

République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la recherche Scientifique
Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene
Faculté de Mathématiques



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister (ED)

EN: MATHEMATIQUES

Spécialité: systèmes dynamiques et Géométrie

Par: ZAIDI MESSAOUD

Sujet

Déformation thermoélastique d'une plaque épaisse par un poinçon rigide

Soutenu publiquement, le 14/09/2014, devant le jury composé de:

M/ R. Bebbouchi	Professeur	à	l'USTHB	Président
M/ B. Kebli	Professeur	à	ENP	Directeur de mémoire
M/ A. Kessi	Professeur	à	l'USTHB	Examineur
Mme/ T. Benzekri	Maître de Conférence/A	à	l'USTHB	Examinatrice

Remerciement

Je tiens à remercier le professeur B. Kebli pour avoir accepté de diriger ce travail.

Je remercie aussi le professeur R. Bebbouchi d'avoir accepté la présidence du jury.

Ainsi qu'aux professeurs A. Kessi, et M.C.A T. Benzekri pour avoir accepté de juger ce travail et faire partie du jury.

Je remercie aussi Mahdi Moukrane pour l'aider de Matlab, et Gaba Bahaa pour l'aider du schéma du word.

Dédicace

A mes parents, a Abderrahmane, mes soeurs,
mon frère Lazher, Professeur Yasmina Ladjadj.

Pour la mémoire et contre l'oubli.

For Fatima Ezzahraa peace be upon her.

Table des matières

Introduction

Chapitre: 1: Rappels Mathématiques

1.2. Équation de Bessel	03
1.2.1. Définition	03
1.2.2. Fonction de Bessel de première et de deuxième espèce	03
1.2.3. Orthogonalité de fonction de Bessel	07
1.2.4. Quelques relations de récurrence sur les fonctions de Bessel	09
1.3. La transformée de Hankel	09
1.3.1. Présentation	09
1.3.2. Définition	09
1.3.3. La transformée de Hankel de l'opérateur différentiel de Bessel	11
1.3. Équations intégrales linéaires	14
1.3.1. Définition	14
1.3.2. Équations intégrales de Fredholm	15
1.3.2.1. opérateur intégral de Fredholm	15
1.3.3. Quelques méthodes numériques des résolutions approchées	21

Chapitre: 2: Élasticité

2.1. Présentation	23
2.2. Notions d'élasticité linéaire	23
2.2.3. Contrainte normale et contrainte tangentielle	23
2.3. Problème particuliers d'élasticité plan	26
2.4. Loi générale de Hooke	26
2.5. Loi de Comportement	27
2.6. Problème axisymétrique	28

Chapitre: 3: Etude d'un problème thermoélastique

3.1. Formulation mathématiques du problème thermoélastique	29
3.2. Le problème thermique	31
3.2.1. Solution du problème thermique	31
3.2.2. La transformée de Hankel de Laplacienne	31
3.2.3 Les équations duales du problème thermique	35
3.2.4. Solution numérique du problème thermique	36
3.2.4.1. La transformée des équations duales du problème thermique	36
3.2.4.2. Graphes et tableaux du problème thermique	39
3.3. Le problème mécanique	41
3.3.1. Solution du problème mécanique	41
3.3.2. La transformée de Hankel du système de Lamé	42
3.3.3. La solution du système non homogène	48
3.3.4. La transformée de Hankel de la contrainte tangentielle	53
3.3.5. Les équations duales du problème mécanique	55
3.3.6. Solution numérique du problème mécanique	64
3.3.6.1. La transformée des équations duales du problème mécanique	64
3.3.6.2. Graphes et tableaux du problème mécanique	71
3.3.7. Résultats numériques et discussions	75

Conclusion

Bibliographie

Introduction

Dépuis toujours on sait qu'un corps solide soumis à l'action de forces extérieures subit des déformations ou des déplacements relatifs. Si les déformations sont petites, ne dépassant pas une certaine valeur limite, après enlèvement des forces extérieures, elles disparaissent. On dit que le corps est parfaitement élastique. De cette hypothèse toute la théorie de l'élasticité a été développée et utilisée depuis longtemps dans le calcul des structures[11].

Le développement de cette théorie à travers le temps est dû essentiellement à deux phénomènes importants:

- a) le progrès qu'à connu le monde de l'expérimentation sur le comportement des corps en déformation.
- b) le développement rapide des théories mathématiques qui ont permis de passer des principes physiques aux méthodes analytiques.

Les plus grandes découvertes qui ont beaucoup contribué au développement de la théorie de l'élasticité sont

- 1) La découverte de la loi de Hooke en 1660. Elle traduit la proportionnalité qui existe entre les contraintes et les déformations. C'est la base de toute la théorie de l'élasticité.
- 2) La formulation des équations générales par Navier en 1821 qui permettaient de réduire tous les problèmes des petites déformations des corps élastiques en un calcul mathématiques.
- 3) En 1822 Cauchy a découvert les plus grandes lignes de la théorie pure de l'élasticité. Il a introduit la notion de contrainte en un point exprimée comme étant une traction par unité de surface.

La théorie de l'élasticité repose donc sur la détermination d'un état de contraintes ou de déformations à l'intérieur d'un corps solide soumis à des forces de volume ou à des forces de surface. La détermination de cet état revenait généralement à la recherche de certaines fonctions représentant les composantes de déplacement. Ces fonctions doivent satisfaire les équations d'équilibre en tout point du corps et aussi satisfaire certaines conditions aux limites de ce corps, ces fonctions s'appellent les fonctions harmoniques. Actuellement, les solutions de la majorité des problèmes rencontrés sont connues et les méthodes numériques découvertes récemment avec le développement de l'outil informatique viennent confirmer ces solutions[11].

Olesiak et Sneddon[18] ont étudié un problème thermoélastique d'un milieu infini contenant une fissure où le flux prend deux cas.

Dans le premier cas le flux de la température est une constante.

Dans le second cas le flux est supposé comme une fonction radiale sous forme d'une série de Fourier-Bessel.

S. Dhaliwal[15] a étudié un problème thermoélastique d'une plaque épaisse où le flux de la température a été imposé sur une face circulaire. La solution est obtenue par la méthode classique.

M. Sakamoto[13] a étudié le problème axisymétrique d'une plaque épaisse élastique isotrope contenant une fissure circulaire sous une pression interne uniforme. L'étude considère que les deux cas où le contact est lisse et libre de charge.

Sakamoto et Kobayashi[14] ont proposé une approche différente pour résoudre des problèmes élastiques avec des conditions mixtes. Ils ont réduit les équations intégrales duales directement à un système infini d'équations algébriques à l'aide de la formule de Gegenbauer. Ils ont étudié la déformation d'une plaque épaisse reposant sur une fondation rigide avec un trou circulaire par un poinçon infini. Le problème du poinçon infini avec un trou circulaire est également étudié par les mêmes auteurs.

D'après la méthode proposée par Sakamoto dans le cas élastostatique on détermine la solution du système des équations intégrales duales sous la forme d'un développement en séries, dont les coefficients inconnus s'obtiennent par la résolution d'un système algébrique infini. L'étape de la transformation consiste dans l'utilisation de la formule de Gegenbauer.

On s'intéresse au problème de déformation thermoélastique sous l'effet de la température et subissant des contraintes mécaniques d'une plaque épaisse élastique d'épaisseur h . Cette plaque se déforme par l'application sur la face supérieure d'un poinçon circulaire rigide et chauffé. On suppose que le contact entre les deux faces est lisse. La face intérieure est thermiquement isolée.

Dans la première partie du travail (le problème thermique), on détermine la température par la résolution de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques dans le cas axisymétrique. Par la transformation de Hankel d'ordre zéro de cette équation, on obtient une équation différentielle ordinaire, en exprimant les deux inconnues, l'une en fonction de l'autre en vérifiant la condition limite. Les conditions mixtes permettent de ramener le problème à un système d'équations intégrales duales.

Dans la deuxième partie du travail (le problème mécanique), le problème étudié est le système de Lamé en coordonnées cylindriques dans le cas axisymétrique dont les inconnues sont les deux composantes du vecteur déplacement u et w solution du système d'équilibre de Lamé. La température intervenant dans la

résolution du problème est déjà calculée dans la première partie du travail (le problème thermique).

Par la méthode de la transformation intégrale de Henkel on réduit le système de Lamé (système d'équilibre) à un système différentiel ordinaire. Ayant obtenu la solution par la méthode classique, les quatre inconnues du problème s'obtiennent en vérifiant les conditions aux limites. Les conditions mixtes permettent le calcul de l'inconnue restante sous forme d'un système d'équations intégrales duales. La résolution de ce dernier système consiste à développer la fonction sous forme d'une série de fonction de Bessel. Par suite les coefficients se ramènent à la résolution d'un système algébrique infini. Ce système se résout par la méthode de troncation.

1. Rappels Mathématiques

1.2 Équation de Bessel

1.2.1 Définition

L'équation de Bessel est un cas particulier de l'équation généralisée du type

$$y'' + \frac{P_1(x)}{Q(x)}y' + \frac{P_2(x)}{Q^2(x)}y = 0$$

dans la quelle $Q(x)$ et $P_2(x)$ sont des polynômes de degré non supérieur à 2 et $P_1(x)$ un polynôme de degré non supérieur à 1.

Avec $Q(x) = x$ et $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = x^2 - \nu^2$, l'équation de Bessel dans sa forme standard est

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{1.1}$$

où ν est une constante pas nécessairement entière appelée ordre de l'équation de Bessel.

1.2.2 Fonctions de Bessel de première et de deuxième espèce

1.2.2.1 Résolution formelle

On voit facilement que $x_0 = 0$ est un point singulier régulier de l'équation de Bessel. Alors cherchons une solution sous la forme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+r} \quad (1.2)$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

En remplaçant dans l'équation (1.1) et en égalant à zéro tous les termes de même degré, on obtient

$$\begin{cases} a_0 (r^2 - \nu^2) = 0 & n = 0 \\ a_1 [(r+1)^2 - \nu^2] = 0 & n = 1 \\ a_n [(n+r)^2 - \nu^2] + a_{n-2} = 0 & n \geq 2 \end{cases} \quad (1.3)$$

A condition d'avoir $a_0 \neq 0$ l'équation 3 de (1.3) nous permet d'obtenir a_n en fonction de a_{n-2} . D'autre part l'équation (1) de (1.3) nous montre que $r = \pm\nu$; si ν est réel nous supposons que $\nu > 0$ et s'il est complexe que $\text{Re}\nu > 0$. Examinons les deux cas possibles

Nous voyons que si $r = \nu$, d'après l'équation (2), $a_1 = 0$ et l'équation (3) de (1.3) montre que les coefficients avec n impair sont tous nuls. En posant $n = 2m$, on a

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(1+\nu)} = -\frac{a_0\Gamma(1+\nu)}{2^2\Gamma(2+\nu)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2.4(\nu+2)} = \frac{a_0}{2.2^4(\nu+1)(\nu+2)} = \frac{a_0\Gamma(1+\nu)}{2.2^4\Gamma(3+\nu)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{3.4(\nu+3)} = -\frac{a_0}{3!2^6(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} = -\frac{a_0\Gamma(1+\nu)}{3!2^6\Gamma(4+\nu)}$$

et, d'une manière générale,

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m}m!(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+m)} = (-1)^m \frac{a_0\nu!}{2^{2m}m!(\nu+m)!}$$

où $\Gamma(z)$ et la fonction Gamma définie par l'intégrale suivante

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Par définition la fonction de Bessel de première espèce d'ordre ν , $J_\nu(x)$ est celle qui correspond à la valeur arbitraire $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1+\nu)} = \frac{1}{2^\nu \nu!}$. Donc

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{1}{m! (\nu + m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m} \quad (1.4)$$

Si ν est un réel positif non entier et $x > 0$

Les deux fonctions $J_\nu(x)$ et $J_{-\nu}(x)$ sont deux solutions particulières de l'équation de Bessel. De plus, comme ν est un réel positif non entier, $\lim_{x \rightarrow 0} J_\nu(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} J_{-\nu}(x) = +\infty$, $x \rightarrow 0$ elle ne sont donc pas proportionnelles, elles forment une base.

La solution générale de l'équation de Bessel est alors:

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x)$$

où A et B sont deux constantes arbitraires.

Si ν est un entier $n > 0$, l'équation (1.4) s'écrit

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{1}{m! (m - n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}$$

Posant $m - n = k$, on a

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{n+k} \frac{1}{k! (n + k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

Par suite

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k! (n + k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

Alors les deux fonctions J_n et J_{-n} sont reliées par la relation suivante

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

Donc pour ν un entier, les deux fonctions J_n et J_{-n} sont proportionnelles et ne forment pas une base de l'espace vectoriel des solutions. On doit donc construire une autre solution particulière de l'équation de Bessel.

Considérons la fonction

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

Si ν n'est pas un nombre entier, la fonction $Y_\nu(x)$ est une solution particulière de l'équation de Bessel. Pour ν entier $Y_\nu(x)$ prend une forme indéterminée.

La règle de l'Hôpital permet de lever cette indétermination et on a

$$Y_n(x) = \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \right]$$

$$Y_n(x) = \left[\frac{-\sin(\nu\pi) J_\nu(x)}{\cos(\nu\pi)} + \frac{1}{\pi} \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - \frac{1}{\pi \cos(\nu\pi)} \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}$$

par suite

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}$$

C'est pour cette raison que $Y_n(x)$ est utilisée. Elle est valable pour tout ν . Alors la solution générale de l'équation de Bessel est donnée par:

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x)$$

où A et B sont deux constantes arbitraires.

Les solutions de l'équation de Bessel sont appelées fonctions de Bessel de première et de deuxième espèce. La solution finie à l'origine et notée $J_\nu(x)$ est appelée fonction de Bessel de première espèce et la seconde solution notée $Y_\nu(x)$ est appelée fonction de Bessel de deuxième espèce.

Si ν et un nombre entier n , on a

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\div\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} \quad (1.5)$$

et en particulier pour $n = 0$ on obtient la fonction de Bessel d'ordre zéro

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\div\infty} (-1)^m \frac{1}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \quad (1.6)$$

Si $r = -\nu$, les coefficients pairs a_{2m} , a_{2m-2} , sont liés par

$$a_{2m} [2m(2m - 2\nu)] + a_{2m-2} = 0$$

et les coefficients impairs

$$a_{2m+1} [(2m+1)(2m+1 - 2\nu)] + a_{2m-1} = 0$$

En particulier $a_1(1 - 2\nu) = 0$ et si $\nu \neq \frac{1}{2}$, $a_1 = 0$ et tous les coefficients impairs a_{2m+1} sont nuls. Pour $\nu = \frac{1}{2}$, a_1 est indéterminé mais peut être choisi nul. Notons que si ν est égal à la moitié d'un nombre impair, $\nu = \frac{(2k+1)}{2}$, les coefficients impairs ne sont pas nécessairement nuls à partir de $m = k$, mais peuvent être choisis nuls.

Un calcul identique à celui mené dans le cas où $r = \nu$, conduit en prenant $a_0 = \frac{1}{[2^{-\nu}(-\nu)!]}$ à

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\div\infty} (-1)^m \frac{1}{m!(m-\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu}$$

Cette expression est valable à condition que ν soit différent d'un entier car alors $(-\nu)!$ n'a pas de sens.

1.2.3 Orthogonalité de fonction de Bessel

On va montrer que

$$\int_0^1 x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx = 0 \quad (1.7)$$

Posons

$$\phi_1(x) = J_n(\lambda x)$$

et la solution de l'équation de Bessel

$$x(xy')' + (\lambda^2 x^2 - n^2)y = 0 \quad (1.8)$$

Posons

$$\phi_2(x) = J_n(\mu x)$$

la solution de l'équation de Bessel

$$x(xy')' + (\mu^2 x^2 - n^2)y = 0 \quad (1.9)$$

Multiplions (1.8) par $\phi_2(x)$ et (1.9) par $\phi_1(x)$. Soustrayons les deux équations (1, 8) et (1, 9) et en simplifiant par x on obtient

$$\phi_2(x) [x\phi_1'(x)]' - \phi_1(x) [x\phi_2'(x)]' + (\lambda^2 - \mu^2)x\phi_1(x)\phi_2(x) = 0 \quad (1.10)$$

En remarquant que

$$\phi_2(x) [x\phi_1'(x)]' - \phi_1(x) [x\phi_2'(x)]' = \frac{d}{dx} [\phi_2(x)x\phi_1'(x) - \phi_1(x)x\phi_2'(x)]$$

Par suite en intégrant (1.10) on obtient

$$[\phi_2(x)x\phi_1'(x) - \phi_1(x)x\phi_2'(x)]_0^1 + (\lambda^2 - \mu^2) \int_0^1 x\phi_1(x)\phi_2(x) dx = 0 \quad (1.11)$$

Le terme $[\phi_2(x)x\phi_1'(x) - \phi_1(x)x\phi_2'(x)]_0^1 = [x(J_n(\mu x)\lambda J_n'(\lambda x) - J_n(\lambda x)\mu J_n'(\mu x))]_0^1 = J_n(\mu)\lambda J_n'(\lambda) - J_n(\lambda)\mu J_n'(\mu) = 0$

car il est nul pour $x = 0$ et que pour $x = 1$, $J_n(\lambda) = J_n(\mu) = 0$ car λ et μ sont racines de $J_n(x)$. Alors (1.11) devient

$$(\lambda^2 - \mu^2) \int_0^1 x \phi_1(x) \phi_2(x) dx = (\lambda^2 - \mu^2) \int_0^1 x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx = 0$$

Si λ et μ sont deux racines distinctes de $J_n(x)$, alors on trouve

$$\int_0^1 x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx = 0$$

1.2.4 Quelques relations de récurrence sur les fonctions de Bessel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x J_\nu(x)] &= x^\nu J_{\nu-1}(x) \\ \frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] &= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \\ \frac{d}{dr} [\lambda r J'_n(\lambda r)] &= -r \left[\lambda^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] J_n(\lambda r) \\ J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) \\ J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) &= 2J'_\nu(x) \\ x \frac{d}{dx} [x J'_n(x)] &= [n^2 - x^2] J_n(x) \end{aligned} \tag{1.12}$$

1.3 Transformée de Hankel

1.3.1 Présentation

Les transformées de Hankel sont des transformations intégrales dont les noyaux sont des fonctions de Bessel. La transformée de Hankel transforme des équations aux dérivées partielles en coordonnées cylindriques en des équations différentielles ordinaires. La transformée de Hankel est la transformée de Fourier à deux dimensions. Elle joue un rôle important dans des plusieurs problèmes.

1.3.2 Définition

La transformation de Hankel d'ordre n d'une fonction f est définie par

$$H_n[f(r)] = \bar{f}_n(\lambda) = \int_0^{+\infty} r f(r) J_n(\lambda r) dr \tag{1.13}$$

où J_n est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n .

