/\ x^{'}=0\ ,\ \xi^{'}=\xi_0^{'}\right\}.$$

L'opérateur transformé de P s'écrit :

$$\widetilde{P}=\sum_{|\alpha|\leq m}\widetilde{A}_\alpha.D_x^{''^\alpha}$$

où $\widetilde{A}_\alpha$ est un opérateur pseudodifferentielle d'ordre inferieur ou égal à $\nu-m+(s_0-1)\frac{m-|\alpha|}{s_0}$.
Soit $\widetilde{a}_{k(\alpha)}$ le symbole principal de $\widetilde{A}_\alpha$ avec $k(\alpha)=\nu-m+(s_0-1)\frac{m-|\alpha|}{s_0}$.
Quitte à composer avec un opérateur elliptique d'ordre $(m-\nu)$, on suppose pour simplifier $\nu=m$ et donc :

$$k(\alpha)=(s_0-1)\tfrac{m-|\alpha|}{s_0}\ \text{ et }\ \widetilde{A}_\alpha.D_x^{''^\alpha}\text{ est d'ordre }\leq m-\tfrac{m-|\alpha|}{s_0}.$$

Pour cette condition voir [8] , [12] et [14] . On a le lemme suivant :

Lemme 4.3 :

Si $\widetilde{p}_{m-j}$ désigne le terme d'ordre $(m-j)$ du symbole de l'opérateur $\widetilde{P}$, alors $\widetilde{p}_{m-j}$ s'annule à l'ordre $(m-js_0)$, prés des points de Γ , $\widetilde{p}_m$ s'annulant exactement.

Preuve :

D'abord $\widetilde{p}_m$ s'annule exactement à l'ordre m prés de Γ puisque :

$$\widetilde{p}_m=\sum_{|\alpha|=m}\widetilde{a}_{k(\alpha)}.\xi''^\alpha.$$

Ensuite si $\sigma(\widetilde{A}_\alpha.D_x^{''^\alpha})$ désigne le symbole complet de $\widetilde{A}_\alpha.D_x^{''^\alpha}$, la formule de composition donne :

$$\sigma(\widetilde{A}_\alpha.D_x^{''^\alpha})=\sum_{l\geq 0}\widetilde{a}_{k(\alpha)-l}.\xi''^\alpha=\sigma(\widetilde{A}_\alpha).\xi''^\alpha.$$

En outre :

$$\sigma(\widetilde{P})=\sum_{|\alpha|\leq m}\sigma(\widetilde{A}_\alpha).\xi''^\alpha=\sum_{j=0}^{[m/s_0]}\ \sum_{|\alpha|=m-js_0}\ \sum_{l\geq 0}\widetilde{a}_{k(\alpha)-l}.\xi''^\alpha.$$

On obtient le terme $\widetilde{p}_{m-k}$, d'ordre $m-k$, pour :

$$k(\alpha)-l+|\alpha|=m-k\text{ c'est à dire }l=k-j\ ,\ j\leq k\leq[m/s_0]\,.$$

Nous avons alors :

$$\widetilde{p}_{m-k}=\sum_{j=0}^{k}\ \sum_{|\alpha|=m-js_0}\widetilde{a}_{js_0-k}.\xi''^\alpha=\widetilde{a}_{k(s_0-1)}.\xi''^\gamma+\overline{p}_{m-k}$$

où $|\gamma|=m-ks_0$ et $\overline{p}_{m-k}$ s'annule à l'ordre $m-ks_0$ puisque :

$|\alpha| = m - js_0 > m - ks_0$, $k > j$, d'où le lemme 4.3.

4.4.Transformation du front d'onde $\mathbf{WF}^s_G$ par les opérateurs integraux de Fourier analytiques :

Rapelons la définition du front d'onde Gevrey de O.Liess ([10] , [11]) et aussi [12] et [14] .

Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $(x_0, \xi^0) \in X \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Soit en outre Γ un ouvert conique contenant ξ^0. On note alors par $S^m(X \times X \times \Gamma)$, l'espace des fonctions $a(x,y,\xi)$ de $C^\infty(X \times X \times \Gamma)$ verifiant :

Pour tout compact $K \subset X \times X$ et pour tout cône $\Gamma' \subset\subset \Gamma$, il existe une constante C positive telle que :

$$\left| D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x,y,\xi) \right| \leq C^{|\alpha|+|\beta|+1}.\alpha!(1+|\xi|)^{m-|\beta|}, \xi \in \Gamma' \ , \ (x,y) \in K.$$

On dira que $a \in S^m(X \times X \times \Gamma)$ est elliptique si :

Pour tout compact $K \subset X \times X$ et pour tout cône $\Gamma' \subset\subset \Gamma$, il existe une constante C telle que :

$$C\left|a(x,y,\xi)\right| \geq (1+|\xi|)^m \ , \xi \in \Gamma' \ , \ (x,y) \in K.$$

Définition 4.4.1 :(voir [8] et [10]).

Soit $a \in S^m(X \times X \times \Gamma)$ elliptique défini prés du point (x_0, x_0, ξ^0) et $u \in D'(X)$ défiinie prés de x_0. On a alors :

$(x_0, \xi^0) \in WF^s_G u$ si et seulement s'il existe un cône ouvert $\Gamma' \subset\subset \Gamma$ contenant ξ^0 un voisinage ouvert U de x_0 et deux constantes C_1 et C_2 verifiant :

$$|Tu(y,\xi)| \leq C_1 exp(-C_2 \left|\xi\right|^{1/s}) \ , \ y \in U \ , \ \xi \in \Gamma'$$

où : $$Tu(y,\xi) = \int e^{-ix\xi - \frac{1}{2}|\xi|^{1/s}(x-y)^2}.a(x,y,\xi)\chi(x)u(x)dx$$

avec $\chi \in C_0^\infty$, $\chi = 1$ prés de x_0.

Cette définition reste aussi valable si : (voir [8] et [10])

$$Tu(y,\xi) = \int e^{-ix\xi - \frac{|\xi|}{2}(x-y)^2}.a(x,y,\xi)\chi(x)u(x)dx.$$

Soit maintenant $\phi(x,y,\xi)$ une fonction réelle analytique définie sur un voisinage de (x_0,x_0,ξ^0) et telle que :

$$(12) \qquad \begin{cases} \phi(x,x,\xi)=0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\xi \text{ si } x=y \\ Pour\ tout\ (x,y,\xi)\ r\acute{e}el, \exists C>0: \\ Im\phi(x,y,\xi)\geq C\left|x-y\right|^2 \end{cases}$$

Soit $b(x,y,\xi,\lambda)$ un symbole analytique d'ordre fini, elliptique, définie au voisinage de (x_0,x_0,ξ^0) et u une distribution définie sur un ouvert $X\subset\mathbb{R}^n$ contenant x_0. On a alors :

Proposition-Définition 4.4.2 :

Soit $(x_0,\xi^0)\in X\times\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.$(x_0,\xi^0)\notin WF^s_G u$ si et seulement s'il existe un voisinage U de x_0 , un voisinage V de ξ^0 et une constante $\varepsilon>0$ tels que :

$$(13) \qquad T_\lambda u(y,\xi)=\int e^{i\lambda\phi(x,y,\xi)}.b(x,y,\xi,\lambda)\chi(x)u(x)dx$$
$$=\bigcirc\left(exp(-\varepsilon\lambda^{1/s})\right)\ ,\ (y,\xi)\in U\times V\ ,\ \lambda\geq 1.$$

Preuve :

Comme dans [15] , on montre que cette définition est indépendante du choix (b,ϕ) . Pour cela on suit de prés la preuve de J.Sjostrand ([15]) en remplaçant λ par $\lambda^{1/s}$. On peut donc utiliser dans notre définition la phase classique :

$$\phi(x,y,\xi)=(y-x)\xi+\frac{i}{2}(x-y)^2.$$

Mais avec une telle phase nous avons montré dans [8] que $(x_0,\xi^0)\notin WF^s_G u$ entraine (13). Supposons maintenant (13) verifiée et quitte à multiplier u par une fonction troncature nous supposerons u à support compact . Nous devons montrer qu'il existe un voisinage ouvert $\widetilde{U}$ de x_0 , un cône ouvert Γ contenant ξ^0 et une constante positive C tels que:

$$Tu(y,\xi)=\int e^{-i(y-x)\xi-\frac{|\xi|}{2}(x-y)^2}.\widetilde{a}(x,y,\xi)u(x)dx$$
$$=\bigcirc\left(e^{-C|\xi|^{1/s}}\right),\ (y,\xi)\in\widetilde{U}\times\Gamma\ ,\ \widetilde{a}\in S^m(X\times X\times\Gamma).$$

On sait que :

$$u(x)=\iint e^{i(x-z)\eta-\frac{|\eta|}{2}(x-y)^2}.\widetilde{b}(x-z,\eta).u(z)dzd\eta$$

ou $\quad \widetilde{b}(x-z,\eta)=\left(1+\frac{i}{2}.\frac{(x-z)}{|\eta|}\right)$ (voir G.Lebeau [8])

Par suite :

$$(14)\quad Tu(y,\xi)=\iiint exp\left(i(y-x)\xi-\tfrac{|\xi|}{2}(x-y)^2+i(x-z)\eta-\tfrac{|\eta|}{2}(x-z)^2\right)\times$$
$$\times\widetilde{b}(x-z,\eta)\times\widetilde{a}(x,y,\xi)u(z)dzd\eta dx.$$

Soit $\psi=\psi(\eta)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ valant 1 prés de V. On tronque dans (14) suivant $\psi(\frac{\eta}{|\eta|})$ et $(1-\psi(\frac{\eta}{|\eta|}))$. Posons :

$$Tu(y,\xi)=I+II.$$

Sur le support de $(1-\psi(\frac{\eta}{|\eta|}))$ il existe un cône Γ d'axe ξ^0 et une constante $C>0$ tels que :

$$|\xi-\eta|\geq C(|\xi|+|\eta|)\ ,\ \xi\in\Gamma.$$

Si ϕ rprésente toute la phase dans (14) on verifie que : $|d_x\phi|\geq C'(|\xi|+|\eta|)$.

En déformant convenablement le contour réel comme dans [1], page 17, on obtient alors:

$$II=\bigcirc(e^{-\varepsilon|\xi|^{1/s}}).$$

Soit maintenant $\chi(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ valant 1 prés de $\overline{U}$ et à support prés de ce même voisinage.

L'expression I s'écrit , en tronquant suivant $\chi(x)$ et $(1-\chi(x))$: $I=I'+II'$.

On a :

$$\chi(x)\psi(\tfrac{\eta}{|\eta|}).\int exp\left(i(x-z)\eta-\tfrac{|\eta|}{2}(x-z)^2\right)\times\widetilde{b}(x-z,\eta)u(z)dz=\bigcirc(e^{-\widetilde{C}|\eta|})$$

ceci-par définition du front d'onde Gevrey-d'aprés (13) : il suffit our cela de poser $\eta'=\eta/|\eta|$ et $|\eta|=\lambda$ pour retrouver notre définition (13).

D'autre part , une integration par parties en x dans I' donne : $I'=\bigcirc\left(|\xi|^{-k}\right), k\in\mathbb{N}^*$.

Il existe donc une constante μ positive telle que :

$$I'=\bigcirc\left(exp(-\mu\,|\xi|^{1/s}\right).$$

Dans le support de $(1-\chi(x))$ on a : $|x-y|\geq C_0>0$ et donc :

$$I=\bigcirc\left(exp(-C_0\,|\xi|^{1/s}\right)\text{ , d'où la proposition 4.4.2.}$$

Considérons maintenant un opérateur integral de Fourier F comme au (6) et sa réalisation F^W comme au (8) , W étant un petit voisinage du point (y_0,η^0) :

$$F^W u(x,\lambda)=\lambda^{3n/2}\iint\limits_W e^{i\lambda\psi(x,y,\alpha)}.a(x,y,\alpha,\lambda).\chi(x,y,\alpha).u(y)dyd\alpha.$$

Soit $b(x,y,\alpha,\lambda)$ une réalisation de symboles analytiques elliptiques (voir [15]) défini dans un voisinage de (x_0, x_0, ξ^0) . On a alors la proposition suivante :

Proposition 4.4.3 :

Soit $u \in D'(X)$ et α_0 dans un voisinage fixé de (y_0, η^0) . Alors :

$\alpha_0 \notin WF^s_G u$ si et seulement s'il existe une constante positive $\varepsilon > 0$ et un voisinage U de $\kappa(\alpha_0)$ verifiant :

$$\begin{aligned}(15) \qquad I(x,\xi) &= \int e^{i\lambda\phi(x,y,\xi)}.b(x,y,\xi,\lambda).(F^W u)(y,\lambda)dy \\ &= \bigcirc\left(exp(-\varepsilon\lambda^{1/s})\right) \quad , \ \lambda \geq 1.\end{aligned}$$

uniformément en $(x,\xi) \in U$.

