

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE



MEMOIRE

Présenté par M^r

KARIM BOUCHACHIA

Pour l'obtention du Grade de

MAGISTER

Option

PHYSIQUE THEORIQUE

Sujet

Les Modes de Spin $\frac{1}{2}$ dans le Modèle Géométrico-Différentiel de la Particule Etendue

Soutenue le : 23 / 02 /2005 devant le jury composé de :

M ^r . A. SMIDA	Professeur (USTHB)	Président
M ^r . M. HACHEMANE	Maître de conférences (USTHB)	Directeur de Thèse
M ^{me} . F.Z. IGHEZOU	Professeur (USTHB)	Examineur
M ^{me} . F. CHAFA	Maître de conférences (USTHB)	Examineur
M ^r . R. ANNOU	Maître de conférences (USTHB)	Examineur
M ^{me} . A. FRAHI	Maître de conférences (USTHB)	Examineur

Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique Théorique à l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene (U.S.T.H.B). Il a été dirigé par Monsieur HACHEMANE Mahmoud, Maître de conférences à l'U.S.T.H.B, à qui j'exprime ma très vive reconnaissance et je tien à remercier pour avoir été toujours disponible pour répondre à mes questions et pour ses précieux conseils qui m'ont beaucoup aider pour mener à terme ce travail.

Je remercie Monsieur M. FELLAH, Professeur à l'U.S.T.H.B et directeur du laboratoire de Physique Théorique, pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire.

Je tien à témoigner ma gratitude envers Monsieur A. SMIDA, Professeur à l'U.S.T.H.B, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance. J'adresse également mes plus vifs remerciements aux membres du jury : à Madame F.Z. IGHEZOU, Professeur à l'U.S.T.H.B, Madame F. CHAFA, Maître de conférences à l'U.S.T.H.B, Monsieur R. ANNOU, Maître de conférences à l'U.S.T.H.B, et à Madame A. FRAHI, Maître de conférences à l'U.S.T.H.B, pour avoir accepté d'évaluer le présent travail et d'honorer le jury de soutenance.

Je tien à remercier mes amis S. MAZIDI et H. MEKHTICHE pour avoir accepter de lire le manuscrit et de corriger les fautes d'orthographes. Je remercie tous ceux, que je n'ai pas cités, et qui m'ont encouragé avant et pendant la réalisation de ce travail en particulier mes amis et mes enseignants de l'université de Blida. Je remercie également le personnel du laboratoire de Physique Théorique, enseignants et étudiants en PG, pour leur sympathie.

Mes plus grands remerciements pour les membres de ma famille : ma mère, mon père, mes frères et sœurs pour leurs constant soutien et pour avoir été toujours à mes cotés pour m'encourager, me remonter le moral et m'aider pour aller de l'avant.

Table des matières

Introduction	3
1 Théorie des groupes et représentations induites	8
1.1 Notions de base de la théorie des groupes	9
1.2 Théorie de la représentation des groupes	12
1.3 Théorie des représentations induites	14
2 Particule relativiste ponctuelle de spin 1/2	18
2.1 Etude du groupe de Poincaré	19
2.1.1 Groupe de Lorentz	19
2.1.2 Groupe des quadri-translations	24
2.1.3 Groupe de Poincaré	26
2.2 La théorie des spineurs	27
2.2.1 Spineurs non relativistes et groupe $SU(2)$	27
2.2.2 Spineurs relativistes et groupe $SL(2, \mathbb{C})$	30
2.3 Représentations induites du groupe de Poincaré	32
2.3.1 Représentation impulsion	32
2.3.2 Représentation configuration	36
2.4 Commutation des représentations induites et propagation	38
2.4.1 Matérialisation	38
2.4.2 Localisation	39
2.4.3 Propagation	40
3 La particule étendue	43
3.1 Géométrie différentielle	43
3.1.1 Les variétés différentiables	44

3.1.2	Les espaces fibrés	46
3.2	Théorie quantique fonctionnelle	47
3.3	Modèle Géométr-Différentiel	50
3.3.1	Présentation du modèle	50
3.3.2	Calcul du propagateur global	56
	Conclusion	60

Introduction

La physique des particules élémentaires est une discipline issue de la physique nucléaire et de l'étude des rayons cosmiques [1]. Sa tâche est de déterminer la structure et les propriétés des particules élémentaires ainsi que les lois physiques qui les régissent. Pour cette raison, de grands moyens matériels ont été déployés pour venir à bout de cette tâche. Aussi, de nombreuses théories ont été édifiées pour expliquer et interpréter les résultats expérimentaux pour donner ainsi une base consistante et fondée au savoir humain dans ce domaine, et rendre par la suite ces résultats prédictibles. Parmi ces théories figure l'électrodynamique quantique, les théories de jauge, le modèle standard, la chromodynamique quantique et la théorie des cordes ainsi que leurs extensions supersymétriques. A l'aide de ces puissantes théories, notre compréhension du comportement et des propriétés des particules élémentaires est devenue plus vaste.

Il est possible de classer les propriétés liées aux particules élémentaires en trois catégories. La première est celle de leurs propriétés intrinsèques que l'on décrit en termes de nombres quantiques tels que la masse, la charge, l'hypercharge, le spin, l'isospin, etc... La deuxième est relative à la cinématique qui rend compte des propriétés de leur mouvement. La troisième correspond à la dynamique, c'est-à-dire aux forces qui sont mises en oeuvre lors des interactions des particules entre elles. Quoique cette distinction soit utile à notre compréhension des propriétés des particules, elle n'est pas tout à fait stricte car les trois catégories en question ne sont pas indépendantes.

Les régularités observées dans les propriétés intrinsèques des particules ont pu être exprimées en termes de symétries. L'outil mathématique par lequel ces symétries sont décrites est la théorie des groupes. Ainsi, la symétrie $SU(2)$ permet d'explicitier et de décrire les états de spin et de l'isospin des particules. La symétrie $SU(3)$ ou $SU(6)$ permet de faire le classement des hadrons et de décrire les états de saveur des quarks [2, 3].

La cinématique obéit également à des symétries qui se traduisent en lois de conservation et qui sont très différentes de celles relatives aux propriétés intrinsèques des particules (de

caractère purement abstrait). En effet, le mouvement met en jeu l'espace et le temps qui sont objets d'une représentation directe, et pour ainsi dire concrète. Les lois fondamentales y sont liées à des symétries d'espace et de temps décrites par le groupe de symétrie de Poincaré (dans le cas relativiste). Ainsi, l'homogénéité de l'espace-temps se traduit par la conservation de l'impulsion et de l'énergie en cinématique, et l'isotropie de l'espace se traduit par la conservation du moment angulaire.

En ce qui concerne les propriétés dynamiques des particules, on utilise les groupes de symétries locales pour décrire les quatre champs d'interactions. Le champ électromagnétique est décrit par les transformations locales du groupe $U(1)$, l'interaction faible par $SU(2)$, l'interaction forte par $SU(3)$ et la gravitation par les transformations locales du groupe de Poincaré [4, 5].

On voit donc que le terme symétrie est beaucoup plus large que sa signification spatiale ou géométrique (symétrie par rapport à un point, à un axe ou à un plan). Cette notion est extrapolée à toute régularité ou reproduction de propriétés à caractère concret ou abstrait. De façon générale : "*la symétrie est l'invariance ou l'immuabilité aux changements*" [6]. Pour un système physique, cette immuabilité peut être celle des propriétés intrinsèques, cinématiques ou dynamiques comme on l'a expliqué précédemment, mais elle peut être aussi celle de la forme géométrique, du volume, du nombre de particules ou toute autre propriété liée à ce système. Autrement dit, *un système physique est dit symétrique vis-à-vis d'une transformation donnée si, lors de cette transformation, certaines de ses propriétés sont invariantes* [7].

La définition générale de la symétrie reste applicable à la conception générale des différents principes de la physique. Ainsi, la notion de système physique repose sur un principe de symétrie qui est *le principe de réduction* qui suppose que les lois physiques restent inchangées lorsque on réduit l'étude de l'univers, qui est considéré comme un tout indivisible, à l'étude d'une partie prise à part, pendant un certain intervalle de temps, et à laquelle on associe le terme *système physique*. Dans ce même ordre d'idées, d'autres principes de symétrie peuvent être considérés tels que le principe de causalité, le principe d'évolution, la symétrie entre l'état initial et l'état final d'un système, etc... Ces principes sont, dans l'ensemble, sous-jacents aux théories physiques et apparaissent souvent sous la forme de lois physiques [7, 8].

Les symétries utilisées en physique ne sont pas toutes des symétries exactes. Nombreuses d'entre elles sont des symétries approchées. Un exemple est celui de la symétrie d'isospin des nucléons, qui est une symétrie approchée à cause de la légère différence entre la masse du

proton et celle du neutron. C'est aussi le cas des principes sur lesquelles reposent les théories physiques, comme le principe de réduction dont l'utilisation en théorie des champs comporte les approximations suivantes. En première approximation, on considère la particule élémentaire indépendamment de son environnement tout en obéissant aux lois de cette théorie. En seconde approximation, on prend en compte l'effet du reste de l'univers sur la particule à l'aide d'un champ extérieur moyen. En dernière approximation on tient compte de l'interaction de la particule avec le champ extérieur. Cette façon de procéder a été remise en cause par J.L. Destouches qui pense que "*ce procédé même ne décrit pas complètement la situation réelle, car il ne tient pas compte des actions individuelles de tous les éléments de l'univers*" et qu'il "*ne permet pas de rendre compte de l'influence de l'extérieur sur les caractéristiques propres du système physique étudié*" [9, 10]. Pour remédier à cette situation, Destouches propose sa théorie quantique fonctionnelle dans laquelle la particule est *influençable dans ses caractéristiques propres*. Au lieu d'une représentation ponctuelle de la particule élémentaire, il opte pour une représentation fonctionnelle au moyen d'une fonction physique u qui décrit les propriétés physiques de la particule. Cette théorie apporte à la particule la possibilité d'avoir une extension dans ses caractéristiques propres par rapport à la théorie quantique conventionnelle, et d'avoir aussi une certaine extension spatio-temporelle, mais sans pour autant avoir une forme géométrique rigide. Cependant, pour l'application de la théorie fonctionnelle, il faut adopter un modèle physique bien déterminé et l'associer à la fonction physique u qui est abstraite [9, 10].

Ces fondements et interprétations de la théorie fonctionnelle ont été utilisés dans un modèle géométrique-différentiel [11-16] construit pour décrire la particule étendue par une structure de fibré. La particule est supposée composée de deux modes quantiques locaux, l'un interne et l'autre externe, avec des masses et spins quelconques. Le modèle géométrique-différentiel a été construit dans le cas général mais n'a pas été encore appliqué à un cas bien déterminé. Une telle application permettra de mieux comprendre ce modèle et de le rapprocher éventuellement des modèles expérimentaux.

Dans le présent travail, on considère le cas où le mode externe est scalaire alors que le mode interne a un spin $1/2$. Notre principale contribution est la considération explicite des représentations induites irréductibles du groupe de Poincaré pour les particules ponctuelles de spin $1/2$ pour décrire le mode interne et de spin 0 pour décrire le mode externe. Le propagateur de chaque mode est déterminé au moyen de la commutation des représentations configuration et impulsion. Le propagateur global de la particule étendue est le produit des propagateurs des

deux modes. L'interaction n'a pas été prise en compte.

Pour la réalisation de ceci, il a fallu reprendre l'étude des représentations du groupe de Poincaré dans le cas général et dans le cas du spin $1/2$, comprendre la méthode de quantification par les représentations induites, comprendre les idées physiques de la théorie quantique fonctionnelle et enfin se familiariser avec les structures de base de la géométrie différentielle telles que les variétés différentiables et les fibrés. Les principales difficultés aux quelles on a été confrontées sont :

- L'étude des représentations connues du groupe de Poincaré et le choix de celles qui s'adaptent au modèle dans le cas du spin $1/2$.
- La détermination de la forme explicite des opérateurs de passage entre les représentations impulsion et configuration¹.
- La compréhension du modèle géométrique-différentiel en vue de l'application des résultats de la particule ponctuelle à la particule étendue.

Les résultats finaux sont la détermination des différents fibrés décrivant (les états de) la particule étendue massive de spin $1/2$, la considération des processus de commutation dans ce cas précis ainsi que la détermination du propagateur de cette particule.

Le plan du manuscrit est le suivant. Nous commençons par un premier chapitre qui traite de la théorie des groupes. Nous introduisons sous une forme générale les notions de cette théorie, dont les plus importantes pour ce travail sont les groupes de Lie et les représentations induites.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des particules massives ponctuelles relativistes de spin $1/2$ par l'utilisation des notions introduites dans le premier chapitre. Ces particules sont décrites par les représentations spinorielles irréductibles du groupe de Poincaré, qui est le groupe de symétrie de l'espace-temps. Nous utilisons la méthode des représentations induites pour construire la représentation configuration qui décrit des états localisés d'une particule réelle ou virtuelle, et la représentation impulsion qui décrit des états non localisés d'une particule réelle. Les processus de matérialisation et de localisation, qui sont des passages entre les représentations configuration et impulsion, permettent le calcul du propagateur de la particule en passant de la représentation configuration réductible à sa sous-représentation irréductible à travers la

¹Cette forme explicite figure dans la référence [22] qui est en Russe et dont on n'a pas pu tirer profit sans surmonter la première difficulté.

représentation impulsion :

$$\text{Rep. Conf. (Réductible)} \xrightarrow{\text{Matérialisation}} \text{Rep. Imp (Irréductible)} \xrightarrow{\text{Localisation}} \text{Rep. Conf. (Irréductible)}$$

Dans le troisième chapitre, nous introduisons quelques notions de base de la géométrie différentielle et de la théorie quantique fonctionnelle avant de présenter le modèle géométrodifférentiel de la particule étendue. Cette dernière est décrite dans ce modèle par une structure de fibré qui a quatre configurations possibles. Ces quatre fibrés correspondent à toutes les combinaisons possibles des espaces interne et externe, ou chacun est soit un espace des impulsions soit un espace de configuration. Puis, nous passons aux fibrés de Hilbert qui sont susceptibles de décrire les états quantiques de la particule étendue. Nous y étudions les processus de commutation et nous déterminons le propagateur global de la particule étendue. Celui-ci est le produit des propagateurs du mode interne spinoriel et du mode externe scalaire déterminés au deuxième chapitre. Nous terminons par une conclusion dans laquelle nous résumons l'essentiel de notre travail tout en discutant les résultats.

Chapitre 1

Théorie des groupes et représentations induites

La symétrie joue un rôle fondamental dans notre conception des lois de la nature. Elle apparaît sous forme de régularités dans les structures et propriétés des systèmes physiques et d'invariances dans les équations qui les régissent. L'un des plus grands exploits de la notion de symétrie est, sans doute, en physique des particules élémentaires. L'utilisation de la théorie des groupes, qui est le langage mathématique de la symétrie, a permis de classer les particules élémentaires, de décrire leurs propriétés les plus fondamentales et de construire les équations qui déterminent leur évolution dans l'espace-temps avec ou sans interactions. Le lien entre la théorie des groupes et la physique (des particules) est réalisé par les représentations des groupes, particulièrement, celles qui font apparaître les propriétés des particules telles que la masse, le spin, la charge, etc... Ce type de représentations est appelé représentation irréductible. La construction de ces représentations n'est pas une tâche facile, néanmoins, il existe des méthodes mathématiques pour le faire telles que la méthode des représentations tensorielles, la méthode de l'analyse harmonique, la méthode des représentations induites, etc... [17]. Comme chacune de ces méthodes nécessite un volume de présentation assez important, nous ne présenterons que brièvement la méthode qui nous intéresse et qui est celle des représentations induites.

Il est à noter ici que l'ensemble des transformations subies par un système physique a, en général, une structure mathématique de groupe, ce qui permet de traiter les problèmes physiques liés à la symétrie par la théorie des groupes. La large utilisation de cette dernière, non seulement en physique mais aussi dans les divers domaines de la science, est due à son formalisme abstrait et général. Pour cette raison, nous avons préféré présenter ses axiomes et

notions élémentaires sous une forme générale et abstraite, en vue de les appliquer pour le cas particulier du groupe de Poincaré dans le deuxième chapitre.

Ce premier chapitre est entamé par une partie qui introduit les notions de base de la théorie des groupes ainsi que les différentes définitions et théorèmes qui nous seront utiles dans la suite du développement [3, 18]. La deuxième partie est consacrée à la théorie de la représentation des groupes [19, 20]. Dans la dernière partie, on présente le cas particulier des représentations induites [17, 21].

1.1 Notions de base de la théorie des groupes

Considérons un ensemble $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ muni d'une loi de multiplication *interne* notée (\cdot) . Si cette loi est *associative* et si elle admet un élément *neutre* e et un *inverse* de chaque élément de G , on dit que G forme un *groupe* noté (G, \cdot) . Si, de plus, cette loi est *commutative*, on dit que le groupe est *abélien* ou *commutatif*.

Un groupe est *discret* si ses éléments sont dénombrables, *l'ordre* d'un groupe discret est le nombre de ses éléments, si l'ordre est *fini* on parle d'un *groupe fini*, sinon il est *infini*.

Un groupe est *continu* si ses éléments sont des fonctions d'un ensemble de variables continues

$$G = \{g_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n), g_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots\} \quad (1.1)$$

Les variables α_i sont appelées *paramètres* du groupe. Un groupe continu est forcément infini[3].

Un sous-ensemble H de G remplissant les critères d'un groupe sous la même loi de multiplication est dit *sous-groupe* de G . Le sous-groupe *conjugué* de H est $H' = gHg^{-1}$ où g est un élément de G . Un sous-groupe H est dit *invariant* s'il est identique à tous ses conjugués

$$\forall g \in G : gHg^{-1} = H \quad (1.2)$$

Le groupe G est dit *simple* s'il ne contient pas un sous-groupe invariant. Si G contient un sous-groupe invariant non abélien, on dit qu'il est *semi-simple*.

Deux éléments g_1 et g_2 sont *conjugués* s'il existe un autre élément g tel que $g_1 = gg_2g^{-1}$. La *classe de conjugaison* est l'ensemble des éléments de G qui sont conjugués entre eux. Chaque élément de G appartient à une seule classe de conjugaison, c'est-à-dire que deux classes de conjugaison sont soit identiques soit disjointes. L'ensemble qui a comme éléments les classes de

conjugaison est appelé *l'ensemble quotient*, on le note par G/H .

La *classe à droite* (à gauche) est l'ensemble obtenu par la multiplication d'un élément de G , à droite (à gauche), par $H : Hg$ (gH), où H est un sous-groupe de G . Deux classes à droite (à gauche) sont soit identiques soit disjointes. Si H est invariant alors les classes à droite et à gauche se confondent $Hg = gH$ quelque soit l'élément g de G . Alors, l'ensemble G/H de ces classes forme un groupe (*groupe quotient*) muni de la loi de multiplication $(g_1H)(g_2H) = ((g_1g_2)H)$ qui admet H comme élément neutre.

