

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene

FACULTE DE GENIE CIVIL

**MEMOIRE**

Présenté pour l'obtention du diplôme de

**MAGISTER**

En Génie Civil

**Spécialité : Construction**

Présentée par

Moufida MAKHLOUFI

Ingénieur en Constructions hydrauliques et Aménagement (Juin 1995)

THEME

**ANALYSE NON LINEAIRE DES POUTRES SUR  
APPUIS INELASTIQUES**

Soutenu le	, devant le jury suivant :	
Mr. BENOUAR D.	Professeur, FGC, USTHB	Président
Mme. KHARCHI F.	Professeur, FGC, USTHB	Directrice de Thèse
Mr. DJELLAB S.E	Chargé de cours, FGC , USTHB	Co-directeur de Thèse
Mr. BOURAHLA N.	Professeur, U.BLIDA	Examineur
Mr. NECHNECH	Maître de conférences FGC, USTHB	Examineur
Mr. ADMAN R.	Chargé de cours, FGC, USTHB	Examineur

# SOMMAIRE

## INTRODUCTION GENERALE

1. Introduction
2. Problématique et objectifs

## CHAPITRE I

### SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE

- 1.1 Introduction
- 1.2 Types de problèmes
  - 1.2.1 Problèmes statiques
  - 1.2.2 Problèmes dynamiques
  - 1.2.3 Problèmes non linéaires
    - 1.2.3.1 Non linéarité géométrique
    - 1.2.3.2 Non linéarité matérielle
    - 1.2.3.3 Non linéarité due a la perte de contact
- Conclusion

## CHAPITRE 2

### ANALYSE DU 1<sup>er</sup> ORDRE ELASTIQUE

- 2.1 Introduction
- 2.2 Formulation du problème
- 2.3 Résolution du problème
  - 2.3.1 Méthodes analytiques de résolution
  - 2.3.2 Méthodes matricielles de résolution
    - 2.3.2.1 Matrice de rigidité exacte avec sol a un paramètre
    - 2.3.2.2 Matrice de rigidité exacte avec sol à deux paramètres
    - 2.3.2.3 Elément généralisé de Yokiyama
    - 2.3.2.4 Formulation utilisée dans ce mémoire
- 2.4 Applications et validations
- 2.5 Conclusions

## CHAPITRE 3

### ANALYSE DU 1<sup>er</sup> ORDRE ELASTOPLASTIQUE

- 3.1 Introduction
- 3.2 Relations moment-courbure
  - 3.2.1 Relations moment-courbure (section en acier)
  - 3.2.2 Relations moment-courbure (section en béton)
- 3.3 Modèle bi- linéaire du sol
- 3.4 Implémentation numérique
- 3.5 Portiques sur appuis rigides ('Push over analysis')
- 3.6 Interaction portique-fondation-sol ('Push over analysis')

## CHAPITRE 4

### ANALYSE DU 2<sup>nd</sup> ORDRE ELASTIQUE/ELASTOPLASTIQUE

- 4.1 Introduction
- 4.2 Matrice de rigidité élémentaire
- 4.3 Détermination des charges critiques
- 4.4 Applications
  - 4.4.1 Poutres sur appuis élastiques et nœuds rigides
  - 4.4.2 Poutres sur appuis rigides
  - 4.4.3 Poutres sur appuis élastiques et nœuds souples
- 4.5 Analyse du second ordre élastoplastique

## CHAPITRE 5

### FORMULATION DE LA PERTE DE CONTACT

- 5.1 Introduction
- 5.2 Formulation du problème
- 5.3 Résolution du problème
- 5.4 Applications numériques
- 5.5 Conclusions

## CONCLUSIONS

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

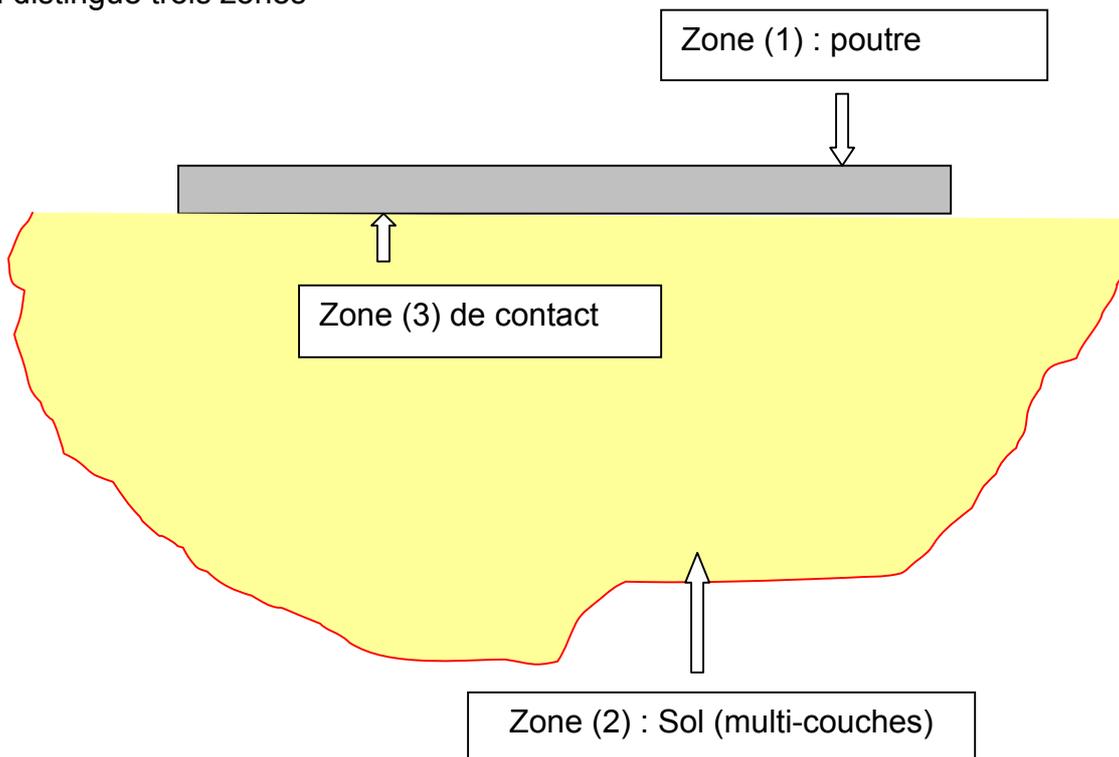
## ANNEXES

# INTRODUCTION GENERALE

## 1. INTRODUCTION

Le problème de poutre sur un sol multi-couches est un problème de contact extrêmement complexe. Il nécessite d'importantes simplifications afin d'aboutir à une formulation mathématique simple.

On distingue trois zones



a- Zone (1) : la poutre

La poutre peut être de longueur finie, semi-infinie ou infinie.

Reposant sur le sol et ayant des caractéristiques mécaniques plus importantes que celles du sol. Elle pourra être étudiée selon la théorie de l'élasticité (classique ou de

Cosserat) ou bien en introduisant des simplifications supplémentaires selon les trois hypothèses ci dessous :

- Hypotheses d'Euler-Bernoulli
- Hypotheses de Timoshenko
- ' High order theory '

Les déformations de cisaillement sont négligées selon Euler-bernoulli, par conséquent les sections planes restent planes et normales à la ligne moyenne après déformation.

Les déformations de cisaillement ne sont pas négligées selon Timoshenko, et les sections planes restent planes après déformation mais pas nécessairement normale à la ligne moyenne. Bien que cette approche soit supérieure a celle proposée par Euler-Bernoulli mais les contraintes de cisaillement ne sont pas nulles aux fibres extrêmes.

Ceci a conduit à l'émergence récente de la troisième théorie ' high order theory', dans laquelle les sections planes ne restent plus planes après déformation, ce qui corrige les deux hypothèses précédentes.

Il faut noter que ces trois approches ne tiennent pas compte de l'état biaxial de contraintes selon la théorie de l'élasticité, car la contrainte normale verticale est négligée.

Après ces hypothèses, d'autres simplifications sur les deux aspects : géométrique et comportement du matériau constitutif de la poutre doivent être émises selon les quatre analyses ci dessous :

- (a) Analyse de premier ordre élastique
- (b) Analyse de premier ordre élastoplastique
- (c) Analyse de second ordre élastique
- (d) Analyse de second ordre élastoplastique.

Et ce pour les cas de problèmes statiques ou dynamiques.

Dans (a) le matériau est supposé élastique, et la configuration géométrique de la structure avant et après chargement n'a pas trop changé. Les équations d'équilibre souvent écrits selon la configuration initiale sont valables.

Dans (b) on tient compte de la loi de comportement expérimentale du matériau.

Dans (c) le matériau est supposé élastique, mais les équations d'équilibre sont établies dans la configuration géométrique déformée de la structure.

L'analyse (d) est la plus rigoureuse à ce jour, combinant (b) et (c).

b- Zone (2) : le sol :

Avec ses trois phases (solide, eau et air) et en multicouches, c'est le milieu qui réagira à l'action de la poutre. C'est un espace semi-infini le plus complexe dans le domaine de Génie civil des points de vue comportement expérimental et modélisation numérique.

On traitera le problème d'une perspective structurale mécanique, par conséquent le sol sera considéré comme un appui 'non-élastique' à comportement bilinéaire et le modèle de Pasternak au lieu de Winkler sera utilisé.

D'un point de vue géotechnique, c'est une simplification de *poïds*.

**c- Zone (3) : de contact :**

Immatérielle, de géométrie plane (devient plan courbe après flexion de la poutre), c'est la zone à travers laquelle l'interaction poutre-sol se produit. Elle peut être lisse ou rugueuse. Dans le cas d'une surface de contact lisse la réaction du sol est normale (verticale). Dans ce cas il n'y aura pas d'effort normal dans la poutre car l'interaction se fait sans frottements.

Si la surface de contact est rugueuse, la réaction du sol est inclinée (non-verticale).

L'angle d'inclinaison est compris entre 0 et  $\phi$  (angle de frottement interne du sol). Les projections (horizontale et verticale) de cette réaction induisent en plus de la flexion, un effort normal et des frottements à l'interface poutre-sol.

Le problème de poutres sur appuis élastiques a été souvent traité en considérant que le sol réagisse même s'il y a perte de contact avec le sol sur une partie de la poutre. Bien que ce problème est évité dans la pratique dans les phases 'conception et calcul', on l'abordera de manière simple dans le cas où il se présente.

Dans le cadre de ce travail on considère les poutres peu profondes (en acier ou béton armé) pour lesquelles les déformations de cisaillement peuvent être considérées négligeables. Les quatre types d'analyse (a), (b), (c) et (d) seront abordés de manière simple avec implémentation, dans les chapitres qui suivent.

La poutre est étudiée selon les hypothèses d'Euler-Bernoulli, la surface de contact si elle existe (voir perte de contact) est supposée lisse sans frottements et le sol est modélisé à deux paramètres.

## 2. PROBLEMATIQUE ET OBJECTIFS

Plusieurs problèmes relatifs à l'interaction sol-structure peuvent être traités en utilisant des éléments poutres ou poutre-colonnes sur appuis élastiques. On peut citer des exemples pratiques ci dessous :

- Rails de chemins de fer
- Conduites telles que oléoducs et gazoducs continues
- Semelles filantes sous poteaux

Ces problèmes pratiques conduisent à un type de structures en contact direct avec le sol. Sous l'effet des forces externes, la structure et le sol doivent se déformer de manière compatible. Ceci est dû au fait que les déplacements de la structure et ceux du sol la supportant ne sont pas indépendants à cause de leur contact physique intime.

L'analyse nécessite un modèle pour le sol. L'objectif du modèle est une balance entre la précision et la facilité d'utilisation de routine pour résoudre des problèmes géotechniques pratiques.

L'idéalisation linéaire élastique du sol est souvent représentée par un modèle mécanique ou mathématique simulant les caractéristiques particulières du comportement du sol. Plusieurs modèles ont été proposés par différents chercheurs. Le modèle le plus simple d'un comportement linéaire élastique du sol est attribué à WINKLER (1867).

Le modèle de WINKLER ou les différentes extensions de ce modèle de base proposées, supposent que la poutre et le sol sont élastiques. Plusieurs approches ont été développées par différents chercheurs, dans les cas des problèmes statiques ou dynamiques et de stabilité (flambement) des poutres sur appuis élastiques. On a noté trois problèmes pour lesquels, sera axé ce travail.

- (1) Non linéarité du matériau (Loi de comportement)
- (2) Non linéarité géométrique (Stabilité)
- (3) Perte de contact

a. Problème (1) :

Tout en tenant compte des déformations de cisaillement dans la poutre, et en considérant différents modèles pour le sol, les matériaux constituant la poutre ainsi que le sol sont souvent considérés élastiques et obéissent à la loi de Hooke. Il est souvent considéré que le terme  $(E I)$  qui tient compte des caractéristiques mécanique

(module de Young  $E$ ) et géométrique ( Inertie  $I$  ) est une constante. Ainsi, on admet un comportement élastique et une section non fissurée dans le cas des poutres en béton armé. Dans le cadre de ce travail le comportement non linéaire des poutres en béton armé ou en acier sur appuis inélastiques sera étudié. Pour cela les lois de comportement de l'acier et du béton (y compris la fissuration) exprimées en termes de relations contraintes- déformations seront intégrées dans la section aboutissant à des relations moment-courbure pour le comportement d'une section de la poutre.

#### b. Problème (2)

Il est souvent considéré qu'il y a contact entre le sol et la poutre même si une zone de la poutre est en soulèvement (perte de contact avec le sol). On citera les quelques travaux qui ont résolu ce problème de contact. Dans le cadre de ce travail un modèle simple et efficace sera implémenté pour tenir compte de l'éventuelle perte de contact et par conséquent l'absence d'appuis élastiques qui s'en suit dans une zone de la poutre. Evidemment ce problème est non linéaire car on ne connaît pas d'avance les zones où le soulèvement aura lieu.

#### c. Problème (3)

Le dernier problème abordé dans le cadre de ce travail est de type non linéarité géométrique. C'est le problème du flambement des poutres sur appuis élastiques.

La formulation d'une matrice de rigidité exacte de la poutre-colonne sur appuis élastiques à deux paramètres sera utilisée pour l'étude de la stabilité vis à vis du flambement. Finalement, on aborde le problème de ruine par instabilité élastoplastique.

Deux applications pratiques importantes sont, le rail des chemins de fer (poutre infinie en acier) et les semelles filantes sous poteaux (poutre finie en béton armé). Dans le premier cas on peut admettre un comportement élastique, mais pour la semelle filante en béton armé, on estime que l'hypothèse d'un comportement élastique n'est pas adéquate. L'élément formulé peut être utilisé pour l'étude (Push over) jusqu'à la ruine d'un portique sur semelle filante ou semelles isolées.

La méthode des éléments finis est adoptée comme outil numérique pour l'analyse non linéaire des poutres sur appuis inélastiques. Concernant la poutre une formulation basée sur des relations moment-courbure est implémentée pour les

sections en béton armé ou en acier. Un modèle élastique parfaitement plastique pour l'acier ainsi qu'un modèle de béton sont utilisés pour formuler ces relations. Pour le sol une relation bi-linéaire est utilisée.

Pour la résolution du problème, on utilise une procédure à incrémentation automatique pas à pas pour rechercher la charge de ruine.

# CHAPITRE 1

## SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE

### 1.1. INTRODUCTION

Le concept de poutres ou plaques sur appuis élastiques a été utilisé de manière extensive par des ingénieurs pour le calcul des rails de chemin de fer, chaussées de routes et semelles filantes sous poteaux .. L'analyse est basée sur un modèle relativement simple pour représenter le sol selon l'approche classique de Winkler (1867), bien établie dans la littérature. Ce modèle a été amélioré plus tard, à cause de sa déficience, ce qui a conduit à des modèles à deux paramètres. Le deuxième paramètre couple, en fait, les ressorts de Winkler selon des concepts différents. Pour ce faire, Filonensho et al.<sup>(12)</sup>(1940), Pasternak<sup>(44)</sup> (1954) et Hetenyi (\*\*\*) ont utilisé respectivement des membranes, milieu de cisaillement ou flexion.

Pour caractériser le module de Winkler (premier paramètre), on utilise l'essai de plaque rigide. Cependant, il a été reconnu expérimentalement par d'autres tests, que le 'subgrade modulus' de Winkler ainsi estimé, n'est pas une caractéristique intrinsèque du sol (ANNEXE D). Ceci a conduit à l'élaboration d'un autre modèle théorique basé sur la théorie de l'élasticité (après quelques simplifications) pour la formulation des deux paramètres. Ces derniers, formulés théoriquement par Vlasov et Leontiev<sup>(43)</sup> (1966) dépendent directement du module de Young et du coefficient de Poisson du sol (caractéristiques intrinsèques du sol), peuvent être déterminés expérimentalement.

### 1.2. Types de problèmes

Une multitude de problèmes de poutres sur appuis élastiques ont été traités avec des formulations dépendant de la nature des problèmes

#### 1.2.1 Problèmes statiques

Yalcin et al <sup>(15)</sup>. (2005) ont analysé les poutres sur fondations élastiques sous chargement arbitraire par la méthode de la matrice de transfert. Trois types de matrice de transfert ont été formulées en termes des déplacements, rotations,

moments et efforts tranchant. Une matrice de rigidité exacte d'un élément poutre sur appuis de Winkler a été formulée par Eisenberger et al.<sup>(9)</sup> (1985) en utilisant la méthode des paramètres initiaux. Meshack et Valsangkar (1988) ont développé un élément poutre sur sol élastique à deux paramètres. Ce développement est une extension des travaux de Ting et Mockry (1984) et de Zhaohua et Cook (1983) qui ont formulé un élément à deux paramètres.

Somchai et al.<sup>(36)</sup> (1998) ont formulé une matrice de rigidité exacte d'une poutre sur fondation élastique a deux paramètres tenant compte des déformations de cisaillement dans la poutre. Aydogan M.<sup>(16)</sup> (1995) ont tenu compte des déformations de cisaillement dans la poutre selon l'hypothèse de Timoshenko mais avec un modèle de sol a un paramètre. Badie et al.<sup>(17)</sup> (1996) ont présenté un élément fini quadratique à trois nœuds pour modéliser la fondation élastique simulant le concept de Winkler avec interaction entre les ressorts en cisaillement et la possibilité de tenir compte des frottements. Eisenberger et al.<sup>(19)</sup> (1992) ont présenté une procédure simple pour simuler la fondation élastique infinie a deux paramètres. Iimura<sup>(18)</sup> (2004) a étudié les conduites enterrées susceptibles au problème de tassement en se basant sur le concept de poutres sur appuis élastiques de Winkler. Les formules analytiques établies et validées par un travail expérimental, permettent d'évaluer les contraintes dans la conduite sous l'effet de tassements différentiels. Jian-Hua Y<sup>(21)</sup> (2000) a proposé une méthode pour obtenir la solution d'une poutre de Timoshenko, renforcée par géosynthétique et sur fondation élastique.

### 1.2.2 Problèmes dynamiques

Franciosi C. et al.<sup>(24)</sup> (1993) ont formulé les matrice de rigidité et de masse en se basant sur des fonctions d'interpolation exactes, pour l'étude des vibrations libres des poutres sur sol a deux paramètres. Wei et al.<sup>(31)</sup> (1994), ont étudié la réponse dynamique d'une poutre sur fondation de Winkler viscoélastique, soumise a une charge d'impact du a un projectile. Karami G.<sup>(25)</sup> (2003) a utilise la méthode de '*differential quadrature element*' pour les vibrations libres des poutres (Timoshenko) non uniformes sur appuis souples discrets. Yu T.X. et al.<sup>(26)</sup> (2002) ont étudié les poutres sur fondation élastique, sous l'effet de l'impact d'une masse ou a une charge impulsive. Kim N. et al.<sup>(28)</sup> (2005) ont obtenu la matrice de rigidité dynamique exacte pour des poutres non symétriques et a parois minces sur fondation élastique. Ils ont utilise le principe de Hellinger-Reissner pour la formulation et Mathematica

pour le calcul symbolique. Hahn. G.D. et al.<sup>(1994)</sup> ont examiné les effets des conditions d'appui sur la réponse latérale des conduites souterraines aux séismes. Les paramètres les plus importants contribuant sur la réponse ont été identifiés. Ayvaz et al.<sup>(32)</sup> (1997) ont utilisé un modèle à deux paramètres pour le sol supportant une poutre sous l'effet sismique.

La réponse dynamique explicite d'une poutre sur sol élastique et soumise à une ligne de forces harmoniques mobiles a été proposée par Sun Lu<sup>(29)</sup> (2003). Ils ont utilisé la transformée de Fourier pour la solution du problème, indiquant une influence significative de la fréquence d'excitation sur les déplacements.

### **1.2.3 Problèmes nonlinéaires**

Trois types de nonlinéarité peuvent être traités dans le contexte des poutres sur appuis élastiques qui sont :

#### **1.2.3 .1 Nonlinéarité géométrique**

Nam-Hyoung L. et al.<sup>(22)</sup> (2003) ont étudié le flambement (3D) des rails soudés et continus de chemins de fer dû à des contraintes de compression d'origine thermique. Dans<sup>(23)</sup> (1990), l'effet de la fondation élastique sur les modes propres de vibration et de stabilité des poutres/colonnes non uniformes ont été discutés.

Sohrab Baghery<sup>(35)</sup> (2004) a présenté une méthode particulière pour la détermination de la charge critique des pieux traversant un multicouche et avec effet de pointe.

Naidu N.R et al.<sup>(29)</sup> (1996) ont modélisé le sol avec un modèle nonlinéaire élastique pour l'étude de la stabilité. Ils ont présenté des résultats pour différentes conditions aux limites et en variant les paramètres du sol.

Lee et al.<sup>(34)</sup> (1996) ont examiné l'influence de la fondation élastique sur l'instabilité élastique de la poutre soumise à une force tangentielle .

Seong-Min kim<sup>(27)</sup> (2004) a proposé des expressions analytiques pour la prédiction de la charge axiale critique et de la vitesse de résonance critique pour des poutres sur fondation élastique sous l'effet de forces harmoniques mobiles.

### 1.2.3.2 Nonlinéarité matérielle

Ashraf Ayoub<sup>(20)</sup> (2003) a utilisé une formulation mixte pour les champs des déplacements et des forces pour formuler un élément poutre sur fondation nonlinéaire. Kuo Y.H.<sup>(22)</sup> et al. (1994) ont étudié les poutres non uniformes avec nœuds souples aux extrémités et fondation nonlinéaire.

### 1.2.3.3 Nonlinéarité due à la perte de contact

L'analyse d'une poutre reposant sur un sol tenant compte de la perte de contact avec le sol est un problème non linéaire très important. Plusieurs méthodes ont été proposées par différents chercheurs pour résoudre ce problème. Kaschiev et al.<sup>(3)</sup> (1995) ont proposé une approche basée sur la méthode de Newton et la MEF démontrant la convergence de la procédure proposée à travers plusieurs exemples. Kerr et al.<sup>(10)</sup> (1996) ont revu la solution classique qui ne tient pas compte de la possibilité de perte de contact, montrant ses déficiences en modélisant le sol avec un modèle bilinéaire.. Coskun<sup>(6)</sup> (2003) a étudié la réponse d'une poutre élastique soumise à une charge dynamique harmonique sur un sol de Pasternak à deux paramètres. Une solution a été obtenue en présentant les zones de contact et non-contact en solvant l'équation différentielle par des fonctions trigonométriques hyperboliques. Zhang et al.<sup>(9)</sup> (2004) ont développé un modèle analytique pour la réponse statique d'une poutre reposant sur un sol ne travaillant pas en traction

**Conclusion :** En vue de la diversité des problèmes concernant la poutre sur appuis élastiques, on remarque que :

Le problème de contact souvent négligé, ainsi que celui du flambement, sont traités avec des approches analytiques solvant l'équation différentielle d'équilibre.

Le comportement du matériau constitutif de la poutre et du sol sont souvent supposés élastiques.

## CHAPITRE 2

### ANALYSE DU 1<sup>er</sup> ORDRE ELASTIQUE

#### 2-1 Introduction

C'est l'analyse la plus simple, dans laquelle on suppose que les matériaux constituant la poutre et le sol sont à comportement linéaire élastique, et les déplacements sont suffisamment petits que la configuration géométrique du système avant et après chargement n'a pas trop changé. Les équations d'équilibre sont écrites selon la géométrie de la configuration initiale du système.

#### 2-2 Formulation du problème :

Soit la poutre finie non prismatique à inertie et section variables  $I(x)$  et  $A(x)$ , non homogène de module de Young  $E(x)$ , de longueur  $L$ , reposant sur un sol élastique non homogène et soumise à une force axiale  $P$ . On considère le cas statique dépendant des coordonnées spatiales  $(x,z)$  et indépendants de la coordonnée temporelle  $t$ . De plus le contact poutre-sol s'effectue sans frottements, alors sous l'effet de l'action  $q(x)$  la réaction  $r(x)$  est verticale, Figure(2.1).

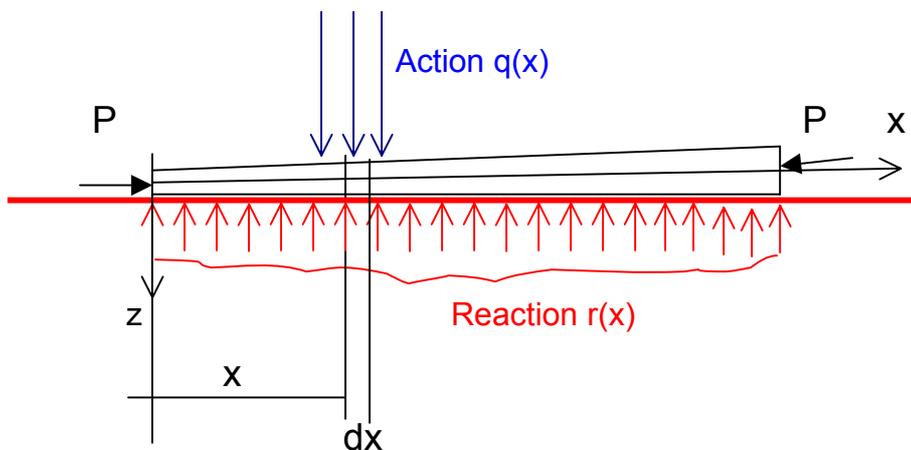
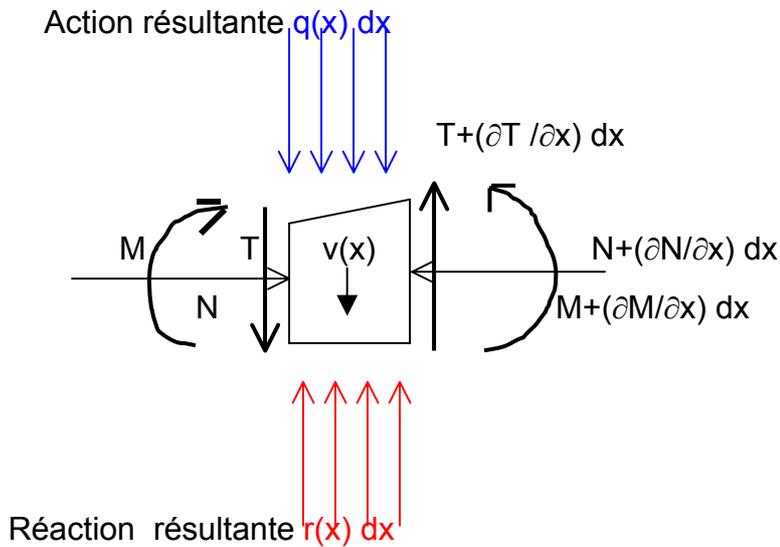


Figure (2.1) Action-Réaction dans une poutre sur appuis élastiques

L'équilibre de l'élément infinitésimal  $dx$  dans la configuration géométrique initiale,



**Figure 2.2 : Equilibre d'un élément  $dx$  dans la configuration non déformée**

Soit  $v(x)$  le déplacement vertical de la ligne moyenne de la poutre à la position d'abscisse  $x$ . En considérant les 3 équations d'équilibre des forces (horizontales et verticales) ainsi que celle des moments, on obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E(x) I(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] + r(x) = q(x) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [E(x) A(x) u(x)] = P \quad (2.2)$$

qui sont deux équations différentielles ordinaires à coefficients non constants régissant les effets flexionnel et axial (découplés), d'ordres quatre et un respectivement. Dans le cas particulier, d'une poutre uniforme et homogène, alors :

$$\left[ E I \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} \right] + r(x) = q(x) \quad (2.3)$$

On remarque que l'équation différentielle régissant la flexion a deux fonctions inconnues qui sont le déplacement vertical  $v(x)$  et la réaction du sol  $r(x)$ . A moins d'une autre hypothèse supplémentaire (une autre équation sous forme différentielle ou algébrique) elle ne peut être résolue. Plusieurs hypothèses ont été avancées (Annexe A) selon les modèles suivants .

Modèle de Winkler :  $r(x) = k v(x)$  (2.4)

Modèle de Filonenko-Borodich<sup>(12)</sup> :  $r(x) = k v(x) - T d^2v / dx^2$  (2.5)

Modèle de Hetenyi :  $r(x) = k v(x) - (EI/b) d^4v / dx^4$  (2.6)

Modèle de Pasternak<sup>(44)</sup> :  $r(x) = k v(x) - G d^2v / dx^2$  (2.7)

Modèle de Vlasov-Leontiev<sup>(43)</sup> modifié  $r(x) = k v(x) - t d^2v / dx^2$  (2.8)

Tous les modèles à deux paramètres (sauf celui de Hetenyi) (eqns 5, 7,8) s'expriment par une réaction du sol qui peut être écrite de manière unifiée sous la forme:

$$r(x) = k v(x) - k_2 d^2v / dx^2 \quad (2.9)$$

et dans ce cas, l'équation différentielle exprimant l'équilibre d'une poutre sur appuis élastiques s'écrit comme suit :

$$EI d^4v / dx^4 - k_2 d^2v / dx^2 + k v = q(x) \quad (2.10)$$

D'un point de vue mathématique cette équation est résoluble en tenant compte des conditions aux limites. Le déplacement  $v(x)$  obtenu, permet l'évaluation de la rotation, moment et effort tranchant par simple dérivations successives.

### 2-3 Résolution du problème :

Des formulations analytiques et numériques, pour la résolution de l'équation différentielle (10) sont présentées.

#### 2-3-1 Méthodes analytiques de résolution :

En utilisant des méthodes analytiques et/ou numériques, L'équation différentielle peut être résolue. En effet, après la formulation précédente, la solution du modèle mathématique peut être obtenue dans les cas des poutres finies, semi-infinies ou infinies.

En général, trois approches sont utilisées pour la solution d'une poutre (finie, semi infinie ou infinie) sur appuis élastiques (à un ou deux paramètres) :

- Méthode des paramètres initiaux
- Méthode de superposition
- Méthodes énergétiques

La méthode des paramètres initiaux tend à être lourde et longue dans le cas d'un chargement externe complexe. Dans ces conditions il est plus simple d'employer la méthode de superposition proposée par Hetenyi<sup>(45)</sup> (1936). La solution du problème de poutre infinie forme la base de la méthode de superposition de Hetenyi.

Une étude très détaillée des trois approches a été compilée par selvadurai<sup>(1)</sup>.

Ces méthodes analytiques ne peuvent pas être utilisées directement pour le traitement du problème non-linéaire qui est l'objectif de ce mémoire. Dans ce qui suit une approche matricielle est présentée pour le calcul des poutres sur appuis élastiques.

### 2-3-2 Méthodes matricielles de résolution :

La poutre peut être modélisée selon les hypothèses d'Euler-Bernouli ou Timoshenko, avec un modèle de sol selon WINKLER ou à plusieurs paramètres.

Plusieurs éléments ont été implémentés parmi lesquels les modèle d'Eisenberger, de Meshack et celui de YOKOYAMA(1996) ainsi que l'élément généralisé formulé dans le cadre de ce travail sont présentés ci dessous.

#### 2-3-2-1 Matrice de rigidité exacte avec sol à un seul paramètre (Winkler)

Une matrice de rigidité exacte d'un élément poutre sur appuis élastiques a été formulée par Eisenberger et al.<sup>(14)</sup> (1985). Dans cette approche les déformations de cisaillement sont négligées ( poutre fléchissant selon les hypothèses d'Euler-Bernoulli) et le modèle de sol adopté est le modèle de Winkler. Ainsi l'équation différentielle d'équilibre (4) régissant la déformée de la poutre est résolue.