Preuve : On a : utilisant les résultats de [5] et [13] :

$$(16) \qquad {}^tF^W\left(e^{i\lambda\phi(x,.,\xi)}.b(x,,\xi,\lambda)\right)(y) = e^{i\lambda\widetilde{\phi}(x,y,\xi)}.\widetilde{b}(x,y,\xi,\lambda)$$

avec : $\widetilde{b}$ un symbole analytique elliptique et $\widetilde{\phi}$ la valeur critique de la phase apparaissant dans (16) et qui verifie d'aprés [5] lemme 2.2 :

$$\begin{cases} Im\widetilde{\phi}(x,y(x,\xi),\xi) = 0 \\ \frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial y}\widetilde{\phi}(x,y(x,\xi),\xi) = -\eta(x,\xi) \\ Im\widetilde{\phi}(x,y,\xi) \geq C\left|y - y(x,\xi)\right| \text{ pour } (x,y,\xi) \text{ réel.} \end{cases}$$

où $(y(x,\xi), \eta(x,\xi) = \kappa^{-1}(x,\xi)$.L'integrale (15) s'écrit donc comme dans [11] (phase stationnaire),modulo une erreur à décroissance exponentielle :

$$I(x,\xi) = \int e^{i\lambda\widetilde{\phi}(x,y,\xi)}.\widetilde{b}(x,y,\xi,\lambda).\chi u(y)dy$$

$$(x,\xi) \in U \text{ voisinage de } \kappa(\alpha_0).$$

D'aprés la proposition 4.4.2, $I(x,\xi)$ est à décroissance exponentielle en $\lambda^{1/s}$ ce qui prouve la proposition 4.4.3.

Aprés ces réductions , le théorème 1.2 découle du théorème suivant :

Théorème 4.4.4 :

On suppose que $\widetilde{P}$ verifie sur Λ les propriétés (1) , (3) et (4).

Soient : $s \in \left]1, \dfrac{s_0}{s_0 - 1}\right[$ et $u \in D'(\mathbb{R}^n)$.

Si $\Gamma \cap WF^s_G(P^*u) = \oslash$ alors :

$$\text{ou bien } \Gamma \subset WF^s_G(u) \text{ ou bien } \Gamma \cap WF^s_G(u) = \oslash.$$

Il suffit maintenant comme dans [8] de prouver :

Théorème 4.4.5 :

Posons $x = (x^{'}, x^{''})$, $x^{''} = (\widetilde{x}, x_n)$, x_n désignant la $n^{ième}$ variable et $x^{''} \in \mathbb{R}^d$.

On suppose toujours que $\widetilde{P}$ verifie sur Λ les propriétés (1) , (3) et (4) , $s \in \left]1, \dfrac{s_0}{s_0 - 1}\right[$.

Si $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ est telle que :

(i) $(0, \xi_0^{'}, 0) \notin WF_G^s(\widetilde{P}^* u)$

(ii) $WF_G^s(u) \cap \{(x,\xi) \in W_0 \cap \Gamma\ ,\ x_n < \widetilde{x}^2\} = \oslash$

Alors : $(0, \xi_0^{'}, 0) \notin WF_G^s(u)$.

Ici W_0 est un voisinage de $(0, \xi_0^{'}, 0)$ sur lequel $\widetilde{P}$ est transversalement elliptique .

5.Inversion d'opérateurs agissant sur des symboles analytiques:

On établit maintenant un résultat d'inversion d'opérateurs dans le domaine complexe sur lequel repose la preuve du théorème 4.4.5.

Soient $\widetilde{\Omega} \subset\subset \Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ deux ouverts pseudo-convexese $\mathbb{C}^n$. On suppose que :

$$\widetilde{\Omega} + B(0,2) \subset\subset \Omega\ ,\ B(0,2) = \{z \in \mathbb{C}^n /\ |z| \leq 2\}\,.$$

Soit $Q = Q(x, \theta, \lambda)$ un symbole analytique classique d'ordre 0 , défini sur un voisinage de $\Omega \times \{\theta \in \mathbb{C}^n /\ |\theta| \leq 2\mu_0\}$, μ_0 est une constante positive fixée .On note aussi par Q une réalisation de Q.

Si $u(y, \lambda)$ est un symbole d'ordre fini sur Ω et $x \in \widetilde{\Omega}$, on pose :

$$Q(x, D_x, \lambda)u = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n . \iint\limits_{\substack{\theta = i\mu_0(x-y) \\ |x-y| \leq 1}} e^{i\lambda(x-y)\theta}.Q(x,\theta,\lambda).u(y,\lambda)dyd\theta.$$

Soit $q(x, \theta)$ la partie principal de Q et soit g une fonction holomorphe sur Ω avec $dg_{|\Omega} \neq 0$. Notons :

$$\sum = \{(x, \xi) \in \mathbb{C}^{2n} /\ x \in \Omega\ ,\ \xi = 0\}\,.$$

On suppose dans toute la suite qu'il existe un entier $m \geq 1$ tel que :

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{l} q(x,\xi) \text{ s'annule à l'ordre } m \text{ sur } \sum \text{ et :} \\ \quad \dfrac{\partial^m}{\partial \mu^m} q(x, \mu dg(x)) \mid_{\mu=0} \neq 0, \forall x \in \Omega. \end{array} \right.$$

On suppose sur les $q_j = q_j(x, \xi, \lambda) = \lambda^{-j} q_j(x, \xi), 1 \leq j \leq m-$termes d'ordre inferieur de $Q-$la condition suivante dépendant du paramètre s_0 , $s_0 \in [1, m[$:

q_j s'annule à l'ordre $(m - js_0)$ sur $\sum$ c'est à dire :

$$(18) \qquad \begin{cases} \exists C > 0 \ : \ |q_j(x,\xi)| \leq C.\,|\xi|^{m-js_0} \ , \ q_0 = q \\ \qquad \text{au voisinage des points de } \sum . \end{cases}$$

On a le lemme suivant :

Lemme 5.1 :

(i) Si Q vérifie (17) alors il est non-microcaractéristique le long de $\sum$ suivant la direction dg,

c'est à dire qu'il existe un nombre ω positif vérifiant :

$$(19) \qquad q\left((x, \zeta + \mu.dg(x))\right) \neq 0, \ \ x \in \Omega, \ \ |\zeta| \leq \omega.\mu, \ \ 0 < \mu \leq \omega$$

(ii) Si q_j vérifie (18) alors il existe $\tilde{C} > 0$ telle que :

$$(20) \qquad |q_j\left((x, \zeta + \mu.dg(x))\right)| \leq \tilde{C}\mu^{(m-s_0 j)}, \ \ x \in \Omega, \ \ |\zeta| \leq \omega.\mu, \ \ 0 < \mu \leq \omega.$$

L'énoncé de la proposition suivante précise le résultat évoqué au début de 5.

Proposition 5.1 : Soit, $s \in \left]1, \dfrac{s_0}{s_0 - 1}\right[$.

On suppose que l'opérateur Q vérifie (17) et (18).

On pose dans toute la suite :

$$K = e^{-i\tilde{\lambda}g} Q e^{i\tilde{\lambda}g}$$

Considérons $\Omega_1 \subset\subset \tilde{\Omega}$ un troisième ouvert pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$.

Alors : il existe deux constantes positives C et ε telle que :

si $v(x, \lambda)$ est un symbole analytique d'ordre fini sur Ω, on peut alors trouver un symbole analytique $u = u(x, \lambda, \tilde{\lambda})$ d'ordre fini sur $\tilde{\Omega}$ vérifiant :

$$\begin{aligned} |Ku - v| &\leq \bar{C}(v).e^{-C\tilde{\lambda}}, \quad \text{sur } \Omega_1 \\ \lambda &\geq 1, \ \ \lambda^{1/s} \leq \tilde{\lambda} \leq \varepsilon\lambda \end{aligned}$$

Ici $\bar{C}(v)$ désigne une constante qui dépend de v mais non de $\tilde{\lambda}$.

Preuve :

L'idée consiste à composer l'opérateur K avec l'opérateur T suivant :

$$Tu\left(x,\lambda,\tilde{\lambda}\right)=\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \iint_{\begin{cases}\theta=i\mu_1\bar{\tilde{\lambda}}(\overline{x}-\overline{y})\\ |x-y|\leq 1\end{cases}} e^{i\lambda(x-y)\theta}.T\left(x,\theta,\tilde{\lambda},\lambda\right)u(y,\lambda)dyd\theta$$

où, $T\left(x,\theta,\tilde{\lambda},\lambda\right)=1/q\left(x,\theta+\bar{\tilde{\lambda}}dg(x)\right)$, $\bar{\tilde{\lambda}}=\tilde{\lambda}.\lambda^{-1}$, et μ_1 une constante positive fixée.
Le calcul de [8] donne modulo une erreur à décroissance exponentielle :

$$KTu\left(x,\lambda,\tilde{\lambda}\right)=\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n\iint_{\Gamma_1(x)} e^{i\lambda(x-z)\eta}.R\left(x,\eta,\lambda,\tilde{\lambda}\right)u(z,\lambda,\tilde{\lambda})dzd\eta$$

où Γ_1 est le contour défini par :

$$\begin{cases}\eta=i\mu_1\bar{\tilde{\lambda}}(\overline{x}-\overline{z})\\ |x-z|\leq 1\end{cases}$$

et la quantité R est :

$$R\left(x,\eta,\lambda,\tilde{\lambda}\right)=Q\left(x,\eta+\bar{\tilde{\lambda}}dg(x)\right).T\left(x,\eta,\lambda,\tilde{\lambda}\right)+R_1\left(x,\eta,\tilde{\lambda}\right)$$

avec $R_1\left(x,\eta,\tilde{\lambda}\right)=O(\tilde{\lambda}^{-1})$.

Ecrivons :

$$\begin{aligned}
Q\left(x,\eta+\overline{\tilde{\lambda}}dg(x),\lambda\right) &= \sum_{0\leq\nu\leq\lambda/eC_0} \lambda^{-\nu}.q_\nu\left(x,\eta+\overline{\tilde{\lambda}}dg(x)\right), \quad C_0>0, \quad Q_0=q \\
Q\left(x,\eta+\overline{\tilde{\lambda}}dg(x),\lambda\right) &= q\left(x,\eta+\overline{\tilde{\lambda}}dg(x)\right)+\sum_{1\leq\nu\leq\lambda/eC_0} \lambda^{-\nu}.q_\nu\left(x,\eta+\overline{\tilde{\lambda}}dg(x)\right) \\
&= q\left(x,\eta+\overline{\tilde{\lambda}}dg(x)\right)+\lambda^{-1}\left[q_1+\sum_{\nu\geq 2}\lambda^{-\nu+1}.q_\nu\right]\left(x,\eta+\overline{\tilde{\lambda}}dg(x)\right)
\end{aligned}$$

Posons : $\tilde{q}=q_1+\sum\limits_{\nu\geq 2}\lambda^{-\nu+1}.q_\nu$, $\tilde{q}$ est une fonction bornée sur :

$$\Omega_1\times\left\{\zeta\in\mathbb{C}^n \;/\; |\zeta|\leq\mu_1\overline{\tilde{\lambda}}\right\}$$

R s'écrit alors :

$$R\left(x,\eta,\lambda,\tilde{\lambda}\right)=1+\lambda^{-1}.\tilde{q}\left(x,\eta+\overline{\tilde{\lambda}}dg(x)\right).T\left(x,\eta,\lambda,\tilde{\lambda}\right)+O(\tilde{\lambda}^{-1}).$$

les hypothèses (17) et (18) et le lemme 5.1 donnent :

$$\begin{aligned}
\left|\lambda^{-1}.\tilde{q}\left(x,\eta+\overline{\tilde{\lambda}}dg(x)\right).T\left(x,\eta,\lambda,\tilde{\lambda}\right)\right| &\leq \text{Constante}\ .\ \overline{\tilde{\lambda}}^{(m-s_0)}.\ \overline{\tilde{\lambda}}^{-m}.\lambda^{-1}. \\
&\leq \text{Constante}\ .\ \lambda^{(s_0-1-\frac{s_0}{s})}
\end{aligned}$$

Par hypothèse $(s_0-1-\dfrac{s_0}{s})<0$, et par suite, il existe une constante $\tilde{\mu}_0$, $0<\tilde{\mu}_0<\dfrac{s_0}{s}+1-s_0$ telle que :

$$\lambda^{-1}.\tilde{q}\left(x,\eta+\overline{\tilde{\lambda}}dg(x)\right).T\left(x,\eta,\lambda,\tilde{\lambda}\right)+R_1=\lambda^{-\tilde{\mu}_0}.A\left(x,\eta,\lambda,\tilde{\lambda}\right)$$

où A est holomorphe bornée sur $\Omega_1\times\left\{\eta\in\mathbb{C}^n \;/\; |\eta|\leq\mu_1\overline{\tilde{\lambda}}\right\}$

Soit maintenant :

$$Au(x,\lambda,\tilde{\lambda})=\left(\tfrac{\lambda}{2\pi}\right)^n\iint\limits_{\Gamma_0(x)} e^{i\lambda(x-z)\eta}.A\left(x,\eta,\lambda,\tilde{\lambda}\right)u(z,\lambda)dzd\eta$$

où A est l'opérateur pseudodifférentiel avec symbole $A\left(x,\eta,\lambda,\lambda\right)$ et $\Gamma_0(x)$ le contour suivant :

$$(21) \qquad \Gamma_0(x)=\begin{cases}\eta=i\mu_1\overline{\tilde{\lambda}}(\overline{x}-\overline{z}) \\ |x-z|\leq 1\end{cases}$$

En développant le premier terme dans l'égalité donnant R, par la phase stationnaire complexe, il vient que : (voir [5] et [15]).