Un *homomorphisme* d'un groupe (G, \cdot) dans un groupe $(D, *)$ est une application f qui préserve la loi de multiplication du groupe. Autrement dit, elle vérifie la condition

$$f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) * f(g_2) \quad (1.3)$$

pour tout couple d'éléments de G . Si de plus cette application est *bijective*, alors il y a correspondance *un-à-un* entre les éléments de G et ceux de D , on parle alors d'un *isomorphisme*.

Le groupe G est un *groupe de transformations* d'un ensemble \mathbf{E} si à tout élément g de G correspond une transformation : $x \mapsto gx$ de \mathbf{E} , qui vérifie

- $ex \equiv x$, où $e = 1$ est l'élément neutre de G et x un élément quelconque de \mathbf{E} .
- $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$ pour tous les éléments g_1 et g_2 de G .

Si, de plus, pour tout couple x, y d'éléments de \mathbf{E} il existe une transformation g de G qui fait passer d'un élément à l'autre, le groupe G est *transitif* sur \mathbf{E} qui est alors un *espace homogène* de G . Un *sous-groupe H stabilisateur* d'un point x_o de l'espace homogène \mathbf{E} est un sous-groupe qui laisse le point x_o invariant [18]. Dans ce cas, l'ensemble quotient G/H est isomorphe à \mathbf{E} et il peut être alors considéré comme un espace homogène du groupe G . Pour étudier l'action du groupe G sur les classes de l'ensemble quotient, on prend de chaque classe x un élément x_G de G qu'on appelle *représentant de la classe* et on restreint l'étude à ces représentants. En général, l'action d'un élément g sur le représentant x_G de la classe x ne donne pas le représentant $(gx)_G$ de la classe gx . Pour remédier à cette situation, on définit un *système de facteurs* $(g, x)_H$ appartenant au sous-groupe H et dépendant de l'élément g et de la classe x par la relation

$$gx_G = (gx)_G \cdot (g, x)_H \quad (1.4)$$

Le système de facteurs vérifie les relations suivantes [22]

$$(1, x)_H = 1, \quad (g_1 g_2, x)_H = (g_1, g_2 x)_H \cdot (g_2, x)_H, \quad (g, x)_H^{-1} = (g^{-1}, gx)_H \quad (1.5)$$

Les groupes de Lie sont un cas particulier très important des groupes qu'on utilise fréquemment en physique. Ce sont des groupes munis d'une structure de *variété différentiable*¹. Cela signifie qu'ils sont des groupes continus dont les éléments $g(\alpha^1, \dots, \alpha^m)$ sont des fonctions infiniment différentiables de leurs m paramètres. Ces paramètres α^i représentent les coordonnées des points dans un espace appelé *la variété du groupe*, il y a une correspondance directe entre les éléments du groupe et les points de cet espace. On fait correspondre à l'origine de la variété l'élément neutre du groupe $g(0, \dots, 0) = e$.

Les groupes de Lie sont les composantes connexes des groupes continus dont les éléments sont continûment liés à la transformation identité [23]. On dit qu'un groupe est *connexe* si, pour tout couple de points de sa variété, il existe un ou plusieurs chemins continus appartenant à la variété qui les relient ; sinon il est non connexe. Si tous les chemins qui relient deux éléments du groupe peuvent être transformés les uns aux autres de façon continue, le groupe est *simplement connexe*. S'il y a un nombre n de chemins distincts (qu'on ne peut pas transformer continûment les uns aux autres) qui relient deux éléments, le groupe est *n -fois connexe* ou *multiplement connexe* [19].

Un groupe de Lie est compact si tous ses éléments peuvent être spécifiés par des points (paramètres) à l'intérieur d'une région finie de la variété, si cette région n'est pas finie le groupe est non compact [3]. Les notions de connexité et de compacité sont fondamentales en topologie. Leur utilisation en théorie des groupes est due à l'existence d'un espace topologique associé au groupe et qui a, dans le cas des groupes de Lie, une structure de variété.

Un élément du groupe de Lie peut être écrit au voisinage de l'identité sous la forme²

$$g(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^m) = 1 - i\varepsilon^i J_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (1.6)$$

$$J_i = i \left(\frac{\partial g(\alpha^1, \dots, \alpha^m)}{\partial \alpha^i} \right)_{\alpha_j=0} \quad (1.7)$$

Les *générateurs* J_i sont au nombre des paramètres du groupe et forment la base d'une algèbre

¹La définition de la variété peut être trouvée dans la partie traitant la géométrie différentielle du troisième chapitre.

²On somme sur les indices répétés selon la convention d'Einstein.

de commutateurs fermée appelée algèbre de Lie

$$[J_i, J_j] = J_i J_j - J_j J_i = C_{ij}^k J_k \quad (1.8)$$

Les coefficients C_{ij}^k détiennent toutes les informations concernant l'algèbre de Lie d'où leur nom de *constantes de structure*. L'algèbre de Lie nous renseigne sur les propriétés *locales* du groupe, ce genre d'information est généralement suffisant pour décrire la majorité des propriétés du groupe associé. Il est permis que plusieurs groupes partagent la même algèbre de Lie, cependant, il n'existe parmi eux qu'un seul qui soit simplement connexe, le *groupe de recouvrement universel*[23].

Le *rang* de l'algèbre est le nombre maximal des générateurs qui commutent entre eux. Ces derniers forment une algèbre appelée *sous-algèbre de Cartan* et engendrent un sous-groupe abélien. S'il n'y a pas de générateurs qui commutent entre eux, alors l'algèbre est de rang un. Il existe des opérateurs qui commutent avec tous les générateurs du groupe et qui s'écrivent comme fonction de ces derniers, ce sont donc des opérateurs invariants par rapports au groupe appelés *opérateurs de Casimir*. Pour un groupe semi-simple de rang r , il existe r opérateurs de Casimir indépendants³ [3]. Ces opérateurs ont une grande importance en physique : lorsqu'un système physique est invariant par rapport à un groupe de symétrie donné, les opérateurs de Casimir de ce groupe représentent des grandeurs physiques invariantes, et par conséquent fondamentales, par lesquelles le système physique sera désigné. Des exemples concrets seront donnés lors de l'étude du groupe de symétrie de Poincaré. Mais avant cela, nous devons préciser le lien entre le groupe et les transformations du système physique au moyen de la notion de représentation.

1.2 Théorie de la représentation des groupes

Un groupe est, par sa définition, un ensemble d'éléments abstraits vérifiant certains axiomes. Ces éléments peuvent prendre des formes différentes en fonction de l'espace sur lequel le groupe agit et qui peut être vectoriel, fonctionnel, tensoriel ou autre. C'est ce qui nous permettra d'associer plusieurs représentations pour le même groupe.

Un groupe d'opérateurs $U(G)$ agissant sur un espace vectoriel \mathcal{H}^U forme *une représentation*

³C'est le théorème de Racah [3].

d'un groupe G s'il existe un homomorphisme de G dans U . S'il s'agit d'un isomorphisme alors la représentation est dite *fidèle*. La *dimension* d'une représentation est égale à la dimension de son *espace support* \mathcal{H}^U ; elle peut être finie ou infinie. Si les opérateurs de $U(G)$ sont des matrices alors la représentation est dite *matricielle* [20].

Un autre groupe d'opérateurs $U'(G)$ est dit équivalent à $U(G)$ si $U' = SU S^{-1}$ où S est un opérateur linéaire de l'espace \mathcal{H}^U vers l'espace $\mathcal{H}^{U'}$. Les deux représentations U' et U de G sont alors *équivalentes*.

La représentation U est *unitaire* si tous les opérateurs $U(g)$ sont unitaires. Ils laissent donc le *produit scalaire* dans l'espace \mathcal{H}^U inchangé

$$(U(g)x, U(g)y) = (x, y) \quad (1.9)$$

Cette propriété représente en mécanique quantique, où l'espace \mathcal{H}^U est l'espace de Hilbert, l'invariance des probabilités par rapport aux transformations unitaires.

Un sous-espace \mathcal{H}^s de \mathcal{H}^U est dit *invariant* si tout élément de \mathcal{H}^s se transforme, sous l'action des opérateurs $U(g)$, en un élément qui appartient à ce même sous-espace. Si on limite l'action des opérateurs $U(g)$ sur ce sous-espace, on obtient une nouvelle représentation U^s qui est une *sous-représentation* de U dont l'espace support est \mathcal{H}^s . Un sous-espace invariant est *minimal* s'il ne contient pas un sous-espace invariant par rapport à U . Dans ce cas, la représentation U^s est *irréductible* [19].

Lorsqu'un sous-espace \mathcal{H}_1 et son complémentaire \mathcal{H}_2 dans \mathcal{H} sont tous les deux invariants, la représentation U est *complètement réductible*. Elle est alors une *somme directe* des sous-représentations correspondantes. Plus généralement, l'espace \mathcal{H} se décompose en n sous-espaces invariants

$$\mathcal{H} = \sum^n \oplus \mathcal{H}_i \quad (1.10)$$

et la représentation U en une somme directe de n sous-représentations

$$U = \sum^n \oplus U_i \quad (1.11)$$

Dans le cas où tous les sous-espaces \mathcal{H}_i sont minimaux, la relation (1.11) définit la décomposition de U en représentations irréductibles.

Un cas intéressant est celui d'une représentation unitaire; un théorème stipule que si elle est

réductible alors elle est complètement réductible. Autrement dit, le complémentaire d'un sous-espace invariant est toujours invariant pour une représentation unitaire. L'importance de cette propriété réside dans le fait que la plupart des représentations qui décrivent des systèmes physiques élémentaires sont unitaires et irréductibles. Il existe plusieurs méthodes de détermination des représentations irréductibles et nous allons nous intéresser à la méthode des représentations induites. Introduisons tout d'abord la représentation régulière qui est la représentation la plus simple pour un groupe donné du fait que son espace support est celui des fonctions définies sur le groupe même⁴. C'est en fait un cas particulier des représentations induites où l'induction se fait à partir de la représentation triviale de l'élément identité.

L'espace vectoriel $\tilde{\mathcal{H}}$ des fonctions $\tilde{\psi}$ définies sur un groupe continu G et qui prennent leurs valeurs sur un espace vectoriel L

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} & : G \rightarrow L \\ g & \rightarrow \tilde{\psi}(g) \end{aligned} \tag{1.12}$$

peut être le support d'une représentation \tilde{U} , telle que

$$\left[\tilde{U}(g) \tilde{\psi} \right](g') = \tilde{\psi}(g^{-1}g') \tag{1.13}$$

appelée représentation *régulière* du groupe G [21]. La représentation régulière se décompose souvent sous forme de somme (ou intégrale) directe de représentations irréductibles que l'on peut déterminer par la méthode de l'induction. Nous allons présenter cette méthode maintenant dans le contexte de la description de l'évolution spatio-temporelle des particules élémentaires tout en restant dans le cas général (sans spécifier la symétrie de l'espace-temps).

1.3 Théorie des représentations induites

L'idée de cette méthode est de déterminer les représentations d'un groupe à partir des représentations de l'un de ses sous-groupes. Quand le sous-groupe en question est le petit

⁴Dans le cas des groupes finis, on obtient la représentation régulière en écrivant la loi de multiplication de deux éléments du groupe sous la forme

$$g_i g_j = g_k \Delta_{ij}^k$$

La matrice Δ_{ij}^k définit la représentation régulière du groupe et le second terme est alors une combinaison linéaire des éléments du groupe [24].

groupe et sa représentation est irréductible, alors la représentation induite du groupe entier est aussi irréductible.

Considérons dans notre cas un groupe G ayant un sous-groupe invariant N , et soit Δ une représentation de N . Les représentations Δ^g , telles que $\Delta^g(N) = \Delta(gNg^{-1})$ où g est un élément du groupe G , sont aussi des représentations de N *conjuguées* de Δ . Les éléments h de G pour lesquels les représentations Δ^h sont équivalentes à Δ forment un sous-groupe appelé *le petit groupe* $H = \{h \in G : \Delta^h \sim \Delta\}$ de G . Le groupe H est le stabilisateur de la classe $v_0 = eH$, ainsi l'espace quotient peut être considéré comme espace homogène du groupe G [21]. La notation v_0 est due au fait que, pour le groupe de symétrie de l'espace-temps (non relativiste ou relativiste), le quotient par rapport au petit groupe donne un espace homogène qui s'identifie à l'espace des impulsions.

On commence par la construction de l'espace support de la représentation $\Delta(H)$ du petit groupe H . On considère sur l'espace de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}^\Delta$ les fonctions $\tilde{\varphi}$ définies sur le groupe G et ayant des valeurs sur l'espace vectoriel L^Δ

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}^\Delta &\ni \tilde{\varphi} : G \rightarrow L^\Delta \\ g &\mapsto \tilde{\varphi}(g) \end{aligned} \tag{1.14}$$

L'action de la représentation $\Delta(H)$ sur l'espace L^Δ est donnée par

$$\tilde{\varphi}(gh^{-1}) = \Delta(h) \tilde{\varphi}(g) \tag{1.15}$$

Cette relation est la condition de structure.

On définit, sur l'espace $\tilde{\mathcal{H}}^\Delta$, l'action de la représentation $\tilde{U}^\Delta(G)$ induite⁵ à partir de la représentation $\Delta(H)$ par la relation

$$\left[\tilde{U}^\Delta(g) \tilde{\varphi} \right](g') = \tilde{\varphi}(g^{-1}g') \tag{1.16}$$

Il existe une correspondance entre l'espace $\tilde{\mathcal{H}}^\Delta$ et l'espace \mathcal{H}^Δ des fonctions φ définies sur

⁵On note la représentation \tilde{U} du groupe G induite à partir de la représentation D du sous-groupe H par $\tilde{U}^D(G) = D(H) \uparrow G$

l'espace homogène $\mathbf{E} = G/H$ et ayant des valeurs sur L^Δ

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\Delta &\ni \varphi : \mathbf{E} \rightarrow L^\Delta \\ v &\mapsto \varphi(v) \end{aligned} \tag{1.17}$$

L'utilisation de la décomposition de Mackey ($g = s_g h_g$) [17] et la relation (1.15) permet d'écrire

$$\tilde{\varphi}(g) = \Delta(h_g^{-1}) \varphi(v) \tag{1.18}$$

où h_g est un élément du sous-groupe H et les $\tilde{\varphi}(s_g) = \varphi(v)$ sont des fonctions constantes sur les classes gH (chaque classe est représentée par l'éléments $s_g \equiv v_G$).

Ceci permet de construire la représentation induite $U^\Delta(G)$ agissant sur l'espace \mathcal{H}^Δ . On remplace g' par v_G dans (1.16) puis on identifie l'action de la représentation \tilde{U}^Δ sur $\tilde{\mathcal{H}}^\Delta$ avec celle de U^Δ sur \mathcal{H}^Δ ($[\tilde{U}^\Delta(g) \tilde{\varphi}] (v_G) = [U^\Delta(g) \varphi] (v)$), on trouve [22, 17]

$$[U^\Delta(g) \varphi] (v) = \Delta \left[(g^{-1}, v)_H^{-1} \right] \varphi(g^{-1}v) \tag{1.19}$$

Pour définir complètement l'action de l'opérateur U^Δ , on doit d'abord construire l'espace homogène $\mathbf{E} = G/H$ puis expliciter la représentation $\Delta \left[(g^{-1}, v)_H^{-1} \right]$ du sous-groupe. Si \mathbf{E} correspond à l'espace impulsion, la relation (1.19) définit la représentation impulsion. La représentation configuration peut être obtenue de la même manière par un choix convenable d'un autre sous-groupe K (qui n'est pas le petit groupe) pour lequel l'espace homogène G/K est isomorphe à l'espace configuration. Le propagateur d'une particule est obtenu par la double commutation de la représentation configuration et la représentation impulsion. De façon générale, l'opérateur de commutation \tilde{T} est une application d'un espace de représentation $\tilde{\mathcal{H}}^\Delta$ vers un espace $\tilde{\mathcal{H}}^D$ vérifiant

$$\tilde{T} \tilde{U}^\Delta(g) = \tilde{U}^D(g) \tilde{T} \quad \forall g \in G \tag{1.20}$$

Cet opérateur possède la forme intégrale suivante

$$\tilde{\psi}(x_G) = (\tilde{T} \tilde{\varphi})(x_G) = \int_{G/H} d\mu(v_G) t(x_G^{-1}v_G) \tilde{\varphi}(v_G) \tag{1.21}$$

où les fonctions t définies sur le groupe G sont des applications linéaires de l'espace L^Δ vers

l'espace L^D vérifiant la condition de structure

$$t(kgh) = D(k)t(g)\Delta(h) \quad g \in G, \quad k \in K, \quad h \in H \quad (1.22)$$

μ étant une mesure invariante définie sur l'espace homogène du groupe. Les éléments v_G et x_G sont les représentants des classes appartenant aux espaces quotients G/H et G/K correspondant aux espaces impulsion et configuration, respectivement. La forme intégrale (1.21) peut donc être réécrite pour des fonctions définies sur ces espaces homogènes [22]

$$\psi(x) = (T \varphi)(x) = \int_{G/H} d\mu(v) t(x_G^{-1}v_G) \varphi(v) \quad (1.23)$$

La commutation inverse correspond à un opérateur T' qui a une forme analogue [22]

$$\varphi(v) = (T' \psi)(v) = \int_{G/K} d\mu(x) t'(v_G^{-1}x_G) \psi(x) \quad (1.24)$$

La composition de ces deux commutations donne la propagation.

Nous nous proposons de traiter dans le chapitre suivant le cas d'une particule ponctuelle de spin 1/2 en utilisant les concepts de la théorie des groupes. Nous y considérerons le cas particulier du groupe de symétrie de Poincaré que nous allons étudier et en donner les représentations induites dans les espaces de configuration et des impulsions. Nous y donnerons aussi les interprétations physiques et la forme explicite de la propagation.

Chapitre 2

Particule relativiste ponctuelle de spin

1/2

D'après un théorème énoncé par E.Wigner [25], les fonctions d'ondes subissent des transformations linéaires et unitaires (ou anti-linéaires et anti-unitaires) lors d'un changement de référentiel. Cela signifie, en particulier, que l'ensemble des fonctions d'onde en question est muni d'une structure assez ordonnée et peut être muni d'un produit scalaire hermitien invariant. En fait, l'espace de ces fonctions d'onde est hilbertien et a une structure de variété linéaire. Vers 1935, Wigner proposa de décrire les particules élémentaires par des représentations unitaires irréductibles du groupe d'invariance de l'espace-temps considéré, en l'occurrence le groupe de Poincaré [25]. Ainsi, la construction d'une cinématique relativiste des particules élémentaires se ramène à la construction des représentations irréductibles de ce groupe. L'utilisation de la méthode des représentations induites fournit une description remarquable des particules élémentaires, aussi bien sur l'espace impulsion que sur l'espace configuration, et permet de construire les équations relativistes (de Klein-Gordon, Dirac, Proca, Bargmann-Wigner et de Rarita-Schwinger) de la théorie des champs par des considérations de la théorie des groupes [17, 26].