La fonction f est définie de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{C}

Exemples

Soit la fonction $f(r) = \frac{\sin(r)}{r}$

D'après la définition (1.13), la transformée de Henkel d'ordre zéro de f est donnée par:

$$H_0[f(r)] = \bar{f}_0(\lambda) = \int_0^{+\infty} r f(r) J_0(\lambda r) dr$$

Donc

$$H_0[f(r)] = \int_0^{+\infty} r \frac{\sin(r)}{r} J_0(\lambda r) dr$$

Par suite

$$H_0[f(r)] = \int_0^{+\infty} \sin(r) J_0(\lambda r) dr$$

En tenant compte de la relation:

$$\int_0^{+\infty} \sin(ar) J_0(\lambda r) dr = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2 - \lambda^2}}, & \lambda < a \\ 0, & \lambda > a \end{cases}$$

Alors pour $a = 1$, la transformée de Henkel d'ordre zéro de f est la suivante:

$$H_0[f(r)] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}}, & \lambda < 1 \\ 0, & \lambda > 1 \end{cases} \quad (1.14)$$

Pour $f(r) = \frac{\sin(r)}{r^2}$

Sa transformée de Henkel d'ordre zéro est définie comme:

$$H_0[f(r)] = \int_0^{+\infty} r \frac{\sin(r)}{r^2} J_0(\lambda r) dr$$

Alors

$$H_0 [f (r)] = \int_0^{+\infty} \frac{\sin (r)}{r} J_0 (\lambda r) dr$$

En tenant compte de la relation suivante:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin (br)}{r} J_0 (\lambda r) dr = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \lambda < 1 \\ \arcsin \left(\frac{1}{\lambda} \right), & \lambda > 1 \end{cases} \quad (1.15)$$

Pour $b = 1$, on obtient la transformée de Henkel d'ordre zéro de f comme:

$$H_0 [f (r)] = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \lambda < 1 \\ \arcsin \left(\frac{1}{\lambda} \right), & \lambda > 1 \end{cases}$$

1.3.3 La transformée de Hankel de l'opérateur différentiel de Bessel

L'opérateur différentiel de Bessel d'ordre n est donnée par

$$\Delta_n f (r) = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \right] f (r) \quad (1.16)$$

Soit $f (r)$ une fonction arbitraire avec la propriété $\lim_{r \rightarrow +\infty} f (r) = 0$,

Le but est de démontrer la relation suivante:

$$H_n [\Delta_n f (r)] = -\lambda^2 H_n [f (r)] \quad (1.17)$$

Démonstration:

D'après (1, 13), il devient

$$\begin{aligned} H_n [\Delta_n f (r)] &= \int_0^{+\infty} r \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} f (r) \right] J_n (\lambda r) dr \\ &= \int_0^{+\infty} r \left[f'' (r) + \frac{f' (r)}{r} - \frac{n^2}{r^2} f (r) \right] J_n (\lambda r) dr \end{aligned}$$

On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} f(r) = \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} f(r)$$

Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} f(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} f(r) \quad (1.18)$$

Alors

$$H_n \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} f(r) \right] = H_n \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} f(r) \right]$$

C'est à dire

$$H_n [\Delta_n f(r)] = \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) \right] r J_n(\lambda r) dr - \int_0^{+\infty} \left[\frac{n^2}{r^2} f(r) \right] r J_n(\lambda r) dr$$

Une intégration par parties pour l'intégrale suivante:

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) \right] r J_n(\lambda r) dr$$

On a

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) \right] r J_n(\lambda r) dr = \left[r \left(\frac{df}{dr} \right) J_n(\lambda r) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \lambda r \frac{df}{dr} J_n'(\lambda r) dr$$

Les transformations soient valables pour $rf \rightarrow 0$ et $rf' \rightarrow 0$ quant $r \rightarrow +\infty$

Et aussi pour l'intégrale suivante:

$$\int_0^{+\infty} \lambda r \frac{df}{dr} J_n'(\lambda r) dr$$

On a

$$\int_0^{+\infty} \lambda r \frac{df}{dr} J'_n(\lambda r) dr = - \left[\lambda r f(r) J'_n(\lambda r) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{d}{dr} [\lambda r J'_n(\lambda r)] f(r) dr$$

On utilise la relation suivante:

$$\frac{d}{dr} [\lambda r J'_n(\lambda r)] = -r \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) J_n(\lambda r)$$

Par suite

$$\int_0^{+\infty} \lambda r \frac{df}{dr} J'_n(\lambda r) dr = - \int_0^{+\infty} r \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) J_n(\lambda r) f(r) dr$$

On trouve

$$\int_0^{+\infty} \lambda r \frac{df}{dr} J'_n(\lambda r) dr = -\lambda^2 \int_0^{+\infty} r f(r) J_n(\lambda r) dr + \int_0^{+\infty} \frac{n^2}{r^2} r f(r) J_n(\lambda r) dr$$

Ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) \right] r J_n(\lambda r) dr = -\lambda^2 \int_0^{+\infty} r f(r) J_n(\lambda r) dr + \int_0^{+\infty} \frac{n^2}{r^2} r f(r) J_n(\lambda r) dr$$

Dans ce cas on obtient

$$H_n [\Delta_n f(r)] = -\lambda^2 \int_0^{+\infty} r f(r) J_n(\lambda r) dr + \int_0^{+\infty} \frac{n^2}{r} f(r) J_n(\lambda r) dr - \int_0^{+\infty} \frac{n^2}{r} f(r) J_n(\lambda r) dr$$

Alors

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} f(r) \right] r J_n(\lambda r) dr = -\lambda^2 \int_0^{+\infty} r f(r) J_n(\lambda r) dr$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} f(r) \right] r J_n(\lambda r) dr = -\lambda^2 H_n[f(r)] \quad (1.19)$$

C'est à dire

$$H_n[\Delta_n f(r)] = -\lambda^2 H_n[f(r)]$$

On remarque ainsi que si la transformation de Fourier diagonalisait l'opérateur de dérivation, la transformation de Hankel ne diagonalise que l'opérateur Laplacien bidimensionnel Δ^2 . La transformation de Hankel est l'équivalent de la transformation de Fourier pour des géométries de révolution. Elle est fondée sur les fonctions de Bessel solutions de

Laplacien en coordonnées cylindriques. La fonction de Bessel $J_n(r)$ est la solution de l'équation de Bessel suivante

$$\partial_{rr} J_n + \frac{1}{r} \partial_r J_n + \left(1 + \frac{n^2}{r^2} \right) J_n = 0$$

où

$$J_n(r) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(n+m+1)} \left(\frac{r}{2} \right)^{2m+n}$$

1.4 Equations intégrales linéaires

1.4.1 Définition

On appelle équation intégrale une équation, qui contient la fonction inconnue sous le signe d'intégration. Telle est, par exemple, l'équation

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t) \phi(t) dt + f(x) \quad (1.20)$$

où f et K sont des fonctions continues et ϕ est la fonction inconnue. Les variables x et t parcourent ici un segment donné $[a, b]$. La particularité caractéristique de l'équation (1.20) réside dans sa linéarité: elle est linéaire par rapport à la fonction inconnue ϕ .

L'équation (1.20) s'appelle équation de Fredholm de deuxième espèce.

L'équation qui contient la fonction inconnue ϕ seulement sous le signe d'intégration s'appelle équation de Fredholm de première espèce.

$$\int_a^b K(x, t) \phi(t) dt + f(x) = 0 \quad (1.21)$$

Il est clair que l'équation de Volterra peut être considérée comme une équation de Fredholm où la fonction K vérifie la condition

$$K(x, t) = 0 \text{ pour } t > x$$

Mais il est plus raisonnable de ranger les équations du type de Volterra en une classe spéciale, car elle possèdent des propriétés qui n'ont pas lieu pour des équations de Fredholm arbitraires.

Si dans les équations (1.20), (1.21) la fonction f est nulle, on dit qu'une telle équation est homogène. Dans le cas contraire l'équation est dite non homogène.

1.4.2 Equations intégrales de Fredholm

1.4.2.1 Opérateur intégral de Fredholm

Dans ce paragraphe nous allons étudier les équations de Fredholm de deuxième espèce, c-à-d, les équations de la forme

$$\phi(x) = \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt + f(x) \quad (1.22)$$

où la fonction K est le noyau de cette équation, sera supposée mesurable et appartenant à la classe L_2 sur $x \in [a, b]$ et $t \in [a, b]$

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt < +\infty \quad (1.23)$$

Dans l'équation (1.20) f est une fonction donnée et ϕ est la fonction inconnue, toutes les deux appartenant à $L_2[a, b]$. Les noyaux appartenant à la classe L_2 s'appellent noyaux de Hilbert-Schmidt. Associons à l'équation (1.20) l'opérateur A défini par l'égalité

$$A\phi = \Psi$$

qui se traduit par

$$\int_a^b K(x, t) \phi(t) dt = \Psi(x) \quad (1.24)$$

Tout opérateur de la forme (1.24) s'appelle opérateur de Fredholm. Si en outre, le noyau $K(x, t)$ vérifie la condition (1.23), un tel opérateur est dit opérateur de Hilbert-Schmidt. Il est évident que l'étude de l'équation (1.20) se réduit à l'étude des propriétés de cet opérateur.

Théoreme1: L'égalité (1.24), où $K(x, t)$ est une fonction à carré intégrable, définit dans l'espace $L_2[a, b]$ un opérateur linéaire compact A dont la norme vérifie l'inégalité

$$\|A\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt} \quad (1.25)$$

Théoreme2: Soit A l'opérateur de Hilbert-Schmidt défini par le noyau $K(x, t)$. Alors son adjoint A^* est défini par le noyau adjoint $\bar{K}(t, x)$.

1.4.2.2 Equations à noyau symétrique

Considérons l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce

$$\phi(x) = \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt + f(x) \quad (1.26)$$

dont le noyau vérifie les conditions $\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt \leq +\infty$ et $\bar{K}(t, x) = K(x, t)$

Nous dirons qu'une telle équation est à noyau symétrique. D'après les théorèmes 1 et 2, l'opérateur de Fredholm correspondant

$$A\phi = \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt \quad (1.27)$$

est compact et auto-adjoint. Par conséquent, il vérifie les conditions du théorème de Hilbert-Schmidt. Appliquons ce théorème pour trouver les solutions de l'équation (1.26), il est naturel d'écrire l'équation (1.26) symboliquement sous la forme

$$\phi = A\phi + f \quad (1.28)$$

D'après le théorème de Hilbert-Schmidt, il existe pour A un système orthonormé de fonctions propres $\{\phi_n\}$ correspondant aux valeurs propres non

nelles $\{\lambda_n\}$, tel que chaque élément ξ de L_2 peut s'écrire sous la forme

$$\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \Psi_n + \xi', \text{ où } A\xi' = 0$$

Posons

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \Psi_n + f', \text{ où } Af' = 0 \quad (1.29)$$

et cherchons la solution ϕ de l'équation (1.28) sous la forme

$$\phi = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \Psi_n + \phi', \text{ où } A\phi' = 0 \quad (1.30)$$

En portant les développements (1.29) et (1.30) dans l'équation (1.28), on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \Psi_n + \phi' = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \lambda_n \Psi_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \Psi_n + f'$$

Cette égalité est vérifiée si, et seulement si,

$$f' = \phi' \text{ et } x_n (1 - \lambda_n) = b_n, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

c-à-d. si

$$x_n = \frac{b_n}{1 - \lambda_n} \text{ pour } \lambda_n \neq 1$$

$$b_n = 0 \text{ pour } \lambda_n = 1$$

La dernière égalité fournit la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1.28) soit résoluble. Les coordonnées x_n correspondant aux n pour lesquels $\lambda_n = 1$ sont arbitraires. Ainsi on obtient le résultat suivant.

Théoreme 4

Si 1 n'est pas une valeur propre de l'opérateur A , alors l'équation (1.28) admet pour toute f une solution et une seule. Si, par contre, 1 est une valeur

propre de l'opérateur A , l'équation (1.28) est résoluble si, et seulement si, la fonction f est orthogonale à toutes les fonctions propres de l'opérateur A qui correspondent à la valeur propre 1. Si cette dernière condition est vérifiée, l'équation (1.28) a une infinité de solutions.

1.4.2.3. Equations à noyaux dégénérés

Passons maintenant à l'étude des équations de Fredholm de deuxième espèce dont les noyaux sont soumis à la condition

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt < +\infty$$

qui assure la compacité de l'opérateur

Considérons l'équation

$$\phi(x) = \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt + f(x) \quad (1.31)$$

dont le noyau est supposé dégénéré, c-à-d de la forme

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^n P_i(x) Q_i(t) \quad (1.32)$$

où P_i et Q_i sont des fonctions de L_2 . L'opérateur défini par un noyau de la forme (1.32) fait correspondre à toute fonction $\phi \in L_2$ la somme

$$\sum_{i=1}^n P_i(x) \int_a^b Q_i(t) \phi(t) dt$$

c-à-d, un élément du sous-espace de dimension finie, engendré par les fonctions P_i , $i = 1, 2, \dots, n$. On remarquera que dans (1.32) les fonctions P_1, \dots, P_n peuvent être considérées comme linéairement indépendantes. En effet, s'il n'en est pas ainsi, on metton chacune des fonctions P_i sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions linéairement indépendantes.

En remplaçant l'équation (1.32) dans (1.31), on obtient

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x) \int_a^b Q_i(t) \phi(t) dt + f(x) \quad (1.33)$$

Avec les notations

$$\int_a^b Q_i(t) \phi(t) dt = q_i$$

écrivons l'équation (1.33) sous la forme

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n q_i P_i(x) + f(x)$$

En substituant cette expression à ϕ dans l'équation (1.31), on obtient

$$\sum_{i=1}^n q_i P_i(x) + f(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x) \int_a^b Q_i(t) \left[\sum_{j=1}^n q_j P_j(t) + f(t) \right] dt + f(x) \quad (\mathbf{1.34})$$

En posant

$$\int_a^b Q_i(t) P_j(t) dt = a_{ij}, \quad \int_a^b Q_i(t) f(t) dt = b_i$$

écrivons l'égalité (1.34) sous la forme

$$\sum_{i=1}^n q_i P_i(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x) \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j + b_i \right]$$

Comme les fonctions P_i sont, par hypothèse, linéairement indépendantes, on en déduit l'égalité des coefficients correspondants

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j + b_i = q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\mathbf{1.35})$$

Nous avons ainsi obtenu un système d'équations linéaires par rapport aux coefficients q_i . En le résolvant, nous trouverons la fonction

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n q_i P_i(x) + f(x)$$

Cette fonction satisfait à l'équation intégrale (1.31), car tous les calculs que nous avons fait pour passer de l'équation (1.31) au système (1.35) peuvent se faire dans le sens inverse.

Ainsi, la résolution d'une équation intégrale à noyau dégénéré se ramène à la résolution du système correspondant (1.35) d'équations algébriques linéaires.

1.4.2.4 Equations à noyaux non dégénérés

Considérons de nouveau l'équation

$$\phi(x) = \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt + f(x) \quad (1.36)$$

mais cette fois nous soumettrons son noyau à la seule condition de Hilbert-Schmidt

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt < +\infty$$

pour assurer la compacité de l'opérateur.

Sans exiger que ce noyau soit dégénéré, ni qu'il soit symétrique. Nous nous intéresserons aux conditions de résolubilité de l'équation (1.36) et aux propriétés de ses solutions. L'essentiel pour nous sera la propriété de compacité de l'opérateur correspondant à l'équation (1.36) et non sa représentation intégrale. Pour cette raison, dans la suite nous construirons tous nos raisonnements à partir de l'équation opératorielle.

$$\phi = A\phi + f \quad (1.37)$$

En supposant que A est un opérateur compact arbitraire dans un espace de Hilbert H .

En posant $T = I - A$

où I est l'opérateur identique, écrivons l'équation (1.37) sous la forme

$$T\phi = f \quad (1.38)$$

A côté de cette équation considérons encore l'équation homogène

$$T\phi_0 = 0 \quad (1.39)$$

et les équations adjointes

$$T^* \Psi = g \quad (1.40)$$

$$T^* \Psi_0 = 0 \quad (1.41)$$

$T^* = I - A^*$. La liaison entre les propriétés des solutions de ces quatre équations se traduit par les assertions dites théorème de Fredholm.

1.4.3 Quelles méthodes numériques des résolutions approchées des équations intégrales

1.4.3.1 Méthode des approximations successives

On cherche la solution approximative comme suit

$$\Psi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \Psi_{n-1}(t) dt \quad (1.42)$$

où f et K sont des fonctions données et λ un paramètre réel

On choisit $\Psi_0(x) = f(x)$

La suite itérative (Ψ_n) converge vers Ψ si $|\lambda| \leq M$ où $M = \frac{1}{\|K\|_2}$

Tel que

$$\|K\|_2 = \left[\int_a^b dx \int_a^b |K(x, t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

1.4.3.2 Méthode de la résolvante

Soit l'équation intégrale

$$\phi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt + f(x)$$

où λ est un paramètre réel, et $K(x, t)$ le noyau de l'équation intégrale.

Posons

$$\phi_n(x) \rightarrow \phi(x) \text{ l'orsque } n \rightarrow +\infty \text{ et } \phi_0(x) = f(x)$$

Alors

$$\phi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt$$

$$\phi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \left(f(t) + \lambda \int_a^b K(t, r) f(r) dr \right) dt$$

Par suite

$$\phi_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^n \lambda^m \int_a^b K_m(x, t) f(t) dt$$

Finalement par récurrence on obtient

$$\phi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{m=1}^n \lambda^{m-1} K_m(x, t) f(t) dt$$

où le noyau itéré K_m est donné par

$$K_m(x, t) = \begin{cases} K(x, t), & m = 1 \\ \int_a^b K(x, r) K_{m-1}(r, t) dr, & m = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Posons

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, t)$$

Alors la solution de l'équation intégrale l'orsque $n \rightarrow +\infty$ et

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t, \lambda) f(t) dt$$

a condition que

$$|\lambda| < \frac{1}{\|K\|_2}$$

La fonction R ainsi définie est appelé résolvante de l'équation intégrale

2 Élasticité

2.1 Présentation

La théorie de l'élasticité étudie les déplacements, les déformations et les contraintes dans un solide soumis à des forces extérieures.

2.2 Notions d'élasticité linéaire

2.2.1 Définition de l'état de contrainte

L'état de contrainte est l'ensemble des forces de réaction qui se développent à l'intérieur d'un corps sous l'effet de charges extérieures.

2.2.2 Vecteur contrainte

Considérons un point M du solide. Soit dS un élément infinitésimal de la surface S entourant M et \vec{n} le vecteur unitaire, perpendiculaire en M à S .

