

N° d'ordre : 07/2010-M/PH

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DE PHYSIQUE



MEMOIRE

présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN: PHYSIQUE

Spécialité : Physique Théorique de la Matière et des Hautes Energies

par : BACHI Halima

Sujet :

**Effets relativistes sur l'expansion d'un plasma
d'électron-ion dans le vide**

soutenue publiquement le 10/01/2010, devant le jury composé de:

M^r	N. BELDJOUDI	Professeur (U.S.T.H.B)	<i>Président</i>
M^{me}	D. DOUMAZ	Maître de Recherche (C.D.T.A)	<i>Directrice de thèse</i>
M^{me}	K. BENDIB	Professeur (U.S.T.H.B)	<i>Examinatrice</i>
M^{me}	H.A. HAMICI	Maître de Conférences (U.S.T.H.B)	<i>Examinatrice</i>
M^r	M. DJEBLI	Maître de Conférences (U.S.T.H.B)	<i>Examineur</i>

Table des matières

Introduction	2
1 Plasmas relativistes	6
1.1 Propriétés des plasmas	6
1.2 Classification des plasmas	8
1.3 Relativité restreinte	10
1.3.1 Relativité restreinte et transformations de Lorentz	10
1.3.2 Formalisme tensoriel: Notations quadridimensionnelles	13
1.4 Description mathématique de la dynamique des plasmas relativistes	18
1.4.1 Modèle fluide et modèle cinétique	18
1.4.2 Equations hydrodynamiques	20
2 Expansion hydrodynamique d'un plasma relativiste dans le vide	21
2.1 Etude bibliographique du problème	21
2.2 Equations hydrodynamiques relativistes	22
2.3 Importance de l'équation d'état	24
2.4 Transformation self-similaire	29
2.5 Solution self-similaire	32
2.6 Méthode de résolution numérique	33
2.7 Résultats et discussion	34
2.7.1 Etude paramétrique	35
2.7.1.1 Effet de la vitesse	35

TABLE DES MATIÈRES

2.7.1.2 Effet de la température	37
2.8 Vitesse du son et limite de l'expansion self-similaire	39
3 Expansion magnétohydrodynamique d'un plasma relativiste dans le vide	42
3.1 Etude bibliographique du problème	43
3.2 Equations magnétohydrodynamiques relativistes	43
3.3 Solution self-similaire	47
3.4 Résultats et discussion	48
3.4.1 Evolution du champ magnétique	48
3.4.2 Effet du champ magnétique	48
3.5 La limite classique	53
Conclusion	55
Bibliographie	57

Introduction

C'est en 1928 que les physiciens Langmuir et Tonks ont introduit pour la première fois le terme plasma pour désigner le gaz ionisé contenu dans un tube à décharge [1]. Par la suite ce mot a été utilisé, surtout en astrophysique, pour désigner un état dilué de la matière, analogue à un gaz mais constitué de particules chargées, électrons et ions positifs en proportions telles que le milieu soit globalement neutre. Dans la nature, le plasma est souvent présenté comme le quatrième état de la matière. Il s'agit en fait d'un gaz partiellement ou totalement ionisé, c'est-à-dire une collection de particules chargées qui interagissent entre elles via les forces de Coulomb et de Lorentz.

Pour comprendre l'intérêt d'étudier les plasmas, il faut savoir que plus de 99% de la matière visible de l'univers se trouve sous forme de plasma. Par rapport aux solides, liquides et gaz, les plasmas sont donc omniprésents (étoiles, vent stellaire, nébuleuse, ionosphère etc.), ils peuvent aussi exister dans les laboratoires (dans les chambres à décharge, dans les structures de fusion, dans les gaz ...). Mais ce qui les différencie réellement, c'est que les plasmas s'étendent sur des domaines de température et de densité beaucoup plus importants que tous les autres états de la matière [2].

Dans les plasmas, on peut observer des phénomènes et des comportements très diversifiés. La mécanique des fluides et l'électromagnétisme sont généralement adaptés à leur description, mais de faite de cette diversité, ils doivent toujours être accompagnés par des hypothèses simplificatrices pour se restreindre seulement à une partie de ce grand domaine des plasmas. C'est ainsi que l'on trouve toute une multitude de modèles, chacun est adapté à une zone du grand domaine des plasmas qui dépend directement des hypothèses faites. Parmi ces modèles on peut citer : le modèle HydroDynamique (HD) et le modèle MagnétoHydroDynamique (MHD) en cas de présence de champ magnétique. Ces modèles sont valables pour les plasmas qui sont proches de l'équilibre thermodynamique.

Dans le présent travail, nous nous proposons d'étudier l'expansion libre des plasmas relativistes dans le vide par la résolution des équations hydrodynamiques relativistes en premier lieu, puis des équations magnétohydrodynamiques, en second lieu, quand il y a un champ magnétique dans le milieu. Ces équations sont utilisées en général pour étudier les problèmes reliés à l'expansion des fluides dans les domaines d'application très vastes, allant de l'évolution des galaxies en astrophysique [3, 4, 5] jusqu'aux collisions des particules élémentaires et des ions lourds en physique des hautes énergies [6].

Notre étude est orientée vers des applications astrophysiques comme les jets émanant des sources galactiques, des noyaux actifs des galaxies ou des explosions des rayons gamma. Les jets sont de gigantesques faisceaux cylindriques et collimatés de matière ionisée éjectée par un objet céleste, se propageant dans l'espace sur des milliards de kilomètres à des vitesses allant jusqu'à plusieurs centaines de millions de kilomètres à l'heure.

Comme les équations régissant l'expansion de ces plasmas sont fortement non-linéaires et complexes, leur étude est en général possible qu'à travers des simulations numériques. ces dernières sont venues compléter les recherches analytiques et observationnelles. Ces simulations, dans un premier temps hydrodynamiques puis magnétohydrodynamiques ont essayé de mettre en évidence la phénoménologie des écoulements comme leur confinement, la formation et l'évolution des chocs internes ainsi que leurs propriétés de stabilité.

Notre objectif est de trouver une solution semi-analytique simple pour ces équations, à savoir une solution self-similaire décrivant ces écoulements libres. Nous nous intéressons aux phénomènes physiques qui font intervenir des écoulements relativistes non soumis à de forts champs gravitationnels, pour pouvoir le négliger; et nous supposons qu'ils sont continus dans le vide pour ne pas tenir compte des ondes de choc qui pourraient croître lors de l'expansion.

Il est bien connu que les plasmas relativistes sont classés en deux catégories, ceux dont les effets relativistes sont induits par la vitesse fluide; c'est-à-dire la vitesse des particules constituant le fluide est comparable à la vitesse de la lumière et ceux dont les effets relativistes sont induits par la température; c'est-à-dire l'énergie thermique des particules est de l'ordre de leur énergie de masse (énergie au repos). Nous avons tenu compte de ces deux effets.

Les systèmes d'équations obtenus ont été fermés avec une équation d'état non polytropic, qui décrit les températures relativistes ainsi que classiques et ultra-relativistes. De plus, l'effet des interactions entre particules sur l'équation d'état sera négligé. Cette limitation nous interdira de traiter la structure interne du fluide, le milieu sera considéré alors comme un gaz parfait de particules.

Ce présent manuscrit est organisé de la façon suivante: Dans le premier chapitre, nous avons défini les concepts de base d'un plasma et nous avons donné la classification ainsi que les caractéristiques des plasmas en général. Ensuite nous avons rappelé les notions de base de la relativité restreinte et le formalisme tensoriel nécessaire pour introduire les équations hydrodynamiques relativistes.

Dans le chapitre deux, nous avons étudié l'expansion d'un plasma relativiste non magnétisé dans le vide en utilisant un modèle hydrodynamique. Le système d'équations qui en découle est résolu semi-analytiquement par le formalisme self-similaire. Ce dernier permet de réduire le système d'équations différentielles aux dérivées partielles à un système d'équations différentielles ordinaires, il est valable quand la quasi-neutralité de charge dans le milieu est vérifiée. L'originalité dans ce chapitre est l'utilisation d'une nouvelle équation d'état non polytropic. Nous avons aussi fait une étude paramétrique pour voir les effets des conditions initiales de l'expansion sur les profils de densité, vitesse et température du plasma ainsi que sur la variation de la limite de l'expansion self-similaire.

Dans le chapitre trois, nous avons utilisé le modèle développé au chapitre deux en incluant l'effet du champ magnétique sur l'expansion des plasmas relativistes dans le cadre de la MHD idéale. Les équations MHD qui en découlent sont aussi résolues avec le formalisme self-similaire et l'étude de l'effet du champ magnétique sur les profils de l'expansion a été faite en fonction de la variable self-similaire.

Dans les deux cas, nous avons résolu numériquement les équations en utilisant la méthode de Runge-Kutta.

Le manuscrit se termine par une conclusion où nous avons présenté un résumé des résultats obtenus et quelques perspectives.

Chapitre 1

Plasmas relativistes

1.1 Propriétés des plasmas

Un plasma est composé d'ions et d'électrons portant respectivement des charges positives et négatives (la neutralité globale de la charge doit être satisfaite). Les électrons ont une masse nettement plus faible que celle des ions (le rapport de la masse du proton sur celle de l'électron est de l'ordre de 1836) : ils possèdent moins d'inertie et sont donc plus réactifs que les ions. Un plasma peut être caractérisé par sa température électronique, notée T_e , et sa densité notée n_e . T_e et n_e peuvent varier respectivement de 10^{-4} à $10^6 eV$ et de 1 à $10^{30} cm^{-3}$ selon la nature (astrophysique ou de laboratoire) et les différentes applications du plasma.

Une propriété importante du plasma est la grande stabilité de la neutralité de la charge au niveau macroscopique. Si une tranche du milieu est écartée de sa position d'équilibre, le développement des champs de charge induit une réponse collective pour restaurer cette neutralité. Ces mouvements collectifs sont caractérisés par une fréquence d'oscillation dénommée *fréquence plasma*. Cette dernière dépend des paramètres de plasma et de l'espèce considérée

$$\omega_i = \sqrt{\frac{4\pi n_i e_i^2}{m_i}}$$

où n_i et m_i sont respectivement la densité et la masse de l'espèce i . e est la charge de l'électron,

Dans un plasma, l'étude des phénomènes collisionnels fait généralement intervenir certaines longueurs fondamentales:

- La distance typique séparant deux particules voisines dans le plasma est donnée par la relation :

$$d \sim n^{-1/3}$$

où n est la densité du plasma.

- La longueur d'écran de Debye : Les particules chargées se meuvent de façon aléatoire. Malgré cela, elles ne se permettent pas de se déplacer trop loin les uns des autres du fait des forces Coulombiennes. Il en résulte une distance maximale λ_D , appelée longueur d'écran de Debye, au delà de laquelle le potentiel de Coulomb n'agit plus, ou encore au delà de laquelle il ne peut y avoir de déséquilibre entre les charges positives et les charges négatives, ou encore la plus petite distance au delà de laquelle le champ électrique produit par une charge est écranté. Cette distance peut être déduite de l'équation de Poisson autour d'une charge en prenant une distribution de Boltzmann-Maxwell pour les électrons et les ions qui entourent la particule test. Pour un plasma de densité n_0 et de température T_e , cette distance vaut

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{k_B T_e}{4\pi n_0 e^2}} \quad (1.1)$$

où k_B est la constante de Boltzmann [7].

Par conséquent, si L est une grandeur caractéristique de la dimension du plasma, elle devra vérifier la condition suivante

$$\lambda_D \ll L \quad (1.2)$$

Le nombre de particules chargées N_D que comporte une sphère de Debye est alors très grand

$$N_D = n_0 \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 \gg 1 \quad (1.3)$$

et donc le caractère collectif du comportement des particules du plasma est important.

• La longueur critique d'interaction binaire, longueur de Landau, définie par la relation :

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 k_B T_e}$$

C'est la distance à laquelle il faut que deux électrons s'approchent pour que leur énergie potentielle d'interaction binaire soit du même ordre de grandeur que leur énergie cinétique d'agitation thermique. La longueur de Landau intervient dans l'analyse des phénomènes de collisions et dans celle des corrélations de position dans un plasma.

• Le libre parcours moyen : c'est la distance moyenne que parcourt une particule entre deux collisions, elle est donnée par :

$$\lambda_{lpm} = \frac{v_t}{\nu}$$

où v_t est la vitesse thermique et ν est la fréquence de collision des particules.

1.2 Classification des plasmas

La grande diversité des plasmas fait en sorte que leur classification est loin d'être triviale. En fait, il existe plusieurs critères de classification, que ce soit le type d'application pour lequel le plasma est destiné, ou les moyens par lesquels il a été créé, ou les propriétés ondulatoires qui le caractérisent, ou bien encore certains de ses paramètres physiques. La classification des plasmas n'est donc pas unique.

Les deux paramètres les plus importants pour la caractérisation des plasmas sont la température électronique T_e et la densité électronique n_e [8].

Le diagramme densité-température reporté sur la figure (1.1) [9] résume les différents cas possibles et montre la position des plasmas naturels et artificiels que l'on rencontre dans les divers domaines de la physique. Le plan est séparé en régions par des lignes. Différentes familles de plasmas au comportement identique se dégagent. Ce sont les plas-

mas relativistes, les plasmas quantiques dégénérés, les plasmas cinétiques parfaits (plasma classique non dense), les plasmas corrélés et non corrélés.