Eisenberger a exprimé La solution générale en utilisant la méthode des paramètres initiaux par la relation :

$$v(x)=v_0 F_1(\lambda x)+\frac{1}{\lambda}\theta_0 F_2(\lambda x)-\frac{1}{\lambda^2}M_0 F_3(\lambda x)+\frac{1}{\lambda^3}T_0 F_4(\lambda x) \quad (2.11)$$

$v_0$  ,  $\theta_0$  ,  $M_0$  et  $T_0$  (paramètres initiaux) étant le déplacement , rotation, moment et effort tranchant à la section d'abscisse  $x=0$ .

avec les fonctions, Selvadurai<sup>(1)</sup> :

$$\begin{aligned}
 F_1(\lambda x) &= \cosh(\lambda x) \cos(\lambda x) \\
 F_2(\lambda x) &= \frac{1}{2} (\cosh(\lambda x) \sin(\lambda x) + \sinh(\lambda x) \cos(\lambda x)) \\
 F_3(\lambda x) &= \frac{1}{2} \sinh(\lambda x) \sin(\lambda x) \\
 F_4(\lambda x) &= \frac{1}{4} (\cosh(\lambda x) \sin(\lambda x) - \sinh(\lambda x) \cos(\lambda x))
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

En utilisant la définition d'un terme  $S_{ij}$  de la matrice de rigidité comme étant la force/moment en (i) due à un déplacement/rotation unitaire en (j) (=0 pour  $i \neq j$ ), ce qui construit la colonne (j) de la matrice de rigidité. En procédant de la même manière pour les quatre degrés de liberté on obtient :

$$[K_e] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

avec :

$$S_{11} = \frac{k \cosh(\lambda L) \sinh(\lambda L) + \cos(\lambda L) \sin(\lambda L)}{\lambda C}, \quad C = \sinh^2(\lambda L) - \sin^2(\lambda L)$$

$$S_{21} = \frac{k \sinh^2(\lambda L) + \sin^2(\lambda L)}{2\lambda^2 C}$$

$$S_{31} = \frac{k \sinh(\lambda L) \cos(\lambda L) + \cosh(\lambda L) \sin(\lambda L)}{\lambda C}$$

$$S_{41} = \frac{k \sinh(\lambda L) \sin(\lambda L)}{\lambda^2 C}$$

$$S_{12} = S_{21}$$

$$S_{22} = \frac{k \sinh(\lambda L) \cosh(\lambda L) - \sin(\lambda L) \cos(\lambda L)}{2\lambda^3 C}$$

$$S_{32} = -S_{41}$$

$$S_{42} = \frac{k \cosh(\lambda L) \sin(\lambda L) - \sinh(\lambda L) \cos(\lambda L)}{2\lambda^3 C}$$

$$S_{13} = S_{31}$$

$$S_{23} = S_{32}$$

$$S_{33} = S_{11}$$

$$S_{43} = -S_{21}$$

$$S_{14} = S_{41}$$

$$S_{24} = S_{42}$$

$$S_{44} = S_{22}$$

La matrice de rigidité exacte (poutre d'Euler-Bernouli et sol de Winkler) ci dessus, a été implémentée dans un programme en FORTRAN 90.

### 2-3-2-2 Matrice de rigidité exacte avec sol à deux paramètres :

Meshack et Valsangkar<sup>(13)</sup> (1988) ont développé un élément poutre sur sol élastique à deux paramètres. C'est en fait, une extension des travaux de Ting et Mockry<sup>(45)</sup> (1984) et de Zhaohua et Cook<sup>(\*)</sup> (1983).

La formulation de la matrice de rigidité est basée sur la solution exacte de l'équation différentielle gouvernant les déplacements d'une poutre sur sol à deux paramètres.

L'équation différentielle d'une poutre sur appuis élastiques à deux paramètres est :

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - k_2 \frac{d^2 v}{dx^2} + k v = q(x) \quad (2.14)$$

En utilisant la méthode des paramètres initiaux, la solution de l'équation est obtenue, Selvadurai<sup>(1)</sup> 1979, comme

$$v(x) = v_1 \left[ \Phi_2(x) - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \Phi_4(x) \right] + \frac{\theta_1}{2} \left[ \frac{\Phi_1(x)}{\alpha} - \frac{\Phi_3(x)}{\beta} \right] - \frac{M_1}{2EI} \frac{\Phi_4(x)}{\alpha\beta} - \frac{T_1}{4\lambda^2 EI} \left[ \frac{\Phi_1(x)}{\alpha} - \frac{\Phi_3(x)}{\beta} \right] \quad (2.15)$$

Ou  $v_1, \theta_1, M_1$  et  $T_1$  sont le déplacement, rotation, moment fléchissant et effort tranchant de la poutre en  $x = 0$ , respectivement. Les autres termes sont :

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$$

$$\alpha = \sqrt{\lambda^2 + \frac{k_2}{4EI}} \quad (2.16)$$

$$\beta = \sqrt{\lambda^2 - \frac{k_2}{4EI}}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= \cos(\beta x) \sinh(\alpha x) \\ \Phi_2(x) &= \cos(\beta x) \cosh(\alpha x) \\ \Phi_3(x) &= \sin(\beta x) \sinh(\alpha x) \\ \Phi_4(x) &= \sin(\beta x) \cosh(\alpha x) \end{aligned} \quad (2.17)$$

La rotation , le moment ainsi que l'effort tranchant sont obtenus par dérivation successive de l'équation (15 ) comme suit :

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx}, \quad M(x) = EI \frac{d^2v}{dx^2}, \quad T(x) = EI \frac{d^3v}{dx^3} - k_2 \frac{dv(x)}{dx} \quad (2.18)$$

Meshack et al.<sup>(13)</sup> (1988) ont obtenu les termes  $S_{ij}$  de la matrice de rigidité élémentaire en considérant les forces (ou moments) en ( i ) dus à un déplacement (ou rotation) unitaire en ( j ), les autres degrés de liberté étant bloqués. En répétant cette procédure pour les quatre degrés de liberté, les quatre colonnes de la matrice de rigidité seront définies.

$$[K_e] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

avec :

$$S_{11} = 4\alpha\beta\lambda^2 F (\alpha S C + \beta S_h C_h)$$

$$S_{33} = S_{11}$$

$$S_{12} = 2\lambda^2 F (\beta^2 S_h^2 + \alpha^2 S^2)$$

$$S_{34} = -S_{12}$$

$$S_{13} = -4\alpha\beta\lambda^2 F (\alpha S C_h + \beta C S_h)$$

$$S_{14} = 4\lambda^2 \alpha \beta F S S_h$$

$$S_{23} = -S_{14}$$

$$S_{22} = 2\alpha\beta F (\beta S_h C_h - \alpha S C)$$

$$S_{44} = S_{22}$$

$$S_{24} = 2\alpha\beta F (\alpha S C_h - \beta C S_h)$$

$$\text{avec } F = \frac{EI}{\beta^2 S_h^2 - \alpha^2 S^2}$$

$$S = \sin(\beta L)$$

$$C = \cos(\beta L)$$

$$S_h = \sinh(\alpha L)$$

$$C_h = \cosh(\alpha L)$$

Le vecteur forces nodales équivalentes dans les cas d'une force concentrée, moment concentré ou forces linéairement réparties sur un tronçon de l'élément ont été développés par Meshack et al.

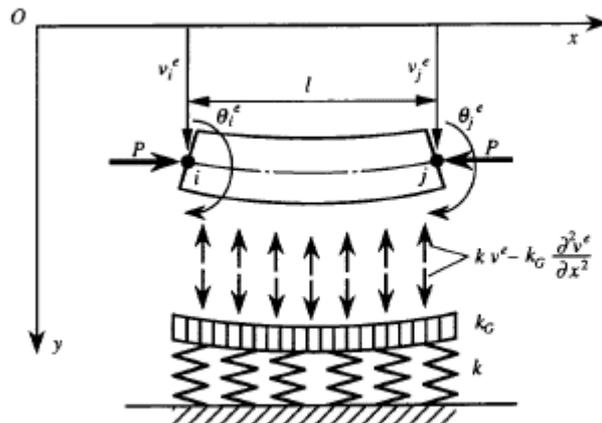
### 2-3-2-3 Elément généralisé de Yokiyama<sup>(4)</sup> (1996) :

Yokiyama<sup>(4)</sup> a formulé l'élément poutre-colonne de Timoshenko supporté par une fondation élastique de type Pasternak. En plus de l'effet de la force axiale, les déformations de cisaillement ne sont pas négligées. Yokiyama<sup>(4)</sup> a formulé les matrices de rigidité élastique et géométrique de la poutre-colonne, ainsi que les matrices de masse et les contributions du sol à la rigidité à travers ses deux paramètres. Il a utilisé un champs d'interpolation approché pour leurs dérivations.

La fondation élastique est idéalisée par un modèle à deux paramètres caractérisé par :

- Le module de fondation de Winkler  $k$
- Le module de cisaillement de la fondation  $k_2$

Dans le cas où  $k_2=0$ , ce modèle se réduit au modèle simple de Winkler



**Figure 2.3 : Élément poutre-colonne généralisé de Yokiyama<sup>(4)</sup>**

L'élément de la figure 2.3 représente une poutre-colonne de Timoshenko avec une force axiale  $P$ , reposant sur un modèle de fondation à deux paramètres. Cet élément a deux nœuds à deux degrés de liberté qui sont le déplacement vertical  $v$  et la rotation.

Pour formuler cet élément, Yokiyama<sup>(4)</sup> a utilisé le principe de Hamilton, et ce en exprimant les énergie de déformation et cinétique.

L' énergie de déformation de l' élément poutre de longueur  $L$  tout en tenant compte des déformations de cisaillement dans la poutre ainsi que la fondation élastique est exprimée par la relation :

$$\begin{aligned}
U_e = & \frac{1}{2} \int_0^L E I \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L \alpha G A \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \theta \right)^2 dx \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L k (v)^2 dx \\
& + \frac{1}{2} \int_0^L k_G \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx
\end{aligned}$$

....Déformations de flexion de la poutre

....Déformations de cisaillement de la poutre

... Déformations de WINKLER dans le sol

...Déformations de PASTERNAK dans le sol  
(2-19)

- Où E Module de Young du matériau constituant la poutre  
I Moment d'inertie  
K' Facteur de correction du cisaillement qui dépend de la forme de la section  
G Module de cisaillement du matériau constituant la poutre  
A Aire de la section  
x Coordonnée locale le long de l'axe de l'élément  
k module de Winkler  
k<sub>2</sub> module de Pasternak

L' énergie cinétique T<sup>e</sup> de l' élément poutre, tenant compte des forces d'inertie associées aux degrés de liberté de translation et de rotation est donnée par :

$$T^e = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2-20)$$

Le premier terme exprime l'énergie cinétique associée aux déplacements tandis que le deuxième concerne les rotations.

Avec ρ Densité massique du matériau de la poutre

t le temps

Le travail  $W^e$  fait par la force axiale (positive en traction) peut être représenté par :

$$W^e = -P \int_0^L \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2-21)$$

En utilisant le principe de Hamilton, Yokiyama<sup>(4)</sup> obtient les matrices élémentaires suivantes :

$$[K_f]^e = \int_0^L [B_f] [EI] [B_f] L d\xi \quad \text{Flexion (poutre)}$$

$$[K_c]^e = \int_0^L [B_c] \alpha G A [B_c] L d\xi \quad \text{Cisaillement (poutre)}$$

(2-22)

$$[K_w]^e = \int_0^L [N_v] k [N_v] L d\xi \quad \text{Fondation (WINKLER)}$$

$$[K_p]^e = \int_0^L [B_v] k_2 [B_v] L d\xi \quad \text{Fondation (PASTERNAK)}$$

Les matrices géométriques et de masse ont aussi été définies explicitement par Yokiyama<sup>(4)</sup>.

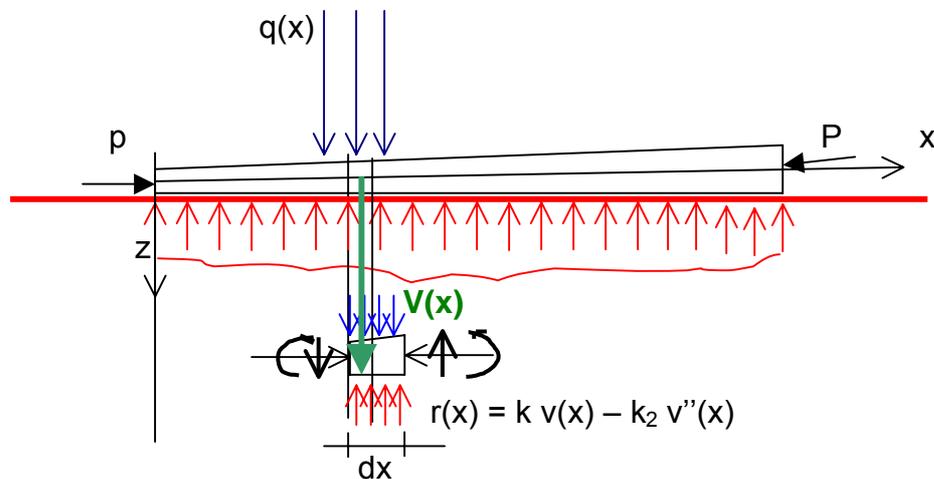
En l'absence d'une fondation élastique et de la force de compression axiale  $P$ , le modèle ci dessus se réduit à l'élément simple de Timoshenko sur fondation élastique. Aussi, quand les déformations de cisaillement sont négligées l'élément se ramène à un élément plus simple d'Euler Bernouli.

#### 2-3-2-4 Formulation utilisée dans ce mémoire :

Dans le cadre de ce travail, une formulation de la matrice de rigidité exacte d'un élément poutre-colonne avec effet axial sur sol élastique à deux paramètres sera développée. Contrairement à l'approche d'Eisenberger<sup>(14)</sup> (un paramètre) où de Meshak et al.<sup>(13)</sup> qui ont utilisé la méthode des paramètres initiaux ou Zahoua et al. (deux paramètres) qui ont négligé les effets du second ordre dus à la force axiale pour l'obtention de la matrice de rigidité. Yokiyama<sup>(4)</sup> a tenu compte de l'effet axial et des déformations de cisaillement dans la poutre, mais a utilisé des fonctions d'interpolation approchées de type polynomial cubique pour le champs des

déplacements. Par contre, \*\* ont formulé une matrice de rigidité dite exacte, en utilisant les hypothèses de Timoshenko pour le cisaillement, mais n'ont pas tenu compte de l'effet axial.

Dans ce travail, les fonctions d'interpolation seront obtenues à partir de la solution exacte de l'équation différentielle d'équilibre exprimée dans la configuration déformée tenant compte des effets du second ordre. Ces fonctions sont ensuite utilisées pour la formulation d'une matrice de rigidité, d'un élément poutre-colonne sur appuis élastiques de type Winkler-Pasternak. L'élément ainsi formulé, peut être utilisé pour une analyse du second ordre, à partir de laquelle l'analyse du premier ordre, objet du présent chapitre, est un cas particulier.



**Figure 2.4 Élément généralisé formulé dans cette étude**

En écrivant les équations d'équilibre dans la configuration déformée et en procédant de la même manière qu'au paragraphe (2.2) sans négliger l'effet de la force axiale P qui induira un effort normal et un moment (+ un effort tranchant) du second ordre.

La figure (2.4) représente l'élément dans sa configuration déformée. On considère l'équilibre d'un élément infinitésimal de longueur dx. A partir des conditions d'équilibre sur cet élément, on obtient l'équation différentielle ordinaire, du quatrième ordre à coefficients constants ( dans le cas de section uniforme) ci dessous :

$$E I \frac{d^4 v}{d x^4} + P \frac{d^2 v}{d x^2} - k_2 \frac{d^2 v}{d x^2} + k v = q(x) \quad (2-23)$$

qui est l'équation différentielle d'équilibre correspondant à la flexion en présence de force axiale de compression. A partir de l'équation différentielle gouvernant l'équilibre, on peut procéder à la dérivation de la matrice de rigidité. Pour cela, on cherche une solution de la forme  $C e^{rx}$  ce qui donne l'équation caractéristique de l'équation différentielle :

$$EI r^4 + (P - k_2) r^2 + k = 0 \quad (2-24)$$

La nature de la solution dépendra de la nature des 4 racines de l'équation caractéristique ( réels ou complexes). Ceci dépend de l'ordre de grandeur des 5 paramètres  $E, I, P, k$  et  $k_2$

Pour les cas pratiques usuels  $P - k_2 > (4 k E I)^{1/2}$  les quatre racines sont imaginaires et la solution analytique de l'équation homogène s'exprime par :

$$v(x) = c_1 \sin(ax) + c_2 \sin(bx) + c_3 \cos(ax) + c_4 \cos(bx) \quad (2-25)$$

avec les deux nombres réels  $a$  et  $b$  d'unité  $1 / \text{longueur}$  exprimés par :

$$a = \sqrt{\frac{P-k_2}{2EI} - \sqrt{\left(\frac{P-k_2}{2EI}\right)^2 - \frac{k}{EI}}} \quad (2-26)$$

$$b = \sqrt{\frac{P-k_2}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{P-k_2}{2EI}\right)^2 - \frac{k}{EI}}}$$

et  $c_1, c_2, c_3$  et  $c_4$  sont des constantes qui dépendent des conditions aux limites. On définit les équations exprimant les conditions aux limites en considérant les déplacements et rotations aux nœuds de l'élément :

$$\begin{aligned} v(0) &= v_i & c_3 + c_4 &= v_i \\ v'(0) &= \theta_i & a c_1 + b c_2 &= \theta_i \\ v(L) &= v_j & c_1 \sin(aL) + c_2 \sin(bL) + c_3 \cos(aL) + c_4 \cos(bL) &= v_j \\ v'(L) &= \theta_j & a c_1 \cos(aL) + b c_2 \cos(bL) - a c_3 \sin(aL) - b c_4 \sin(bL) &= \theta_j \end{aligned}$$

qui est un système de 4 équations à 4 inconnues, permettant d'exprimer les constantes  $C_i$   $i=1,4$  en fonction des déplacements et rotations aux nœuds. Après

résolution en utilisant le logiciel de calcul symbolique MATHEMATICA on substitue ces constantes dans l'expression de la déformée qui s'écrit :

$$v(x) = N_1(x) v_i + N_2(x) \theta_i + N_3(x) v_j + N_4(x) \theta_j \quad (2-27)$$

les fonctions de forme  $N_i(x)$  étant les fonctions de forme ou d'interpolation :

$$N_1(x) =$$

$$\frac{a \cos(bx) - b + b \cos(a) \cos(b) + a \sin(a) \sin(b) + b \cos(ax) - a + a \cos(a) \cos(b) + b \sin(a) \sin(b)}{a \cos(b) \sin(a) - b \cos(a) \sin(b) - b \sin(ax) + a \sin(bx)} \frac{1}{-2ab + 2ab \cos(a) \cos(b) + a^2 + b^2 \sin(a) \sin(b)}$$

$$N_2(x) =$$

$$\frac{a \cos(a) \cos(ax) - \cos(bx) \sin(b) - b \sin(ax) + a \sin(a) \sin(b) \sin(ax) - a \sin(bx) + b \sin(a) \sin(b) \sin(bx) + \cos(b) - b \cos(a) \sin(a) + b \cos(bx) \sin(a) + \cos(a) - b \sin(ax) + a \sin(bx)}{1 - 2ab + 2ab \cos(a) \cos(b) + a^2 + b^2 \sin(a) \sin(b)}$$

$$N_3(x) =$$

$$\frac{-ab \cos(a) \cos(ax) - \cos(bx) + ab \cos(b) \cos(ax) - \cos(bx) + a \sin(a) - b \sin(b) - b \sin(ax) + a \sin(bx)}{-2ab + 2ab \cos(a) \cos(b) + a^2 + b^2 \sin(a) \sin(b)}$$

$$N_4(x) =$$

$$\frac{\cos(ax) - b \sin(a) - a \sin(b) + \cos(bx) - b \sin(a) + a \sin(b) + \cos(a) - \cos(b) - b \sin(ax) + a \sin(bx)}{-2ab + 2ab \cos(a) \cos(b) + a^2 + b^2 \sin(a) \sin(b)}$$

Ces fonctions de forme ou d'interpolation sont dites exactes du point de vue solution mathématique, relativement aux fonctions ( approchées ) de nature polynomiale utilisées dans la méthode des éléments finis, Yokiyama<sup>(4)</sup>. Par conséquent la matrice de rigidité formulée ainsi ci dessous, donnera un élément très convergent pour ne pas dire exact. L'exactitude est loin d'être atteinte au vu des simplifications importantes qui ont été supposées pour réduire la complexité du problème.

L'extraction des coefficients de la matrice de rigidité s'effectue simplement et de manière directe en exprimant les efforts ( moment et effort tranchant ) aux nœuds, on obtient ainsi la matrice de rigidité :

$$[K_e] = \begin{bmatrix} kfv & kft & -kfv & kft \\ kmv & kmt & -kmv & kmthat \\ -kfv & -kft & kfv & -kft \\ kmv & kmthat & -kmv & kmt \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

$$kfv = \frac{EI}{L} \frac{1}{a^2 b^2 - b^2 L} \left[ a b \cos(b) \sin(a) - b \cos(a) \sin(b) \right]$$

$$kft = \frac{EI}{L} \frac{1}{-2ab + 2ab \cos(a) \cos(b) + a^2 + b^2 \sin(a) \sin(b)}$$

$$k_{mv} = \frac{EI}{L^3} \frac{D^2 \delta(x)}{dx^2}, \quad 0 \leq x \leq L$$

$$\frac{a b EI H - a^2 - b^2 + Ha^2 + b^2 L \cos@a L D \cos@b L D + 2 a b \sin@a L D \sin@b L D L}{-2 a b + 2 a b \cos@a L D \cos@b L D + Ha^2 + b^2 L \sin@a L D \sin@b L D}$$

$$k_{ft} = k_{mv}$$

$$\frac{a b EI H - a^2 - b^2 + Ha^2 + b^2 L \cos@a L D \cos@b L D + 2 a b \sin@a L D \sin@b L D L}{-2 a b + 2 a b \cos@a L D \cos@b L D + Ha^2 + b^2 L \sin@a L D \sin@b L D}$$

$$k_{mt} = \frac{EI}{L^2} \frac{D \delta(x)}{dx}, \quad 0 \leq x \leq L$$

$$\frac{Ha^2 - b^2 L EI H - b \cos@b L D \sin@a L D + a \cos@a L D \sin@b L D L}{-2 a b + 2 a b \cos@a L D \cos@b L D + Ha^2 + b^2 L \sin@a L D \sin@b L D}$$

$$k_{mth} = \frac{EI}{L^2} \frac{D \delta(x)}{dx}, \quad 0 \leq x \leq L$$

$$\frac{Ha^2 - b^2 L EI H - b \sin@a L D + a \sin@b L D L}{-2 a b + 2 a b \cos@a L D \cos@b L D + Ha^2 + b^2 L \sin@a L D \sin@b L D}$$

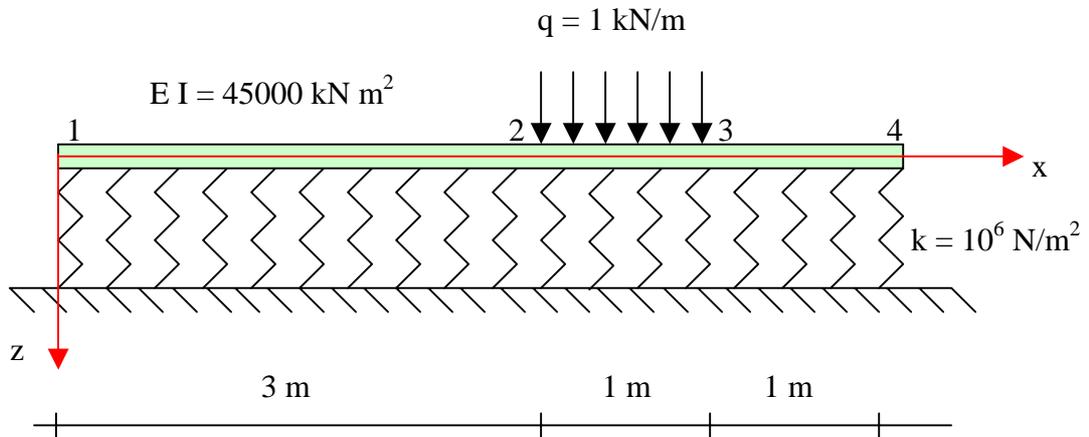
Notons que chaque expression ci dessus prend la forme 0/0 en absence d'effort axial P et d'appuis élastiques. Ceci pose un sérieux problème numérique ( en programmation) pour le traitement des problèmes dans lesquels l'effort axial est absent ou négligeable. Dans cette situation on peut utiliser la règle de l'Hôpital pour déterminer la limite du rapport des dérivées du numérateur sur le dénominateur dans les expressions des différents termes de la matrice de rigidité. Une autre alternative est l'expansion des coefficients de la matrice de rigidité en série de puissance en termes de P (voir chapitre 3). On peut aussi reformuler le problème sans effort axial P = 0, et avec un sol à un paramètre (k<sub>2</sub> =0) ou à deux paramètres, ce qui a été fait et a permis de retrouver entre autres, les fonctions d'interpolation dans ces deux situations ainsi que les matrices de rigidité données par Eisenberger (un paramètre) ou Meschack (deux paramètres).

## 2-5 Applications et validations :

Dans ce chapitre les résultats numériques de la formulation exacte d'une poutre sur appuis élastiques à un ou deux paramètres seront confrontés aux résultats numériques d'autres chercheurs. A ce stade, on suppose un comportement élastique linéaire dans les deux matériaux constituant le sol et la poutre. Après validation des résultats, la formulation ainsi que le traitement du problème dans le domaine non linéaire sera abordé dans le chapitre suivant. Dans ce qui suit, plusieurs exemples issus des publications dans ce domaine seront confrontés aux résultats du modèle implémenté dans le cadre de ce travail.

### Exemple 1 :

Eisenberger et al. (1985) ont utilisé la méthode des paramètres initiaux pour formuler la matrice de rigidité exacte d'une poutre sur appuis élastiques à un seul paramètre.



**Figure 2.5 : Poutre sur appuis élastiques (un paramètre)<sup>(14)</sup>**

Pour cette poutre, Hetenyi propose une solution en forme d'une série trigonométrique infinie:

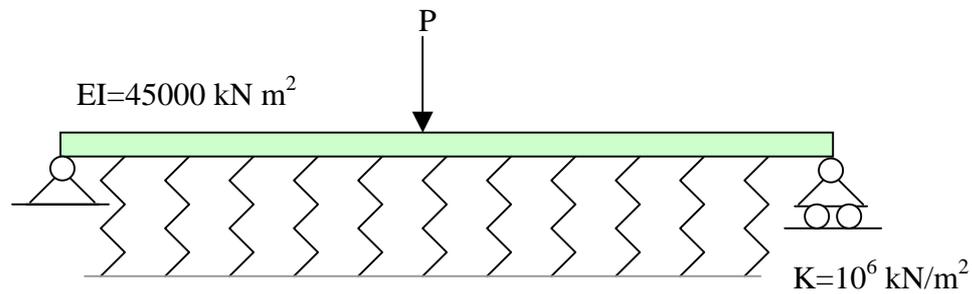
Dans cette étude la poutre a été subdivisée en trois éléments et 4 nœuds et les résultats obtenus sont :

Nœud	Déplacement (m)	Rotation
1	-6.690465403399604E-009	3.014774761405560E-008
2	-0.5051250990906736E-006	-6.168612893510538E-007
3	-0.5175922298561044E-006	6.260891609994781E-007
4	1.580475367039159E-007	6.508803438442722E-007

Eisenberger a considéré les déplacements aux sections d'abscisses  $x = 3\text{m}$  et  $x = 4\text{m}$  correspondant aux nœuds 2 et 3, estimés à  $0.497817\text{E-}006 \text{ (m)}$  et  $0.518787\text{E-}006 \text{ (m)}$

On remarque que les résultats sont très proches et qu'il y a un léger soulèvement au nœud 4.

Exemple 2 : Une poutre simplement appuyée et sur appuis élastiques a été analysée par Mohr (1980) en utilisant une matrice de rigidité de contact.



**Figure 2.6 : Poutre sur appuis rigides et sol élastique (un paramètre)<sup>(14,\*\*\*)</sup>**

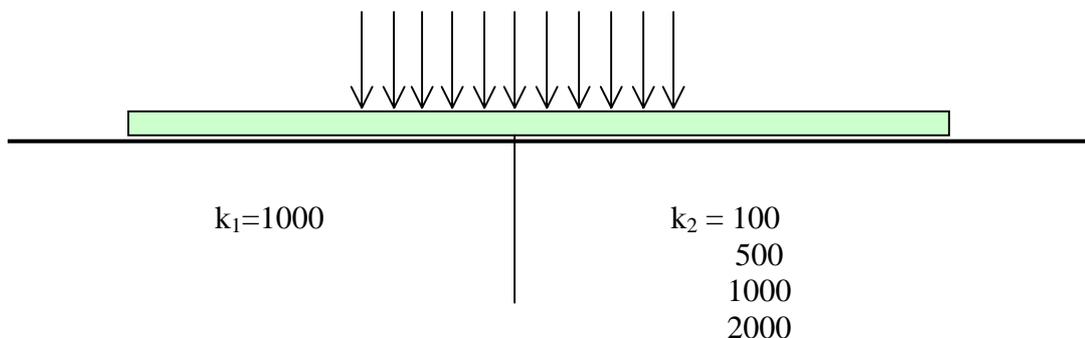
Le même problème a été repris par Eisenberger et al. et dans cette étude. Le déplacement et la rotation au droit de la charge concentrée obtenus dans cette étude sont :

Cette etude	Eisenberger et Mohr
$w = -0.83654908E-06 P \text{ m}$	$0.8366 P 10^{-6} \text{ m}$
$\phi = -0.10638618E-05 P 10^{-5}$	$0.1064 P 10^{-5}$

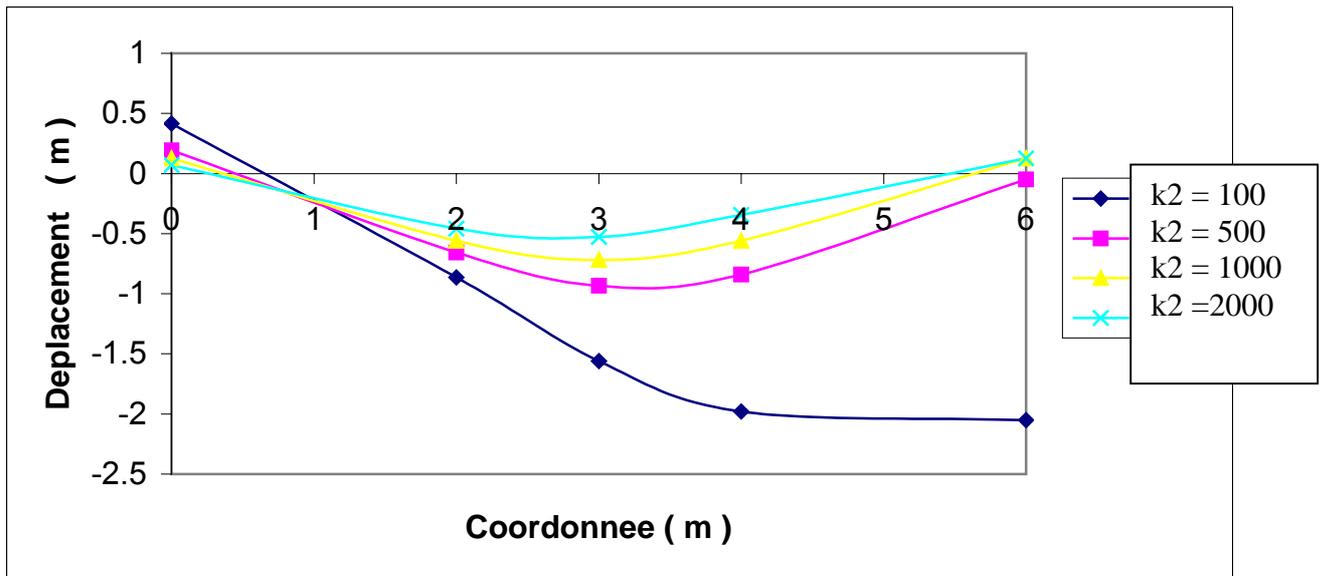
Ces valeurs sont très proches de ceux obtenus par Mohr ainsi que Eisenberger et al.

HIROSHI MATSUDA et TAKESHI SAKIYAMA

Matsuda et al. ont développé une méthode approchée pour l'analyse d'une poutre sur fondation élastique non homogène. La solution a été obtenue numériquement en transformant les équations différentielles en équations intégrales. Les résultats obtenus dans cette étude seront confrontés à ceux obtenus par Matsuda et al.