(22) $\qquad KTu = u + \lambda^{-\tilde{\mu}_0}.Au + O_{(u)}(1).e^{-C_0\tilde{\lambda}} \quad$ sur Ω_1

où, $O_{(u)}(1)$ est une fonction uniformément bornée en λ pour chaque symbole analytique u.

Si maintenant $\Omega_2 \subset\subset \Omega$, $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega_2$ est un autre ouvert pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$ qu'on suppose vérifiant :

$$B(0,1) + \Omega_2 \subset\subset \Omega, \qquad \tilde{\Omega} + B(0,1) \subset\subset \Omega_2.$$

On a le lemme suivant :

<u>Lemme 5.2 :</u> (voir [5] et [8])

Il existe une constante positive $\tilde{C}$ telle que pour tout symbole analytique d'ordre fini $\upsilon(x,\lambda)$ défini sur Ω, il existe un symbole analytique d'ordre fini $\tilde{u}(x,\lambda,\tilde{\lambda})$ défini sur Ω_2 et vérifiant :

$$\left(I + \lambda^{-\mu_0}.A\right).\tilde{u} = \upsilon + O_{(\upsilon)}(1)e^{-\tilde{C}.\tilde{\lambda}}, \text{ sur } \Omega_2.$$

où $O_{(\upsilon)}(1)$ est une fonction uniformément bornée en λ pour chaque υ.

<u>Preuve :</u> (voir [5] et [8]).

Pour démontrer complètement la proposition 5.1, il suffit d'appliquer (22) et le lemme précédent en posant : $u = T\tilde{u}$ et alors :

$$Ku = \upsilon + O_{(\upsilon)}(1).e^{-\tilde{C}.\tilde{\lambda}} \text{ sur } \Omega_1.$$

où, $O_{(\upsilon)}(1)$ est uniformément bornée en λ pour chaque υ, d'où laproposition 5.1.

Fin de la preuve du théorème 4.4.5 :

Dans le théorème 4.4.5, notons encore $\tilde{P}$ par P. Soit la fonction f définie par :

$$f(x',y',\eta') = (x'-y').\eta' + \tfrac{i}{2}(x'-y')^2.$$

Notons aussi :

$$L = L_{(y',\eta')} = e^{-i\lambda f(x',y',\eta')}P\left(e^{i\lambda f(.,y',\eta')}\right)$$

L est un opérateur pseudodifférentiel dont le symbole principal est : $l = p\left(x, \nabla_x, f + \zeta', \zeta''\right)$, p étant le symbole principal de P. Posons :

$$\phi(x,\lambda) = \phi(x,y',\eta',\theta'',\lambda) = f(x',y',\eta') + \psi(x'',\theta'',\lambda)$$

$\theta'' = (\tilde{\theta},\theta_n)$ et $\psi(x'',\theta'',\lambda) = \lambda^{(1/s)-1}.x''.\theta''$, θ'' dans un petit voisinage complexe de 0.

Soit enfin : $\quad W = \{(x,\zeta) \in W_0 \ / \ |\zeta''| < \varepsilon, \ \ \varepsilon > 0\}$

où ε est une constante positive suffisamment petite et W_0 - exactement le même que celui du théorème 2.2 - un voisinage du point $(0, \zeta'_0, 0)$ sur lequel P est transversalement elliptique.

Avec toutes ces notations, grâce au rappel (5) et nos hypothèses sur P, nous avons la proposition technique suivante où l'hypothèse (ii) du théorème 4.4.5 est essentielle.

Proposition 5.2 : ([5] , [8] et [15].)

Il existe un voisinage Λ de $(0, \zeta'_0)$, une constante $C > 0$ et $N_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour :

$$(23) \qquad \begin{cases} \tilde{\theta} \text{ réel}, \quad \theta_n \in \mathbb{C}, \quad |\,\theta_n| \neq 0 \\ \left|\tilde{\theta}\right| \leq \frac{1}{C}.|\,\theta_n|\,, \quad |\,\theta_n| \leq \frac{1}{C}, \quad \text{Im } \theta_n \geq 0 \end{cases}$$

On ait :

$$\left(e^{i\lambda\phi(\,.\,,\lambda)},\ I^W u\right)_{L^2} = O_{|\,\theta_n|}\left(\lambda^{N_0}\right), \ (y', \eta') \in A.$$

Ici ϕ est comme plus haut et I est une résolution de l'dentité et $O_{|\,\theta_n|}(1)$ une fonction qui pour tout $\tilde{\varepsilon} > 0$ est uniformément bornée en λ pour $|\,\theta_n| \geq \tilde{\varepsilon}$. Cela signifie que pour chaque $\tilde{\varepsilon} > 0$ il existe une constante $C_{\tilde{\varepsilon}} > 0$ telle que :

$$\left|\left(e^{i\lambda\phi(\,.\,,\lambda)},\ I^W u\right)_{L^2}\right| \leq C_{\tilde{\varepsilon}}.\lambda^{N_0}, \ \lambda \geq 1, \ |\,\theta_n| \geq \tilde{\varepsilon}.$$

Preuve de la proposition :

C'est une application de la proposition 5.1. :

Par le développement de Taylor de $p(x, \zeta)$ à l'ordre m aux points de V , on a l'existence de deux constantes positives ε_0 et $\tilde{C}$ telles que :

pour $(x, \zeta) \in \mathbb{C}^n$ vérifiant : $\left|(x, \zeta) - (x_0, \zeta^0)\right| \leq \varepsilon$ et $\left|\tilde{\zeta}\right| \leq \varepsilon_0 \,|\zeta_n|$ où $(x_0, \zeta^0) \in V$

on ait :

$$|p(x, \zeta)| \geq \frac{1}{\tilde{C}}.\left|\zeta''\right|^m. \quad (\text{ voir [5] et [8] })$$

Ceci montre que l'opérateur $L = e^{-i\lambda f(x', y', \eta')} P\left(e^{i\lambda f(\,.\,, y', \eta')}\right)$ est non microcaractéristique, son symbole étant :

$$l = p\,(x, \nabla_x,\ f + \zeta', \zeta'')\,.$$

Ceci nous permet d'appliquer la proposition 5.1 à l'opérateur conjugué $K = e^{-i\lambda\psi}\ L\ e^{i\lambda\psi}$

où, $\psi(x'',\theta'',\lambda)=\lambda^{(1/s)-1}.x''.\theta''$.

Il existe donc une constante $C_0>0$, indépendante de θ_n, un voisinage Λ de $(0,\zeta_0')$, un voisinage pseudo-convexe V de $\mathbb{C}^n$ fixé et un symbole analytique en x : $a(x,\lambda)=a(x,y',\eta',\theta'',\lambda)$ défini sur V tels que pour θ'' vérifiant (23) on ait :

(24) $\quad Ka(.,y',\eta',\theta'',\lambda)=1+O_{|\theta_n|}(1).\left(e^{-C_0.\lambda^{1/s}.|\theta_n|}\right)\ sur\ V,\ (y',\eta')\in\Lambda,\ \lambda\geq 1.$

(On prend "s" légèrement plus grand que le "s" de la proposition 5.1 et $\tilde{\lambda}=|\theta_n|\,.\,\lambda^{1/s}$)

En outre si W est assez petit, l'hypothèse du théorème 4.4.5 entraine que :

$$\overline{W}\cap WF^s_G(P^*u)=\oslash\ .$$

Rappelons que l'on a posé :

(25) $$\Phi(x,\lambda)=f(x',y',\eta')+\psi(x'',\theta'',\lambda)$$
$$=(x'-y')\eta'+\tfrac{1}{2}(x'-y')^2+\lambda^{(1/s)-1}.x''.\theta''.$$

et : $\quad L=e^{-i\lambda f}Pe^{i\lambda f(\ .\ ,\,y',\eta')}$ et $\quad K=e^{-i\lambda\psi}\ Le^{i\lambda\psi}=e^{-i\lambda\Phi(x,\lambda)}P\left(e^{i\lambda\Phi(\ .\ ,\ )}\right).$

Pour $\tilde{\theta}$, x' et y' réels on a :

$$Im\Phi=\tfrac{1}{2}(x'-y')^2+\lambda^{(1/s)-1}.x_n.Im\theta_n.$$

En tenant compte de (24) et (25) on obtient :

$$\left(e^{i\lambda\Phi(\ .\ ,\lambda)},I^Wu\right)=\left(e^{i\lambda\Phi(\ .\ ,\lambda)}Ka(.,\lambda),I^Wu\right)+\left(O_{|\theta_n|}(1).e^{-C_0\lambda^{1/s}|\theta_n|+i\lambda\Phi(\ .\ ,\lambda)},I^Wu\right)_{L^2}$$

et grâce à la troncature de l'expression de la résolution I^W , il vient que :

$$\left(e^{i\lambda\Phi(\ .\ ,\lambda)},I^Wu\right)_{L^2}=\left(P\left(e^{i\lambda\Phi(\ ;\ ,\lambda)}a(.,\lambda)\right),I^Wu\right)_{L^2}+O_{|\theta_n|}(\lambda^{N_0}).$$

où, $N_0\in\mathbb{N}$.

L'hypothèse sur P^*u entraine que :

$$I^WP^*u=O\left(e^{-\delta\lambda^{1/s}}\right),\ \delta>0.$$

Par suite si $Im\theta_n$ est suffisement petit :

$$\left(e^{i\lambda\Phi(\ .\ ,\lambda)},I^Wu\right)=\left(e^{i\lambda\Phi(\ ;\ ,\lambda)}a(.,\lambda),[P^*,I^W]u\right)+O_{|\theta_n|}(\lambda^{N_0}).$$

Mais comme dans (5), (15) et la partie 2. :

$$[P^*,I^W]u=R^{\partial W}u+O\left(e^{-r\lambda}\right),\quad r>0$$

où, $\quad R^{\partial W}u=\int\limits_{\partial W}\tilde{\pi}_{\alpha,\lambda}(u)$, et $\tilde{\pi}_{\alpha,\lambda}(x,z)=\lambda^{(3n-1)/2}e^{i\lambda\varphi(x,z,\alpha)}.b(x,z,\alpha,\lambda).\varkappa(x,z,\alpha)$

$\tilde{\pi}_{\alpha,\lambda}$ étant le noyau de l'opérateur $\pi_{\alpha,\lambda},\varphi$ étant une phase Gaussienne, $\varkappa$ une troncature comme en ([15],[17]) et b une réalisation de symboles analytiques à valeurs dans les

$(2n-1)$ formes en α. ([15],[17]).

Il reste donc à estimer :

$$\left(e^{i\lambda\Phi(\ .\ ,\lambda)}a(.,\lambda), R^{\partial W}u\right) = \int\limits_{\partial W} \left(e^{i\lambda\Phi(\ .\ ,\lambda)}a(.,\lambda), \tilde{\pi}_{\alpha,\lambda}u\right)$$

Mais :

$\left(e^{i\lambda\Phi(\ .\ ,\lambda)}a(.,\lambda), \tilde{\pi}_{\alpha,\lambda}u\right) = \int\int e^{i\lambda G(x,z,\alpha)}.a(x,\lambda).\bar{b}(x,z,\alpha,\lambda).\bar{\tilde{\varkappa}}(x,z,\alpha).\bar{u}(z)dzdx.$

avec $\quad G(x,z,\alpha) = \Phi(x,\lambda) - \bar{\varphi}(x,z,\alpha)$

et $\quad \operatorname{Im} G = \operatorname{Im}\varphi(x,z,\alpha) + \lambda^{(1/s)-1}.x_n.\operatorname{Im}\theta_n + \frac{1}{2}(x'-y')^2$

$\qquad \geq C\left(|x-\alpha_x|^2 + |z-\alpha_x|^2\right) + \lambda^{(1/s)-1}.x_n.\operatorname{Im}\theta_n + \frac{1}{2}(x'-y')^2.$

On observe alors 3 cas :

Cas 1 :

On suppose α dans un voisinage compact d'un point α^0 de ∂W qui ne rencontre pas la feuille Γ :

$\Gamma = \left\{(x,\zeta) \in \mathbb{R}^{2n}\ /\ x' = \zeta'' = 0,\quad \zeta' = \zeta'^0 \neq 0\right\}$

Dans ce cas on remplace le contour réel en x par le contour complexe suivant : (Par la formule de stokes)

$\Gamma_\varepsilon :\ x + i\varepsilon.\tilde{\varkappa}(x,z,\alpha).\overline{\frac{\partial G}{\partial x}} = \zeta$ où $\tilde{\varkappa}$ a les mêmes propriétés que $\varkappa$ précédent .