A titre d'exemple, pour être dans le domaine relativiste, l'énergie thermique devrait dépasser l'énergie de masse et/ou la vitesse des particules devrait être de l'ordre de la vitesse de la lumière. Une autre frontière s'impose entre les cas classique et quantique : si la distance moyenne entre les particules reste supérieure à la longueur dite de De Broglie λ_{DB} de nature quantique, le plasma est de nature classique. En dessous de λ_{DB} , la distribution des particules devient quantique. La longueur de De Broglie, appelée aussi longueur thermique, se définit par [10] :

$$\lambda_{DB} = \begin{cases} h/\sqrt{mk_B T}, & \text{cas non relativiste} \\ hc/k_B T & \text{cas ultra-relativiste} \end{cases}$$

où h est la constante de Planck et c est la vitesse de la lumière dans le vide

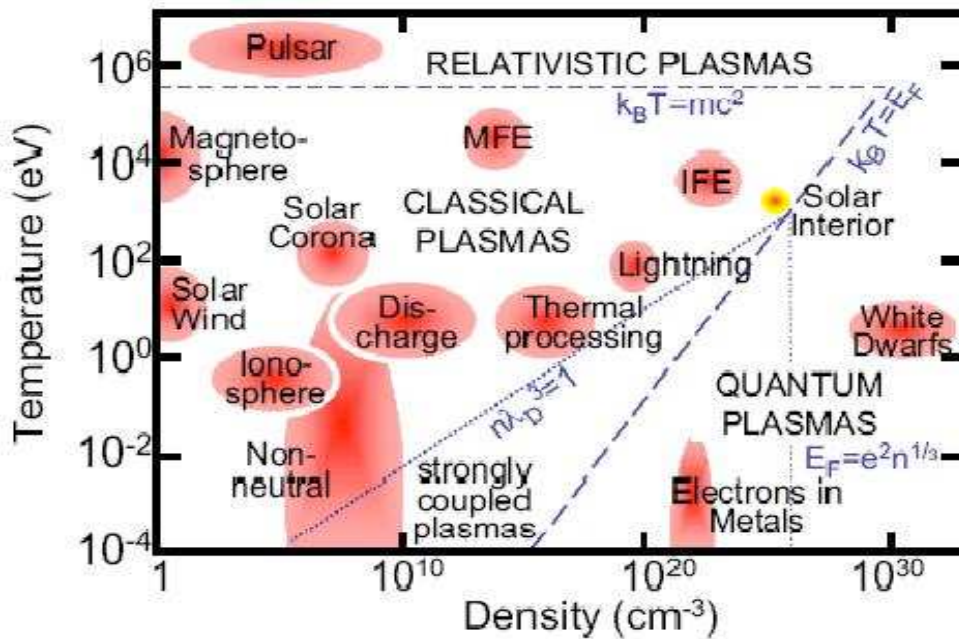


FIG. 1.1 – Diagramme de classification des plasmas et position de quelques plasmas typiques

1.3 Relativité restreinte

La théorie de la relativité restreinte a été introduite pour surmonter la crise qui au début du vingtième siècle a sévi entre la mécanique classique et la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell. En effet, une transformation de Galilée :

$$x' = x - vt \quad \text{et} \quad t' = t$$

et la transformation associée des champs électrique et magnétique \mathbf{E} et \mathbf{B} , avec

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c$$

ne laisse pas invariant les équations de Maxwell. Il a d'abord été envisagé que celles-ci n'étaient valables que dans un référentiel particulier, celui où *l'éthère*, la substance dans laquelle on imaginait que se propagent les ondes électromagnétiques, était au repos. Il a donc fallu admettre que les équations de Maxwell s'appliquent dans tout référentiel d'inertie, c'est-à-dire des référentiels tels que, si un corps y est abandonné sans subir de force, il y suive un mouvement de vitesse uniforme.

Il fut bientôt établi que des transformations différentes de celles de Galilée, les transformations de Lorentz, laissent invariantes les équations de Maxwell, tout en se réduisant, dans la limite où l'un des repères se déplace à une vitesse faible par rapport à l'autre, à la transformation de Galilée.

La relativité restreinte ne prend pas en compte les effets d'inertie liés à l'accélération. En effet, la transformation de Lorentz décrit uniquement le passage d'un référentiel en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à un autre.

1.3.1 Relativité restreinte et transformations de Lorentz

Dans toute la physique classique, l'espace et le temps constituent l'arène où se déroulent les divers phénomènes de la nature. Ceux-ci ne modifient aucunement ce cadre spatio-temporel qui est fixé une fois pour toutes, de manière absolue. Bien plus, le temps et l'espace sont de natures totalement différentes et n'ont aucun lien entre eux.

En mécanique classique, les lois de la physique sont invariantes sous un groupe de transformations de coordonnées *spatiales* appelées transformations de Galilée. Dans un référentiel galiléen R , un point est caractérisé par les coordonnées d'espace (x,y,z) et la transformation de Galilée fait correspondre un point (x,y,z) d'un référentiel R au point (x',y',z') du référentiel R' en translation uniforme par rapport à R .

Nous nous plaçons dans la situation particulière où les référentiels R et R' ont des axes parallèles et où le référentiel R' se déplace à la vitesse v le long de l'axe OX dans le référentiel R , l'origine des temps dans les deux référentiels R et R' est fixée à l'instant où les origines des axes O et O' coïncident.

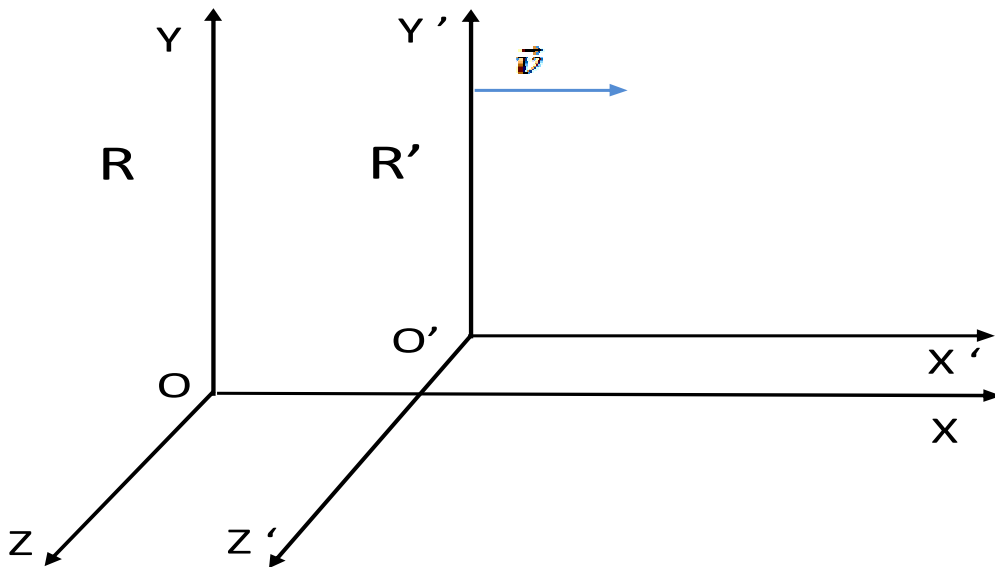


FIG. 1.2 – Représentation de deux référentiels en mouvement de translation uniforme et parallèle à l'axe OX

$$\begin{aligned}x &= x' + vt \\y &= y' \\z &= z' \\t &= t'\end{aligned}$$

C'est la transformation Galiléenne.

La transformation de Lorentz permet d'exprimer les coordonnées spatio-temporelles d'un évènement dans un référentiel à partir de leurs valeurs dans un autre. Un évènement est caractérisé par le quadruplet (x,y,z,t) de ses coordonnées dans un référentiel.

Les transformations de Lorentz correspondantes, pour le passage des coordonnées de R à celles de R' , sont données par [11] :

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\end{aligned}$$

L'ensemble des quatre équations ci-dessus constitue la base de la relativité restreinte.

En relativité restreinte, une quantité est invariante si elle est caractérisée par la même valeur dans tous les référentiels d'inertie, en mouvements relatifs les uns par rapport aux autres. Parmi tous les invariants relativistes, le module de la vitesse de la lumière (dans le vide) joue un rôle central dans la théorie. Sa mesure dans n'importe quel référentiel d'inertie donnera toujours le même résultat [12]. Un second invariant est la distance, au sens de Minkowski, entre deux évènements, c'est-à-dire

$$dS^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{1.4}$$

La valeur définie par

$$\frac{dS}{c} = dt' = d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.5)$$

est appelé intervalle de temps propre. Dans cette expression, v est la vitesse instantanée $d\vec{r}/dt$ d'un mobile qui parcourt l'intervalle d'espace $d\vec{r}$ durant l'intervalle du temps dt . Le temps qui s'est écoulé entre deux instants successifs de la vie de la particule apparaît plus long dans le laboratoire que dans son référentiel propre. (1.5) donne de façon simple la formule antérieure donnant la dilatation du temps

La transformation de Lorentz se réduit à la transformation Galiléenne si on prend la vitesse c de la lumière égale à l'infini. Cependant, la transformation Galiléenne est parfaitement adéquate dans la vie de tous les jours; où $v \ll c$.

1.3.2 Formalisme tensoriel : Notations quadridimensionnelles

Nous allons introduire dans ce paragraphe des notations tensorielles bien adaptées à l'espace-temps à quatre dimensions de la relativité. Nous introduirons en particulier des conventions très puissantes, qui permettent d'écrire de manière compacte et fiable les expressions parfois complexes auxquelles conduisent les calculs relativistes.

Un événement est complètement défini dans un référentiel par la donnée des quatre nombres (ct, x, y, z) . Nous associons à cet événement le quadrivecteur \mathbf{A} dans un espace à 4 dimensions, muni d'une base \mathbf{e}_μ , l'indice μ varie de 0 à 3.

$$\mathbf{A} = \sum_{\mu} x^{\mu} \mathbf{e}_{\mu} = x^{\mu} \mathbf{e}_{\mu}$$

en posant

$$x^0 = ct \quad x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z$$

Nous appellerons x^{μ} les composantes *contravariantes* du quadrivecteur événement.

Le produit scalaire de deux quadrivecteurs $\mathbf{A} = x^{\mu} \mathbf{e}_{\mu}$ et $\mathbf{B} = y^{\nu} \mathbf{e}_{\nu}$ peut s'écrire comme

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = x^\mu y^\nu \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu$$

Pour que ce produit scalaire ait une expression compatible avec celle de l'intervalle (1.4) il faut que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (1.6)$$

En posant $g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu$ le produit scalaire s'écrira

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$$

Nous aurons un produit scalaire convenable si le tenseur de nombres $g_{\mu\nu}$ s'écrit

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

où μ est l'indice ligne et ν l'indice colonne, ce tenseur est le tenseur métrique fondamental de la relativité restreinte appelé aussi métrique de Minkowski.

En relativité restreinte, ce tenseur est indépendant du système de coordonnées choisies dans l'espace à quatre dimensions, mais dans le cas de la relativité générale, la gravitation conduit à un tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ de l'espace à 4 dimensions qui dépend des coordonnées car la masse crée une courbure de cet espace. La métrique n'est plus Minkowskienne mais Riemannienne et l'utilisation des coordonnées curvilignes devient indispensable.

En particulier, dans une transformation de Lorentz, qui consiste à passer d'un trièdre rectangulaire $Oxyz$ avec un temps t à un trièdre rectangulaire $O'x'y'z'$ parallèle à $O'xyz$ et animé, par rapport à celui-ci, d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse v selon la direction commune Ox , $O'x$ et caractérisé par un temps t' , on a avec les notations précédemment introduites et en posant $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

$$A^0 = \gamma(A'^0 + \frac{v}{c}A'^1) \quad A^1 = \gamma(A'^1 + \frac{v}{c}A'^0) \quad A^2 = A'^2 \quad A^3 = A'^3$$

Les A^μ sont les coordonnées contravariantes du quadrivecteur, il est facile d'introduire ses coordonnées covariantes à l'aide de $g_{\mu\nu}$.

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$$

Le temps propre permet de définir un quadrivecteur vitesse par

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{A}}{d\tau}$$

Ecrivons cette quantité en fonction de la vitesse spatiale ordinaire \mathbf{v} dans un référentiel R . Si le temps propre varie de $d\tau$, le temps dans R varie de $dt = \gamma d\tau$

$$u^\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$$

Le produit de u^μ par la masse au repos m de la particule fournit le quadrivecteur *énergie-impulsion* p^μ de la particule

$$p^\mu = mu^\mu = (mc\gamma, m\mathbf{v}\gamma) \tag{1.8}$$

que nous pouvons écrire

$$p^\mu = (e/c, \mathbf{p}) \tag{1.9}$$

définissant ainsi un trivecteur d'impulsion \mathbf{p} et une énergie ε relativiste. Le produit scalaire de ce quadrivecteur avec lui même s'écrit d'après (1.6)

$$g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = p^\mu p_\mu = \frac{e^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$$

Après avoir présenté la métrique qui définit la courbure de l'espace-temps, nous passons à la présentation de la description de la matière qui emplit cet espace-temps. La

description ce fait par l'intermédiaire de trois grandeurs; le tenseur densité de courant, le tenseur énergie-impulsion et le tenseur électromagnétique.

Quadrivecteur densité de courant : est un tenseur d'ordre un, réunissant la densité de charge ρ_q et le courant \mathbf{J} créés par la charge q

$$J^\mu = \rho_q \frac{dx^\mu}{dt}$$

$$J^\mu = (c\rho_q, \mathbf{J})$$

Tenseur énergie-impulsion : On peut montrer que le tenseur énergie-impulsion, dans le référentiel propre au repos, est diagonal et peut s'écrire sous la forme

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

car

- i) la pression P est isotrope et normale à l'élément de surface qui lui est soumis (loi de Pascal)
- ii) $e = n\varepsilon + (mnc^2)$ doit être une version relativiste de la densité propre de l'énergie totale de fluide (incluant le mouvement des particules et la densité d'énergie de masse)

Or, en général, dans un autre référentiel, la quadri-vitesse s'écrit $u^\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$. La seule façon de reproduire l'expression ci-dessus avec une écriture tensorielle est alors

$$T^{\mu\nu} = (e + P) \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} - P g^{\mu\nu} \tag{1.10}$$

Ceci est donc l'écriture de tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait en relativité restreinte [13].

T^{00} est le flux du moment 0 dans le temps, c'est simplement la densité d'énergie.

T^{0i} est le flux d'énergie à travers la surface x^i .

T^{i0} est le flux de moment dans la direction i .

T^{ij} (respectivement T^{ji}) est le flux de moment i (respectivement j) à travers la surface j (respectivement i), avec i et j varient de 1 à 3.

Tenseur électromagnétique: En électromagnétisme, le champ électrique \mathbf{E} et l'induction magnétique \mathbf{B} sont liés au potentiel scalaire V et au potentiel vecteur \mathbf{A} en tout point de l'espace par les relations

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$$

En relativité V/c et les trois composantes de \mathbf{A} sont les coordonnées contravariantes du quadrivecteur potentiel $A^\mu = (V/c, A_x, A_y, A_z)$.