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'étude détaillée des propriétés du groupe de Poincaré et son action sur l'espace de Minkowski [23, 26, 27]. Dans la deuxième partie, on introduit les spineurs relativistes et non relativistes qui génèrent les représentations spinorielles du groupe de Lorentz et celui des rotations ordinaires, respectivement [28, 29, 30]. Ces deux représentations seront utilisées dans la troisième partie de ce chapitre pour la construction des représentations induites, dans les espaces de configuration et des impulsions du groupe

de Poincaré [17, 31, 32], qui décrivent la particule massive ponctuelle de spin 1/2 [22]. Le propagateur de cette particule sera obtenu dans la quatrième partie au moyen de la double commutation des représentations configuration et impulsion [22, 33, 4].

2.1 Etude du groupe de Poincaré

Le groupe de Poincaré est formé par l'ensemble des transformations reliant les systèmes de référence inertiels entre eux, il apparaît comme une conséquence du principe de la relativité : l'invariance de la vitesse de la lumière qui a conduit à établir les formules de transformation de Lorentz entre les coordonnées d'espace et de temps des référentiels en mouvement de translation uniforme les uns par rapport aux autres [34]. Le groupe de Poincaré est alors le produit du groupe de Lorentz par le groupe des translations de l'espace-temps.

2.1.1 Groupe de Lorentz

Le groupe de Lorentz L est l'ensemble des transformations linéaires et homogènes des coordonnées $x'^i = f^i(x^k)$ qui laissent invariant le produit scalaire entre les quadri-vecteurs de l'espace-temps de Minkowski¹

$$x'^i y'_i = x^i y_i \quad (2.1)$$

Ce sont des transformations qui lient les coordonnées des systèmes de référence dont les origines coïncident au temps initial (à $t = 0$) [27]. La transformation des coordonnées des quadri-vecteurs s'écrit sous la forme ²

$$x'^i = l^i_k x^k \quad (2.2)$$

où les composantes l^i_k sont celles des matrices 4×4 réelles qui représentent les transformations du groupe de Lorentz et qui vérifient la relation de pseudo-orthogonalité

$$\eta[l]^t \eta^{-1} = l^{-1} ; \quad \eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (2.3)$$

ou sous la forme indicielle

¹Les indices en lettres grecques ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$) varient de 1 à 3, alors que les indices latins (i, j, k, \dots) varient de 0 à 3.

²L'indice i désigne la ligne de la matrice et k désigne la colonne. La transposée de la matrice est définie par $[l^t]^i_k = [l]_k^i$, et comme pour le cas des vecteurs, ces indices sont élevés et abaissés par la métrique η .

$$\eta^{ik} [l^t]_k {}^l \eta_{lj} = [l^{-1}]^i_j ; \quad [l^t]_k {}^l = [l]_k {}^l \quad (2.4)$$

Cette relation est une généralisation de la relation d'orthogonalité ($M^t = M^{-1}$) des matrices de l'espace euclidien. La relation de pseudo-orthogonalité est une contrainte sur les matrices l qui limite le nombre de composantes (l^{ik}) indépendantes à six, en effet, le groupe de Lorentz est paramétré par six variables continues ($l \equiv l(\alpha^\alpha, \xi^\beta)$) qui varient dans les intervalles suivants³ $-\pi < \alpha^\alpha \leq \pi$ et $0 < \xi^\beta \leq \infty$.

Le groupe de Lorentz ainsi défini est appelé groupe de *Lorentz complet* car il inclut l'ensemble des transformations continues et discrètes de l'espace-temps ; on le désigne par⁴ $L = O(3, 1)$. Ce groupe peut être décomposé, en fonction du signe du déterminant des matrices l et du signe de la composante l_0^0 qui agit sur la composante temporelle des quadri-vecteurs, en quatre sous-ensembles. En utilisant la relation de pseudo-orthogonalité on trouve que le carré du déterminant de l est égal à l'unité $(\det(l))^2 = 1$, ce qui donne deux possibilités $\det(l) = \pm 1$. On trouve également que le carré de la composante l_0^0 est supérieur ou égal à un : $(l_0^0)^2 = 1 + \sum_i (l_0^i)^2 \geq 1$. On aura donc soit $l_0^0 \geq 1$ de sorte que le signe de la composante temporelle des quadri-vecteurs reste inchangé après la transformation, soit $l_0^0 \leq -1$ et alors le signe de la coordonnée temporelle est inversé.

Dans le cas où le déterminant est égal à l'unité, les transformations l laissent invariants les éléments de volume dans l'espace de configuration et des impulsions ainsi que les angles entre les vecteurs. Les éléments de volume sont appelés dans ce cas des mesures invariantes. Si, de plus, la composante l_0^0 est positive, alors les transformations l sont des composantes continûment liées à la transformation identité I et forment un groupe désigné par⁵ $L_+^\uparrow = SO(3, 1)$ et appelé groupe de Lorentz propre. Par contre, si le signe du déterminant et celui de la composante l_0^0 sont tous les deux négatifs, les transformations l ne sont pas liées à l'identité mais incluent l'inversion du temps qui change la coordonnée temporelle x^0 des quadri-vecteurs en $-x^0$; l'ensemble de ces transformations est désigné par $L_-^\downarrow = TL_+^\uparrow$. L'inversion du temps est représentée par une

³L'intervalle sur lequel varient les paramètres dépend de la paramétrisation utilisée [26].

⁴En général, $O(p, q)$ est le groupe matriciel réel pseudo-orthogonal ($\eta[l^t \eta^{-1} = l^{-1}$) agissant sur un espace de dimension $(p + q)$ muni d'une métrique $\eta_{ij} = \text{diag}(1, \dots, (q\text{-fois}), -1, \dots, (p\text{-fois}))$.

⁵La flèche \uparrow (dirigée vers le haut) indique que le signe de la composante l_0^0 est positif, le signe \downarrow (indice en bas) est celui du déterminant. En général, $SO(p, q)$ est le groupe pseudo-orthogonal spécial ($\det(l) = 1$).

matrice 4×4

$$T = \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0}^t = (0, 0, 0), \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Dans le cas où le signe du déterminant est négatif et la composante l_0^0 est positive, les transformations l incluent les réflexions spatiales qui se traduisent par une symétrie miroir suivie d'une rotation de 180^0 autour de la normale du miroir qui changent donc le vecteur \mathbf{x} en $-\mathbf{x}$. L'ensemble de ces transformations est désigné par $L_-^\uparrow = PL_+^\uparrow$. Les réflexions spatiales sont représentées par la matrice 4×4 suivante

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Le dernier sous-ensemble est désigné par $L_+^\downarrow = PTL_+^\uparrow$, il correspond au cas où le signe du déterminant est positif et celui de la composante l_0^0 est négatif. Ces transformations incluent simultanément l'inversion du temps et les réflexions spatiales. Le groupe de Lorentz complet est l'union de ces quatre sous-ensembles [26]

$$L = L_+^\uparrow \cup TL_+^\uparrow \cup PL_+^\uparrow \cup PTL_+^\uparrow \quad (2.7)$$

On s'intéresse dans ce qui suit aux représentations du groupe de Lorentz propre⁶ L_+^\uparrow qui est en fait le seul, parmi ces quatre sous-ensembles, à avoir une structure de groupe. Il contient les rotations spatiales et les transformations propres de Lorentz (les boosts de vitesse). La transformation de Lorentz qui représente une rotation a la forme générale suivante

$$l_r \equiv r = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

où le bloc \mathbf{R} est la matrice 3×3 qui représente les rotations tridimensionnelles⁷ dans l'espace euclidien E_3 . Par conséquent, la transformation l_r n'affecte que les coordonnées spatiales des

⁶Dans tout ce qui suit, seul le groupe Lorentz propre L_+^\uparrow sera considéré. Pour simplifier la notation, on le désignera par L .

⁷L'ensemble de ces rotations est représenté par le groupe spécial orthogonal $SO(3)$.

quadri-vecteurs. Les paramètres de cette transformation sont les angles de rotations ω^α autour des axes ox^α .

Les boosts de vitesse sont des transformations qui mélangent les coordonnées spatiales et la coordonnée temporelle des quadri-vecteurs. Ce sont en fait des dilatations paramétrées par des fonctions ξ^α dépendant du rapport des composantes v^α , de la vitesse du système de référence en mouvement, sur la vitesse de la lumière c [23]

$$\xi(v^\alpha) = \xi^\alpha = \text{arcth}(v^\alpha/c) \quad (2.9)$$

Ces paramètres s'interprètent comme des angles de rotations hyperboliques dans les plans (x^0, x^α) . Dans le cas où la vitesse est dirigée suivant l'axe oz , le boost de Lorentz

$$l_{v_z} \equiv (v_\xi)_L = \begin{pmatrix} ch(\xi) & 0 & 0 & sh(\xi) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ sh(\xi) & 0 & 0 & ch(\xi) \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

ne mélange que les coordonnées x^3 et x^0 .

Lorsque la direction de la vitesse est quelconque, le boost de Lorentz s'écrit sous la forme générale [26]

$$l_v \equiv v_L = \begin{pmatrix} v^0 & \mathbf{v}^t \\ \mathbf{v} & \mathbf{1} + \mathbf{v}\mathbf{v}^t/(v^0 + 1) \end{pmatrix}; \quad v = \begin{pmatrix} v^0 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\xi) \\ sh(\xi) \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad (2.11)$$

où $v^0 = l_0^0 = ch(\xi) \geq 1$ et $(v)^2 = (v^0)^2 - \mathbf{v}^2 = (l_0^0)^2 - \sum_i (l_0^i)^2 = 1$. Ainsi, le boost de Lorentz est représenté en fonction des quadri-vitesses appartenant à la nappe positive de l'hyperboloïde de masse unité

$$C_1^+ = \left\{ v / (v^0)^2 - \mathbf{v}^2 = 1, v^0 > 0 \right\} \quad (2.12)$$

Notons que l'ensemble des boosts ne forme pas un groupe. Ceci est dû à la relation d'addition des vitesses d'Einstein qui fait que la condition d'associativité du groupe n'est vérifiée que dans le cas de la limite non relativiste. Alors, cet ensemble est dit *faiblement associatif* [26].

Le développement de la transformation de Lorentz au voisinage de l'identité donne la forme

infinitésimale suivante

$$l(\delta\omega) = 1 - (i/2) \delta\omega^{mn} M_{mn} \quad (2.13)$$

où les $\omega^{mn} = -\omega^{nm}$ sont les paramètres antisymétriques du groupe qui correspondent à des rotations dans les plans $(x^m x^n)$ et les opérateurs M_{mn} qui s'écrivent sous la forme

$$M_{mn} = -M_{nm} = i (\partial l(\omega) / \partial \omega^{mn})_{\omega=0} \quad (2.14)$$

sont les générateurs covariants. Dans cette notation, les générateurs des rotations sont identifiés à $M_\alpha = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} M_{\beta\gamma}$ où les $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ sont les composantes du tenseur antisymétrique et les angles de rotation autour des axes ox^α de l'espace sont $\omega^\alpha = \omega^{\beta\gamma}$ (les indices α, β et γ sont dans l'ordre cyclique). La forme matricielle des générateurs est la suivante

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Ils peuvent également être écrits sous la forme différentielle

$$M_{\beta\gamma} = -i[x_\beta (\partial/\partial x^\gamma) - x_\gamma (\partial/\partial x^\beta)] \quad (2.16)$$

$$M_\alpha = 2i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\beta (\partial/\partial x^\gamma) \quad (2.17)$$

Lorsqu'un système physique est invariant par rotation, les générateurs M_α sont identifiés aux composantes J_α de l'opérateur moment cinétique \mathbf{J} du système qui devient une quantité conservée.

Les générateurs des boosts de vitesse sont notés par $K_\alpha = -M_{\alpha 0}$ et les paramètres ξ^α correspondent aux angles de rotations hyperboliques dans les plans (x^0, x^α) , donc $\xi^\alpha = \omega^{\alpha 0}$. Les matrices représentant les générateurs de boosts sont

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Dans la représentation différentielle, ils prennent la forme suivante

$$K_\alpha = -i [x_0 (\partial/\partial x^\alpha) - x_\alpha (\partial/\partial x^0)] \quad (2.19)$$

Les générateurs des boosts de vitesse ne sont pas des quantités conservées à la différence des générateurs des rotations.

Les six générateurs du groupe de Lorentz peuvent être rassemblés sous la forme covariante

$$M_{ij} = -i [x_i (\partial/\partial x^j) - x_j (\partial/\partial x^i)] \quad (2.20)$$

Une transformation quelconque du groupe de Lorentz propre peut être écrite en fonction des paramètres et des générateurs du groupe sous la forme exponentielle

$$l(\omega) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega^{mn}M_{mn}\right) \quad (2.21)$$

C'est là une forme d'écriture très pratique et très utilisée pour la représentation des éléments d'un groupe continu. Ainsi, la forme générale (2.11) d'un boost de vitesse s'écrit tout simplement [23]

$$V(\xi) = \exp(-i\xi^\alpha K_\alpha) \quad (2.22)$$

De la même façon, on obtient la forme exponentielle bien connue d'une rotation quelconque

$$R(\omega) = \exp(-i\omega^\alpha J_\alpha) \quad (2.23)$$

L'ensemble des six générateurs forme une base de l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz vérifiant les relations de commutation suivantes

$$[M_{ij}, M_{kl}] = i (\eta_{ik}M_{lj} - \eta_{il}M_{kj} + \eta_{jk}M_{il} - \eta_{jl}M_{ik}) \quad (2.24)$$

2.1.2 Groupe des quadri-translations

Le groupe des translations quadri-dimensionnelles T est l'ensemble des transformations inhomogènes de l'espace-temps de Minkowski. Les paramètres de ce groupe sont les composantes du quadri-vecteur de translation $a = (a^0, a^1, a^2, a^3)^t$. L'action du groupe sur les quadri-vecteurs

est donnée par la relation suivante

$$T(a)x = x' = x + a \iff x'^i = x^i + a^i \quad (2.25)$$

la loi de multiplication du groupe

$$T(a)T(b) = T(a+b) = T(b)T(a) \quad (2.26)$$

montre qu'il est abélien.

La translation infinitésimale s'écrit sous la forme suivante

$$T(\delta a) = 1 - i\delta a^i P_i \quad (2.27)$$

d'où la représentation exponentielle des translations

$$T(a) = \exp(-ia^i P_i) \quad (2.28)$$

Les générateurs $P_i = (\partial T(a) / \partial a^i)_{a^i=0}$ des translations peuvent être représentés, selon l'espace de représentation, par des matrices colonnes

$$P_0 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

ou par des opérateurs différentiels agissant sur les fonctions de coordonnées [23]

$$P_i = -i(\partial / \partial x^i) \quad (2.30)$$

Le caractère abélien du groupe des translations implique que son algèbre de Lie soit commutative

$$[P_i, P_j] = 0 \quad (2.31)$$

Lorsque le groupe des translations est le groupe de symétrie d'un système physique, les générateurs des translations spatiales P_α correspondent aux composantes de l'opérateur impulsion \mathbf{P} et le générateur des translations temporelles P_0 coïncide avec l'opérateur de l'énergie

(l'hamiltonien) H .

2.1.3 Groupe de Poincaré

Le groupe de Poincaré propre⁸ P est l'ensemble des transformations de l'espace-temps plan de Minkowski qui laisse invariante la différence quadratique entre deux quadri-vecteurs

$$(x' - y')^2 = (x - y)^2 \quad (2.32)$$

Il est réalisé par le produit semi-direct⁹ $P \equiv T \circledast L \equiv ISO(3, 1)$ du groupe de Lorentz propre et celui des translations. L'action du groupe Poincaré sur les quadri-vecteurs est définie comme suit

$$x' = g(a, l)x = lx + a \iff x'^i = l^i_j x^j + a^i \quad (2.33)$$

où les éléments de P sont notés par $g(a, l) = T(a)l \equiv a_T l$. Comme les quadri-impulsions sont des quadri-vecteurs libres, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas liés à l'origine, l'action des translations devient triviale sur cet espace et le groupe de Poincaré se réduit au groupe de Lorentz

$$p' = g(a, l)p = lp \iff p'^i = l^i_j p^j \quad (2.34)$$

La loi de multiplication du groupe est donnée par le produit de deux éléments quelconques

$$g(a, l)g(a', l') = g(la' + a, ll') \quad (2.35)$$

L'algèbre de Lie du groupe de Poincaré est formée par l'ensemble des générateurs du groupe de Lorentz et du groupe des translations vérifiant, en plus des relations (2.24) et (2.31), la relation de commutation

$$[P_i, M_{jk}] = i(\eta_{ij}P_k - \eta_{ik}P_j) \quad (2.36)$$

Le groupe de Poincaré admet deux opérateurs de Casimir, l'opérateur de masse $(P)^2$ et l'opérateur de Pauli-Lubansky $(W)^2$ dont les valeurs propres définissent, respectivement, la masse

⁸Le groupe de Poincaré complet inclut les transformations discrètes et continues de l'espace-temps, il est formé par l'union $P = P_+^\uparrow \cup P_-^\uparrow \cup P_-^\downarrow \cup P_+^\downarrow$ de quatre sous-ensembles correspondants à ceux du groupe de Lorentz. Aussi, seul le groupe de Poincaré propre P_+^\uparrow sera considéré dans la suite et sera noté P .

⁹Le produit est semi-direct à cause des relations (2.35) et (2.36) qui expriment le fait que l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz ne commute pas avec celle du groupe des quadri-translations. La notation $ISO(3, 1)$ est une abréviation de transformation Inhomogène Spéciale et (pseudo-)Orthogonale.

et le spin des particules élémentaires

$$\begin{aligned} (P)^2 &= P_i P^i \longrightarrow m^2 \\ (W)^2 &= W_i W^i \longrightarrow -s(s+1)m^2; \quad W_i = (1/2) \varepsilon_{ijkl} M^{lj} P^k \end{aligned} \tag{2.37}$$

Le groupe de Poincaré est un groupe continu, non compact et doublement connexe. Cette dernière propriété rend impossible l'utilisation des représentations de ce groupe pour l'étude des particules de spin demi-entier. Dans ce cas, on utilise les représentations du groupe de recouvrement universel du groupe de Poincaré qui est simplement connexe et qu'on note¹⁰ \tilde{P} . Ce type de représentations est appelé représentations spinorielles du groupe de Poincaré.

Dans ce qui suit nous présentons brièvement la théorie des spineurs, relativistes et non relativistes, pour mettre en évidence les représentations spinorielles du groupe de Lorentz et celui des rotations.