Sur Γ_ε on a : $\quad \operatorname{Im} G \geq C_\varepsilon > 0$ et alors :

$$\left(e^{i\lambda\Phi(\ .\ ,\lambda)}a(.,\lambda), \tilde{\pi}_{\alpha,\lambda}u\right) = O\left(e^{-C_\varepsilon\lambda^{1/s}}\right).$$

Cas 2:

On suppose α dans un petit voisinage compact d'un point $\alpha^0 = (\alpha_x^0, \alpha_\zeta^0)$, $\ \alpha_x'^0 = (\tilde{\alpha}_x^0, \alpha_{x_n}^0)$, de $\partial W \cap \Gamma$ tel que :

$$\alpha_{x_n}^0 < \left(\tilde{\alpha}_x^0\right)^2.$$

l'hypothèse (ii) du théorème 4.4.5 entraine alors que :

$$\tilde{\pi}_{\alpha,\lambda}u = O\left(e^{-C\lambda^{1/s}}\right)$$

et l'on a pour $\operatorname{Im}\theta_n$ suffisamment petit :

$$\left(e^{i\lambda\Phi(\,.\,,\lambda)}a(.,\lambda), \tilde{\pi}_{\alpha,\lambda}u\right) = O_{|\theta_n|}\left(\lambda^{N_0}\right).$$

<u>Cas 3 :</u>

On suppose α dans un petit voisinage compact d'un point $\alpha^0 \in \partial W \cap \Gamma$, tel que :

$$\alpha^0_{x_n} \geq \left(\tilde{\alpha}^0_x\right)^2.$$

On remarque alors qu'il existe une constante $\varepsilon_0 > 0$ telle que :

$$\alpha_{x_n} \geq \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad 0 \leq \operatorname{Im}\theta_n < 1.$$

et par suite : $\operatorname{Im} G \geq 0$; d'où la proposition 5.2.

<u>Remarque 5.1 :</u>

(i) La preuve de la proposition 5.1 montre aussi que cette même proposition reste valable si $\delta \in \mathbb{R}$ est assez petit et si l'on remplace Φ par : $\hat{\Phi} = \Phi - \lambda^{(1/s)-1}.\delta.\theta_n$.

(ii) Pour $\tilde{\theta}$ réel dans un voisinage de 0, le principe du maximum appliqué dans le domaine $\{\theta_n \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Im}\theta_n > 0, \quad |\theta_n| < 1/C\}$ montre que l'on a :

$$\left(e^{i\lambda\hat{\Phi}(\,.\,,\lambda)}, I^W u\right)_{L^2} = O\left(\lambda^{N_0}\right).$$

uniformément en $\tilde{\theta}$ dans un voisinage réel de 0 et $\operatorname{Im}\theta_n \geq 0$.

<u>6.Fin de la preuve du théorème 4.4.5 :</u>

Posons :

$$h(x,y,\eta,\theta'',\lambda) = \tfrac{i}{2}\lambda^{(1/s)-1}.(\theta''-\eta'')^2 + \lambda^{(1/s)-1}(x''-y'').\theta'' + (x'-y')\eta' + \tfrac{i}{2}(x'-y')^2$$

égalité qui s'écrit :

$$\begin{aligned} h(x,y,\eta,\theta'',\lambda) &= \tfrac{i}{2}\lambda^{(1/s)-s}(\tilde{\theta}-\tilde{\eta})^2 - \lambda^{(1/s)-1}.\tilde{y}.\tilde{\theta} \\ &\quad + \tfrac{i}{2}\lambda^{(1/s)-1}(\theta_n-\eta_n)^2 - \lambda^{(1/s)-1}(y_n-\delta).\theta_n + \hat{\Phi}(x,\lambda). \\ &= S + T + \hat{\Phi}(x,\lambda). \end{aligned}$$

où S désigne le premier terme de la somme précédente , T désigne le second terme et $\hat{\Phi}$ comme dans la remarque 5.1.

On a le lemme suivant :

<u>Lemme 5.3 :</u> Soit $r \in \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$.

Posons $\Omega_r = [-r,r]^{n-d} = \tilde{\Omega} \times [-r,r] \subset \mathbb{R}^{n-d-1} \times \mathbb{R}$.

(i) Il existe une constante positive γ vérifiant :

$$\int_{\Omega_\Gamma} \left(e^{i\lambda h(\,.\,,y,\eta,\theta'',\lambda)}, I^W u\right)_{L^2} d\theta'' = O\left(e^{-\gamma\lambda^{1/s}}\right)$$

uniformément pour (y, η') dans un voisinage de $(0, \zeta_0')$ et $|\eta''| < \varepsilon$, ε étant suffisamment petit.

(ii) Il existe une constante γ_0 positive telle que :

$$\left(e^{i\lambda.\tilde{h}(\ .\ ,y,\eta,\lambda)},\ u\right)_{L^2} = O\left(e^{-\gamma_0\lambda^{1/s}}\right).$$

uniformément pour les mêmes valeurs de (y, η) vérifiant (i). Ici :

$$\tilde{h}(x,y,\eta,\lambda) = (x'-y')\eta' + \tfrac{i}{2}(x'-y')^2 + \lambda^{(1/s)-1}.\left\{(x''-y'')\eta'' + \tfrac{i}{2}(x''-y'')^2\right\}$$

Preuve : On a :

$$\int_{\Omega_\Gamma} \left(e^{i\lambda h(\ .\ ,y,\eta,\theta'',\lambda)}, I^W u\right)_{L^2} = \int_{|\theta''|\leq r} e^{i\lambda T} \int_{\tilde{\Omega}_\Gamma} e^{i\lambda S}\left(e^{i\lambda\hat{\Phi}(\ .\ ,\lambda)}, I^W u\right) d\tilde{\theta}d\theta_n.$$

soit μ une constante positive assez petite et $\varkappa \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$\varkappa(0) = 1$, $0 \leq \varkappa \leq 1$ et support de $\varkappa$ contenu dans un petit voisinage de 0.

Considérons alors, pour $0 \leq t \leq 1$ la famille de contours :

$$\Gamma_{\mu,t} : \theta_n \in [-r, r] \to \hat{\theta}_n = \theta_n + i\mu t.\varkappa(\theta_n).$$

En tenant compte des remarques 3.1 et après déformation du contour en θ_n on obtient :

$$\left|\int_{\Omega_\Gamma} \left(e^{i\lambda h(\ .\ ,y,\eta,\theta'',\lambda)}, I^W u\right) d\theta''\right| \leq C^{te}.\lambda^N \int_{\Gamma_\mu} e^{-\lambda^{1/s} Im\left\{\frac{i}{2}(\hat{\theta}_n-\eta_n)^2-(y_n-\delta)\hat{\theta}_n\right\}}.d\theta_n.$$

μ étant suffisamment petit, $\delta - y_n > \delta/2$; un calcul simple montre alors que l'on a alors (i).

Le point (ii) : d'après la remarque 2.10 de [14], pour (y, η', η'') dans un voisinage assez petit de $(0, \zeta_0', 0)$, la phase stationnaire complexe appliquée à :

$$J = \int_{\Omega_\Gamma} e^{i\lambda h(x,y,\eta,\theta'',\lambda)} d\theta''$$

donne :

$$J = C.\lambda^{-d/2}.e^{i\lambda\tilde{h}(x,y,\eta,\lambda)} + R_{(x,y,\eta)}(\lambda).$$

où, $R_{(x,y,\eta)}(\lambda) = O\left(e^{-\tilde{\varepsilon}\lambda^{1/s}}\right)$, $\tilde{\varepsilon} > 0$, et $\tilde{h}$ est exactement comme dans le lemme (ii).

Le point (i) entraine l'existence d'une constante $\gamma_0 > 0$ telle que :

$$\left(e^{i\lambda\tilde{h}(\ .\ ,y,\eta,\lambda)},\ I^W u\right)_{L^2} = O\left(e^{-C^{te}.\lambda^{1/s}}\right)$$

ou encore : $\left(e^{i\lambda\tilde{h}(\ .\ ,y,\eta,\lambda)},\ u\right)_{L^2} = O\left(e^{-C^{te}.\lambda^{1/s}}\right)$

uniformément pour (y, η') dans un voisinage du point $(0, \zeta_0')$ et : $|\eta''| < \varepsilon$.

Pour prouver complètement notre théorème , il reste à montrer que l'on a encore :

$$\left(e^{i\lambda\tilde{h}(\ .\ ,y,\eta,\lambda)},\ I^W u\right)_{L^2} = O\left(e^{-C^{te}.\lambda^{1/s}}\right)$$

uniformément pour (y, η') dans un voisinage du point $(0, \zeta'_0)$ et : $\varepsilon < |\eta''| < \varepsilon\lambda^{1-1/s}$.

Pour cela nous utiliserons encore une fois la proposition 5.1.

On suppose u à support compact. Rappelons que :

$$\tilde{h}(x, y, \eta, \lambda) = (x' - y')\eta' + \tfrac{i}{2}(x' - y')^2 + \lambda^{(1/s)-1}\left\{(x'' - y'')\eta'' + \tfrac{i}{2}(x'' - y'')^2\right\}$$

et que :

$$L = L_{(y',\eta')} = e^{-i\lambda f(x',y',\eta')}P\left(e^{i\lambda f(\ .,y',\eta')}\right)$$

dont le symbole principal est : $l = p(x, \nabla_x f + \zeta', \zeta'')$.

Ici : $f(x', y', \eta') = (x' - y')\eta' + \dfrac{i}{2}(x' - y')^2$.

Posons : $g(x'', y'', \tilde{\eta}'', \lambda, \tilde{\lambda}) = (x'' - y'')\tilde{\eta}'' + \dfrac{i}{2}\lambda^{1/s}.\tilde{\lambda}^{-1}(x'' - y'')^2$ où :

$$\tilde{\eta}'' = \eta''/\ |\eta''| \ \text{ et } \ \tilde{\lambda} = \lambda^{1/s}.\,|\eta''|\,.$$

On a bien : $$\varepsilon.\lambda^{1/s} < \tilde{\lambda} < \varepsilon.\lambda.$$

Soit $\beta > 0$ assez petit ; il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$|x'' - y''| \leq \alpha \Rightarrow |d_{x''}g - \tilde{\eta}''| \leq \beta.$$

et donc L est non-microcaractéristique dans la direction $d_{x''}g$.

La proposition 5.1 appliquée à l'opérateur conjugué K :

$$K = e^{-i\tilde{\lambda}g}\ L\ e^{i\tilde{\lambda}g}$$

entraine alors l'existence d'une constante $\delta > 0$, d'un voisinage pseudo-convexe $\tilde{U}$ de $\mathbb{C}^n$ contenant 0 et d'un symbole analytique dans la variable x, $\tilde{a}(x, y, \eta, \lambda)$, d'ordre fini, défini sur $\tilde{U}$, (y, η) appartenant à un voisinage de (x_0, ζ^0) et tel que :

(26) $$K\ \tilde{a}(\ .\ , y, \eta, \lambda) = 1 + O(1).\left(e^{-\delta.\lambda^{1/s}}\right).$$

Soit : $$a(x, y, \eta, \lambda) = \tilde{a}(x, y, \eta, \lambda)\ |_{\tilde{U}\cap\mathbb{R}^n}\ .$$

L'hypothèse (i) du théorème 4.4.5 et la définition du front d'onde Gevrey entraine l'existence d'une constante positive C telle que :

$$J_0 = \left(e^{i\lambda\tilde{h}(\ ;\ ,y,\eta,\lambda)}a(\ ;\ \ , y, \eta, \lambda)\mid P^*u\right)_{L^2} = O\left(e^{-C.\lambda^{1/s}}\right)$$

uniformément pour (y, η') dans un voisinage de (x_0, ζ'_0) et :

$$\varepsilon < |\eta''| < \varepsilon.\lambda^{1-1/s}$$

Mais (26) nous donne :

(27) $$J_0 = \left(P\left(e^{i\lambda\tilde{h}(\ ;\ ,y,\eta,\lambda)}a(\ ;\ \ , y, \eta, \lambda)\mid u\right)\right)_{L^2} = \left(e^{i\lambda\tilde{h}(\ ;\ ,y,\eta,\lambda)}\mid u\right)_{L^2} + O\left(e^{-C^{te}.\lambda^{1/s}}\right).$$

(27) a lieu uniformément en (y, η') dans un voisinage de (x_0, ζ_0') et : $\varepsilon < |\eta''| < \varepsilon.\lambda^{1-1/s}$.
La définition du front d'onde Gevrey et (27) nous assure que :

$$(x_0, \zeta^0) = (0, \zeta_0', 0) \notin WF_G^S u.$$

Ceci achève la preuve du théorème 4.4.5.

Remarques et perspectives :

1/ Il semble que notre résultat reste valable dans le cas des operateurs à coefficients Gevrey .

2/ Le problème de l'hypoellipticité Gevrey reste inconnu en général. Toutefois , depuis peu, nous avons des éléments de réponse concernant les opérateurs d'ordr 2 grâce à M.Christ comme nous allons le préciser dans les points suivants.