Les composantes des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} entrent dans un même tenseur antisymétrique de rang deux, dans l'espace à quatre dimensions; ce tenseur est défini par [14]

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

En effet d'après cette dernière relation

$$F_{01} = \frac{\partial(-A_x)}{c\partial t} - \frac{\partial(V/c)}{\partial x} = \frac{1}{c} \left(-\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{E_x}{c}$$

De même on a

$$F_{12} = \frac{\partial(-A_y)}{\partial x} - \frac{\partial(-A_x)}{\partial y} = -B_z$$

et on peut vérifier facilement que $F_{02} = E_y/c$, $F_{03} = E_z/c$, $F_{31} = -B_y$ et $F_{23} = -B_x$. En définitive, le tenseur électromagnétique covariant s'écrit

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

1.4 Description mathématique de la dynamique des plasmas relativistes

1.4.1 Modèle fluide et modèle cinétique

La connaissance exacte des forces en chaque point dépend de toutes les particules du milieu permettrait en principe le calcul précis de la trajectoire de chaque particule, mais ceci est impossible en pratique à cause du très grand nombre de particules mises en jeu, typiquement au laboratoire de 10^{20} à 10^{30} particules par m^3 [2]. On se contente alors d'une description statistique en effectuant des moyennes et on obtient des données d'ordre macroscopique comme la température, la pression, etc ...

Deux modèles sont utilisés pour décrire la dynamique des plasmas; le modèle fluide et le modèle cinétique. Dans le premier modèle, les différentes composantes du plasma, électrons, ions et particules neutres, sont décrites par des grandeurs fluides macroscopiques comme la densité, la vitesse moyenne, la température, la pression ... Dans ce type de description, on suit le mouvement de petit élément de volume de plasma sans tenir compte des phénomènes microscopiques qui s'y déroulent. Ces grandeurs sont des moyennes calculées à partir d'une fonction de distribution des vitesses microscopiques des particules $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ où \vec{r} et \vec{p} sont respectivement la position et l'impulsion de chaque particule. Cette fonction de distribution s'obtient dans le cadre de la théorie cinétique des gaz.

Le modèle cinétique donne une description microscopique plus fine du phénomène physique et l'objectif du modèle est de trouver les fonctions de distribution données par l'équation de Boltzmann en tenant compte de façon auto-consistante des interactions

collisonnelles ainsi que des micro-champs \mathbf{E} et \mathbf{B} (et non plus des champs moyennés dans l'espace).

Pour appliquer le modèle fluide ou hydrodynamique, il est nécessaire que le fluide soit en équilibre thermodynamique local. Autrement dit, que le libre parcours moyen λ_{lpm} entre deux collisions soit petit devant les longueurs caractéristiques de l'écoulement.

Le modèle hydrodynamique permet de décrire de manière relativement complète la quasi-totalité des phénomènes physiques ayant lieu dans le plasma tout en impliquant des calculs beaucoup plus simples que ceux de la théorie cinétique, plus lourds à manier et complexes à interpréter [15].

Dans le modèle fluide, la densité, la vitesse moyenne et la température qui sont les premiers moments de la fonction de distribution, sont données par

- La densité de particules :

$$n(\vec{r},t) = \int f(\vec{r},\vec{p},t)d\vec{p} \quad (1.12)$$

- La vitesse moyenne du fluide :

$$\vec{v} = \frac{1}{n(\vec{r},t)} \int \frac{\vec{p}}{m\gamma} f(\vec{r},\vec{p},t)d\vec{p} \quad (1.13)$$

- La température : dans un repère où le système est au repos, elle est définie par la relation :

$$\int (\gamma - 1)mc^2 f(\vec{r},\vec{p},t)d\vec{p} = nmc^2[G(mc^2/k_B T) - 1] - k_B T(\vec{r},t) \quad (1.14)$$

ε est l'énergie cinétique donnée par

$$\varepsilon^2 = p^2 c^2$$

et

$$G(mc^2/k_B T) = K_3(k_B T/mc^2)/K_2(k_B T/mc^2)$$

où K_2 et K_3 sont respectivement les fonctions de Bessel modifiées d'ordre deux et trois de deuxième espèce données par l'expression suivante

$$K_n(\zeta) = \left(\frac{\zeta}{2}\right)^n \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+1/2)} \int_0^\infty (y^2 - 1)^{n-1/2} \exp(-\zeta y) dy$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction Gamma. Dans le cas où le plasma est à l'équilibre thermodynamique, il est décrit par la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann-Jüttner relativiste [16].

Distribution Maxwellienne relativiste : Quand le plasma devient de plus en plus chaud, et $k_B T$ approche ou dépasse mc^2 , la distribution des vitesses de ce plasma relativiste est Maxwellienne et donnée par la distribution de Maxwell-Jüttner relativiste [17]:

$$f_{MBJ}(p) = \frac{n_0}{4\pi(mc)^3 \theta K_2(1/\theta)} \exp\left(-\frac{1}{\theta} \sqrt{1 + \frac{p^2}{(mc)^2}}\right)$$

avec $\theta = k_B T/mc^2$.

1.4.2 Equations hydrodynamiques

Les équations fluides nettement plus simples que les équations cinétiques sont particulièrement importantes en physique. En effet, elles permettent de décrire un très grand nombre de phénomènes physiques avec un grand nombre de précision sans recourir au traitement cinétique beaucoup plus lourd à utiliser. Cette simplification provient notamment du nombre de degrés de liberté qui de 4, (\vec{r}, t) , pour les équations macroscopiques et de 7, (\vec{r}, \vec{p}, t) , pour les équations cinétiques.

Les équations fluides, les plus utilisées, qui décrivent l'évolution spatio-temporelle des grandeurs hydrodynamiques sont les équations de conservation de nombre de particules, de l'impulsion et de l'énergie. Ces trois équations s'obtiennent de la loi de conservation du flux de matière et la loi de conservation de tenseur énergie-impulsion, nous allons décrire ces équations dans les section (2.2) et (3.2) du chapitre deux.

Chapitre 2

Expansion hydrodynamique d'un plasma relativiste dans le vide

Dans ce chapitre, l'approche hydrodynamique qui est bien adaptée pour modéliser les phénomènes de grandes échelles aussi bien d'un point de vue temporel que spatial a été choisie pour l'étude de l'expansion d'un plasma relativiste complètement ionisé, non-magnétisé et dans le vide.

2.1 Etude bibliographique du problème

Les phénomènes d'éjection continue de la matière à partir des étoiles sont des phénomènes largement répandus dans l'Univers, que ce soit sous la forme de vent solaire, de vents stellaires, de jets stellaires provenant des sources galactiques [18, 19] ou de jets extragalactiques provenant des noyaux actifs des galaxies (NAG)[20, 21] et les explosions de noyaux gammas (GRB) [22]. Ces plasmas en expansion sont de gigantesques écoulements pouvant être décrits, au moins partiellement, en résolvant les équations hydrodynamiques.

Durant ces dernières années, beaucoup d'algorithmes numériques ont été développés. Grace à la puissance grandissante des moyens de calcul, d'énormes progrès ont été faits pour la résolution des équations hydrodynamiques que ce soit dans la relativité restreinte ou générale [23]. Les codes de simulation numérique élaborés peuvent étudier d'une manière détaillée les régions d'expansion relativiste dans le contexte de l'astrophysique.

Du point de vue analytique, une attention particulière est donnée aux modèles *self-similaires* qui, par leur approche permettent de dégager des idées simples sur le problème de l'expansion. L'avantage majeur de cette approche est le fait que son utilisation permet de résoudre le système d'équations en entier, sans négliger aucun terme dans les diverses équations.

En 1940, une solution self-similaire du problème de forte explosion a été découverte dans lequel une quantité considérable d'énergie est relâchée dans un temps court et dans un petit volume. Cette solution est connue sous le nom de self-similaire de Sedov-Taylor [24] [25]. Elle décrit une onde de choc se propageant dans un milieu environnant de densité uniforme. Blandford et McKee [26], plus tard, ont établi une solution self-similaire décrivant la version relativiste extrême du problème de forte explosion. Dans cette solution, le facteur de Lorentz du choc et de fluide est beaucoup plus grand que l'unité. Récemment, Zhdanov et Borsh [27] ont donné des solutions analytiques des équations hydrodynamiques relativistes qui décrivent une expansion sphérique et cylindrique d'un fluide idéal. Il déduisent des solutions self-similaires décrivant le comportement asymptotique des boules de feu utilisant une équation d'état linéaire ultra-relativiste.

Dans ce chapitre, nous allons résoudre les équations HD relativistes en appliquant le formalisme self-similaire et en fermant le système d'équations par une équation d'état non polytropicque décrivant aussi bien les températures relativistes que classiques.

2.2 Equations hydrodynamiques relativistes

Les plasmas sont des milieux constitués de différentes espèces chargées et éventuellement neutres dans le cas d'une ionisation partielle. Dans le cadre de ce manuscrit, nous allons principalement considérer des plasmas complètement ionisés formés seulement d'électrons et de protons de densité n_e et n_p , respectivement.

Considérant que la séparation de la charge dans le milieu est nulle, c'est-à-dire que ($n_e = n_p = n$) et tenant compte du rapport du masse $m_e/m_p \ll 1$, m_e et m_p sont les masses de

l'électron et du proton, respectivement, le plasma évolue avec une seule vitesse

$$v = (m_e v_e + m_p v_p) / (m_e + m_p) \approx (m_e v_e / m_p + v_p) \approx v_p$$

et il est décrit avec une seule équation de continuité : c'est le modèle un-fluide.

La densité de masse totale ρ_m dans ce cas est $\rho_m = m_e n_e + m_p n_p \approx mn$, ($m \approx m_p$).

Le plasma est considéré en équilibre thermodynamique local : les particules constituant le plasma ont la même température.

La description hydrodynamique pure, en première approximation, est adaptée pour l'étude, par exemple, de la morphologie et la dynamique des jets relativistes à des distances suffisamment loin du centre des objets compacts comme les étoiles à neutrons ou les trous noirs [28, 29] où des champs magnétiques non négligeables sont présents.

Les expansions relativistes auxquelles nous nous intéressons ne sont pas soumises à de forts champs gravitationnels, pour pouvoir les négliger. Dans ce cas, le mouvement du plasma est décrit par les équations hydrodynamiques relativistes obtenues par la loi de conservation du tenseur énergie-impulsion et la loi de conservation de l'équation de continuité [25, 26], dans le cadre de la relativité restreinte.

La conservation du nombre de particules, lorsque les phénomènes de création et d'annihilation sont nuls, est donnée par la conservation du flux de particules :

$$\partial_\mu (n u^\mu) = 0 \tag{2.1}$$

où ∂_μ représente la dérivée covariante, $u^\mu = (c\gamma, \gamma\vec{v})$ est le 4-vecteur vitesse normalisé à $u^\mu u_\mu = c^2$, c est la vitesse de la lumière et $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ est le facteur de Lorentz.

Pour établir les équations d'Euler et de l'énergie, on utilise la loi de conservation du tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ [30] :

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0 \tag{2.2}$$

et les indices μ et ν varient de 0 à 3.

En considérant un fluide parfait où les effets non adiabatiques, de viscosité et de transfert de chaleur sont négligeables, le tenseur énergie-impulsion est donné par :

$$T^{\mu\nu} = \frac{(e + P)}{c^2} u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} P \quad (2.3)$$

où $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ est le tenseur métrique, $\omega = (e + P)$ est la densité d'enthalpie qui est la somme de la densité d'énergie e du plasma et de la pression P , cette dernière est supposée isotrope.

De l'équation de conservation du tenseur énergie-impulsion (2.2) nous pouvons déduire les équations de conservation de l'impulsion et de l'énergie : La projection de l'équation (2.2) sur l'axe spatial donne l'équation de l'impulsion, *équation d'Euler*, et la projection sur l'axe du temps donne l'équation de conservation de l'énergie.

L'équation d'Euler obtenue est de la forme :

$$u_\nu u^\mu \partial_\mu P + \frac{(e + P)}{c^2} u^\mu \partial_\mu u_\nu - \partial_\nu P = 0 \quad (2.4)$$

et l'équation de l'énergie est donnée par :

$$u^\mu \partial_\mu e + (e + P) \partial_\mu u^\mu = 0 \quad (2.5)$$

Les équations (2.1), (2.4) et (2.5) forment un système de trois équations à quatre inconnues, pour le résoudre, il doit être fermé avec une équation supplémentaire représentée par l'équation d'état.

2.3 Importance de l'équation d'état

Dans l'équation d'Euler (2.4), un terme d'énergie fait son apparition, le terme de pression. Ce terme est lié à la thermodynamique du fluide. Donc la fermeture du système est conditionnée par la détermination d'une relation $P(e, n)$ entre la pression, l'énergie interne (ou l'entropie) du fluide et la densité. Cette relation est appelée *équation d'état*.

Cette relation ne peut être explicitée que s'il existe une description complète des échanges d'énergie entre le fluide et le milieu environnant. Il faut aussi avoir une des-

cription précise des phénomènes microscopiques. Ces derniers peuvent être établis par la théorie cinétique en tenant compte des différents phénomènes radiatifs, visqueux et dissipatifs qui peuvent se produire dans l'expansion. Malheureusement, les processus microscopiques opérant sur le plasma dans les écoulements astrophysiques sont en général très mal connus. La détermination précise de ces processus reste complexe voire impossible.

Plusieurs auteurs ont supposé une équation d'état polytropique, reliant la pression P à la densité en utilisant un indice polytropique constant [31, 32]. Dans ce cas la relation entre la pression et la densité et la relation entre l'enthalpie et la densité sont données par

$$P = Kn^\Gamma \quad (2.6)$$

et

$$w = \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} n^{\Gamma-1} \quad (2.7)$$

où K est une constante qui dépend des conditions initiales du fluide, Γ est l'indice polytropique qui varie en général entre 1 et 3. L'avantage de cette équation est bien évidemment sa simplicité, mais c'est aussi son plus grand défaut. En effet, toute l'information décrivant l'énergie du système se trouve masquée et imposée par le choix de l'indice polytropique. Par conséquent, l'équation d'état la plus utilisée est donnée pour un gaz idéal par

$$P = (\Gamma - 1)(e - \varepsilon_0) \quad (2.8)$$

où $\varepsilon_0 = mnc^2$ est la densité d'énergie de masse au repos.

Dans les applications des écoulements en astrophysique, quand $\Gamma = 1$ le fluide a un comportement isotherme et l'augmentation de la valeur de Γ se manifeste par une diminution de chauffage dans le fluide jusqu'à ce que le fluide devienne adiabatique. Dans ce dernier cas, pour un plasma monoatomique, $\Gamma = 5/3$ quand la température est classique (c'est à dire $T < mc^2/k_B$), qui représente le rapport de chaleurs spécifiques, il est égal $\Gamma = 4/3$ quand la température est relativiste (c'est à dire $T \geq mc^2/k_B$). Au delà

de ces deux valeurs dans les deux cas, le plasma commence à subir une perte d'énergie (refroidissement).