**Figure 2.7 : Poutre sur sol élastique non homogène (un paramètre)<sup>(\*\*\*\*)</sup>**

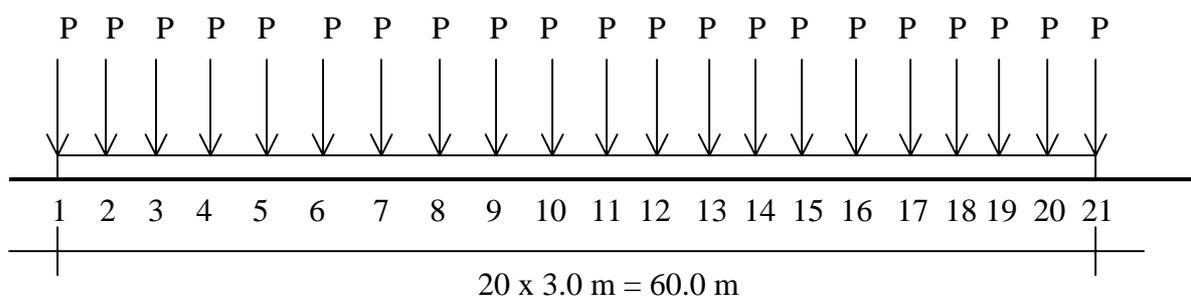


**Figure 2.8 : Déformée de la poutre pour différentes situations**

Les résultats sont très proches à ceux obtenus par Matsuda et sakiyama, et on note le problème de soulèvement non traité par Matsuda et al (pour les 4 cas étudiés).

BADIE S.S et SALMON D.C (1996)

Badie et al. ont présenté un élément quadrilatéral pour la fondation élastique. Ils ont modélisé la rigidité verticale ainsi que celle du cisaillement dans le sol et les frottements entre la poutre et le sol. L'exemple traité par Badie et al. qui est une longue poutre (utilisée dans un 'Ship repair yard') de 60 m de longueur avec et sans appuis aux extrémités. Badie et al. ont comparé les résultats de leur modèle avec ceux de Beshara et Hassan. Dans cette étude les résultats seront confrontés aux deux publications citées ci dessus. Pour des raisons de symétrie, seule la moitié de la poutre a été discrétisée en 10 éléments.



**Figure 2.9 : Poutre étudiée par Badie et al.<sup>(\*\*\*)</sup>**

	Sans appui simple en (1)			Avec appui simple en (1)		
	Mohr	Badie	Cette étude	Mohr	Badie	Cette étude
$w_1$	-0.1235	-0.1237	-0.1234622	0.0	-0.0006	0.0
$w_{11}$	-0.09081	-0.09093	-0.0908111	-0.1023	-0.1028	-0.1029547
$M_{11}$	6.777	6.763	6.758	17.10	17.49	17.51
$\phi_1$	0.003100	0.003110	0.00310068	-0.00920	-0.00912	-0.00920414

On remarque que les résultats obtenus dans cette étude sont très proches de ceux de Mohr (1980) et Badie et al. (1996) qui ont étudié la même poutre avec des formulations très différentes.

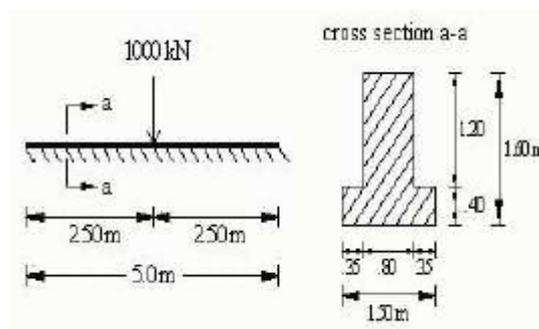
A. YALCIN Aköz et Mesut AKSOYDAN<sup>(15)</sup> (2005):

Yalcin et al. ont étudié les poutres de Timoshenko sur fondations élastiques en utilisant les matrices de transfert.

a- poutre soumise à une charge concentrée à mi-travée :

Les propriétés mécaniques et géométriques sont :

$E = 25 \text{ GPa}$   
 $k = 300 \text{ MPa}$   
 $L = 5 \text{ m}$   
 $A = 1.56 \text{ m}^2$   
 $I = 0.36 \text{ m}^4$



**Figure 2.10 : Semelle filante (1) étudiée par Yalcin et al.<sup>(15)</sup>**

Le déplacement le long de la poutre, obtenu dans cette étude, est :

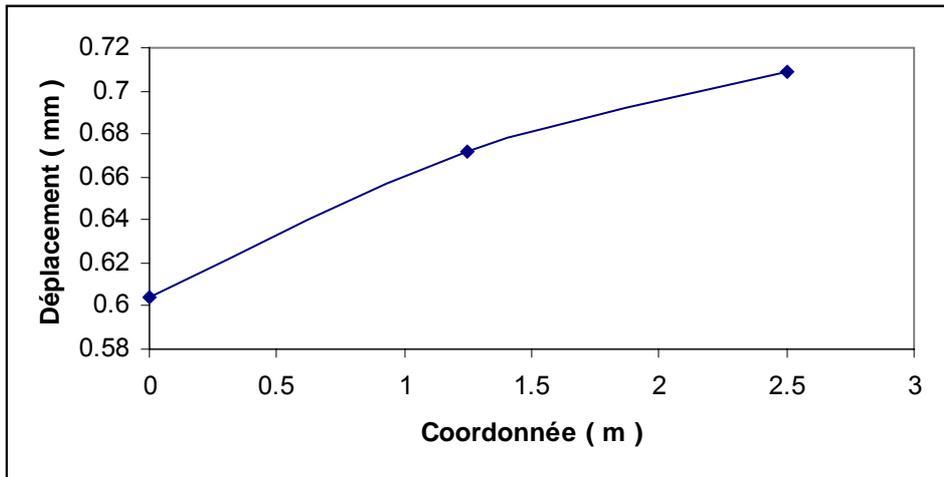


Figure 2.11 : Déformée de la Semelle filante (1) (cette étude) et celui obtenu par Yalcin et al.

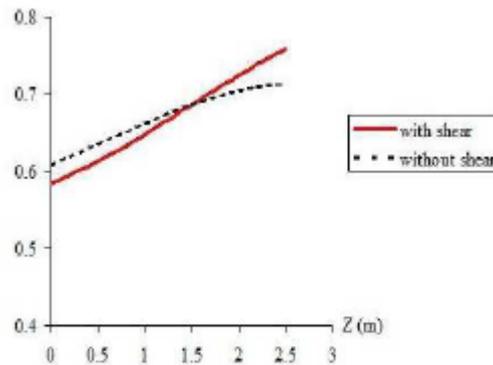


Figure 2.12 : Déformée de la Semelle filante (1), Yalcin et al.<sup>(15)</sup>

b- Poutre soumise à deux charges aux extrémités :

Dans cette application, la poutre de section en T est considérée pour les trois cas suivants :

1.  $h = 1.2 \text{ m}$     $k = 300 \text{ Mpa}$     $I = 0.154 \text{ m}^4$
2.  $h = 1.6 \text{ m}$     $k = 300 \text{ Mpa}$     $I = 0.360 \text{ m}^4$
3.  $h = 1.6 \text{ m}$     $k = 600 \text{ Mpa}$     $I = 0.360 \text{ m}^4$

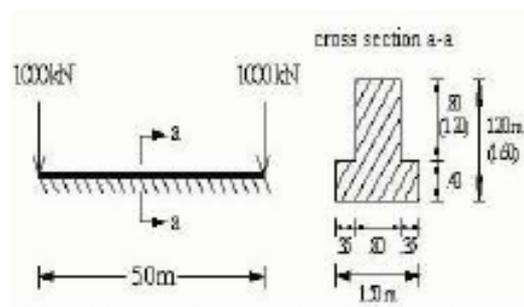
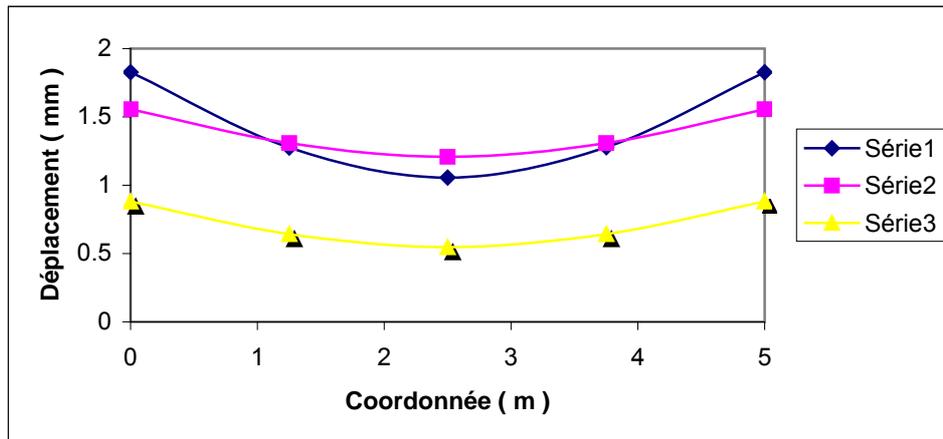


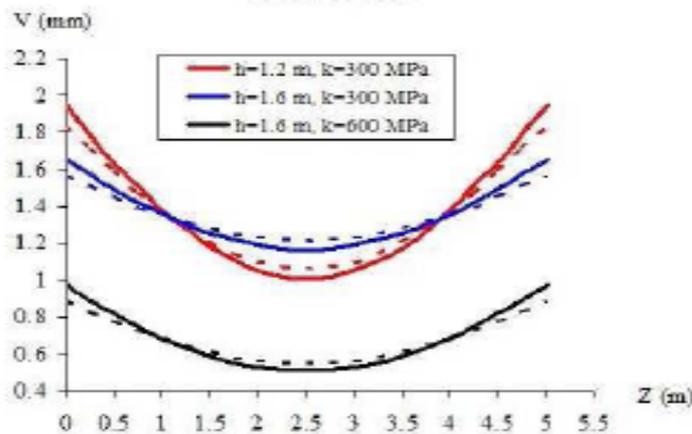
Figure 2.13 : Semelle filante (2) étudiée par Yalcin et al.<sup>(15)</sup>

Le déplacement le long de la poutre, obtenu dans cette étude, est :



**Figure 2.14 : Déformée de la poutre (cette étude)**

et celui obtenu par Yalcin et al.



**Figure 2.15 : Déformée de la poutre obtenue par Yalcin et al.**

On remarque que les résultats sont très proches.

## 2-5 Conclusions

Dans le cas d'un comportement élastique linéaire une étude comparative entre les différentes approches a révélé que l'élément implémenté reproduit de manière précise et acceptable les résultats obtenus par d'autres formulations. Néanmoins, ces résultats sont discutables car :

- On note le problème de perte de contact non traité dans certaines situations. Il sera résolu au chapitre (5).
- Le matériau est supposé linéaire élastique, trop idéal pour être réel, en vu des lois de comportement expérimentales des différents matériaux utilisés en Génie civil (acier, Béton armé, sol). Dans le chapitre (3) qui suit une analyse du 1<sup>er</sup> ordre elastoplastique sera abordée.

## CHAPITRE 3

### ANALYSE DU 1<sup>er</sup> ORDRE ELASTOPLASTIQUE

#### 3-1 Introduction :

Les progrès de la science des matériaux, à travers la multitude des tests en laboratoire, a conduit à une meilleure connaissance du comportement structural des matériaux tels que l'acier, béton et les sols. Sous l'effet des charges extérieures (statiques ou dynamiques), le matériau est souvent sollicité au delà de sa limite élastique. Par conséquent, tout modèle numérique de simulation doit tenir compte du comportement non-linéaire des matériaux constituant le système étudié. Plusieurs techniques peuvent être utilisées, dépendant du type d'élément (1D, 2D, 3D). Pour les problèmes à 2 ou 3 dimensions, la théorie de la plasticité (associated and non associated) sont utilisées en travaillant sur les contraintes et déformations en tout point du milieu étudié, avec un critère tels que Von Mises, Tresca pour identifier les zones plastiques .....

Pour les problèmes à 1 dimension, tel que le problème étudié (poutre) , les relations moment-courbure sont formulées et intégrées sur la section tenant compte de la loi de comportement du matériau et la forme géométrique de la section, pour aboutir à une loi de comportement de la section.

#### 3-2 Relations moment-courbure :

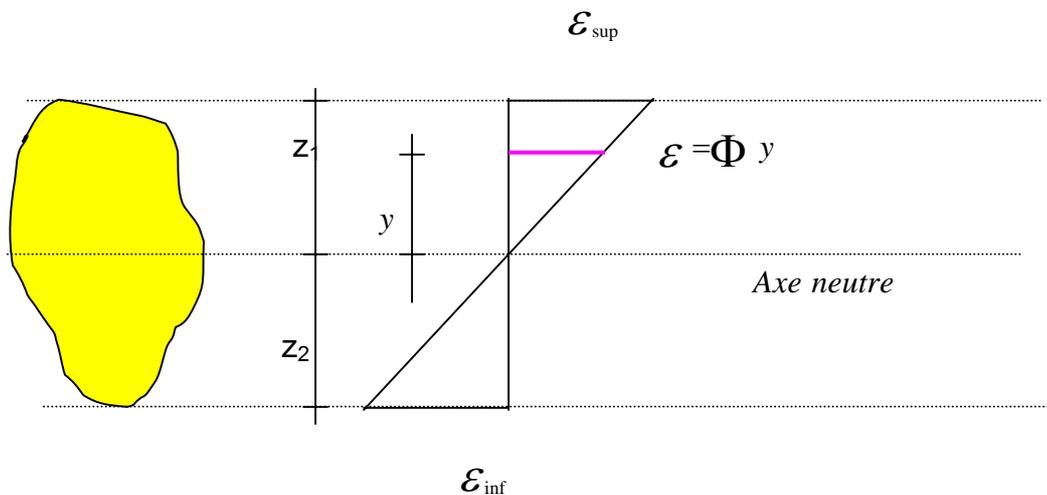
Les relations moment-courbure pour des sections en acier ou en béton armé sont décrites brièvement ci dessous.

##### 3-2-1 Relation moment-courbure (section en acier) :

Les méthodes d'analyse plastique des structures sont largement utilisées comme outil de calcul. Ces méthodes permettent de calculer la charge à laquelle le

système atteint la ruine par le développement d'un certain nombre de rotules plastiques le rendant mécanisme avec des déplacements importants.

Pour une section d'acier constituée d'un matériau homogène sollicitée en flexion pure, la relation moment courbure au delà de la limite élastique peut être développée à partir de la loi de comportement du matériau constitutif et les caractéristiques géométriques de la section. La planéité des sections est supposée vérifiée que ce soit à l'état élastique ou plastique (hypothèse de Bernoulli) . La conséquence de cette hypothèse est que la déformation longitudinale est un diagramme linéaire qui s'exprime par :



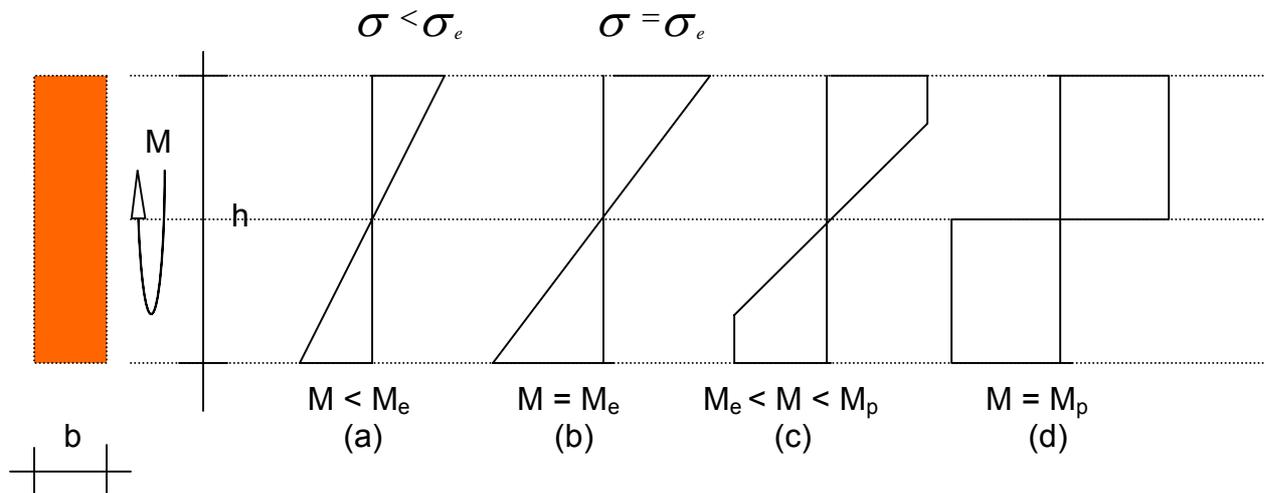
**Figure 3.1 Diagramme de déformations selon Bernoulli**

Un calcul élastique selon la loi de Hooke, conduit à une distribution linéaire des contraintes normales et ceci peut être en violation avec la loi de comportement du matériau. En réalité, pour une déformation  $\epsilon$  à l'ordonnée  $y$ , la contrainte normale  $\sigma$  se déduit à partir de la loi de comportement.

En augmentant le moment fléchissant, on peut distinguer trois états pour une section :

- (1) La déformation maximale aux fibres extrêmes atteint la limite élastique, le reste de la section est élastique.
- (2) A partir des fibres extrêmes on a plasticité en profondeur et un noyau élastique à l'extérieur duquel on a deux zones plastiques.
- (3) Toute la section est plastique, la capacité de la section est atteinte et on a une rotule plastique.

Dans le cas d'une section rectangulaire (  $b \times h$  ) doublement symétrique et constituée d'un matériau homogène, l'axe neutre passe par le centre de gravité de la section.

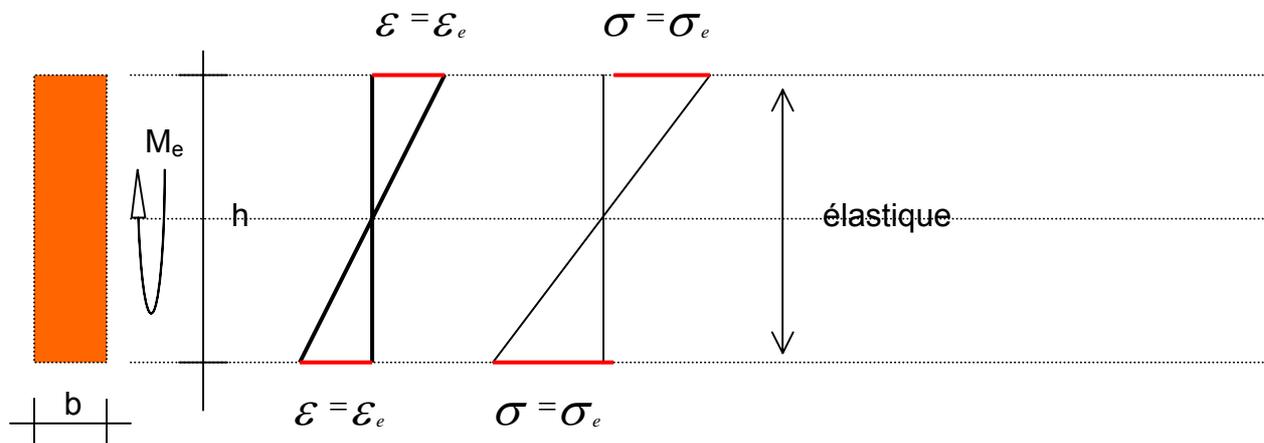


**Figure 3.2 Contraintes normales à différents niveaux de charge**

Dans ce qui suit, on détermine les trois états par le couple moment courbure (  $M, \phi$  ). Ceci permettra par la suite de tracer la relation moment courbure.

Section à la limite élastique : (  $M_e$  )

On détermine le moment  $M_e$  pour lequel les fibres extrêmes sont à un niveau de contrainte égal a la limite élastique.



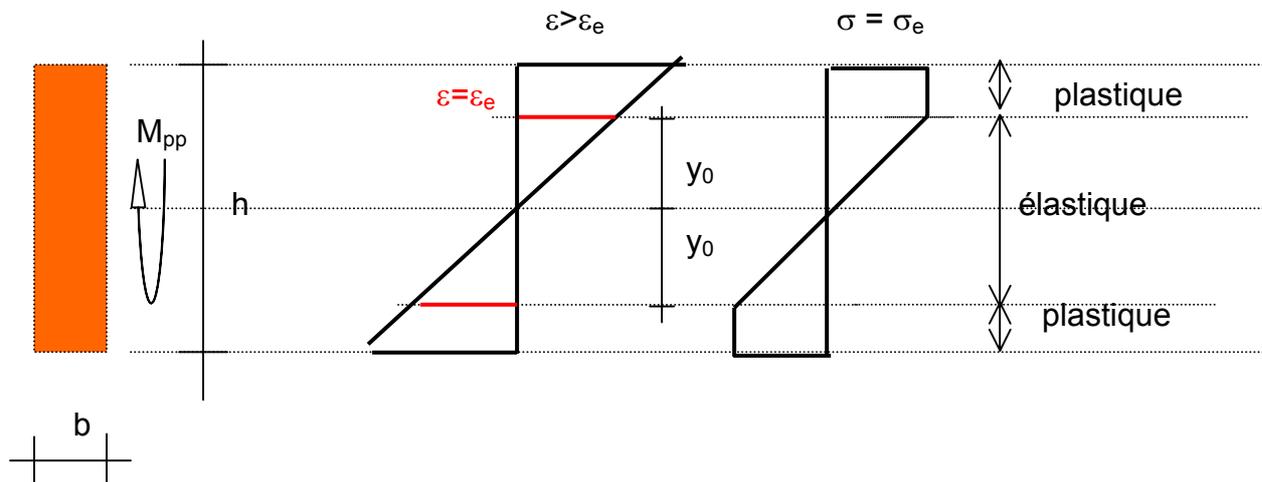
**Figure 3.3 Contraintes normales à la limite élastique**

$$M_e = \sigma_e \frac{bh^2}{6} \quad (3.1)$$

La courbure correspondante est : 
$$\Phi_e = \frac{\epsilon_e}{h/2} = \frac{2\epsilon_e}{h} \quad (3.2)$$

### Section partiellement plastique : ( $M_{pp}$ )

En augmentant le moment, les déformations au niveau des zones extrêmes dépassent la déformation élastique limite, elles sont plastiques. Entre ces deux zones on a un noyau élastique. La section est dite partiellement plastique.



**Figure 3.4 Contraintes normales pour une section partiellement plastique**

le moment  $M_{pp}$  peut être calculé aisément par calcul des résultantes et bras de levier.

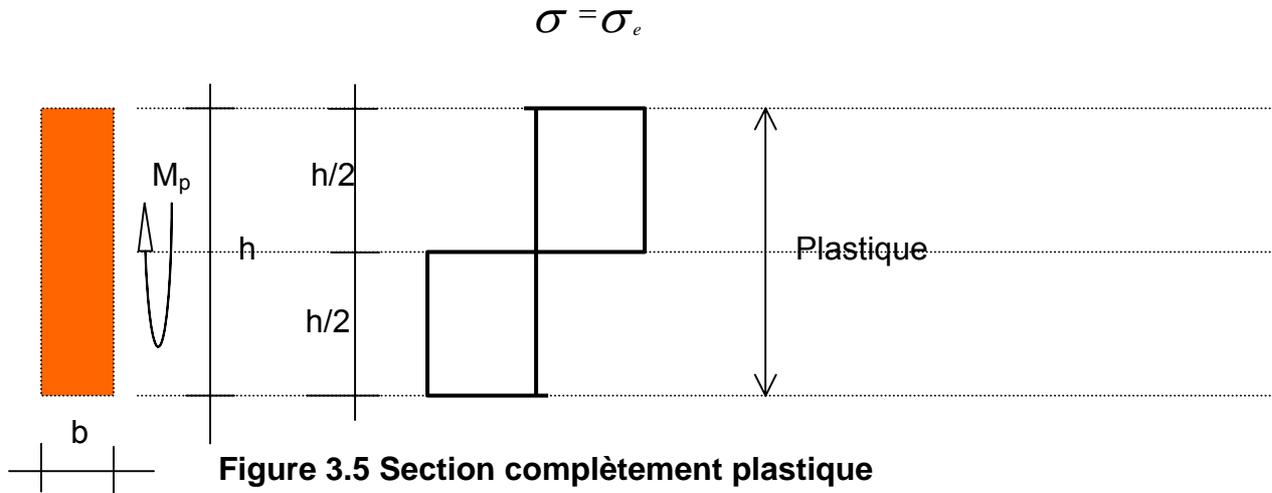
$$\begin{aligned}
 M_{pp} &= \sigma_e \left( \frac{h}{2} - y_0 \right) b \left( \frac{h}{2} + y_0 \right) + \frac{1}{2} \sigma_e y_0 b \frac{4y_0}{3} \\
 &= \sigma_e b \left( \frac{h^2}{4} - \frac{y_0^2}{3} \right)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

En substituant  $y_0 = \frac{\epsilon_e}{\Phi}$ , on obtient le moment en fonction de la courbure :

$$M_{pp} = \sigma_e b \left[ \frac{h^2}{4} - \frac{1}{3} \left( \frac{\epsilon_e}{\Phi} \right)^2 \right] \tag{3.4}$$

Section complètement plastique : (  $M_{cp}$  )

L'état final ultime, est quand la section est entièrement plastique.

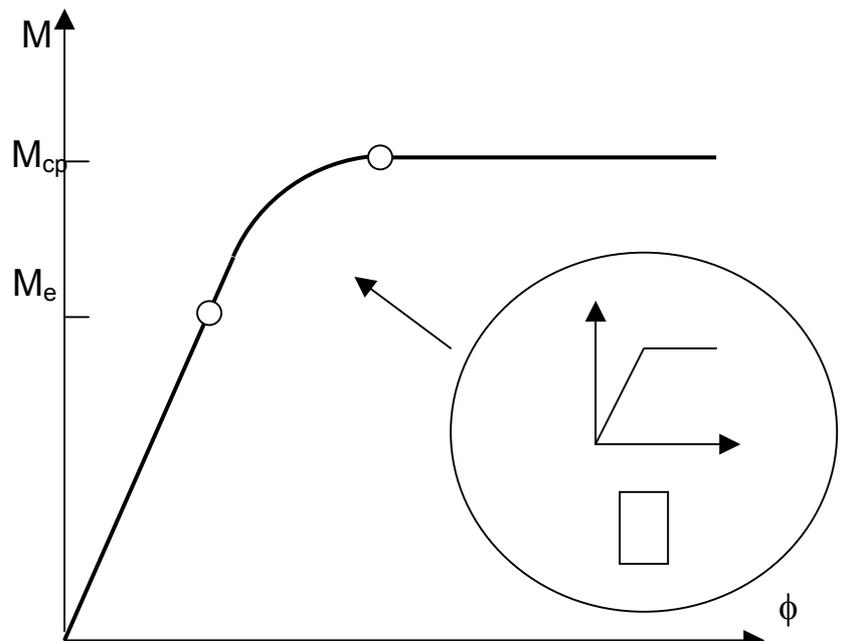


Dans le cas d'une section complètement plastique, le moment est :

$$M_p = \sigma_e \frac{bh^2}{4} \quad (3.5)$$

remarquons que ce résultat peut aussi être déterminé à partir de la relation (3.4) quand la courbure  $\Phi \rightarrow \infty$ .

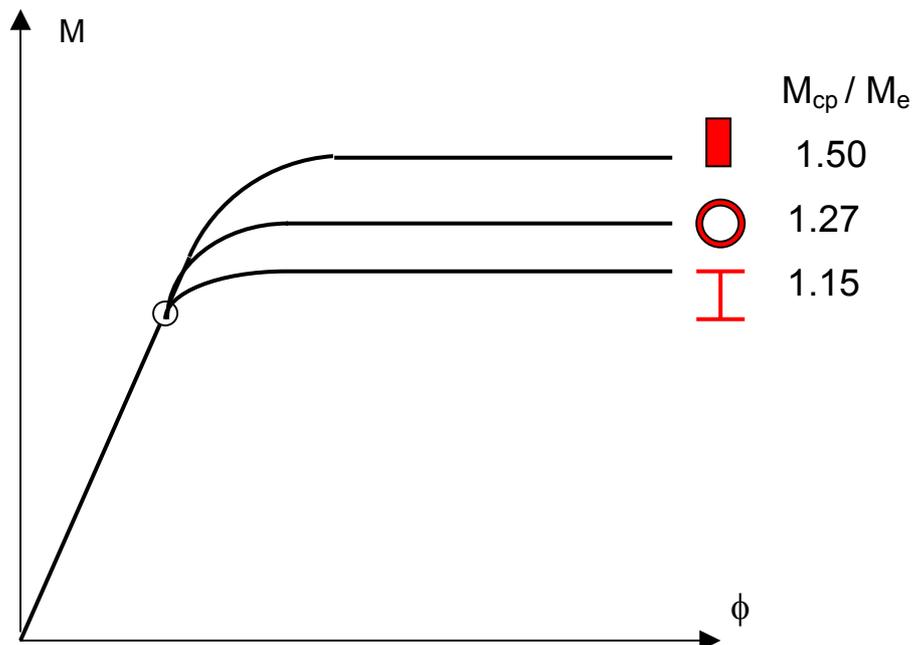
Le diagramme moment courbure pour une section rectangulaire homogène constituée d'un matériau élastique parfaitement plastique a l'allure :



**Figure 3.6 Relation moment courbure (section en acier)**

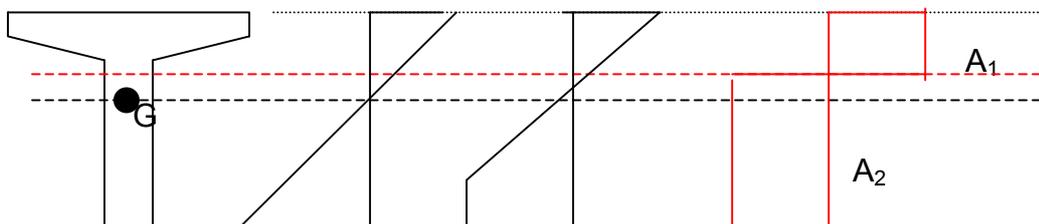
On remarque que le rapport  $M_p / M_e = 1.5$  pour une section rectangulaire. Ce rapport est appelé facteur de forme. D'autres facteurs existent pour mesurer la réserve de résistance en flexion tels que, le facteur de rendement élastique et le facteur de rendement plastique.

Pour d'autres configurations géométriques doublement symétriques de la section, la procédure de calcul est similaire et on obtient les allures indiquées ci dessous pour des sections courantes avec les facteurs de forme correspondants :



**Figure 3.7 Relation moment courbure ( pour différentes sections )**

Dans le cas des sections à un seul axe de symétrie ou de manière générale de forme quelconque, on remarque qu'il y a déplacement de l'axe neutre quand les fibres rentrent dans le domaine plastique.



**Figure 3.8 Section à un seul axe de symétrie**

La position de l'axe neutre est donnée par  $\int_A \sigma dA = 0 \Rightarrow \sigma_e (A_2 - A_1) = 0 \Rightarrow A_2 = A_1$ , d'ou

on peut obtenir le moment  $M_{cp}$  correspondant à une section complètement plastique, car l'axe neutre plastique divise la section en deux aires égales.

La relation moment courbure analytique obtenue ci dessus, présente une relation non linéaire pour  $M_e < M < M_{cp}$  (section partiellement plastique) est simplifiée en un modèle élastique parfaitement plastique.

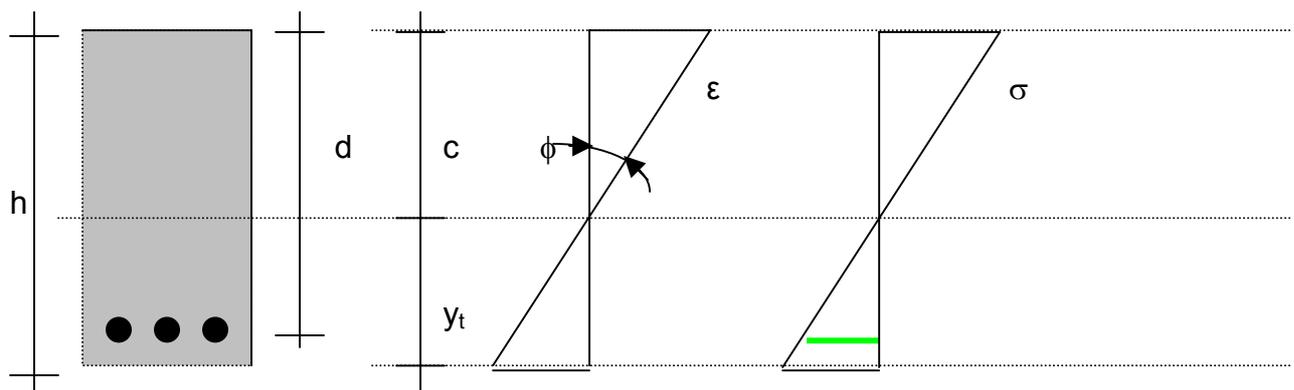
### 3-2-2 Relation moment-courbure (Section en béton armé) :

L'objectif est la formulation de la relation moment courbure d'une section en béton armé. La section du matériau composite est homogénéisée durant les différentes phases de calcul.