3/ Soit $L =$ somme de carreés de champs de vecteurs verifiant l'hypothèse du "crochet" à l'ordre r (ou bien la condition de Hormander) dont nous rappelons la définition :

Soient X_j , $1 \leq j \leq p$, p champs définis sur un ouvert Ω. On dit que les X_j verifient la condition de Hormander à l'ordre r si les champs X_j ainsi que leurs crochets d'ordre inférieur ou égal à r engendrent, en chaque point x, l'espace tangent $T_x\Omega$. Autrement dit :

$X_1, X_2, ..., X_p$,$\{[X_i, X_j], 1 \leq i, j \leq p\}, \{[X_i, [X_j, X_k]], 1 \leq i, j, k \leq p\}, ...$engendrent $T_x\Omega$.
Alors : ([M.Derridj - C.Zuily 1973])

$(*)$ L est hypoelliptique Gevrey s si $s \geq r$.

Il a fallut attendre les années 90 pour voir M.Christ (" Examples pertaining to Gevrey Hypoellipticity".Math.Research Letters 4 (1997) 725-733.) casser" la barrière r" et se lancer dans la recherche (qui est toujours en cours) de l'indice Gevrey critique s verifiant $(*)$ c'est à dire du nombre :

$Inf\{s \geq 1 \ tel\ que :$ L soit G^s hypoelliptique.$\}$.

C'est ainsi qu'il exhibe l'exemple suivant dans $\mathbb{R}^3$:

Soient $q \geq p \geq 1.(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.On considère :

$$L_1 = \partial_x^2 + x^{2(p-1)}.\partial_{t_1}^2 + x^{2(q-1)}.\partial_{t_2.}^2$$

(La condition de Hormander est satisfaite à l'ordre $r = q$ en 0.)

Il montre que : L_1 est hypoelliptique Gevrey d'ordre $s \Longleftrightarrow s \geq q/p$.

On peut aussi citer les exemples suivants :

Dans $\mathbb{R}^2$: $L_2 = \partial_x^2 + x^{2(p-1)}.\partial_t^2 + x^{2(p-q-1)}.t^{2r}\partial_t^2,$ $p \geq 2$, $r \geq 1$.

L_2 est hypoelliptique Gevrey d'ordre s si $1/s \leq 1 - q/pr$.

Dans $\mathbb{R}^5$: $p \geq 4$.

$$L_3 = \partial_{x_1}^2 + (\partial_{y_1} + x_1^{p-1}.\partial_t)^2 + \partial_{x_2}^2 + (\partial_{y_2} + x_2.\partial_t)^2.$$

Ces exemples montrent que l'hypoellipticité G^s(aussi bien que la propagation) n'est pas controlée uniquement par la variété caracteristique et que beaucoup reste à faire dans cette direction.

Notons , dans le même esprit , l'exemple suivant suivant dû à L.Rodino [12] :

$$L_4 = \Delta_x + \Delta_y + |x|^2 \Delta_t.$$

qui a conjecturé dèjà en 1983 que L_4 est G^s-hypoelliptique si $s \geq 2$ (du même type que L_1) et que pour $1 \leq s < 2$, il y a propagation des singularités.

REFERENCES.

[1] . J.M.Bony : Extension du théorème de Holmgren .
Séminaire Goulaouic-Schwartz . 1975-76 .N°17.

[2] . J.M.Bony : Propagation des singularités differentiables pour une classe d'opérateurs à coefficients analytiques .
Asterisques 34-35 (1976) .43-91.

[3] . J.M.Bony-P.Schapira : Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles.
Ann.Inst .Fourier (26) N°1 (1976) 81-140 .

[4] . J.J.Duistermaat : Symplectic geometry. Preprint 2004, Utrecht.

[5] . N.Hanges-J.Sjostrand : Propagation of analyticity for a class of non-microcharacteristic operators.
Ann.of Math . 116 (1982) 559-577.

[6] . L.Hormander : L^2-estimates and existence theorems for $\overline{\partial}$ operator .
Acta Math. (1965) 113 . 89-152.

[7] . L.Hormander : Uniquenes theorems and wave front set .
C.P.A.M (1971) . Vol.XXIV.671-704.

[8] . A.Kessab : Propagation du front d'onde Gevrey des solutions d'équations à caracteristiques multiples .
Compt.Rend.Acad.Sci.Tome 299.Serie I . N∘19.21 decembre 1984.

[9] . G.Lebeau : Fonctions harmoniques et spectre singulier .
Ann.Sci.Ec.Norm.Sup.4èmeserie 13 (1980) 269-291.

[10] . O.Liess : Equivalence de deux notions de front d'onde Gevrey.
(Notes received in 1984).

[11] . O.Liess-L.Rodino : Inhomogeneous Gevrey classes and related pseudodifferetial

operators.

Boll.Univ.Mat.Ital. 3-C (1984) 233-323.

[12] .O.Liess-L.Rodino : A general class of Gevrey type pseudodifferetial operators.

Journées Equat.Dériv.Partielles . Saint-Jean de Monts.Conference N°6 .1983.

[13] .A.Melin-J.Sjostrand : Fourier Integral operators whith complex valued phase functions.

Springer Lecture Notes in Math.459 . 121-223.

[14] .L.Rodino -L.Zanghirati : Pseudodifferetial operators with multiple characteristics and Gevrey singularities.

Comm.in Part.Diff.Equ. 11 (17) (1986) 673-711.

[15] .J.Sjostrand : Singularités analytiques microlocales.

Asterisque 95 .(1982).

[16] .J.Sjostrand : Propagation of singularities for operators with multiple involutive characteristics .

Ann.Inst.Fourier.Grenoble. 26.1 (1978) 141-155.

[17] .J.Sjostrand : Analytic singularities and microhyperbolic boundary value problems .

Math.Annalen 254. (1980) 211-256.

DEUXIEME PARTIE

GEVREY REGULARITY FOR SOME P.D.E GOVERNING THE MOTION OF A MICROPOLAR FLUID IN THE THREE DIMENSIONAL CASE.

Pour un caprice singulier
J'avais banni de ces spectacles
Le végétal irrégulier.
C. Baudelaire.

Fluids are important and hard to understand. There are many fascinating problems and conjectures about the behavior of solutions of the Euler and Navier-Stokes equations. Since we dont even know whether these solutions exist, our understanding is at a very primitive level. Standard methods from PDE appear inadequate to settle the problem. Instead, we probably need some deep, new ideas.

Charles L. Fefferman, May 1, 2000.

Princeton University, Department of Mathematics, Princeton, NJ 08544-1000

Introduction :

In this work, we establish a result of Gevrey regularity for (weak) solutions for the following equations describing the movement of an incompressible micropolar fluid in the three dimensional periodical case:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - (\mu+\alpha)\,\Delta v + (v.\nabla)\,v + \nabla p - 2\alpha\,\mathrm{rot}\,w = f_1 \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} - (\gamma+\beta)\,\Delta w - (\varepsilon+\gamma-\beta)\ \nabla\,.\,\mathrm{div}\,w + 4\alpha wp - 2\alpha\,\mathrm{rot}\,v = f_2 \\ div(v) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

with the conditions :

$$\begin{cases} v\,(x,\ 0) = g_1\,(x) \\ w\,(x,\ 0) = g_2\,(x) \\ x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{2}$$

$\mu, \varepsilon, \alpha,\ \beta$ and γ are physical parameters such that : μ, α, β and γ are positive , $3\varepsilon + 2\gamma > 0$; f_1 and f_2 represent respectively the massic force and the massic moment by unity of volume. The equations (1) are a generalisation of Navier -Stokes equations (see [2]) .We look for $v\,(.,\ t)$, $w\,(.,\ t)$ and $p\,(.,\ t)$ supposed to be Q-periodical for all t in $\mathbb{R}_+$, where Q is a cube$(0,\ l)^3$, $l >\ 0$. This last condition will be replaced by boundary conditions in the case of a regular open; the periodicity does not give rise to problems related to the bounday and let the term ∇p vanish. Our present work is inspired from the article of Chen ([1]).

0.1 Notations and Definitions :

Let u be a (vector valued) periodic function on $\mathbb{R}^n$, of periode L :

$u(x+le_j)=u(x),\ e_j$ are the canonical basis in $\mathbb{R}^n$.

For $k\in\mathbb{Z}^n,\ k\neq 0$, we define : $\quad w_{k,j}=(L)^{-n/2}.e^{ikx}e_j$ and for $\alpha,\beta\in\mathbb{C}^n$ we define :

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\alpha.\beta=\sum_{1\leq j\leq n}\alpha_j\beta_j.$$

We denote by $w_k(x)$ the vector : $w_k(x)=(w_{k,1}(x),w_{k,2}(x),...,w_{k,n}(x))$.

Then u will have an expansion :

$$u\simeq\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}u_k.w_k\ ,\ u_k\in\mathbb{C}^n.$$

where $u_k\in\mathbb{C}^n,\ u_k=\int\limits_Q u.w_{-k}dx, Q=(0,L)^n$. ($n=3$ in our situation)

If we want u to be real we must impose : $\overline{u_k}=u_{-k}\ ,\ k\in\mathbb{Z}^n$.

a) If $H^m(Q)$denotes the Sobolev space of order m, we denote by $\mathbb{H}^m$ the space $(H^m)^3$ .We respectively denote by $(.,\ .)$ and $(.(.,\ .))$ the scalar products in $L^2(Q)$ and $(L^2(Q))^3$and by $|.|,||.||$ the corresponding norms.We denote by:

$$\mathbb{L}^2(Q)=\left(L^2(Q)\right)^3$$

b) Taking $l=2\pi$ (for simplification) and using the Fourier series, we show that:

$\mathbb{L}^2(Q)=\{u\ /u=\sum u_je^{ijx},\ u_j\in\mathbb{C}^3,u_{-j}=\overline{u}_j$ and $\sum_{j\in\mathbb{Z}^3}|u_j|^2=\frac{1}{(2\pi)^3}||u||^2<\infty\}$

for this, see [4]. We set in the following :

$$H=\left\{u\in\mathbb{L}^2(Q):\ j.u_j=0,\ \forall j\in\mathbb{Z}^3\ and\ u_0=0\right\}.$$

H is then a closed subspace of $\mathbb{L}^2(Q)$.

Remark 1 $\quad j.u_j=0\Leftrightarrow\operatorname{div}(u)=0$ *and* $u_0=0$ *comes from the fact that we can always suppose* $\displaystyle\int_Q u_0=0$,*when we deal with Navier-Stokes equations, see* [4].

Definition 1 *Let A be the operator defined on $D(A)$ into H by:*

$$D(A) = \left\{ u \in H / \ \sum |j|^4 . |u_j|^2 < \infty \right\}$$

and

$$A(u) = \sum |j|^2 u_j e^{ijx}, \ \forall u \in D(A).$$

Definition 2 ***a)*** *A is nothing else than the non bounded operator $-\Delta$ on H.*
b) *$D(A)$ is a Hilbert space equipped with the norm:*

$$\|u\|_{D(A)} = ||Au||$$

and $A : D(A) \longrightarrow H$ is an isomorphism.(see for exemple [4].)

Definition 3 *Let $\alpha > 0$. We define the operator $A^\alpha : D(A^\alpha) \longrightarrow H$ defined by :*

$$D(A^\alpha) = \left\{ u \in H \ : \sum_{j \in \mathbb{Z}^3} |j|^{4\alpha} . |u_j|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} ||A^\alpha u||^2 < \infty \right\}$$

$$A^\alpha(u) = \sum |j|^{2\alpha} u_j e^{ijx}, \ \forall u \in D(A)$$

Remark 2 $(e^{ijx})_{j \in \mathbb{Z}^3}$ *is an orthonormal basis of* $\mathbb{L}^2(Q)$ *and* $\left\{|j|^2\right\}_{j \in \mathbb{Z}^3*}$ *are the eigenvalues corresponding to the operator A.*
Owing to the introduction of Fourier series as in [4], *we have the characterization of the Sobolev space*

$$\mathbb{H}^m(Q) : \mathbb{H}^m(Q) = \left\{ u \ / \ u = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} u_k e^{ikx}, \ \overline{u}_k = u_{-k}, \ \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} |k|^{2m} |u_k|^2 < \infty \right\}$$

Thanks to this characterization, it is clear that $||A^{\alpha}u||$ *is equivalent to* $\|u\|_{\mathbb{H}^{2\alpha}(Q)}$ *, which quantity will be later denoted by* $||u||_{\alpha}$ *.*

Notice that $||u||_m$ *is equivalent to the norm:* $\left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \left(1+|k|^{2m}\right) . |u_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$.

<u>The Leray's projector :</u>

Let us recall that if Ω *is an open , bounded (enough smooth) , we define classically the spaces :*

$$V_0 = \{u \in (H_0^1(\Omega))^n / Div(u) = 0\} \text{ and } H_0 \text{ it's closure in } (L^2(\Omega))^n.$$

Let $P \ : (L^2(\Omega))^n \longmapsto H_0$

be the orthogonal projector : we refer to it as the Leray projector.

Let L be the operator $L = -P\Delta$ (Stokes operator) :

$$L \ : \ D_L \to H_0 \ , \ D_L = V_0 \cap (H^2(\Omega))^n.$$

We have the resultats :

1/ L is selfadjoint.

2/If $u \in (H_0^1(\Omega))^n$ then $Pu \in (H^1(\Omega))^n$.