Cependant, les modèles analytiques et numériques confirment que les grands gradients de températures, qui sont rencontrés dans les plasmas astrophysiques, ne peuvent pas être décrits d'une manière adéquate par une équation d'état polytropique avec un rapport de chaleurs spécifiques constant. Cette dernière impose un comportement partout classique ou partout relativiste, alors qu'en réalité, un plasma peut à l'origine avoir une température relativiste qui diminue en cours d'expansion jusqu'à devenir classique.

Afin de remédier à ce problème, Synge [16] a été le premier à proposer une équation d'état, plus correcte, pour un gaz parfait dans le régime des températures relativistes, elle a le mérite d'inclure aussi bien les effets des températures classiques que relativistes pour un fluide à une seule composante. Elle s'écrit de la façon suivante

$$w = e + P = mnc^2 \frac{K_3(mc^2/k_B T)}{K_2(mc^2/k_B T)} = mnc^2 G(mc^2/k_B T)$$

où K_2 et K_3 sont respectivement des fonctions de Bessel modifiées de second et de troisième ordre.

Pour de basses températures $G(mc^2/k_B T) \longrightarrow 1 + 5k_B T/2mc^2$

Pour de hautes températures $G(mc^2/k_B T) \longrightarrow 1 + 4k_B T/mc^2$

Dans cette équation d'état, la thermodynamique du plasma est exprimée en terme de fonctions de Bessel modifiées, et donc pas d'expression analytique ne peut être écrite pour le calcul des quantités locales à partir des quantité conservées. L'utilisation d'une telle équation d'état demande un grand temps de calcul machine.

Pour surmonter ce problème, Blumenthal et Mathews [33], dans le but d'étudier la thermodynamique d'un fluide dans une accréation adiabatique autour d'un trou noir, ont proposé pour la première fois un ajustement numérique (fit) pour l'équation d'état de Synge sous une forme simplifiée et approximative, donné par :

$$P = \frac{1}{3}\varepsilon_0 \left(\frac{e}{\varepsilon_0} - \frac{\varepsilon_0}{e} \right) \quad (2.9)$$

Dans notre travail, nous avons opté pour l'utilisation d'un ajustement numérique meilleur que celui de l'équation (2.9), c'est-à-dire, qui se rapproche le plus de l'équation d'état donnée par Synge; il est donné par Ryu [34] sous la forme suivante

$$\frac{P}{e - \varepsilon_0} = \frac{3P + 2\varepsilon_0}{9P + 3\varepsilon_0} \quad (2.10)$$

L'équation d'état thermique n'est pas affectée par la relativité, elle s'écrit pour un gaz parfait comme

$$P = nk_B T \quad (2.11)$$

Les équations (2.8) (2.10) et (2.11) nous mènent à définir un nouveau indice polytropique effectif dépendant de la température du plasma en expansion.

$$\Gamma_{eff} = \frac{12\tilde{T} + 5}{9\tilde{T} + 3} \quad (2.12)$$

La figure (2.1) nous montre l'évolution de l'indice polytropique effectif en fonction de la température où les limites ultra-relativiste et classique sont représentées.

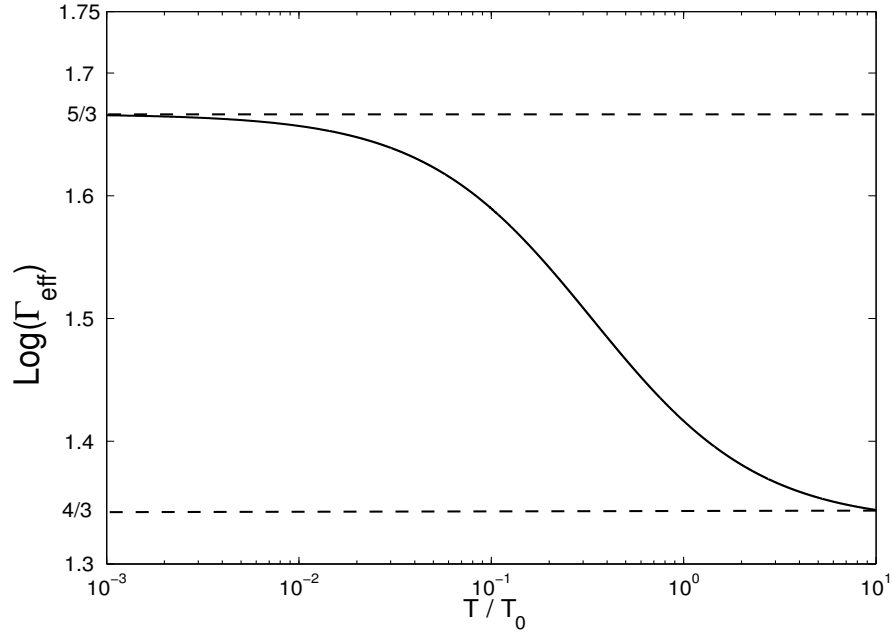


FIG. 2.1 – Evolution de l'indice polytropique effectif en fonction de la température

A partir de l'équation (2.10), la densité d'énergie totale du plasma constitué de deux espèces, protons et électrons, s'écrit :

$$e = e_e + e_p = mnc^2 + 3P_e \frac{3P_e + \eta mnc^2}{3P_e + 2\eta mnc^2} + 3P_p \frac{3P_p + mnc^2}{3P_p + 2mnc^2} \quad (2.13)$$

avec $\eta = m_e/m$ est le rapport des masses.

La pression totale du plasma en fonction de la température est donnée par :

$$P = P_e + P_p = (n_e + n_p)k_B T = 2nk_B T \quad (2.14)$$

L'expansion considérée est supposée monodimensionnelle, ce qui correspond à une énergie transportée sur de très longues distances, par exemple, à l'aide des jets énergétiques collimatés. Par conséquent, l'ensemble des équations différentielles (2.1), (2.4) et (2.5) décrivant l'expansion relativiste est donné par

$$\frac{\partial(\gamma n)}{\partial t} + \frac{\partial(\gamma n v)}{\partial x} = 0 \quad (2.15)$$

$$(e + P)\gamma^2\left(v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t}\right) + \left(c^2\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial t}\right) = 0 \quad (2.16)$$

$$(e + P)\gamma^2\left(\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \left(v\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial t}\right) = 0 \quad (2.17)$$

où e et P sont données par les équations (2.13) et (2.14), respectivement en fonction de la température.

2.4 Transformation self-similaire

L'étude de l'expansion des plasmas relativistes met en jeu des équations hydrodynamiques fortement non-linéaires et complexes dont la résolution n'est en général possible qu'à travers des simulations numériques. Leur résolution nécessite la connaissance des conditions aux limites. Dans les problèmes de la physique des plasmas, beaucoup de situations concernent des systèmes ouverts ou semi-ouverts. Notre objectif dans cette thèse est de trouver une solution hydrodynamique numérique simple pour ces équations, à savoir une solution self-similaire décrivant ces écoulements libres.

La self-similarité est un concept qui stipule que la distribution spatiale des caractéristiques du mouvement reste similaire à elle-même à tout temps durant le mouvement. La transformation adéquate est basée sur la supposition que chaque paramètre physique mis en jeu préserve sa forme durant l'expansion, loin des conditions initiales et des conditions aux limites et pas de grandeur caractéristique n'apparaît que ce soit dans les équations ou dans les conditions initiales [35]. En effet ceci est justifié quand nous avons la quasi-neutralité de charge du milieu. La longueur de Debye, perd son importance comme longueur caractéristique du plasma. Ce qui fait que les solutions self-similaires décrivent le comportement asymptotique d'un problème sans limites.

De point de vue mathématique, les transformations self-similaires se basent sur les propriétés de l'algèbre de Lie [36, 37]. Le choix de la transformation n'est pas unique, il peut être guidé par des considérations physiques ou des raisons de commodité. Les variables x , dans le cas monodimensionnel, et t sont alors combinées dans une nouvelle

et seule variable $\xi = x/\phi(t)$, où ϕ est une fonction du temps, qui réduit le système d'équations aux dérivées partielles en un système d'équations différentielles ordinaires facile à résoudre.

Suivant le raisonnement de Schamel [36], dans le cas le plus simple d'expansion de gaz non-relativiste dans le vide, les équations hydrodynamiques sont représentées par l'équation de continuité et l'équation de mouvement suivantes:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nv)}{\partial x} = 0 \quad (2.18)$$

$$mn \frac{\partial v}{\partial t} + mn(v \nabla v) + \nabla P = 0 \quad (2.19)$$

Les variables fondamentales sont uniquement: le temps, la distance et la pression. Les autres sont des combinaisons de ces trois paramètres. Le système admet alors trois transformations indépendantes.

Compte tenu de ces remarques, nous posons la transformation de groupe suivante:

$$G : \begin{cases} \tilde{t} = a^{\alpha_1} t, & \tilde{x} = a^{\alpha_2} x \\ \tilde{N} = a^{\beta_1} n, & \tilde{V} = a^{\beta_2} v \end{cases} \quad (2.20)$$

où a est une constante positive. α_1 , α_2 , β_1 et β_2 sont des paramètres à déterminer pour que la transformation soit invariante et vérifie la propriété pour toute fonction F

$$F(y) = f(a)F(\tilde{y})$$

où $f(a)$ est une fonction du paramètre a .

En appliquant ces nouvelles variables aux équations (2.18) et (2.19), et en supposant le cas simple d'expansion isotherme d'un gaz parfait où la pression est donnée par (2.11), pour $f(a) = 1$, nous obtenons :

$$a^{\alpha_1 - \beta_1} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \tilde{t}} + a^{\alpha_2 - \beta_1 - \beta_2} \frac{\partial \tilde{N} \tilde{V}}{\partial \tilde{x}} = 0$$

$$a^{\alpha_1 - \beta_2} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{t}} + a^{-\beta_2 + \alpha_2 - \beta_2} (\tilde{V} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{x}}) + a^{\alpha_2} \frac{T \partial \tilde{N}}{m \tilde{N} \partial \tilde{x}} = 0$$

Ces équations conservent leur forme si et seulement si $\alpha_1 = \alpha_2$ $\beta_2 = \beta_1 = 0$.

Dans ce cas, nous obtenons les invariants suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{x}}{\tilde{t}} &= \frac{x}{t} = \xi(x,t) \\ \tilde{N}(\xi) &= n(x,t) \\ \tilde{V}(\xi) &= v(x,t) \end{aligned}$$

$\xi(x,t)$ est appelée variable self-similaire.

Sous ces conditions, les équations différentielles peuvent être alors écrites en terme d'une seule variable de similarité ξ .

Pour écrire ces équations avec des grandeurs sans dimension, on pose :

$$\xi = x/bt, \quad n = n_0 \tilde{N}/\alpha t, \quad v = b\tilde{V}$$

où b et α sont des constantes, et dans ce cas, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\xi}{t} \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{bt} \frac{d}{d\xi}$$

et on trouve :

$$(\tilde{V} - \xi) \frac{d\tilde{N}}{d\xi} - \tilde{N} + \tilde{N} \frac{d\tilde{V}}{d\xi} = 0$$

$$(\tilde{V} - \xi) \frac{d\tilde{V}}{d\xi} + \frac{k_B T}{mb^2 \tilde{N}} \frac{d\tilde{N}}{d\xi} = 0$$

b ayant la dimension d'une vitesse, on peut aisément choisir $b^2 = k_B T/m$ qui représente le carré d'une vitesse acoustique. La constante α est choisie comme $\alpha = \omega_p t$ où $\omega_p = \sqrt{4\pi n_0 e^2/m}$ est la fréquence du plasma et n_0 est la densité initiale du plasma.

2.5 Solution self-similaire

Pour trouver une solution self-similaire pour le système d'équations relativistes (2.15), (2.16) et (2.17), nous avons suivi la procédure de calculs décrite dans la section précédente. Etant donné que la vitesse de la lumière est la seule vitesse caractéristique de l'expansion, nous avons posé la variable self-similaire égale à

$$\xi = x/ct$$

En introduisant la normalisation suivante

$$\tilde{N} = n\omega_p t/n_0, \quad \tilde{V} = v/c \quad (2.21)$$

nous déduisons, après quelques manipulations mathématiques, que le système admet une solution self-similaire si et seulement si, la température est normalisée de la manière suivante

$$\tilde{T} = T/mc^2$$

Par conséquent, le système d'équations différentielles ordinaires normalisées est :

$$\frac{d\tilde{N}}{d\xi} = \frac{\tilde{N}}{(\tilde{V} - \xi)} \left(1 - \gamma^2(1 - \tilde{V}\xi) \frac{d\tilde{V}}{d\xi} \right) \quad (2.22)$$

$$\frac{d\tilde{V}}{d\xi} = \frac{2\tilde{T} \left\{ \tilde{V} - \frac{(1-\tilde{V}\xi)}{(\tilde{V}-\xi)} \right\} / \gamma^2}{\left\{ 1 + 2\tilde{T} + 3\tilde{T}(A+B) \right\} (\tilde{V} - \xi) - \frac{2\tilde{T}(1-\tilde{V}\xi)^2}{(\tilde{V}-\xi)} \left\{ 1 + \frac{2}{(C+D)} \right\}} \quad (2.23)$$

$$\frac{d\tilde{T}}{d\xi} = \frac{-2\tilde{T}(1 - \tilde{V}\xi)\gamma^2}{(\tilde{V} - \xi)(C + D)} \frac{d\tilde{V}}{d\xi} \quad (2.24)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \frac{3\tilde{T} + \eta}{3\tilde{T} + 2\eta} & B &= \frac{3\tilde{T} + 1}{3\tilde{T} + 2} \\ C &= \frac{27\tilde{T}^2 + 36\tilde{T}\eta + 6\eta^2}{(3\tilde{T} + 2\eta)^2} & D &= \frac{27\tilde{T}^2 + 36\tilde{T} + 6}{(3\tilde{T} + 2)^2} \end{aligned}$$

Dans notre application, nous nous intéressons aux expansions des plasmas qui ont des vitesses initiales relativistes $\tilde{V} \geq 0.1$, ce qui correspond à un facteur de Lorentz $\gamma \geq 1$, loin du centre de l'objet compact, pour vaincre la gravité. Le fluide est considéré continu et de vitesse subsonique $v < c_s$, c_s est la vitesse du son, pour ne pas tenir compte des ondes de choc.