En raison de la faible résistance du béton en traction, la fissuration est la première nonlinéarité qui se manifeste dans les structures en béton armé, et ce à des niveaux de charge peu élevés. Après fissuration et endommagement du béton tendu, celui ci ne reprend plus les contraintes de traction qui seront résistées par les armatures longitudinales tendues. Les barres tendues atteindront leur limite élastique à un niveau de charge plus élevé. L'état ultime est atteint quand la fibre extrême comprimée atteint la résistance du béton en compression. On remarque qu'on a trois états successifs importants pour la section de béton arme : fissuration du béton tendu, plasticité dans les barres tendues et finalement écrasement du béton comprimé.

#### Fissuration du béton :

Avant fissuration, les relations d'un comportement linéaire élastique sont valables sur la section homogénéisée élastique. Juste avant fissuration les diagrammes des déformations et contraintes pour une section rectangulaire sont indiqués ci dessous :



**Figure 3.9 Section en béton armé avant fissuration**

On suppose qu'on n'a pas de glissement relatif entre le béton et l'acier, ce qui exprime une adhérence parfaite entre les deux matériaux. Par conséquent et en utilisant la compatibilité des déformations au niveau des barres tendues :

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b \quad (3.6)$$

$$\sigma_b = E_b \varepsilon_b \quad (3.7)$$

$$\sigma_a = E_a \varepsilon_a = E_a \varepsilon_b = \frac{E_a}{E_b} E_b \varepsilon_b = n \sigma_b \quad (3.8)$$

$n = \frac{E_a}{E_b}$  étant le coefficient utilisé pour l'homogénéisation.

La fissuration se produit quand la fibre extrême tendue atteint la résistance du béton en traction. Le moment de flexion qui induit l'apparition des fissures se calcule en utilisant la relation :

$$f_t = \frac{M_{fiss} y_t}{I_h} \rightarrow M_{fiss} = \frac{f_t I_h}{y_t} \quad (3.9)$$

La position de l'axe neutre avant fissuration est le centre de la section composite:

$$c = \frac{bh(\frac{h}{2}) + (n-1)Ad}{bh + (n-1)A} \quad (3.10)$$

$$y_t = h - c$$

d'où l'inertie de la section homogénéisée

$$I_h = \frac{bh^3}{12} + bh\left(c - \frac{h}{2}\right)^2 + (n-1)A(d-c)^2 \quad (3.11)$$

La courbure juste avant fissuration est estimée a partir du diagramme des déformations :

$$\Phi_{fiss} = \frac{\varepsilon_t}{y_t} = \frac{f_t / E_b}{y_t} \quad (3.12)$$

Juste après fissuration l'allure des diagrammes de déformations et contraintes sont :

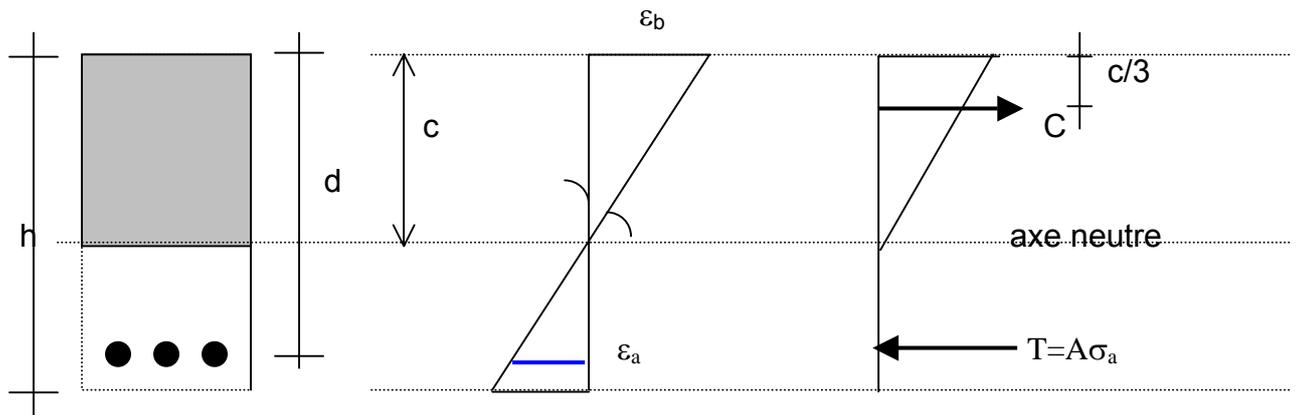


Figure 3.10 Section en béton armé juste après fissuration

La section est maintenant fissurée , le béton ne résiste plus à la traction, la position de l'axe neutre est déterminée en utilisant les équations d'équilibre :

$$\text{Equilibre : } C=T \rightarrow \frac{1}{2} \sigma_b b c = A \sigma_a \quad (\text{forces}) \quad (3.13)$$

$$M = \frac{1}{2} \sigma_b b c (d - \frac{c}{3}) = A \sigma_a (d - \frac{c}{3}) \quad (\text{Moment}) \quad (3.14)$$

$$\text{Déformations : } \varepsilon_b = \Phi c \quad (\text{béton}) \quad (3.15)$$

$$\varepsilon_a = \Phi (d - c) \quad (\text{acier}) \quad (3.16)$$

$$\text{Contraintes : } \sigma_b = E_b \varepsilon_b \quad (\text{béton}) \quad (3.17)$$

$$\sigma_a = E_a \varepsilon_a \quad (\text{acier}) \quad (3.18)$$

$$\text{En substituant (17) et (18) dans (14) : } \frac{1}{2} E_b \varepsilon_b b c = A E_a \varepsilon_a \quad (3.19)$$

$$\text{Substitution de (15) et (16) : } \frac{1}{2} E_b \Phi b c^2 = A E_a \Phi (d - c) \quad (3.20)$$

$$n = \frac{E_a}{E_b} : \frac{1}{2} E_b \Phi b c^2 = A n E_b \Phi (d - c)$$

$$\text{d'ou l'équation du deuxième degré } \left(\frac{b}{2}\right) c^2 + (nA) c - (nAd) = 0$$

en posant  $\rho = \frac{A}{bd}$  et  $c = kd$  on a :

$$k^2 + (2n\rho) k - (2n\rho) = 0 \rightarrow k = \sqrt{2n\rho + (n\rho)^2} - n\rho$$

La contrainte dans l'armature tendue et la courbure sont :

$$\sigma_a = \frac{M}{A(d-\frac{c}{3})}$$

$$\Phi = \frac{\varepsilon_a}{d-c} = \frac{\sigma_a}{E_a(d-c)}$$

$$\sigma_b = E_b \varepsilon_b = E_b \Phi c$$

Notons qu'à ce stade le béton comprimé ainsi que les armatures tendues sont toujours dans le domaine élastique. La discontinuité dans la relation moment courbure avant et après fissuration est observée avec déplacement de l'axe Neutre

**Plasticité des barres tendues :**

Le moment plastique  $M_y$ , pour lequel la contrainte dans les armatures tendues atteint la limite élastique, ainsi que la courbure  $\Phi_y$  correspondante représentent un état important précédant l'état ultime de la section composite.

$$\sigma_a = \sigma_y \rightarrow M_y = A \sigma_y (d-\frac{c}{3})$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_y \rightarrow \Phi = \frac{\varepsilon_y}{d-c} = \frac{\sigma_y}{E_a(d-c)}$$

**Etat ultime :** La contrainte de compression dans la fibre extrême de béton atteint la résistance du béton en compression  $f'_b$  avec une déformation  $\varepsilon'_b = 0.003$  alors que la déformation dans les barres tendues est sur le palier d'écoulement. Le diagramme de contraintes dans la zone de béton comprime n'est pas linéaire, il sera remplacé par un bloc uniforme équivalent.

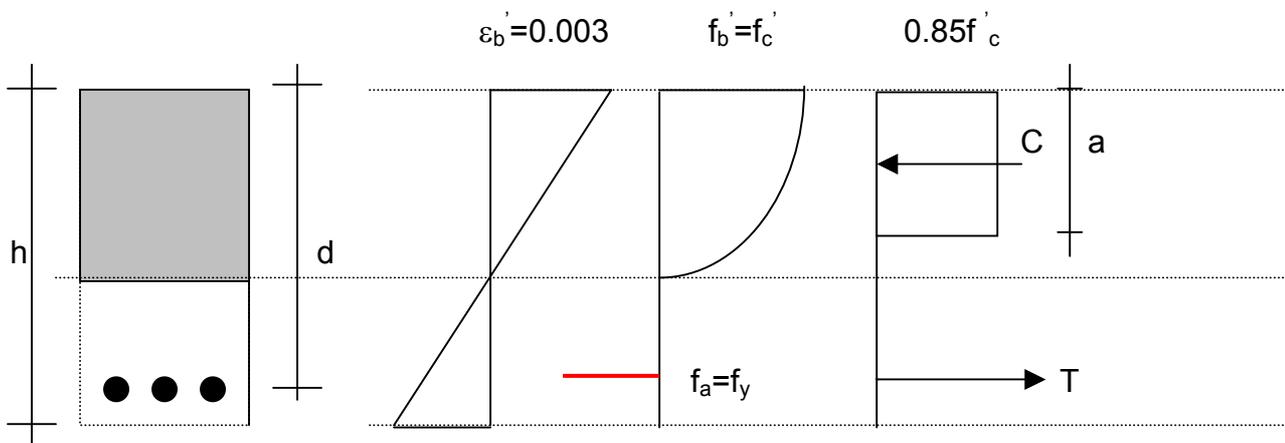


Figure 3.11 Section en béton armé à l'état ultime

Les différentes phases par lesquelles passe une section en béton armé sont indiquées sur la figure ci dessous :

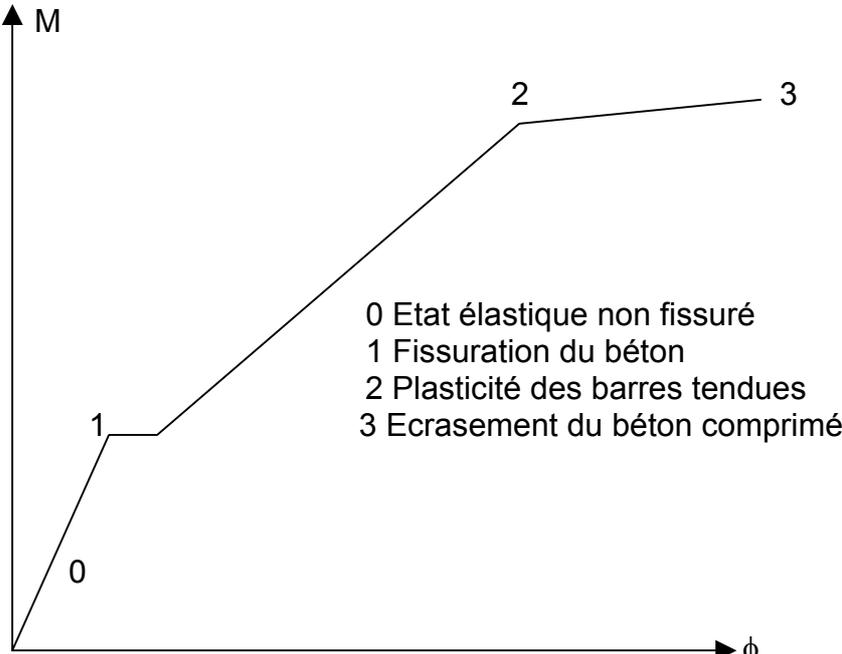


Figure 3.12 Relation moment courbure pour une section en béton armé

3.3 Modèle bi linéaire du sol :

Pour tenir compte du comportement inélastique du sol à travers le module de Winkler, plusieurs approches ont été utilisées.

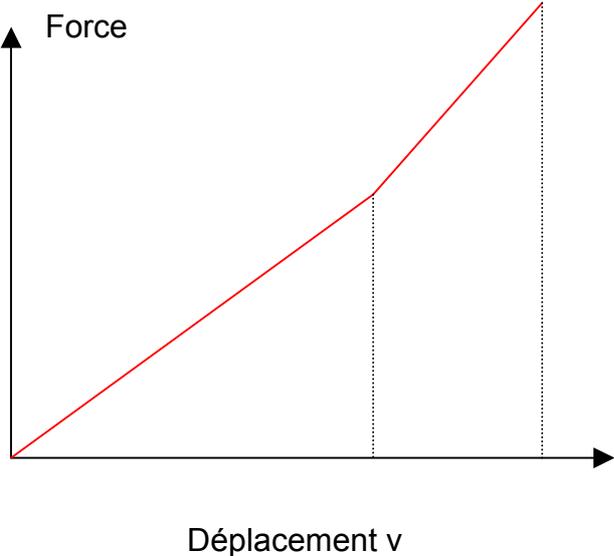
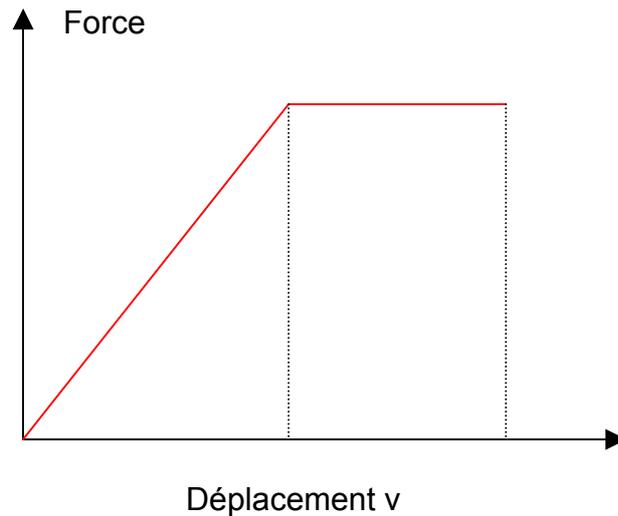


Figure 3.12 Relation force déplacement ( hardening )



**Figure 3.13 Relation force déplacement ( Softening )**

D'autres modèles non linéaires de degrés supérieur à 1 ont été modélisés par d'autres chercheurs.

Le modèle bi linéaire a été adopté dans ce travail.

### 3.4 Implémentation numérique :

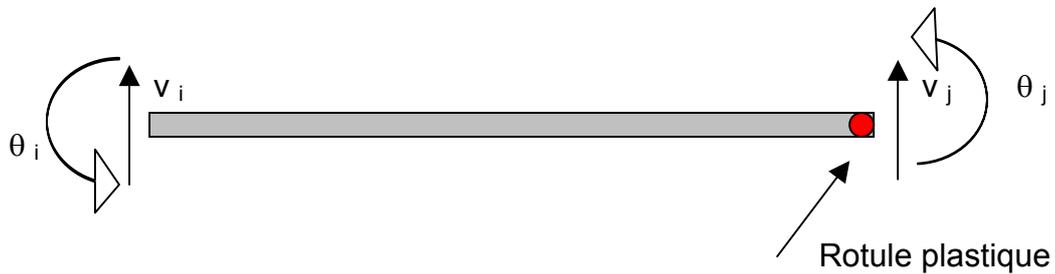
Le chargement extérieur est appliqué par incréments successifs. Pour le premier incrément, une première analyse localise le point de moment maximal, et trouve le facteur multiplicateur des charges nécessaire pour avoir une rotule plastique en ce point. Donc l'incrément est automatique et les incréments suivants sont inégaux. Au deuxième incrément la matrice de rigidité globale est recalculée pour tenir compte de la ou des rotules plastiques apparues au premier incrément. Une nouvelle recherche du moment maximal et du facteur multiplicateur s'effectue pour localiser d'autres rotules plastiques qui apparaîtront. Le processus incrémental continue ainsi pour les autres incréments jusqu'à ruine.

Dans le cas des poutres sans appuis élastiques, pour lesquelles le degré d'hyperstaticité est fini, la ruine plastique du système est atteinte quand le nombre de rotules développées transforme le système en un mécanisme.

Dans le cas des poutres sur appuis élastiques le problème est plus complexe car le degré d'hyperstaticité est infini, et le concept de ruine plastique par apparition de mécanisme ne peut se manifester. Par conséquent il faut un critère qui limite les déplacements de tassement par exemple. D'autres critères peuvent être avancés, en utilisant les règlements de calcul et de conception.

Dans ce qui suit l'approche adoptée pour la transformation de la matrice de rigidité d'un élément avec rotule plastique est brièvement expliquée.

Rotule plastique au nœud j :



**Figure 3.14 Rotule plastique au nœud ( j )**

Partition de la matrice de rigidité élémentaire :

$$[K_e] = \begin{matrix} 4 \times 4 \\ \left( \begin{array}{ccc|c} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ \hline K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{array} \right) \end{matrix}$$

Condensation du degré de liberté  $\theta_j$  ou il y a rotule plastique

$$[K_e]^c = \begin{matrix} 3 \times 3 \\ \left( \begin{array}{ccc} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{array} \right) \end{matrix} - \begin{matrix} \left( \begin{array}{c} K_{14} \\ K_{24} \\ K_{34} \end{array} \right) \end{matrix} \frac{1}{K_{44}} \begin{matrix} \left( \begin{array}{ccc} K_{41} & K_{42} & K_{43} \end{array} \right) \end{matrix}$$

Cette opération est suivie d'une expansion en une matrice 4 x 4, dans laquelle la quatrième ligne et quatrième colonne sont nulles.

Dans le cas d'une rotule plastique au nœud ( i ) à droite, un réarrangement précède la condensation qui sera suivie par une expansion en une matrice 4 x 4 avec une deuxième ligne et deuxième colonne nulles.

La procédure ci dessus donne pour une poutre sans appuis élastiques les résultats suivants :

Poutre élastique sans rotules plastiques :

$$\begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}$$

Poutre avec une rotule plastique en ( i ) :

$$\begin{pmatrix} \frac{3EI}{L^3} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ & & & \frac{3EI}{L} \end{pmatrix}$$

Poutre avec rotule plastique en ( j ) :

$$\begin{pmatrix} \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ & \frac{3EI}{L} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 \\ & & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Poutre avec rotules plastiques en ( i ) et ( j ) :

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dans le cas d'une poutre sur appuis élastiques, la matrice de rigidité élémentaire élastique dépend de la poutre et du sol à travers les deux paramètres de Winkler et Pasternak. S'il y a apparition d'une rotule plastique, cette dernière apparaîtra dans la poutre et le concept de rotule plastique est localisé dans la poutre. Par conséquent la procédure de transformation de la matrice de rigidité pour tenir compte des rotules plastiques affectera uniquement la première matrice du développement en séries de la matrice de rigidité. Les matrices indiquées ci dessus sont directement utilisées en leur ajoutant la contribution du sol.

Application 1 : Poutre en acier HEA 100

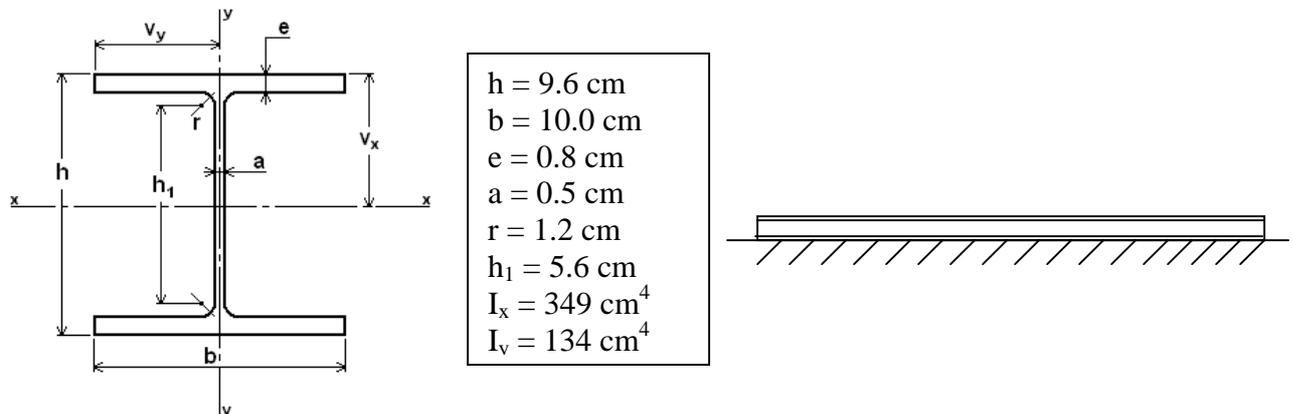
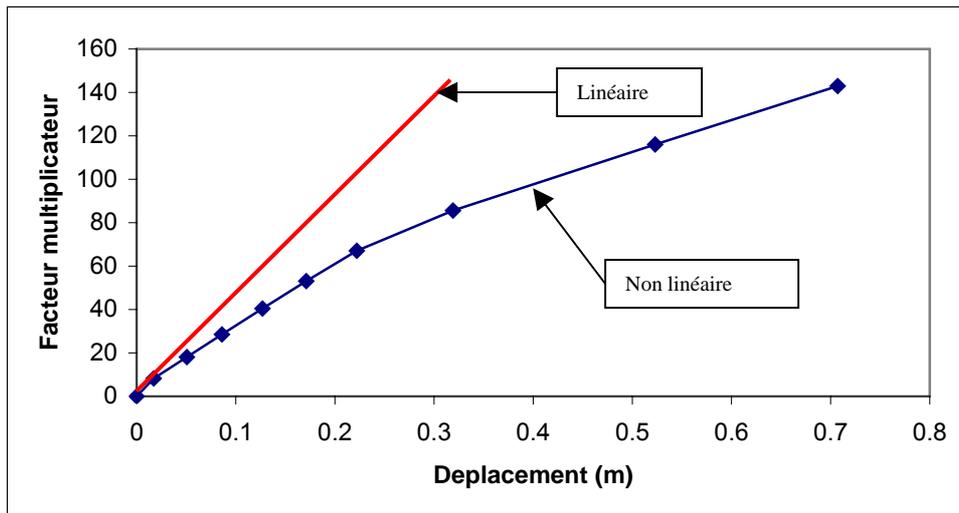
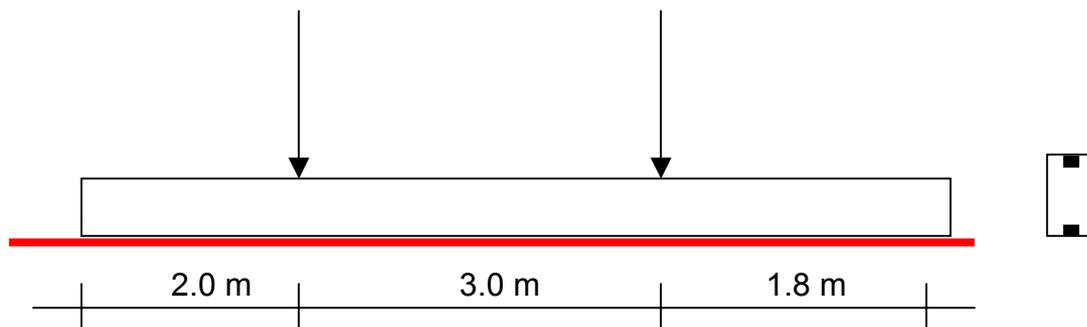


Figure 3.15 Poutre HEA 100 étudiée jusqu'à ruine



**Figure 3.14 Déplacement vertical du nœud ( )**

Le deuxième exemple traité est une poutre en béton armé dont les caractéristiques mécaniques et géométriques sont résumés ci dessous :



**Figure 3.15 Poutre en béton armé**

On remarque qu'il faut des efforts importants pour provoquer des rotules plastiques, induisant des déplacements excessifs ne pouvant être supportés par le sol. D'un point de vue pratique, les simulations ci dessus ne sont pas attractives. On décide de l'implémentation de l'élément pour l'étude de l'interaction portique-fondation-sol.

### 3-5 Portiques sur appuis rigides : 'Push over analysis'

Une extension est maintenant entamée pour les structures à portiques. Dans le cadre d'une analyse du premier ordre élastoplastique, l'effet axial et flexionnel sont découplés, et la matrice de rigidité d'un élément de portique dans le repère local s'obtient par simple assemblage de la matrice de rigidité de la poutre et celle de la barre travaillant en traction compression.

Pour la validation, on examine deux exemples.

Portique de Ghali et al. :

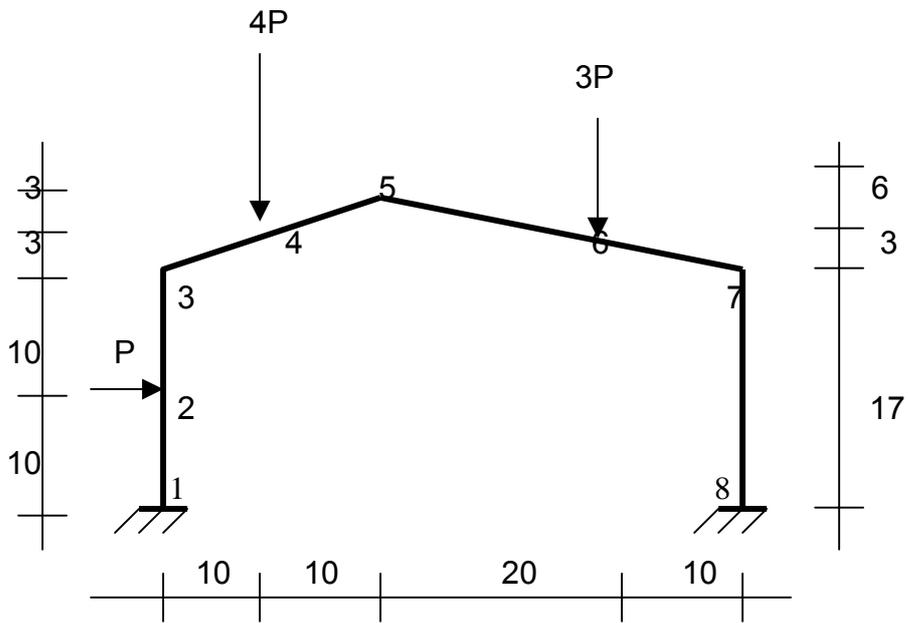


Figure 3.16 Portique étudié par Ghali et Neville

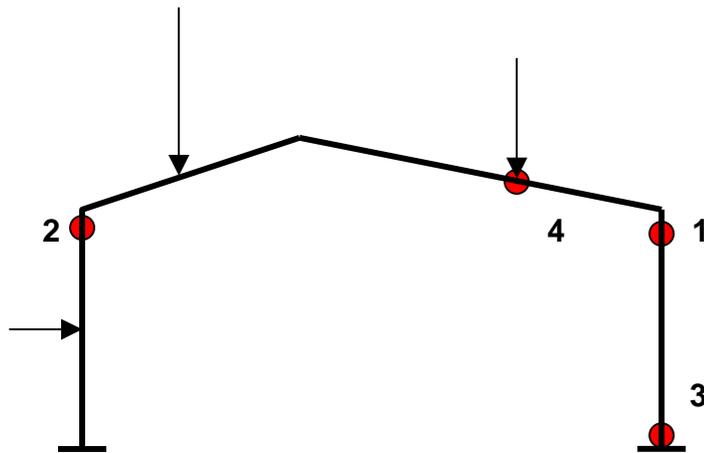
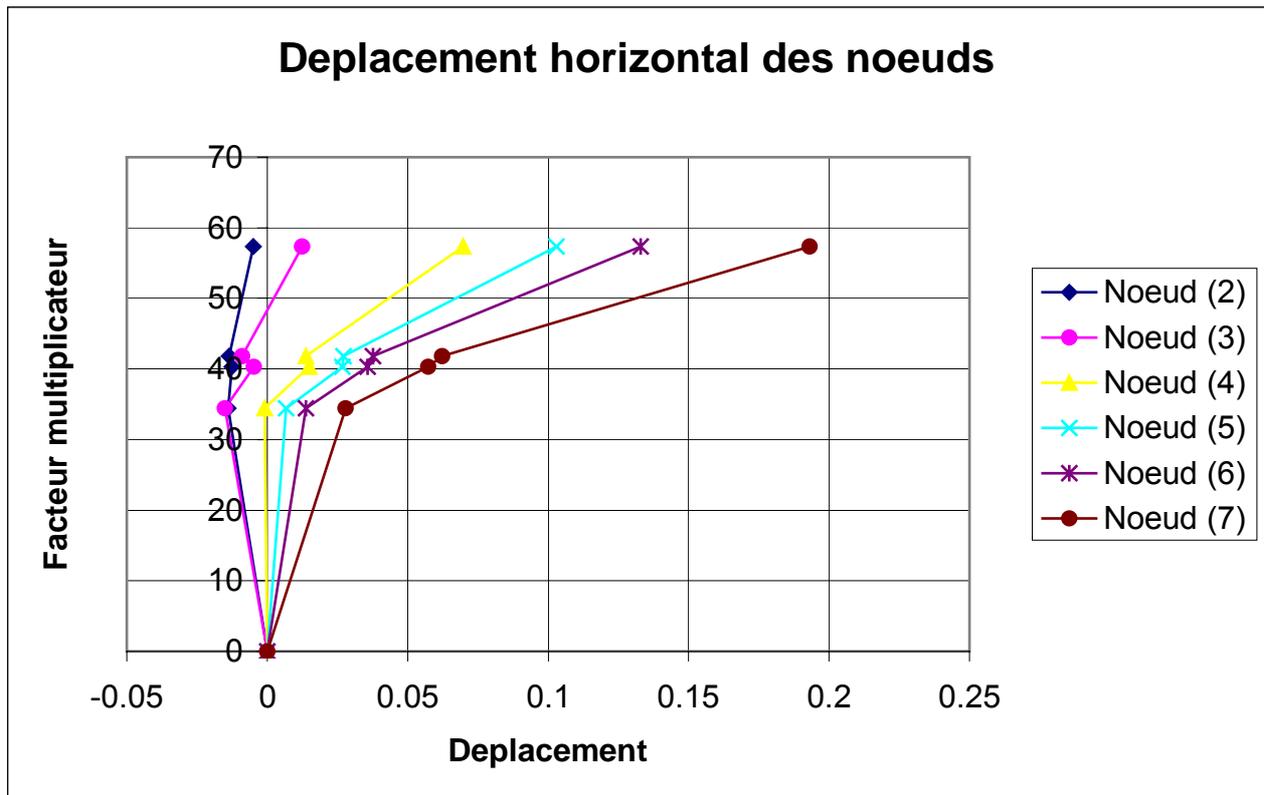


Figure 3.17 Ordre d'apparition des rotules plastiques jusqu'à ruine

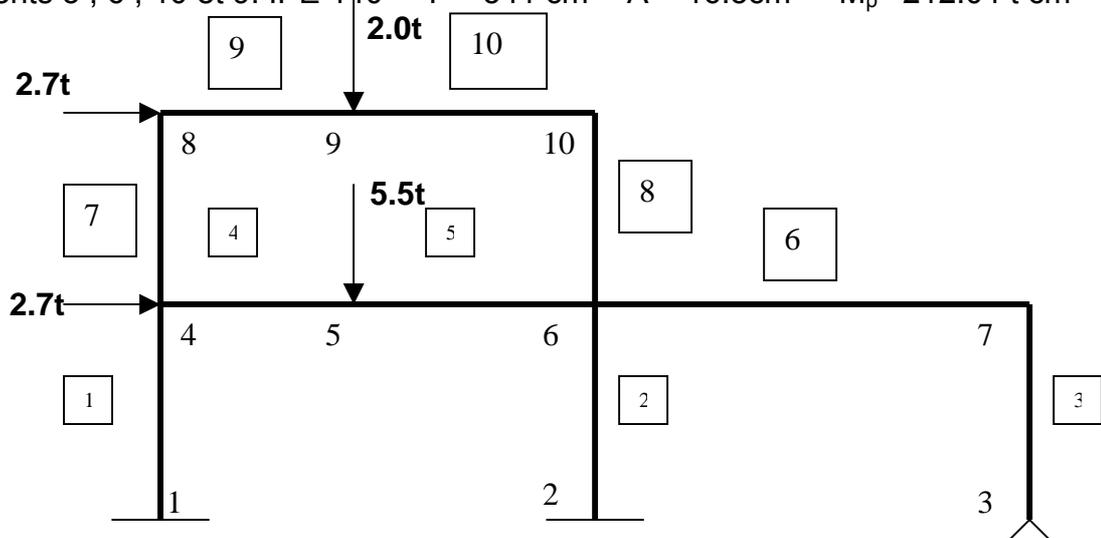
Nœud	2	3	4	5	6	7	Fact. Mult.
	0	0	0	0	0	0	0
	-0.0139	-0.0151	-0.0009	0.0068	0.0138	0.0279	34.459
	-0.0125	-0.0047	0.015	0.0268	0.0358	0.0574	40.332
	-0.0136	-0.0089	0.0137	0.0271	0.0376	0.0623	41.855
	-0.005	0.0125	0.0698	0.103	0.133	0.193	57.335



**Figure 3.18 Déplacements horizontaux des noeuds**

**Exemple 2 :** Le deuxième exemple est un portique en charpente métallique étudié par Lescourac'h . Un maillage de 10 éléments et de 10 noeuds a été utilisé pour la discrétisation du modèle numérique. Les caractéristiques mécaniques et géométriques sont résumés ci dessous.