2.2 La théorie des spineurs

Le concept de spineur a émergé en 1916 suite aux travaux de E. Cartan [27] sur les représentations des algèbres de Lie simples. Cependant, ce n'est qu'en 1930 que cette notion a pris la forme connue aujourd'hui en physique mathématique lorsque P.A.M. Dirac l'a utilisé pour la construction d'une équation relativiste décrivant l'électron qui est doté d'un moment cinétique intrinsèque, le "spin". La fonction d'onde relativiste qui représente cette particule est un spineur à quatre composantes appelé spineur de Dirac [27].

2.2.1 Spineurs non relativistes et groupe $SU(2)$

Le groupe des rotations est l'ensemble des transformations linéaires et continues de l'espace euclidien à trois dimensions laissant invariante la norme des vecteurs

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} \implies \mathbf{x}'^2 = \mathbf{x}^2 \tag{2.38}$$

¹⁰Dans la notation de la théorie des groupes, on écrit $\tilde{P} \equiv ISL(2, \mathbb{C}) = T \otimes SL(2, \mathbb{C})$, où $SL(2, \mathbb{C})$ est le groupe des matrices complexes (2×2) de déterminant égal à 1. Ce dernier est le groupe de recouvrement universel du groupe de Lorentz $SO(3, 1)$.

Il est représenté par le groupe matriciel $SO(3)$ composé des matrices (3×3) réelles, orthogonales ($R^{-1} = R^t$) et dont les déterminants sont égaux à un ($\det R = +1$). La représentation exponentielle de ce groupe est écrite en fonction des trois générateurs J^β , présentés précédemment¹¹, et les angles de rotation [28]

$$R(\theta) = \exp(-i\theta_\beta J^\beta); \quad \theta = \{\theta_\beta; \beta = 1, 2, 3\} \quad (2.39)$$

Du point de vue topologie, ce groupe est continu, compact et doublement connexe. Il admet le groupe $SU(2)$ comme groupe de recouvrement universel. Effectivement, ce dernier qui est représenté par des matrices (2×2) complexes, unitaires et de déterminant unité, est simplement connexe. Sa représentation exponentielle agissant sur l'espace complexe à deux dimensions \mathbb{C}^2 est

$$U(\zeta) = \exp\left(-\frac{i}{2}\zeta_\alpha \sigma^\alpha\right); \quad \zeta = \{\zeta_\alpha; \alpha = 1, 2, 3\} \quad (2.40)$$

où les ζ_α sont des paramètres réels et les σ^α sont les matrices de Pauli.

Il est possible de représenter les vecteurs de l'espace euclidien E_3 par des matrices complexes X exprimées en fonction des matrices de Pauli σ_α

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \longrightarrow X = x^\alpha \sigma_\alpha = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Alors, lorsque le vecteur \mathbf{x} se transforme par la représentation R de $SO(3)$, la matrice associée X se transforme par la représentation U de $SU(2)$ et sa conjuguée hermitique U^\dagger comme suit

$$x' = Rx \longrightarrow X' = UXU^\dagger \quad (2.42)$$

ce qui implique un "homomorphisme" 2 à 1 de $SU(2)$ vers $SO(3)$

$$\begin{aligned} SU(2) &\longrightarrow SO(3) \\ \pm U &\longrightarrow R \end{aligned} \quad (2.43)$$

Cet homomorphisme est appelé représentation doublement valuée du groupe des rotations R

¹¹Dans le cas de l'espace euclidien à trois dimensions, il sont représentés par des matrices 3×3 .

par les matrices U de $SU(2)$. Exprimées en fonction des angles d'Euler, ces matrices U ne sont autres que les représentations irréductibles $D^{j=1/2}$ bien connues et très utilisées en mécanique quantique¹². On peut alors définir les spineurs d'ordre 1 comme étant les objets mathématiques (tenseurs d'ordre 1/2) dont la forme matricielle est celle des vecteurs à deux composantes $\eta = (\eta_1, \eta_2)^t$ qui se transforment par le groupe $SU(2)$

$$\eta' = U\eta \quad (2.44)$$

$$\eta'^a = U^a{}_b \eta^b ; \quad a, b = 1, 2 \quad (2.45)$$

Quand \mathbb{C}^2 est considéré comme un espace euclidien, ces spineurs sont appelés euclidiens et n'ont pas un grand intérêt en physique classique à cause de l'inexistence de grandeurs classiques qui peuvent être représentées par ces spineurs. Par contre, en mécanique quantique les spineurs appartiennent à un espace de Hilbert, ils sont alors mis en correspondance avec des grandeurs quantiques tel que le spin demi-entier des particules. Les deux composantes η_1 et η_2 du spineur peuvent s'identifier avec les deux valeurs propres de projection, respectivement $1/2$ et $-1/2$, des états de spin de la particule décrite par cette représentation [29].

En résumé, les spineurs non relativistes de l'espace de Hilbert sont appelés spineurs de Pauli, ils se transforment par le groupe $SU(2)$ via la représentation $D^{\frac{1}{2}}$ qui s'écrit en fonction des angles d'Euler sous la forme suivante [26]

$$D^{\frac{1}{2}}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \exp(-i(\alpha + \gamma)/2) \cos(\beta/2) & -\exp(-i(\alpha - \gamma)/2) \sin(\beta/2) \\ \exp(-i(-\alpha + \gamma)/2) \sin(\beta/2) & \exp(-i(-\alpha - \gamma)/2) \cos(\beta/2) \end{pmatrix} \\ 0 \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \gamma < 4\pi \quad (2.46)$$

L'intervalle sur lequel varie l'angle γ pour le cas du groupe $SU(2)$ est le double de celui d'une rotation ordinaire ce qui reflète le fait que les matrices de $SU(2)$ forme une représentation doublement valuée de $SO(3)$. Cette propriété apparaît aussi dans la transformation des spineurs par rotation : les spineurs ne sont invariants que par des rotations d'un angle $4n\pi$ (n étant un entier) à la différence des grandeurs classiques qui sont invariantes par des rotations d'un angle $2n\pi$.

¹²Les représentations D^j , $j = 0, 1/2, 1, \dots$, sont au sens strict des représentations de $SU(2)$, c'est-à-dire que $D^j \equiv D^j(U)$ avec $D^{1/2}(U) = U$. Elles ne se réduisent à des représentations de $SO(3)$ que pour des j entiers, car elles sont doublement valuées pour les j demi-entiers $D^{1/2}(R) = \pm U = \pm D^{1/2}(U)$ et ne sont pas donc de vrais isomorphismes.

2.2.2 Spineurs relativistes et groupe $SL(2, \mathbb{C})$

Les quadri-vecteurs de l'espace de Minkowski M_4 peuvent être, eux aussi, représentés par des matrices (2×2)

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \longrightarrow X = x^i \sigma_i = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

où $\sigma_0 = I$ et les σ_α sont les matrices de Pauli. On remarque que le déterminant de X est égal au carré du quadri-vecteur x , $\det(X) = x^i x_i$. L'ensemble des transformations des coordonnées

$$x' = lx \rightarrow X' = \Lambda X \Lambda^\dagger \quad (2.48)$$

qui laissent invariant le déterminant de la matrice X

$$\det X' = \det X \Leftrightarrow x'^i x'_i = x^i x_i \quad (2.49)$$

forme un groupe désigné par¹³ $SL(2, \mathbb{C})$ et représenté par des matrices Λ complexes de déterminant unité $\det(\Lambda) = 1$. A chaque transformation Λ de ce groupe correspond une transformation unique l du groupe de Lorentz dont les composantes sont obtenues par la relation suivante [17, 26]

$$l^i_k = \frac{1}{2} \text{Tr}(\Lambda \sigma_k \Lambda^\dagger \tilde{\sigma}^i); \quad \tilde{\sigma}^i \equiv \sigma_i \quad (2.50)$$

où les matrices $\tilde{\sigma}^i$ sont introduites pour préserver la covariance des indices.

Les relations (2.48) et (2.50) montrent l'existence d'un "homomorphisme" 2 à 1 du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ vers le groupe de Lorentz propre¹⁴ L

$$\begin{aligned} SL(2, \mathbb{C}) &\rightarrow L \\ \pm \Lambda &\longmapsto l \end{aligned} \quad (2.51)$$

¹³En général, $SL(n, \mathbb{C})$ est le groupe des matrices (transformations linéaires) $n \times n$ complexes et spéciales (déterminant égal à un).

¹⁴Du fait que $l^0_0 = \frac{1}{2} \text{Tr}(\Lambda \Lambda^\dagger) > 0$, la correspondance est avec le groupe de Lorentz propre et non pas avec le groupe de Lorentz complet.

Dans le cas du groupe $SL(2, \mathbb{C})$, à la différence du groupe $SU(2)$, il existe deux types de spineurs : le premier se transforme par la représentation Λ alors que le second se transforme par la représentation $\bar{\Lambda}$ conjuguée complexe de Λ . Ces deux représentations du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ ne sont pas équivalentes. Le premier type de spineurs est noté par η et le second qui appartient à l'espace dual est noté par $\dot{\eta}$, leur transformation par le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ s'écrit sous la forme

$$\eta' = \Lambda \eta \iff \eta'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} \eta^{\beta} \quad (2.52)$$

$$\dot{\eta}' = \bar{\Lambda} \dot{\eta} \iff \dot{\eta}'^{\dot{\alpha}} = \bar{\Lambda}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \dot{\eta}^{\dot{\beta}}; \quad \dot{\eta}^{\dot{\alpha}} \equiv \dot{\eta}^{\alpha} \equiv \bar{\eta}^{\alpha} \quad (2.53)$$

Les deux représentations Λ et $\bar{\Lambda}$ s'écrivent sous forme exponentielle en fonction des générateurs et des paramètres du groupe [23]

$$\Lambda = \exp[-i(\theta_{\alpha} S^{\alpha} + \xi_{\alpha} N^{\alpha})] \quad (2.54)$$

$$\bar{\Lambda} = \exp[i(\theta_{\alpha} \bar{S}^{\alpha} + \xi_{\alpha} \bar{N}^{\alpha})] \quad (2.55)$$

$$S^{\alpha} = \frac{1}{2} \sigma^{\alpha}; \quad N^{\alpha} = \frac{i}{2} \sigma^{\alpha} \quad (2.56)$$

Les générateurs S^{α} du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ correspondent aux générateurs des rotations et les générateurs N^{α} s'identifient aux générateurs des boosts de vitesse du groupe de Lorentz.

Ces deux types de spineurs, de même que les spineurs euclidiens, n'ont pas d'intérêt en mécanique classique. C'est en théorie des champs, lorsqu'on utilise l'espace de Hilbert que les spineurs du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ ont de l'importance. Les deux types de spineurs η et $\dot{\eta}$ se transforment alors par les représentations irréductibles $D^{(\frac{1}{2}, 0)}$ et $D^{(0, \frac{1}{2})}$ qui s'identifient avec Λ et $\bar{\Lambda}$ [36]

$$D^{(\frac{1}{2}, 0)}(\Lambda) = \Lambda \quad (2.57)$$

$$D^{(0, \frac{1}{2})}(\Lambda) = \bar{\Lambda} \quad (2.58)$$

Ces représentations sont les plus simples et les plus importantes des représentations non triviales de ce groupe. Les représentations irréductibles d'ordre supérieur du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ sont toutes obtenues par la réduction du produit tensoriel des représentations $D^{(\frac{1}{2}, 0)}$ et $D^{(0, \frac{1}{2})}$ qui sont par conséquent nommées représentations fondamentales [30].

La somme directe de ces deux représentations est utilisée en théorie des champs pour prendre

en compte, à la fois, des spineurs et des spineurs ponctués qui décrivent respectivement la particule et l'antiparticule [35]. Un exemple bien connu est celui de l'équation de Dirac qui est une réalisation de la représentation

$$D(\Lambda) = (D^{(\frac{1}{2},0)} \oplus D^{(0,\frac{1}{2})})(\Lambda) \quad (2.59)$$

c'est la raison pour laquelle les spineurs de Dirac ont quatre composantes [23]. Cette réalisation est faite de façon covariante en termes des matrices γ^i de Dirac. Dans la convention de Weyl, qu'on adopte ici, les spineurs à quatre composantes sont appelés tout simplement spineurs alors que ceux à deux composantes sont dits demi-spineurs.

2.3 Représentations induites du groupe de Poincaré

2.3.1 Représentation impulsion

L'espace impulsion relativiste est en correspondance directe avec l'espace-temps de Minkowski, on peut alors associer à tout point matériel (particule), repéré dans l'espace-temps par le quadri-vecteur x et animé d'une vitesse \mathbf{v} , un vecteur impulsion \mathbf{p} et une énergie totale E rassemblé dans le quadri-vecteur énergie-impulsion $(p^0 = E, \mathbf{p}) \equiv p$ dont le produit scalaire est¹⁵

$$p \cdot p = \eta_{ij} p^i p^j = E^2 - \mathbf{p}^2 \quad (2.60)$$

Pour la particule au repos ($\mathbf{p} = \mathbf{0}$ et $E = m$ est l'énergie "ou masse" au repos), on obtient

$$p^2 = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \quad (2.61)$$

C'est l'invariance du produit scalaire qui permet la généralisation de cette relation pour toute particule libre de masse au repos m et d'impulsion \mathbf{p} quelconque. La relation (2.61) est une contrainte qui indique que l'espace impulsion relativiste est un espace tridimensionnel.

L'espace impulsion peut être divisé en six sous-espaces. Cette subdivision s'avère nécessaire pour l'étude des particules élémentaires. Le premier sous-espace est constitué de quadri-impulsions du genre-temps $p^2 > 0$ avec une énergie (fréquence) positive $p^0 > 0$. Ce sous-espace se divise en couches superposées paramétrées par la masse m , les hyperboloïdes de masse. Il en

¹⁵Nous avons adopté le système d'unité où la vitesse de la lumière $c = 1$.

est de même pour le second sous-espace, qui ne diffère du premier que par le fait que l'énergie soit négative $p^0 < 0$. Ces deux sous-espaces sont propres aux particules massives relativistes, le premier est noté C_m^+ et le second C_m^- . Il est possible de définir sur chaque hyperboloïde de masse une mesure invariante [32]

$$d\mu(p) = \frac{d^3p}{p^0} = \frac{d^3p}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \quad (2.62)$$

Le troisième et le quatrième sous-espace sont constitués de quadri-impulsions de genre-lumière $p^2 = 0$, l'un avec $p^0 > 0$ et l'autre avec $p^0 < 0$. Ces deux sous-espaces sont adaptés à la description des particules de masse nulle. Le cinquième sous-espace c'est celui des quadri-impulsions du genre-espace $p^2 < 0$, il est utilisé pour décrire des particules supra-lumineuses de masse imaginaire¹⁶. Le sixième sous-espace n'est autre que le point d'origine $p^i = 0$ qui caractérise l'état du vide [31].

En agissant par les éléments du groupe de Poincaré sur l'espace impulsion, on peut aboutir à la subdivision précédente. Ceci nous permettra d'assigner à chaque sous-espace une impulsion standard \bar{p} qui le représente. Les éléments du groupe de Poincaré qui laisse \bar{p} invariante $H\bar{p} = \bar{p}$ forment le petit groupe du sous-espace considéré et l'action sur l'impulsion standard \bar{p} par les autres éléments du groupe P permet de reconstruire ce sous-espace appelé alors orbite du groupe au point \bar{p} .

Pour l'étude des particules massives, il est suffisant de prendre la nappe positive [37]

$$C_m^+ = \left\{ p / (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2, p^0 > 0 \right\} \quad (2.63)$$

de l'hyperboloïde de masse qui est un espace homogène du groupe P . La quadri-impulsion de la particule massive au repos $\bar{p} = (+m, \mathbf{0})^t$ est prise comme impulsion standard caractérisant la nappe C_m^+ , et le sous-groupe stabilisateur de \bar{p} est le produit semi-direct du groupe des translations T par le groupe des rotations R

$$H = T \circledast R \quad (2.64)$$

Le sous-groupe H est le petit groupe, au sens de Wigner [25, 38], du groupe de Poincaré pour le cas massif : c'est le sous-groupe qui laisse invariante la quadri-impulsion d'une particule

¹⁶C'est le cas des particules hypothétiques qu'on appelle les tachyons.

relativiste et qui décrit, par conséquent, ses propriétés spatiales internes [38, 39]. En effet, le petit groupe $H = T \otimes R$ décrit un degré de liberté interne qui est le spin de la particule en plus de sa masse.

On remarque que la nature du petit groupe dépend de la valeur de la masse au repos de la particule. Par exemple, pour le cas des particules sans masse, le petit groupe est le groupe euclidien à deux dimensions $E(2)$ [40]. Ceci signifie, en particulier, que le traitement fait pour la particule massive de spin $1/2$ (cas de l'électron) ne peut pas être directement appliqué pour la particule de même spin mais de masse nulle (cas du neutrino) en mettant tout simplement $m = 0$ dans les représentations du groupe et du petit groupe [23]. Néanmoins, il existe une méthode appelée la contraction d'Inonu-Wigner [41] pour modifier la structure du petit groupe, et par conséquent celle de l'espace interne, et permettre ainsi le passage du cas des particules massives au cas des particules sans masses.

Ainsi, l'espace quotient P/H est isomorphe à la nappe C_m^+ de l'hyperboloïde de masse et peut être considéré comme espace homogène du groupe de Poincaré. En effet, l'espace quotient P/H est l'ensemble des classes dont les représentants sont les boosts de vitesse de sorte que seule la nappe positive de masse unité soit prise en compte

$$P/H = \{v_L\} \cong C_1^+ \quad (2.65)$$

L'application d'un boost v_L à la quadri-vitesse standard $\bar{v} = (1, \mathbf{0})^t$ donne le quadri-vecteur vitesse $v = v_L \bar{v}$.

Pour l'étude des particules massives de spin $1/2$, on utilise le groupe de recouvrement universel \tilde{P} du groupe de Poincaré dont le petit groupe est le produit semi-direct du groupe des translations T par le groupe $SU(2)$

$$\tilde{H} = T \otimes SU(2) \quad (2.66)$$

Les représentations irréductibles du petit groupe \tilde{H} sont

$$\Delta^{m\frac{1}{2},+}(au) = \exp(imav) D^{\frac{1}{2}}(u); \quad a \in T, u \in SU(2)$$

La représentation impulsion $U^{m\frac{1}{2},+}(\tilde{P})$ du groupe de Poincaré est induite par la représen-

tation irréductible du petit groupe

$$U^{m\frac{1}{2},+}(\tilde{P}) = \Delta^{m\frac{1}{2},+}(\tilde{H}) \uparrow \tilde{P} \quad (2.67)$$

La représentation $U^{m\frac{1}{2},+}(\tilde{P})$ agit sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}^{m\frac{1}{2},+}$. La représentation $\Delta^{m\frac{1}{2},+}$ agit sur le plan complexe $\mathfrak{L}^{m\frac{1}{2},+} = \mathbb{C}^2$ des valeurs $\varphi^{m\frac{1}{2},+}(v)$ des fonctions d'ondes $\varphi^{m\frac{1}{2},+}$ appartenant à $\mathcal{H}^{m\frac{1}{2},+}$ et définies sur l'espace homogène $\tilde{P}/\tilde{H} \cong C_1^+$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{m\frac{1}{2},+} &\ni \varphi^{m\frac{1}{2},+} : \tilde{P}/\tilde{H} \longrightarrow \mathfrak{L}^{m\frac{1}{2},+} \\ v &\longmapsto \varphi^{m\frac{1}{2},+}(v) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Les deux composantes complexes de $\varphi^{m\frac{1}{2},+}(v)$ correspondent aux deux projections $\pm 1/2$ du spin de la particule.