Soit $d\vec{F}$ la force qui s'exerce sur cette facette. On appelle $T(M, \vec{n})$ vecteur contrainte en M dans la direction \vec{n} .

$$T(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{dS}$$

2.2.3 Contrainte normale et contrainte tangentielle

Le vecteur contrainte peut être décomposé en sa composante suivant \vec{n} et sa projection sur la facette.

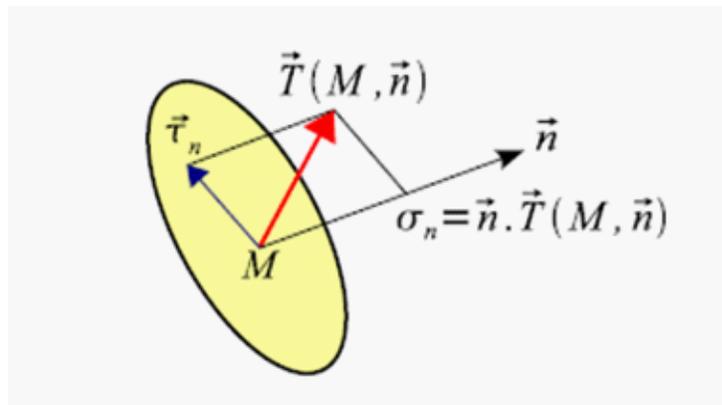


Fig 1: Vecteur contrainte sur la facette n en M

Remarque

Généralement, on appelle facette le plan tangent en M au domaine étudié. On peut alors définir la contrainte normale σ_n comme étant la projection sur la

direction de la normale \vec{n} du vecteur contrainte $T(M, \vec{n})$.

De même on a le vecteur contrainte tangentielle $\vec{\tau}_n$ qui représente le vecteur contrainte projeté dans le plan de la facette.

Alors d'après la définition du vecteur contrainte, on conçoit relativement

bien la relation suivante:

$$T(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n$$

Une contrainte normale positive traduit localement un état de traction de la matière. Si elle est négative, nous avons localement un état de compression.

Si $\tau = 0$, on dit que la facette est soumise à de la traction pure si σ est positive ou de la compression pure si σ est négative.

Si $\sigma = 0$ et $\tau \neq 0$ on dit que la facette est soumise un cisaillement pur, et si $\sigma = 0$ et $\tau = 0$ on dit que la facette est libre.

La contrainte normale et la contrainte de cisaillement se calculent comme suit à partir de $T(M, \vec{n})$:

$$\sigma = T(M, \vec{n}) \cdot \vec{n} , \quad \vec{\tau}_n = T(M, \vec{n}) - \sigma \vec{n}$$

Alors que τ est toujours supérieure ou égal à zéro puisqu'il s'agit du module de $\vec{\tau}_n$.

2.2.4 Vecteur déplacement

Le volume occupé par le solide à l'instant t est noté C_t et appelé configuration courante. La configuration initiale C_0 est la configuration de référence. Le point M_0 de la configuration initiale passé au point M_t de la configuration courante. Le solide passe d'une configuration initiale C_0 à une configuration C_t à l'instant t .

$$\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

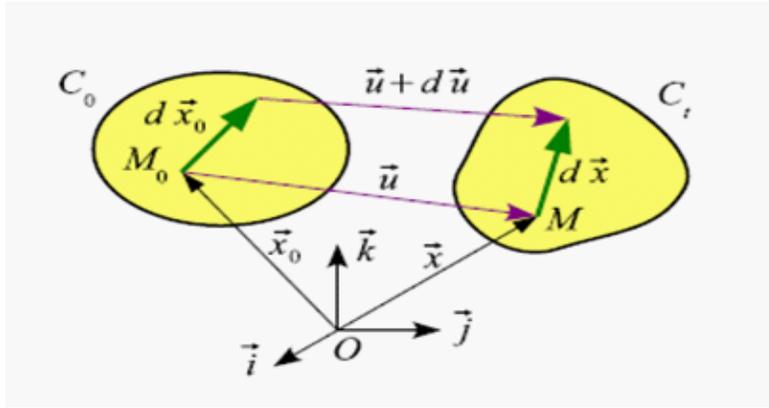


Fig 2: Transformation d'un point et d'un vecteur

On appelle vecteur déplacement du point M_0 le vecteur

$$\vec{d}(M_0, t) = \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$$

où u, v , et w sont des fonctions continues et dérivables en x_0, y_0 et z_0 , par suite le vecteur \vec{r} s'écrit sous la forme

$$\vec{r}(M_0, t) = \vec{r}_0 + \vec{d}(M_0, t)$$

Alors les coordonnées du point M s'écrivent comme forme matricielle

$$\begin{bmatrix} x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z(x_0, y_0, z_0, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(x_0, y_0, z_0, t) \\ v(x_0, y_0, z_0, t) \\ w(x_0, y_0, z_0, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

2.2.5 Déformations

Sous l'action des forces appliquées, les points d'un solide se déplacent. Il en résulte, pour des fibres infinitésimales de matière, des variations de longueur et des variations d'angle appelées déformations.

Alors on a deux types de déformation: les déformation de la longueur ou extension sera notée ε et la déformation de l'angle ou distorsion sera notée par γ . Ces composantes de déformations définissant l'état complet de déformation d'un corps sont généralement déterminées à partir du vecteur déplacement d'un point.

Sous l'action d'un chargement, tous les corps subissent un changement de forme, de position et d'orientation entre un état initial avant application de la charge et un état final consécutif à son application. Les déformations caractérisent le changement de la forme locale en tout point du matériau, indépendamment de sa nature et de ses caractéristiques de résistance.

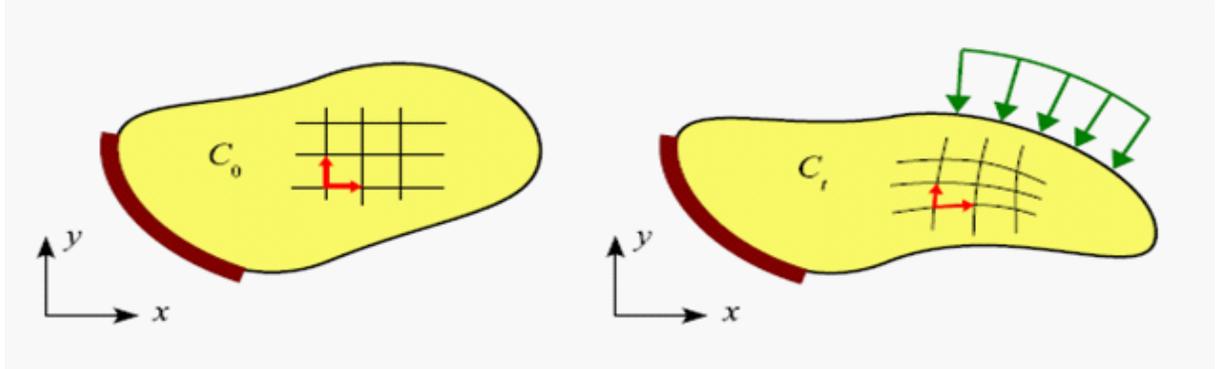


Fig 3: *Déformation dans un solide*

2.3 Problème particuliers d'élasticité plan

Soient u et v les composantes d'un vecteur de déplacement \vec{d} (M)

Un solide est en état de déformation plane par rapport au plan (o, x, y) s'il existe un repère (o, x, y, z) tel qu'en tout point M du solide, le champ de déplacement soit de la forme

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ w = 0 \end{cases}$$

où les déformations sont données par

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

2.4 Loi générale de Hooke

La première formulation de cette relation a été établie expérimentalement par Hooke. Le cas le plus simple est celui d'une barre de section A tendue

ou comprimée par une force F produisant une contrainte σ uniforme sur sa section.

La loi de Hooke, dans ce cas, peut s'écrire comme suit[11]

$$\sigma = c\varepsilon$$

où, c est une constante, et ε est une déformation longitudinale ou extension.

Cette loi permet de définir la loi de comportement d'un matériau élastique linéaire, homogène isotrope et pour un état de sollicitation quelconque.

2.5 Loi de comportement ou loi constitutive

L'état de contrainte et l'état de déformation en un point seront représentés par un vecteur à six composantes (notation de Voigt 1850-1919).

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

Pour un matériau isotrope, les déformations et les contraintes sont liées par la relation (loi de comportement)

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \alpha \Delta T \\ \gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G} \end{cases}$$

où

E , ν et α sont respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson et le coefficient de dilatation du matériau. G est le module d'élasticité transversal, ΔT est la variation de température.

Avec ces notations la loi de comportement s'écrit sous la forme

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} + \{\sigma_{th}\}$$

où la matrice $[D]$ des coefficients élastiques est égale à

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma_{th}\} = -\frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ces familles de paramètres sont liées par les relations suivantes

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

où λ et μ sont les coefficient de Lamé

Inversement, on a

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{2(\lambda + \mu)}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

2.6 Problème axisymétrique

Le solide considéré est de révolution. Il en va de même du chargement et des conditions aux limites. Soit z l'axe de révolution. Un point du solide est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . La solution est axisymétrique.

Chaque point du solide se déplace dans son plan (r, z) . De plus le champ de déplacements est indépendant de la coordonnée θ .

Dans ce cas le champ de déplacements se réduit à

$$\begin{cases} u = u(r, z) \\ v = v(r, z) = 0 \\ w = w(r, z) \end{cases}$$

Un problème est dit axisymétrique si le domaine étudié possède une symétrie de révolution et si les tenseurs des contraintes et le tenseur des déformations sont aussi à symétrie de révolution

3 Etude d'un problème thermoélastique

Le problème thermoélastique contient deux problèmes, un problème thermique et un problème mécanique.

Le problème se ramène à la recherche de solutions des système d'équations intégrales duales couplées. Par la méthode de développement en série de produit de fonctions de Bessel et à l'aide de la formule de Gegenbaur, les coefficients inconnues s'obtiennent par la résolution de système algébriques infinis par la méthode de troncation.

3.1 Formulation mathématique du problème thermoélastique

Etudions le problème de déformation thermoélastique d'une plaque épaisse sous l'effet de l'action d'un poinçon chauffé, cette plaque repose sur un appui rigide thermiquement isolé c'est à dire le flux est nul. Sur la partie supérieure de la plaque on applique le long d'une portion circulaire de rayon a un poinçon rigide, du quel dégagé un flux constant d'intensité T_0 , la surface complémentaire au poinçon est supposée être de température nulle. Déterminons analytiquement et numériquement les contraintes et les déplacements, dans le milieu considéré c'est à dire les deux composantes de vecteur déplacement u et w , la contrainte σ_z ainsi que la température T .

$$\begin{cases} (\kappa + 1) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right] + (\kappa - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 4(1 + \nu) \alpha \frac{\partial T}{\partial r} \\ (\kappa - 1) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] + (\kappa + 1) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right] = 4(1 + \nu) \alpha \frac{\partial T}{\partial z} \end{cases} \quad (3.1)$$

et

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

où α et le coefficient de dilatation thermique du solide.

$\kappa = 3 - 4\nu$, ν est le coefficient de Poisson. Le coefficient de Poisson fait partie des constantes élastiques. Il est compris entre -1 et 0.5

Les valeurs expérimentales obtenues dans le cas d'un matériau parfaitement isotrope sont très proche de la valeur théorique $\frac{1}{4}$. Pour un matériau quelconque, on obtient en moyenne 0.29 .

Résolution par la méthode de la transformation intégrale de Hankel du système d'équilibre de Lamé (3.1) dans le cas des conditions aux limites suivantes

Les conditions aux limites mécaniques d'une plaque épaisse d'épaisseur h

$$(w_z)_{z=h} = -\varepsilon, \quad 0 \leq r < a \quad (3.1a)$$

$$(\sigma_z)_{z=h} = 0, \quad a \leq r < +\infty \quad (3.1b)$$

$$(\tau_{rz})_{z=h} = 0, \quad 0 \leq r < +\infty \quad (3.1c)$$

$$(w_z)_{z=0} = 0, \quad 0 \leq r < +\infty \quad (3.1d)$$

$$(\tau_{rz})_{z=0} = 0, \quad 0 \leq r < +\infty \quad (3.1e)$$

Les conditions thermiques

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=h} = T_0, \quad r < a \quad (3.1f)$$

$$(T)_{z=h} = 0, \quad r \geq a \quad (3.1g)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0} = 0, \quad r \geq 0 \quad (3.1h)$$

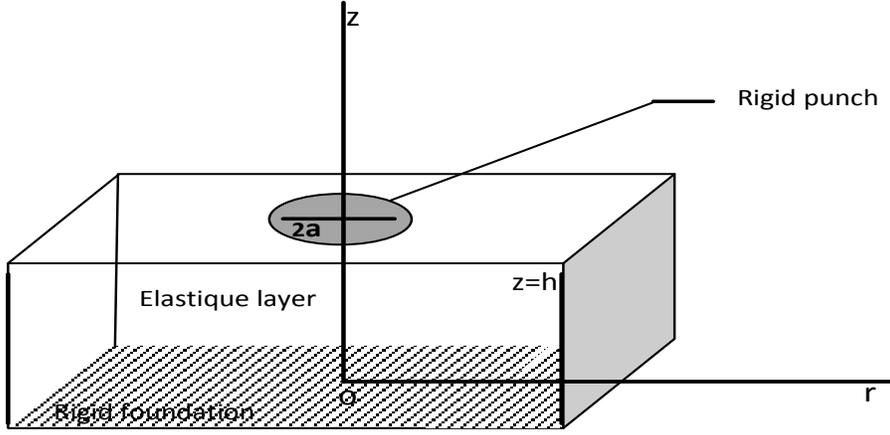


Fig 4: Déformation thermoélastique d'une plaque épaisse par un poinçon rigide

3.2 Le problème thermique

3.2.1 Solution du problème thermique

3.2.2 La transformée de Hankel du Laplacien

Soit l'équation

$$\Delta T = 0$$

Alors

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (3.2)$$

Par la transformée de Hankel d'ordre zéro de (3.2), on obtient

$$H_0 \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] r J_0(\lambda r) dr \quad (3.3)$$

Ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] r J_0(\lambda r) dr = 0 \quad (3.4)$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] r J_0(\lambda r) dr + \int_0^{+\infty} r \frac{\partial^2 T(r, z)}{\partial z^2} J_0(\lambda r) dr = 0 \quad (3.5)$$

On a

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right] \quad (3.6)$$

En remplaçant (3.6) dans (3.5), on trouve

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] r J_0(\lambda r) dr + \int_0^{+\infty} r \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} J_0(\lambda r) dr = 0 \quad (3.7)$$

Une intégration par parties pour (3.7), donne

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] r J_0(\lambda r) dr = \left[\left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) J_0(\lambda r) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} J_0'(\lambda r) dr$$

Les transformations soient valable pour, $rT \rightarrow 0$, $r \frac{\partial T}{\partial r} \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow +\infty$

Ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] r J_0(\lambda r) dr = - \int_0^{+\infty} \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} J_0'(\lambda r) dr \quad (3.8)$$

Une intégration par parties pour le second membre de (3.8), donne

$$\int_0^{+\infty} \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} J_0'(\lambda r) dr = - \left[\lambda r J_0'(\lambda r) T \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} T(r, z) \frac{d}{dr} \left[\lambda r J_0'(\lambda r) \right] dr$$

Donc (3.8), devient

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] r J_0(\lambda r) dr = \int_0^{+\infty} T(r, z) \frac{d}{dr} [\lambda r J_0'(\lambda r)] dr \quad (3.9)$$

D'après la relation 3 de (1.12), on a

$$\frac{d}{dr} [\lambda r J_n'(\lambda r)] = -r \left[\lambda^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] J_n(\lambda r)$$

Ce qui donne pour $n = 0$

$$\frac{d}{dr} [\lambda r J_0'(\lambda r)] = -r \lambda^2 J_0(\lambda r) \quad (3.10)$$

En remplaçant (3.10) dans (3.9), on obtient

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] r J_0(\lambda r) dr = -\lambda^2 \int_0^{+\infty} r T(r, z) J_0(\lambda r) dr \quad (3.11)$$

La transformée de Hankel d'ordre zéro de T est donnée par

$$\bar{T}(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} r T(r, z) J_0(\lambda r) dr \quad (3.12)$$

Alors on obtient pour (3.11)

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] r J_0(\lambda r) dr = -\lambda^2 \bar{T}(\lambda, z) \quad (3.13)$$

C'est à dire

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] r J_0(\lambda r) dr = -\lambda^2 \bar{T}(\lambda, z) \quad (3.14)$$

La dérivée d'ordre deux de (3.12) par rapport à z , donne

$$\frac{\partial^2 \bar{T}(r, z)}{\partial z^2} = \int_0^{+\infty} r \frac{\partial^2 T(r, z)}{\partial z^2} J_0(\lambda r) dr \quad (3.15)$$

En remplaçant les deux équations (3.14) et (3.15) dans (3.5), on obtient

$$\frac{\partial^2 \bar{T}(r, z)}{\partial z^2} - \lambda^2 \bar{T}(\lambda, z) = 0 \quad (3.16)$$

Alors on a transformée (3.2) par la transformée de Hankel d'ordre zéro à une équation différentielle ordinaire d'ordre deux

$$\bar{T}''(\lambda, z) - \lambda^2 \bar{T}(\lambda, z) = 0 \quad (3.17)$$

où \bar{T} est la transformée de Hankel d'ordre zéro de T

L'équation caractéristique de (3.17) est

$$r^2 - \lambda^2 = 0$$

La solution générale est alors

$$\bar{T}(\lambda, z) = A(\lambda) e^{-\lambda z} + B(\lambda) e^{\lambda z} \quad (3.18)$$

D'après la condition au limite (3.1h), on obtient

$$A(\lambda) = B(\lambda)$$

Par suite (3.18), devient

$$\bar{T}(\lambda, z) = A(\lambda) [e^{-\lambda z} + e^{\lambda z}] \quad (3.19)$$

Multiplions les deux membres de l'équation (3.19) par $2\alpha(1 + \nu)$, ce qui donne

$$2\alpha(1 + \nu) \bar{T}(\lambda, z) = 2\alpha(1 + \nu) A(\lambda) [e^{-\lambda z} + e^{\lambda z}]$$

Posons

$$2\alpha(1 + \nu) A(\lambda) = A_0(\lambda) \quad (3.20)$$

D'où

$$2\alpha(1+\nu)\bar{T}(\lambda, z) = A_0(\lambda) [e^{-\lambda z} + e^{\lambda z}]$$

Donc

$$\bar{T}(\lambda, z) = \frac{1}{\alpha(1+\nu)} A_0(\lambda) \left[\frac{e^{-\lambda z} + e^{\lambda z}}{2} \right]$$

Ce qui implique

$$\bar{T}(\lambda, z) = \frac{1}{\alpha(1+\nu)} A_0(\lambda) \cosh(\lambda z) \quad (3.21)$$

La transformée inverse de Hankel d'ordre zéro de $\bar{T}(\lambda, z)$ est donnée par

$$T(r, z) = \int_0^{+\infty} \lambda \bar{T}(\lambda, z) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.22)$$

En remplaçant l'expression (3.21) dans (3.22), ce qui donne

$$T(r, z) = \frac{1}{\alpha(1+\nu)} \int_0^{+\infty} \lambda \cosh(\lambda z) A_0(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.23)$$

3.2.3 Les équations duales du problème thermique

D'après l'équation (3.23), on a

$$T(r, z) = \frac{1}{\alpha(1+\nu)} \int_0^{+\infty} \lambda \cosh(\lambda z) A_0(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.24)$$

D'après les conditions mixtes (3.1f) et (3.1g), on obtient pour $z = h$ les équations suivantes

$$\int_0^{+\infty} \lambda^2 \sinh(\lambda h) A_0(\lambda) J_0(\lambda) d\lambda = \alpha(1+\nu) T_0 \quad r < a \quad (3.25)$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda \cosh(\lambda h) A_0(\lambda) J_0(\lambda) d\lambda = 0 \quad r > a \quad (3.26)$$

Posons $\lambda \cosh(\lambda h) A_0(\lambda) = \psi_1(\lambda)$

Alors les équations duales de la température seront:

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} \lambda \tanh(\lambda h) \psi_1(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \alpha(1 + \nu) T_0, & r < a \\ \int_0^{+\infty} \psi_1(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, & r > a \end{cases} \quad (3.27)$$

3.2.4 Solution numérique du problème thermique

3.2.4.1 La transformée des équations duales du problème thermique

Soit la formule intégrale

$$\int_0^{+\infty} J_0(\lambda r) F_n(\lambda) d\lambda = \begin{cases} \frac{4U_{2n+2}\left(\frac{r}{a}\right)}{\pi a r}, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (3.28)$$

Telle que $U_{2n+2}(x)$ définie le polynôme de Chebychev de second espèce, et $F_n(\lambda)$, $Z_n(\lambda)$ sont des fonctions qui sont définies comme suit

$$F_n(\lambda) = \lambda [Z_n(\lambda) - Z_{n+1}(\lambda)], \quad Z_n(\lambda) = J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\lambda a}{2}\right) J_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{\lambda a}{2}\right)$$

La formule (3.28) et les fonctions $Z_n(\lambda)$, $F_n(\lambda)$ permettent de chercher la solution de (3.27)

sous la forme

$$\psi_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n F_n(\lambda) \quad (3.29)$$

où les α_n sont des coefficients inconnus à déterminer.