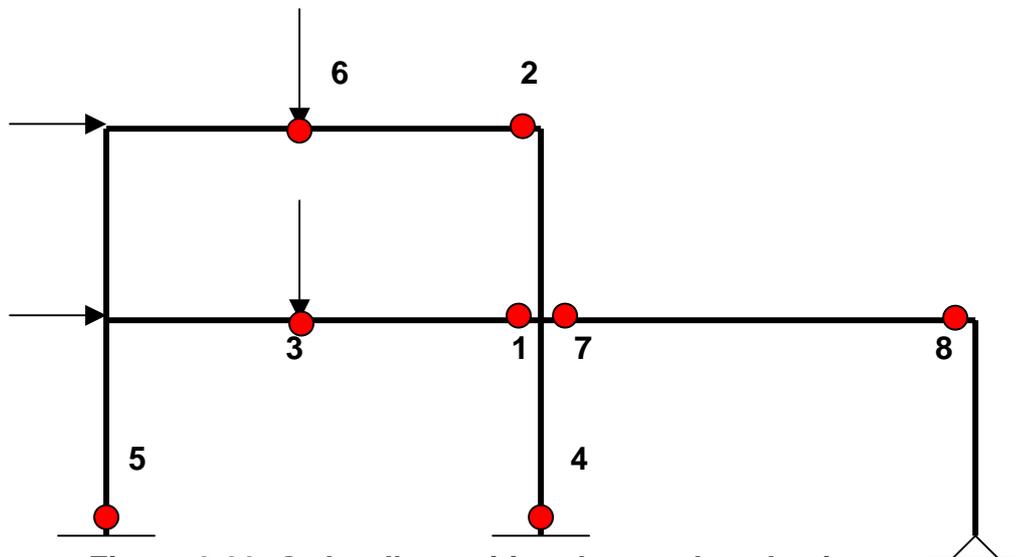
Eléments 1 , 2, 7 et 8 :	HEB 140	$I = 1509 \text{ cm}^4$	$A = 43 \text{ cm}^2$	$M_p = 589 \text{ t cm}$
Eléments 4 et 5:	IPE 200	$I = 1943 \text{ cm}^4$	$A = 28.5 \text{ cm}^2$	$M_p = 529 \text{ t cm}$
Eléments 3 , 6 , 10 et 9:	IPE 140	$I = 541 \text{ cm}^4$	$A = 16.5 \text{ cm}^2$	$M_p = 212.04 \text{ t cm}$



**Figure 3.19 Maillage du portique étudié par Lescourac'h**

Dans ce qui suit, l'ordre d'apparition des rotules plastiques ainsi que le facteur multiplicateur correspondant en utilisant le programme sont résumés ci dessous :

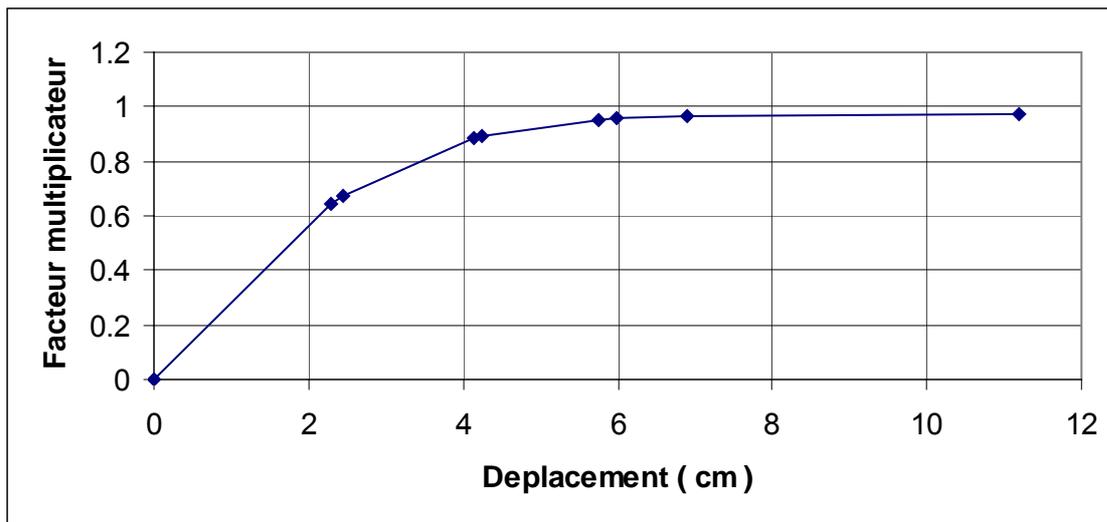
Rotule	position	facteur multiplicateur
1	Elément 5 Nœud 6	0.6461
2	Elément 10 Nœud 10	0.6705
3	Elément 4 Nœud 5	0.8871
4	Elément 2 Nœud 6	0.8934
5	Elément 1 Nœud 4	0.9512
6	Elément 2 Nœud 2	0.9549
7	Elément 6 Nœud 6	0.9646
8	Elément 6 Nœud 7	0.9762



**Figure 3.20** Ordre d'apparition des rotules plastiques

Les résultats obtenus sont exactement identiques à ceux obtenus par Lescouarc'h. Cependant l'approche numérique s'arrête juste après l'apparition de la dernière rotule. En effet, avec l'apparition de la dernière rotule, la structure devient un mécanisme, et le système d'équations n'est pas résoluble.

Ci dessous est le déplacement horizontal du nœud 7 à différents niveaux de charge indiquant le point d'apparition de rotules.



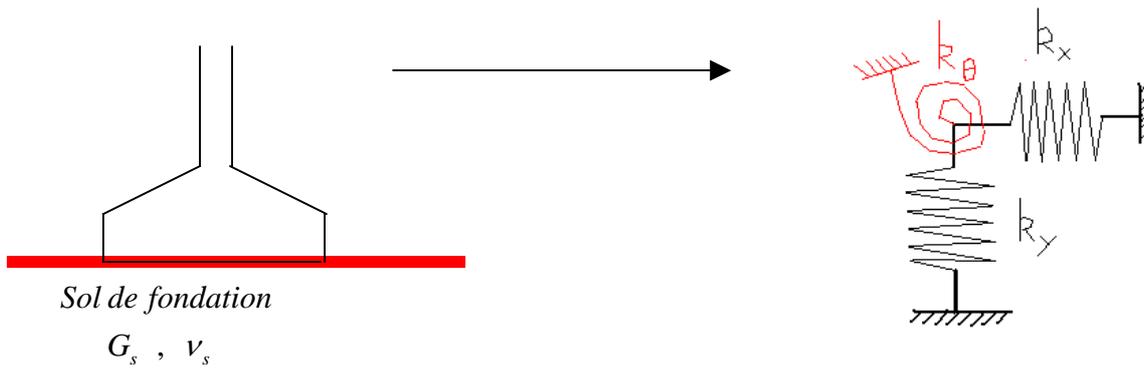
**Figure 3.21 Déplacement horizontal du nœud ( 7 )**

### 3-6 Interaction portique-fondation-sol : 'push over analysis'

Après cette validation du modèle numérique, on abordera maintenant le problème d'interaction sol structures pour le cas particulier des portiques sur semelles filantes ou isolées en béton armé. Cette approche vise à étudier l'effet de l'interaction sol-structure sur la charge de ruine, l'ordre d'apparition des rotules ainsi que le mécanisme de ruine final.

Dans le cas des portiques sur semelles filantes l'élément formulé sera utilisé pour la structure et la fondation, sans et avec appuis élastiques respectivement.

Dans le cas des semelles isolées, elles sont considérées comme un bloc rigide ayant 6 degrés de liberté en général ( 3 déplacements et 3 rotations). Dans le cadre des portiques plans sous sollicitations statiques, on utilisera les impédances statiques et le nombre de degrés de liberté se réduit à 3 ( 2 déplacements et 1 rotation) pour lesquelles les impédances correspondantes sont :



**Figure 3.22 modèle d'une semelle isolée par impédances statiques**

Rigidité horizontale statique  $k_x = \frac{8G_s r}{2-\nu_s}$

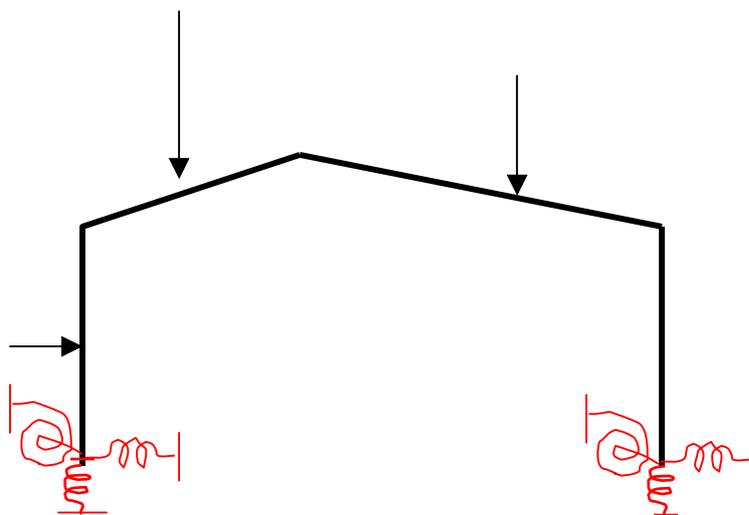
Rigidité verticale statique  $k_y = \frac{4G_s r}{1-\nu_s}$

Rigidité de balancement en rotation  $k_\theta = \frac{8G_s r^3}{3(1-\nu_s)}$

Avec  $G_s$  et  $\nu_s$  le module de cisaillement et le coefficient de poisson du sol respectivement. Ces expressions ont été formulées pour des fondations circulaires de rayon  $r$ . Dans le cas des fondations rectangulaires ( $A \times B$ ) vérifiant la condition  $A/B < 3$ , on calcule un rayon équivalent pour chaque degré de liberté.

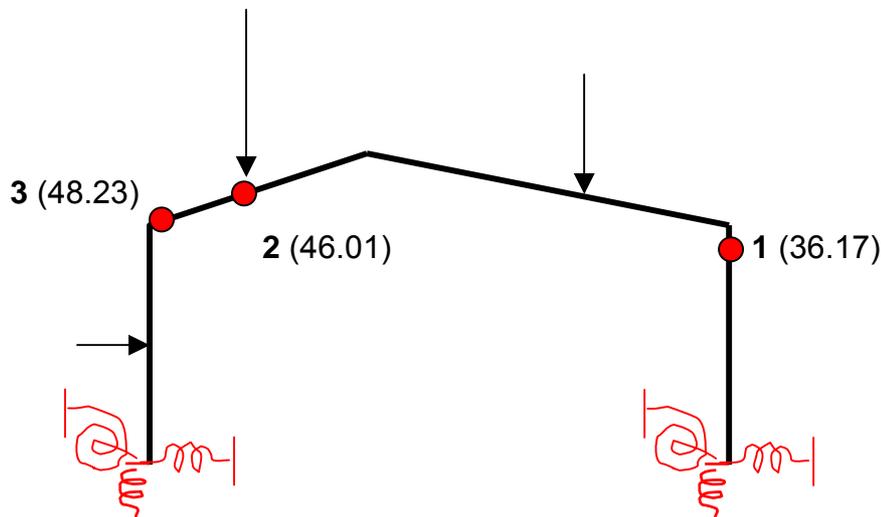
Le modèle étudié par Ghali et al. sera réétudié avec semelles isolées et le modèle étudié par Lescouarc'h avec semelles filantes .

Portique de Ghali et al. avec semelles isolées :



**Figure 3.23 Portique de Ghali et al. réétudié avec semelles isolées**

Pour une fondation carrée  $A=1.5\text{m}$  et  $B=1.5\text{m}$  sur un sol ayant un module de cisaillement  $G =$  et un coefficient de poisson  $\nu = 0.4$ , alors le mécanisme de ruine obtenu ainsi que l'ordre d'apparition des rotules est résumé ci dessous.



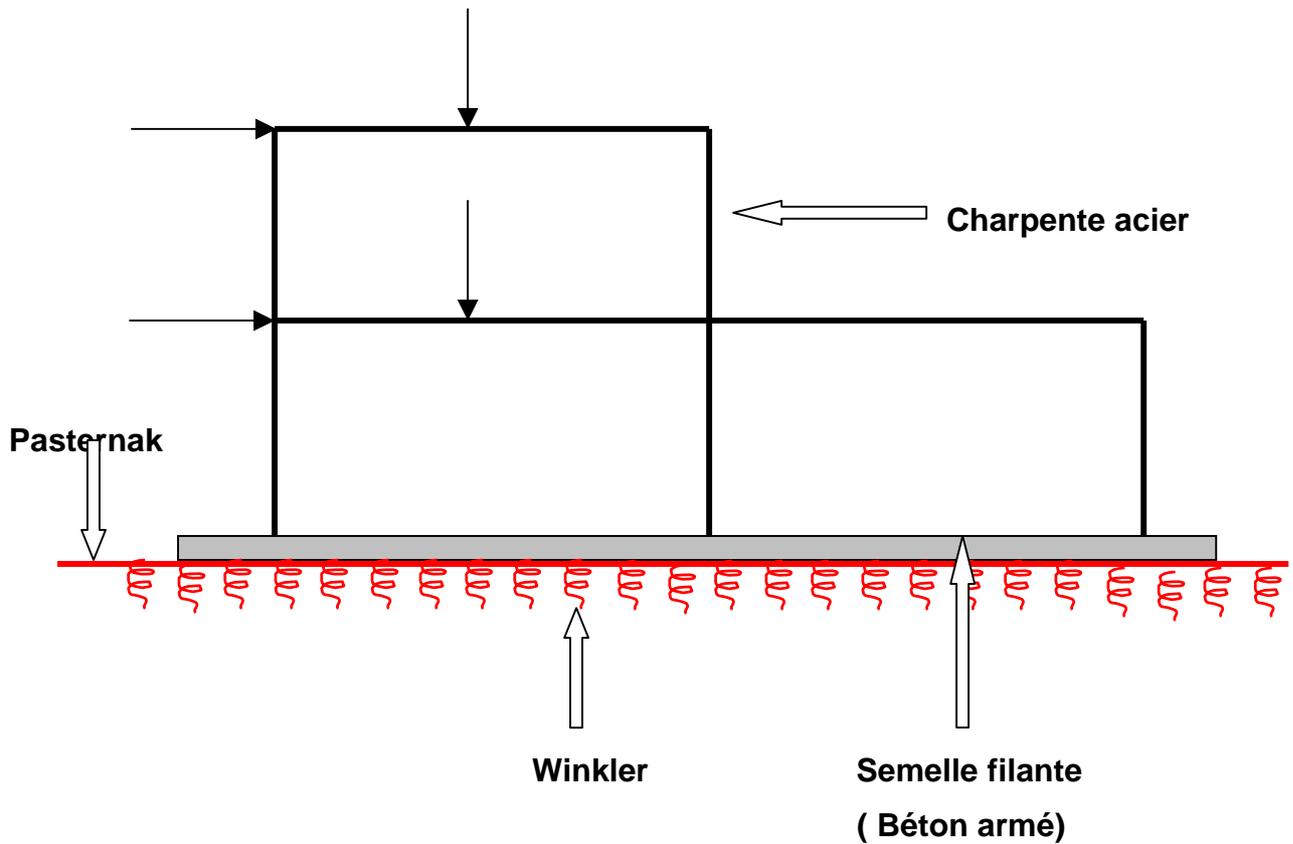
**Figure 3.24 Ordre d'apparition des rotules et mécanisme de ruine du portique de Ghali et al. avec semelles isolées**

On remarque que le facteur multiplicateur total vaut 48.2 qui est moins que celui obtenu en supposant un encastrement a la base évalué a .

#### Portique de Lescouarc'h avec semelle filante :

Le problème étudié par Lescouarc'h qui a considéré un encastrement a la base et avec lequel une comparaison a été menée ci dessus, est réétudié avec une semelle filante sous poteaux.

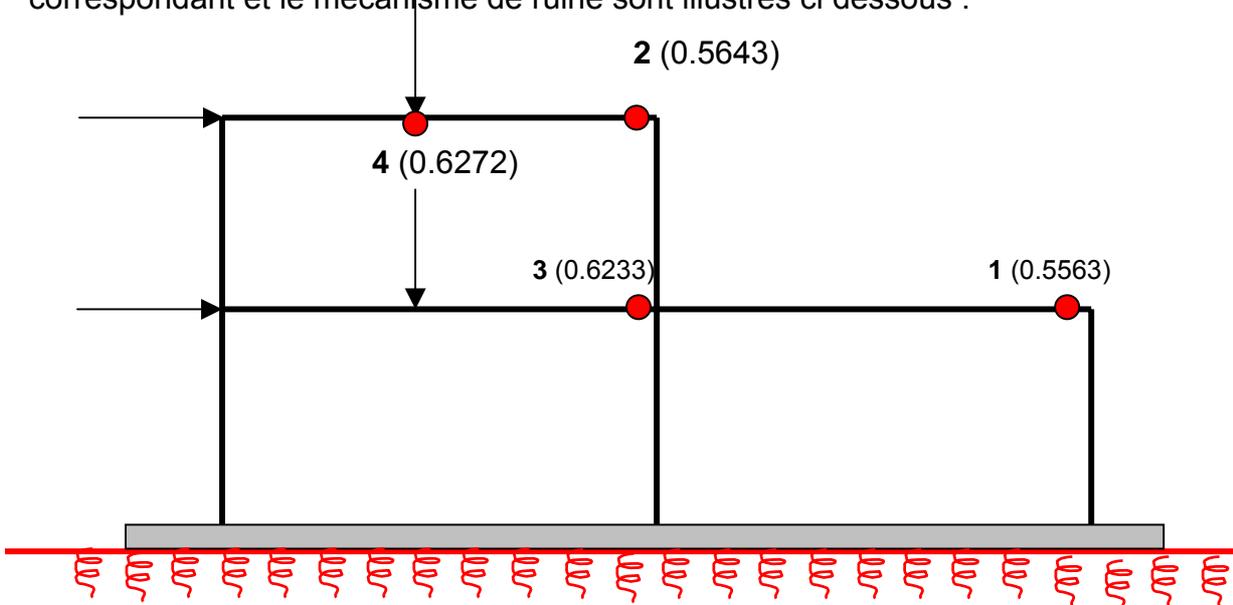
Les caractéristiques mécaniques et géométriques du portique en charpente métallique sont les mêmes que ceux considérés par Lescouarc'h. Pour la semelle filante en béton armé ainsi que les deux paramètres du sol, ils ont été choisis arbitrairement



**Figure 3.25 Portique de Lescouarc'h réétudié avec semelle filante**

Le modèle a nécessité 16 éléments et 14 nœuds.

L'ordre d'apparition des rotules plastiques ainsi que le facteur multiplicateur correspondant et le mécanisme de ruine sont illustrés ci-dessous :



**Figure 3.26 Ordre d'apparition des rotules plastiques et mécanisme de ruine du portique de Lescouarc'h réétudié avec semelle filante**

## Conclusions :

L'analyse du premier ordre elasto-plastique est une simple extension de l'analyse élastique incorporant l'apparition des rotules plastiques. Le critère d'apparition de rotule se base sur des relations moment courbure est formulé par intégration sur la section et en utilisant la loi de comportement du matériau constituant la poutre. L'effet combiné du moment de flexion ainsi que les efforts tranchant et axial n'est pas pris en considération.

Le concept de rotule plastique pour une poutre sur appuis élastiques a été formulé et présenté, suivi d'une extension pour l'analyse élastoplastique des portiques sur appuis rigides, semelles isolées ou semelles filantes. Le modèle numérique reproduit exactement les résultats d'autres publications, simulant l'analyse en 'push over' des portiques avec sol interaction jusqu'à la ruine du système qui devient mécanisme.

Pour raffiner le modèle numérique, il faudra, entre autres :

Une meilleure modélisation de la rotule plastique qui est ponctuelle 'concentrated plasticity approach' de dimension nulle, en utilisant 'the spread of plasticity approach' ou la zone complètement et partiellement plastique a une longueur finie évolutive. Son apparition et évolution doivent être graduels.

Formuler les relations moments-courbure numériquement pour les sections en béton armé de forme géométrique complexe en utilisant 'the fiber model'. L'approche analytique devient irréalisable dans le cas général.

Formuler un critère d'apparition de rotule plastique qui tient compte de l'interaction (moment - effort normal - effort tranchant).

## CHAPITRE 4

### ANALYSE DU 2<sup>ND</sup> ORDRE ELASTIQUE / ELASTOPLASTIQUE

#### 4-1 Introduction :

L'effet de l'effort axial sur le comportement flexionnel est un aspect très important, car si l'effort normal est suffisamment important, la configuration initialement droite ou avec imperfection de l'élément devient instable induisant le flambement. La perte de stabilité dans une structure peut être catastrophique. Par conséquent, la caractérisation de la charge dite critique est souhaitable, ainsi que le comportement du système au voisinage de cette charge critique. En effet, pour des charges axiales fortes, il y a amplification du moment de flexion par interaction avec l'effort axial de compression. En d'autres termes, l'estimation des efforts et déplacements doit tenir compte de la configuration déformée pour l'écriture des équations d'équilibre. L'analyse classique et standard du premier ordre n'est pas suffisante pour approcher les problèmes de stabilité. Dans ce qui suit, la matrice de rigidité en une seule formulation pour l'élément poutre généralisée formulée au chapitre (2). L'élément poutre généralisé, est un élément avec ou sans appuis élastiques, avec ou sans force axiale de compression déstabilisante, avec deux nœuds aux extrémités qui peuvent être sur appuis rigides ou souples.

#### 4-2 Matrice de rigidité élémentaire :

Le développement en séries par rapport aux paramètres  $a$  et  $b$  qui sont fonction de la charge axiale  $P$  et le module de Winkler  $k$  ainsi que le deuxième paramètre  $k_2$  et la rigidité flexionnelle  $EI$ , de la matrice de rigidité formulée au chapitre (1) est :

$$\begin{aligned}
[K_e] = & \left( \begin{array}{cccc} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & \frac{4EI}{L} \end{array} \right) + EI(a^2+b^2) \left( \begin{array}{cccc} \frac{-6}{5L} & \frac{-11}{10} & \frac{6}{5L} & \frac{-11}{10} \\ & \frac{-2L}{15} & \frac{11}{10} & \frac{L}{30} \\ & & \frac{-6}{5L} & \frac{11}{10} \\ & & & \frac{-2L}{15} \end{array} \right) \\
& + EILa^2b^2 \left( \begin{array}{cccc} \frac{129}{350} & \frac{107L}{2100} & -\frac{129}{350} & \frac{107L}{2100} \\ & \frac{19L^2}{3150} & -\frac{107L}{2100} & -\frac{8L^2}{1575} \\ & & \frac{129}{350} & -\frac{107L}{2100} \\ & & & \frac{19L^2}{3150} \end{array} \right) + EIL(a^4+b^4) \left( \begin{array}{cccc} \frac{-1}{700} & \frac{-L}{1400} & \frac{1}{700} & \frac{-L}{1400} \\ & \frac{11L^2}{6300} & \frac{L}{1400} & \frac{13L^2}{12600} \\ & & \frac{-1}{700} & \frac{L}{1400} \\ & & & \frac{11L^2}{6300} \end{array} \right) \\
& + EIL^3(a^6+b^6) \left( \begin{array}{cccc} \frac{-1}{63000} & \frac{-L}{126000} & \frac{1}{63000} & \frac{-L}{126000} \\ & \frac{L^2}{27000} & \frac{L}{126000} & \frac{11L^2}{378000} \\ & & \frac{-1}{63000} & \frac{L}{126000} \\ & & & \frac{L^2}{27000} \end{array} \right) + EIL^3a^2b^2(a^2+b^2) \left( \begin{array}{cccc} \frac{17}{63000} & \frac{97L}{126000} & \frac{-17}{63000} & \frac{97L}{126000} \\ & \frac{13L^2}{63000} & \frac{-97L}{126000} & \frac{-L^2}{5250} \\ & & \frac{17}{63000} & \frac{-97L}{126000} \\ & & & \frac{13L^2}{63000} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

(4.1)

Dans ces expressions, il est simple d'observer le cas limite quand P tend vers 0. On notera en particulier aussi que ces expressions se réduisent à la forme standard de l'élément poutre en l'absence d'effort axial P.

La formulation ci dessus permet d'étudier les systèmes de poutres avec ou sans appuis élastiques tout en prenant en compte du phénomène d'instabilité par flambement.

D'autre part, l'étude de la stabilité au flambement des poutres sur appuis élastiques à un ou deux paramètres peut être abordée de plusieurs façons. En effet on peut s'intéresser à la détermination des charges critiques seulement. On peut aussi déterminer la déformée de la poutre sous l'effet d'un chargement transversal et d'une force axiale de compression jusqu'à la charge critique tout en notant l'amplification résultante sur les déplacements et moments. Notons aussi que, le flambement des poutres sur appuis rigides est un cas particulier, car l'élément convergeant peut être utilisé sans appuis élastiques. Dans ce qui suit des procédures numériques ainsi que leur implémentation et applications diverses comparées à d'autres chercheurs pour résoudre ce problème sont exposés.

#### 4-3 Détermination des charges critiques :

On détermine la matrice de rigidité globale du système par simple assemblage des matrices de rigidité élémentaires, qui dépend de la force axiale P de manière explicite. Plusieurs techniques peuvent être utilisées pour la détermination des charges critiques .

- méthodes analytiques classiques
- problème de valeurs et vecteurs propres
- en travaillant sur le déterminant de la matrice de rigidité globale.

Les méthodes analytiques classiques telles que celles de Timoshenko, ne peuvent traiter facilement des cas complexes de géométrie et de conditions aux limites.

Dans la deuxième approche, on ramène le problème de détermination des charges critiques à un problème de valeurs et vecteurs propres car la matrice de rigidité globale du système obtenue par un champs d'interpolation polynomial cubique ou plus, peut être écrite sous la forme :

$$([K_{se}] - P [K_g^*]) \{ \phi \} = \{ 0 \} \quad (4.2)$$

dans laquelle  $[K_{se}]$  est la matrice de rigidité globale élastique et  $P [K_g^*]$  est la matrice globale géométrique. Notons que le comportement du matériau est supposé élastique. Dans le système ci dessus, les deux inconnues sont  $P$  et  $\{\phi\}$ . On cherche une solution, autre que la solution triviale  $P = 0$  et  $\{\phi\} = \{0\}$ , ce qui ramène le problème à un problème classique de valeurs propres (charges critiques  $P_i$ ) et vecteurs propres vecteurs correspondants (modes propres).

Dans la troisième approche qu'on a utilisé, et ce en vue de la nature de la matrice de rigidité élémentaire formulée dans le cadre de cette étude, le problème ne peut être ramené au cas classique donnée par l'équation (2). On cherche la charge critique (une seule) en incrémentant  $P$  tout en calculant le déterminant de la matrice de rigidité globale. La charge critique est celle qui annule le déterminant.

En effet, les méthodes analytiques conduisent à un nombre infini de charges critiques, et à un nombre fini dans le cas de la deuxième méthode, car le nombre de degrés de liberté est un nombre fini après discrétisation. On remarque que les charges critiques  $P_i$  avec  $i > 1$ , n'ont aucun sens physique sauf dans le cas des poutres comprimées entretoisées.. De plus les entretoises doivent être situées aux points d'inflexion dans les modes supérieurs à un (01).

Donc, la charge critique s'obtient quand le déterminant est nul ce qui signifie physiquement que le système n'est plus stable car sa matrice de rigidité est singulière.

Le flambement des poutres sur appuis élastiques a été étudié par hetenyi<sup>(38)</sup> (1946) ainsi que Timoshenko et Gere<sup>(1961)</sup> (1961) et Chen et atsuta . Dans toutes ces études analytiques, la poutre a été modélisée selon la théorie d'Euler qui néglige les déformations de cisaillement et le modèle de sol adopté est celui de Winkler (un seul paramètre). Cheng et Pantelides<sup>(41)</sup> (1988) ont formulé la solution analytique exacte pour la charge axiale critique en tenant compte des déformations de cisaillement dans la poutre mais avec un modèle de sol à un seul paramètre.

Karamanlidis et Prakash<sup>(42)</sup> (1989) ont résolu analytiquement, le problème de stabilité des poutres sur un demi-espace élastique mais ils ont négligé les déformations de cisaillement dans la poutre.

Pantelides<sup>(37)</sup> (1992) a utilisé une méthode énergétique employant une solution sous forme de séries pour évaluer la charge critique avec un sol à deux paramètres et en tenant compte des déformations de cisaillement. Dans son étude, l'influence des

deux paramètres du sol supportant la poutre sur la charge critique de flambement a été évaluée pour différentes conditions aux limites aux extrémités d'une poutre finie.

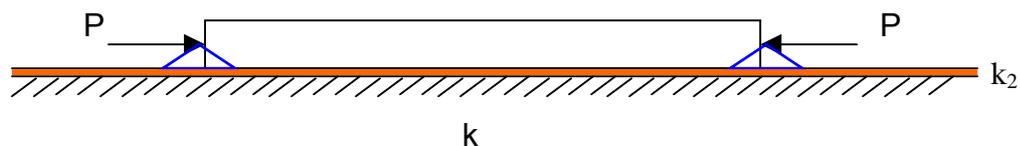
Dans ce qui suit la matrice de rigidité exacte de la poutre –colonne selon la théorie d'Euler (qui néglige les déformations de cisaillement dans la poutre) et sur appuis élastiques formulée au chapitre (1) sera utilisée pour la détermination de la charge critique. Il sera démontré qu'elle pourra être utilisée avec ou sans appuis élastiques et dans les cas simples, un seul et unique élément est suffisant pour déterminer de manière exacte la charge critique de flambement.

Ci dessous une étude comparative est menée avec la formulation analytique exacte de , Pantelides<sup>(37)</sup>

#### Cas a ; Appui simple-appui simple

Pour le cas d'une poutre sur appuis élastiques a deux paramètres simplement appuyée aux deux extrémités les conditions aux limites sont :

$$Y(0)=0 \quad Y(L)=0 \quad Y''(0)=0 \quad Y''(L)=0$$



**Figure 4.1 : Poutre (appuis simple-simple) sur appuis élastiques à 2 paramètres**

En introduisant ces quatre conditions , Pantelides<sup>(37)</sup> obtient quatre équations à quatre inconnues avec second membre nul, de la forme :

$$[A] \begin{pmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution triviale est  $C_i=0$  pour  $i=1,2,3,4$ .

Pour obtenir la charge critique le déterminant de  $[A]$  doit être nul ce qui donne :

$$P_{cr} = P_e [ m^2 + K L^2 / m^2 \pi^2 P_e + K_1/P_e ]$$

Ou  $m$  est un nombre entier correspondant au mode de flambement 1,2, 3....

Et  $P_e$  est la charge critique d'Euler pour une poutre sans appuis élastiques bi-

articulée  $P_e = \pi^2 E I / L^2$

On remarque qu'une augmentation de  $\Delta K$  de la constante de Winkler en maintenant toutes les variables constantes, induit une augmentation de  $(\Delta K L^2) / (m^2 \pi^2)$  pour la charge critique. Donc pour les modes supérieurs (cas des poutres ou barres comprimées avec entretoises) il y a une grande influence. En contraste une augmentation de  $\Delta K_1$  du paramètre de Pasternak fait augmenter la charge critique de  $\Delta K_1$  qui est identique pour tous les modes.

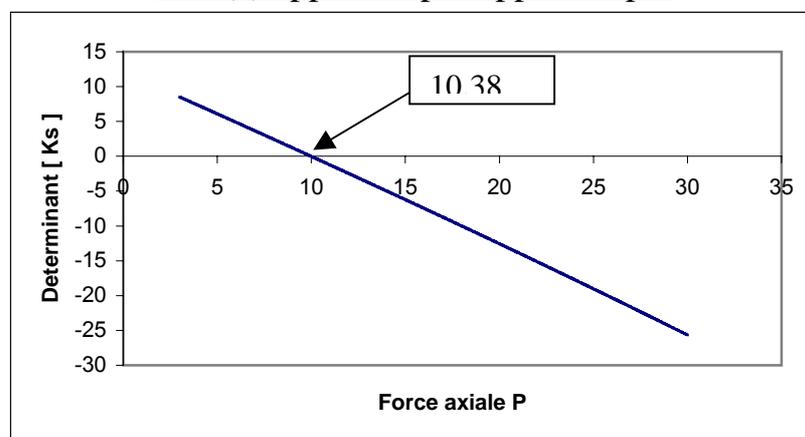
En procédant de la même manière, pantelides<sup>(37)</sup> a retrouvé la charge critique pour d'autres situations avec différentes conditions aux limites.