2.6 Méthode de résolution numérique

La résolution du système d'équations différentielles ordinaires (2.22), (2.23) et (2.24) s'est effectuée avec la méthode de Runge-Kutta. Cette dernière, est une méthode d'analyse numérique d'approximation de solution d'équations différentielles [38]. Elle repose sur le principe des itérations, c'est-à-dire qu'une première estimation de la solution est utilisée pour calculer une seconde estimation; plus précise, et ainsi de suite.

Elle est explicitée en considérant le problème suivant :

$$y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$$

Nous avons utilisé la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4), elle est donnée par l'équation

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

avec

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(t_n + h, y_n + hk_3\right)$$

où h est le pas de l'itération et $(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$ représente la pente.

La valeur suivante (y_{n+1}) est approchée par la somme de la valeur actuelle (y_n) et du produit de la taille de l'intervalle (h) par la pente estimée. L'erreur totale commise est de l'ordre de h^4 .

2.7 Résultats et discussion

La résolution des équations (2.22), (2.23) et (2.24) nous a permis de représenter sur la figure (2.2) l'évolution de la densité, vitesse et température normalisées à leur valeur initiale en fonction de la variable de self-similarité. Cette variable ne devrait pas dépasser l'unité qui correspond à la vitesse de la lumière.

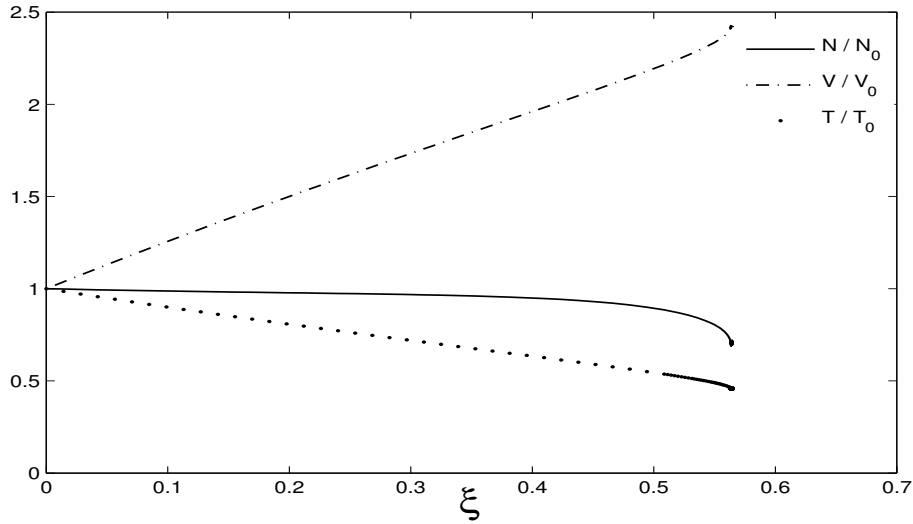


FIG. 2.2 – Profils de la densité, de la vitesse et de la température normalisées à leurs valeurs initiales en fonction de ξ pour les valeurs initiales $\tilde{N}_0 = 1$, $\tilde{V}_0 = 0.35$ et $\tilde{T}_0 = 1$

Par l'effet du gradient de la pression thermique seul, la densité et la température décroissent avec la variable self-similaire, ce qui est dû à l'expansion et au refroidissement de la matière, en expansion libre, dans le vide.

La vitesse croît d'une façon monotone, la matière éjectée continue d'être accélérée, accélération due au gradient de pression thermique, jusqu'à ce que son énergie interne soit suffisamment convertie en énergie cinétique, suivant une expansion libre.

Pour tous les profils, l'expansion atteint son maximum à une valeur correspondant à la position où la solution self-similaire n'est plus valable. Cette valeur au-delà de laquelle des instabilités physiques apparaissent, est très sensible aux conditions initiales [39]. Ces instabilités pourraient signifier que la neutralité de charge est violée et dans ce cas le modèle un-fluide ne peut plus être appliqué. D'autres équations couplées avec l'équation de Poisson décriraient mieux l'expansion faisant alors intervenir la longueur de Debye comme longueur caractéristique et dans ce cas la méthode self-similaire ne peut plus être appliquée.

2.7.1 Etude paramétrique

Le choix des valeurs initiales dépend de la situation physique étudiée. Dans cette partie, nous allons étudier les effets de la vitesse et de la température initiales sur l'expansion d'un plasma relativiste dans le vide.

Les ordres de grandeur des vitesses et des températures initiales prises en compte dans notre étude sont tels que les vitesses sont relativistes, limitées par la vitesse de la lumière $0.1 \leq v/c \leq 1$ i.e, $10^7 \leq v \leq 10^8 m/s$ et la température de l'ordre de l'énergie de masse du proton: $T \geq 0.1mc^2$ i.e, $T \geq 10^{12} K$

2.7.1.1 Effet de la vitesse

Sur les figures (2.3), (2.4) et (2.5) nous avons étudié l'effet de la valeur initiale de la vitesse sur les profils de la densité, de la vitesse et de la température.

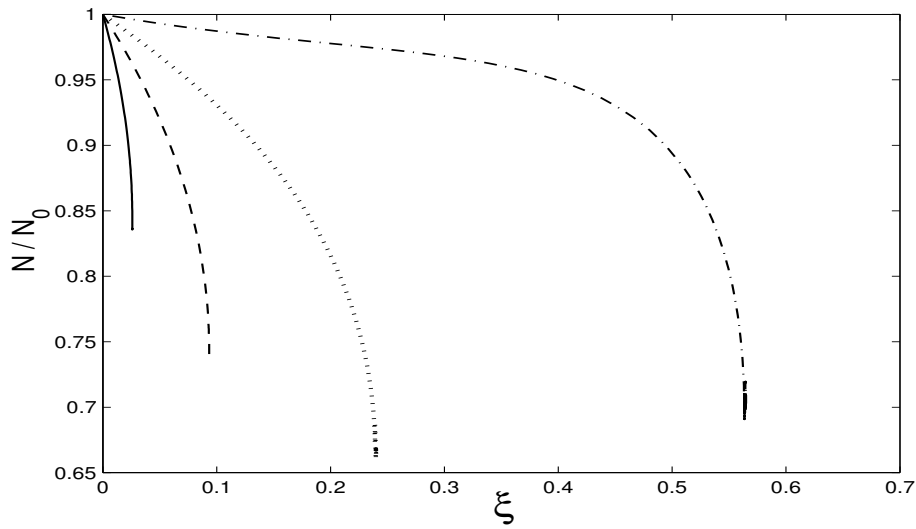


FIG. 2.3 – Profils de la densité normalisée à sa valeur initiale en fonction de ξ pour différentes valeurs de la vitesse initiale $\tilde{V}_0 = 0.35$ (— · —), $\tilde{V}_0 = 0.4$ (····), $\tilde{V}_0 = 0.45$ (---) et $\tilde{V}_0 = 0.5$ (—) avec $\tilde{N}_0 = 1$ et $\tilde{T}_0 = 1$

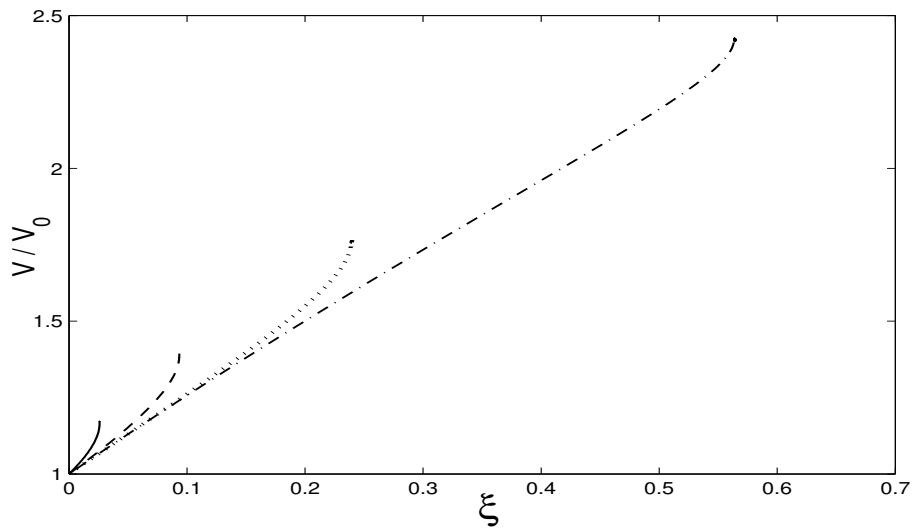


FIG. 2.4 – Profils de la vitesse normalisée à sa valeur initiale en fonction de ξ pour différentes valeurs de la vitesse initiale $\tilde{V}_0 = 0.35$ (— · —), $\tilde{V}_0 = 0.4$ (····), $\tilde{V}_0 = 0.45$ (---) et $\tilde{V}_0 = 0.5$ (—) avec $\tilde{N}_0 = 1$ et $\tilde{T}_0 = 1$

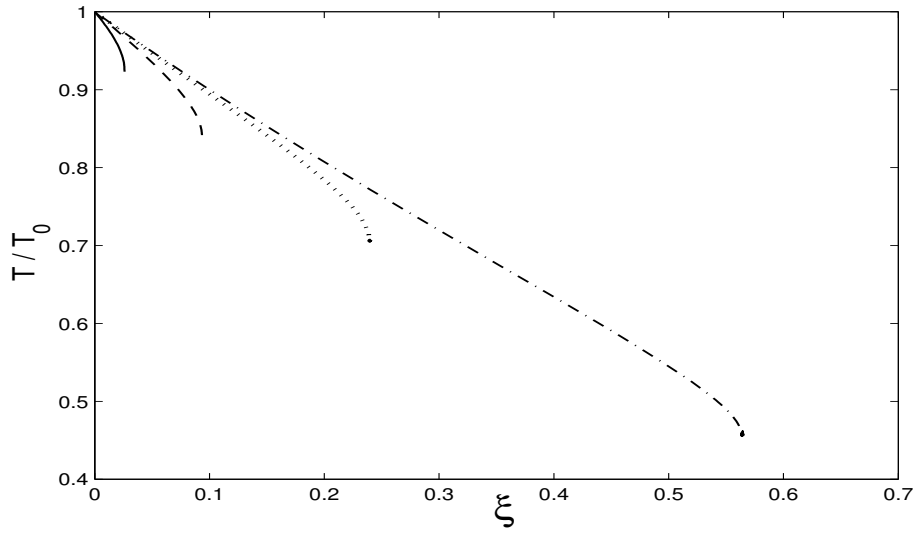


FIG. 2.5 – Profils de la température normalisée à sa valeur initiale en fonction de ξ pour différentes valeurs de la vitesse initiale $\tilde{V}_0 = 0.35$ (— · —), $\tilde{V}_0 = 0.4$ (· · ·), $\tilde{V}_0 = 0.45$ (— —) et $\tilde{V}_0 = 0.5$ (—) avec $\tilde{N}_0 = 1$ et $\tilde{T}_0 = 1$

Indépendamment des conditions initiales de la densité, pour une température initiale fixée $T_0 = 1$, plus la vitesse initiale est élevée, plus le plasma est accéléré, moins il se refroidit et la densité décroît plus vite. L'expansion self-similaire est plus réduite.

2.7.1.2 Effet de la température

Sur les figures (2.6), (2.7) et (2.8) nous avons étudié l'effet de la valeur initiale de la température sur les profils de la densité, de la vitesse et de la température.

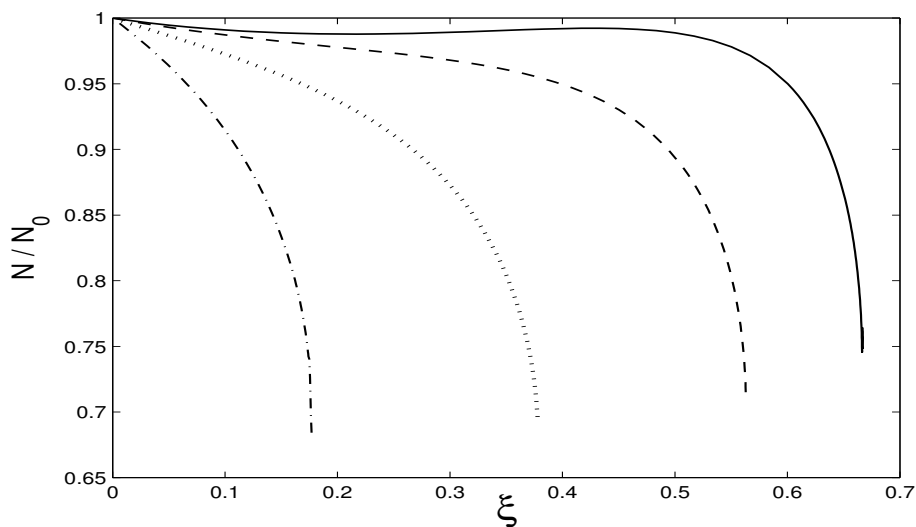


FIG. 2.6 – Profils de la densité normalisée à sa valeur initiale en fonction de ξ pour différentes valeurs de la température initiale $\tilde{T}_0 = 0.25(-\cdot-)$, $\tilde{T}_0 = 0.5(\cdots)$, $\tilde{T}_0 = 1(---)$ et $\tilde{T}_0 = 2(—)$ avec $\tilde{N}_0 = 1$ et $\tilde{V}_0 = 0.35$

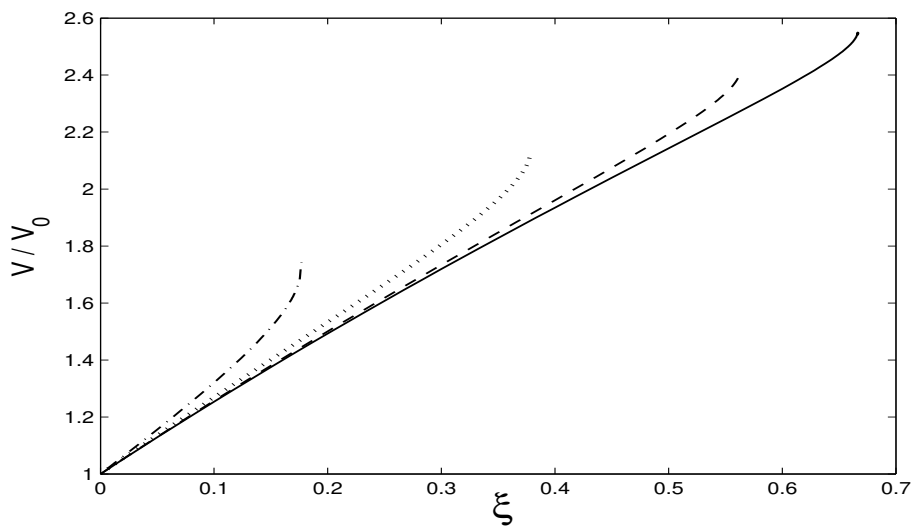


FIG. 2.7 – Profils de la vitesse normalisée à sa valeur initiale en fonction de ξ pour différentes valeurs de la température initiale $\tilde{T}_0 = 0.25(-\cdot-)$, $\tilde{T}_0 = 0.5(\cdots)$, $\tilde{T}_0 = 1(---)$ et $\tilde{T}_0 = 2(—)$ avec $\tilde{N}_0 = 1$ et $\tilde{V}_0 = 0.35$