Substituons la fonction $\psi_1(\lambda)$ dans (3.27), on obtient

$$\int_0^{+\infty} \lambda \tanh(\lambda h) \psi_1(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \int_0^{+\infty} \lambda \tanh(\lambda h) J_0(\lambda r) F_n(\lambda) d\lambda$$

Par suite

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \int_0^{+\infty} \lambda \tanh(\lambda h) J_0(\lambda r) d\lambda F_n(\lambda) = \alpha(1+\nu) T_0, \quad r < a$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n \int_0^{+\infty} \lambda \tanh(\lambda h) J_0(\lambda r) d\lambda F_n(\lambda) = 1, \quad r < a \quad (3.30)$$

où

$$\phi_n = \frac{\alpha_n}{\alpha(1+\nu) T_0}$$

Utilisons la formule de Gegenbauer qui est définie par:

$$J_0(\lambda r) = \sum_{m=0}^{+\infty} (2 - \delta_{0m}) X_m(\lambda) \cos(m\theta), \quad \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{r}{a} \quad (3.31)$$

$$X_m(\lambda) = J_m^2\left(\frac{\lambda a}{2}\right), \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

Donc l'équation (3.30) on peut l'écrire comme suit

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos(m\theta) \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n \int_0^{+\infty} \tanh(\lambda h) \lambda F_n(\lambda) X_m(\lambda) d\lambda = 1$$

or, $\{\cos(m\theta)\}_{m=0,1,2}$, est un système linéaire indépendant, ce qui donne:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n \int_0^{+\infty} \tanh(\lambda h) \lambda F_n(\lambda) X_m(\lambda) d\lambda = \delta_{0m}, \quad m = 0, 1, 2 \quad (3.32)$$

En remplaçant par $m + 2$ dans (3.32), on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n \int_0^{+\infty} \tanh(\lambda h) \lambda F_n(\lambda) X_{m+2}(\lambda) d\lambda = \delta_{0m+2}, \quad m = 0, 1, 2 \quad (3.33)$$

Effectuons en suite la soustraction des équations (3.32) et (3.33), ce qui donne:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n \int_0^{+\infty} \tanh(\lambda h) F_n(\lambda) \lambda (X_m(\lambda) - X_{m+2}(\lambda)) d\lambda = \delta_{0m} - \delta_{0m+2} = \delta_{0m}, \quad m = 0, 1, 2$$

Par suite

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n \int_0^{+\infty} \tanh(\lambda h) F_n(\lambda) Y_m(\lambda) d\lambda = \delta_{0m}, \quad m = 0, 1 \quad (3.34)$$

où

$$Y_m(\lambda) = \lambda (X_m(\lambda) - X_{m+2}(\lambda)) \quad (3.35)$$

Posons

$$B_{mn} = \int_0^{+\infty} \tanh(\lambda h) F_n(\lambda) Y_m(\lambda) d\lambda \quad (3.36)$$

On a

$$F_n(\lambda) Y_m(\lambda) \longrightarrow \frac{128 (-1)^m (m+1)(n+1) \cos^2(\lambda a)}{\pi^2 a^3 \lambda^2}, \quad \lambda \longrightarrow +\infty \quad (3.37)$$

Posons

$$L(\lambda) = \frac{128 (-1)^m (m+1)(n+1) \cos^2(\lambda a)}{\pi^2 a^3 \lambda^2}$$

Une intégration par parties pour $L(\lambda)$ de λ_0 à $+\infty$ donne:

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} L(\lambda) d\lambda = \frac{128 (-1)^m (m+1)(n+1)}{\pi^2 a^3} \left[\frac{\cos^2(\lambda_0 a)}{\lambda_0 a} + \text{Si}(2\lambda_0 a) \right]$$

Tel que

$$\text{Si}(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Donc on peut écrire (3.36) sous la forme

$$B_{mn} = \int_0^{\lambda_0} \tanh(\lambda h) F_n(\lambda) Y_m(\lambda) d\lambda + W_{mn}(\lambda_0 a) \quad (3.38)$$

où $W_{mn}(\lambda_0 a)$ est donnée par

$$W_{mn}(\lambda_0 a) = \frac{128(-1)^m(m+1)(n+1)}{\pi^2 a^3} \left[\frac{\cos^2(\lambda_0 a)}{\lambda_0 a} + \text{Si}(2\lambda_0 a) \right] \quad (3.39)$$

Alors les équations duales de la température se transforment au système algébrique suivant

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n \left[\int_0^{\lambda_0} \tanh(\lambda h) F_n(\lambda) Y_m(\lambda) d\lambda + W_{mn}(\lambda_0 a) \right] = \delta_{0m}, m = 0, 1 \quad (3.40)$$

En tenant compte de l'équation intégrale de la température:

$$T(r, z) = \frac{1}{\alpha(1+\nu)} \int_0^{+\infty} \cosh(\lambda z) \frac{\psi_1(\lambda)}{\cosh(\lambda h)} J_0(\lambda) d\lambda$$

et de la formule (3.28), pour $z = h, r \leq a$, l'équation de la température s'écrit sous la forme

$$T(r, h) = \frac{1}{\alpha(1+\nu)} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \frac{4}{\pi a r} U_{2n+2} \left(\frac{r}{a} \right), r \leq a \quad (3.41)$$

3.2.4.2 Graphes et tableaux du problème thermique

Les coefficients de la température

n	$a = 1, H = 0.5$	$a = 1, H = 1$	$a = 1, H = 1.25$
1	0.31149308	0.26518053	0.25896934
2	-0.00744623	-0.00062006	-0.00010994
3	0.00071553	0.00025415	0.00022447
4	0.00028966	0.00025778	0.00025381
5	0.00025036	0.00022772	0.00022348
6	0.00028103	0.00025310	0.00024841
7	0.00025804	0.00023255	0.00022825
8	0.00027732	0.00025004	0.00024543
9	0.00026058	0.00023500	0.00023067
10	0.00027487	0.000247953	0.00024339

Tableau.1: Les coefficients α_n dans le cas thermique, $H = \frac{h}{a}$

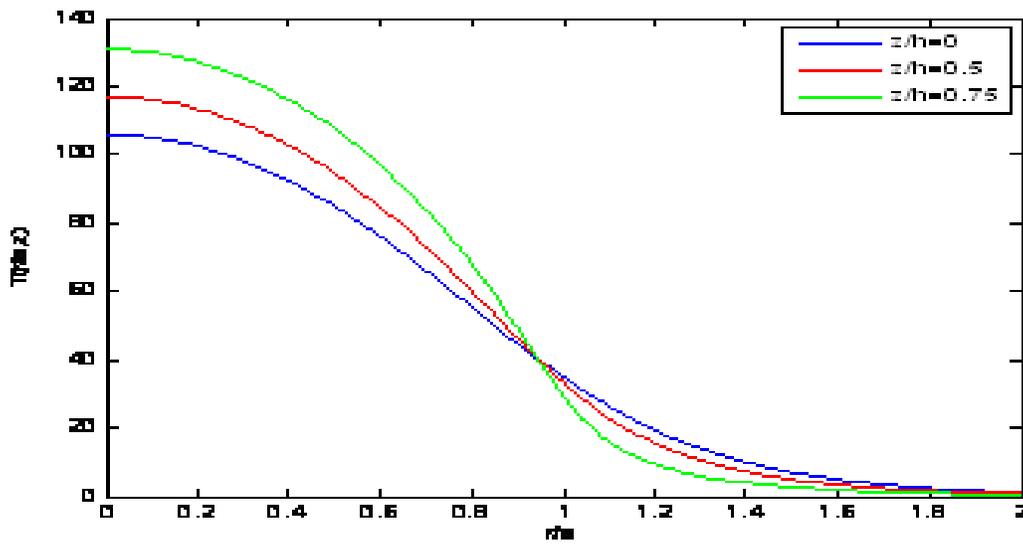


Fig:5. La distribution de la température $T(r/a, z)$: $a = 1, H = 0.5, z/a = 0, 0.5, 0.75$

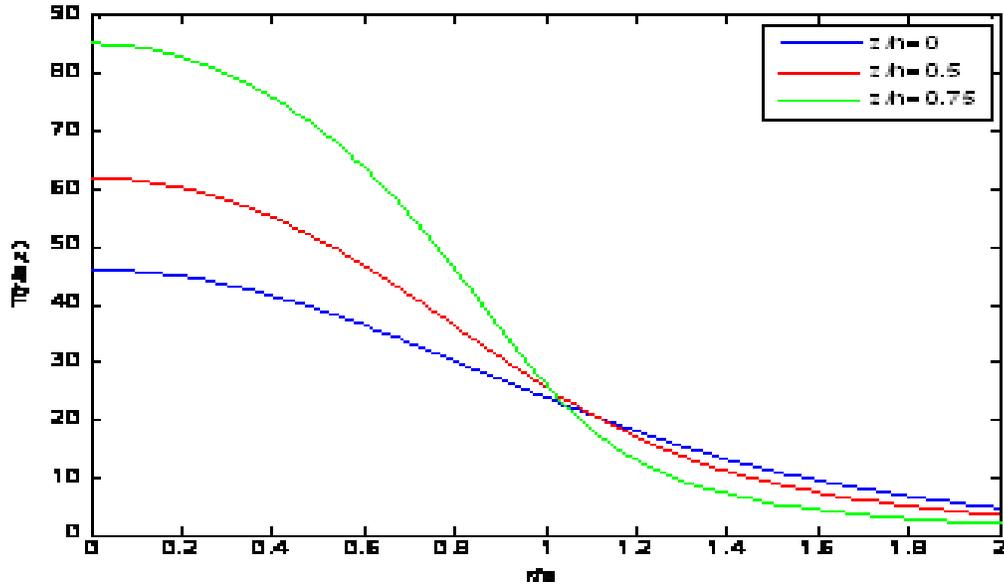


Fig:6. La distribution de la température $T(r/a, z)$: $a = 1, H = 1, z/a = 0, 0.5, 0.75$

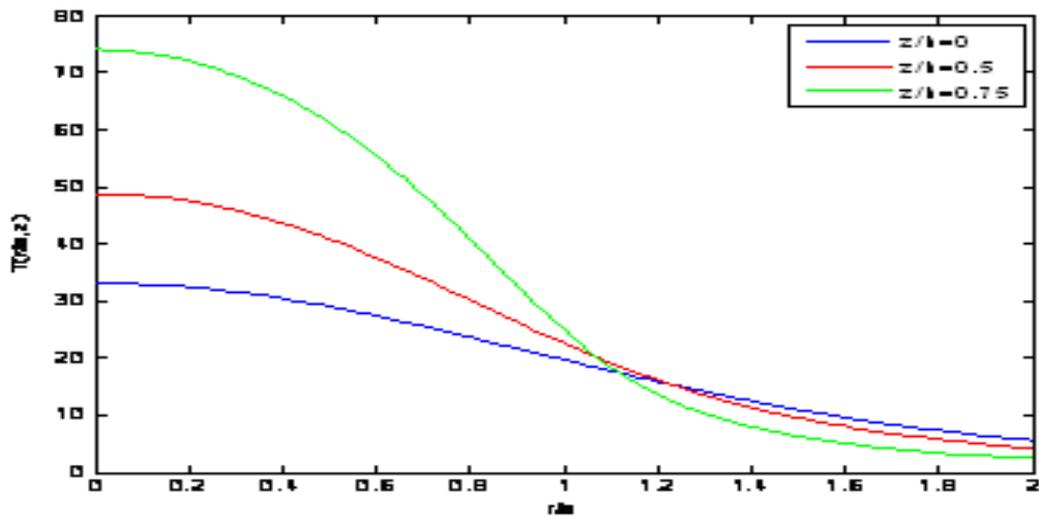


Fig:7. La distribution de la température $T(r/a, z)$: $a = 1, H = 1.25, z/a = 0, 0.5, 0.75$

3.3 Le problème mécanique

3.3.1 Solution du problème mécanique

3.3.2 La transformée de Hankel du système de Lamé

Le système de Lamé est un cas particulier des équations stationnaires de l'élasticité qui modélisent les déformations d'un solide sous l'hypothèse de petites déformations et de petits

déplacements.

$$\begin{cases} (\kappa + 1) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right] + (\kappa - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = V \frac{\partial T}{\partial r} \\ (\kappa - 1) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] + (\kappa + 1) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = V \frac{\partial T}{\partial z} \end{cases} \quad (3.42)$$

et

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, V = 4(1 + \nu) \alpha$$

où α est le coefficient de dilatation thermique du solide. $\kappa = 3 - 4\nu$, ν est le coefficient de Poisson.

On multiplions les deux membres de l'équation (1) de (3.42) par $rJ_1(\lambda r)$, une intégration par rapport r de 0 à $+\infty$, de même, si nous multiplions (2) de (3.42) par $rJ_0(\lambda r)$, une intégration par rapport r de 0 à $+\infty$, on obtient le système suivant

.

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} \left[(\kappa + 1) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right] + (\kappa - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} \right] r J_1(\lambda r) dr = V \int_0^{+\infty} \frac{\partial T}{\partial r} r J_1(\lambda r) dr \\ \int_0^{+\infty} \left[(\kappa - 1) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] + (\kappa + 1) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right] \right] r J_0(\lambda r) r = V \int_0^{+\infty} \frac{\partial T}{\partial z} r J_0(\lambda r) dr \end{cases}$$

Posons

$$\begin{cases} (\kappa + 1) S_1(\lambda, z) + (\kappa - 1) S_2(\lambda, z) + 2S_3(\lambda, z) = VS_4(\lambda, z) \\ (\kappa - 1) S_5(\lambda, z) + (\kappa + 1) S_6(\lambda, z) + 2S_7(\lambda, z) = VS_8(\lambda, z) \end{cases} \quad (3.43)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l}
S_1(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right] r J_1(\lambda r) dr \\
S_2(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} r J_1(\lambda r) dr \\
S_3(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} r J_1(\lambda r) dr \\
S_4(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial T}{\partial r} r J_1(\lambda r) dr \\
S_5(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] r J_0(\lambda r) dr \\
S_6(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} r J_0(\lambda r) dr \\
S_7(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right] r J_0(\lambda r) dr \\
S_8(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial T}{\partial z} r J_0(\lambda r) dr
\end{array} \right. \quad (3.44)$$

Calculons les intégrals de (3.44)

On a

$$S_1(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right] r J_1(\lambda r) dr$$

Les transformées de Hankel d'ordre n de u et w sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l}
U(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} r u(r, z) J_n(\lambda r) dr \\
W(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} r w(r, z) J_n(\lambda r) dr
\end{array} \right. \quad (3.45)$$

D'après les relations (1.18), (1.19), et pour $n = 1$, on obtient

$$S_1(\lambda, z) = -\lambda^2 U(\lambda, z)$$

Pour $S_2(\lambda, z)$, on a

$$S_2(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u(r, z)}{\partial z^2} r J_1(\lambda r) dr$$

La dérivée d'ordre deux de (3.45) pour U en z , et pour $n = 1$, donne

$$\frac{\partial^2 U(\lambda, z)}{\partial z^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u(r, z)}{\partial z^2} r J_1(\lambda r) dr$$

Donc

$$S_2(\lambda, z) = \frac{\partial^2 U(\lambda, z)}{\partial z^2} = U''(\lambda, z)$$

On a

$$S_3(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} r J_1(\lambda r) dr = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial w}{\partial r} \right] r J_1(\lambda r) dr$$

Une intégration par parties pour $\int_0^{+\infty} \frac{\partial w}{\partial r} r J_1(\lambda r) dr$, donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial w}{\partial r} r J_1(\lambda r) dr = [wr J_1(\lambda r)]_0^{+\infty} - \lambda \int_0^{+\infty} r w(r, z) J_0(\lambda r) dr$$

Ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial w}{\partial r} r J_1(\lambda r) dr = -\lambda \int_0^{+\infty} r w(r, z) J_0(\lambda r) dr$$

C'est à dire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial w}{\partial r} r J_1(\lambda r) dr = -\lambda W(\lambda, z) \quad (3.46)$$

En dérivant (3.46) en z , on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} r J_1(\lambda r) dr = -\lambda \frac{\partial W(\lambda, z)}{\partial z} = -\lambda W'(\lambda, z)$$

D'où

$$S_3(\lambda, z) = -\lambda \frac{\partial W(\lambda, z)}{\partial z} = -\lambda W'(\lambda, z)$$