We know that there is an unique solution $u \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^n$ for the problem :

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f \\ \quad Div(v) = 0 \end{cases} , \ \nabla p \ et \ f \in (L^2(\Omega))^n.$$

In this situation : $\nabla p \in (H^1(\Omega))^n$ and $\forall \varphi \in V_0$: $(\nabla p, \varphi) = 0$.

Using the density (of V_0 in H_0), we conclude that ∇p is in the orthogonal of H_0.

Then : $-P\Delta u = f$.

So the essential role of P is to eliminate the pressure p.But it is necessary to notice that P and $-\Delta$ do not commutate in general . However, in the abscence of boundaries ($\Omega = \mathbb{R}^n$ or $\Omega = \mathbb{T}^n$ the $n-$dimensional torus which is our case) , P and $-\Delta$ commutate. We will not point out it in the next , in our case, $D(A)$ playing the rôle of D_L and H that of H_0.

0.2 The Gevrey class $\mathbf{D}\left(e^{\sigma A^{\alpha}}\right)$:

Let α and σ be positive. We define :

$$D\left(e^{\sigma A^{\alpha}}\right) = \left\{ u \in H \ / \ \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{j \in \mathbb{Z}^3} e^{2\sigma|j|^{2\alpha}} . \left|u_j\right|^2 = \left|\left|e^{\sigma A^{\alpha}} u\right|\right|^2 < \infty \right\}$$

where $||.||$ has the same signification as in 2 and $e^{\sigma A^{\alpha}} u = \sum_{j \in Z^3} e^{\sigma|j|^{2\alpha}} . u_j e^{ijx}$.

Note that if $u \in D\left(e^{\sigma A^{\alpha}}\right)$, then $|u_j| < c.e^{-\sigma|j|^{2\alpha}}$ is exponentially decreasing.

we denote in the following:

$$\left|\left|e^{\sigma A^{\frac{\alpha}{2}}} u\right|\right| = |u|_{\sigma,\, \alpha} \ and \ \left(e^{\sigma A^{\frac{\alpha}{2}}} u,\ e^{\sigma A^{\frac{\alpha}{2}}} v\right) = (u,\ v)_{\sigma,\, \alpha}$$

with these notations let's recall the result established in [1] for the equation:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \triangledown)\, u + \triangledown p & = & f \\ \\ \operatorname{div}(u) & = & 0\,,\ (x,\ t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \\ u\,(x,\ 0) & = & u_0\,(x)\,,\ x \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right. \tag{3}$$

where $u\,(.,\ t)$and $p\,(.,\ t)$are $Q-$periodic for all t in $\mathbb{R}_+$.

(3) may be reduced to:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{du}{dt} + \nu A u + B u & = & f \\ u\,(0) & = & u_0 \end{array} \right. \tag{4}$$

where B is a bilinear form defined by : $B\,(u,\ v) = P\,(u \cdot \triangledown v)$, for all $u,\ v$ in $D\,(A)$, P being the orthogonal projection on H and $Bu = B(u, u)$. (see [4]).

Remark 3 *Thanks to the fact that* $\operatorname{div} u = 0$*, the term* $(u.\nabla)\, u$ *writes as:*
$(u.\nabla)\, u = \sum_{i=1}^{3} \operatorname{div}(u_i.u) = \nabla.\left(u \bigotimes u\right)$ *.As* $u \bigotimes u$ *belongs to* $\mathbb{L}^1$ *whenever* u *is in* $\mathbb{L}^2(Q)$*,* $(u.\nabla)\, u$ *has a sense in* $D'(\mathbb{R}^3)$*.*

We can now recall the theorems obtained by C. Foias-Guillope and R. Temam :

Theorem 4 [3]*: Suppose* $u_0 \in H$*,* $f \in L^\infty\left(\mathbb{R}_+,\ D\left(A^{(m-1)/2}\right)\right)$ *for* $m \in \mathbb{N}^*$*. Then there exists at least a (weak) solution* u *of the problem* (4) *and an open* Ω *in* $\mathbb{R}_+$ *whose complementary is of measure zero such that :*

$u : \Omega \longrightarrow D\left(A^{m/2}\right)$ *is continuous. Further :*

$$\int \frac{\left|A^{(m+1)/2} u(t)\right|^2}{\left(1 + \left|A^{m/2} u(t)\right|^2\right)^{\frac{2m}{2m-1}}} dt \leq K_1 (1+T)$$

where 'weak solution' is in the "Leray" sense and we recall this definition :

Definition 5 *: (see* [1] , [3] *and* [7] *) .*

Set $V = D\left(A^{1/2}\right)$ and V' the dual of V. Let $f \in L^2(0,T;V')$ and $u_0 \in H$.
A weak solution of (4) is a function u verifying :
$u \in L^2(0,T;V)$ such that : $\dfrac{du}{dt} \in L^1(0,T;V')$ and :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \nu A u + B u &= f \text{ in } V' \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

Theorem 6 ([3] , [5]) *: Suppose* $u_0 \in D\left(A^{1/2}\right)$ *and* $f \in L^\infty\left(\mathbb{R}_+,\ D\left[e^{\delta A^{\frac{\alpha}{2}}}\right]\right)$ *for* $\delta > 0$ *and* $\alpha \in]0,\ 1[$*. Then there exists* T_1 *depending on* $\nu, Q, \delta, \|f\|_{L\infty}$ *and on* u_0 *such that the problem (4) has an unique solution on* $[0,\ T_1]$ *, verifying:*

$$[0,\ T_1] \longrightarrow H$$

$$t \mapsto e^{\delta t A^{\frac{\alpha}{2}}}.A^{\frac{1}{2}} u(t) \quad \textit{continuous}$$

: Suppose that $u_0 \in H,\ f \in L^{\infty}\left(\mathbb{R}_+,\ D\left[e^{\delta A^{\frac{\alpha_0}{2}}}\right]\right)$ for given $\delta > 0,\ \alpha_0 \in]0,\ 1[$. Then there exists a (weak) solution u of *(*4*)*, an open set Ω in $]0,\ +\infty[$ whose complementary is of measure zero, such that :

a) $\forall \sigma > 0,\ 0 < \alpha < \alpha_0 : t \longrightarrow u(t)$ is continuous from Ω into $D\left(e^{\sigma A^{\frac{\alpha}{2}}}.A^{\frac{1}{2}}\right)$.

b) if $\alpha_0 > \alpha_* = \dfrac{\ln(5/3)}{\ln(2)}$, we have *:*

$$\int_0^T \frac{\left|e^{\sigma A^{\frac{\alpha_*}{2}}}.Au(t)\right|^2}{\left(1 + \left|e^{\sigma A^{\frac{\alpha_*}{2}}}.A^{\frac{1}{2}}u(t)\right|^2\right)} dt \leq K(1+T)$$

where $K = K(v,\ Q,\ \|f\|,\ |u_0|)$ and $\|f\|_{L^{\infty}\left(\mathbb{R}_+,\ D\left(e^{\sigma A^{\frac{\alpha_*}{2}}}\right)\right)} = \|f\|$.

We write the problem (1) under the following form :

We set $G = (g_1,\ g_2)$, $U = (v, w)$, $F = (f_1,\ f_2)$ and

$$\widetilde{\Delta} = \begin{bmatrix} \{-(\mu+\alpha)\Delta v + (v.\nabla)v - 2\alpha \operatorname{rot} w\}, \\ \qquad \{-(\gamma+\beta)\Delta w - (\varepsilon+\gamma-\beta)\nabla.\operatorname{div} w + 4\alpha w - 2\alpha \operatorname{rot} w\} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} div^*(U) = div^*(v,\ w) & = & div(v) \\ \nabla^* p & = & (\nabla p,\ 0) \end{cases}$$

We take in the following $\gamma + \beta = \mu + \alpha = \nu.$, $\varepsilon + \gamma - \beta = 1$ and $\alpha = 1$.we finally set $\Delta^* = \frac{1}{\nu}\widetilde{\Delta}$. The problem (1) becomes then :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} - \nu\Delta^* U - \nabla^* p = F \quad sur\ \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}_+. \\ \operatorname{div}^*(U) = 0 \\ U(0) = G \quad sur\ \mathbb{R}^6 \end{cases} \tag{5}$$

Theorem 7

We also suppose that :

$$\int_Q g_{1=} \int_Q g_2 = 0$$

which is no restriction, see for this [4]. *Multiplying in (5) by* $U' = \left(v^{'},\ w'\right)$ *in an appropriate space, and integrating by parts over a period,we show that: (see by exemple*[4]*) :*

$$\frac{d}{dt}\left(U,\ U'\right) + \left\{\int \nabla v \nabla v' + \int \nabla w \nabla w'\right\} + \left\{\left(S\left(U,\ U\right),\ U'\right)\right\} = \left(F,\ U'\right)$$

here $\left(U,\ U'\right) = \int U.U'$ *and* $\left\{S\left(U,\ U\right),\ U'\right\} = \int \left(v.\nabla v\right).v' - 2\int \operatorname{rot} w.v' - \int \nabla.\operatorname{div} w.w' + 4\int w.w' - 2\int \operatorname{rot} w.w'$

Unfortunately here $S\left(U,\ V\right)$ is not a bilinear form as in [1]. The problem consists next to give an estimation of this quantity in an appropriate Gevrey class. In (6) the term $\int (v.\bigtriangledown v).v'$ comes from the trilinear form :

$$b(u,\ v,\ w) = \int (u.\nabla v)w$$

and we can then , for the later estimations consider the bilinear form B already introduced :

$$\langle B(u,v), w\rangle = b\left(u,\ v,\ w\right)$$

because then $\int (v.\nabla v)\, v' = \langle B\,(v,\ v)\,,\ v'\rangle$ and we use the estimations as in [1].

Set $B^*\,(U) = B^*\,(U,\ U)$ where : $\langle B^*(U), U'\rangle = \int (v.\nabla v)\, v'$ and

$\langle B^*\,(U,\ Y)\,, U'\rangle = \int (v.\nabla y_1)\, v'$ where $Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^6$.

The problem (5) becomes then:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + \nu\mathcal{A}U + B^*\,(U) + S^\circ\,(U) = F \\ U\,(0) = G \\ \mathcal{A} = -\,(\Delta v,\ \Delta w) \end{cases} \tag{6}$$

where $S^\circ\,(U) = S\,(U,\ U)$, with :

$$(S^\circ\,(U)\,,\ U') = 4\int w.w' - 2\int [\mathrm{rot}\, w.w' + \mathrm{rot}\, w.v'] - \int \nabla.\,\mathrm{div}\,(w)\,.w' \tag{7}$$

0.3 Estimation of the term $S^0\,(U)$ in the Gevrey spaces:

If $||.||$ is the norm on $\mathbb{L}^2\,(Q) = \left(L^2\,(Q)\right)^3$, we denote by $\|\ .\ |$ the norm on $\left(L^2\,(Q)\right)^6$ and let H as already introduced.

Definition 8 *: If $\mathcal{A}$ is the operator given in (7), we define the domain of $\mathcal{A}$ by :*

$$D\,(\mathcal{A}) = \left\{(v, w) \in H \times \mathbb{L}^2\,(Q)\ \ / \sum |k|^4 \left(|v_k|^2 + |w_k|^2\right) = \|\mathcal{A}U|^2 < \infty\right\}$$

and

$$\mathcal{A}\,(U) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} |k|^2\,(v_k,\ w_k)\, e^{ikx},\ \forall U = (u,\ w) \in D\,(\mathcal{A})\,.$$

the term w_0 being supposed to be zero as in the remark 1.