Pour déduire la représentation impulsion du groupe de Poincaré à partir de la relation (1.19), on utilise la factorisation du groupe de Lorentz L par rapport au groupe des rotations R , ou celle de $SL(2, \mathbb{C})$ par rapport à $SU(2)$

$$l^{-1}v_L = (l^{-1}v)_L (l^{-1}, v)_R \quad (2.69)$$

$$\Lambda^{-1}\Lambda_v = \Lambda_{(\Lambda^{-1}v)} (\Lambda^{-1}, v)_{SU(2)} \quad (2.70)$$

Le facteur $(l^{-1}, v)_R$ ou $(\Lambda^{-1}, v)_{SU(2)}$ est la rotation de Wigner [22, 26]. Rappelons qu'à chaque élément Λ de $SL(2, \mathbb{C})$ correspond un élément unique de L ($\Lambda \equiv \Lambda_l \rightarrow l \equiv l_\Lambda$) et notons que cette correspondance a été utilisée pour les boosts ($\Lambda_v \rightarrow v_L$).

La même procédure peut être suivie pour construire la représentation $U^{m\frac{1}{2},-}(\tilde{P})$ décrivant les antiparticules de spin 1/2 de la nappe négative $C_m^- = \{p/(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2, p^0 < 0\}$ et agissant sur l'espace $\mathcal{H}^{m\frac{1}{2},-}$.

La représentation impulsion de \tilde{P} est alors

$$\left[U^{m\frac{1}{2},\pm}(a, \Lambda) \varphi^{m\frac{1}{2},\pm} \right] (v) = \exp(\mp imav) D^{\frac{1}{2}} \left[(\Lambda^{-1}, v)_{SU(2)}^{-1} \right] \varphi^{m\frac{1}{2},\pm}(l_\Lambda^{-1}v) \quad (2.71)$$

où Λ est une matrice du groupe $SL(2, \mathbb{C})$ et l_Λ l'élément correspondant du groupe de Lorentz [17].

La représentation impulsion du groupe de Poincaré étant irréductible, elle décrit les états

réels (matériels) des particules mais pas leur localisation dans l'espace-temps [22]. Cette propriété est décrite par la représentation configuration que nous allons présenter maintenant.

2.3.2 Représentation configuration

Chaque élément du groupe de Poincaré (ou son recouvrement \tilde{P}) est le produit d'un élément du groupe des translations par un élément du groupe de Lorentz (ou son recouvrement $\tilde{L} \equiv SL(2, \mathbb{C})$). Ceci nous permet de localiser la particule dans l'espace-temps de Minkowski par des classes d'équivalences représentées, chacune, par une translation a_T . Autrement dit, l'espace quotient P/L est isomorphe à l'espace configuration [27]

$$M_4 \equiv P/L \quad (2.72)$$

$$x \equiv x_T \quad (2.73)$$

Aussi, le groupe de Lorentz est le stabilisateur de l'origine par conséquent P/L devient un espace homogène du groupe de Poincaré. Sur ces considérations, la représentation configuration du groupe de Poincaré pour le cas des particules massives de spin 1/2 est induite à partir des représentations irréductibles $D^{(\frac{1}{2}, 0)}$ et $D^{(0, \frac{1}{2})}$ du groupe \tilde{L} . On présente la procédure pour le cas de la représentation $U^{(\frac{1}{2}, 0)}$ qui est induite à partir de la représentation $D^{(\frac{1}{2}, 0)}$

$$U^{(\frac{1}{2}, 0)}(\tilde{P}) = D^{(\frac{1}{2}, 0)}(\tilde{L}) \uparrow \tilde{P} \quad (2.74)$$

La représentation configuration, pour un élément $g = (a_T, \Lambda)$ de \tilde{P} , est écrite sous la forme¹⁷ [22]

$$\left[U^{(\frac{1}{2}, 0)}(a_T, \Lambda) \eta \right] (x) = D^{(\frac{1}{2}, 0)} \left[(g^{-1}, x)_{\tilde{L}}^{-1} \right] \eta (g^{-1}x) \quad (2.75)$$

Cette relation peut être simplifiée davantage par l'utilisation de la définition et les propriétés du système de facteurs $(g, x)_{\tilde{L}}$ pour $g = (a_T, \Lambda)$

$$(g, x)_{\tilde{L}} = (gx)_T^{-1} gx_T, \quad (a_T, x)_{\tilde{L}} = 1, \quad (\Lambda, x)_{\tilde{L}} = \Lambda, \quad (g, x)_{\tilde{L}} = \Lambda \quad (2.76)$$

¹⁷On utilise pour cela la définition suivante de l'action de \tilde{P} sur M_4

$$a_T \Lambda x = l_\Lambda x + a$$

qui exploite la relation entre $SL(2, \mathbb{C})$ et le groupe de Lorentz L .

On obtient la forme finale

$$\left[U^{(\frac{1}{2},0)}(a, \Lambda) \eta \right] (x) = D^{(\frac{1}{2},0)}(\Lambda^{-1}) \eta(l_{\Lambda}^{-1}(x-a)) \quad (2.77)$$

$$= \Lambda^{-1} \eta(l_{\Lambda}^{-1}(x-a)) \quad (2.78)$$

qui montre que la représentation $U^{(\frac{1}{2},0)}$ agit sur les fonctions η de l'espace $\mathcal{H}^{(\frac{1}{2},0)}$ alors que $D^{(\frac{1}{2},0)}$ agit sur les valeurs $\eta(x)$ appartenant à l'espace linéaire $\mathfrak{L}^{(\frac{1}{2},0)} = \mathbb{C}^2$

$$\mathcal{H}^{(\frac{1}{2},0)} \ni \eta : P/L \longrightarrow \mathfrak{L}^{(\frac{1}{2},0)} \quad (2.79)$$

$$x \longrightarrow \eta(x)$$

La procédure reste la même pour la représentation $U^{(0,\frac{1}{2})}$ qui est induite à partir de la représentation $D^{(0,\frac{1}{2})}$

$$U^{(0,\frac{1}{2})}(\tilde{P}) = D^{(0,\frac{1}{2})}(\tilde{L}) \uparrow \tilde{P} \quad (2.80)$$

La représentation $D^{(0,\frac{1}{2})}$ agit sur l'espace $\mathfrak{L}^{(0,\frac{1}{2})} = \mathbb{C}^2$ et la représentation $U^{(0,\frac{1}{2})}$ agit sur l'espace $\mathcal{H}^{(0,\frac{1}{2})}$ qui est celui des fonctions $\dot{\eta}$ définies comme suit

$$\mathcal{H}^{(0,\frac{1}{2})} \ni \dot{\eta} : P/L \longrightarrow \mathfrak{L}^{(0,\frac{1}{2})} \quad (2.81)$$

$$x \longrightarrow \dot{\eta}(x)$$

La forme de la représentation induite de $U^{(0,\frac{1}{2})}$ est alors

$$\left[U^{(0,\frac{1}{2})}(a, \Lambda) \dot{\eta} \right] (x) = D^{(0,\frac{1}{2})}(\Lambda^{-1}) \dot{\eta}(l_{\Lambda}^{-1}(x-a)) \quad (2.82)$$

$$= \bar{\Lambda}^{-1} \dot{\eta}(l_{\Lambda}^{-1}(x-a)) \quad (2.83)$$

L'équation de Dirac correspond à la représentation $U^D(a, \Lambda)$ induite à partir de la représentation $D(\Lambda) = (D^{(\frac{1}{2},0)} \oplus D^{(0,\frac{1}{2})})(\Lambda)$

$$\left[U^D(a, \Lambda) \psi \right] (x) = D(\Lambda^{-1}) \psi(l_{\Lambda}^{-1}(x-a)) \quad (2.84)$$

où D agit sur l'espace $\mathfrak{L}^D = \mathbb{C}^4$ et U^D agit sur l'espace \mathcal{H}^D des fonctions $\psi = \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^D &\ni \psi : P/L \longrightarrow \mathfrak{L}^D \\ x &\longrightarrow \psi(x) \end{aligned} \quad (2.85)$$

Malgré l'irréductibilité des représentations $D^{(\frac{1}{2},0)}$ et $D^{(0,\frac{1}{2})}$ du groupe de $SL(2, \mathbb{C})$, la représentation configuration du groupe de Poincaré est réductible. Cette représentation décrit des états localisés qui peuvent être aussi bien réels que virtuels [22].

2.4 Commutation des représentations induites et propagation

2.4.1 Matérialisation

On a vu précédemment que la représentation configuration du groupe de Poincaré $U^D(P)$ est réductible et décrit des états d'une particule localisée mais sa masse et son spin ne sont pas bien définis. Par contre, la représentation impulsion $U^{m\frac{1}{2}}(P)$ est irréductible et décrit une particule de masse non nulle m et de spin $1/2$ mais pas sa localisation dans l'espace-temps.

Si l'on veut avoir des états réels localisables, on commute ces deux représentations afin de sélectionner, parmi les états localisés des particules, ceux qui sont réels [22].

On commence par définir le commutant entre la représentation impulsion et la représentation configuration comme l'ensemble d'opérateurs $K_{m\frac{1}{2}}^\pm$ tels que

$$K_{m\frac{1}{2}}^\pm U^D(P) = U^{m\frac{1}{2},\pm}(P) K_{m\frac{1}{2}}^\pm \quad (2.86)$$

(les signes $+$ et $-$ correspondent aux particules et aux antiparticules, respectivement). Ces opérateurs sont des applications de l'espace \mathcal{H}^D vers l'espace $\mathcal{H}^{m\frac{1}{2},\pm}$ ayant la forme [22]

$$\varphi^{m\frac{1}{2},\pm}(v) = \tilde{\varphi}^{m\frac{1}{2},\pm}(v_L) = \left(K_{m\frac{1}{2}}^\pm \tilde{\psi} \right)(v_L) = \frac{m}{4\pi^{3/2}} \int_{G/L} d\mu(x) t(v_L^{-1}x_T) \tilde{\psi}(x_T) \quad (2.87)$$

où x_T est la translation représentant la classe x de l'espace quotient P/L et correspondant au point x de l'espace-temps de Minkowski. Le boost v_L représente la classe v de P/H et

correspond à la quadri-vitesse v de C_1^+ .

La condition de structure (1.22) de t et la relation

$$x_T^{-1} v_L = v_L (-v_L^{-1} x)_T \quad (2.88)$$

permettent de réécrire la relation de commutation sous la forme

$$\varphi^{m\frac{1}{2},\pm}(v) = \left(K_{m\frac{1}{2}}^\pm \psi \right) (v) = \frac{m}{4\pi^{3/2}} \int_M d\mu(x) \exp[\pm(imv.x)] K_{\frac{1}{2}}^\pm D(v_L^{-1}) \psi(x) \quad (2.89)$$

où la matrice constante $K_{\frac{1}{2}} = t(1)$ est une application linéaire de \mathfrak{L}^D vers $\mathfrak{L}^{m\frac{1}{2}}$, et $d\mu(x)$ correspond à l'élément de volume de l'espace de Minkowski ($d\mu(x) = d^4x$).

Cette commutation est une transition, de l'espace \mathcal{H}^D vers l'espace $\mathcal{H}^{m\frac{1}{2},\pm}$, assurée par l'opérateur $K_{m\frac{1}{2}}^\pm$. Ce passage des états localisés aux états réels est interprété comme une matérialisation des états localisés [22].

2.4.2 Localisation

On poursuit la procédure de commutation en définissant cette fois-ci un ensemble d'opérateurs $I_{m\frac{1}{2}}^\pm$. Ces derniers sont des applications de l'espace $\mathcal{H}^{m\frac{1}{2},\pm}$ vers le sous-espace irréductible $\mathcal{H}^{D,m\frac{1}{2},\pm} \subset \mathcal{H}^D$ des états qui sont à la fois réels et localisés, tels que

$$I_{m\frac{1}{2}}^\pm U^{m\frac{1}{2}}(P) = U^D(P) I_{m\frac{1}{2}}^\pm \quad (2.90)$$

La forme intégrale

$$\psi^{m\frac{1}{2},\pm}(x') = \tilde{\psi}^{m\frac{1}{2},\pm}(x_T) = \left(I_{m\frac{1}{2}}^\pm \tilde{\varphi}^{m\frac{1}{2},\pm} \right) (x_T) = \frac{m}{4\pi^{3/2}} \int_{G/H} d\Omega_1^+(v) t(x_T^{-1} v_L) \tilde{\varphi}^{m\frac{1}{2},\pm}(v_L) \quad (2.91)$$

de ces opérateurs peut être réécrite, en utilisant la relation (1.22), sous la forme

$$\psi^{m\frac{1}{2},\pm}(x') = \left(I_{m\frac{1}{2}}^\pm \varphi^{m\frac{1}{2},\pm} \right) (x') = \frac{m}{4\pi^{3/2}} \int_{C_1^+} d\Omega_1^+(v) \exp[\mp(imv.x')] D(v_L) I_{\frac{1}{2}}^\pm \varphi^{m\frac{1}{2},\pm}(v) \quad (2.92)$$

où $I_{\frac{1}{2}}^\pm$ est une matrice constante et $d\Omega_1^+(v) = \frac{d^3\mathbf{v}}{v^0}$ est la mesure invariante sur la nappe C_1^+ . Cette commutation est équivalente à la transformation de Fourier à quatre dimensions et permet la sélection des fonctions $\psi^{m\frac{1}{2},\pm}$ qui satisfont à l'équation de Dirac.

La transition de l'espace $\mathcal{H}^{m\frac{1}{2},\pm}$ vers l'espace $\mathcal{H}^{D,m\frac{1}{2}\pm} \subset \mathcal{H}^D$ est assurée par l'opérateur $I_{m\frac{1}{2}}^\pm$, et elle est interprétée comme une localisation des états matériels [22].

2.4.3 Propagation

La double commutation des représentations induites est obtenue par composition de l'opérateur $I_{m\frac{1}{2}}^\pm$ avec $K_{m\frac{1}{2}}^\pm$ ce qui donne un autre opérateur $\Pi_{m\frac{1}{2}}^\pm = I_{m\frac{1}{2}}^\pm K_{m\frac{1}{2}}^\pm$. Cet opérateur correspond à la propagation de l'état localisé

$$\Pi_{m\frac{1}{2}}^\pm = I_{m\frac{1}{2}}^\pm K_{m\frac{1}{2}}^\pm : \mathcal{H}^D \longrightarrow \mathcal{H}^{m\frac{1}{2},\pm} \longrightarrow \mathcal{H}^{D,m\frac{1}{2}\pm} \quad (2.93)$$

$$\psi^{m\frac{1}{2},\pm}(x') = \left(\Pi_{m\frac{1}{2}}^\pm \psi \right)(x') = \int_M d^4x. \Pi_{m\frac{1}{2}}^\pm(x', x) \psi(x) \quad (2.94)$$

Le noyau $\Pi_{m\frac{1}{2}}^\pm(x', x)$ de l'opérateur $\Pi_{m\frac{1}{2}}^\pm$ est le propagateur des particules (signe +) et des antiparticules (signe -) et possède la forme intégrale suivante

$$\Pi_{m\frac{1}{2}}^\pm(x', x) = \frac{m^2}{2(2\pi)^3} \int_{C_1^+} \frac{d^3\mathbf{v}}{v^0} \exp[\mp(imv \cdot (x' - x))] D(v_L) I_{\frac{1}{2}}^\pm K_{\frac{1}{2}}^\pm D(v_L^{-1}) \quad (2.95)$$

Le propagateur $\Pi_{m\frac{1}{2}}^\pm(x', x)$ décrit la transition d'un état ψ localisé en x vers un autre état $\psi^{m\frac{1}{2},\pm}$ localisé en x' à travers un état réel $\varphi^{m\frac{1}{2},\pm}$.

Pour le calcul du propagateur, on prend pour la représentation $D(\Lambda)$ la forme suivante [22]

$$D(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{4}\omega_{\alpha\beta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\right) \quad (2.96)$$

où les matrices γ sont écrites dans la représentation de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

Pour les vitesses $v = (ch\xi, \mathbf{n}sh\xi)^t$ avec $|\mathbf{n}| = 1$, on trouve la représentation du boost de Lorentz

$$\begin{aligned} D(v_L) &= ch(\xi/2) + \gamma^0(\mathbf{n}\boldsymbol{\gamma})sh(\xi/2) \\ D(v_L^{-1}) &= ch(\xi/2) - \gamma^0(\mathbf{n}\boldsymbol{\gamma})sh(\xi/2) \end{aligned} \quad (2.98)$$

En choisissant

$$I_{\frac{1}{2}}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad K_{\frac{1}{2}}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (2.99)$$

$$I_{\frac{1}{2}}^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad K_{\frac{1}{2}}^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

Les opérateurs $\Pi_{\frac{1}{2}}^\pm$ qui s'écrivent alors

$$\Pi_{\frac{1}{2}}^\pm = I_{\frac{1}{2}}^\pm K_{\frac{1}{2}}^\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \gamma^0) \quad (2.101)$$

sont des projecteurs [17] des états des particules (signe +) et des antiparticules (signe -) au repos ($p = \pm \bar{p}$) sur les espaces irréductibles $\mathcal{H}^{D, m\frac{1}{2}, \pm}$

$$\begin{aligned} \left(\Pi_{\frac{1}{2}}^\pm\right)^2 &= \Pi_{\frac{1}{2}}^\pm & (2.102) \\ \Pi_{\frac{1}{2}}^\pm &: \mathcal{L}^D \rightarrow \mathcal{L}^{D, m\frac{1}{2}, \pm} \end{aligned}$$

Le terme $D(v_L) I_{\frac{1}{2}}^\pm K_{\frac{1}{2}}^\pm D(v_L^{-1})$ du propagateur (2.95) peut être calculé sachant que

$$D(\Lambda) \gamma^k D(\Lambda^{-1}) = (l_\Lambda^{-1})^k{}_n \gamma^n \quad (2.103)$$

où l_Λ est la représentation du groupe de Lorentz correspondante à Λ . On trouve alors en utilisant (2.98) et la relation $p = mv$ que

$$D(v_L) \Pi_{\frac{1}{2}}^\pm D(v_L^{-1}) = \frac{1}{2m} (m \pm \gamma_k p^k) \quad (2.104)$$

de sorte que

$$\Pi_{\frac{1}{2}}^\pm(x', x) = \frac{m}{4(2\pi)^3} \int_{C_1^+} \frac{d^3\mathbf{v}}{v^0} (\pm \gamma_k p^k + m) \exp[\mp(imv \cdot (x' - x))] \quad (2.105)$$

Le calcul du propagateur causal

$$\Pi_{m\frac{1}{2}}(x', x) = \theta(x'^0 - x^0)\Pi_{m\frac{1}{2}}^+(x', x) + \theta(x^0 - x'^0)\Pi_{m\frac{1}{2}}^-(x', x) \quad (2.106)$$

se fait avec l'utilisation de la forme intégrale de la fonction Heaviside [33]

$$\theta(x^0) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\exp(-i\omega x^0)}{\omega + i\epsilon} \quad (2.107)$$

Alors, on retrouve la forme conventionnelle du propagateur causal d'une particule massive spinorielle [31, 4]

$$\Pi_{m\frac{1}{2}}(x', x) = \frac{i}{2m} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp(-imv \cdot (x' - x)) \frac{(\gamma_k p^k + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.108)$$

Pour le cas des particules massives scalaires (spin nul), les représentations du groupe de Lorentz sont triviales et par conséquent le calcul du propagateur est plus simple; on trouve dans ce cas

$$\Pi_{m0}(x', x) = \frac{i}{2m} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-imv \cdot (x' - x))}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.109)$$

Ces deux propagateurs, qu'on a déterminé pour le cas des particules ponctuelles massives de spin 1/2 et de spin 0, seront utilisés dans le modèle géométrique-différentiel pour décrire respectivement la propagation du mode interne et du mode externe qui composent la particule étendue. Le prochain chapitre sera consacré à la théorie fonctionnelle et au modèle géométrique-différentiel.