Pour $S_4(\lambda, z)$, on a

$$S_4(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial T}{\partial r} r J_1(\lambda r) dr$$

D'après (3.46), on obtient pour $w(r, z) = T(r, z)$

$$S_4(\lambda, z) = -\lambda \bar{T}(\lambda, z)$$

On a

$$S_5(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] r J_0(\lambda r) dr$$

En tenant compte de (1.18), (1.19), et pour $n = 0$, on trouve

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] r J_0(\lambda r) dr = -\lambda^2 W(\lambda, z)$$

Ce qui donne

$$S_5(\lambda, z) = -\lambda^2 W(\lambda, z)$$

On a

$$S_6(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} r J_0(\lambda r) dr$$

La dérivée d'ordre deux par rapport à z de l'équation deux de (3.45), on obtient pour $n = 0$

$$\frac{\partial^2 W(\lambda, z)}{\partial z^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} r J_0(\lambda r) dr$$

D'où

$$S_6(\lambda, z) = \frac{\partial^2 W(\lambda, z)}{\partial z^2} = W''(\lambda, z)$$

Pour $S_7(\lambda, z)$, on a

$$S_7(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right] r J_0(\lambda r) dr$$

Par suite

$$S_7(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} u \right] r J_0(\lambda r) dr$$

On a

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}u \right] r J_0(\lambda r) dr = \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial r} r J_0(\lambda r) dr + \int_0^{+\infty} u J_0(\lambda r) dr \quad (3.47)$$

On fait une intégration par parties pour $\int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial r} r J_0(\lambda r) dr$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial r} r J_0(\lambda r) dr = [r J_0(\lambda r) u]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u J_0(\lambda r) dr + \lambda \int_0^{+\infty} r u J_1(\lambda r) dr$$

Ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial r} r J_0(\lambda r) dr = - \int_0^{+\infty} u J_0(\lambda r) dr + \lambda \int_0^{+\infty} r u J_1(\lambda r) dr \quad (4.48)$$

En remplaçant (3.48) dans (3.47), ce qui implique

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}u \right] r J_0(\lambda r) dr = \lambda \int_0^{+\infty} r u J_1(\lambda r) dr \quad (3.49)$$

En dérivant (3.49) par rapport à z , on obtient

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right] r J_0(\lambda r) dr = \lambda \int_0^{+\infty} r \frac{\partial u(r, z)}{\partial z} J_1(\lambda r) dr \quad (3.50)$$

La dérivée de l'équation un de (3.45) en z , et pour $n = 1$ on obtient

$$\frac{\partial U(\lambda, z)}{\partial z} = \int_0^{+\infty} r \frac{\partial u(r, z)}{\partial z} J_1(\lambda r) dr \quad (3.51)$$

En remplaçant (3.51) dans (3.50), on trouve

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right] r J_0(\lambda r) dr = \lambda \frac{\partial U(\lambda, z)}{\partial z}$$

D'où

$$S_7(\lambda, z) = \lambda \frac{\partial U(\lambda, z)}{\partial z} = \lambda U'(\lambda, z)$$

Pour $S_8(\lambda, z)$, on a

$$S_8(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} r J_0(\lambda r) dr$$

Une dérivée de l'équation (3.12) par rapport à z , donne

$$\frac{\partial \bar{T}(\lambda, z)}{\partial z} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial T(r, z)}{\partial z} r J_0(\lambda r) dr$$

C'est à dire

$$S_8(\lambda, z) = \frac{\partial \bar{T}(\lambda, z)}{\partial z} = \bar{T}'(\lambda, z)$$

Finalement en remplaçant les S_i $1 \leq i \leq 8$ dans (3.44), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1(\lambda, z) = -\lambda^2 U(\lambda, z) \\ S_2(\lambda, z) = U''(\lambda, z) \\ S_3(\lambda, z) = -\lambda W'(\lambda, z) \\ S_4(\lambda, z) = -\lambda \bar{T}(\lambda, z) \\ S_5(\lambda, z) = -\lambda^2 W(\lambda, z) \\ S_6(\lambda, z) = W''(\lambda, z) \\ S_7(\lambda, z) = \lambda U'(\lambda, z) \\ S_8(\lambda, z) = \bar{T}'(\lambda, z) \end{array} \right. \quad (3.52)$$

En remplaçant (3.52) dans (3.43), alors le système de Lamé (3.42) est transformée au système différentiel ordinaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\kappa + 1)\lambda^2 U + (\kappa - 1)U'' - 2\lambda W' = -4(1 + \nu)\alpha\lambda\bar{T} \\ -(\kappa - 1)\lambda^2 W + (\kappa + 1)W'' + 2\lambda U' = 4(1 + \nu)\alpha\bar{T}' \end{array} \right. \quad (3.53)$$

En remplaçant (3.19) dans (3.53), on obtient

$$\begin{cases} -(\kappa + 1)\lambda^2 U + (\kappa - 1)U'' - 2\lambda W' = -4(1 + \nu)\alpha\lambda A(\lambda) [e^{-\lambda z} + e^{\lambda z}] \\ 2\lambda U' - (\kappa - 1)\lambda^2 W + (\kappa + 1)W'' = -4(1 + \nu)\alpha\lambda A(\lambda) [e^{-\lambda z} - e^{\lambda z}] \end{cases}$$

Et d'après la relation (3.20), le système différentiel ordinaire se présente sous la forme suivante

$$\begin{cases} -(\kappa + 1)\lambda^2 U + (\kappa - 1)U'' - 2\lambda W' = -2\lambda A_0(\lambda) [e^{-\lambda z} + e^{\lambda z}] \\ 2\lambda U' - (\kappa - 1)\lambda^2 W + (\kappa + 1)W'' = -2\lambda A_0(\lambda) [e^{-\lambda z} - e^{\lambda z}] \end{cases} \quad (3.54)$$

La solution générale du (3.54) s'écrit

$$\begin{cases} U(\lambda, z) = U_h(\lambda, z) + U_p(\lambda, z) \\ W(\lambda, z) = W_h(\lambda, z) + W_p(\lambda, z) \end{cases} \quad (3.55)$$

où (U_h, W_h) est la solution générale du système homogène, et (U_p, W_p) est la solution particulière du système non homogène.

3.3.3 La solution du système non homogène

3.3.3.1 La solution homogène du système

On a le système homogène est donné par

$$\begin{cases} -\lambda^2(\kappa + 1)U + (\kappa - 1)U'' - 2\lambda W' = 0 \\ 2\lambda U' - \lambda^2(\kappa - 1)W + (\kappa + 1)W'' = 0 \end{cases} \quad (3.56)$$

En dérivant l'équation deux de (3, 56), on obtient

$$2\lambda \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \lambda^2(\kappa - 1) \frac{\partial W}{\partial z} + (\kappa + 1) \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} = 0 \quad (3.57)$$

L'équation un du système homogène donne

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{\kappa - 1} \left[2\lambda \frac{\partial W}{\partial z} + \lambda^2(\kappa + 1)U \right] \quad (3.58)$$

En remplaçant (3, 58) dans (3, 57), on obtient

$$\frac{2\lambda}{\kappa - 1} \left[2\lambda \frac{\partial W}{\partial z} + \lambda^2 (\kappa + 1) U \right] - \lambda^2 (\kappa - 1) \frac{\partial W}{\partial z} + (\kappa + 1) \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} = 0$$

Ce qui donne

$$2\lambda^3 \frac{(\kappa + 1)}{\kappa - 1} U + \lambda^2 \left[\frac{4 - (\kappa - 1)^2}{\kappa - 1} \right] \frac{\partial W}{\partial z} + (\kappa + 1) \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} = 0 \quad (3.59)$$

En dérivant l'équation (3, 59), on obtient

$$2\lambda^3 \frac{(\kappa + 1)}{\kappa - 1} \frac{\partial U}{\partial z} + \lambda^2 \left[\frac{4 - (\kappa - 1)^2}{\kappa - 1} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + (\kappa + 1) \frac{\partial^4 W}{\partial z^4} = 0 \quad (3.60)$$

L'équation deux du système homogène donne

$$2\lambda \frac{\partial U}{\partial z} = \lambda^2 (\kappa - 1) W - (\kappa + 1) \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \quad (3.61)$$

En remplaçant l'équation (3, 61) dans (3, 60), on obtient

$$(\kappa + 1) \frac{\partial^4 W}{\partial z^4} + \lambda^2 \left[\frac{4 - (\kappa - 1)^2 - (\kappa + 1)^2}{\kappa - 1} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \lambda^4 (\kappa + 1) W = 0 \quad (3.62)$$

Par suite

$$(\kappa + 1) \frac{\partial^4 W}{\partial z^4} - 2\lambda^2 (\kappa + 1) \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \lambda^4 (\kappa + 1) W = 0$$

Finalement on obtient l'équation différentielle ordinaire d'ordre quatre

$$\frac{\partial^4 W}{\partial z^4} - 2\lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \lambda^4 W = 0$$

C'est à dire

$$W^{(4)} - 2\lambda^2 W^{(2)} + \lambda^4 W = 0 \quad (3.63)$$

Son équation caractéristique est

$$r^4 - 2\lambda^2 r^2 + \lambda^4 = (r^2 - \lambda^2)^2 = (r + \lambda)^2 (r - \lambda)^2$$

Alors la solution générale de l'équation (3, 63) est la suivante

$$W(\lambda, z) = [C_0 + C_1 z] e^{-\lambda z} + [C_2 + C_3 z] e^{\lambda z} \quad (3.64)$$

Cherchons la solution $U(\lambda, z)$. En dérivant les deux membres de l'équation deux du système (3.56), on trouve

$$2\lambda \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \lambda^2 (\kappa - 1) \frac{\partial W}{\partial z} + (\kappa + 1) \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} = 0$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{2\lambda} \left[\lambda^2 (\kappa - 1) \frac{\partial W}{\partial z} - (\kappa + 1) \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} \right] \quad (3.65)$$

En remplaçant (3, 65), dans l'expression un du système (3.56), on obtient

$$-\lambda^2 (\kappa + 1) U + \frac{(\kappa - 1)}{2\lambda} \left[\lambda^2 (\kappa - 1) \frac{\partial W}{\partial z} - (\kappa + 1) \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} \right] - 2\lambda \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

Par suite

$$2\lambda^3 \frac{(\kappa + 1)}{(\kappa - 1)} U + \lambda^2 \left[\frac{4 - (\kappa - 1)^2}{(\kappa - 1)} \right] \frac{\partial W}{\partial z} + (\kappa + 1) \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} = 0$$

Ce qui donne

$$2\lambda^3 U + \lambda^2 \left[\frac{4 - (\kappa - 1)^2}{(\kappa + 1)} \right] \frac{\partial W}{\partial z} + (\kappa - 1) \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} = 0 \quad (3.66)$$

On a

$$\frac{4 - (\kappa - 1)^2}{(\kappa + 1)} = \frac{(2 + \kappa - 1)(2 - \kappa + 1)}{(\kappa + 1)} = \frac{(\kappa + 1)(3 - \kappa)}{(\kappa + 1)} = 3 - \kappa$$

Ce qui peut s'écrire simplement (3, 66) sous la forme

$$2\lambda^3 U(\lambda, z) = -\lambda^2(3 - \kappa) \frac{\partial W}{\partial z} - (\kappa - 1) \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} \quad (3.67)$$

Les dérivées d'ordre un et trois de la fonction (3, 62) sont

$$\frac{\partial W}{\partial z} = [-\lambda C_0 + C_1 - \lambda C_1 z] e^{-\lambda z} + [\lambda C_2 + C_3 + \lambda C_3 z] e^{\lambda z}$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial z^3} = [-\lambda^3 C_0 + 3\lambda^2 C_1 - \lambda^3 C_1 z] e^{-\lambda z} + [\lambda^3 C_2 + 3\lambda^2 C_3 + \lambda^3 C_3 z] e^{\lambda z}$$

En remplaçant $\frac{\partial W}{\partial z}$, $\frac{\partial^3 W}{\partial z^3}$ dans (3, 67), on trouve

$$2\lambda^3 U(\lambda, z) = V_1(\lambda, z) e^{-\lambda z} + V_2(\lambda, z) e^{\lambda z}$$

où

$$\begin{cases} V_1(\lambda, z) = 2[\lambda^3 C_0 - \lambda^2 \kappa C_1 + \lambda^3 C_1 z] \\ V_2(\lambda, z) = -2[\lambda^3 C_2 + \lambda^2 \kappa C_3 + \lambda^3 C_3 z] \end{cases}$$

Ce qui donne

$$U(\lambda, z) = \left[C_0 - \frac{\kappa}{\lambda} C_1 + C_1 z \right] e^{-\lambda z} - \left[C_2 + \frac{\kappa}{\lambda} C_3 + C_3 z \right] e^{\lambda z} \quad (3.68)$$

D'où la solution homogène du système (3.56) est la suivante

$$\begin{cases} U_h(\lambda, z) = \left[C_0 - \frac{\kappa}{\lambda} C_1 + C_1 z \right] e^{-\lambda z} - \left[C_2 + \frac{\kappa}{\lambda} C_3 + C_3 z \right] e^{\lambda z} \\ W_h(\lambda, z) = [C_0 + C_1 z] e^{-\lambda z} + [C_2 + C_3 z] e^{\lambda z} \end{cases} \quad (3.69)$$

3.3.3.2 Une solution particulière du système

On cherche une solution particulière sous la forme:

$$\begin{cases} U_p(\lambda, z) = \gamma_0 e^{-\lambda z} + \gamma_1 e^{\lambda z} \\ W_p(\lambda, z) = \beta_0 e^{-\lambda z} + \beta_1 e^{\lambda z} \end{cases} \quad (3.70)$$

En remplaçant (3.70) dans (3.53), on obtient le système des équations suivantes

$$\begin{cases} -(1-\nu)2\lambda^2\gamma_0 + (1-2\nu)\lambda^2\gamma_0 + \lambda^2\beta_0 = -2(1+\nu)\alpha\lambda A \\ (1-2\nu)\lambda^2\gamma_1 - (1-\nu)2\lambda^2\gamma_1 - \lambda^2\beta_1 = -2(1+\nu)\alpha\lambda B \\ (1-\nu)2\lambda^2\beta_0 - (1-2\nu)\lambda^2\beta_0 - \lambda^2\gamma_0 = -2(1+\nu)\alpha\lambda A \\ (1-\nu)2\lambda^2\beta_1 - (1-2\nu)\lambda^2\beta_1 + \lambda^2\gamma_1 = 2(1+\nu)\alpha\lambda B \end{cases} \quad (3.71)$$

Par suite le système (3.71) devient

$$\begin{cases} \lambda(\beta_0 - \gamma_0) = -2(1+\nu)\alpha A \\ \lambda(\beta_1 + \gamma_1) = 2(1+\nu)\alpha B \\ \lambda(\beta_0 - \gamma_0) = -2(1+\nu)\alpha A \\ \lambda(\beta_1 + \gamma_1) = 2(1+\nu)\alpha B \end{cases}$$

Il suffit de prendre $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$, on obtient

$$\beta_0 = \frac{-2(1+\nu)\alpha A}{\lambda}, \beta_1 = \frac{2(1+\nu)\alpha B}{\lambda}$$

Substituons β_0 et β_1 dans (3.70), on trouve que

$$\begin{cases} U_p(\lambda, z) = 0 \\ W_p(\lambda, z) = \frac{-2(1+\nu)\alpha}{\lambda} [A(\lambda)e^{-\lambda z} - B(\lambda)e^{\lambda z}] \end{cases}$$

D'après (3, 19) et (3.20), le système (3.70) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} U_p(\lambda, z) = 0 \\ W_p(\lambda, z) = -\frac{A_0(\lambda)}{\lambda} [e^{-\lambda z} - e^{\lambda z}] \end{cases} \quad (3.72)$$

La solution générale du système non homogène (3, 53) est donnée sous la forme suivante:

$$\begin{cases} U(\lambda, z) = [D(\lambda, z) - \frac{\kappa}{\lambda} C_1(\lambda)] e^{-\lambda z} - [C_2(\lambda) + \frac{\kappa}{\lambda} C_3(\lambda) z] e^{\lambda z} \\ W(\lambda, z) = [D(\lambda, z) - \frac{A_0(\lambda)}{\lambda}] e^{-\lambda z} + [C_2(\lambda) + \frac{A_0(\lambda)}{\lambda} + C_3(\lambda) z] e^{\lambda z} \end{cases} \quad (3.73)$$

où

$$D(\lambda, z) = C_0(\lambda) + C_1(\lambda) z$$

Les fonctions $C_0(\lambda)$, $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$, et $C_3(\lambda)$ doivent être déterminées à partir des conditions aux limites.