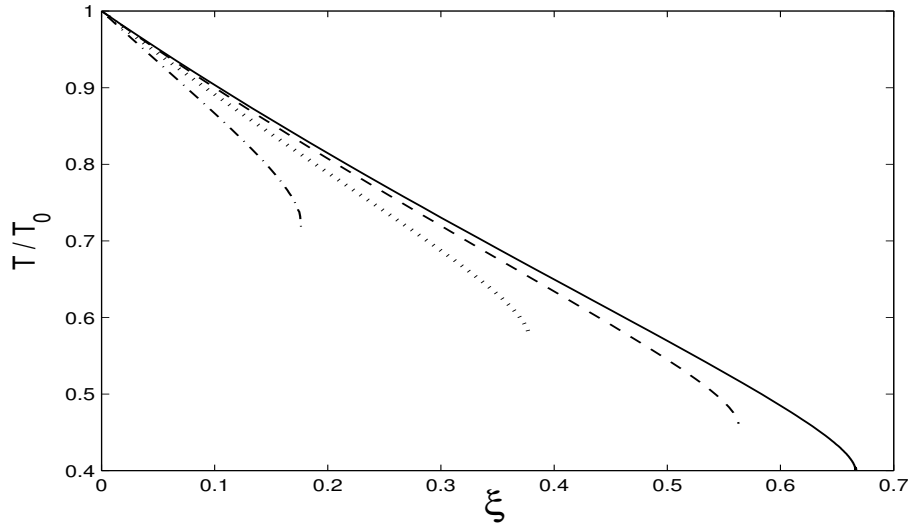


FIG. 2.8 – Profils de la température normalisée à sa valeur initiale en fonction de ξ pour différentes valeurs de la température initiale $\tilde{T}_0 = 0.25$ (— · —), $\tilde{T}_0 = 0.5$ (····), $\tilde{T}_0 = 1$ (---) et $\tilde{T}_0 = 2$ (—) avec $\tilde{N}_0 = 1$ et $\tilde{V}_0 = 0.35$

Indépendamment des conditions initiales de la densité, pour une vitesse initiale donnée $V_0 = 0.35$, plus la température initiale augmente, le plasma se refroidit et décélère et la densité décroît moins vite. La solution self-similaire est plus étendue grâce à l'énergie thermique supplémentaire due à l'augmentation de la température initiale.

2.8 Vitesse du son et limite de l'expansion self-similaire

Pour étudier le rôle des conditions initiales sur les limites de l'expansion self-similaire, nous avons tracé sur les figures (2.9) et (2.10), la valeur limite du paramètre self-similaire ξ_{lim} en fonction de la vitesse initiale et de la température initiale, respectivement.

A partir de la figure (2.9), nous avons trouvé que pour une température initiale donnée, la valeur limite du paramètre self-similaire décroît avec la vitesse initiale. A partir des courbes 1 et 2 correspondant aux vitesses initiales $\tilde{T} = 1$ et $\tilde{T} = 0.5$, respectivement, nous avons trouvé que le comportement self-similaire de l'expansion prenait fin à des valeurs initiales très proches de la vitesse du son. Au delà de ces valeurs, le plasma devient

supersonique et dans ce cas de figure, d'autres phénomènes physiques apparaissent comme les ondes de choc, qui ne font pas l'objet de notre présente étude.

Par définition, la vitesse du son correspond à la vitesse de propagation d'une onde de pression dans un milieu. Elle est donnée par l'expression suivante [34] :

$$\frac{c_s^2}{c^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial e} \right)_{dS=0}$$

où S est l'entropie du système. Après quelques manipulations mathématiques, la vitesse du son a la forme suivante :

$$\frac{c_s^2}{c^2} = -\frac{\rho_m}{h} \frac{\partial h}{\partial \rho_m} / \left(\rho_m \frac{\partial h}{\partial P} - 1 \right) \quad \text{avec} \quad h = (e + P) / \rho_m$$

en fonction de la température, la vitesse du son est donnée par :

$$\frac{c_s^2}{c^2} = \frac{2\tilde{T}(6\tilde{T} + 2)(72\tilde{T}^2 + 48\tilde{T} + 5)}{3(24\tilde{T}^2 + 8\tilde{T} + 1)(36\tilde{T}^2 + 24\tilde{T} + 2)}$$

Nous avons retrouvé, dans le cas de la limite non relativiste, la valeur de la vitesse du son dans le cas adiabatique égale à $c_s^2 = 5P/3\rho_m$ et dans le cas de la limite ultra-relativiste $c_s^2 = (1/3)c^2$. Cette dernière est bien observée dans la figure (2.9) où elle représente la valeur maximale de la vitesse initiale de l'expansion ($v_0 \approx 0.58c$).

Par contre, dans la figure (2.10), pour une vitesse initiale donnée, nous avons trouvé que l'expansion self-similaire est de plus en plus étendue avec la température initiale. Cependant, pour une certaine valeur de la température initiale $\tilde{T} \approx 2$ correspondant à $T = 2.10^{12}K$, la valeur limite de la variable self-similaire ne varie plus et n'est plus affectée par la vitesse. Nous déduisons que les températures du plasma ne doivent pas dépasser une certaine valeur pour que l'application du modèle hydrodynamique reste valable. En effet, ceci s'explique par le fait qu'à de telles températures élevées, les particules deviennent très relativistes donc la probabilité de création ou d'annihilation spontanée de paires de particules dans le vide commence à être importante. Ce qui veut dire que le système n'a plus de conservation du nombre de particules et la concentration de particules et d'antiparticules augmente avec la température.

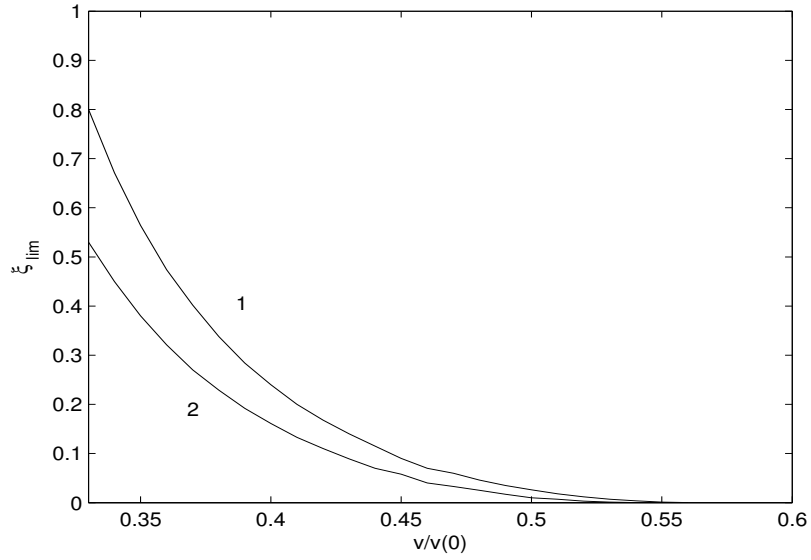


FIG. 2.9 – Evolution de ξ_{lim} en fonction de la vitesse initiale pour des températures initiales : $\tilde{T}_0 = 1$ (courbe 1) et $\tilde{T}_0 = 0.5$ (courbe 2)

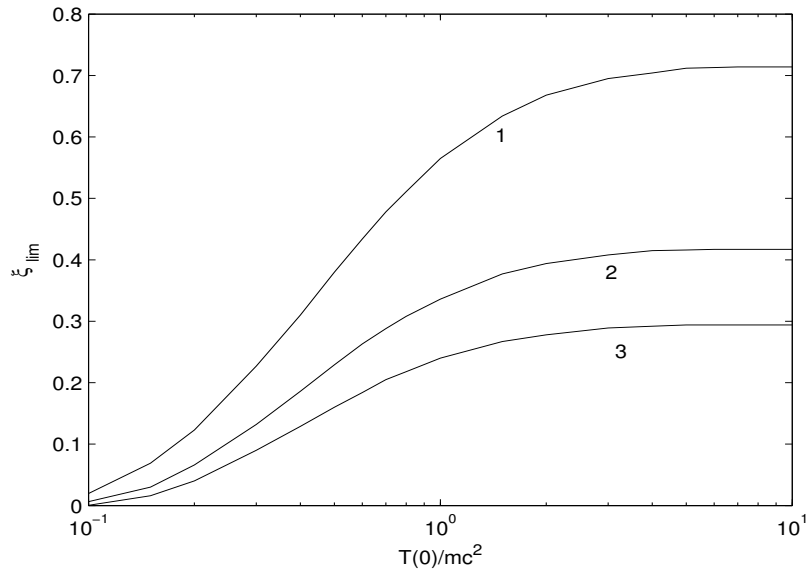


FIG. 2.10 – Evolution de ξ_{lim} en fonction de la température initiale pour des vitesses initiales : $\tilde{V}_0 = 0.35$ (courbe 1), $\tilde{V}_0 = 0.38$ (courbe 2) et $\tilde{V}_0 = 0.40$ (courbe 3)

Chapitre 3

Expansion magnétohydrodynamique d'un plasma relativiste dans le vide

Dans la plupart des cas, les plasmas relativistes en astrophysique sont magnétisés [40], c'est-à-dire que la dynamique de l'expansion est dominée par le champ magnétique et est décrite par la *magnétohydrodynamique* (MHD). L'application d'un modèle hydrodynamique pur tel que décrit dans le chapitre précédent n'est plus valable puisque un champ magnétique induit par exemple une accélération et une énergie supplémentaire dont il faudrait en tenir compte dans les équations de conservations.

La MHD utilise le formalisme des équations fluides auxquelles s'ajoutent des effets propres aux interactions électromagnétiques. L'approche MHD est une description à grande échelle du plasma, pour qu'elle soit valable il faut que les tailles caractéristiques du plasma (longueur de variation du champ magnétique et du champ électrique à grande échelle) soient grandes devant les longueurs décrivant les phénomènes microscopiques. Le libre parcours moyen d'une particule doit être très petit par rapport à la longueur de variation du champ électromagnétique. Cette condition permet de considérer le plasma en équilibre thermodynamique local.

3.1 Etude bibliographique du problème

Les observations ont montré que l'accélération de l'expansion peut être le résultat non seulement d'un gradient de pression thermique mais aussi d'un flux d'énergie magnétique et la collimation observée dans la morphologie des plasmas en expansion dans l'espace est due essentiellement au confinement magnétique.

L'application la plus spectaculaire d'un plasma relativiste et magnétisé en expansion est bien celle concernant les explosions des sursauts gamma (GRB) [41], [42] et les jets puissants provenant des objets astrophysiques tels que les noyaux actifs des galaxies [18]. Les observations ont montré que les écoulements sont formés près d'un objet central où l'énergie thermique et les champs magnétiques sont assez forts pour permettre une accélération. Des structures et des instabilités de plasmas en expansion dans le vide qui contiennent un champ magnétique uniforme ambiant ont été examinées par des modèles théoriques et numériques. Ces études sont faites dans les expériences de plasma créé par laser [43], [44] et dans les phénomènes de plasmas d'espace [45].

Blandford [46] et Benford [47] ont été les premiers à montrer l'influence du champ magnétique sur la dynamique des jets mais ce sont les travaux de Chan et Henriksen [48] qui ont conduit aux premières solutions de jets de matière issus d'un objet central (disque épais), collimatés par un champ magnétique faible à grande échelle. En utilisant une formulation self-similaire qui leur permet de traiter la bi-dimensionnalité du problème, ils ont démontré que le champ confine effectivement le plasma et peut même introduire des oscillations du rayon de jet.

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'effet d'un champ magnétique transverse sur l'expansion d'un plasma relativiste, en résolvant les équations MHD en utilisant le formalisme self-similaire.

3.2 Equations magnétohydrodynamiques relativistes

Le plasma en expansion est considéré toujours comme un seul fluide et il est gouverné par les trois équations MHD de conservation, conservation de nombre de particule, de

l'impulsion et de l'énergie qui sont combinées avec les équations de Maxwell.

La loi d'Ohm avec l'ensemble des équations de Maxwell va se réduire à une équation d'induction décrivant les variations temporelles du champ magnétique. Le système ainsi constitué est fermé par une équation d'état non polytropic de la matière.

Tout comme l'hydrodynamique relativiste, la donnée explicite du courant de matière J^μ et du tenseur énergie-impulsion total $T^{\mu\nu}$ est

$$\partial_\mu(n u^\mu) = 0 \quad (3.1)$$

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0 \quad (3.2)$$

où

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{\text{fluide}} + T^{\mu\nu}_{\text{em}} \quad (3.3)$$

$T^{\mu\nu}_{\text{fluide}}$ est le tenseur hydrodynamique défini dans l'équation (2.3) et $T^{\mu\nu}_{\text{em}}$ le tenseur impulsion-énergie électromagnétique, il peut s'écrire en fonction du tenseur électromagnétique $F^{\alpha\nu}$ sous la forme suivante

$$T^{\mu\nu}_{\text{em}} = F^\mu_\alpha F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4\pi} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (3.4)$$

Le tenseur électromagnétique est donné par :

$$F^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

En astrophysique, à cause des basses résistivités et des énormes longueurs d'échelle considérées, dans la majorité des problèmes traités il est suffisant de considérer le milieu comme idéal avec une conductivité infinie [49] et que les effets dissipatifs sont insignifiants. Les

lignes du champ sont alors gelées dans le plasma. Les équations portant sur le champ électromagnétique deviennent:

- L'équation de mouvement :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}/c \quad (3.6)$$

où \mathbf{E} est le champ électrique dans le repère de laboratoire.