Chapitre 3

La particule étendue

Le modèle géométro-différentiel de la particule étendue repose principalement sur deux théories, la théorie quantique fonctionnelle et la géométrie différentielle. Alors, on est contraint d'introduire dans ce chapitre, et en premier lieu, quelques notions élémentaires de la géométrie différentielle en se limitant à la définition des variétés et des espaces fibrés [42, 43, 44]. En second lieu, on présente la théorie quantique fonctionnelle [9, 10] avant d'entamer finalement l'application des résultats du chapitre précédent au modèle géométro-différentiel de la particule étendue [11-16]. Ces résultats seront utilisés dans ce modèle pour décrire les modes ponctuels, interne et externe, qui composent la particule étendue. Le propagateur global de la particule étendue sera déterminé par la méthode des représentations induites.

3.1 Géométrie différentielle

La géométrie différentielle a introduit de nouvelles notions en mathématiques telles que les coordonnées locales, les connexions, le transport parallèle et d'autres encore qui ont trouvé leurs applications en physique. Elle est devenue, de part son utilisation en relativité générale, un outil de première importance en physique théorique. Elle peut être définie comme étant la géométrie des *variétés* [42]. Nous allons définir dans ce qui suit les *variétés différentiables* dans le but d'introduire quelques notions de base de la géométrie différentielle, mais notre intérêt porte surtout sur *les espaces fibrés* [43, 45].

L'étude des espaces fibrés fait partie de la branche des mathématiques qu'on appelle topologie [42, 46], mais les fibrés ont également été étudiés en géométrie différentielle à cause de leur lien avec le concept géométrique de courbure [44, 47]. L'idée de connexion dans un espace

fibré s'est développée lorsqu'on a tenté de généraliser la notion de courbure d'une surface à deux dimensions pour des espaces à trois dimensions ou plus. L'application de ces concepts en physique a donné naissance à la reformulation géométrique de théories puissantes, telles que la relativité générale et la théorie de jauge, et a permis de décrire aussi bien des phénomènes quantiques que macroscopiques [5].

Nous n'allons pas aborder dans cette partie les *connexions* du fait qu'on n'a pas considéré les interactions dans le modèle de la particule étendue¹.

3.1.1 Les variétés différentiables

La notion de *variété différentiable* est une tentative de généraliser le calcul différentiel qu'on sait définir sur R^n à des espaces qui ne ressemblent à R^n que localement² (tels que la sphère, le tore, le cylindre, etc.). Alors, par définition, une variété est un *espace topologique*³ qui est localement homéomorphe à R^n . A travers cet homéomorphisme sont localement transférées les propriétés de continuité, de dérivabilité ainsi que les propriétés vectorielles et d'autres propriétés de R^n vers la variété qui n'est pas globalement identique à R^n .

La propriété de dérivabilité n'est pas définie sur toutes les variétés mais seulement sur les *variétés différentiables* qui en sont un cas particulier. Une variété M est différentiable si

- M est un espace topologique *séparé*⁴
- Pour tout point p de M , il existe un ouvert U de M contenant p , et un homéomorphisme

$$\phi : U \rightarrow W \subset R^n \tag{3.1}$$

où W est un ouvert de R^n . Nous dirons que n est la dimension de M . Le couple (U, ϕ) est une *carte locale* de M . Un ensemble de cartes locales $\{(U_i, \phi_i)\}$ tel que la réunion des U_i , soit M tout entier, est appelé *atlas* de la variété. Cet atlas n'est pas unique du fait que la réunion de deux atlas est encore un atlas.

¹Les connexions sont traitées en détail dans la référence [44] ainsi que dans les références [47] et [5] qui donnent quelques applications en physique.

²On dit, en terme précis, que ces objets sont *localement homéomorphes* à R^m . Un homéomorphisme est une application bijective et continue dont l'inverse est continue. [44].

³On appelle espace topologique un couple (X, T) où X est un ensemble et T est une famille quelconque de ses parties, appelées *ouverts*, tel que la réunion et l'intersection finie d'ouverts est un ouvert et que l'ensemble X et l'ensemble vide \emptyset soient des ouverts [42]. Un exemple est celui de l'ensemble des réunions quelconques d'intervalles ouverts de R qui définit une topologie sur R . Plus généralement, tout espace métrique est un espace topologique [42].

⁴Un espace topologique est dit séparé si pour tous points x et y distincts de cet espace, il existe deux ouverts

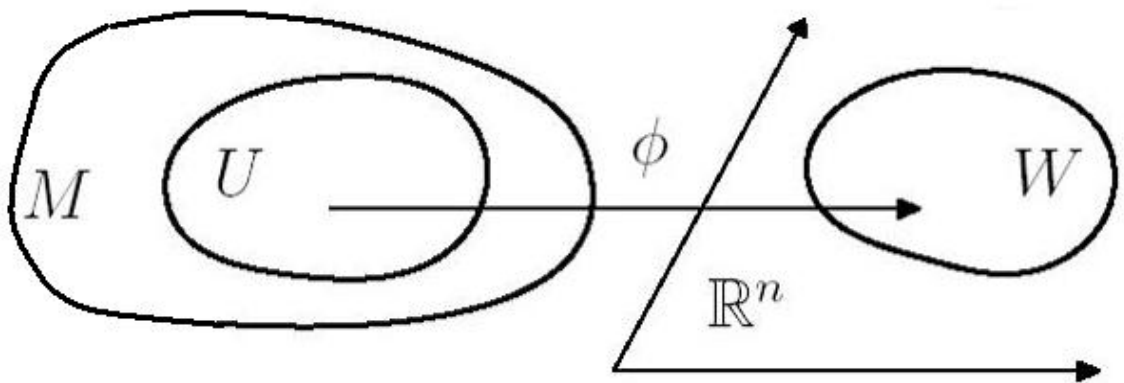


FIG. 3-1 – Homéomorphisme et carte locale

- Il existe un atlas $\{(U_i, \phi_i)\}$ de M tel que, pour tous i et j avec $U_i \cap U_j = \emptyset$, l'application

$$\psi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j) \quad (3.2)$$

soit infiniment différentiable au sens usuel des applications différentiables de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n .

La dérivabilité sur l'espace \mathbb{R}^n fait explicitement appel à sa structure d'espace vectoriel. Cette structure nous permet de définir les *coordonnées locales* pour une variété différentiable. On prend une carte locale (U, ϕ) de la variété différentiable M . A chaque point p de U correspond un point $\phi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ de \mathbb{R}^n . Les coordonnées $(x^1(p), \dots, x^n(p))$ du point $\phi(p)$ dans \mathbb{R}^n sont dites coordonnées locales de p dans la carte (U, ϕ) . Les n applications (x^1, \dots, x^n) , notées (x^i) , sont les *applications coordonnées* associées à cette carte.

On va définir maintenant la notion d'espace tangent à une variété, cette dernière nous permettra d'introduire plus facilement les espaces fibrés. On considère maintenant une classe spéciale d'applications appelées courbes⁵. Soit p un point de la variété M . On note C l'ensemble des courbes $\Gamma : [-1, 1] \rightarrow M$ telles que $\Gamma(0) = p$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que le morceau $\Gamma([- \varepsilon, \varepsilon])$ de la courbe soit dans un ouvert U d'une carte locale (U, ϕ) . Nous notons $\Gamma^i(t) = x^i(\Gamma(t))$ sur cet intervalle, où les x^i sont les applications coordonnées associées

disjoints contenant respectivement x et y [42].

⁵Une courbe ouverte dans une variété M à n dimensions est une application Γ d'un intervalle ouvert (a, b) de \mathbb{R} vers cette variété. La représentation coordonnées de Γ sur la carte (U, ϕ) est aussi une courbe dans \mathbb{R}^n définie par $x = \phi \circ \Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

à la carte locale (U, ϕ) . On définit alors une relation d'équivalence suivante sur C

$$\Gamma \sim \Gamma' \iff \left(\frac{d\Gamma^i(t)}{dt} \right) \Big|_{t=0} = \left(\frac{d\Gamma'^i(t)}{dt} \right) \Big|_{t=0} \quad (3.3)$$

Cette relation d'équivalence est indépendante du choix du système de coordonnées sur U . Cette relation signifie que nous considérons deux courbes Γ et Γ' comme équivalentes si elles ont le même vecteur tangent en 0 dans R^n , sur n'importe quelle carte locale. Par définition, l'espace tangent à M au point p , que l'on note T_pM , est l'ensemble des classes d'équivalences dans C pour cette relation. Cette définition signifie donc que T_pM est constitué des tangentes des courbes dans M . L'indépendance vis-à-vis du choix des coordonnées locales est essentiel pour assurer la cohérence de cette définition. Il faut cependant souligner qu'un vecteur tangent à M n'a pas de sens si M n'est pas un sous-ensemble d'un espace R^m . La tangente est plutôt vue ici dans R^n , grâce aux cartes locales. Nous tirons de tout cela que T_pM est un espace vectoriel, dont tout vecteur $X(p)$ peut être vu soit comme la dérivée d'une courbe (non unique) passant par p , donc comme un vecteur, soit comme une dérivation en p sur les fonctions définies au voisinage de p [46].

3.1.2 Les espaces fibrés

Commençons par introduire la notion de fibré tangent TM sur une variété M . Celui-ci est défini comme une collection $TM = \cup_{p \in M} T_pM$ de tous les espaces tangents à M . Dans ce cas, la variété M est appelée l'espace de base et chaque espace tangent T_pM est appelé fibre sur p . Les fibrés tangents sont un cas particulier des fibrés vectoriels $\pi : E \rightarrow M$ dont les fibres F_p sur chaque point p sont des copies d'un espace vectoriel F appelé la fibre type. Pour chaque *fibré vectoriel* $\pi : E \rightarrow M$ avec une fibre type F , on peut définir un fibré dual correspondant $\pi' : E^* \rightarrow M$ avec une fibre type F^* duale de F . Le dual est l'ensemble des applications linéaires de F vers R , appelées aussi formes linéaires. Le *fibré cotangent* $T^*M = \cup_{p \in M} T_p^*M$ est le dual du fibré tangent. Donc, la fibre T_p^*M est l'espace dual de T_pM , pour chaque point p de M [44].

En général, un *espace fibré* $E(M, F, \pi, G)$ est une structure mathématique constituée de trois variétés différentiables, *l'espace de base* M , *l'espace total* E et *la fibre type* F . En plus d'un groupe de Lie G appelé groupe structural du fibré, celui-ci est muni d'une loi de projection

π qui associe un point de M à tout point de E

$$\pi : E \rightarrow M \tag{3.4}$$

La fibre au dessus d'un point $p \in M$ sera par définition $F_p = \pi^{-1}(p)$ [47].

De plus, l'espace fibré est une variété différentiable qui ressemble localement au produit cartésien d'un ouvert de M et d'une fibre. Cela signifie encore qu'il y a une copie de F au dessus de chaque point de M . Le produit cartésien local du fibré est assuré par un ensemble de *difféomorphismes*⁶ Φ_i sur les cartes $\{U_i\}$ de la variété M

$$\begin{aligned} \Phi_i & : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i) \\ \pi[\Phi_i(p, f)] & = p \quad f \in F \end{aligned} \tag{3.5}$$

L'application inverse Φ_i^{-1} est appelée *la trivialisatation locale*. Une *section locale* S_i d'un fibré est une fonction sur un voisinage U_i de la variété de base M dans F_p

$$\begin{aligned} S_i & : U_i \rightarrow \pi^{-1}(p) \\ p & \mapsto S_i(p) \end{aligned}$$

Si la fibre type F est identifiée au groupe structural G , on le note par $E(M, G)$ et on dira que le fibré $\pi : E \rightarrow M$ est *un fibré principal* [44, 47].

3.2 Théorie quantique fonctionnelle

La mécanique quantique constitue la base de plusieurs disciplines fondamentales de la physique contemporaine. Son cadre théorique est purement probabiliste. Dans sa forme conventionnelle, les particules sont considérées uniquement comme des masses ponctuelles obéissant aux principes de cette mécanique. On associe à chaque particule et de manière intrinsèque un phénomène ondulatoire, cette onde a été imaginée par de Broglie bien avant sa confirmation expérimentale. En effet, généralisant les ondes associées aux photons, de Broglie écrit dans sa thèse : «on peut donc concevoir que par la suite d'une grande loi de la nature, à chaque

⁶Un *difféomorphisme* est une application bijective, continue et dérivable dont l'inverse est continue et dérivable.

morceau d'énergie de masse propre m soit lié un phénomène périodique de fréquence ν tel que $h\nu = mc^2$ ».

De Broglie qui n'était pas convaincu de l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde proposa, à l'occasion du cinquième congrès de Solvay en 1927, sa théorie de l'onde pilote qu'il a ensuite abandonnée pour se rallier, un peu malgré lui, aux conceptions de Bohr et de Heisenberg [48]. Ces conceptions dominantes, sont couramment appelées «interprétation de Copenhague de la mécanique quantique». Vers les années 50, de Broglie réactualisa son idée d'une dualité de l'onde et du corpuscule, en lui donnant l'aspect d'une nouvelle version qu'il intitula «théorie de la double solution». Cette théorie consiste, comme son nom le suggère, à identifier deux solutions couplées de l'équation d'ondes : l'une est l'onde ψ de la mécanique quantique, et l'autre appelée onde u qui comporte une singularité mathématique censée représenter la particule. En 1952, la publication par David Bohm [49, 50] d'une version modernisée de la théorie initiale de l'onde pilote conforte Louis de Broglie dans sa réorientation.

J.L. Destouches, l'un des étudiants de de Broglie, a généralisé la théorie de la double solution, en se basant sur une conception non ponctuelle de la particule élémentaire. Certes, de nombreuses expériences ont montré que les particules élémentaires sont constituées d'une masse localisée dans un volume extrêmement restreint ce qui permet de les traiter, avec une bonne approximation, comme des masses ponctuelles. Cette approximation a l'avantage immédiat de simplifier les calculs, cependant, ses conséquences affectent la structure générale de la mécanique quantique ainsi que les théories qui se basent sur cette dernière. C'est l'une des raisons qui ont poussé plusieurs physiciens à proposer d'autres représentations des particules. Parmi ces physiciens figure J.L. Destouches qui opte pour une représentation fonctionnelle [9], dans laquelle chaque particule est représentée par une fonction u analogue à celle de de Broglie et qui obéit à une équation non linéaire. La seule différence pouvant être importante entre les deux théories est d'ordre philosophique, puisque J.L. Destouches substitue à la conception réaliste du corpuscule soutenue par de Broglie une conception phénoméniste et «fonctionnelle» [48].

D'après J.L. Destouches, les représentations ponctuelles ne sont pas suffisantes pour la description physique de la particule, car elles ne tiennent pas compte de ses caractéristiques internes. Par conséquent, elles donnent un aspect partiel de la réalité physique. Pour cette raison, il propose une représentation fonctionnelle dans laquelle le point M qui représente géométriquement la particule et la façon de prévoir la position de celle-ci est défini autrement.

La représentation fonctionnelle ne supprime pas la représentation géométrique ponctuelle

mais la généralise pour pouvoir prendre en compte par la suite l'extension de la particule. Ainsi, le point $M(t)$ de l'espace est considéré comme une fonctionnelle

$$M = F[u] \quad (3.6)$$

qui généralise la notion, introduite par de Broglie, de la représentation d'une particule par la singularité d'une fonction u

$$M = \sin g[u] \quad (3.7)$$

La fonction u représente la totalité des caractéristiques physiques de la particule ; on l'appelle "onde physique". Elle est fonction de la position P et du temps T qui sont considérés ici comme variables libres ne représentant aucun objet

$$u = u(P, T) \quad (3.8)$$

La figure géométrique qu'on assigne à la particule au moyen de u peut être quelconque à condition qu'elle ne soit pas rigide [9, 10].

La définition d'une fonction physique u dépend du modèle utilisé. On ne peut pas la faire correspondre comme en mécanique quantique usuelle à la fonction d'onde $\psi(M, t)$ dont le carré donne la probabilité de présence de la particule dans une région de l'espace-temps. Ce caractère prévisionnel de la fonction d'onde est exprimé dans la théorie fonctionnelle par une fonction

$$\Psi[F[u], t] \quad (3.9)$$

qui nous permet de calculer les prévisions sur les grandeurs liées à l'aspect géométrique de la particule, on l'appelle "onde prévisionnelle". De façon générale, le calcul de prévisions sur les grandeurs physiques liées à la particule se fait au moyen d'une onde fonctionnelle

$$X[u, t] \quad (3.10)$$

dont découle la fonction Ψ comme approximation quand la particule est représentée par un point $F[u]$.

Le formalisme de la théorie fonctionnelle est général, par conséquent, il ne peut pas être appliqué directement. Il faut donc adopter un modèle réaliste dans lequel la fonction physique

u acquiert un sens bien défini. Destouches a choisi le modèle du fluide continu classique pour représenter la particule, ce qui lui a permis de retrouver une équation d'onde non linéaire dont le terme linéaire est identifié à l'équation d'onde de la mécanique quantique conventionnelle [9, 10].

Dans le modèle géométro-différentiel, la particule étendue est décrite par une structure de fibré [45, 10-15]. Les points $M(t)$ forment la base et représentent la localisation de la particule en tant que tout dans un espace-temps externe. Les fonctions $u(P, T)$ forment les fibres et représentent des modes quantiques ponctuels localisés aux points (P, T) de l'espace-temps interne de la particule.