3.3.4 La transformée de Hankel de la contrainte tangentielle

La contrainte tangentielle τ_{rz} est définie par la relation suivante:

$$\tau_{rz}(r, z) = G \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right] \quad (3.74)$$

où G est le module de cisaillement

La transformée de Hankel d'ordre un de τ_{rz} est donné par

$$\bar{\tau}_{rz}(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} r \tau_{rz}(r, z) J_1(\lambda r) dr \quad (3.75)$$

Ce qui implique

$$\bar{\tau}_{rz}(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} r G \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right] J_1(\lambda r) dr$$

Alors

$$\bar{\tau}_{rz}(\lambda, z) = \int_0^{+\infty} G r \frac{\partial u}{\partial z} J_1(\lambda r) dr + \int_0^{+\infty} G r \frac{\partial w}{\partial r} J_1(\lambda r) dr$$

D'où

$$\bar{\tau}_{rz}(\lambda, z) = G \left[\frac{\partial U}{\partial z} - \lambda W \right] \quad (3.76)$$

D'après les conditions aux limites (3.1c) (3.1d) et (3.1e), on obtient le système algébrique suivant:

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{rz}(\lambda, h) = [2\lambda h \cosh(\lambda h)]C_3 + [4(1-\nu)C_3 + A_0(\lambda) - 2\lambda C_0(\lambda)] \sinh(\lambda h) = 0 \\ W(\lambda, 0) = C_0(\lambda) - \frac{A_0(\lambda)}{\lambda} + C_2(\lambda) + \frac{B_0(\lambda)}{\lambda} = 0 \\ \bar{\tau}_{rz}(\lambda, 0) = A_0(\lambda) + 4(1-\nu)C_1(\lambda) - 2\lambda C_0 - A_0 - 4(1-\nu)C_3 - 2\lambda C_2 = 0 \end{cases}$$

C'est à dire

$$\begin{cases} [2\lambda h \cosh(\lambda h)]C_3 + [4(1-\nu)C_3 + A_0 - 2\lambda C_0] \sinh(\lambda h) = 0 \\ C_0(\lambda) - \frac{A_0(\lambda)}{\lambda} + C_2(\lambda) + \frac{B_0(\lambda)}{\lambda} = 0 \\ 4(1-\nu)C_1(\lambda) - 2\lambda C_0 - 4(1-\nu)C_3 - 2\lambda C_2 = 0 \end{cases} \quad (3.77)$$

Par un calcul classique on trouve les fonctions $C_0(\lambda)$, $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$, et $C_3(\lambda)$ comme suit

$$\begin{cases} C_2(\lambda) = -C_0(\lambda) \\ C_1(\lambda) = C_3(\lambda) \\ C_3(\lambda) = \frac{H(\lambda)}{(1+\kappa)\sin(\lambda h) + 2\lambda h \cos(\lambda h)} \end{cases} \quad (3.78)$$

où

$$H(\lambda) = [2\lambda C_0(\lambda) - A_0(\lambda)] \sin(\lambda h) \quad (3.79)$$

En remplaçant $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$ et $C_3(\lambda)$ dans le système (3.73), on trouve

$$U(\lambda, z) = 2 \cosh(\lambda z) C_0(\lambda) - \frac{(2\kappa \cosh(\lambda z) + 2\lambda z \sinh(\lambda z))H(\lambda)}{\lambda(1+\kappa)\sin h(\lambda h) + 2\lambda^2 \cosh(\lambda h)} \quad (3.80)$$

$$W(\lambda, z) = \left[\frac{2A_0(\lambda)}{\lambda} - 2C_0(\lambda) \right] \sinh(\lambda z) + 2z \cosh(\lambda z) C_3(\lambda) \quad (3.81)$$

Alors on obtient la solution générale du système non homogène (3, 53) sous la forme

$$\begin{cases} U(\lambda, z) = 2 \cosh(\lambda z) C_0(\lambda) - \frac{(2\kappa \cosh(\lambda z) + 2\lambda z \sinh(\lambda z))H(\lambda)}{\lambda(1+\kappa) \sinh(\lambda h) + 2\lambda^2 \cosh(\lambda h)} \\ W(\lambda, z) = \left[\frac{2A_0(\lambda)}{\lambda} - 2C_0(\lambda) \right] \sinh(\lambda z) + \frac{2z \cosh(\lambda z)H(\lambda)}{(1+\kappa)\sin(\lambda h) + 2\lambda h \cos(\lambda h)} \end{cases} \quad (3.82)$$

3.3.5 Les équations duales du problème mécanique

On obtient à partir de l'équation (3.81)

$$W(\lambda, z) = -2 \sinh(\lambda z) C_0(\lambda) + 2z \cosh(\lambda z) C_3(\lambda) + \frac{2A_0(\lambda)}{\lambda} \sinh(\lambda z)$$

Sachant que $A_0(\lambda) = \frac{\psi_1(\lambda)}{\lambda \cosh(\lambda h)}$, on trouve

$$\lambda W(\lambda, z) = 2\lambda z \cosh(\lambda z) C_3(\lambda) + \frac{2\psi_1(\lambda) \sinh(\lambda z)}{\lambda \cosh(\lambda h)} - 2\lambda \sinh(\lambda z) C_0(\lambda)$$

D'où

$$\lambda W(\lambda, z) = \frac{2z \cosh(\lambda z) \lambda H(\lambda)}{(1+\kappa) \sinh(\lambda h) + 2\lambda h \cosh(\lambda h)} + P_1(\lambda, z) \quad (3.83)$$

où

$$P_1(\lambda, z) = \frac{2\psi_1(\lambda) \sinh(\lambda z)}{\lambda \cosh(\lambda h)} - 2\lambda \sinh(\lambda z) C_0(\lambda)$$

$$\lambda H(\lambda) = \left[2\lambda^2 \cosh(\lambda h) C_0(\lambda) - \psi_1(\lambda) \right] \tanh(\lambda h) \quad (3.84)$$

Donc

$$\lambda W(\lambda, z) = \frac{F_1(\lambda, z) + 2\lambda^2 z \cosh(\lambda h) \cosh(\lambda z) H(\lambda) + P_2(\lambda, z)}{\lambda(1+\kappa) \sinh(\lambda h) \cosh(\lambda h) + 2\lambda^2 h \cosh^2(\lambda h)}$$

où

$$P_2(\lambda, z) = [2(1 + \kappa) \sinh(\lambda h) + 4\lambda h \cosh(\lambda h)] \sinh(\lambda z) \psi_1(\lambda)$$

$$F_1(\lambda, z) = [-\lambda^2(1 + \kappa) \sinh(2\lambda h) - 4\lambda^3 h \cosh^2(\lambda h)] \sinh(\lambda z) C_0(\lambda)$$

Par suite

$$\lambda W(\lambda, z) = \frac{F_2(\lambda, z) [-(1 + \kappa) \sinh(\lambda h) - 2\lambda h \cosh(\lambda h)] + P_3(\lambda, z)}{[2\lambda(1 - \nu) \tanh(\lambda h) + \lambda^2 h] \sinh(2\lambda h)}$$

où

$$F_2(\lambda, z) = 2\lambda^2 \sinh(\lambda h) C_0(\lambda) \sinh(\lambda z) \quad (3.85)$$

$$P_3(\lambda, z) = 2\lambda^2 z \cosh(\lambda h) \cosh(\lambda z) \tanh(\lambda h) H(\lambda) + \tanh(\lambda h) P_2(\lambda, z)$$

L'équation (3, 84), donne

$$2\lambda^2 \sinh(\lambda h) C_0(\lambda) = \lambda H(\lambda) + \tanh(\lambda h) \psi_1(\lambda) \quad (3.86)$$

Alors l'équation (3, 85), devient

$$F_2(\lambda, z) = [\lambda H(\lambda) + \tanh(\lambda h) \psi_1(\lambda)] \sinh(\lambda z) \quad (3.87)$$

On obtient $\lambda W(\lambda, z)$ sous la forme suivante

$$\lambda W(\lambda, z) = \frac{P_4(\lambda, z) \lambda H(\lambda)}{[2\lambda(1 - \nu) \tanh(\lambda h) + \lambda^2 h] \sinh(2\lambda h)} + N_2(\lambda, z) \psi_1(\lambda)$$

où

$$P_4(\lambda, z) = [2\lambda z \cosh(\lambda z) \tanh(\lambda h) - 2\lambda h \sinh(\lambda z)] \cosh(\lambda h) - 4(1 - \nu) \sinh(\lambda h) \sinh(\lambda z)$$

$$N_2(\lambda, z) = \frac{[4(1 - \nu) \tanh(\lambda h) + 2\lambda h] \sinh(\lambda h) \sinh(\lambda z)}{[2\lambda(1 - \nu) \tanh(\lambda h) + \lambda^2 h] \sinh(2\lambda h)}, \quad (1 + \kappa) = 4(1 - \nu)$$

Ce qui donne pour $\lambda W(\lambda, z)$

$$\lambda W(\lambda, z) = \frac{[\lambda z \cosh(\lambda z) - \sinh(\lambda z) (\lambda h \coth(\lambda h) + 2(1 - \nu))] \lambda H(\lambda)}{[2\lambda(1 - \nu) \tanh(\lambda h) + \lambda^2 h] \cosh(\lambda h)} + N_2(\lambda, z) \psi_1(\lambda)$$

D'où

$$\lambda W(\lambda, z) = \frac{[\lambda z \cosh(\lambda z) - \sinh(\lambda z) (\lambda h \coth(\lambda h) + 2(1 - \nu))] \lambda H(\lambda) \sinh(\lambda h)}{[2\lambda(1 - \nu) \tanh(\lambda h) + \lambda^2 h] \sinh(\lambda h) \cosh(\lambda h)} + N_2(\lambda, z) \psi_1(\lambda)$$

Alors

$$\lambda W(\lambda, z) = N_1(\lambda, z) \frac{H(\lambda) \tanh(\lambda h)}{2(1 - \nu) \tanh(\lambda h) + \lambda h} + N_2(\lambda, z) \psi_1(\lambda)$$

où

$$N_1(\lambda, z) = \frac{\lambda z \cosh(\lambda z) - \sinh(\lambda z) [\lambda h \coth(\lambda h) + 2(1 - \nu)]}{\sinh(\lambda h)}$$

Posons

$$\psi_3(\lambda) = \frac{H(\lambda) \tanh(\lambda h)}{2(1 - \nu) \tanh(\lambda h) + \lambda h} \quad (3.88)$$

D'où

$$\lambda W(\lambda, z) = N_1(\lambda, z) \psi_3(\lambda) + N_2(\lambda, z) \psi_1(\lambda) \quad (3.89)$$

La contrainte normale inverse de σ est donnée par

$$\bar{\sigma}_{rz}(\lambda, z) = \frac{2G}{1-2\nu} \left[(1-\nu) W'(\lambda, z) + \nu \lambda U(\lambda, z) - (1+\nu) \alpha \bar{T}(\lambda, z) \right]$$

Ce qui donne

$$\lambda \bar{\sigma}_{rz}(\lambda, z) = \frac{2G}{1-2\nu} P_5(\lambda, z) \quad (3.90)$$

où

$$P_5(\lambda, z) = \left[(1-\nu) \lambda W'(\lambda, z) + \nu \lambda^2 U(\lambda, z) - \lambda (1+\nu) \alpha \bar{T}(\lambda, z) \right]$$

où G est le module de cisaillement. Dans le cas de matériaux isotropes, il est relie au module d'élasticité E et au coefficient de Poisson ν par la relation suivante:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

où E est le module de Young.

On a les deux équations suivantes:

$$U(\lambda, z) = 2 \cosh(\lambda z) C_0(\lambda) - \frac{(2\kappa \cosh(\lambda z) + 2\lambda z \sinh(\lambda z)) H(\lambda)}{\lambda(1+\kappa) \sinh(\lambda h) + 2\lambda^2 \cosh(\lambda h)} \quad (3.91)$$

$$W'(\lambda, z) = \left[C_1 - \lambda \left(C_0 - \frac{A_0}{\lambda} + C_1 z \right) \right] e^{-\lambda z} + \left[C_3 + \lambda \left(C_2 + \frac{B_0}{\lambda} + C_3 z \right) \right] e^{\lambda z} \quad (3.92)$$

En remplaçant (3, 91) et (3, 92) dans (3, 90) ,ce qui donne à $\lambda \bar{\sigma}_{rz}(\lambda, z)$ la forme suivante

$$\lambda \bar{\sigma}_{rz}(\lambda, z) = \frac{2G}{1-2\nu} \frac{H_1(\lambda, z) + H_2(\lambda, z)}{(1+\kappa) \sinh(\lambda h) \cosh(\lambda h) + 2\lambda h \cosh^2(\lambda h)} \quad (3.93)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1(\lambda, z) = H_3(\lambda, z) + H_4(\lambda, z) + H_5(\lambda, z) + H_6(\lambda, z) + H_7(\lambda, z) \\ H_3(\lambda, z) = 4\lambda^3 h \cosh^2(\lambda h) C_0(\lambda) (2\nu - 1) \cosh(\lambda z) \\ H_4(\lambda, z) = 2\lambda^2 (1 + \kappa) \sinh(\lambda h) \cosh(\lambda h) \cosh(\lambda z) C_0(\lambda) \\ H_5(\lambda, z) = -2\lambda h (2\nu - 1) \cosh(\lambda h) \cosh(\lambda z) \psi_1(\lambda) \\ H_6(\lambda, z) = -(1 + \kappa) \sinh(\lambda h) \cosh(\lambda z) \psi_1(\lambda) \\ H_7(\lambda, z) = 4\lambda^2 \sinh(\lambda h) \cosh(\lambda h) \cosh(\lambda z) C_0(\lambda) \\ H_2(\lambda, z) = H_8(\lambda, z) + H_9(\lambda, z) + H_{10}(\lambda, z) + H_{11}(\lambda, z) + H_{12}(\lambda, z) \\ H_8(\lambda, z) = 4\lambda^3 z (1 - 2\nu) \sinh(\lambda h) \cosh(\lambda h) \sinh(\lambda z) C_0(\lambda) \\ H_9(\lambda, z) = -4\lambda^2 \nu (1 + \kappa) \sinh(\lambda h) \cosh(\lambda h) \cosh(\lambda z) C_0(\lambda) \\ H_{10}(\lambda, z) = -2 \sinh(\lambda h) \cosh(\lambda z) \psi_1(\lambda) \\ H_{11}(\lambda, z) = -2\lambda z (1 - 2\nu) \sinh(\lambda h) \sinh(\lambda z) \psi_1(\lambda) \\ H_{12}(\lambda, z) = 2\nu (1 + \kappa) \sinh(\lambda h) \cosh(\lambda z) \psi_1(\lambda) \end{array} \right.$$

On obtient la forme réduite suivante pour $\lambda \bar{\sigma}_{rz}(\lambda, z)$

$$\lambda \bar{\sigma}_{rz}(\lambda, z) = \frac{2G}{1 - 2\nu} \frac{[2\lambda^2 \cosh(\lambda h) C_0(\lambda) - \psi_1(\lambda)] [H_{13}(\lambda, z) + H_{14}(\lambda, z)]}{(1 + \kappa) \sinh(\lambda h) \cosh(\lambda h) + 2\lambda h \cosh^2(\lambda h)}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{13}(\lambda, z) = [2\lambda h (2\nu - 1) \cosh(\lambda h) + (1 + \kappa) \sinh(\lambda h)] \cosh(\lambda z) \\ H_{14}(\lambda, z) = \sinh(\lambda h) [2 \cosh(\lambda z) + 2\lambda z (1 - 2\nu) \sinh(\lambda z) - 2\nu (1 + \kappa) \cosh(\lambda z)] \end{array} \right.$$

Par suite

$$\lambda \bar{\sigma}_{rz}(\lambda, z) = 2G \frac{P_6(\lambda, h) [\lambda z \sinh(\lambda h) \sinh(\lambda z) - \cosh(\lambda z) (\lambda h \cosh(\lambda h) + \sinh(\lambda h))]}{2(1 - \nu) \sinh(\lambda h) \cosh(\lambda h) + \lambda h \cosh^2(\lambda h)}$$

où

$$P_6(\lambda, h) = [2\lambda^2 \cosh(\lambda h) C_0(\lambda) - \psi_1(\lambda)]$$

Alors $\lambda \bar{\sigma}_{rz}(\lambda, z)$, devient

$$\lambda \bar{\sigma}_{rz}(\lambda, z) = 2G \frac{P_6(\lambda, h) [\lambda z \sinh(\lambda h) \sinh(\lambda z) - \cosh(\lambda z) (\lambda h \cosh(\lambda h) + \sinh(\lambda h))]}{2(1-\nu) \sinh(\lambda h) \cosh(\lambda h) + \lambda h \cosh^2(\lambda h)}$$

On trouve

$$\lambda \bar{\sigma}_{rz}(\lambda, z) = 2G \frac{P_6(\lambda, h) [\lambda z \sinh(\lambda h) \sinh(\lambda z) - \cosh(\lambda z) (\lambda h \cosh(\lambda h) + \sinh(\lambda h))]}{(1-\nu) \sinh(2\lambda h) + \lambda h \cosh^2(\lambda h)}$$

Donc

$$\lambda \bar{\sigma}_{rz}(\lambda, z) = 2G [2\lambda^2 \cosh(\lambda h) C_0(\lambda) - \psi_1(\lambda)] N_3(\lambda, z) \quad (3.94)$$

où

$$N_3(\lambda, z) = \frac{\lambda z \sinh(\lambda h) \sinh(\lambda z) - \cosh(\lambda z) [\lambda h \cosh(\lambda h) + \sinh(\lambda h)]}{(1-\nu) \sinh(2\lambda h) + \lambda h \cosh^2(\lambda h)}$$

D'après l'équation (3.79), et sachant que $A_0(\lambda) = \frac{\psi_1(\lambda)}{\lambda \cosh(\lambda h)}$, on a

$$H(\lambda) = [2\lambda C_0(\lambda) - A_0(\lambda)] \sinh(\lambda h)$$

Alors

$$H(\lambda) = \left[2\lambda C_0(\lambda) - \frac{\psi_1(\lambda)}{\lambda \cosh(\lambda h)} \right] \sinh(\lambda h)$$

Ce qui donne

$$\lambda H(\lambda) = [2\lambda^2 \cosh(\lambda h) C_0(\lambda) - \psi_1(\lambda)] \tanh(\lambda h)$$

Par suite

$$\lambda H(\lambda) \tanh(\lambda h) = \left[2\lambda^2 \cosh(\lambda h) C_0(\lambda) - \psi_1(\lambda) \right] \tanh^2(\lambda h) \quad (3.95)$$

En tenant compte de (3.88), on a

$$\psi_3(\lambda) = \frac{H(\lambda) \tanh(\lambda h)}{2(1-\nu) \tanh(\lambda h) + \lambda h}$$

On trouve

$$H(\lambda) \tanh(\lambda h) = \psi_3(\lambda) [2(1-\nu) \tanh(\lambda h) + \lambda h]$$

Ce qui donne

$$\lambda H(\lambda) \tanh(\lambda h) = \lambda \psi_3(\lambda) [2(1-\nu) \tanh(\lambda h) + \lambda h] \quad (3.96)$$

On remarque que les équations (3.95), (3.96), donnent

$$P_6(\lambda, h) \tanh^2(\lambda h) = \lambda \psi_3(\lambda) [2(1-\nu) \tanh(\lambda h) + \lambda h] \quad (3.97)$$

D'où

$$2\lambda^2 \cosh(\lambda h) C_0(\lambda) - \psi_1(\lambda) = \frac{\lambda \psi_3(\lambda) [2(1-\nu) \tanh(\lambda h) + \lambda h]}{\tanh^2(\lambda h)} \quad (3.98)$$

En remplaçant (3.98) dans (3.94), on obtient

$$\lambda \bar{\sigma}_{rz}(\lambda, z) = 2G \frac{\lambda \psi_3(\lambda) [2(1-\nu) \tanh(\lambda h) + \lambda h]}{\tanh^2(\lambda h)} N_3(\lambda, z) \quad (3.99)$$

On a

$$\frac{\tanh^2(\lambda h)}{\sinh^2(\lambda h)} P_7(\lambda h) = 2(1-\nu) \tanh(\lambda h) + \lambda h \quad (3.100)$$

où

$$P_7(\lambda h) = \left[(1 - \nu) \sinh(2\lambda h) + \lambda h \cosh^2(\lambda h) \right]$$

D'après (3, 100), l'équation (3, 99), devient

$$\lambda \bar{\sigma}_{rz}(\lambda, z) = 2G \frac{\lambda z \sinh(\lambda h) \sinh(\lambda z) - \cosh(\lambda z) (\lambda h) \cosh(\lambda h) + \sinh(\lambda h)}{\sinh^2(\lambda h)} \lambda \psi_3(\lambda)$$