Remark 4 *: $D(\mathcal{A})$ is a Hilbert space equipped with the norm :*

$$\|U\|_{D(\mathcal{A})} = \|\mathcal{A}U| .$$

Definition 9 *: The operator $\mathcal{A}^\alpha,\ \alpha > 0$:*

We define $\mathcal{A}^\alpha : D(\mathcal{A}^\alpha) \longrightarrow H \times \mathbb{L}^2(Q)$ by:

$$D(\mathcal{A}^\alpha) = \left\{ U = (v, w) \in H \times \mathbb{L}^2(Q) \ / \ \sum_{j \in \mathbb{Z}^3} |j|^{4\alpha} \left(|v_j|^2 + |w_j|^2 \right) \right. \\ \left. = \frac{1}{(2\pi)^3} \|\mathcal{A}^\alpha U|^2 < \infty \right\}$$

Remark 5 *: (for the notations see the previous pages and remark 3.)*

The characterization of $\mathbb{H}^m(Q)$ also gives:

a) $\|\mathcal{A}^m U| \simeq ||U||_{\mathbb{H}^{2m}(Q) \times \mathbb{H}^{2m}(Q)}$

b) $||U||_m^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \left(1 + |k|^{2m}\right) \left(|v_k|^2 + |w_k|^2\right).$

Definition 10 *: **The Gevrey space** $D\left(e^{\sigma \mathcal{A}^\alpha}\right)$:*

Let $\alpha,\ \sigma$ be positive, we define :

$$D\left(e^{\sigma \mathcal{A}^\alpha}\right) = \left\{ U \in H \times \mathbb{L}^2(Q) \ / \ \sum e^{2\sigma |k|^{2\alpha}} \left(|v_k|^2 + |w_k|^2\right) \right. \\ \left. = (2\pi)^3 \left\| e^{\sigma \mathcal{A}^\alpha} U \right|^2 < \infty \right\} \tag{8}$$

where $\|.|$ has the same meaning as in the previous pages. Indeed :

$$\mathcal{A}^\alpha U = \sum |k|^{2\alpha} (v_k,\ w_k)\, e^{ikx}. \tag{9}$$

Set :

$$|U|_{\sigma,\,\alpha} = \| \, e^{\sigma\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}} U \, |$$

and $(U,\ V)_{\sigma,\,\alpha}$ *the scalar product in the space* $D\left(e^{\sigma\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$*:*

$$(U,\ V)_{\sigma,\,\alpha} = \left(e^{\sigma\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}} U,\ e^{\sigma\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}} V\right)$$

Let $U,\ V,\ W$ *be in* $D\left(e^{\sigma\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}}\mathcal{A}\right),\ \alpha \in \left]0,\ 1\right[$*. Now the matter is to estimate, for* $\mathcal{A}U$ *in* $D\left(e^{\sigma\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$ *that is for* $U \in D\left(e^{\sigma\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}}\mathcal{A}\right)$*, the quantity:* $\left(S^{\circ}(U),\ \mathcal{A}U\right)_{\sigma,\,\alpha}$ *where* S° *is as in (8). Remind first that if* B *is the aforementionned bilinear form , we have the following result in our case whose proof follows step by step that of* [1]*.*

Proposition 11 *: Let* $U,\ V,\ W \in D\left(e^{\sigma\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}}\mathcal{A}\right),\ \alpha \in \left]0,\ 1\right[$*, then :*

$$\begin{aligned}\left|\left(B^{*}(U,\ V),\ \mathcal{A}W\right)_{\sigma,\,\alpha}\right| \quad &\leq \quad c_1 \left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|^{\frac{1}{2}}_{\varepsilon_\alpha\sigma,\,\alpha} \cdot \left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}V\right|_{\sigma,\,\alpha} \cdot \left|\mathcal{A}U\right|^{\frac{1}{2}}_{\varepsilon_\alpha\sigma,\,\alpha} \cdot \left|\mathcal{A}W\right|_{\sigma,\,\alpha} \\ &\quad + c_2 \left|\mathcal{A}V\right|^{\frac{1}{2}}_{\varepsilon_\alpha\sigma,\,\alpha} \cdot \left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}V\right|^{\frac{1}{2}}_{\varepsilon_\alpha\sigma,\,\alpha} \cdot \left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|_{\sigma,\,\alpha} \cdot \left|\mathcal{A}W\right|_{\sigma,\,\alpha}\end{aligned}$$

with: $\varepsilon_\alpha = 2^\alpha - 1,\ \varepsilon_\alpha \in \left]0, 1\right[$*. In the second term of the sum, we exchange* U *into* V *.*

Remark now that :

a/ the term $\int ww'$ *writes as :*

$$\int ww' = \sum_{l,\,k\in\mathbb{Z}^3} w_k.w'_l. \int_Q e^{i(k+l)x}dx = (2\pi)^3 \sum w_k.w'_{-k}, \quad (periodicity)\,.$$

If $w=\sum_{k\in\mathbb{Z}^3} w_k e^{ikx},\ w'=\sum_{l\in\mathbb{Z}^3} w'_l e^{ilx},\ k,\ l\in\mathbb{Z}^3.$

b/ the term $\int \nabla.\operatorname{div}(w).w'$*is computed as :*

First $\operatorname{div} w = i\sum \langle k,\ w_k\rangle e^{ikx}$, $k\in\mathbb{Z}^3$, then :

$$\int \nabla \operatorname{div}(w).w' = \int \sum_{k,\ l} \langle k,\ w_k\rangle . \langle w'_l,\ k\rangle e^{i(k+l)x}$$

and then :

$$\int \nabla \operatorname{div}(w).w' = (2\pi)^3 \sum \langle k,\ w_k\rangle . \langle k, w'_{-k}\rangle$$

c/ the term $\int \operatorname{rot} w.w'$:

By correctly writing $\operatorname{rot} w$ where :

$$w=\sum_{k\in\mathbb{Z}^3} \left(w_k^1,\ w_k^2,\ w_k^3\right) e^{ikx},\ w_k=\left(w_k^1,\ w_k^2,\ w_k^3\right)$$

we get :

$$\int \operatorname{rot} w.w' = i(2\pi)^3 \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} \langle k,\ U_k\rangle,\ k\in\mathbb{Z}^3$$

where U_k is a vector whose components behave as the scalar product $w_k.w'_k$, More precisely :

$$U_k=\left(w_k^2.w'^3_{-k}-w_k^3.w'^2_{-k},\ w_k^3.w'^1_{-k}-w_k^1.w'^2_{-k},\ w_k^1.w'^2_{-k}-w_k^2.w'^1_{-k}\right)$$

For the term $\int \operatorname{rot} w.v'$we have a similar writing. The remarks (a), (b), and (c) allow now to use the proposition 1 to show exactly the same theorem of W. Chen already stated, with the non linear terms behaving as scalar products for the problem (7).

Remind that :

$$\begin{aligned}(S^\circ(U),\ \mathcal{A}U)_{\sigma,\ \alpha} &= \left(e^{\sigma\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}} S^\circ(U),\ e^{\sigma\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}}\mathcal{A}U\right)\\ &= \left(S^\circ(U),\ e^{2\sigma\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}}\mathcal{A}U\right)\end{aligned}$$

$\mathcal{A}U$ writes :

$$\mathcal{A}U=\sum_{j\in\mathbb{Z}^3} |j|^2 (v_j,\ w_j)\, e^{ijx}$$

and then

$$e^{2\sigma\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}}.\mathcal{A}U=\sum_{j\in\mathbb{Z}^3}e^{2\sigma|j|^\alpha}\,|j|^2\,(v_j,\ w_j)\,e^{ijx}=(v',\ w')$$

The previous remark gives for the points a and c :

$$\int w.w'=(2\pi)^3\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}e^{2\sigma|k|^\alpha}.\,|k|^2\,.w_k.w'_{-k} \tag{10}$$

and finally following the remark concerning (c) :

$$\int \operatorname{rot} w.w'=\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}\left\langle R_k,w'_{-k}\right\rangle. \tag{11}$$

where $R_k=\left(k_2w_k^3-k_3w_k^2,\ k_3w_k^1-k_1w_k^3,\ k_1w_k^2-k_2w_k^1\right)$,with $w_k=\left(w_k^1,\ w_k^2,\ w_k^3\right)$ and $k=(k_1,\ k_2,\ k_3)\in\mathrm{Z}^3$. consequently:

$$\int \operatorname{rot} w.w'=(2\pi)^3\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}e^{2\sigma|k|^\alpha}.\,|k|^2\,R_k.\overline{w'}_k$$

Of course $\overline{w}_k=w_{-k}$. Finally :

$$\int \operatorname{rot} w.v'=(2\pi)^3\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}e^{2\sigma|k|^\alpha}.\,|k|^2\,.S_k.v_k.$$

Note that : $\|R_{\cdot k}\|\leq C\,|k|\,.\,|w_k|$ and $\|S_k\|$ verify a similar inequality. We have then :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{(2\pi)^3}\left(S^\circ(U)\,,\ \mathcal{A}U\right)_{\sigma,\alpha}\ =\ & 4\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}e^{2\sigma|k|^\alpha}.\,|k|^2\,.w_k.w_{-k}\\ &-\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}e^{2\sigma|k|^\alpha}\left\langle k,\ w_k\right\rangle.\left\langle k,w_{-k}\ \right\rangle\\ &-2\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}R_ke^{2\sigma|k|^\alpha}.\,|k|^2\,.\overline{w}_k\\ &-2\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}e^{2\sigma|k|^\alpha}.\,|k|^2\,.S_k.v_k.\end{aligned}$$

Set $J_1=4\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}e^{2\sigma|k|^\alpha}.\,|k|^2\,.w_k.w_{-k}-\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}e^{2\sigma|k|^\alpha}\left\langle k,\ w_k\right\rangle.\left\langle k,w_{-k}\ \right\rangle-2\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}R_ke^{2\sigma|k|^\alpha}.\,|k|^2\,.\overline{w}_k$

the first term in the previous sum and J_2 the second term .We then have the following proposition :

Proposition 12 *: Let $U = (v, w) \in D\left(e^{\sigma \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}}.\mathcal{A}\right), \alpha \in]0, 1[$. The following estimations hold :*

a) $|J_1| \leq c_0. \left|\mathcal{A}^{1l2}U\right|^2_{\sigma,\alpha}.$

b) $|J_2| \leq c_\nu. \left|\mathcal{A}^{1l2}U\right|^2_{\sigma,\alpha} + \frac{\nu}{8} \left|\mathcal{A}U\right|^2_{\sigma,\alpha}.$

Proof. et: $\xi = \sum_{j\in\mathbb{Z}^3} |j| \, |w_j| \, e^{\sigma|j|^\alpha}.e^{ijx}.$

We have:

$$|J_1| \leq c. \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} |k|^2 \, |w_k|^2 \, e^{2\sigma|k|^\alpha} = \mu_\alpha$$

with the help of the following integral μ_α expresses as:

$$\mu_\alpha = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Q \xi.\xi dx.$$

which gives : $$\mu_\alpha \leq c. \, |\xi|^2_{L^2(Q)} \quad .$$

Or $$|\xi|_{L^2(Q)} = (2\pi)^3. \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} |k|^2 \, |w_k|^2 \, e^{2\sigma|k|^\alpha} = \left|\mathcal{A}^{1l2}U\right|^2_{\sigma,\alpha}$$ that is to say (a) .

(b) taking in consideration (13) and the remark which follows it, we have: ■

$$|J_2| \leq c_1. \sum_{k\in\mathbb{Z}^3} . \, |k|^3 \, |w_k| \, . \, |v_k| \quad e^{2\sigma|k|^\alpha}$$

Set : $$\xi = \sum_{j\in\mathbb{Z}^3} |j| \, |w_j| \, e^{\sigma|j|^\alpha}.e^{ijx}$$ the same as in (a) .

and $$\eta = \sum_{j\in\mathbb{Z}^3} |j|^2 \, |v_j| \, e^{\sigma|j|^\alpha}.e^{ijx}.$$

We have then : $\quad |J_2| \leq c_2. \int_Q \xi.\eta dx. \leq c_2. |\xi|_{L^2(Q)} . |\eta|_{L^2(Q)}$.

But $$|\xi|^2_{L^2(Q)} \leq c_2. \left|\mathcal{A}^{1l2}U\right|^2_{\sigma,\alpha} \quad .$$

by the same way and by correctly computing $|\eta|_{L^2(Q)}$ we get :

$$|\eta|_{L^2(Q)} \leq c_3. |\mathcal{A}U|_{\sigma,\alpha} \quad .$$

Consequently: $\quad |J_2| \leq c_4. |\mathcal{A}U|_{\sigma,\alpha} . \left|\mathcal{A}^{1l2}U\right|_{\sigma,\alpha}$ which obviously gives (b).

we now have the following result :

Lemma 13 *: (see* [1])

a) $\left\|\mathcal{A}^{1l2}U\right|_{\varepsilon_\alpha,\sigma,\alpha} \leq \left\|\mathcal{A}^{1l2}U\right|^{1-\varepsilon_\alpha} . \left|\mathcal{A}^{1l2}U\right|^{\varepsilon_\alpha}_{\sigma,\alpha}$

b) $\|\mathcal{A}U|_{\varepsilon_\alpha.\sigma,\alpha} . \leq \|\mathcal{A}U|^{1-\varepsilon_\alpha} . |\mathcal{A}U|^{\varepsilon_\alpha}_{\sigma,\alpha}$.

The proof is similar to the one given in [1] .

Lemma 14 *: (see* [1]*) .Let* $U = (v, w) \in \ D\left(e^{\sigma\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}}\mathcal{A}\right)$, $\alpha \in]0,1[$.

We have the following estimation :

$$\left|(B^{*2}(U,\ U),\ \mathcal{A}U)_{\sigma,\alpha}\right| \ \leq \ c_1 \left|\mathcal{A}^{1l2}U\right|^{4/3}_{\sigma,\alpha} . \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|^{1/6} . \|\mathcal{A}U|^{1/6} . |\mathcal{A}U|^{4/3}_{\sigma,\alpha} .$$

Proof. Reporting (a) and (b) from lemma 1 into the inequality of the proposition 1, we get:

$$\left|(B(U,\ U),\ \mathcal{A}U)_{\sigma,\alpha}\right| \ \leq \ c_1 \left|\mathcal{A}^{1l2}U\right|^{1-\frac{\varepsilon_\alpha}{2}}_{\sigma,\alpha} . \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|^{1+\frac{\varepsilon_\alpha}{2}} . \|\mathcal{A}U|^{1+\frac{\varepsilon_\alpha}{2}} . |\mathcal{A}U|^{1-\frac{\varepsilon_\alpha}{2}}_{\sigma,\alpha} .$$

For $\varepsilon_\alpha = \frac{2}{3}$ that is for $\alpha = \alpha_\star = \dfrac{\log(5/3)}{\log 2}$,we get the inequality stated in the lemma 2.