On remarque que cette approche analytique, devient complexe dans le cas de structures à plusieurs éléments et différentes conditions aux limites. L'approche adoptée dans le cadre de ce travail, est l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires avec effets du second ordre formulée au chapitre (2), pour obtenir la matrice de rigidité globale du système. La charge critique s'obtient de manière simple, quelles que soient la complexité du système et les conditions aux limites.

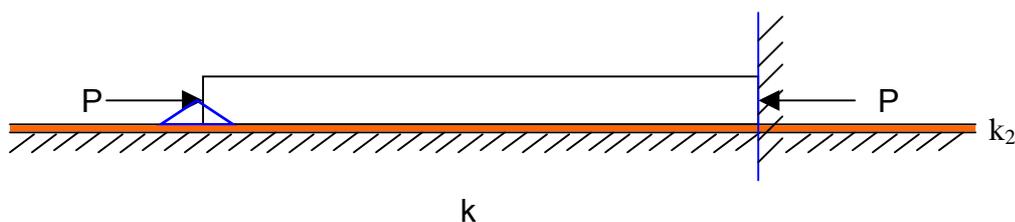
#### APPLICATIONS :

Ci dessous sont résumées les conditions aux limites ainsi que les charges critiques exactes correspondantes

#### Cas (a) appui simple-appui simple

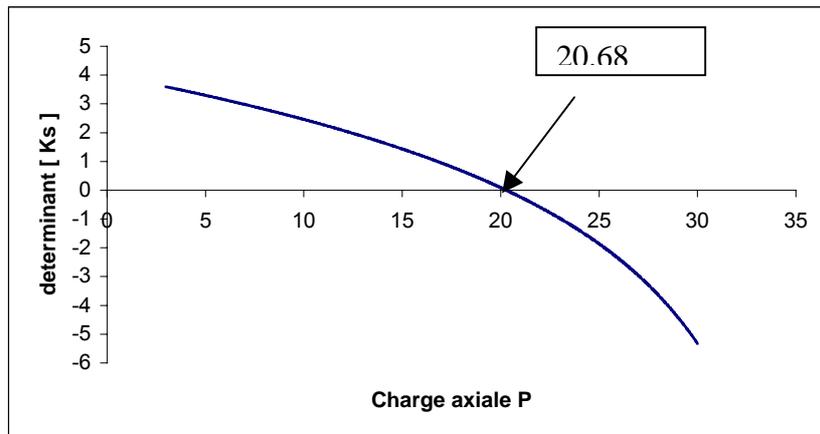


#### Cas (b): appui simple - encasté

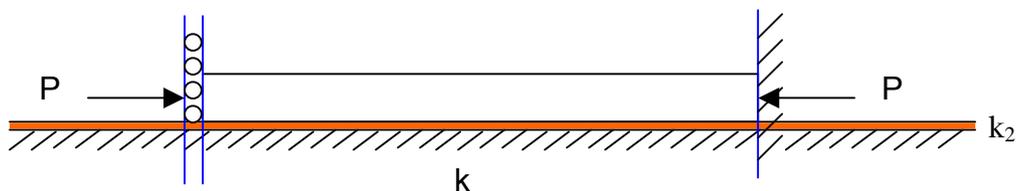


**Figure 4.2 : Poutre (app :simple-encasté) sur appuis élastiques à 2 paramètres**

$Y(0)=0$   $Y(L)=0$   $Y''(0)=0$   $Y'(L)=0$  et la charge critique obtenue par Pantelides est  $P_{cr} = 20.19 P_e + 0.0826 K L^2 + K_2$ , comparée à celle obtenue par le programme :

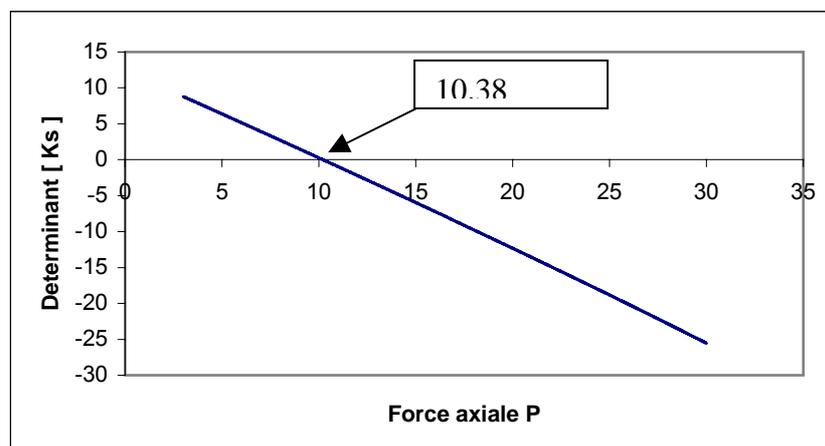


Cas ( d ): guidée - encastrée



**Figure 4.3 : Poutre (Guidée-encastrée) sur appuis élastiques à 2 paramètres**

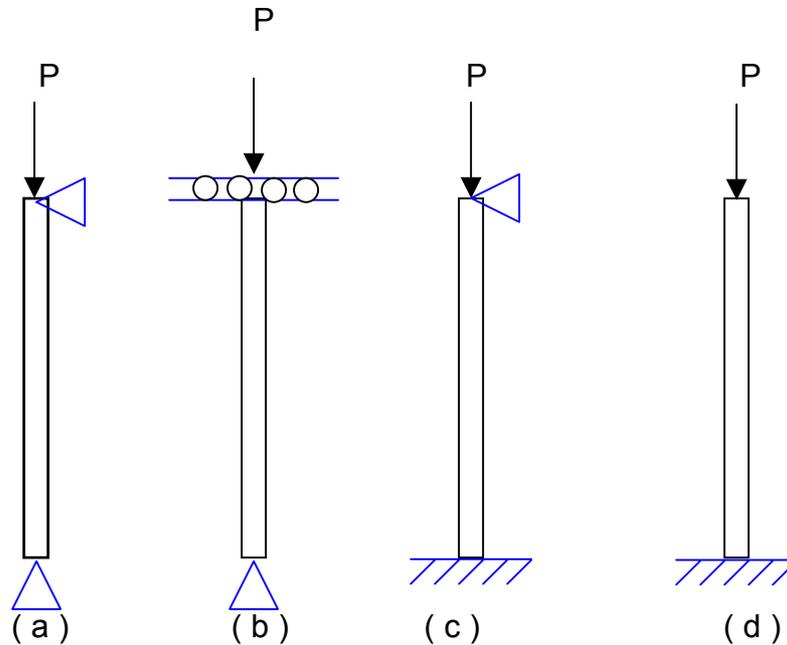
$Y'(0)=0$   $Y(L)=0$   $Y(0)=0$   $Y'(L)=0$  et  $P_{cr} = P_e + 3 K L^2 / \pi^2 + K_2$  obtenu par Pantelides et celle obtenue par le programme :



Il est évident que les solutions analytiques proposées par Timoshenko<sup>(39)</sup> ou Pantelides<sup>(37)</sup> (1992) ne peuvent pas être utilisées de manière simple, dans le cas général avec appuis intermédiaires, ou le cas d'une poutre à section variable par tronçons, ou le cas d'un sol non uniforme au dessous de la poutre.

### Cas des poutres uniformes avec appuis rigides et sans appuis élastiques :

C'est un cas particulier, dans lequel il n'y a pas d'appuis élastiques mais des appuis rigides. Les quatre situations indiquées ci dessous seront utilisées pour le calcul de la charge critique



**Figure 4.4 : Poutre sur appuis rigides**

Un seul élément a été utilisé pour la modélisation. les résultats obtenus sont confrontés a la solution analytique dite exacte ainsi que ceux obtenus en utilisant l'élément fini développé par Yokoyama<sup>(4)</sup> (1996)

	Solution exacte $P_{cr} / (EI/L^2)$	cette étude (1)	Yokoyama <sup>(4)</sup> (1) (2)	
Nombre d'éléments				
(a)	9.87	9.86	12	9.944
(b)	2.47	2.46	-	-
(c)	20.2	20.19	-	-
(d)	2.47	2.46	-	-

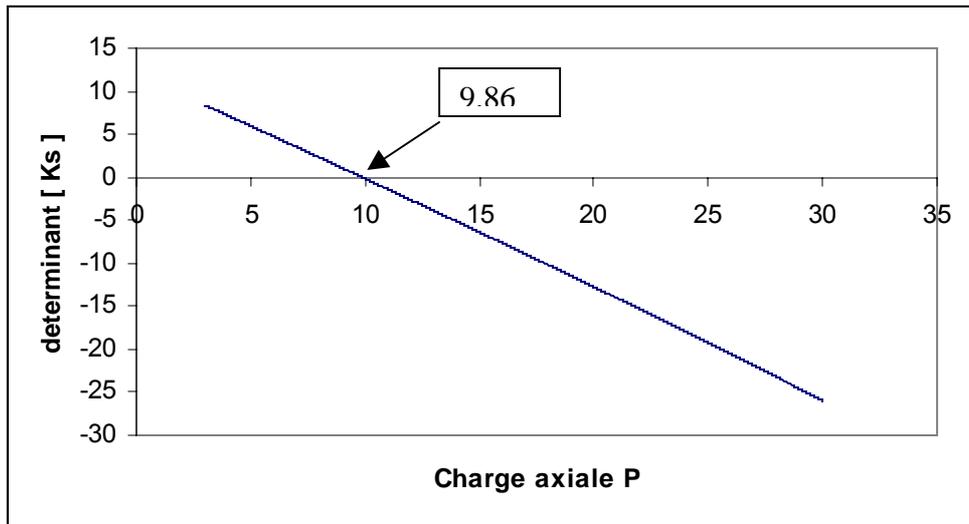


Figure 4.5 Charge critique pour le cas de la figure 4.4.a ( $9.86 \text{ EI/L}^2$ )

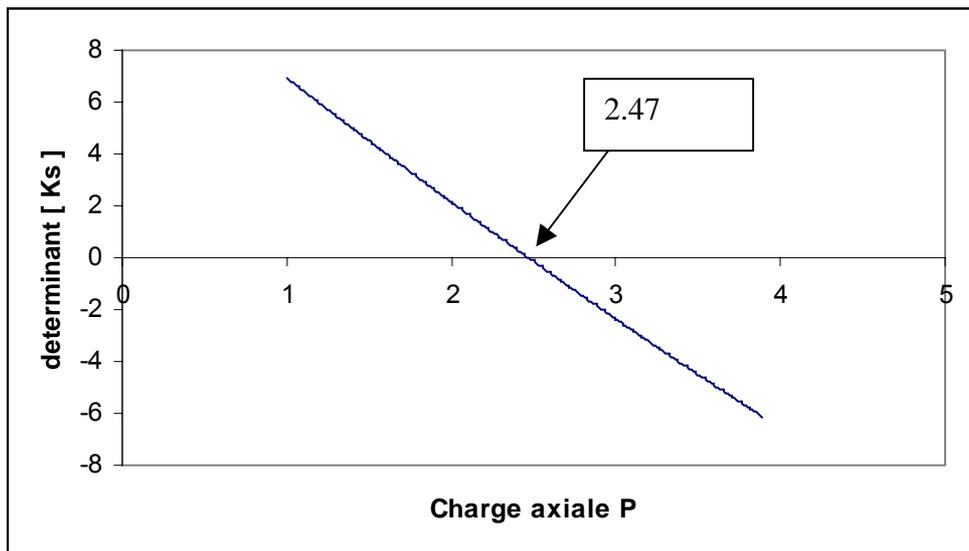


Figure 4.6 Charge critique pour le cas de la figure 4.4.b

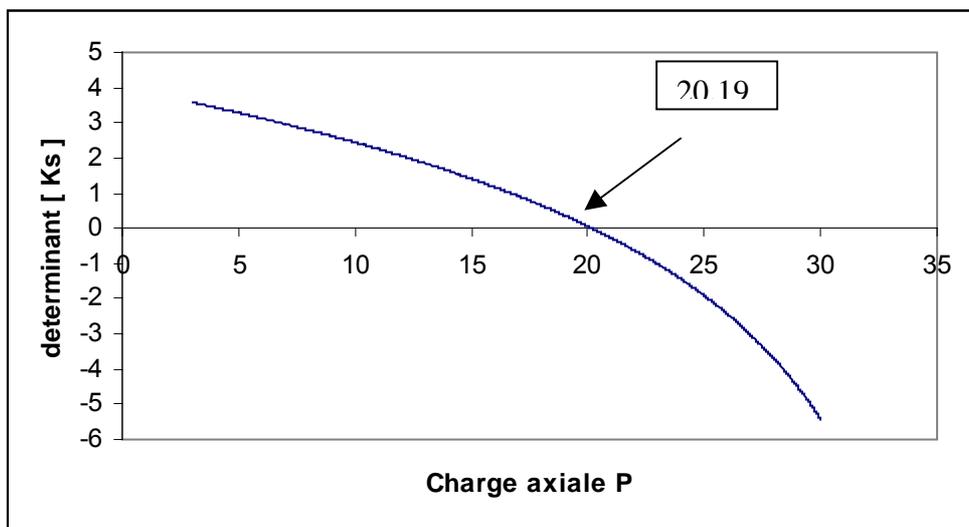


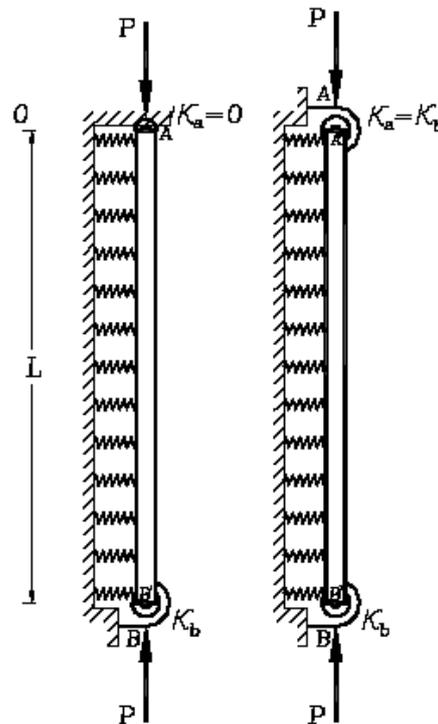
Figure 4.7 Charge critique pour le cas de la figure 4.4.c

Poutres sur appuis élastiques à nœuds souples :

Aristizabal<sup>(40)</sup> (2003) a étudié la stabilité des poutres colonnes sur fondations élastiques avec nœuds semi rigides. Il a formulé le problème analytiquement et il l'a résolu en le ramenant à un problème de valeurs propres avec différentes conditions aux limites.

Les résultats ont été présentés sous forme de tableaux numériques avec une semi rigidité variable entre les deux cas extrêmes qui sont le cas articulé et encastré. Dans ce qui suit les résultats obtenus par la présente formulation sont comparés à ceux obtenus par Aristizabal<sup>(40)</sup> (2003) et ce, en utilisant un seul élément pour l'estimation de la charge critique. Les résultats présentés par Aristizabal sont de la forme :

$$P_{cr}/(\pi^2 EI/L^2)$$



( a ) ( b )

**Figure 4.8 Poutre à nœuds souples (Aristizabal)<sup>(40)</sup>**

Cas ( a ) :

		$K_a = 0.0$ et $K_s L^4/EI=0.0$				
	$K_b = 0.0$	$K_b = 0.75 EI/L$	$K_b = 3EI/L$	$K_b = 12EI/L$	$K_b = \infty$	
Aristizabal	1.0000	1.13608	1.40694	1.77129	2.04575	
Cette étude	0.999	1.136	1.406	1.771	2.025	
		$K_a = 0.0$ et $K_s L^4/EI=400.0$				
	$K_b = 0.0$	$K_b = 0.75 EI/L$	$K_b = 3EI/L$	$K_b = 12EI/L$	$K_b = \infty$	
Aristizabal	1.0000	5.02660	5.06093	5.06572	5.06605	
Cette étude	0.999	5.060	5.064	5.064	5.065	

Cas ( b ) :

		$K_a = K_b$ et $K_s L^4/EI = 0.0$				
	$K_b = 0.0$	$K_b = 0.75 EI/L$	$K_b = 3EI/L$	$K_b = 12EI/L$	$K_b = \infty$	
Aristizabal	1.0000	1.28208	1.91659	2.99066	4.00000	
Cette étude	0.999	1.282	1.916	2.990	3.920	
		$K_a = K_b$ et $K_s L^4/EI = 400.0$				
	$K_b = 0.0$	$K_b = 0.75 EI/L$	$K_b = 3EI/L$	$K_b = 12EI/L$	$K_b = \infty$	
Aristizabal	5.02660	5.31335	5.91043	6.95059	6.55234	
Cette étude	5.027	5.314	5.910	6.551	6.897	

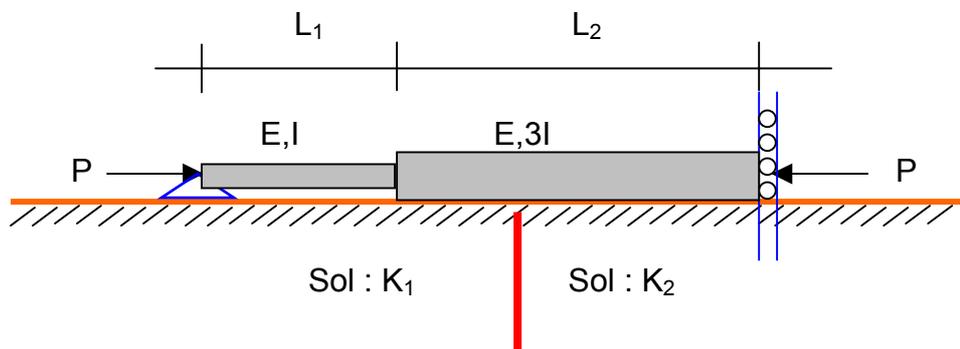
On remarque que les résultats sont d'une précision très acceptable sauf le cas ou  $K_b = \infty$  pour lequel il y a une différence de 1 a 2 %.

Cas des poutres non prismatiques avec appuis élastiques non homogènes :

A notre connaissance, le problème de flambement des poutres non uniformes sur sol élastique non homogène reste ouvert.

Une approche analytique pour aborder ce problème sera certainement complexe, par contre une discrétisation du problème par plusieurs éléments du type formulé dans le cadre de ce travail s'avère très simple. Après la validation de l'élément dans les cas simples étudiés ci dessus, on abordera numériquement le cas non uniforme. La non uniformité concerne la poutre qui n'est pas prismatique, et le cas du module de Winkler non uniforme également.

Pour le modèle indiqué ci dessous, un minimum de trois éléments est nécessaire pour tenir compte de la variation de la section ainsi que le module de Winkler.



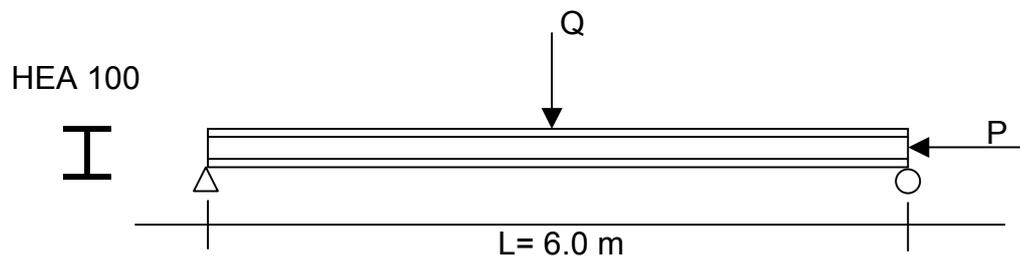
#### 4-4 Analyse du second ordre élastoplastique :

Finalemment, pour illustrer l'inexactitude de l'approche élastique pour la détermination de la charge critique (second ordre élastique) on mènera l'étude en instabilité élastoplastique. Ceci peut être obtenu en combinant les deux modèles numériques :

- Analyse du premier ordre élasto-plastique ( Chapitre 3 )
- Analyse du second ordre élastique ( présent chapitre 4)

pour cela on étudiera une simple poutre isostatique comprimée soumise a une charge concentrée a mi travée comme indiqué sur la figure :

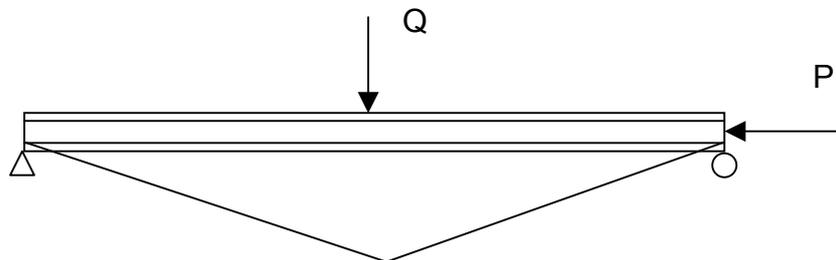
Cas (a) appuis rigides :



**Figure 4.9 Poutre isostatique fléchie et comprimée**

a-1 Analyse du premier ordre élastique : Linéarité géométrique et linéarité matérielle.

L'effet axial et l'effet flexionnel sont découplés donnant :

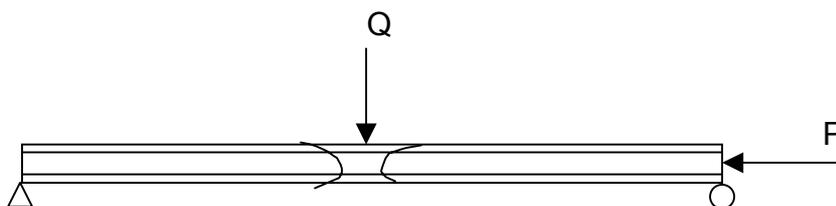


Moment et effort normal :  $M = Q L / 4$      $N=P$

Et le déplacement à mi-travée  $d_1 = \frac{QL^3}{48EI}$

a-2 Analyse du premier ordre élastoplastique : Linéarité géométrique et non linéarité matérielle.

Pour  $P = 0.6 P_{cr}$  et compte tenu de la loi de comportement de l'acier, la charge Q limite qui induira une rotule plastique à mi-travée rendant le système un mécanisme est :  $Q_p = 4 M_{cp} / L$



Il semble que dans la perspective de cette analyse et pour éviter le mécanisme il faut que  $Q < Q_p$ . Le problème de stabilité est ignoré, quoique satisfait  $P=0.6P_{cr} < P_{cr}$

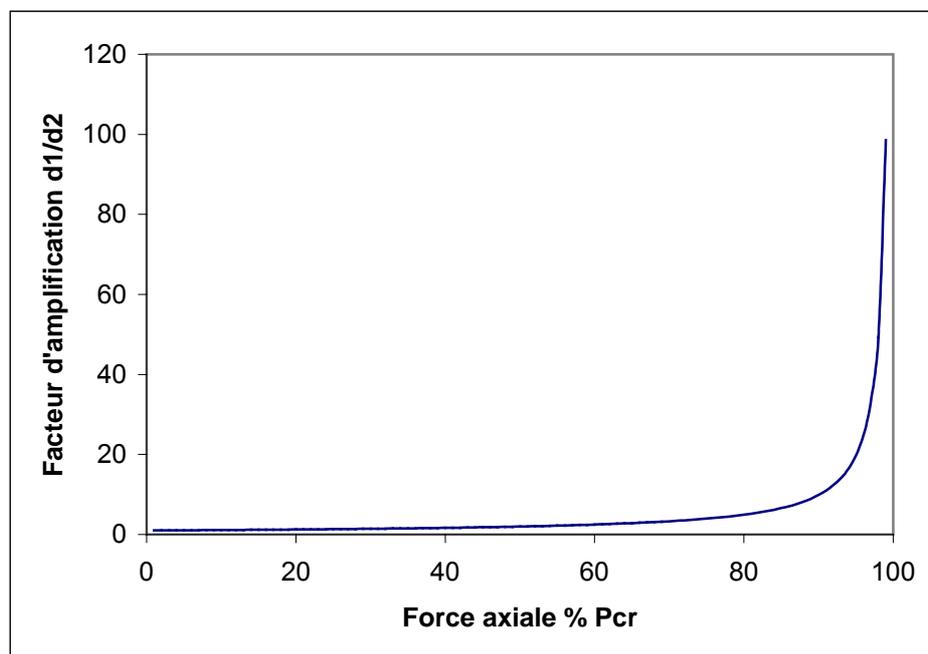
a-3 Analyse du second ordre élastique : Non linéarité géométrique et linéarité matérielle.

Le matériau obéit à la loi de Hooke, on tient compte de l'effet axial sur la flexion, en utilisant la matrice de rigidité élémentaire qui tient compte des effets du second ordre. Une telle analyse ignore la possibilité d'apparition de rotules plastiques.

On considère le cas  $Q < Q_p$ , et on calcule les déplacements amplifiés à mi-travée dus à la présence de la force axiale de compression  $P$  qui varie de  $0.01$  à  $0.99 P_{cr}$  avec un pas de  $0.01 P_{cr}$ . La solution obtenue numériquement est comparée à celle donnée par Timoshenko<sup>(39)</sup> (1961),

$$d_2 = \frac{QL^3}{48EI} \frac{3(\operatorname{tg}(u) - u)}{u^3} \quad \text{et} \quad u = \sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2}$$

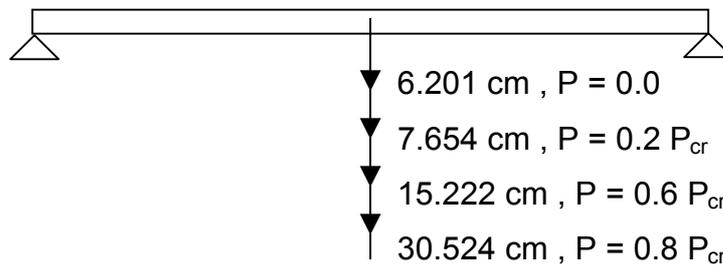
Les résultats numériques obtenus sont très proches à ceux donnés par Timoshenko, avec un maillage de deux éléments et 3 nœuds tenant compte de la symétrie.



**Figure 4.10 Amplification des déplacements (second ordre)**

On observe de fortes amplifications des déplacements bien avant d'atteindre la charge critique. Au voisinage proche de  $P_{cr}$ , le déplacement est physiquement inconsistant et irréalisable (déplacement  $> 6.0$  m) car on a ignoré la loi de comportement du matériau qui a une résistance non infinie.

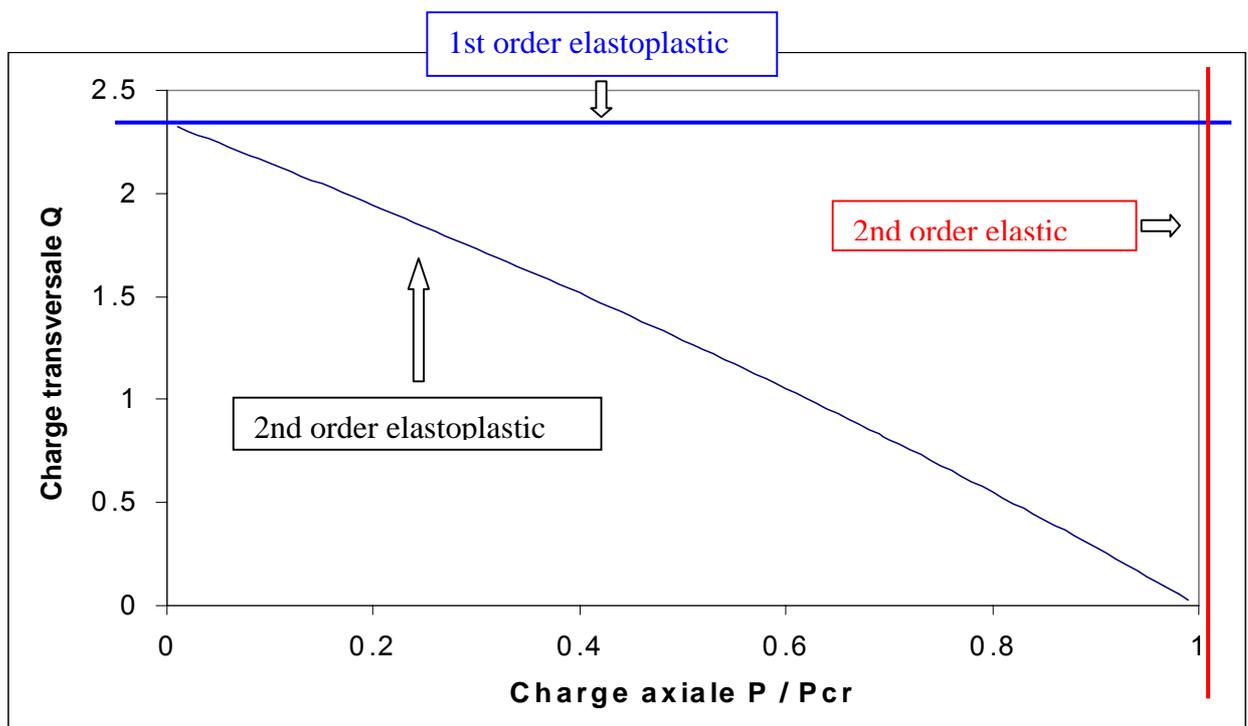
On représente ci dessous la déformée de la poutre pour trois situations possibles et acceptables ( $P=0.0, 0.2, 0.6$  et  $0.8 P_{cr}$ ) respectivement



a-4 Analyse du second ordre élastoplastique : Non linéarités géométrique et non linéarité matérielle.

Dans ce contexte on tient compte des deux nonlinéarités matérielles et géométriques.

La poutre est réexaminée pour différents niveaux de charge axiale  $P$  de  $0.01P_{cr}$  à  $0.99 P_{cr}$ . A chaque niveau de force axiale on calcule la charge de ruine  $Q_p$  correspondante, représentée graphiquement ci dessous :



On remarque que pour une force axiale faible, la charge de ruine est proche à celle obtenue par a-2. Pour  $P < P_{cr}$  la force transversale  $Q_p$  est différente de celle calculée

par une analyse de premier ordre elastoplastique. Au voisinage de  $P_{cr}$ , une très faible force  $Q$  (pratiquement nulle) induit la ruine de la poutre.

## CONCLUSIONS :

En conclusion, en tenant compte de l'élasto-plasticité et les effets de la charge axiale de compression sur la rigidité flexionnelle la ruine s'obtient par combinaison des deux effets, bien que la structure étudiée soit élancée.

L'élément formulé peut être utilisé pour la détermination de la charge critique de la poutre avec/sans appuis élastiques avec /sans nœud souples. Un seul élément est suffisant pour les cas très simples et plusieurs éléments pour les cas un peu complexes. On propose d'étendre cette étude selon la théorie de Timoshenko qui tient compte des déformations de cisaillement et de tenir compte du comportement élasto plastique du matériau pour étudier la stabilité dans le cas des éléments qui ne pas sont très élancés ( ruine par perte de stabilité élastique) et ne sont pas très courts ( rupture par écrasement plastique en compression sans perte de stabilité).

Pour raffiner le modèle numérique, il faudra, entre autres :

- Une meilleure modélisation de la rotule plastique qui est ponctuelle 'concentrated plasticity approach' de dimension nulle, en utilisant 'the spread of plasticity approach' ou la zone complètement et partiellement plastique a une longueur finie évolutive.  
Son apparition et évolution doivent être graduels.
- La prise en considération des imperfections géométriques qui sont en réalité spatiales ( 3D) et non planes (2D). Ces imperfections sont de deux types : 'out of plumbness' durant la phase d'érection de la structure et 'out of straightness' durant la phase de fabrication du profilé métallique
- la prise en considération des contraintes résiduelles dues au processus de fabrication, de distribution stochastique le long du profilé. C'est une certaine distribution de contraintes 'initiales' non déterministe.

Il faut reconnaître que plus le modèle numérique est sophistiqué, plus les raffinements ultérieurs deviennent super complexes.