Pour en arriver là, nous avons supposé une loi d'Ohm $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}'$ où σ est une conductivité qui tend vers l'infini, dans l'approximation de la MHD idéale. Le champ \mathbf{E}' est le champ électrique dans le repère du plasma où il est considéré nul et qui est lié à \mathbf{E} par la transformation de Lorentz $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}/c$ [50]

L'équation (3.6) servira à éliminer le champ électrique des autres équations de la MHD.

- L'équation d'Ampère devient :

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (3.7)$$

- L'équation de Faraday qui décrit l'évolution spatio-temporelle du champ magnétique est donnée par :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.8)$$

après avoir éliminé le champ électrique de l'équation (3.8) devient

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (3.9)$$

Pour une expansion monodimensionnelle qui s'écoule dans la direction x , avec une vitesse $\mathbf{v} = (v,0,0)$ perpendiculairement au champ magnétique \mathbf{B} appliqué, dirigé dans la direction z , $\mathbf{B} = (0,0,B)$, le champ électrique dans ce cas a une composante selon la direction y , $\mathbf{E} = (0,E_y,0)$. Dans la MHD idéale, $E_y = (v/c)B$, le tenseur électromagnétique

devient :

$$F_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & vB & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ vB & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Par conséquent, l'ensemble des équations différentielles décrivant l'expansion d'un plasma relativiste soumis à un champ magnétique transverse est :

$$\frac{\partial \gamma n}{\partial t} + \frac{\partial \gamma n v}{\partial x} = 0 \quad (3.11)$$

$$(e + P)\gamma^2 \left(v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \left(c^2 \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \frac{1}{4\pi\gamma^2} \left(B \frac{\partial(vB)}{\partial t} + c^2 B \frac{\partial B}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.12)$$

$$(e + P)\gamma^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \left(v \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial(vB)}{\partial x} = 0 \quad (3.14)$$

Le système d'équations (3.11), (3.12), (3.13) et (3.14) est fermé par l'équation d'état (2.10) du chapitre deux.

Dans les équations de conservation il n'y a que l'équation d'Euler qui est affectée par le champ magnétique où un terme qui ne dépend que du champ est rajouté. Avec $\mathbf{B} = 0$ on retrouve le cas non magnétisé.

3.3 Solution self-similaire

Le système d'équations (3.11), (3.12), (3.13) et (3.14) est un système d'équations différentielles fortement non linéaires. Nous allons montrer que ce système admet une solution self-similaire. Nous introduisons la variable self-similaire unidimensionnelle, comme dans le cas hydrodynamique,

$$\xi = x/ct$$

avec le même changement de variable pour la densité, vitesse et température

$$\tilde{N} = n\omega t/n_0, \quad \tilde{V} = v/c, \quad \tilde{T} = T/mc^2$$

Après quelques manipulations mathématiques, pour que le système (3.11) à (3.14) admette une solution self-similaire, nous avons trouvé que le champ magnétique devait se normaliser de la façon suivante

$$\tilde{B}^2 = B^2/4\pi mn\gamma^2 c^2 \quad (3.15)$$

Par conséquent, le système d'équations différentielles ordinaires normalisées est donné par:

$$\frac{d\tilde{N}}{d\xi} = \frac{\tilde{N}}{(\tilde{V} - \xi)} \left\{ 1 - \gamma^2(1 - \tilde{V}\xi) \frac{d\tilde{V}}{d\xi} \right\} \quad (3.16)$$

$$\frac{d\tilde{V}}{d\xi} = \frac{(2\tilde{T} - \tilde{B}/2) \left\{ \tilde{V} - \frac{(1-\tilde{V}\xi)}{(\tilde{V}-\xi)} \right\} / \gamma^2}{\left\{ 1 + 2\tilde{T} + 3T(A+B) + \frac{\tilde{B}^2}{2} \right\} (\tilde{V} - \xi) - (1 - \tilde{V}\xi)^2 \left\{ \frac{2\tilde{T} + \tilde{B}^2/2}{(\tilde{V}-\xi)} + \frac{\tilde{B}^2}{2} + \frac{4\tilde{T}}{(\tilde{V}-\xi)(C+D)} \right\}} \quad (3.17)$$

$$\frac{d\tilde{T}}{d\xi} = - \frac{2\tilde{T}(1 - \tilde{V}\xi)\gamma^2}{(\tilde{V} - \xi)(C + D)} \frac{d\tilde{V}}{d\xi} \quad (3.18)$$

$$\frac{d\tilde{B}}{d\xi} = - \frac{(1 - \tilde{V}\xi)\gamma^2 \tilde{B}}{2(\tilde{V} - \xi)} \frac{d\tilde{V}}{d\xi} \quad (3.19)$$

avec A, B, C et D définies en page 33.

3.4 Résultats et discussion

3.4.1 Evolution du champ magnétique

La résolution du système d'équations (3.15) et (3.19) donne l'évolution du champ magnétique en fonction de la variable self-similaire. Celui-ci subit une décroissance monotone au cours de l'expansion self-similaire. Il est représenté à titre d'exemple dans la figure (3.1) pour des conditions initiales données de champ magnétique, densité, vitesse et température normalisés à leur valeurs initiales.

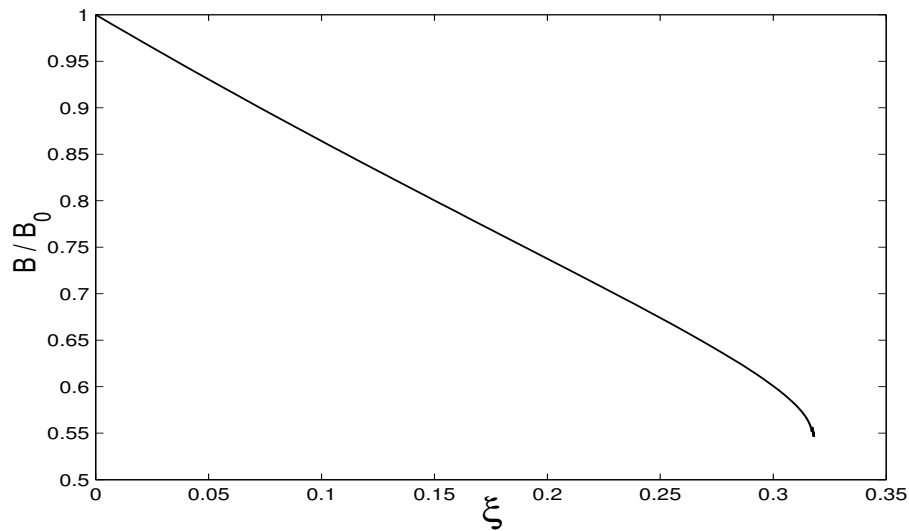


FIG. 3.1 – Profil du champ magnétique en fonction de ξ pour une valeur initiale du champ $\tilde{B}_0 = 0.5$ avec $\tilde{N}_0 = 1$, $\tilde{V}_0 = 0.4$ et $\tilde{T}_0 = 1$

3.4.2 Effet du champ magnétique

Nous avons étudié l'effet du champ magnétique sur la dynamique de l'expansion du plasma pour les valeurs initiales de densité, vitesse et température suivantes $\tilde{N}_0 = 1$, $\tilde{V}_0 = 0.4$ et $\tilde{T}_0 = 1$. Nous avons tracé les profils de densité, vitesse et température

normalisées en fonction de la variable self-similaire pour différentes valeurs du champ magnétique initial. Les résultats sont représentés dans les figures (3.2), (3.3) et (3.4)

Nous observons que la densité, la vitesse et la température gardent le même comportement d'expansion libre même en présence d'un champ magnétique, et que l'expansion du plasma est fortement influencée par la présence du champ magnétique extérieur.

Dans les figures (3.2) et (3.3), nous observons que plus la valeur du champ magnétique initial augmente plus le plasma est décéléré et plus la densité augmente. Ces phénomènes sont liés au confinement des particules par le champ magnétique. Ce dernier confine les particules chargées le long des lignes de champ.

En effet, le champ magnétique agit sur les particules chargées via la force de Lorentz donnée par $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$. Seule la composante du vecteur de vitesse perpendiculaire au champ donne lieu à une force. Cette dernière est perpendiculaire à la vitesse elle-même où la particule sera accélérée avec une accélération constante et elle exécute un mouvement circulaire dans le plan perpendiculaire au champ où elle sera parfaitement confinée. Or, dans la direction parallèle au champ, la particule ne subit aucune force. La particule ne sera pas donc confinée dans la direction du champ, Le mouvement total sera la somme d'un mouvement rectiligne sans accélération superposé à un mouvement circulaire et donc un mouvement en hélice.

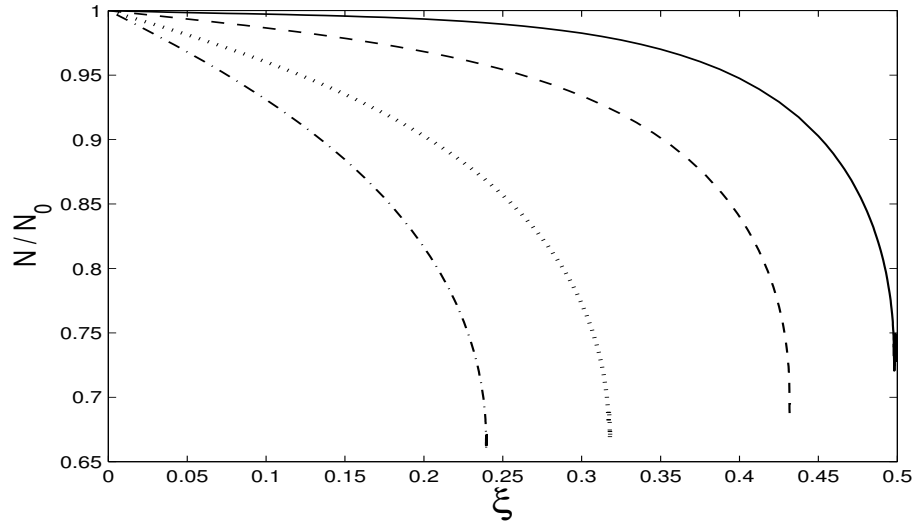


FIG. 3.2 – Profils de la densité normalisée à sa valeur initiale en fonction de ξ pour différentes valeurs initiales du champ magnétique $\tilde{B}_0 = 0(-\cdot)$, $\tilde{B}_0 = 0.5(\cdots)$, $\tilde{B}_0 = 0.75(- -)$ et $\tilde{B}_0 = 0.85(—)$ avec $\tilde{N}_0 = 1$, $\tilde{V}_0 = 0.4$ et $\tilde{T}_0 = 1$

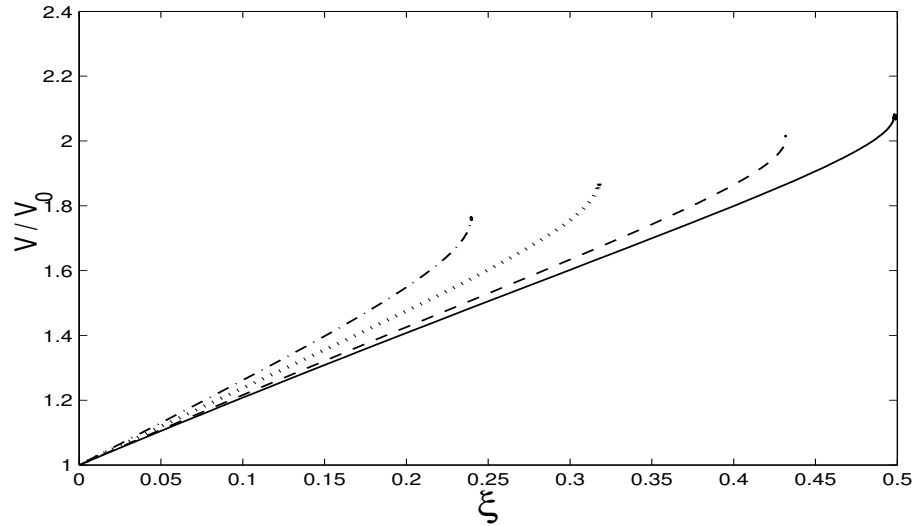


FIG. 3.3 – Profils de la vitesse normalisée à sa valeur initiale en fonction de ξ pour différentes valeurs initiales du champ magnétique $\tilde{B}_0 = 0(-\cdot)$, $\tilde{B}_0 = 0.5(\cdots)$, $\tilde{B}_0 = 0.75(- -)$ et $\tilde{B}_0 = 0.85(—)$ avec $\tilde{N}_0 = 1$, $\tilde{V}_0 = 0.4$ et $\tilde{T}_0 = 1$

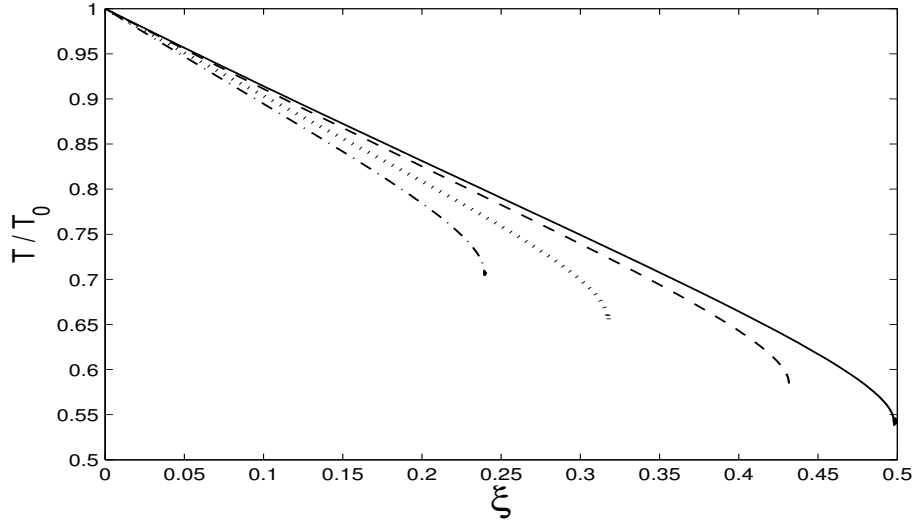


FIG. 3.4 – Profils de la température normalisée à sa valeur initiale en fonction de ξ pour différentes valeurs initiales du champ magnétique $\tilde{B}_0 = 0(-\cdot-)$, $\tilde{B}_0 = 0.5(\cdots)$, $\tilde{B}_0 = 0.75(- -)$ et $\tilde{B}_0 = 0.85(—)$ avec $\tilde{N}_0 = 1$, $\tilde{V}_0 = 0.4$ et $\tilde{T}_0 = 1$

Dans notre cas la vitesse n'a pas de composante parallèle au champ magnétique. Les particules donc évoluent seulement dans le plan perpendiculaire au champ magnétique en s'enroulant autour des lignes de champ avec un rayon de giration noté r_L , appelé rayon de Larmor.