We can now state our theorem of regularity. ■

Theorem 15 *: Suppose that $U(0) = G \in H \times \mathbb{L}^2(Q)$ and for given $\delta > 0,\ \alpha_0 \in]o, 1[$, that :*

$F \in \mathbb{L}^\infty\left(\mathbb{R}_+,\ D\left(e^{\delta \mathcal{A}^{\frac{\alpha_0}{2}}}\right)\right)$. Then there exists a (weak) solution of problem (7) and an open set Ω in $]0, +\infty[$ whose complementary is of measure zero such that :

a) $\forall \sigma > 0,\ 0 < \alpha < \alpha_0$, the function :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & D\left(e^{\sigma \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}}.\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\right) \\ t & \mapsto & U(t) \end{array}$$

be continuous.

b) if $\alpha_0 > \alpha_* = \dfrac{\ln(5/3)}{\ln 2}$, we have :

$$\int_0^T \frac{\left\|e^{\sigma \mathcal{A}^{\frac{\alpha_*}{2}}}.\mathcal{A}U(t)\right|^2}{\left(1 + \left\|e^{\sigma \mathcal{A}^{\frac{\alpha_*}{2}}}.\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U(t)\right|^2\right)^2} dt \leq K(1+T)$$

Where $K = K(\nu,\ Q,\ \|F\|,\ |U(0)|)$, with $\|F\| = \|F\|_{\mathbb{L}^\infty\left(\mathbb{R}_+,\ D\left(e^{\sigma \mathcal{A}^{\frac{\alpha_*}{2}}}\right)\right)}$.

Proof. $\mathcal{A}U \in D\left(e^{\sigma \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$or equivalently $U \in D\left(e^{\sigma \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}}\mathcal{A}\right)$, we have :

$$\left(\frac{dU}{dt},\ \mathcal{A}U\right)_{\sigma,\alpha} + v(\mathcal{A}U,\ \mathcal{A}U)_{\sigma,\alpha} = (F,\ \mathcal{A}U)_{\sigma,\alpha} - (BU,\ \mathcal{A}U)_{\sigma,\alpha} - (S^\circ(U,\ \mathcal{A}U))_{\sigma,\alpha}$$

which yields

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U,\ \mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right)_{\sigma,\alpha} + \nu|\mathcal{A}U|^2_{\sigma,\alpha} = (F,\ \mathcal{A}U)_{\sigma,\alpha} - (BU,\ \mathcal{A}U)_{\sigma,\alpha} - (S^\circ(U,\ \mathcal{A}U))_{\sigma,\alpha}$$

which gives

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|^2_{\sigma,\alpha}+\nu\left|\mathcal{A}U\right|^2_{\sigma,\alpha}\leq\left|F\right|_{\sigma,\alpha}.\left|\mathcal{A}U\right|_{\sigma,\alpha}+\left|\left(BU,\ \mathcal{A}U\right)_{\sigma,\alpha}\right|+\left|\left(S^{\circ}\left(U,\ \mathcal{A}U\right)\right)_{\sigma,\alpha}\right|$$

The propositions 1 and 2 give for $\varepsilon_{\alpha_*}=\dfrac{2}{3},\alpha_0>\alpha_*,\ F\in D\left(e^{\delta\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}}\right),\ \delta>0$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}+\nu\left|\mathcal{A}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}\leq\ &\left|F\right|_{\sigma,\alpha_*}.\left|\mathcal{A}U\right|_{\sigma,\alpha_*}\\&+C_1\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|^{4/3}_{\sigma,\alpha_*}.\left|\mathcal{A}U\right|^{4/3}_{\sigma,\alpha_*}.\left\|\mathcal{A}^{1l2}U\right|^{1/6}.\left\|\mathcal{A}U\right|^{1/6}\\&+c_0\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}+\ \tfrac{\nu}{8}\left|\mathcal{A}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}+c_\nu.\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}\end{aligned}$$

We first have :

$$\left|F\right|_{\sigma,\alpha_*}.\left|\mathcal{A}U\right|_{\sigma,\alpha_*}\leq\frac{8}{\nu}\left|F\right|^2_{\sigma,\alpha_*}+\frac{\nu}{8}\left|\mathcal{A}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}$$

then by Young's inequality : $ab\leq\varepsilon a^p+C_\varepsilon b^q,\ 1<p<\infty,\ \varepsilon>0$. By taking $\varepsilon=\dfrac{\nu}{8C_1},\ p=3/2$ and $q=3$, we have:

$$C_1\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|^{4/3}_{\sigma,\alpha_*}.\left|\mathcal{A}U\right|^{4/3}_{\sigma,\alpha_*}.\left\|\mathcal{A}^{1l2}U\right|^{1l6}.\left\|\mathcal{A}U\right|^{1l6}$$

$$\leq\tfrac{\nu}{8}\left|\mathcal{A}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}+C_\nu\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|^4_{\sigma,\alpha_*}.\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|^{1l2}.\left|\mathcal{A}U\right|^{\frac{1}{2}}$$

It follows :

$$\frac{d}{dt}\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}+\nu\left|\mathcal{A}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}$$

$$\leq \widetilde{C}_\nu\left(\left\{|F|^2_{\sigma,\alpha_*}+\left[\left\|\mathcal{A}^{1l2}U\right|.\left\|\mathcal{A}U\right|^{\frac{1}{2}}\right]\right\}.\left(1+\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}\right)^2+\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}\right).$$

and then :

$$\frac{\frac{d}{dt}\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}+\nu\left|\mathcal{A}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}}{\left(1+\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}\right)^2}\leq \widetilde{C}_\nu\left\{|F|^2_{\sigma,\alpha_*}+\left[\left\|\mathcal{A}^{1l2}U\right|.\left\|\mathcal{A}U\right|\right]^{1l2}+1\right\}. \qquad (12)$$

Let now Ω be the open of regularity $D\left(e^{\sigma\mathcal{A}^{\frac{\alpha_*}{2}}}\mathcal{A}^{1l2}\right)$ given in the theorem **3**,

$\Omega=\bigcup_j]a_j,\ b_j[$,and $]a_j,\ b_j[$ interval of maximal regularity :

$$\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U(t)\right|_{\sigma,\alpha_*}\longrightarrow+\infty\quad as\quad t\longrightarrow b_j.\ \blacksquare$$

If $\Lambda(t)$ denotes the first member of the inequality (14), we get by integration on $(a_j,\ b_j)$:

$$\int_{a_j}^{b_j}\Lambda(t)\,dt=\nu\int_{a_j}^{b_j}\frac{\left|\mathcal{A}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}}{\left(1+\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}\right)^2}dt+\frac{1}{\left(1+\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U(a_j^-)\right|^2_{\sigma,\alpha_*}\right)}$$

It follows :

$$\int_{a_j}^{b_j}\frac{\left|\mathcal{A}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}}{\left(1+\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}\right)^2}dt\leq C_\nu\left(\|F\|_{L^\infty}(b_j-a_j)+\ (b_j-a_j)\ +\int_{a_j}^{b_j}\left(\left\|\mathcal{A}^{1l2}U\right|.\left\|\mathcal{A}U\right|\right)^{1l2}dt\right)$$

It follows that for all positive T :

$$\int_0^T\frac{\left|\mathcal{A}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}}{\left(1+\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}\right)^2}dt\leq C_\nu\left(\|F\|_{L^\infty}.T+\ T+\int_0^T\left(\left\|\mathcal{A}^{1l2}U\right|.\left\|\mathcal{A}U\right|\right)^{1l2}dt\right)$$

Now by using Hölder's inequality with $p=\frac{4}{3}$ and $q=4$ in the second integral we get : .

$$\int_0^T \frac{|\mathcal{A}U|^2_{\sigma,\alpha_*}}{\left(1+\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}\right)^2}dt \leq T.C_\nu \|F\|_{L^\infty}+T$$

$$+\int_0^T \left(1+\left\|\mathcal{A}^{1l2}U\right|^2\right)^{3/4}.\left\{\frac{\left\|\mathcal{A}U\right|^2}{\left(1+\left\|\mathcal{A}^{1l2}U\right|^2\right)}\right\}^{1l4} dt$$

$$\int_0^T \frac{|\mathcal{A}U|^2_{\sigma,\alpha_*}}{\left(1+\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}U\right|^2_{\sigma,\alpha_*}\right)^2}dt \leq T.C_\nu \|F\|+T$$

$$+\left\{\int_0^T \left(1+\left\|\mathcal{A}^{1l2}U\right|^2\right)dt\right\}^{3/4}\left\{\int_0^T \frac{\left\|\mathcal{A}U\left(t\right)\right|^2}{\left(1+\left\|\mathcal{A}^{1l2}U\right|^2\right)^2}dt\right\}^{1l4}$$

Now, by using the theorem 3.(W.Chen) , we get the looked for estimation :

$$\int_0^T \frac{|\mathcal{A}U|^2_{\sigma,\alpha_*}}{\left(1+|\mathcal{A}^{1/2}U|^2_{\sigma,\alpha_*}\right)^2}dt \leq L_\nu\left(1+T\right)$$

where $L_\nu = L_\nu\left(\nu,\ Q,\ \|F\|_{L^\infty},\ U\left(0\right)\right).$

For the continuity, the proof is inspired from [5] and [3], and by using the properties of Ω. Remark first that :

for all $\sigma>0$:

$$D\left(e^{\sigma\mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}}\mathcal{A}^{1l2}\right)\subset D\left(\mathcal{A}^{1l2}\right).$$

Then thanks to theorem 2 we have the existence of a solution of problem (4) and the existence of an open Ω in $\mathbb{R}_+$ whose complementary has zero measure such that :

$$U : \Omega \to D\left(\mathcal{A}^{1l2}\right), \text{ continuous.}$$

for all $t_0 \in \Omega$, $\left\|\mathcal{A}^{1l2} U(t_0)\right| < \infty$. The theorem [2] shows that there exists $T_0 > 0$, a regular solution

$$\begin{array}{rcl} [t_0,\ T_0] & \longrightarrow & H \times \mathbb{L}^2(Q) \\ t & \mapsto & e^{\delta t \mathcal{A}^{\frac{\alpha_0}{2}}}.\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} U(t), \quad \text{continuous.} \end{array}$$

As for all $\sigma > 0$, $\sigma_0 > 0$ and $0 < \alpha < \alpha_0$, we have :

$$D\left(e^{\delta t_0 \mathcal{A}^{\frac{\alpha_0}{2}}}.\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\right) \hookrightarrow D\left(e^{\sigma \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}}.\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\right).$$

In particular, $\left\|e^{\sigma \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}}.\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} U(t_0)\right| < \infty$ and thus for all t in Ω, $U(t) \in D\left(e^{\sigma \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}}.\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\right)$. Consider now the following sets :

$$\begin{array}{rcl} O & = & \left\{t \in (0,\ +\infty) \,/\, U(t) \in D\left(e^{\sigma \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}}.\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\right)\right\} \\ \Sigma & = & (0,\ +\infty) \diagdown O. \end{array}$$

Of course Ω writes as :

$$\begin{aligned}\Omega &= \{t \in (0,\ +\infty) \,/\, U(t) \text{ continuous in a neighborhood of } t\} \\ &= \left\{t \in (0,\ +\infty) \,/\, \text{there exists } \varepsilon > 0 : U \in \mathcal{C}\left[(t-\varepsilon,\ t+\varepsilon)\,;\ D\left(e^{\sigma \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}}.\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\right)\right].\right\}\end{aligned}$$

Remark that Ω is open. Then Σ is of measure zero because of the initial condition of problem (4) since $U_0 \in H \times H$. Now if $t_0 \in O \setminus \Omega$, the theorem 3.2 page 22 of [7] shows that t_0 is the end of an interval of regularity $D\left(e^{\sigma \mathcal{A}^{\frac{\alpha}{2}}}.\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\right)$ that is to say that t_0 is an element of a connected component of O and thus $O \setminus \Omega$ is countable. It follows that $(0, +\infty) \setminus O$ is of measure zero. This ends the proof of the theorem .

0.4 References:

[1] **W. Chen**: *New a priori estimates in Gevrey class of regularity for weak solutions of three D. Navier-Stokes equation*s. Diff. integral. Equations. Vol. 7, n°1, Janvier 1994 pp. 101-107.

[2] **A.C.Eringen:** Theory of micropolar fluids. J.Math.Mecha .16 (1966) .1-18 .

[3] **C. Foias- Guillope-R. Temam**: *New a priori estimates for N. S. equations.* C.P.D.E. 6-1981 pp.329-359.

[4]**C.Foias-R.Temam**:*Gevrey class regularity.* Journal of Functional Analysis.Vol.87,No.2,December 1989. .

[5] **C. Foias-R. Temam**: *Some analytic and geometric properties of the solutions of N. S. equations.* J.M.P. Appl. 58 (1979), pp. 339-368.

[6] **R. Temam**: *Navier-Stokes equation*s: *theory and numerical analysis.* North-Holland. 1979.

[7] **R. Temam**: *Navier-Stokes equation*s *and nonlinear analysis.* N.S.F./C.BM.S. S.I.has.M. Philadelphia 1983.