3.3 Modèle Géométro-Différentiel

3.3.1 Présentation du modèle

Le modèle géométro-différentiel est basé sur les concepts de la géométrie différentielle où la particule étendue est décrite par un fibré dont les configurations possibles sont diverses selon le choix de l'espace de base, de la fibre et du groupe structural (de symétrie) considéré. La particule étendue est considérée comme composée d'un mode externe évoluant dans un espace-temps externe et d'un mode interne ponctuel confiné dans un espace-temps interne. Les symétries des espaces-temps externe et interne peuvent être quelconques et différentes.

En tout, on a quatre fibrés E^M , E^C , F^M et F^C qui ont tous comme groupe structural le groupe de Poincaré P :

- Le fibré configuration-configuration :

$$E^M = E^M(M, M', P) \quad (3.11)$$

où la variété de base M , qui constitue l'espace-temps externe de la particule étendue, est l'espace-temps de Minkowski

$$M = \{x/x \in E_{1,3}\} \quad (3.12)$$

De même, la fibre M' est un espace-temps interne de Minkowski

$$M' = \{\xi/\xi \in E_{1,3}\} \quad (3.13)$$

Avant de passer aux autres fibrés, on va expliquer l'intérêt de considérer les modes interne et externe dans le modèle Géométrique-Différentiel en prenant le fibré E^M comme exemple. Le mode interne de la particule étendue est un mode local ponctuel qui est localisé dans l'espace-temps interne au point ξ et le mode externe est localisé dans l'espace-temps externe au point x qui est le point de contact entre l'espace interne et l'espace externe. Ce point de contact donne un aspect partiel des propriétés physiques de la particule étendue du fait qu'il ne prend pas en compte ses propriétés internes.

Pour expliquer la signification physique du mode interne, on prend l'exemple simple d'une sphère qui repose sur une surface plane. Cette sphère peut effectuer des rotations (Figure 3-2) et avoir des vibrations (Figure 3-3) à l'image des états rotationnels et vibrationnels d'un noyau atomique. Ces états sont appelés modes globaux.

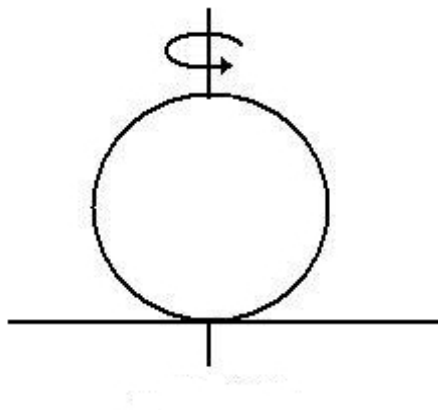


FIG. 3-2 – Le mode global de rotation

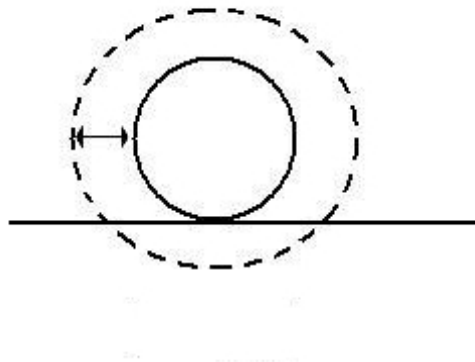


FIG. 3-3 – Le mode global de vibration

En ce qui concerne le mode local, on peut le schématiser comme suit : on considère la surface de la sphère comme espace-temps interne et le plan sur lequel repose la sphère comme l'espace-temps externe. La surface de la sphère peut subir une déformation superficielle localisée dans une région sans que la forme globale de la sphère ne change. cette déformation est un mode local superficiel. Le mode local ponctuel est une déformation (vibration) localisée en un point ξ de la surface qui peut alors se propager d'un point à l'autre de cette surface (Figure 3-4). Il

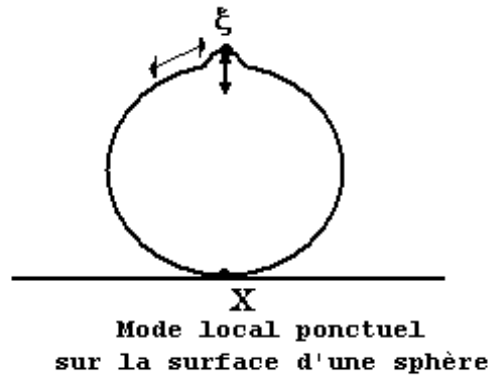


FIG. 3-4 – Le mode local ponctuel

est possible d'avoir plusieurs modes ponctuels sur la surface de la sphère qui se propagent et qui interagissent entre eux. En général, une déformation superficielle affecte toute une région de la surface de la sphère (Figure 3-5). Et même dans le cas ponctuel, une région au voisinage du point ξ est déformée, mais on suppose qu'elle est si petite qu'on peut la considérer comme ponctuelle.

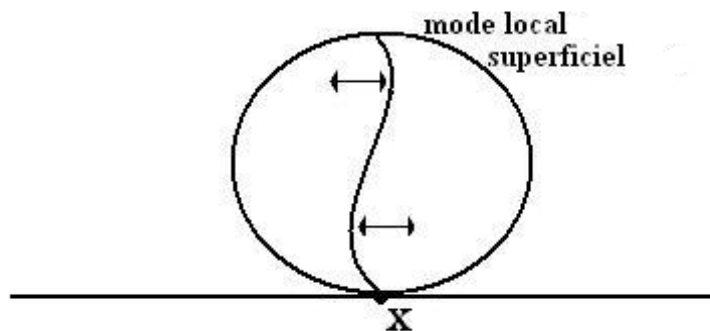


FIG. 3-5 – Le mode local superficiel

Un cas plus réaliste, et qui pourra servir comme une application du modèle, est de considérer un espace-temps interne à quatre dimensions où des modes locaux ponctuels y sont confinés à l'image des quarks dans les hadrons (Figure 3-6). Ces explications du mode interne sont plutôt

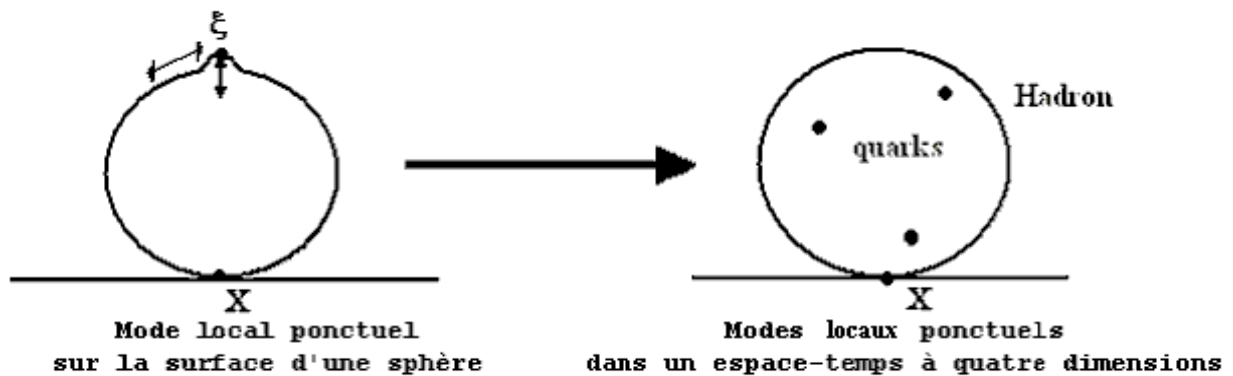


FIG. 3-6 – Le mode local ponctuel dans un espace-temps à quatre dimensions

intuitives. Mais pour mieux comprendre le sens physique des modes internes, il faut prendre en compte les interactions dans le modèle. Ceci dépasse le cadre de ce travail ainsi on reprend la présentation des différents fibrés qui restent.

- Le fibré configuration-impulsion :

$$E^C = E^C(M, C', P) \quad (3.14)$$

où la fibre est la nappe positive de l'hyperboloïde de masse unité, autrement dit, c'est l'espace des vitesses internes

$$C' = C_1'^+ = \left\{ \zeta / (\zeta^0)^2 - \zeta^2 = 1, \zeta^0 > 0 \right\} \quad (3.15)$$

- Le fibré impulsion-configuration

$$F^M = F^M(C, M', P) \quad (3.16)$$

où la variété de base est l'espace des vitesses externes

$$C = C_1^+ = \left\{ v / (v^0)^2 - v^2 = 1, v^0 > 0 \right\} \quad (3.17)$$

- Le fibré impulsion-impulsion :

$$F^C = F^C(C, C', P) \quad (3.18)$$

Les modes interne et externe étant ponctuels, on a pu alors utiliser la méthode des représentations induites pour la quantification et le calcul du propagateur. Pour cela, on a défini quatre fibrés de Hilbert⁷, qui correspondent aux fibrés définis précédemment, et qui décrivent les états quantiques de la particule étendue.

Le fibré configuration-configuration

$$E^D \left(M, \mathcal{H}^D, U^D(\tilde{P}') \right) \quad (3.19)$$

possède comme base l'espace-temps externe de Minkowski M dont les points sont notés x . La fibre type est l'espace \mathcal{H}^D support de la représentation induite du groupe de recouvrement \tilde{P}' de la symétrie spatio-temporelle interne de Poincaré (à ne pas confondre avec le groupe externe \tilde{P}). Le groupe structural est la représentation induite U^D de \tilde{P}' . Du point de vue géométrique, la particule est représentée par le point de contact

$$x = \pi [\Psi_x] \quad (3.20)$$

entre la base et la fibre qui est obtenue par la projection du fibré. Ce point représente l'aspect partiel de la réalité physique et caractérise l'évolution selon la mécanique quantique conventionnelle au moyen de la fonction d'onde $\varphi(x)$. Du point de vue physique, les caractéristiques propres de la particule sont représentées par les états $\Psi_x(\xi)$ de la fibre sur x , qui est un espace de représentation du groupe de symétrie interne. Ceci signifie que $\Psi_x(\xi)$ est l'onde physique u de Destouches et que l'argument ξ peut être identifié aux variables libres P et T . Ainsi, la particule étendue est représentée par des sections Ψ du fibré de Hilbert $E^D \left(M, \mathcal{H}^D, U^D(\tilde{P}') \right)$

$$\begin{aligned} \Psi & : M \rightarrow E^D \\ x & \mapsto \Psi_x \in \mathcal{H}_x^D \end{aligned} \quad (3.21)$$

⁷L'espace interne, qui est décrit par la fibre, est désormais un espace de Hilbert.

Les prévisions sont obtenues avec la fonctionnelle X définie par

$$X[\Psi](x, \xi) = \psi(x, \xi) \equiv \varphi(x)\Psi_x(\xi) \quad (3.22)$$

Cette fonctionnelle fournit la probabilité que le point de contact soit localisé en x et que le mode interne le soit en ξ . Elle décrit aussi bien des états matériels que virtuels dans les deux espace-temps, interne et externe. L'action de la représentation $U^D(g, g')$ du groupe externe \tilde{P} et interne \tilde{P}' sur la fonction $\psi(x, \xi)$ est donnée sous la forme

$$\begin{aligned} [U^D(g, g')\psi](x, \xi) &= [1 \otimes D[\Lambda'^{-1}]]\psi(l_\Lambda^{-1}(x - a), l_{\Lambda'}^{-1}(\xi - a')) \quad (3.23) \\ g &= a_T \Lambda \in \tilde{P}, \quad l_\Lambda \in SO(1, 3), \quad g' = a'_T \Lambda' \in \tilde{P}', \quad l_{\Lambda'} \in SO(1, 3) \end{aligned}$$

Dans ce cas, $\varphi(x)$ représente une particule scalaire ponctuelle décrivant le mode externe et $\Psi_x(\xi)$ une particule ponctuelle de spin $1/2$ décrivant le mode interne de sorte que les sous-groupes de Lorentz correspondants soient respectivement représentés par 1 et $D = D^{(\frac{1}{2}, 0)} \oplus D^{(0, \frac{1}{2})}$. Par conséquent, le fibré impulsion-impulsion

$$F^{\mu\frac{1}{2},+} = \left(C_1^+, \mathcal{H}^{\mu\frac{1}{2},+}, U^{\mu\frac{1}{2},+}(\tilde{P}') \right) \quad (3.24)$$

du modèle géométo-différentiel est choisi de façon à satisfaire cette exigence. Ainsi, la variété de base est la nappe supérieure C_1^+ de l'espace des vitesses externes et la fibre est l'espace $\mathcal{H}^{\mu\frac{1}{2},+}$ de la représentation induite, du groupe de Poincaré interne P' , décrivant des modes internes de masse μ de spin $1/2$ et d'énergie positive. Le groupe structural est la représentation induite $U^{\mu\frac{1}{2},+}(\tilde{P}')$ agissant dans l'espace $\mathcal{H}^{\mu\frac{1}{2},+}$. Les anti-modes internes ont des fréquences négatives et correspondent à la fibre $\mathcal{H}^{\mu\frac{1}{2},-}$ et au groupe structural $U^{\mu\frac{1}{2},-}(\tilde{P}')$. Pour simplifier le travail, nous allons faire abstraction de cette remarque dans la suite pour les deux modes, interne et externe. Le fait que ce dernier mode soit scalaire impose le choix d'une fonctionnelle de la forme

$$X_{m0}[\Phi^{\mu\frac{1}{2},+}](v, \zeta) = \psi_{m0}^{\mu\frac{1}{2},+}(v, \zeta) = \varphi_{m0}(v) \Phi_v^{\mu\frac{1}{2},+}(\zeta) \quad (3.25)$$

La vitesse $v = p/m$ du mode externe appartient à C_1^+ et la vitesse ζ du mode interne appartient à

une nappe identique notée $C_1'^+$. Cette fonctionnelle se transforme par la représentation suivante

$$[U_{m0}^{\mu\frac{1}{2},+}(g, g') \psi_{m0}^{\mu\frac{1}{2},+}](v, \zeta) = \exp(-imav) \exp(-i\mu a' \zeta) \times \quad (3.26)$$

$$\left(\mathbf{1} \otimes D^{\frac{1}{2}} \left[(\Lambda'^{-1}, \zeta)_{SU(2)}^{-1} \right] \right) \varphi^{m\frac{1}{2},+}(l_{\Lambda}^{-1}v, l_{\Lambda'}^{-1}\zeta)$$

Alors que les deux modes décrits par le fibré configuration-configuration sont localisés dans leurs espace-temps respectifs, les modes décrits par le fibré impulsion-impulsion sont tous les deux réels au sens de la méthode des représentations induites. Dans le premier cas, la particule étendue est dite complètement localisée et dans le deuxième complètement réelle ou matérielle.

Le cas intermédiaire où l'un des modes est localisé alors que l'autre est réel est décrit par deux fibrés. Dans le fibré configuration-impulsion

$$E^{\mu\frac{1}{2},+} = \left(M, \mathcal{H}^{\mu\frac{1}{2},+}, U^{\mu\frac{1}{2},+}(\tilde{P}') \right) \quad (3.27)$$

le mode externe est localisé dans l'espace-temps externe M constituant la base du fibré et le mode interne est réel et décrit par des états appartenant à la fibre $\mathcal{H}^{\mu\frac{1}{2},+}$. Le cas inverse correspond au fibré impulsion-configuration

$$F^D \left(C_1^+, H^D, U^D(\tilde{P}') \right) \quad (3.28)$$

pour lequel le mode externe est réel alors que le mode interne est localisé. Les fonctionnelles de ces deux fibrés sont respectivement

$$X[\Phi^{\mu\frac{1}{2},+}](x, \zeta) = \psi^{\mu\frac{1}{2},+}(x, \zeta) = \psi(x) \Phi_v^{\mu\frac{1}{2},+}(\zeta) \quad (3.29)$$

$$X_{m0}[\Psi](v, \xi) = \psi_{m0}(v, \xi) = \varphi_{m0}(v) \Psi(\xi) \quad (3.30)$$

Les transformations de ces deux fonctionnelles se déduisent facilement de celles de $\psi(x, \xi)$ et $\psi_{m0}^{\mu\frac{1}{2},+}(v, \zeta)$ en repérant les arguments des fonctions.

3.3.2 Calcul du propagateur global

La matérialisation et la localisation de la particule étendue peuvent se réaliser de plusieurs manières. Notons d'abord que les processus de matérialisation et de localisation du mode (signe +) et de l'anti-mode (signe -) internes sont effectués à l'aide des opérateurs $K_{\mu\frac{1}{2}}^{\pm}$ et $I_{\mu\frac{1}{2}}^{\pm}$,

respectivement. Pour le cas du mode et de l'anti-mode externes, on utilise les opérateurs K_{m0}^\pm et I_{m0}^\pm .

La matérialisation peut être considérée comme une matérialisation du mode interne suivie de celle du mode externe, ce qui correspond au passage $E^D \rightarrow E^{\mu\frac{1}{2},\pm} \rightarrow F^{\mu\frac{1}{2},\pm}$. On peut inverser l'ordre des matérialisations en commençant par le mode externe selon le schéma $E^D \rightarrow F^D \rightarrow F^{\mu\frac{1}{2},\pm}$. Les deux façons aboutissent au même résultat (Figure 3-7)

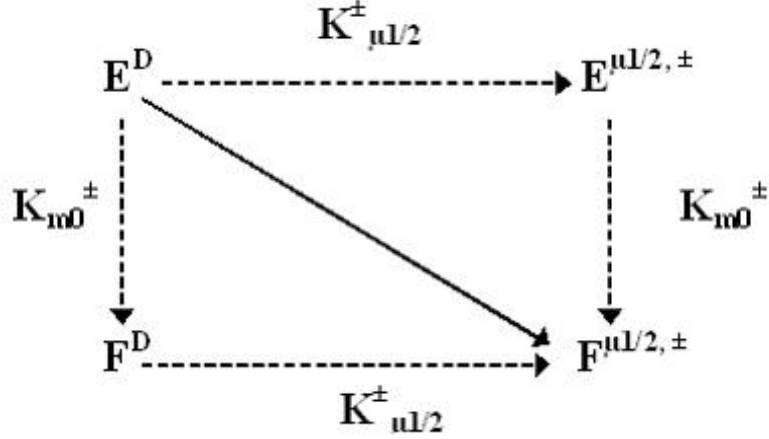


FIG. 3-7 – Matérialisation des modes interne et externe.