Ce qui donne

$$\lambda \bar{\sigma}_{rz}(\lambda, z) = 2G \lambda N_4(\lambda, z) \psi_3(\lambda) \quad (3.101)$$

où

$$N_4(\lambda, z) = \frac{\lambda z \sinh(\lambda h) \sinh(\lambda z) - \cosh(\lambda z) (\lambda h) \cosh(\lambda h) + \sinh(\lambda h)}{\sinh^2(\lambda h)}$$

La transformée inverse de Hankel d'ordre zéro de W , donne

$$w(r, z) = \int_0^{+\infty} \lambda W(\lambda, z) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.102)$$

En remplaçant (3, 89) dans (3, 102), on obtient l'équation intégrale suivante

$$w(r, z) = \int_0^{+\infty} [N_1(\lambda, z) \psi_3(\lambda) + N_2(\lambda, z) \psi_1(\lambda)] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.103)$$

En tenant compte de la condition mixte (3, 1a) du problème, en remplaçant par $z = h$ dans l'équation (3, 103), on obtient l'équation intégrale suivante

$$(w_z)_{z=h} = \int_0^{+\infty} \psi_3(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \eta(r), \quad r < a \quad (3.104)$$

où

$$\eta(r) = \frac{1}{2(1 - \nu)} [\epsilon + \varphi(r)] \quad (3.105)$$

$$\varphi(r) = \int_0^{+\infty} \frac{\tanh(\lambda h)}{\lambda} \psi_1(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.106)$$

La transformée inverse de Hankel d'ordre zéro de $\bar{\sigma}_{rz}$ donne

$$\sigma_{rz}(r, z) = \int_0^{+\infty} \lambda \bar{\sigma}_{rz}(\lambda, z) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.107)$$

En remplaçant (3, 101) dans (3, 107), on obtient l'équation intégrale suivante

$$\sigma_{rz}(r, z) = \int_0^{+\infty} 2G\lambda N_4(\lambda, z) \psi_3(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.108)$$

D'après la condition mixte (3, 1b) du problème, en remplaçant par $z = h$, $r \geq a$ dans l'équation (3, 110), on obtient l'équation intégrale suivante

$$(\sigma_{rz})_{z=h} = \int_0^{+\infty} \lambda \left[\frac{\sinh(\lambda h) \cosh(\lambda h) + \lambda h}{\sinh^2(\lambda h)} \right] \psi_3(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (3.109)$$

Posons

$$\psi_2(\lambda) = \left[\frac{\sinh(\lambda h) \cosh(\lambda h) + \lambda h}{\sinh^2(\lambda h)} \right] \psi_3(\lambda) \quad (3.110)$$

Ce qui implique pour l'équation (3, 109)

$$(\sigma_{rz})_{z=h} = \int_0^{+\infty} \lambda \psi_2(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r \geq a \quad (3.111)$$

L'équation (3.110) donne

$$\psi_3(\lambda) = \left[\frac{\sinh^2(\lambda h)}{\sinh(\lambda h) \cosh(\lambda h) + \lambda h} \right] \psi_2(\lambda) \quad (3.112)$$

En remplaçant (3.112), dans (3.104), on obtient

$$(w_z)_{z=h} = \int_0^{+\infty} \left[\frac{\sinh^2(\lambda h)}{\sinh(\lambda h) \cosh(\lambda h) + \lambda h} \right] \psi_2(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \eta(r), \quad r < a$$

Ce qui donne

$$(w_z)_{z=h} = \int_0^{+\infty} M(\lambda) \psi_2(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \eta(r), \quad r < a \quad (3.113)$$

où

$$M(\lambda) = \frac{\sinh^2(\lambda h)}{\sinh(\lambda h) \cosh(\lambda h) + \lambda h} = [1 + E(\lambda)] \quad (3.114)$$

et

$$E(\lambda) = \frac{2(e^{-4\lambda h} - (1 + 2\lambda h)e^{-2\lambda h})}{1 - e^{-4\lambda h} + 4\lambda h e^{-2\lambda h}}$$

D'après les équations (3, 111), (3, 113), on obtient les équations intégrales duales du problème mécanique

$$\begin{cases} (w_z)_{z=h} = \int_0^{+\infty} M(\lambda) \psi_2(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \eta(r), & r < a \\ (\sigma_z)_{z=h} = \int_0^{+\infty} \lambda \psi_2(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, & r \geq a \end{cases} \quad (3.115)$$

où

$$\eta(r) = \frac{1}{2(1-\nu)} (\epsilon + \varphi(r)) \quad (3.116)$$

$$\varphi(r) = \int_0^{+\infty} \frac{\tanh(\lambda h)}{\lambda} \psi_1(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.117)$$

3.3.6 La solution numérique du problème mécanique

3.3.6.1 La transformée des équations duales du problème mécanique

On a la formule qui est définie par

$$\int_0^{+\infty} \lambda J_0(\lambda r) Z_n(\lambda) d\lambda = \begin{cases} \frac{2}{\pi r} \frac{T_{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)}{\sqrt{a^2-r^2}} & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases} \quad (3.118)$$

Où $T_n(x)$ est le polynôme de Chebyshev de premier espèce, qui est donné par la relation de récurrence suivante

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \end{cases}$$

Qui sont orthogonaux sur $[-1, 1]$, avec $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$

La formule (3.118) et la fonction $Z_n(\lambda)$ permettent de chercher la solution de (3.115) sous la forme

$$\psi_2(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n Z_n(\lambda) \quad (3.119)$$

où les β_n sont des coefficients inconnus à déterminer.

Substituons la fonction $\psi_2(\lambda)$ dans (3.115), on obtient

$$\int_0^{+\infty} M(\lambda) \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n Z_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{1}{2(1-\nu)} (\epsilon + \varphi(r))$$

Utilisons la formule (3.31), on trouve

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos(m\theta) \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n A_{mn} = \frac{1}{2(1-\nu)} (\epsilon + \varphi(r)) \quad (3.120)$$

où

$$A_{mn} = \int_0^{+\infty} M(\lambda) Z_n(\lambda) X_m(\lambda) d\lambda \quad (3.121)$$

D'après (3.116), on obtient

$$\eta(r) = \frac{1}{2(1-\nu)} (\epsilon + \varphi(r)) = \frac{1}{2(1-\nu)} \varpi(r) \quad (3.122)$$

où

$$\varpi(r) = \epsilon + \int_0^{+\infty} \frac{\tanh(\lambda h)}{\lambda} \psi_1(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda$$

En remplaçant $\psi_1(\lambda)$ dans (3.122), et utilisons la formule (3.31) de Gegenbauer, alors (3,116) admette la forme suivante

$$\eta(r) = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\epsilon + \int_0^{+\infty} \frac{\tanh(\lambda h)}{\lambda} S_{mn}(\lambda) d\lambda \right] \quad (3.123)$$

où

$$S_{mn}(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n F_n(\lambda) \sum_{m=0}^{+\infty} (2 - \delta_{0m}) X_m(\lambda) \cos(m\theta)$$

Par suite

$$\eta(\lambda) = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\epsilon + \sum_{m=0}^{+\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos(m\theta) \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n G_{mn} \right] \quad (3.124)$$

où

$$G_{mn} = \int_0^{+\infty} \frac{\tanh(\lambda h)}{\lambda} F_n(\lambda) X_m(\lambda) d\lambda \quad (3.125)$$

On a

$$\epsilon = \sum_{m=0}^{+\infty} \epsilon_m \cos(m\theta)$$

où

$$\epsilon_m = \begin{cases} \epsilon, & m = 0 \\ 0, & m = 1, 2 \end{cases}$$

On remplace ϵ par leur expression dans (3.124), ce qui donne

$$\eta(\lambda) = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\sum_{m=0}^{+\infty} \epsilon_m \cos(m\theta) + I_{mn} \right] \quad (3.126)$$

telle que

$$I_{mn} = \sum_{m=0}^{+\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos(m\theta) \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n G_{mn}$$

Alors notre équation (3.126) s'écrit sous la forme

$$\eta(\lambda) = \frac{1}{2(1-\nu)} \sum_{m=0}^{+\infty} \cos(m\theta) \left[\epsilon_m + (2 - \delta_{0m}) \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n G_{mn} \right] \quad (3.127)$$

D'après les équations (3.122), (3.127), l'équation (3.120) devient

$$(2 - \delta_{0m}) \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n A_{mn} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\epsilon_m + (2 - \delta_{0m}) \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n G_{mn} \right]$$

Donc (3, 120) devient comme suit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n A_{mn} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\frac{\epsilon_m}{(2 - \delta_{0m})} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n G_{mn} \right] \quad (3.128)$$

Remarquons que

$$\epsilon_m = \epsilon \delta_{0m} \quad \text{et} \quad \frac{\delta_{0m}}{(2 - \delta_{0m})} = \delta_{0m}$$

où δ_{0m} est le symbole de Kroneker.

Donc on obtient le système algébrique (3.128), sous la forme suivante:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n A_{mn} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\epsilon \delta_{0m} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n G_{mn} \right] \quad (3.129)$$

Telle que

$$A_{mn} = \int_0^{+\infty} M(\lambda) Z_n(\lambda) X_m(\lambda) d\lambda \quad (3.130)$$

$$M(\lambda) = [1 + E(\lambda)], \quad E(\lambda) = \frac{2(e^{-4\lambda h} - (1 + 2\lambda h)e^{-2\lambda h})}{1 - e^{-4\lambda h} + 4\lambda h e^{-2\lambda h}}$$

$$G_{mn} = \int_0^{+\infty} \frac{\tanh(\lambda h)}{\lambda} F_n(\lambda) X_m(\lambda) d\lambda \quad (3.131)$$

On remarque que la fonction $M(\lambda)$ dans l'équation (3.130) tend vers 1 lorsque λ tend vers l'infini. Donc (3.130) ce réduit à la forme

$$A_{mn} = \int_0^{\lambda_0} M(\lambda) Z_n(\lambda) X_m(\lambda) d\lambda + \int_{\lambda_0}^{+\infty} X_m(\lambda) Z_n(\lambda) d\lambda \quad (3.132)$$

On a

$$X_m(\lambda) Z_n(\lambda) = \frac{4}{\pi^2 a^2} \left[\frac{\sin(\lambda a)}{\lambda^2} + \frac{(-1)^m}{2} \frac{1 - \cos(2\lambda a)}{\lambda^2} \right]$$

Par suite, le second membre de l'équation (3.132), devient

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} X_m(\lambda) Z_n(\lambda) d\lambda = \frac{4}{\pi^2 a^2} \left[\int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda^2} d\lambda + \frac{(-1)^m}{2} \int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{1 - \cos(2\lambda a)}{\lambda^2} d\lambda \right]$$

Puis considérons les deux intégrales ainsi obtenues

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda^2} d\lambda \quad \text{et} \quad \int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{1 - \cos(2\lambda a)}{\lambda^2} d\lambda$$

Une intégration par parties pour la première intégrale

On a

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda^2} d\lambda = \left[\left(\frac{-1}{\lambda} \right) \sin(\lambda a) \right]_{\lambda_0}^{+\infty} - \int_{\lambda_0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{\lambda} \right) a \cos(\lambda a) d\lambda$$

Par suite

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda^2} d\lambda = \frac{\sin(\lambda_0 a)}{\lambda_0} + a^2 \int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{\cos(\lambda a)}{\lambda a} d\lambda$$

Pour la deuxième partie de cette intégrale, faisons le changement de variable $t = \lambda a$. Alors on obtient

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{\cos(\lambda a)}{\lambda a} d\lambda = \frac{1}{a} \int_{\lambda_0 a}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt = -\frac{1}{a} \text{Ci}(\lambda_0 a)$$

D'où la première intégrale devient

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda^2} d\lambda = \frac{\sin(\lambda_0 a)}{\lambda_0} - a \text{Ci}(\lambda_0 a)$$

où

$$\text{Ci}(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$$

On peut traiter de la même manière la deuxième intégrale

On a

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{1 - \cos(2\lambda a)}{\lambda^2} d\lambda = \left[\left(\frac{-1}{\lambda} \right) (1 - \cos(2\lambda a)) \right]_{\lambda_0}^{+\infty} - \int_{\lambda_0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{\lambda} \right) (2a \sin(2\lambda a)) d\lambda$$

Alors

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{1 - \cos(2\lambda a)}{\lambda^2} d\lambda = \frac{[1 - \cos(2\lambda_0 a)]}{\lambda_0} + 4a^2 \int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{\sin(2\lambda a)}{2\lambda a} d\lambda$$

Faisons le changement de variable $t = 2\lambda a$, on obtient

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{\sin(2\lambda a)}{2\lambda a} d\lambda = \frac{1}{2a} \int_{2\lambda_0 a}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Telle que

$$\int_{2\lambda_0 a}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = -\text{Si}(2\lambda_0 a)$$

D'où la deuxième intégrale devient

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{1 - \cos(2\lambda a)}{\lambda^2} d\lambda = \frac{[1 - \cos(2\lambda_0 a)]}{\lambda_0} - 2a \text{Si}(2\lambda_0 a)$$

Donc on obtient

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} X_m(\lambda) Z_n(\lambda) d\lambda = \frac{4}{\pi^2 a^2} R(\lambda_0, m, a)$$

où

$$R(\lambda_0, m, a) = \left[\frac{\sin(\lambda_0 a)}{\lambda_0} - a \operatorname{Ci}(\lambda_0 a) + \frac{(-1)^m}{2} \left(\frac{1 - \cos(2\lambda_0 a)}{\lambda_0} - 2a \operatorname{Si}(2\lambda_0 a) \right) \right]$$

Alors l'équation (3.132) s'écrit sous la forme

$$A_{mn} = \int_0^{\lambda_0} M(\lambda) Z_n(\lambda) X_m(\lambda) d\lambda + \frac{4}{\pi^2 a^2} R(\lambda_0, m, a)$$

On remarque aussi que la fonction $\tanh(\lambda h)$ dans l'équation (3.131) tend vers 1

lorsque λ tend vers l'infini, donc l'équation (3, 131) devient comme suit

$$G_{mn} = \int_0^{\lambda_0} \frac{\tanh(\lambda h)}{\lambda} F_n(\lambda) X_m(\lambda) d\lambda + \int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{F_n(\lambda) X_m(\lambda)}{\lambda} d\lambda$$

On a

$$\frac{F_n(\lambda)}{\lambda} = \left[J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda a/2) J_{-(n+\frac{1}{2})}(\lambda a/2) - J_{n+\frac{3}{2}}(\lambda a/2) J_{-(n+\frac{3}{2})}(\lambda a/2) \right]$$

Alors la limite de cette expression l'orsque λ temp vers l'infini est donnée par

$$\frac{F_n(\lambda)}{\lambda} \rightarrow -\frac{8}{\pi \lambda^2 a^2} (n+1) \cos(\lambda a) , \lambda \rightarrow +\infty$$

où

$$X_m(\lambda) = J_m^2(\lambda a) \simeq \frac{2}{\pi a \lambda} [1 + (-1)^m \sin(\lambda a)]$$

Par suite

$$\frac{F_n(\lambda) X_m(\lambda)}{\lambda} \simeq -\frac{16}{\pi^2 a^3 \lambda^3} (n+1) \left[\cos(\lambda a) + \frac{(-1)^m}{2} \sin(2\lambda a) \right]$$

Donc

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{F_n(\lambda) X_m(\lambda)}{\lambda} d\lambda \simeq -\frac{16}{\pi^2 a^3} (n+1) \left[\int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{\cos(\lambda a)}{\lambda^3} d\lambda + \frac{(-1)^m}{2} \int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{\sin(2\lambda a)}{\lambda^3} d\lambda \right]$$

négligemment cette quantité, dans ce cas, l'équation (3,131) s'écrit sous la forme

$$G_{mn} = \int_0^{\lambda_0} \frac{\tanh(\lambda h)}{\lambda} F_n(\lambda) X_m(\lambda) d\lambda$$

L'équation (3.129) s'écrit sous la forme d'un système algébrique comme suit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n A_{mn} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\epsilon \delta_{0m} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n G_{mn} \right] \quad (3.133)$$

En tenant compte des équations (3.103), (3,110), et pour $z = h$, $r \geq a$ on obtient la forme suivante pour $w(r, h)$

$$w(r, h) = \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \int_0^{+\infty} L_1(\lambda) + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \int_0^{+\infty} L_2(\lambda) \right] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.134)$$

où les fonctions $L_1(\lambda)$ et $L_2(\lambda)$ sont définies par

$$L_1(\lambda) = -2(1-\nu) M(\lambda) Z_n(\lambda), \quad L_2(\lambda) = \frac{\tanh(\lambda h)}{\lambda} F_n(\lambda)$$

de la même manière et d'après la formule (3.118), et les équations (3,108), (3,110), on obtient $\sigma_{rz}(r, h)$ pour $z = h$, sous la forme suivante

$$\sigma_{rz}(r, h) = \frac{2}{\pi r} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \frac{T_{2n+1}}{\sqrt{a^2 - r^2}} \left(\frac{r}{a} \right), \quad r < a \quad (3.135)$$

3.3.6.2 Graphes et tableaux du problème mécanique

Les coefficients β_n dans le cas mécanique

n	$a = 1, H = 0.5$	$a = 1, H = 1$	$a = 1, H = 1.25$
1	0.12256216	0.07592221	0.06673514
2	-0.03169716	-0.00834113	-0.00502808
3	0.00138746	0.00035056	0.000103172
4	0.00014469	-0.00018434	-0.00016434
5	-0.00040336	-0.00026948	-0.00024458
6	-0.00038629	-0.00027929	-0.00025420
7	-0.00051984	-0.00038202	-0.00034762
8	-0.00052778	-0.00038716	-0.00035229
9	-0.00067430	-0.00049461	-0.00045007
10	-0.00104057	-0.0007632	-0.00069446

Tableau.2: Les coefficients β_n dans le cas mécanique, $H = \frac{h}{a}$

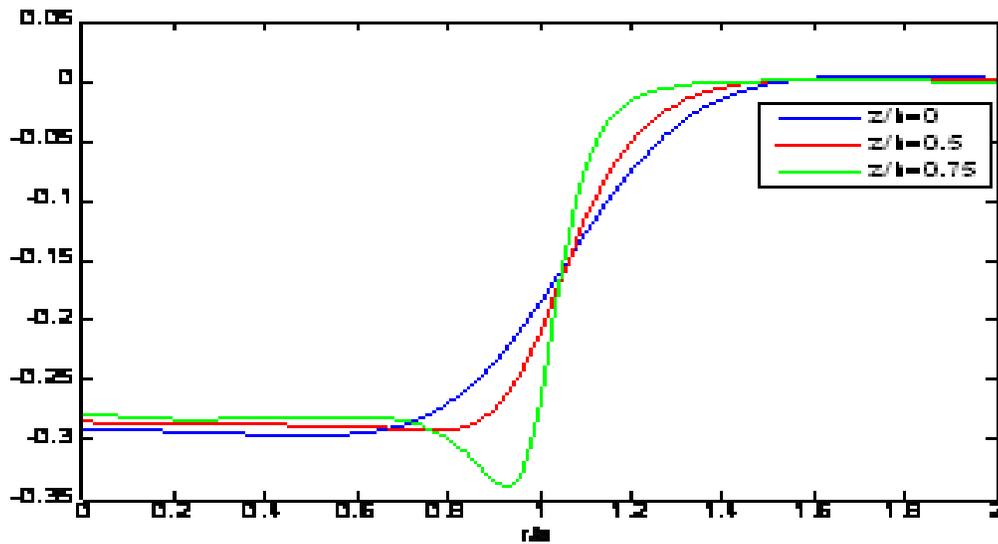


Fig: 8. La distribution de la contrainte normale σ_{rz} : $a = 1, H = 0.5, z/a = 0, 0.5, 0.75$