## CHAPITRE 5

### FORMULATION DE LA PERTE DE CONTACT

#### 5-1 Introduction :

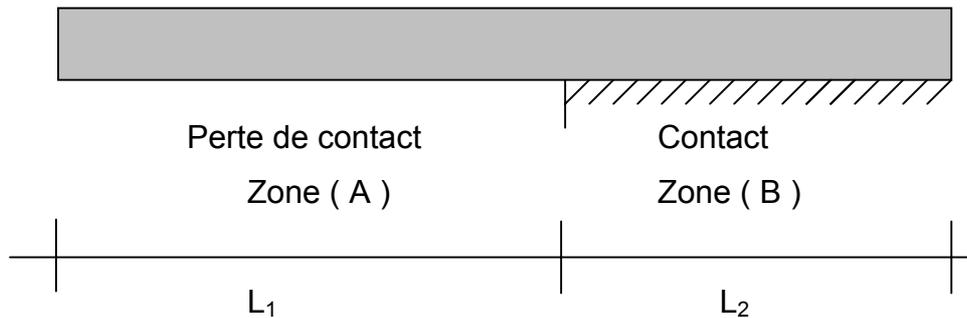
Dans toutes les approches précédentes l'interaction entre la poutre et le sol la supportant est toujours maintenue même si le déplacement de la poutre est négatif donc sans contact avec le sol. En réalité le sol n'a aucune résistance à la traction et par conséquent il ne peut pas développer une réaction dans ces situations.

La détermination de la déformée, réaction du sol ainsi que les efforts internes d'une poutre reposant sur un sol tenant compte de la perte de contact avec le sol est un problème non linéaire très important. Plusieurs méthodes ont été proposées par différents chercheurs pour résoudre ce problème. Kaschiev et al.<sup>(3)</sup> (1995) ont proposé une approche basée sur la méthode de Newton et la MEF démontrant la convergence de la procédure proposée à travers plusieurs exemples. Kerr et al.<sup>(10)</sup> (1996) ont revu la solution classique qui ne tient pas compte de la possibilité de perte de contact, montrant ses déficiences et en modélisant le sol avec un modèle bilinéaire.. Coskun<sup>(6)</sup> (2003) a étudié la réponse d'une poutre élastique soumise à une charge dynamique harmonique sur un sol de Pasternak à deux paramètres. Une solution a été obtenue en présentant les zones de contact et non-contact en solvant l'équation différentielle par des fonctions trigonométriques hyperboliques. Zhang et al.<sup>(9)</sup> (2004) ont développé un modèle analytique pour la réponse statique d'une poutre reposant sur un sol ne travaillant pas en traction.

## 5-2 Formulation du problème :

Dans le cadre de ce travail une approche très simple est utilisée dans le cas des charges statiques. La formulation mathématique du problème est abordée de manière simple en utilisant la technique classique de condensation.

On considère un élément poutre de longueur  $L$  composé de deux zones (A) et (B) de longueur  $L_1$  et  $L_2 = L - L_1$  sur les zones (A) et (B) respectivement.



**Figure 5.1 Poutre reposant partiellement sur le sol (contact/non contact)**

On suppose que le déplacement dans la zone (A) est positif et celui de la zone (B) est négatif. Par conséquent la matrice de rigidité  $[K_A]$  ne tient pas compte de la fondation élastique, par contre la matrice de rigidité  $[K_B]$  inclut cet effet qui est la contribution du premier et deuxième paramètres du sol.

La méthode est basée sur l'élimination directe des degrés de liberté du nœud en commun entre les zones (A) et (B) par simple condensation statique, Ce qui donne la matrice de rigidité d'un élément poutre reposant partiellement sur le sol et avec deux nœuds seulement aux extrémités.

Les matrice de rigidité des deux régions ont la forme :

$$[K_A] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

4 x 4

$$[K_B] = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

4 x 4

La matrice  $[K_A]$  est la matrice classique de la poutre selon la théorie d'Euler-Bernoulli et sans appuis élastiques. La matrice  $[K_B]$  est la matrice de la poutre sur appuis élastiques de type Pasternak formulée dans le cadre de ce travail.

La matrice de rigidité de l'élément composé des deux zones (A) et (B) est obtenue par simple assemblage. Elle est exprimée par :

$$[K_e] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22}+B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

6 x 6

On procède maintenant à la condensation statique du nœud intermédiaire qui séparent les zones de contact et de non contact. En condensant les deux degrés de liberté du nœud intermédiaire on obtient ainsi une matrice de rigidité élémentaire d'un élément poutre reposant partiellement sur le sol de dimension (4 x 4).

### 5-3 Résolution du problème :

L'implémentation numérique de cette procédure est toute simple. Dans la première itération l'appui élastique est supposé partout le long de la poutre discrétisée par plusieurs éléments. Une vérification (automatique dans le programme) des déplacements nodaux est ensuite abordée pour identifier les zones de soulèvement. Si ces zones existent, alors les matrices de rigidité élémentaires sont recalculées selon la procédure ci dessus. Quatre situations sont possibles pour chaque élément :

- (a) non contact à droite et contact à gauche
- (b) contact à droite et non contact à gauche
- (c) contact tout au long de l'élément
- (d) non contact tout au long de l'élément

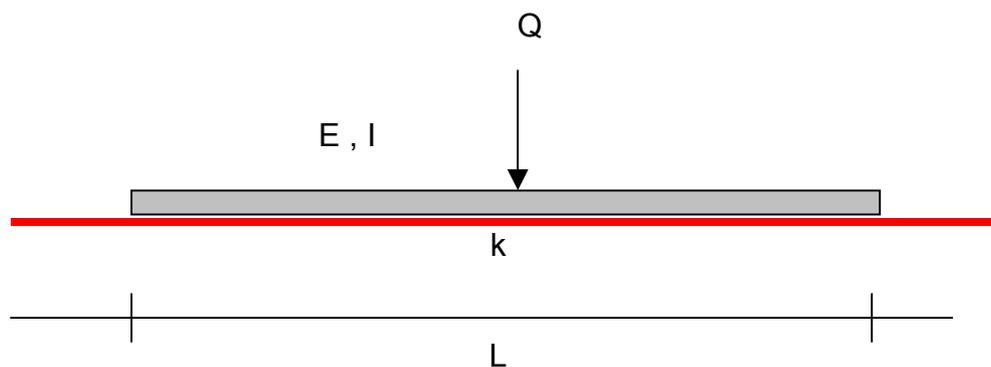
Pour les cas (a) et (b) une matrice de rigidité d'un élément reposant partiellement sur le sol est utilisée après condensation. Pour les cas (c) et (d) on utilise les matrices ( ) et ( ) respectivement. Dans ce dernier cas aucune condensation à effectuer.

La localisation du point qui sépare les zones de contact et de non contact est réalisée en utilisant les fonctions d'interpolation et en tenant compte des déplacements et des rotations. Après l'identification des zones de contact et de non-contact une itération de correction du système est effectuée avec une matrice de rigidité globale qui tient compte de ces effets. Le même processus est répété en plusieurs itérations jusqu'à convergence des résultats assurant l'équilibre du système.

Dans l'implémentation ci dessus, il a été supposé qu'il ne peut y avoir que deux zones différentes le long d'un élément (contact et non-contact). Pour cela un maillage raffiné doit être utilisé.

#### 5-4 Applications numériques :

Application ( 1 ) : Poutre soumise à une charge concentrée à mi-travée



**Figure 5.2 Poutre soumise à une charge concentrée à mi-travée**

Avec :  $E = 14 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$        $I = 0.09 \text{ m}^4$        $L = 10.8 \text{ m}$

Deux cas seront considérés pour un sol compressible ou résistant avec  $k = 10^5 \text{ kN/m}^2$  ou  $k = 10^7 \text{ kN/m}^2$  respectivement.

La poutre est discrétisée avec 18 éléments et 19 nœuds.

Les résultats obtenus après itérations sont donnés ci dessous :

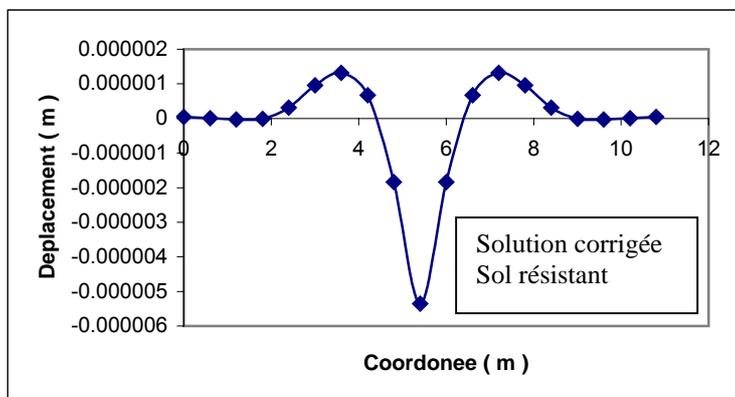
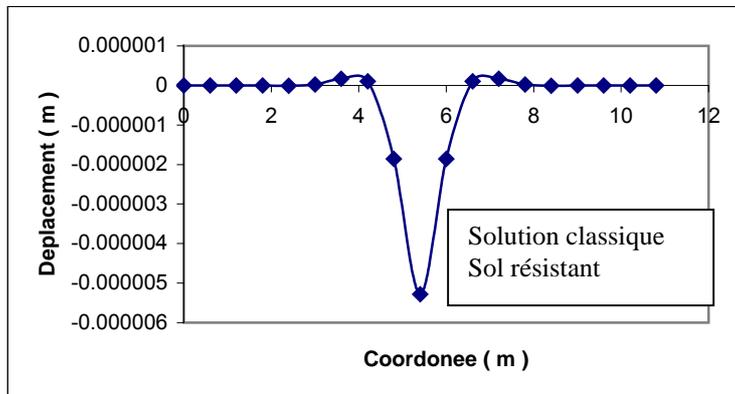
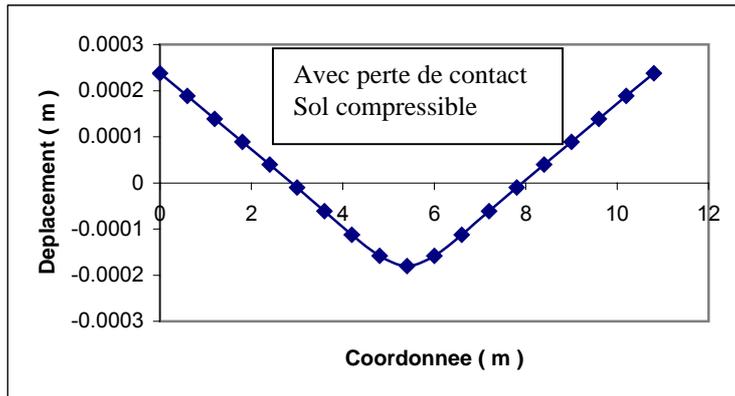
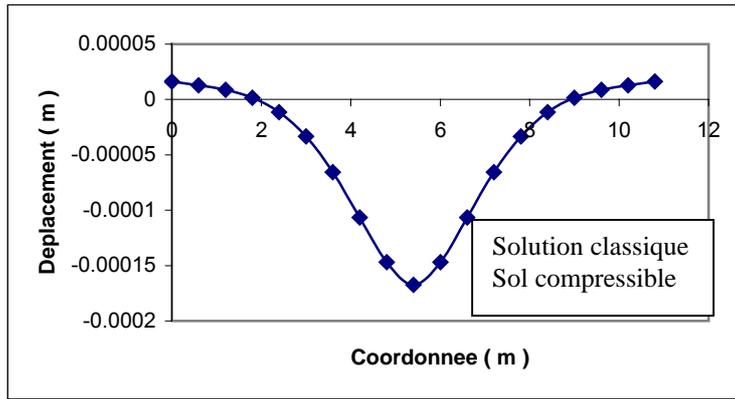


Figure 5.3 Réponses classique et corrigée de la poutre : Fig. 5.2

Application ( 2 ) : Poutre soumise à une charge concentrée à l'extrémité

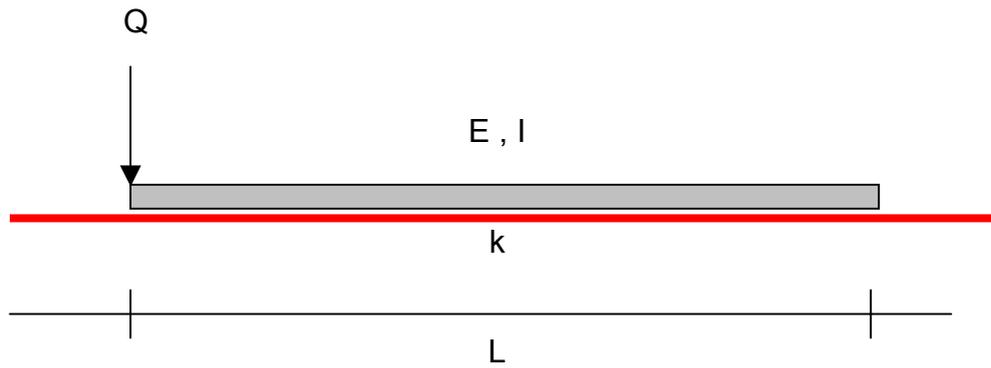


Figure 5.4 Poutre soumise à une charge concentrée à l'extrémité

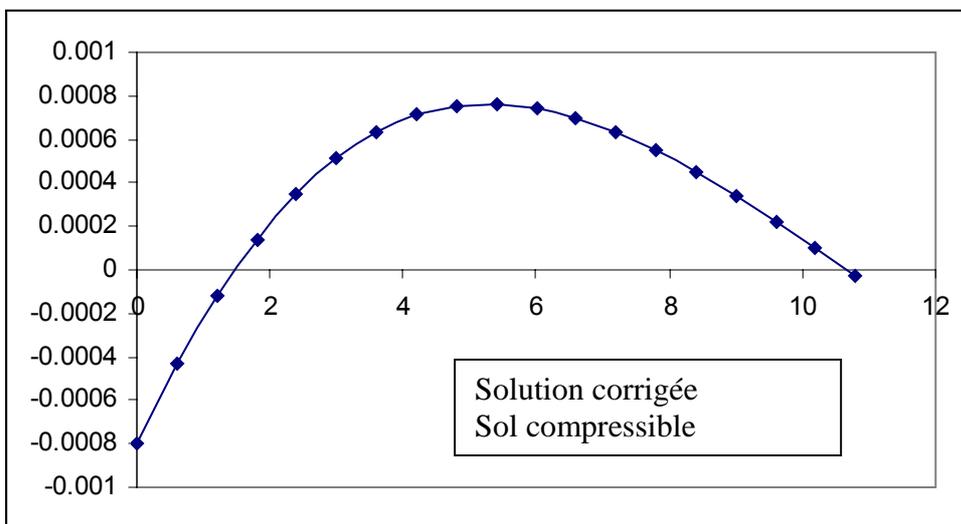
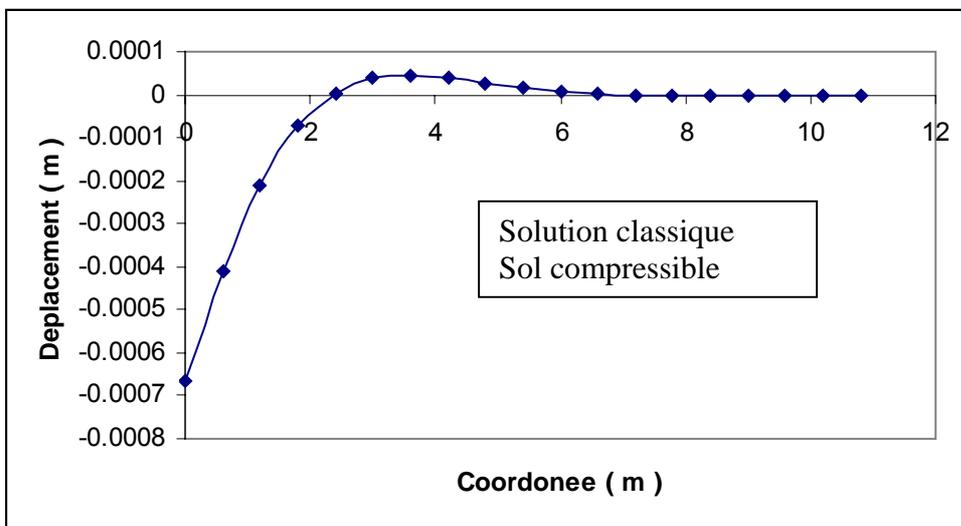
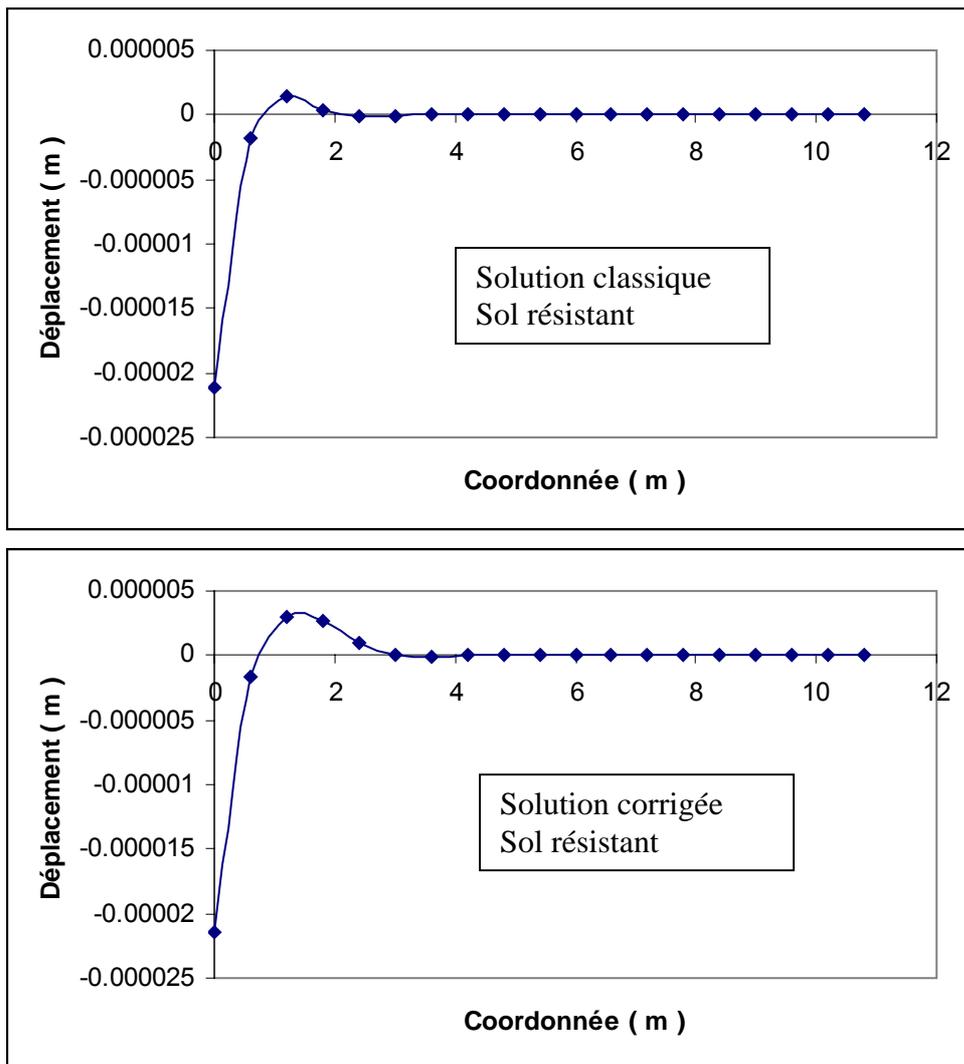
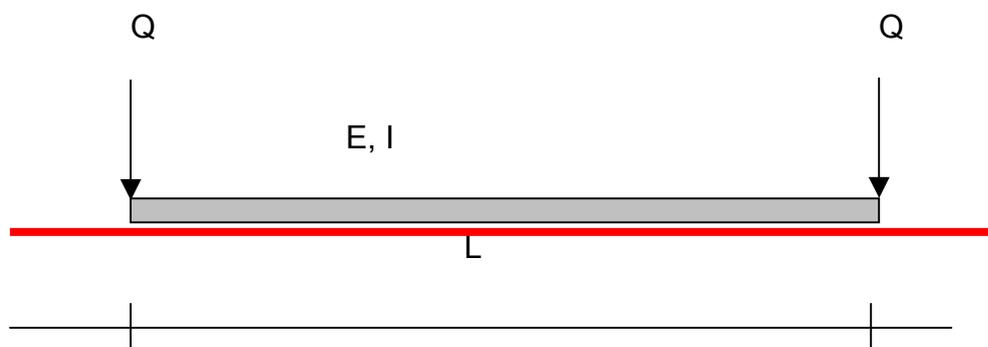


Figure 5.5 Réponses classique et corrigée de la poutre Fig. 5.4 (Sol compressible)



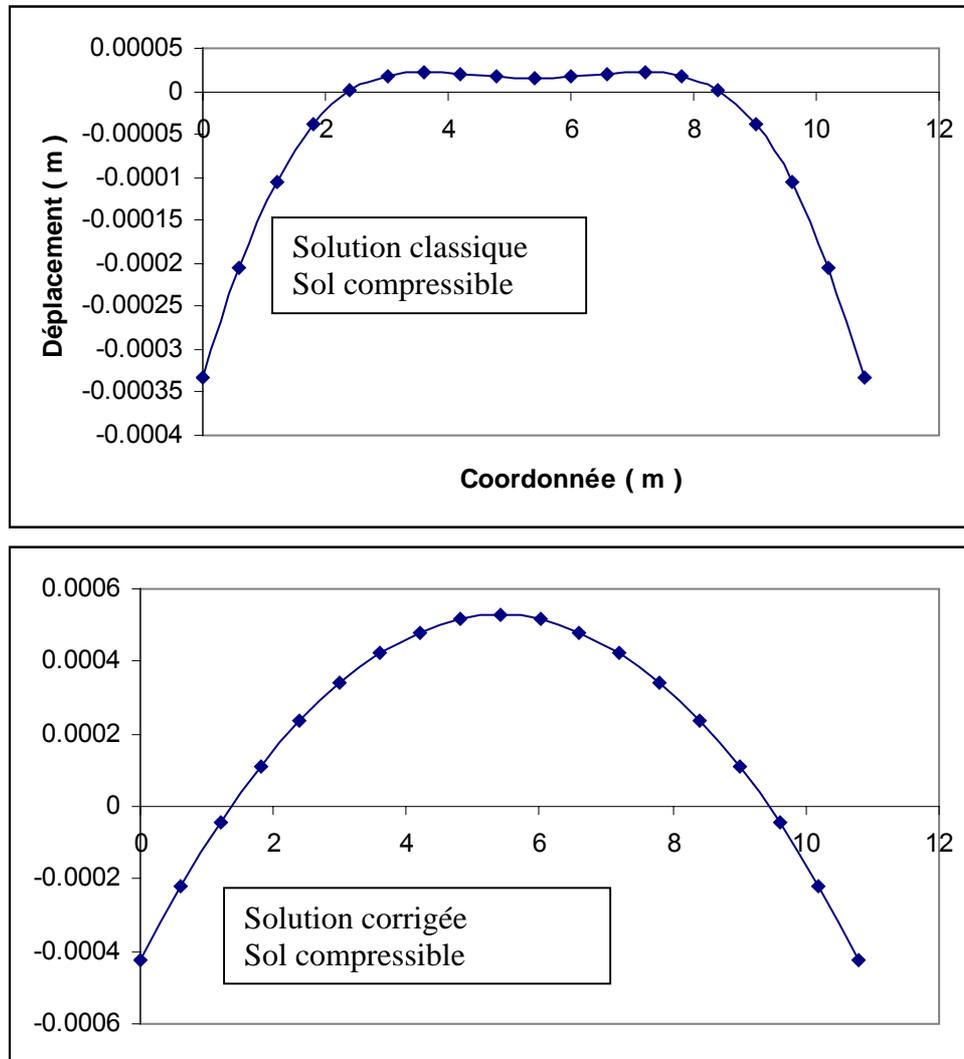
**Figure 5.6 Réponses classique et corrigée de la poutre Fig. 5.4 (Sol résistant)**

Application ( 3 ) : Poutre soumise à deux charges concentrées aux extrémités



**Figure 5.7 Poutre soumise à deux charges concentrées aux extrémités**

Les réponses classique ainsi que celle corrigée tenant compte de la perte de contact sont données par la figure 5.8 ci dessous, dans le cas d'un sol compressible :



**Figure 5.8 Réponses classique et corrigée de la poutre Fig. 5.7 (Sol compressible)**

Et dans le cas d'un sol résistant :

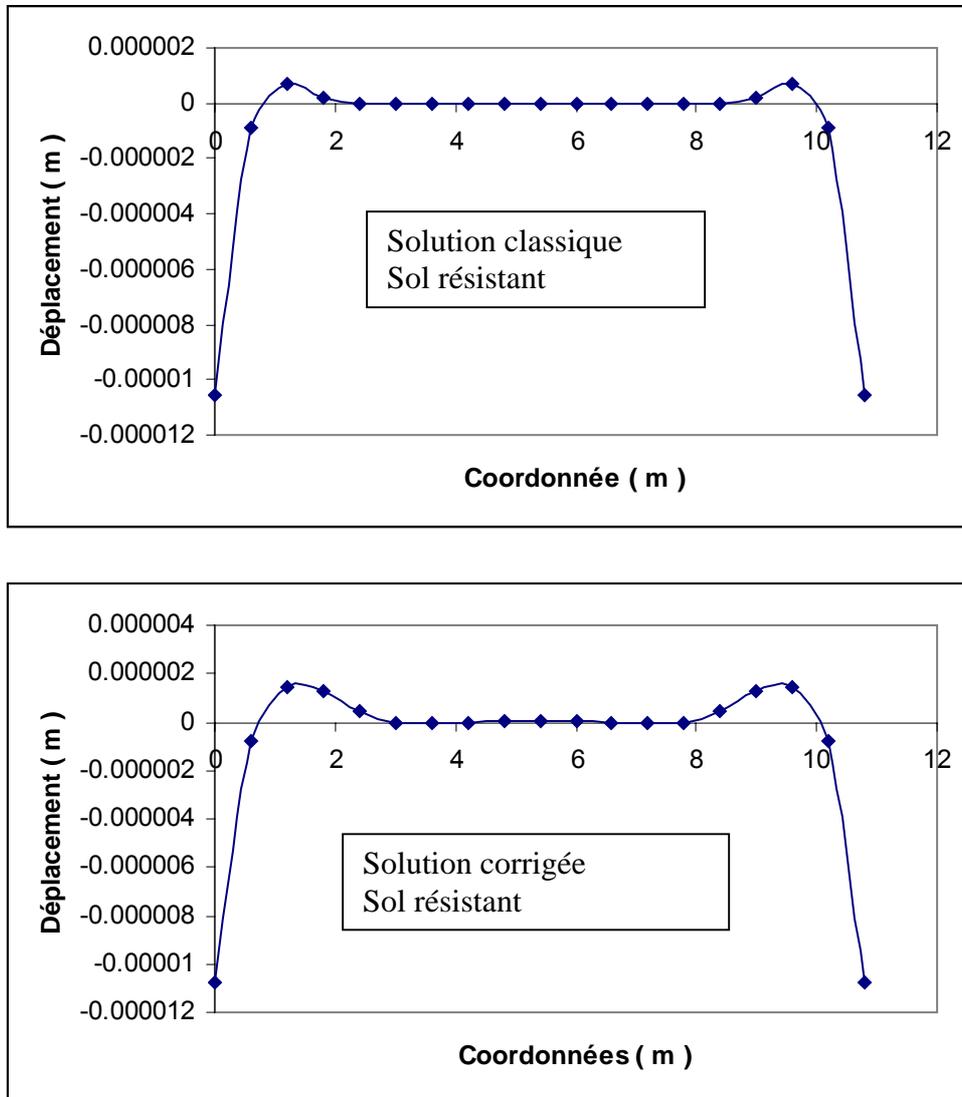


Figure 5.9 Réponses classique et corrigée de la poutre Fig. 5.7 (Sol résistant)

### Conclusions :

On remarque que sur toutes les figures précédentes que ce soit pour la solution classique ou la solution corrigée, les déplacements sont représentés de manière amplifiée. Si on adopte la même échelle sur les deux axes, la poutre apparaîtrait droite.

Il est clair que l'approche classique qui ne tient pas compte du fait que le sol ne peut résister à la traction et donc ne pouvant développer une réaction, est en violation

directe des équations d'équilibre. La procédure proposée converge vers un état d'équilibre très différent de la solution classique dans le cas des sols compressibles. Pour le cas des sols fermes très peu compressibles la différence n'est pas très appréciable dans les zones de contact, mais elle est importante en termes de déplacements dans les zones de perte de contact.

On observe que :

- L'étendue de la zone de contact est plus réduite que la solution classique dans le cas des sols compressibles.
- Les déplacements dans la zone de contact sont légèrement plus importants.
- Les déplacements dans la zone de perte de contact sont plus appréciables que la solution classique.

En général, si le problème de perte de contact se manifeste, il ne doit pas être négligé. Une étude paramétrée plus approfondie variant la longueur et inertie de la poutre ainsi que le module de Winkler et le chargement extérieur permettrait d'obtenir des conclusions plus générales. Les exemples traités 'highlight' l'importance de la perte de contact et ses conséquences.

## CONCLUSIONS

### **Analyse du 1<sup>er</sup> ordre elasto-plastique :**

L'analyse du premier ordre elasto-plastique est une simple extension de l'analyse élastique incorporant l'apparition des rotules plastiques. Le critère d'apparition de rotule se base sur des relations moment courbure est formulé par intégration sur la section et en utilisant la loi de comportement du matériau constituant la poutre. L'effet combiné du moment de flexion ainsi que les efforts tranchant et axial n'est pas pris en considération.

Le concept de rotule plastique pour une poutre sur appuis élastiques a été formulé et présenté, suivi d'une extension pour l'analyse élastoplastique des portiques sur appuis rigides, semelles isolées ou semelles filantes. Le modèle numérique reproduit exactement les résultats d'autres publications, simulant l'analyse en 'push over' des portiques avec sol interaction jusqu'à la ruine du système qui devient mécanisme.

Pour raffiner le modèle numérique, il faudra, entre autres :

Une meilleure modélisation de la rotule plastique qui est ponctuelle 'concentrated plasticity approach' de dimension nulle, en utilisant 'the spread of plasticity approach' ou la zone complètement et partiellement plastique a une longueur finie évolutive. Son apparition et évolution doivent être graduels.

Formuler les relations moments-courbure numériquement pour les sections en béton armé de forme géométrique complexe en utilisant 'the fiber model'. L'approche analytique devient irréalisable dans le cas général.

Formuler un critère d'apparition de rotule plastique qui tient compte de l'interaction (moment - effort normal - effort tranchant).

### **Analyse du 2<sup>eme</sup> ordre élastique/élastoplastique :**

En conclusion, en tenant compte de l'élasto-plasticité et les effets de la charge axiale de compression sur la rigidité flexionnelle la ruine s'obtient par combinaison des deux effets, bien que la structure étudiée soit élancée.

L'élément formulé peut être utilisé pour la détermination de la charge critique de la poutre avec/sans appuis élastiques avec /sans nœud souples. Un seul élément est suffisant pour les cas très simples et plusieurs éléments pour les cas un peu

complexes. On propose d'étendre cette étude selon la théorie de Timoshenko qui tient compte des déformations de cisaillement et de tenir compte du comportement élasto plastique du matériau pour étudier la stabilité dans le cas des éléments qui ne pas sont très élancés ( ruine par perte de stabilité élastique) et ne sont pas très courts ( rupture par écrasement plastique en compression sans perte de stabilité).

Pour raffiner le modèle numérique, il faudra, entre autres :

- Une meilleure modélisation de la rotule plastique qui est ponctuelle 'concentrated plasticity approach' de dimension nulle, en utilisant 'the spread of plasticity approach' ou la zone complètement et partiellement plastique a une longueur finie évolutive. Son apparition et évolution doivent être graduels.
- La prise en considération des imperfections géométriques qui sont en réalité spatiales ( 3D) et non planes (2D). Ces imperfections sont de deux types : 'out of plumbness' durant la phase d'érection de la structure et 'out of straightness' durant la phase de fabrication du profilé métallique
- la prise en considération des contraintes résiduelles dues au processus de fabrication, de distribution stochastique le long du profilé. C'est une certaine distribution de contraintes 'initiales' non déterministe.

Il faut reconnaître que plus le modèle numérique est sophistiqué, plus les raffinements ultérieurs deviennent super complexes.

### **Perte de contact:**

Il est clair que l'approche classique qui ne tient pas compte du fait que le sol ne peut résister a la traction et donc ne pouvant développer une réaction, est en violation directe des équations d'équilibre. La procédure proposée converge vers un état d'équilibre très différent de la solution classique dans le cas des sols compressibles. Pour le cas des sols fermes très peu compressibles la différence n'est pas très appréciable dans les zones de contact, mais elle est importante en termes de déplacements dans les zones de perte de contact.

On observe que :

- L'étendue de la zone de contact est plus réduite que la solution classique dans le cas des sols compressibles.

- Les déplacements dans la zone de contact sont légèrement plus importants.
- Les déplacements dans la zone de perte de contact sont plus appréciables que la solution classique.