L'expression finale de cette matérialisation est

$$\psi_{m0}^{\mu\frac{1}{2},\pm}(v, \zeta) = \frac{m\mu}{16\pi^3} \int_{M,M'} dx d\xi \exp[\pm(imv \cdot x)] \exp[\pm(i\mu\zeta \cdot \xi)] \left(K_0^\pm \otimes K_{\frac{1}{2}}^\pm \right) (\mathbf{1} \otimes D(\zeta_L^{-1})) \psi(x, \xi) \quad (3.31)$$

Les signes \pm correspondent aux modes et anti-modes comme dans le cas ponctuel. Les indices supérieur et inférieur désignent les modes interne et externe, respectivement. Les matrices $K_{\frac{1}{2}}^\pm$ ont été données dans le chapitre précédent mais correspondent ici au mode interne. Pour le mode externe scalaire la matrice K_0^\pm correspond à la matrice identité $K_0^\pm = \mathbf{1}$. La représentation du boost de Lorentz interne ζ_L est donnée sous la forme

$$D(\zeta_L) = ch(\alpha/2) + \gamma^0(\mathbf{n}\gamma)sh(\alpha/2) \quad (3.32)$$

$$D(\zeta_L^{-1}) = ch(\alpha/2) - \gamma^0(\mathbf{n}\gamma)sh(\alpha/2) \quad (3.33)$$

où la vitesse dans l'espace interne est $\zeta = (ch\alpha, \mathbf{n}sh\alpha)^t$ avec $|\mathbf{n}| = 1$.

La localisation de la particule étendue se réalise selon deux voies aussi, correspondant à une

localisation du mode interne suivie de celle du mode externe ou l'inverse. Il est à noter ici que le processus de localisation est effectué par la transition du fibré $F^{\mu\frac{1}{2},\pm}$ vers le fibré $E^{D,\mu\frac{1}{2},\pm}$ qui a comme fibre l'espace de Hilbert irréductible $\mathcal{H}^{D,\mu\frac{1}{2},\pm} \subset \mathcal{H}^D$

$$E^{D,\mu\frac{1}{2},\pm} \left(M, \mathcal{H}^{D,\mu\frac{1}{2},\pm}, U^D(P') \right) \quad (3.34)$$

Les schémas respectifs sont $F^{\mu\frac{1}{2},\pm} \rightarrow F^{D,\mu\frac{1}{2},\pm} \rightarrow E^{D,\mu\frac{1}{2},\pm}$ et $F^{\mu\frac{1}{2},\pm} \rightarrow E^{\mu\frac{1}{2},\pm} \rightarrow E^{D,\mu\frac{1}{2},\pm}$ donnant le même résultat (Figure 3-8)

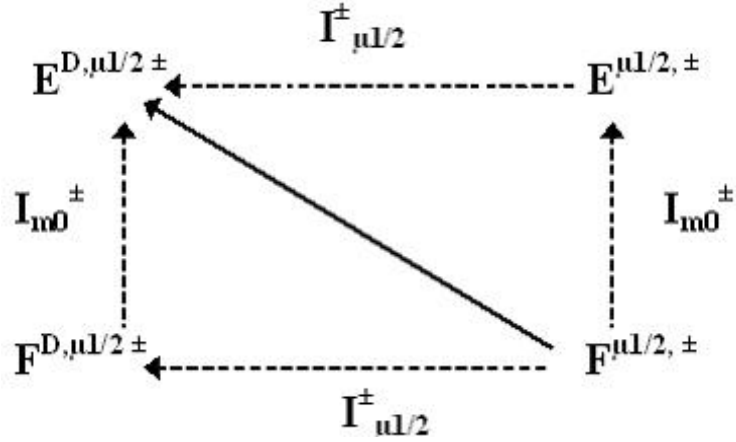


FIG. 3-8 – Localisation des modes interne et externe

Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} \psi_{m0,\pm}^{\mu\frac{1}{2},\pm}(x, \xi) &= \frac{m\mu}{16\pi^3} \int_{C_1^+, C_1'^+} d\Omega_1^+(v) d\Omega_1^+(\zeta) \exp[\mp(imv.x)] \exp[\mp(i\mu\zeta.\xi)] \\ &\quad (\mathbf{1} \otimes D(\zeta_L)) \left(I_0^\pm \otimes I_{\frac{1}{2}}^\pm \right) \psi_{m0}^{\mu\frac{1}{2},\pm}(v, \zeta) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Les mêmes remarques de notation que celles de la matérialisation s'appliquent dans ce cas, par exemple $I_0^\pm = \mathbf{1}$.

La composition de la matérialisation et de la localisation de la particule étendue nous donne la propagation

$$\psi_{m0,\pm}^{\mu\frac{1}{2},\pm}(x', \xi') = \int_{M, M'} dx d\xi \Pi_{m0}^{\mu\frac{1}{2},\pm}(x', \xi', x, \xi) \psi(x, \xi) \quad (3.36)$$

Le propagateur de la particule étendue est le produit des propagateurs du mode interne et du

mode externe

$$\Pi_{m0}^{\mu\frac{1}{2},\pm}(x', \xi', x, \xi) = \Pi_{m0,\pm}(x', x) \otimes \Pi^{\mu\frac{1}{2},\pm}(\xi', \xi) \quad (3.37)$$

$$\Pi_{m0,\pm}(x', x) = \frac{m^2}{2(2\pi)^3} \int_{C_1^+} d\Omega_1^+(v) \exp[\mp(imv \cdot (x' - x))] \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\frac{1}{2},\pm}(\xi', \xi) &= \frac{\mu^2}{2(2\pi)^3} \int_{C_1^+} d\Omega_1^+(\zeta) \exp[\mp(i\mu\zeta \cdot (\xi' - \xi))] \\ &\times D(\zeta_L) \Pi_{\frac{1}{2}}^{\pm} D(\zeta_L^{-1}) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Rappelons que $\Pi_{\frac{1}{2}}^{\pm} = I_{\frac{1}{2}}^{\pm} K_{\frac{1}{2}}^{\pm} = (\mathbf{1} \pm \gamma^0)/2$ et que l'expression de la représentation $D(\zeta_L)$ du boost de Lorentz interne ζ_L est identique à la relation (3.32).

En supposant que les évolutions des modes interne et externe sont toutes les deux causales, le propagateur causal de la particule étendue s'écrira alors comme le produit des propagateurs causals des deux modes

$$\begin{aligned} \Pi_{m0}^{\mu\frac{1}{2}}(x', \xi', x, \xi) &= \Pi_{m0}(x', x) \otimes \Pi^{\mu\frac{1}{2}}(\xi', \xi) \\ \Pi_{m0}(x', x) &= \frac{i}{2m} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-imv \cdot (x' - x))}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ \Pi_{\mu\frac{1}{2}}(\xi', \xi) &= \frac{i}{2\mu} \int \frac{d^4 \zeta}{(2\pi)^4} \exp(-i\mu\zeta \cdot (\xi' - \xi)) \frac{(\gamma^k \zeta + \mu)}{p'^2 - \mu^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ce propagateur donne la probabilité de transition d'une particule étendue d'un état $\psi(x, \xi)$ dont les modes, interne et externe, sont localisés en ξ et x respectivement, vers un état $\psi_{m0,\pm}^{\mu\frac{1}{2}}(x', \xi')$ dont les modes sont localisés en ξ' et x' .

Conclusion

Nous avons abordé dans ce présent travail l'étude des particules élémentaires en tenant compte de leur extension spatio-temporelle. Cette propriété importante n'a pas été prise en compte lors de la formulation de la mécanique quantique et de la théorie des champs conventionnelles. Nous avons alors utilisé la théorie quantique fonctionnelle dont le formalisme est plus général. Ensuite, nous avons introduit le modèle géométrique-différentiel de la particule étendue qui combine la théorie fonctionnelle, la géométrie différentielle et la quantification par la théorie des groupes. La particule y est composée d'un mode externe et d'un mode interne, tous deux ponctuels. Le mode externe est représenté par un point géométrique évoluant dans un espace-temps externe au moyen de la fonction d'onde de la mécanique quantique conventionnelle, et ne décrivant ainsi que partiellement la réalité physique. Le mode interne est représenté par un point évoluant dans un espace-temps interne et décrivant les caractéristiques propres de la particule.

Nous avons considéré le cas où le mode externe est scalaire et le mode interne de spin $1/2$, présentant tous les deux une symétrie de Poincaré. Nous avons alors utilisé le formalisme de la théorie des groupes conçu pour les particules relativistes ponctuelles pour décrire ces modes. Le mode interne est décrit par les représentations spinorielles irréductibles de spin $1/2$ du groupe de Poincaré. L'utilisation de la méthode des représentations induites a abouti à deux représentations de dimension deux sur l'espace impulsion, l'une décrivant les particules et l'autre les antiparticules. La somme directe de ces représentations décrit la particule et l'antiparticule en même temps, ce qui explique l'apparition des spineurs à quatre composantes (2.59).

Nous avons ensuite défini les opérations de commutations, qui sont des passages de la représentation configuration vers la représentation impulsion et vice-versa, et que nous avons interprétées comme matérialisation et localisation des états de la particule. Ceci nous a permis de calculer le propagateur (2.108) de la particule de spin $1/2$ par la double commutation des représentations impulsion et configuration. Pour le cas de la particule scalaire, la procédure

reste la même et le calcul du propagateur (2.109) se fait plus facilement à cause de la trivialité de la représentation correspondante du groupe de Lorentz.

Ces résultats ont été introduits dans le modèle géométrodifférentiel dans lequel l'onde fonctionnelle a été choisie sous la forme (3.22) et la particule étendue a été décrite par un fibré dont le groupe structural est le groupe de Poincaré. On a obtenu ainsi quatre fibrés de Hilbert : le fibré configuration-configuration E^D , le fibré configuration-impulsion $E^{\mu\frac{1}{2},\pm}$, le fibré impulsion-configuration F^D et le fibré impulsion-impulsion $F^{\mu\frac{1}{2},\pm}$. L'utilisation du fibré configuration-configuration qui représente une particule étendue complètement localisable et du fibré impulsion-impulsion qui représente une particule étendue complètement réelle nous a permis de réaliser les processus de matérialisation et de localisation de la particule étendue. Ainsi la matérialisation, qui est un passage du fibré E^D vers le fibré $F^{\mu\frac{1}{2},\pm}$, se fait soit à travers le fibré $E^{\mu\frac{1}{2},\pm}$ soit à travers le fibré F^D . Dans le premier cas, la matérialisation du mode interne se fait en premier puis elle est suivie de celle du mode externe. Dans le deuxième cas, l'ordre des deux matérialisations est inversé. La localisation se fait à partir du fibré impulsion-impulsion vers le fibré configuration-configuration irréductible $E^{D,\mu\frac{1}{2},\pm}$ à travers l'un des deux fibrés $F^{D,\mu\frac{1}{2},\pm}$ ou $E^{\mu\frac{1}{2},\pm}$. L'interprétation de ces deux localisations est analogue à celle des deux matérialisations précédentes.

Le propagateur de la particule étendue est issu de la composition de la matérialisation et de la localisation. Celui-ci est le produit des propagateurs des deux modes externe et interne (3.40). La forme en produit est due au fait que l'on n'a pas considéré l'interaction. La prise en compte de celle-ci nécessite la considération explicite des connexions du fibré qui jouent le rôle des champs de jauge [11-16]. Par ailleurs, la considération dans le modèle géométrodifférentiel des modes interne et externe a donné une généralisation des propriétés de la particule dont un exemple est l'extension spatio-temporelle et la description par deux spins. Cependant, ces deux notions n'ont pas été totalement étudiées. La première a reçu une interprétation partielle liée à la considération du groupe de de Sitter comme groupe de jauge [14]. Pour la seconde, une première idée est celle de la décomposition de la représentation $U^D(g, g')$ en somme de représentations irréductibles mais ce problème ne se pose pas dans notre cas car le mode externe est trivialement représenté. Outre ces questions ouvertes, le modèle possède des perspectives intéressantes ; sa formulation stochastique a été entamée mais la considération d'une théorie multimodes n'a pas encore été envisagée.

Bibliographie

- [1] J.L. Frolow : "La physique des particules élémentaires de sa naissance à sa maturité". *Masson. Paris* (1990).
- [2] M. Gell-Mann : "Symmetries of Baryons and Mesons". *Phys. Rev.* 125, 1067 (1962).
- [3] W. Greiner, B. Muller : " Mécanique quantique - Symétries". *Springer, Berlin* (1999).
- [4] N. Nélipa : "Physique des particules élémentaires". *Edition Mir. Moscou* (1981).
- [5] R.M. Wald : "General relativity". *University of Chicago press* (1984).
- [6] J. Rosen : "Symmetry in science – Introduction to the general theory“. *Springer-Verlag. N.Y. inc.* (1995).
- [7] J. Sivardière : "La symétrie en mathématique, physique et chimie". *Presse universitaire de Grenoble* (1995).
- [8] P. Depommier : "Les grands principes de symétrie à l'épreuve de l'expérience". *Annales de physique vol. 12*, n° 4 (1987).
- [9] J.L. Destouches : "La quantification en théorie fonctionnelle des corpuscules". *Gauthies-villards, Paris* (1956).
- [10] J.L. Destouches : "Corpuscules et champs en théorie fonctionnelle". *Gauthies-villards, Paris* (1958).
- [11] A. Smida, M. Hachemane and M. Fellah : "Geometro-differential conception of Extended Particles and Their Quantum Theory in de Sitter Space". *Found. Phys.* **25**, 1769 (1995).
- [12] M. Hachemane, M. A. Benbitour and A. Smida : "Interaction in the Geometro-Differential Conception of Extended Particles and the Galilei Semigroup of Trajectories" *Found. Phys.* **27**, 645 (1997).
- [13] A. Smida, M. Hachemane et A.-H. Hamici : "Interaction in the Geometro-differential conception of extended particles and the semigroup of trajectories in Minkowski space-time". *Found. Phys.* **28**, 1367 (1998).

- [14] M. Hachemane, A. Smida and R. Djelid : "Functional Realization and Nonlinear Induced Representation in the Geometro-differential Conception of Extended Particles". *Found. Phys.* **29**, 1479 (1999).
- [15] M. Hachemane, A. Smida and R. Djelid : "On External and Internal Properties of an Extended Elementary Particle". *Found. Phys.* **30**, 287 (2000).
- [16] A. Smida, A.H. Hamici, M. Hachemane : "Conception géométrique-différentielle d'une particule étendue à symétrie de Poincaré, quantification du champ associé par la méthode de représentations induites, interprétation Lagrangienne". *Found. Phys.* **25**, n° 2 (2000).
- [17] A.O. Barut, R. Raçzka : " Theory of group representations and applications". *World scientific publishing. Co. ltd* (1986).
- [18] N. Vilenkin : "Fonctions spéciales et theorie de la représentation des groupes". *Dunod, Paris* (1969).
- [19] A.M. Joshi : "Elements of group theory for physicists". *2 Ed, Wiley eastern limited. New Delhi* (1977).
- [20] A.W. Knap : "Group Representations and Harmonic Analysis from Euler to Langlands". *Notices of the AMS. Volume 43, Number 4* (1995).
- [21] E.M. Loebel : "Group theory and its applications". (A.J. Coleman : induced and subduced representation). *Academic press. New York* (1968).
- [22] M.B. Mensky : "The method of induced representations : space-time and the concept of particles". *Nauka, Moscow* (1976). [en russe]
- [23] Y.S. Kim & M.E. Noz : "Theory and application of Poincaré group". *Reidel publishing company, Dordrecht* (1986).
- [24] W.K. Tung : "Group theory in physics". *World scientific. Singapore* (1985).
- [25] E.P. Wigner : "On the unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group". *Annals of mathematics* **40**, 141-204 (1939).
- [26] S.U. Roman, H.K. Urbantke : " Relativity, groups, particles - Special relativity and relativistic symmetry in field and particle physics". *Springer-Wien. N.Y* (1992).
- [27] G.L. Naber : "The geometry of Minkowski spacetime". *In applied mathematical sciences 92. Springer-Verlag. N.Y. inc.* (1992).
- [28] J. Hladik : "Les spineurs en physique". *Masson. Paris* (1996).

- [29] L. Landau et E. Lifchitz : "Théorie quantique relativiste, première partie". *Editions Mir, Moscou* (1972).
- [30] M. Naimark : "Les représentations linéaires du groupe de Lorentz". *Dunod. Paris* (1962). (Traduit du russe par G. Lochak).
- [31] S. Weinberg : "The quantum theory of fields- Volume 1. Foundations". *Cambridge University press* (1995).
- [32] M.E. Noz & Y.S. Kim : "Phase space picture of quantum mechanics – group theoretical approach". *World scientific publishing. London. New Jersey* (1991).
- [33] W. Greiner and J. Reinhardt : "Quantum Electrodynamics". *Springer-Verlag. Berlin* (1994).
- [34] J. Mehra : "The physicist's conception of nature". (Jurgen Ehlers : The nature and structure of spacetime). *D.Reidel publishing company. Dordrecht* (1973).
- [35] W. Greiner : "Relativistic Quantum Mechanics - wave equation". *Springer-Verlag. Berlin* (1990).
- [36] N.N. Bogolubov, A.A. Logunov, A.I. Oksak, I.T. Todorov : "General principles of quantum field theory". *Kluwer academic publishers. Dordrecht* (1990).
- [37] P. Maslanka : "The induced représentations of the κ -Poincaré group. the massive case". *arXiv : hep-th/ 9310027 v1 06 Oct* (1993).
- [38] Y.S. Kim : "Wigner's last papers on spacetime symmetries". *arXiv : hep-th/ 9512151 v1 19 Dec* (1995).
- [39] Y. S. Kim : "Unification of Spacetime Symmetries of Massive and Massless Particles". *arXiv : hep- th/ 9602004 v1 01 Feb* (1996).
- [40] D. Benrabia : "Les Modes de Masse Nulle dans Le Modèle Géométrique-différentiel de la Particule Etendue" *Thèse de Magister, USTHB, Alger* (2005).
- [41] E. Inonu, E.P. Wigner. *NuovoCimento* **9**, n° 8, 1(1952).
- [42] C. Nash, S. Sen : "Topology and geometry for physicists". *Academic press* (1983).
- [43] B. Felsager : "Geometry, particles and fields". *Springer-Verlag. N.Y. Inc* (1998).
- [44] I. Kolar, P.W. Michor, J. Slovak : "Natural operations in differential geometry". *Springer-Verlag, Berlin Heidelberg* (1993).

- [45] M. Morand : "Espaces fibré et structure de la mécanique classique ou quantique". *Fondation Singer-Polignac et Masson. Paris* (1984).
- [46] G.E. Bredon : "topology and geometry". *GMT 139. Springer-Verlag* (1993).
- [47] J.A DE Azcarraga, J.M. Izquierro : "Lie groups, Lie algebras, cohomology and some applications in physics". *Cambridge monographs on mathematical physics* (1995).
- [48] M. Bitbol : "Jean-Louis Destouches, théories de la prévision et individualité". *Philosophia Scientiae*. **5** (1), 1-30 (2001).
- [49] D. Bohm : "A Suggested Interpretation of the QuantumTheory in Terme of Hidden Variables. I ". *Phys. rev.* **85**, 2, 170 (1952).
- [50] D. Bohm : "A Suggested Interpretation of the QuantumTheory in Terme of Hidden Variables. II ". *Phys. rev.* **85**, 2, 180 (1952).