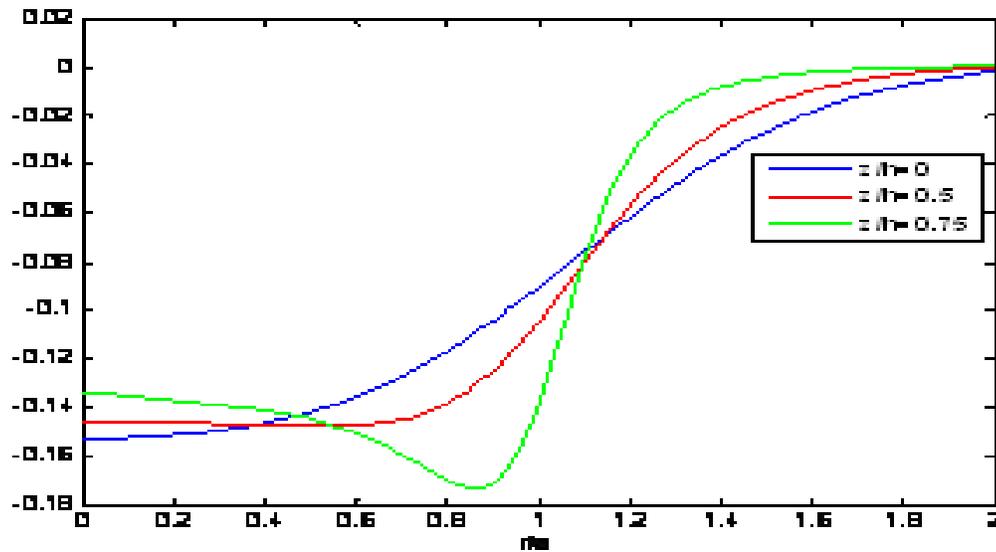


Fig: 9. La distribution de la contrainte normale σ_{rz} : $a = 1, H = 1, z/a = 0, 0.5, 0.75$

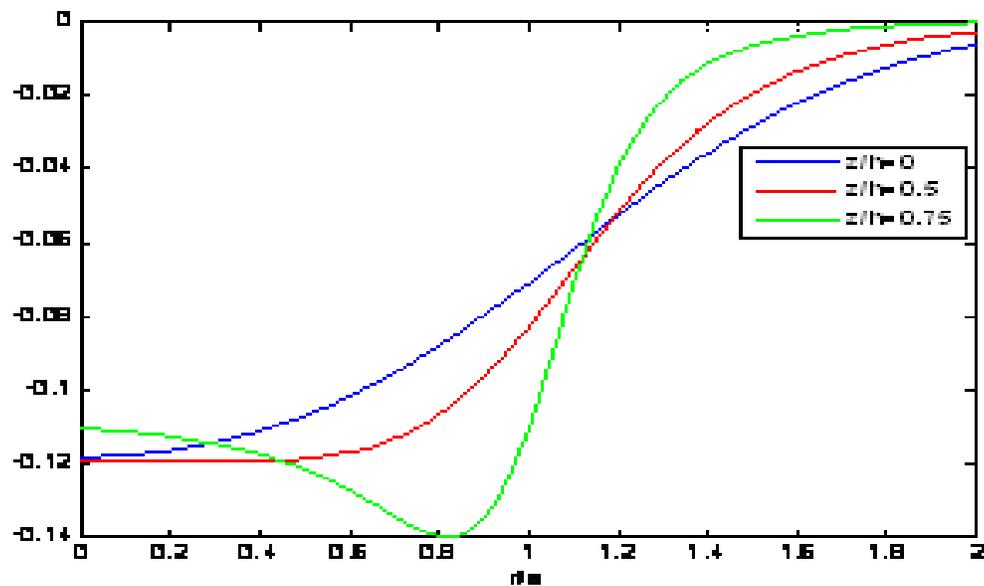


Fig:10. La distribution de la contrainte normale σ_{rz} : $a = 1, H = 1.25, z/a = 0, 0.5, 0.75$

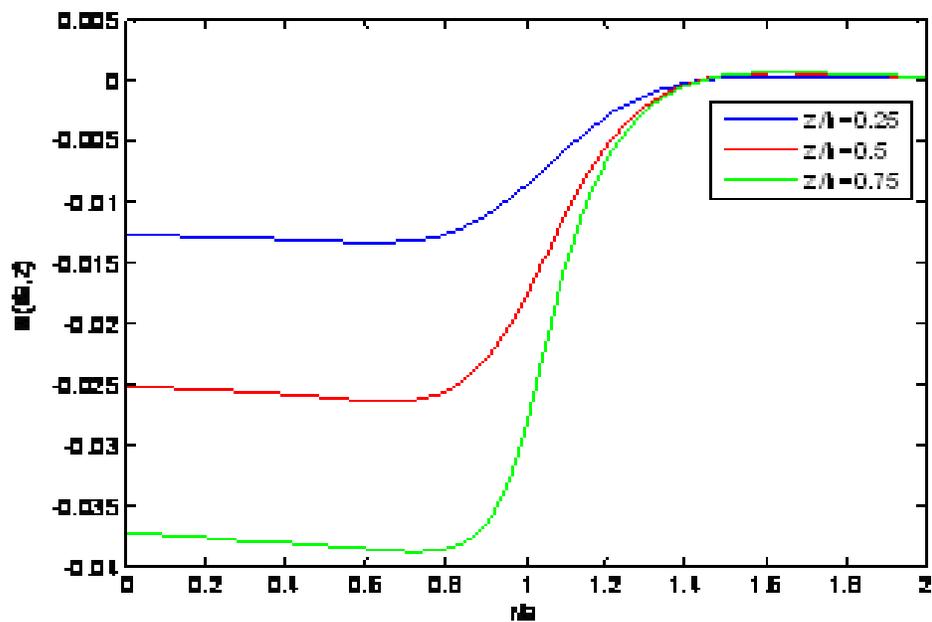


Fig:11. Le déplacement axial w_z : $a = 1$, $H = 0.25$, $z/a = 0.25, 0.5, 0.75$

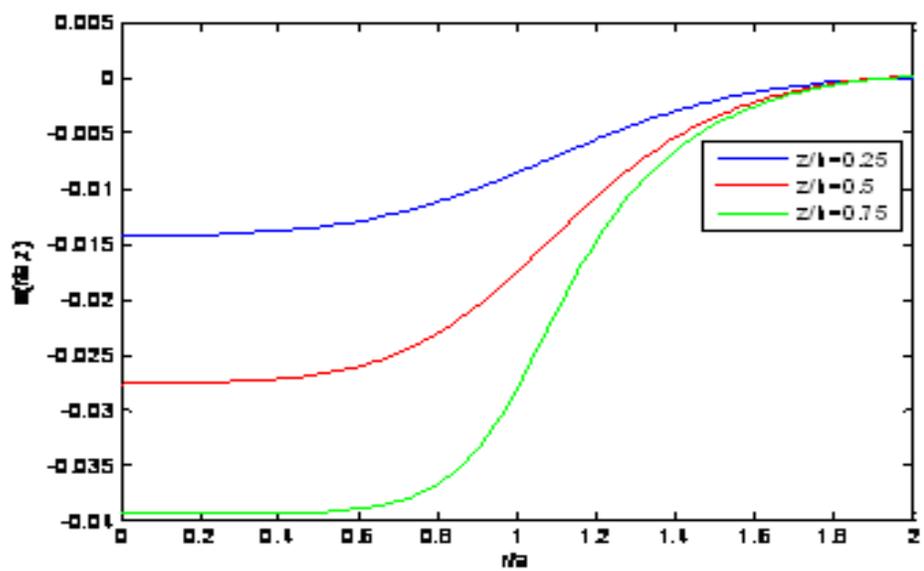


Fig:12. Le déplacement axial w_z : $a = 1$, $H = 1$, $z/a = 0.25, 0.5, 0.75$

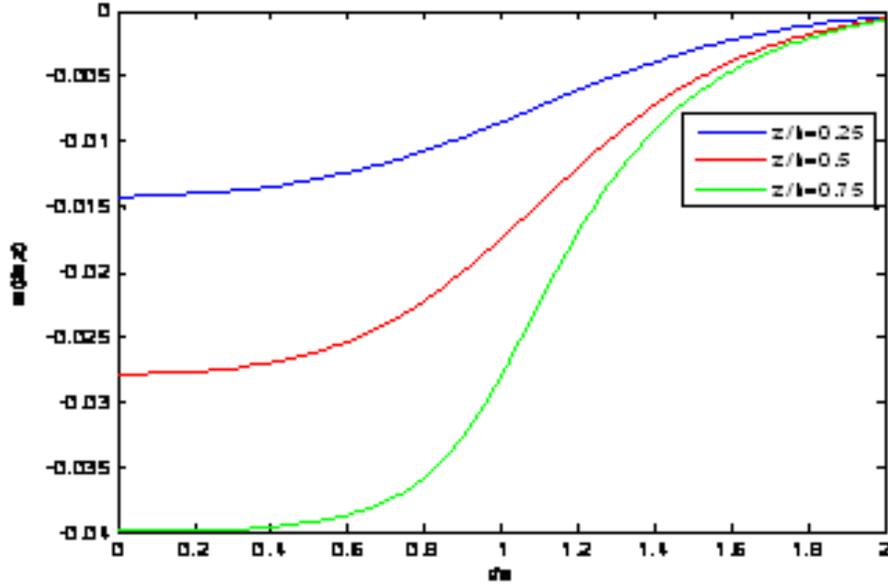


Fig:13. Le déplacement axial w_z : $a = 1$, $H = 1.25$, $z/a = 0.25, 0.5, 0.75$

3.3.7. Résultats numériques et discussions

Les coefficients α_n et β_n des systèmes algébriques infinis (3, 40), (3, 133) respectivement sont déterminés numériquement par la méthode de Simpson avec $\lambda_0 = 1500$ (Matlab 2009)

Ils sont donnés sous forme tableaux.

La température est croissante l'orsque l'épaisseur h augmente et r tend vers 1, mais elle tendra rapidement vers 0 si $r > 1$.

Pour le cas $r < 1$ la contrainte normale correspondante aux couches $z = 0, h/2$ et $3h/4$ se décroissante début de l'intervalle, prend la forme d'une parabole sur l'intervalle $[0.6 \quad 1]$. Tend

vers zéro l'orsque $r > 1$.

Pour les couche $z = h/4, h/2$ et $3h/4$ le déplacement axial se stabilise début de l'intervalle, prend la forme d'une parabole au voisinage de $r = 1$

T_0 (°C)	ε	α (K^{-1})	ν
180	0.1	$18.8 * 10^{-6}$	0.29

Conclusion

La résolution du problème proposé a été réalisée dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire. Par la méthode de la transformation intégrale de Hankel les problèmes thermique et mécanique aux conditions mixtes sont réduits à des systèmes d'équations intégrales duales couplés. L'idée de résolution de ces équations dans le cas thermoélastique est basée sur les travaux récents de Sakamoto et Kobayashi appliquées au cas élastostatique. Elle utilise la formule d'addition de Gegenbauer, pour transformer les équations duales en des systèmes algébriques infinis, ce qui a permis de calculer les grandeurs physiques du problème, à savoir la température, les contraintes et les déplacements dans la plaque.

Dans une seconde étape, il serait souhaitable d'appliquer cette méthode sur le problème suivant:

Déformation thermoélastique d'une plaque épaisse reposant sur un appui rigide ayant un trou circulaire.

La plaque élastique se déforme sous l'effet d'un poinçon rigide chauffé à une température T_0 et dont la pénétration est égale à δ .

L'appui est supposé thermiquement isolé alors que le trou circulaire est maintenu à une température nulle. Ce qui se ramène à la résolution du système non homogène de Lamé et de l'équation de conduction thermique vérifiant les conditions mécanique et thermique suivantes:

$$(\sigma_z)_{z=0} = (\tau_{zr})_{z=0} = 0, r < a$$

$$(w)_{z=0} = (\tau_{zr})_{z=0} = 0, r > a$$

$$(w)_{z=h} = -\delta, r \geq 0$$

$$(\tau_{zr})_{z=h} = 0, r \geq 0$$

$$(T)_{z=0} = 0; r < a$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0} = 0, r > a$$

$$(T)_{z=h} = T_0, r \geq 0$$

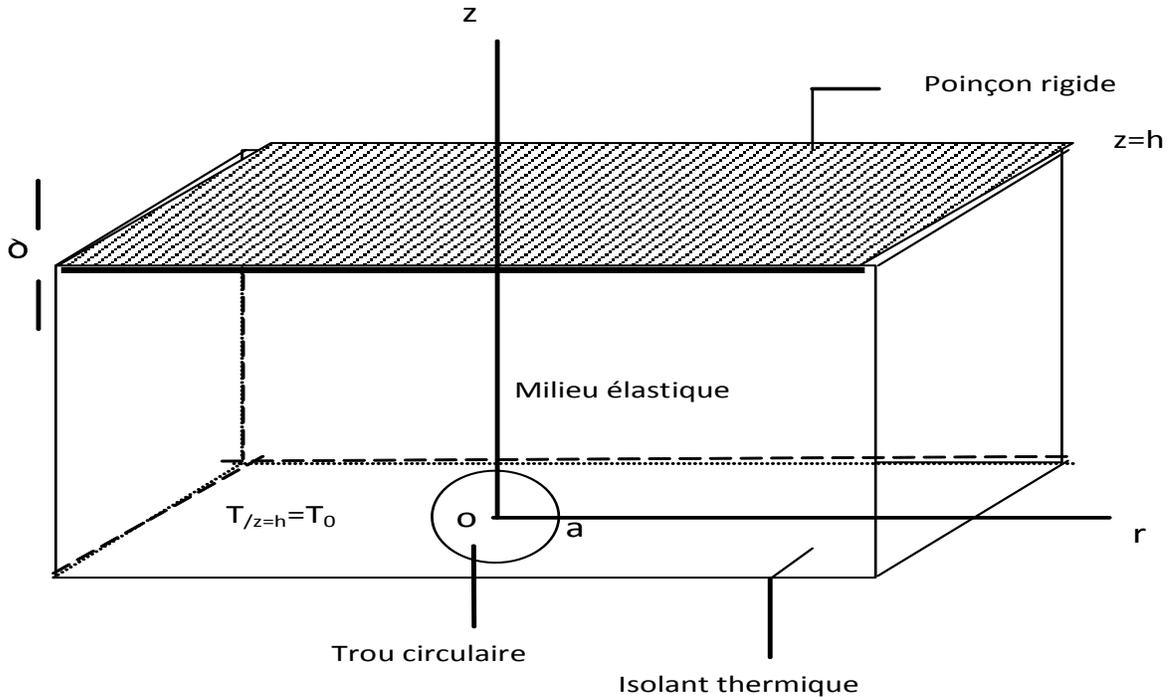


Fig: 14. *Plaque épaisse reposant sur un appui rigide ayant un trou circulaire*

Bibliographie

- [1] A. Nikiforov. V. Ovourov. Fonctions Spéciales de la Physique Mathématique, Office des publications Universitaires: 12-1987
- [2] A. N .Kolmogorov. S. Fomine, elements de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Mir, Moscou,1977.
- [3] Bowman. F. Introduction to Bessel Function, Dover New York, 1958.
- [4] B. kebli. F. Guerrache, Thermoelastic deformation problem of a cracked thick layer, Canadian Journal on Mechanical Sciences & Engineering Vol. 2, No. 5, June 2011
- [5] C. Nasim and B. D. Aggarwala, On some dual integral equations, Department of Mathematics and Statistics, Uneversity of Galgary, Galgary, Alberta, Canada T2N1N4, March 1984
- [6] Debnath, L.(2007),Integral transforms and their applications, Chapman

Hall/CRC., pp2010.

[7] Ellie Belorizky. Outls Mathématiques à l'usages des scientifiques et ingénieurs, Université Joseph Fourier ,juin 2007.

[8] Gradshteyn. I. S. and Ryzhik I.M, Tables of integrals series and products, seventh edion, Acadimic press, New york., pp 1200, 2007.

[9] Lowengrub and I. N. Sneddon, The solution of a pair of dual integral equations, the Department of Mathematics, Duke University, North Carolina, 1961.

[10] Martin H. Sadd, Elasticity , theory ,Applications, and Numerics. University of Rhode Island, Department of Mechanical Engineering and Applied Mechanics. Kingston,

Rhode Island, 2004.

[11] Megnounif Abdellatif, Djafour Mustapha, Cours Universitaires ,Genie Civil, Elasticite Générale, Office des publications Universitaires: 09-1994

[12] M. Kumar and Uma Hiremath, Axisymmetric indentation of thick elastic plate by pair of heated flat annular punches, Department of Mathematics, M. A. College of Technology, Bhopal,

india, 1987.

[13] M. Sakamoto, An Elastic layer with a Penny -Shaped Crack Subjected to Internal Pressure, Department of Health Sciences, Niigata U niversity School of Medicine, Japan; 2003

[14] M. Sakamoto & K. Kobayashi, Axisymmetric indentation of an elastic layer on a rigid foundation with a circular hole, Biomechanics Laboratory, Department of Health Sciences, Niigata

University School of Medicine, Japan, 2005.

[15] Ranjit. S. Dhaliwal, The Steady-state Thermoelastic Mixed Boundary-value Problem for the Elastic Layer, J. Inst. Maths Applics 1971.

[16] Vladimir Zakharov, Bessel Function and their application to solution of Partial Differential Equations, math.arizona.edu/~zakharov/Besselfunction.pdf, 2009.

[17] Yives Debard, Élasticité, Institut Universitaire de Technologie du Mans Département Génie Mécanique et Productique, 2011.

[18] Z. Olesiak & I. N. Sneddon, The Distribution of Thermal Stress in an Infinite Elastic Solid Containing a Penny -Shaped Crack ,*Azch, Ration,Mech.*, 4, pp 238-254, Anal 1966.