En général, si le problème de perte de contact se manifeste, il ne doit pas être négligé. Une étude paramétrée plus approfondie variant la longueur et inertie de la poutre ainsi que le module de Winkler et le chargement extérieur permettrait d'obtenir des conclusions plus générales. Les exemples traités 'highlight' l'importance de la perte de contact et ses conséquences.

## References :

- [1]. Selvadurai, A. P.,  
'Elastic analysis of soil-foundation interaction',  
Elsevier scientific publishing company, pp.543, 1979.
- [2]. Thambiratnam, D.,  
'Free vibration analysis of beam on elastic foundations',  
Computers and structures, Vol 60, pp 971-980,1996
- [3]. Kaschiev, M.S.,  
'A beam resting on a tensionless Winkler foundation',  
Computers and structures, Vol 55, pp 261-264, 1995.
- [4]. Yokoyama, T.,  
'Vibration analysis of Timoshenko beam-column on two-parameter elastic foundations',  
Computers and structures, vol 61, pp 995-1007,1996.
- [5]. Ruta , P.,  
'The vibration of a non-prismatic beam on an inertial elastic half-plane',  
Journal of sound and vibration article in press 2004.
- [6]. Coskun, T.,  
'The response of a finite beam on a tensionless Pasternak foundation subjected to a harmonic load',  
European journal of mechanics 2003.
- [7]. Zheng D.Y.,  
'Instability of vibration of a moving train and rail coupling system',  
Journal of sound and vibration 2002.
- [8]. Girija C.V.,  
'Modified Vlasov model for beams on elastic foundations',  
Journal of geotechnical engineering ASCE 1987.
- [9]. Yin Zhang et Kevin D. Murphy  
'Response of a finite beam in contact with a tensionless foundation under symmetric and asymmetric loading',  
International journal of solids and structures, vol 41, pp. 6745-6758, 2004
- [10]. Arnold D. Kerr et Neil E. Soicher  
'A peculiar set of problems in linear structural mechanics',  
International journal of solids and structures, vol 33, no 6, pp. 899-911, 1996

- [11] . GHALI A. et Neville A.M  
 ‘Structural analysis. A unified classical and matrix approach ‘,  
 Chapman and Hall.
- [12] . Lescouarc’h  
 ‘Etablissement d’un programme d’analyse élastoplastique des structures planes  
 à barres, par la méthode pas à pas’ ,  
 Rapport de recherche, CTICM
- [13] . Meschack Chiwanga et A.J.Valsangkar  
 ‘Generalized beam element on two-parameter elastic foundation ‘,  
 Journal of structural engineering ASCE , pp1414-1427,1988.
- [14]. Eisenberger, M. et. Yankkelevsky, D.Z.,  
 ‘Exact stiffness matrix for beams on elastic foundation ‘,  
 Computers and structures, vol. 21, No 6, pp. 1355-1359, 1985
- [15] .Yalcin. A., et.Aksoydan, M,  
 ‘Transfer and stiffness matrix for Timoshenko beams on elastic foundations ‘,  
 ARI, Vol. 54, 03, pp.1-16, 2005
- [16] M. Aydogan  
 ‘Stiffness matrix formulation of beams with shear effect on elastic foundation ‘,  
 Journal of structural engineering, ASCE, Vol 121, No 9, pp.1265-1270, 1995
- [17]. Badie S. S. et Salmon D.C.  
 ‘A quadratic order elastic foundation finite element ‘,  
 Computers and structures, Vol 58, No 3, pp 435-443, 1996
- [18]. Iimura S.  
 ‘Simplified mechanical model for evaluating stress in pipelines subject to  
 settlement ‘,  
 Construction and building materials, 2004
- [19]. Eisenberger M. et Bielak J.  
 ‘Finite beams on infinite two-parameter elastic foundations ‘,  
 Computers and structures, vol 42. No 4, pp 661-664, 1992
- [20]. Ashraf Ayoub,  
 ‘Mixed formulation of nonlinear beam on foundation elements ‘,  
 Computers and Structures, Vol 81, pp 411-421, 2003
- [21]. Jian-Hua Y.  
 ‘Closed form solution for reinforced timoshenko beam on elastic foundation ‘,  
 Journal of engineering mechanics, ASCE, vol 126 no 8, pp 868-874, 2000
- [22]. Nam-Hyoung Lim  
 ‘Stability of continuous welded rail track ‘,  
 Computers and structures, vol. 81 ,pp 2219-2236, 2003
- [23]. Letter to the editor (author missing!!)

- 'Effect of elastic foundation on the mode shapes in stability and vibration problems of tapered columns/beams ',  
Journal of sound and vibration, vol 136, no1 , pp 171-175, 1990
- [24]. Franciosi C. et Masi A.  
'Free vibrations of foundation beams on two-parameter elastic soil ',  
Computers and structures, vol 47, no 3, pp 419-426, 1993
- [25]. karami G. , Malek zadeh et Shahpari S.A.  
'A DQEM for vibration of shear deformable nonuniform beams with general boundary conditions ',
- [26]. Yu T. X. Chen X. W. et Chen Y.Z.  
'Elastic-plastic beam-on-foundation subjected to impact or impulsive loading',  
Computers and structures
- [27]. Seong-Min Kim  
'Vibration and stability of axial loaded beams on elastic foundation under moving harmonic loads', Engineering structures, Vol 26, pp 95-105, 2004
- [28]. Kim N.I Lee Ji-Hun et al.  
'Exact dynamic stiffness matrix of non-symmetric thin walled-beams on elastic foundation using power series method ',  
Advances in engineering software, 2005
- [29]. Sun Lu  
'An explicit representation of steady state response of a beam on an elastic foundation to moving harmonic line loads ',  
International Journal for numerical and analytical methods in geomechanics,  
Vol 27, pp69-84, 2003
- [30]. Ayvaz A. et Ozgan K  
'Application of modified Vlasov model to free vibration analysis of beams resting on elastic foundations',  
Journal of sound and vibration, Vol 255, no1, pp 111-127, 2002
- [31] Wei Huang et Yida Zou  
'The dynamic response of a viscoelastic Winkler foundation-supported elastic beam impacted by a low velocity projectile',  
Computers and structures ,vol 52, no 3, pp 431-436, 1994
- [32] Ayvaz Y. et Daloglu A.  
'Earthquake analysis of beams resting on elastic foundations by using a modified vlasov model ',  
Journal of sound and vibration (1997), vol 200, no 3, pp 315-325
- [33] Dalerçi G.  
'The beam of finite length on elastic subgrade and the Winkler's hypothesis',  
Tenth European conference on soil mechanics and foundation engineering,  
Firenze 1991

- [34]. Lee S. Y et al.  
'Elastic instability of a beam resting on an elastic foundation subjected to a partially tangential force',  
Computers and structures, vol 59, no 6, pp. 983-988, 1996
- [35]. Sohrab Baghery  
'Buckling of linear structures above the surface and/or underground',  
Journal of structural engineering, ASCE, vol 30, no 11, pp. 1748-1755, 2004
- [36]. Somchai C. et Santi S.  
'Exact stiffness matrix of beam-columns including shear deformation on two-parameter elastic foundation',  
The sixth east Asia-Pacific conference on structural engineering and construction, January 14-16, 1998, Taipei, Taiwan.
- [37]. Pantelides C.P.  
'Stability of columns on biparametric foundations',  
Computers and structures, vol 42, no 1, pp. 21-29, 1992
- [38]. Hetenyi M.  
'Beams on elastic foundations',  
University of Michigan Press, Ann Arbor, MI 1946.
- [39]. Timoshenko S.P. and Gere J.M.  
'Theory of elastic stability', Mc Graw Hill, New York, 1961.
- [40]. Aristizabal-Ochoa J. Dario  
'Classical stability of beam-columns with semi rigid connections on elastic foundations',  
American society of civil engineers, 16<sup>th</sup> Engineering Mechanics Conference, July 16-18 (2003), University of Washington, Seattle.
- [41]. Cheng F.Y. and Pantelides C.P.  
'Static Timoshenko beam-columns on elastic media',  
Journal of structural engineering, ASCE, Vol 114 no2, pp. 1152-1172, 1988

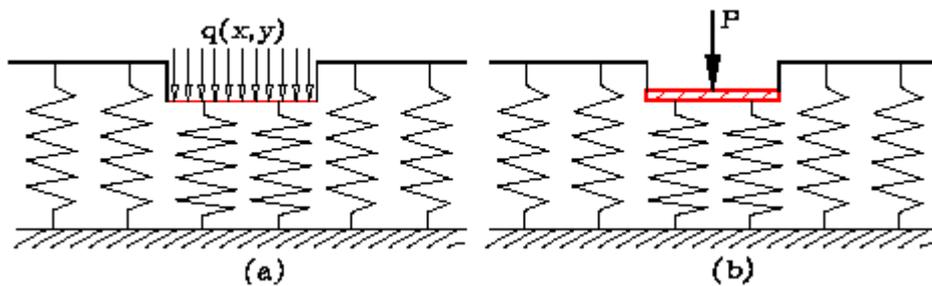
## ANNEXE (A) :

### A-1 Modèle de Winkler :

Winkler(1867) suppose que le déplacement  $w$  en chaque point est directement proportionnel à la force de contact en ce point et indépendant des autres points. Ceci s'exprime par la relation

$$r(x) = k v(x) \quad (2)$$

avec  $k$  module de Winkler de dimension  $N/m^2$



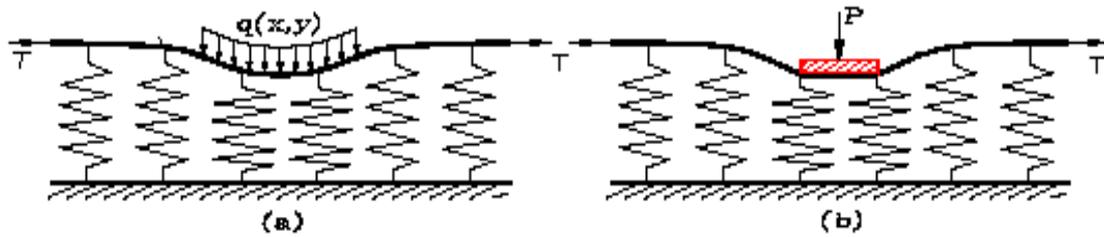
Modèle de Winkler

La simplicité et déficience du modèle de Winkler à représenter le comportement du sol d'une part, et la complexité mathématique des modèles élastiques continus d'autre part, a conduit à l'élaboration des modèles à deux paramètres.

Les modèles à deux paramètres pour lesquels le modèle de Winkler est un cas particulier, ont été développés en utilisant des concepts distincts. Les modèles proposés par Filonenko-Borodich (1940), Hetenyi (1946), Pasternak (1954) sont des extensions du modèle de Winkler pour tenir compte d'une certaine interaction entre les ressorts. Reissner (1958), Vlasov et Leontiev (1966) ont présenté d'autres modèles à deux paramètres en se basant sur la théorie de l'élasticité après certaines simplifications.

### A-2 Modèle de Filonenko-Borodich :

Dans ce modèle les ressorts de Winkler ( $k$ ) sont connectés et couplés par une membrane (pour les plaques sur appuis élastiques) ou barre (pour les poutres) soumise à une force de traction constante ( $T$ )



Dans ce cas la relation force de contact-déplacement devient

$$r(x) = k v(x) - T \frac{d^2v}{dx^2} \quad (3)$$

Pour caractériser le modèle de sol, un paramètre supplémentaire T, qui est la constante de la membrane doit être déterminée .

### A-3 Modèle de Hetenyi

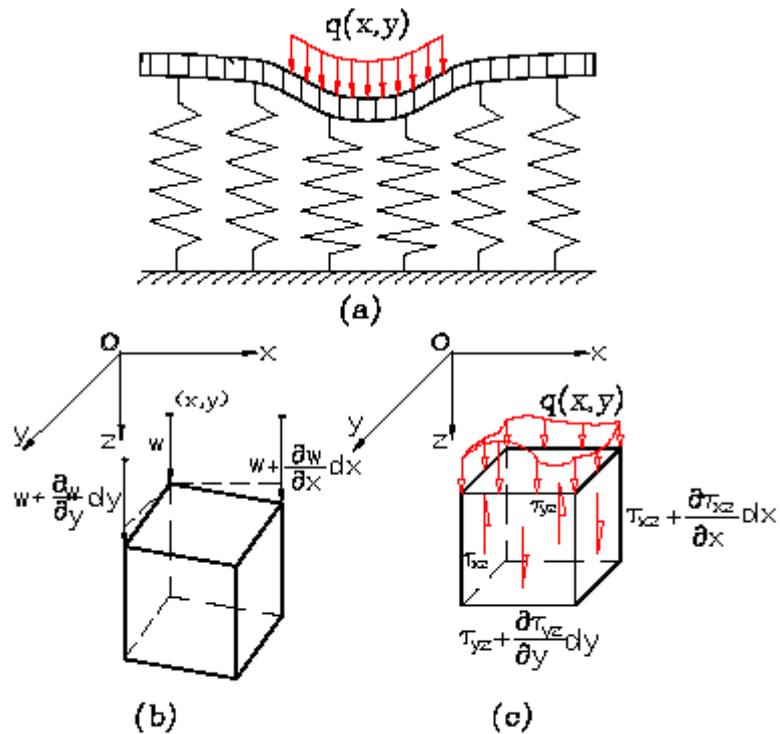
Hetenyi propose que les éléments de ressorts indépendants k sont mis en interaction s'ils sont couplés par une plaque en flexion dans le cas des radiers ou par une poutre en flexion pour les problèmes à une dimension. L'équation s'écrit :

$$r(x) = k w(x) - (E_b I_b) \frac{d^4w}{dx^4} \quad (4)$$

Ou  $E_b I_b$  sont des caractéristiques de la poutre fictive couplant les ressorts de Winkler.

### A-4 Modèle de Pasternak

Pasternak propose un modèle d'interaction en utilisant un milieu incompressible travaillant uniquement en cisaillement

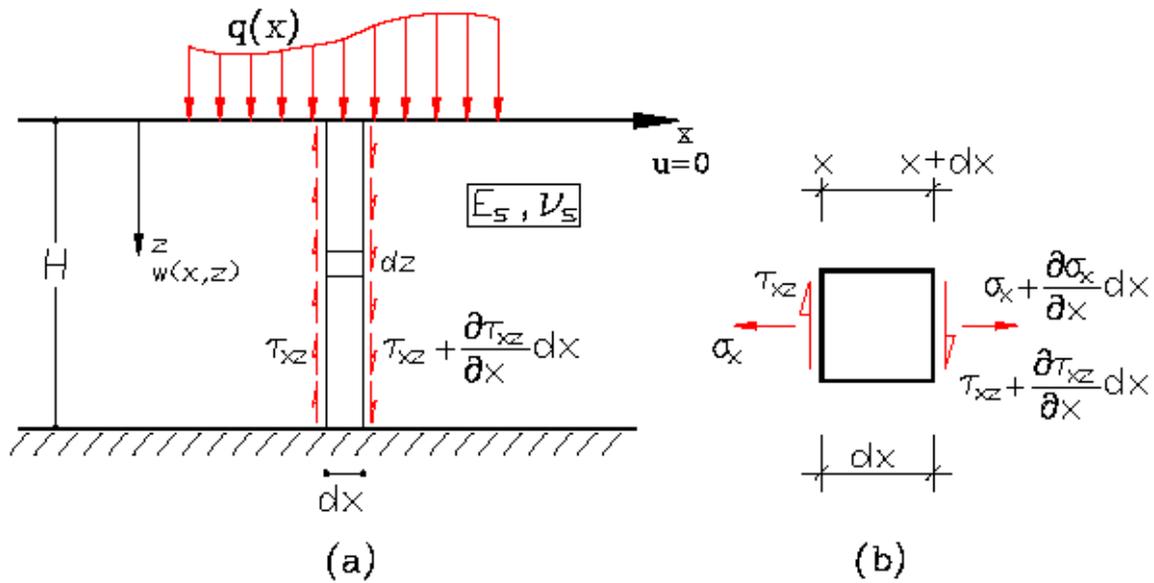


Dans ce cas l'équation s'exprime par  $r(x) = k v(x) - G \frac{d^2 v}{dx^2}$  (5)

On remarque que le modèle de Pasternak est identique à celui de Filonenko si  $G=T$ . De plus tous ces modèles à deux paramètres se réduisent au modèle de Winkler dans le cas où  $G$ ,  $T$  et  $EI/b$  tendent vers zéro.

#### A-5 Modèle de Vlasov-Leontiev modifié:

Vlasov et Leontiev ont abordé la formulation du problème en se basant sur la théorie de l'élasticité et un principe variationnel. Ce modèle a été modifié par Ayvan et Ozgan<sup>(30)</sup> (2002)



Le sol considéré a une profondeur ( H ) finie avec substratum rigide a la base. L'énergie potentielle du système poutre-sol peut être écrite sous la forme :

$$\Pi = \int_0^L \frac{EI}{2} \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^H \frac{1}{2} b (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dz dx \quad (6)$$

ou  $\sigma$  ,  $\tau$  et  $\varepsilon$  ,  $\gamma$  les contraintes et les déformations correspondantes dans le sol,  $w$ ,  $EI$ ,  $L$  et  $b$  sont le déplacement, rigidité flexionnelle, longueur et largeur de la poutre respectivement . En utilisant les relations constitutives et les relations déformations - déplacements de l'élasticité, les contraintes en tout point du sol peuvent être exprimées par la relation matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E_s (1-\nu_s)}{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu_s}{1-\nu_s} & 0 \\ \frac{\nu_s}{1-\nu_s} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu_s}{2(1-\nu_s)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

ou  $E_s$  et  $\nu_s$  sont le module d'élasticité et le coefficient de poisson du sol.

Si on pose les hypothèses suivantes sur les déplacements :

$$\text{Vertical : } \bar{w}(x,z) = w(x) \Phi(z) \text{ avec } \Phi(0)=1 \text{ et } \Phi(H)=0 \quad (8)$$

$$\text{Horizontal : } u(x,z) = 0 \quad (9)$$

En substituant les équations (8),(9) et (7) dans (6), on obtient :

$$\Pi = \int_0^L \frac{EI}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx + \frac{E_s b}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^H \left[ \frac{1-\nu_s}{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} w^2 \left( \frac{d\Phi}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2(1+\nu_s)} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \Phi^2 \right] dz dx$$

En appliquant des variations a  $\Pi$  dues a des variations de  $w$  et  $\Phi$  on obtient les deux paramètres du sol

$$k = \int_0^H \frac{E_s b (1-\nu_s)}{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} \left( \frac{d\Phi}{dz} \right)^2 dz \quad (10-a)$$

$$2t = \int_0^H \frac{E_s b}{2(1+\nu_s)} \Phi^2 dz \quad (10-b)$$

ce qui permet d'écrire

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{k} \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{t} \mathbf{d}^2 \mathbf{v} / \mathbf{dx}^2 \quad (11)$$

Le modèle de Vlasov-Leontiev présente une base analytique rigoureuse et objective basée sur l'élasticité qui aboutit à une formule intégrale pour l'évaluation de  $k$  et  $t$ .

## ANNEXE B :

### B-1 Poutre finie sur sol à un seul paramètre (Winkler):

L'équation différentielle gouvernant la déforme de la poutre sur milieu de Winkler est exprimée par l'équation :

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + k v = q(x) \quad (14)$$

Qui est réécrite sous la forme :

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + 4 \lambda^4 v = \frac{q(x)}{EI}$$

Avec 
$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$$

La solution générale est :

$$v_g(x) = v_h(x) + v_p(x) \quad (15)$$

$v_h(x)$  étant la solution homogène et  $v_p(x)$  la solution particulière.

On cherche une solution de l'équation homogène de la forme :

$$v_h(x) = A e^{rx}$$

d'où l'équation caractéristique

$$r^4 + 4 \lambda^4 = 0$$

les quatre racines de cette équation sont complexes :

$$r_1 = \sqrt{2i} \lambda$$

$$r_2 = -\sqrt{2i} \lambda$$

$$r_3 = \sqrt{-2i} \lambda$$

$$r_4 = -\sqrt{-2i} \lambda$$

Après quelques manipulations algébriques, ces racines peuvent être exprimées par les relations ci dessous :

$$r_1 = (1+i) \lambda$$

$$r_2 = -(1+i)\lambda$$

$$r_3 = (1-i)\lambda$$

$$r_4 = -(1-i)\lambda$$

Par conséquent la solution homogène est :

$$v_h(x) = e^{\lambda x} [c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x)] + e^{-\lambda x} [c_3 \cos(\lambda x) + c_4 \sin(\lambda x)]$$

Les constantes  $c_1, c_2, c_3$  et  $c_4$  sont déterminées d'après les conditions aux limites.

La solution particulière dépend des forces extérieures agissant sur la poutre. Dans le cas où la poutre est soumise à une charge uniformément répartie sur sa longueur, la

solution particulière est  $v_p(x) = \frac{p}{k}$ , et la solution générale s'écrit :

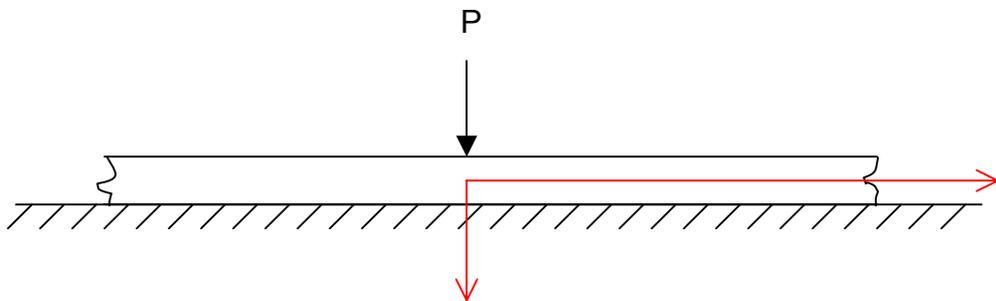
$$w_g(x) = e^{\lambda x} [c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x)] + e^{-\lambda x} [c_3 \cos(\lambda x) + c_4 \sin(\lambda x)] + \frac{p}{k}$$

qui exprime le déplacement en tout point d'abscisse  $x$  de la poutre. Les expressions de la rotation, moment et effort tranchant se déduisent par simple dérivation successive de l'expression donnant le déplacement.

## B-2 Poutre infinie sur sol à un paramètre ( Winkler) :

Dans le développement qui suit, le cas d'une seule charge concentrée agissant sur une poutre infinie est traitée. La solution des problèmes impliquant une variété de combinaisons de charge se déduit du cas simple ci dessus en utilisant le principe de superposition.

Considérons une poutre infiniment longue s'appuyant sur une fondation élastique et soumise à une charge concentrée  $P$ .



En raison de la symétrie, la moitié à droite de la charge  $P$  est considérée. Les conditions aux limites de ce segment semi infini se déduisent du fait que pour  $x \rightarrow \infty$

le déplacement ainsi que toutes ses dérivées (rotation, moment, effort tranchant) sont nuls. Des équations (15,16) on en déduit  $c_1 = 0$  et  $c_2 = 0$ .

Les conditions applicables en  $x = 0$  sont :

$$v'(0) = 0 \quad \text{et} \quad T = -EI v'''(0) = -\frac{P}{2}$$

Après substitution on obtient :

$$C_3 = C_4 = \frac{P}{8\lambda^3 EI} = \frac{P\lambda}{2k}$$

d'où le déplacement :

$$v(x) = \frac{P\lambda}{2k} e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x) \quad (17)$$

Dans le but de simplifier les expressions du déplacement, rotation, moment et effort tranchant, les notations ci dessous sont introduites :

$$f_1(\lambda x) = e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x)$$

$$f_2(\lambda x) = e^{-\lambda x} \sin \lambda x = -\frac{1}{2\lambda} f_1'$$

$$f_3(\lambda x) = e^{-\lambda x} (\cos \lambda x - \sin \lambda x) = \frac{1}{\lambda} f_2' = -\frac{1}{2\lambda^2} f_1''$$

$$f_4(\lambda x) = e^{-\lambda x} \cos \lambda x = -\frac{1}{2\lambda} f_3' = -\frac{1}{2\lambda^2} f_2'' = \frac{1}{4\lambda^3} f_1'''$$

$$f_1'(\lambda x) = -\frac{1}{\lambda} f_4'$$

.....

$$v(x) = \frac{P\lambda}{2k} f_1(\lambda x)$$

$$\theta(x) = v' = -\frac{P\lambda^2}{k} f_2(\lambda x)$$

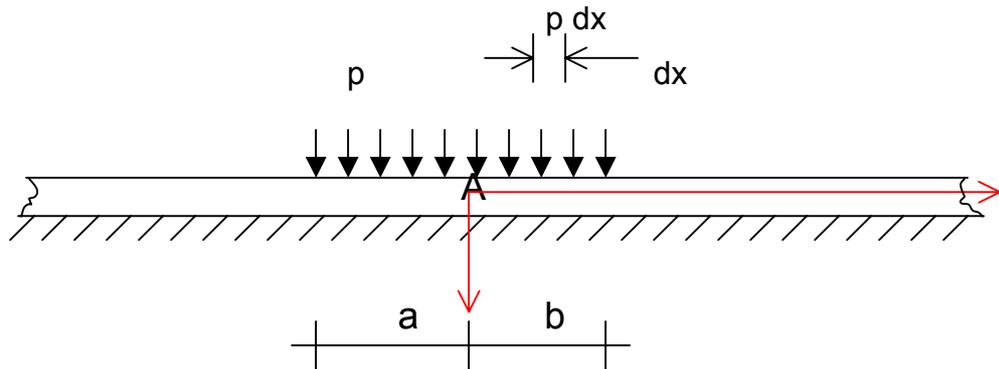
$$M(x) = EI v'' = -\frac{P}{4\lambda} f_3(\lambda x)$$

$$T(x) = -EI v''' = -\frac{P}{2} f_4(\lambda x)$$

Les expressions ci dessus sont valables pour  $x > 0$ , dans le cas  $x < 0$  on utilise les conditions de symétrie et d'antisymétrie

$$v(x) = v(-x) \quad \theta(x) = -\theta(-x) \quad M(x) = M(-x) \quad T(x) = -T(-x)$$

Cas d'une charge répartie :



Le déplacement en A due a la force  $P dx$  est obtenu de la solution ( 17) de la poutre infinie soumise à une charge concentrée :

$$\Delta v = \frac{P dx}{2k} \lambda e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x)$$

le déplacement en A du à la charge uniformément distribuée est obtenu en utilisant le principe de superposition.

## ANNEXE C :

### C-1 POUTRE FINIE SUR SOL A DEUX PARAMETRES :

L'équation différentielle de base gouvernant la flexion d'une poutre reposant sur un milieu élastique a deux paramètres est :

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - k_2 \frac{d^2 v}{dx^2} + k v = p(x)$$

La solution homogène

$$v_h(x) = [A_1 e^{\mu \lambda x} + A_2 e^{-\mu \lambda x}] \cos(\beta \lambda x) + [A_3 e^{\mu \lambda x} + A_4 e^{-\mu \lambda x}] \sin(\beta \lambda x)$$

avec

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{k_2 \lambda^2}{k}}$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{k_2 \lambda^2}{k}}$$

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$$

On note que si  $k_2 \rightarrow 0$  alors  $\mu$  et  $\beta \rightarrow 1$  et la solution homogène () pour un sol a deux paramètres devient identique avec modèle de Winkler a un paramètre. Pour la solution () il a été assume que  $\frac{k_2 \lambda^2}{k} < 1$ . En effet, en adoptant l'interprétation de

Vlasov pour  $k$  et  $k_2$ , on a :

$$\frac{k_2 \lambda^2}{k} = \left[ \frac{(1-2\nu_s)}{12(1-\nu_s^2)} \frac{E_s}{E_b} \left(\frac{H}{h}\right) \left\{ 1 + \frac{H}{b} \left(\frac{1-2\nu_s}{6(1-\nu_s)}\right) \right\} \right] < 1$$

est satisfaite dans la plupart des situations car  $k > k_2$  .

Si  $\frac{k_2 \lambda^2}{k} = 1$  alors  $\beta = 0$  et la solution homogène () est simplement transformée.

Si  $\frac{k_2 \lambda^2}{k} > 1$  la forme de la solution homogène change

## ANNEXE D

### MODULE DE WINKLER

Plusieurs efforts de recherche ont examiné les différents facteurs qui affectent les paramètres du sol utilisés dans les modèles idéalisés de Winkler ( un paramètre  $k$ ), a deux paramètres (  $k$  et  $k_2$ ) ou milieu élastique continu (  $E_s$  et  $\nu_s$ ).

La détermination expérimentale de ces paramètres décrivant ces différents modèles peut être approchée de plusieurs manières :

- (i) A partir de tests in situ sur plaques,
- (ii) Détermination de  $E_s$  et  $\nu_s$  a partir de tests en laboratoire et utilisation de relations pour déterminer  $k$  et  $k_2$
- (iii) Les constantes  $k$  et  $k_2$  peuvent être reliées a  $E_s$  et  $\nu_s$  par comparaison de la solution a un problème particulier d'interaction sol-structure.

#### Dimensions de la plaque :

Terzaghi (1955) a montré sur la base d'évidences expérimentale que la valeur de (  $k$  ) diminue en augmentant la largeur (  $B$  ) de la plaque sur un sol granulaire (non cohésif) selon la relation :

$$k = k_1 \left[ \frac{B+0.305}{2B} \right]^2$$

ou  $k_1$  est le module de réaction pour une longue plaque de largeur 0.305 m. De manière similaire le module de réaction pour un sol cohésif est donné par la relation :

$$k = 0.305 \frac{k_1}{B}$$

Terzaghi indique que cette relation n'est valable que dans le cas ou la contrainte de contact au dessous de la plaque est inférieure a la moitié de la résistance du sol.

#### Forme de la plaque :

Pour les plaques soumises a un chargement uniformément reparti et de même largeur (  $B$  ) reposant sur le même sol, le module de réaction (  $k$  ) diminue en augmentant la longueur de la plaque (  $L$  ). Terzaghi (1955) a obtenu la relation empirique ci dessous pour tenir compte de la forme de la plaque :

$$k = \frac{2}{3} k_s \left[ 1 + \frac{2B}{L} \right]$$

ou  $k_s$  est le module de réaction pour une plaque rigide carrée. Cette équation indique que le module de Winkler (  $k$  ) pour une poutre infiniment longue est égal a  $2/3$  pour une plaque carrée de même largeur.

Le modele de Vlasov et Leontiev (1966) a deux paramètres ont montre que pour le cas d'une seule couche de sol élastique de profondeur (  $H$  ) et une variation linéaire des contraintes normales, alors (  $k$  ) et (  $G_p$  ) sont donnes par :

$$k = \frac{E_s}{H(1+\nu_s)(1-2\nu_s)}$$

$$G_p = \frac{E_s H}{6(1+\nu_s)}$$

Les valeurs du module de Young  $E_s$  et du coefficient de poisson  $\nu_s$  sont déterminées a partir du test tri axial en laboratoire.

Biot (1937) a exprime le module de réaction du sol (  $k$  ) en fonction des constantes élastiques du sol (  $E_s$  et  $\nu_s$  ). La corrélation entre ces paramètres est obtenue en comparant le moment de flexion maximal pour une poutre infinie soumise a une force concentrée  $P$  en comparant la solution obtenue par le modèle de Winkler a celle obtenue par un modèle ou le sol est un semi espace élastique continu, et obtient :

$$k = \frac{1.23 E_s}{(1-\nu_s^2)} \left[ \frac{E_s b^4}{16 C (1-\nu_s^2) E_b I} \right]; \quad 1.00 < C < 1.13$$

ce qui est une évaluation de  $k$  en termes des caractéristiques du sol  $E_s$  et  $\nu_s$  et les propriétés de la poutre infinie  $E_b$  ( module de Young) et  $b$  (largeur). Biot a montré que pour une poutre infinie avec le modèle simple de Winkler et la relation proposée pour (  $k$  ), le moment fléchissant et déplacement le long de la poutre sont d'une précision acceptable par rapport a la solution avec un sol considéré comme un semi espace élastique.

Vesic et Johnson (1963) ont suggéré l'expression:

$$k = \frac{0.65 E_s}{b(1-\nu_s)} \left[ \frac{E_s b^4}{E_b I} \right]$$

Les études de Galin (1943) des poutres de longueur finie reposant sur un semi espace élastique isotropique a propose l'expression suivante pour le module de réaction :

$$k = \frac{\pi E_s}{2b(1-\nu_s^2)\log(L/b)}$$

Daloglu et al. (2000) ont utilisé la méthode des éléments finis et avec une large étude paramétrique ont présenté des graphes à partir desquels on peut estimer le module de Winkler.

En conclusion, il est évident que le module de Winkler n'est pas une caractéristique intrinsèque du matériau