Le rayon de Larmor des particules dépend de l'intensité du champ, de la masse et de la charge de la particule. En mécanique relativiste, il s'écrit comme

$$r_L = \frac{mc}{qB} \sqrt{\left(\frac{T + mc^2}{mc^2}\right)^2 - 1}$$

où $T = (\gamma - 1)mc^2$ est l'énergie cinétique.

Pour retrouver la formule classique il suffit de considérer l'énergie cinétique comme négligeable par rapport à la masse au repos. Plus le champ est puissant plus le rayon est faible, la particule reste alors *scotchée* au voisinage de la ligne de champ, ce qui fait que la densité augmente puisque le nombre de particules devient plus grand par unité de volume. Ce confinement induit aussi une décélération de l'expansion par rapport au cas non magnétisé.

Dans la figure (3.4), nous constatons une augmentation de la température avec le champ magnétique, en comparaison avec le cas hydrodynamique pur correspondant à $B = 0$. L'augmentation de la température avec le champ magnétique indique que la dynamique du plasma est moins importante que l'effet du champ magnétique qui a le rôle de confinement et de chauffage. L'augmentation de la température est le résultat de deux effets, le chauffage par effet Joule et la compression magnétique du plasma.

i) le chauffage par effet Joule :

En effet, le mouvement du plasma à travers le champ magnétique va produire une force appelée force de Laplace. Le courant électronique induit J est décrit par la loi d'Ohm, qui s'écrit comme $\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}/c = \mathbf{J}/\sigma + \mathbf{J} \wedge \mathbf{B}/n_e c$.

Quand le plasma s'étend transversalement par rapport au champ, un chauffage peut avoir lieu dû à l'énergie gagnée par les particules à partir de l'énergie cinétique (travail fait par le terme $\mathbf{J} \wedge \mathbf{B}$ qui agit pour accélérer l'expansion). La force $\mathbf{J} \wedge \mathbf{B}$ agit en poussant le plasma jusqu'à ce que la pression magnétique soit compensée par la pression cinétique du plasma. Ce qui mène au chauffage par effet Joule des électrons.

ii) la compression magnétique du plasma par le champ :

Le champ magnétique fait augmenter la pression du plasma d'une quantité égale à $B^2/4\pi$ dans la direction perpendiculaire au champ. Au fait, en plus de la pression thermique il y a la pression magnétique qui s'ajoute simplement à la pression totale du système. Si la pression magnétique dépasse la pression du plasma, le plasma sera comprimé par le champ.

Nous observons aussi que pour les trois profils de densité, de vitesse et de température, l'expansion est d'autant plus étendue quand le champ magnétique initial est plus élevé. En effet, le plasma par son énergie magnétique peut diffuser à travers les lignes du champ. Les mouvements transverses au champ sont possibles grâce à une vitesse de dérive égale à

$$v_D = c \frac{E \times B}{B^2}$$

mais ces mouvements sont beaucoup plus lents lorsque le champ magnétique devient plus intense. En MHD idéale où les collisions sont supposées rares, la vitesse de dérive existe grâce à la présence du champ électrique dans le milieu, elle est déduite de la relation

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}/c = 0$$

Cette vitesse qui est aussi la vitesse du plasma est indépendante de la charge et de la masse des particules : les électrons et les protons dérivent dans le même sens.

Ordres de grandeurs du champ magnétique

Nous avons remarqué dans nos calculs, qu'après une certaine valeur de \tilde{B}_0 à peine supérieure à un (aux environs de $1T$, pour des densités $\approx 10^9 cm^{-3}$), dépendant des conditions initiales de vitesse et de température, notre modèle ne marche plus. En effet, pour de très grandes valeurs du champ magnétique, la propagation du plasma est fortement dominée par les effets de ce champ qui inhibe ainsi l'expansion libre dans le vide. Par conséquent, les équations de la MHD telles données par notre modèle ne sont plus valables.

3.5 La limite classique

Dans le cas de la limite classique où la température varie entre $T \sim 10^6$ et $T \sim 10^3$, l'énergie thermique reste très faible par rapport à l'énergie de masse $\varepsilon \ll \varepsilon_0$, la vitesse $v \ll c$ et le rapport de Lorentz tend vers 1.

Dans ce cas les équations non-relativistes ont la forme suivante :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nv)}{\partial x} = 0 \tag{3.20}$$

$$mn \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial B^2}{\partial x} = 0 \tag{3.21}$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} \right) + T \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial(vB)}{\partial x} = 0 \quad (3.23)$$

La vitesse du son remplacera celle de la lumière dans les normalisations des variables.

Le vent solaire est l'exemple type d'expansion non-relativiste de particules de grandes vitesses provenant du soleil vers l'espace interplanétaire. Il est composé essentiellement de protons et d'électrons. Au voisinage de la terre, la vitesse du vent solaire est approximativement entre 300 and 1400km/s. Le vent solaire étant un plasma, il subit l'influence du champ magnétique solaire.

Un autre exemple de limite classique est un exemple de laboratoire concernant l'expansion d'un plasma produit par laser lors de l'irradiation d'une cible métallique par un faisceau laser lors des expériences de dépôt par laser pulsé PLD. Les même équations gèrent l'expansion mais sans champ magnétique et avec une vitesse supersonique. L'expansion est adiabatique et self-similaire [51].

Conclusion

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à l'étude de l'expansion d'un plasma relativiste constitué d'électrons et de protons, dans le vide. Ce plasma, complètement ionisé, est régi par les équations hydrodynamiques ou magnétohydrodynamiques en cas de présence de champ magnétique.

Ces équations sont déduites à partir des lois de conservation de la physique. Elles sont fermées avec une équation d'état non polytropique, qui décrit les températures relativistes ainsi que classiques et ultra-relativistes. En utilisant une transformation self-similaire, qui combine deux variables dans une seule, les systèmes d'équations différentielles partielles se transforment en des systèmes d'équations différentielles ordinaires. Ces derniers ont été résolus numériquement par la méthode de Runge-Kutta.

Dans le cas de l'expansion hydrodynamique pure, nous avons retrouvé les profils de densité, vitesse et température d'une expansion libre dans le vide. D'une façon générale, la densité et la température décroissent, ce qui est dû à l'écoulement et au refroidissement de la matière en expansion dans le vide, alors que la vitesse croît d'une façon monotone. La matière éjectée est accélérée jusqu'à ce que son énergie interne soit suffisamment convertie en énergie cinétique.

Pour tous les profils, l'expansion atteint son maximum à une valeur correspondant à la position où la solution self-similaire n'est plus valable. Cette valeur au-delà de laquelle des instabilités physiques apparaissent, est très sensible aux conditions initiales. Indépendamment des conditions initiales de la densité, pour une vitesse initiale donnée, plus la température initiale augmente, plus l'expansion self-similaire est étendue, alors que pour une température initiale fixée, plus la vitesse initiale est élevée, plus l'expansion self-similaire est réduite.

CONCLUSION

Nous avons aussi étudié l'effet du champ magnétique sur la dynamique de l'écoulement du plasma pour les valeurs initiales de densité, vitesse et température données et nous avons observé que plus la valeur du champ magnétique initial augmente, plus le plasma est décéléré et plus la densité augmente, ces phénomènes sont liés au confinement des particules par le champ. Nous avons constaté une augmentation de la température avec le champ magnétique, qui est due à l'effet du chauffage par effet Joule et à l'effet de la compression magnétique du plasma par le champ. Par contre et en comparaison avec le cas hydrodynamique pur correspondant à $B = 0$, la limite de l'expansion est beaucoup plus étendue, ce qui pourrait s'expliquer par le fait que les particules subissent un phénomène de diffusion à travers les lignes de champs par l'effet de la vitesse de dérive perpendiculaire au champ.

Les perspectives du présent mémoire sont nombreuses ; l'extension de l'étude de l'expansion à trois dimensions et l'introduction d'une topologie du champ magnétique plus complexe, plus réaliste, sont souhaitables. Il sera intéressant d'étudier l'expansion dans d'autres métriques, c'est-à-dire dans le cadre de la relativité générale. C'est encore plus intéressant si on tient compte de l'auto-gravité du fluide, avec cette étude, on pourra voir l'effet de la densité de masse sur l'expansion. Il reste aussi à étudier l'influence d'un milieu ambiant sur l'expansion du plasma, introduisant ainsi les ondes de choc qui peuvent s'y produire.

Bibliographie

- [1] I. Langmuir, *Physics* **14**, 697 (1928).
- [2] T. Lehner, *L'Etat de Plasma*, (Vuibert, France, 2004).
- [3] Z. Meliani, C. Sauty, N. Vlahakis, K. Tsinganos, and E. Trussoni, *Astronomy and Astrophysics* **447**, 797 (2006).
- [4] C. Sauty, J. J. G. Lima, N. Iro, and K. Tsinganos, *Astronomy and Astrophysics* **432**, 687 (2005).
- [5] C. Sauty, E. Trussoni, and K. Tsinganos, *Astronomy and Astrophysics* **421**, 797 (2004).
- [6] T. Csorgo, M. I. Nagy, and M. Csanad, *Brazilian Journal of Physics* **37**, 723 (2007).
- [7] T. J. M. Boyd and J. J. Sanderson, *The Physics of Plasmas*, (Cambridge University Press, 2003).
- [8] J. L. Delcroix and A. Bers, *Physique des Plasmas*, (Inter Editions-CNRS Editions, 1994).
- [9] [www.newlightsource.org/events/presentations/HEDS Workshop Woolsey.pdf](http://www.newlightsource.org/events/presentations/HEDS%20Workshop%20Woolsey.pdf).
- [10] F. Casse, *Du lancement de jet MHD au rayons cosmiques; La fonction de la turbulence magnétique*, PhD thesis, 2001.
- [11] C. Semay and B. Silvestre-Brac, *Relativité Restreinte*, (Dunod, Paris, 2005).
- [12] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, (Dunod, Paris, 1972).
- [13] J. Heidmann, *Introduction à la cosmologie*, (Presse Universitaire de France, 1973).
- [14] E. Belorizky, *Outils mathématiques*, (EDP Sciences, France, 2007).
- [15] M. Moisan and J. Pelletier, *Physique des Plasmas Collisionnels*, (EDP Sciences, 2006).

- [16] J. L. Synge, *The Relativistic Gas*, (Amsterdam, North-Holland, 1957).
- [17] F. Jüttner, Ann. Phys. **34**, 856 (1911).
- [18] I. F. Mirabel and L. F. Rodriguez, Ann. Rev. Astron. Astroph **37**, 409 (1999).
- [19] F. Peng, A. Konigl, and J. Granot, The Astrophysical Journal **626**, 966 (2005).
- [20] J. Zensus, J. Ann. Rev. Astron. Astroph. **35**, 607 (1997).
- [21] A. Siemiginowska et al., The Astrophysical Journal **657**, 145 (2007).
- [22] P. Meszaros, Ann. Rev. of Astron. and Astroph. **40**, 137 (2002).
- [23] J. M. Marti and E. Muller, Living. Rev. Relativity **6**, 7 (2003).
- [24] L. Sedov, Appl. Math. Mech. Leningrad **10**, 241 (1946).
- [25] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, (Pergamon Press, London, 1959).
- [26] R. D. Blandford and C. F. McKee, Mon. Not. R. Astron. Soc. **180**, 343 (1977).
- [27] V. I. Zhdanov and M.S.Borsh, J. Phys. Stud. **1**, 233 (2005).
- [28] N. Bucciantini, J. M. Blondin, L. D. Zanna, and E. Amato, Astronomy and Astrophysics **405**, 617 (2003).
- [29] Y. Mizuno, P. Hardee, D. H. Hartmann, K. I. Nishikawa, and B. Zhang, The Astrophysical Journal **672**, 72 (2008).
- [30] D. A. Fogaça and F. S. Navarra, Physics Letters B **645**, 408 (2007).
- [31] F. C. Michel, Ap and SS **15**, 153 (1972).
- [32] T. K. Das, Astronomy and Astrophysics **376**, 697 (2001).
- [33] G. R. Blumenthal and W. G. Mathews, The Astrophysical Journal **203**, 715 (1976).
- [34] D.Ryu, I. Chattopadhyay, and E. Choi, The Astrophysical Journal **166**, 210 (2006).
- [35] B. C. Low, The Astrophysical Journal **254**, 796 (1982).
- [36] C. Sack and H. Chamel, Phys. Rep. **156**, 323 (1987).
- [37] Y. B. Zel'dovich and Y. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamics Phenomena*, (Academic Press, New York, 1966).
- [38] F. Jędrzejewski, *Introduction aux méthodes numériques*, (Springer, Paris, 2001).
- [39] *Expansion self-similaire d'un plasma relativiste*, H. Bachi, D. Doumaz-Bennaceur et M. Djebli, 8^{ieme} Congrès National de la Physique et de ses Applications, Bejaia, du 11 au 13 Novembre 2008.

- [40] R. D. Hazeltine and S. M. Mahajan, *The Astrophysical Journal* **567**, 1262 (2002).
- [41] N. Vlahakis and A. Konigl, *The Astrophysical Journal* **596**, 1103 (2003).
- [42] A. Mizuta, T. Yamasaki, S. Nagataki, and S. Mineshige, *The Astrophysical Journal* **651**, 960 (2006).
- [43] S. Okada, K. Sato, and T. Sekiguchi, *Jpn. J. Appl. Phys.* **20**, 157 (1981).
- [44] B. H. Ripin et al., *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2299 (1987).
- [45] R. D. Sydora, J. S. Wagner, L. C. Lee, E. M. Wescott, and T. Tajima, *Phys. Fluids* **26**, 2986 (1983).
- [46] R. D. Blandford, *Mon. Not. of the Royal Astron* **176**, 465 (1976).
- [47] G. Benford, *Mon. Not. of the Royal Astron* **183**, 29 (1978).
- [48] K. L. Chan and R. N. Henriksen, *Astrophysical Journal* **241**, 534 (1980).
- [49] B. Somov, *Plasma Astrophysics, the Part I, Fundamentals and Practice*, (Springer, New York, 2006).
- [50] W. G. Mathews, *The Astrophys Journal* **165**, 147 (1971).
- [51] D. Bennaceur-Doumaz and M. Djebli, *Appl. Surf. Sci.* **255**, 4595 (2009).