

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université des Sciences et de la Technologie **Houari Boumedienne**

FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR.

**Département du Génie Civil.**

## Thèse de Magister

Pour l'obtention du diplôme de **MAGISTER** en Génie civil

Option: **Constructions**

Thèse proposée et dirigée par Professeur **.A.Chelghoum**

Etudiée par :M<sup>f</sup> **Lemdani Mohamed Amine**  
Ingénieur d'état en Génie Civil option CCI (**U.S.T.H.B**)

### Thème.

**Formulation d'un élément fini quadratique standard en vue de son application en mécanique des milieux poreux saturés**

Soutenu le :

Devant le jury composé de :

M<sup>me</sup> **Kherchi .F.**  
M<sup>f</sup> **Chelghoum .A.**  
M<sup>f</sup> **Badari .K**  
M<sup>f</sup> **Kaoua .F**  
M<sup>f</sup> **Derriche. F**  
M<sup>f</sup> **Khaled .O.**

**Présidente**  
**Directeur de Thèse**  
**Examineur**  
**Examineur**  
**Examinatrice**  
**Invité**

**Maitre de conférences USTHB**  
**Professeur USTHB**  
**Professeur UST Boumerdès**  
**Maitre de conférences USTHB**  
**Maitre de conférences ENTTP**  
**Chargé de cours USTHB**

# CHAPITRE 1.

## **Etude bibliographique.**

1.1.Introduction.

1.2.Etude bibliographique.

1.3.Résumé et objectifs de la thèse.

## CHAPITRE 2.

### **Présentation de la mécanique des milieux poreux saturés.**

2.1.Introduction.

2.2.Description d'un milieu poreux saturé.

2.3.Déscription de la déformation du squelette.

2.4.Déscription eulérienne du mouvement.

2.5.Notions de dérivées particulières et matérielles.

2.6.Conservation de la masse en variables d'Euler.

2.7.Conservation de la quantité de mouvement.

2.8.Le comportement poro-élastique linéaire.

2.9.Résumé.

# CHAPITRE 3.

## Formulation par éléments finis.

3.1.Introduction.

3.2.Discrétisation des équations du mouvement relatives au squelette solide.

3.3Discrétisation des équations du mouvement relatives à la phase fluide.

3.4.Théorie quasi-statique en formulation u-p.

# CHAPITRE 4.

## **Discrétisation temporelle des équations matricielles.**

4.1.Introduction.

4.2.Concept d'élément fini de temps.

4.3.Méthode des approximations rationnelles.

4.4.Résumé.

# CHAPITRE 5.

## Estimation des erreurs.

5.1.Introduction.

5.2.Admissibilité de l'approximation.

5.3.Erreurs propres à la modélisation des milieux poreux saturés.

5.4.Résumé.

# CHAPITRE 6.

# **Mise en évidence et origine des oscillations parasites.**

6.1.Introduction.

6.2.Position du problème.

6.3.Théorie quasi-statique.Simulation de la consolidation unidimensionnelle.

6.4.Théorie quasi-statique.Cas de la consolidation bidimensionnelle.

6.5.Rappel.Matrices élémentaires pour l'élément unidimensionnel Q3/3.

6.6.Origine des oscillations parasites de la solution.

6.7.Aspects mathématiques du problème.

6.8.Résumé.

**CHAPITRE 7.**

# **Réajustement du comportement des éléments quadratiques standards.**

7.1.Introduction.

7.2.Eléments finis et modes parasites.

7.3.Quelques constatations élémentaires.

7.4.Réajustement du champ de la surpression interstitielle.

7.5.Résumé.

<b>CHAPITRE 8.</b>
--------------------



**Expérimentation numérique.**  
**Tests de validation.**

8.1.Introduction.

8.2.Procédure de résolution.

8.3.Simulations numériques tests de validation.

8.3.1.Cas quasi statique de la consolidation  
unidimensionnelle.

8.3.2.Cas quasi statique de la consolidation  
bidimensionnelle.

8.3.3Comportement dynamique d'un milieu  
poreux.

8.4.Conclusion.

Conclusions et recommandations.

# TABLE DES MATIERES

## Chapitre1 Etude Bibliographique

1.1. INTRODUCTION .....	1
1.2. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE .....	2
1.3. RESUME .OBJECTIFS DE LA THESE .....	10

## Chapitre2 Une Présentation de la mécanique des Milieux poreux saturés

2.1. INTRODUCTION.....	13
2.1.1. DESCRIPTION D'UN MILIEU POREUX SATURE. ....	14
2.1.2. POROSITE CONNECTE ET POROSITE OCCLUSE.....	14
2.2. DESCRIPTION DE LA DEFORMATION DU SQUELETTE. ....	15
2.2.1. INTRODUCTION. ....	15
2.2.2. GRADIENT DE LA TRANSFORMATION. ....	15
2.2.3. FORMULES DE TRANSPORT. ....	15
2.2.4. TENSEUR DES DEFORMATIONS DE GREEN_LAGRANGE.....	16
2.2.5. TRANSFORMATION INFINITESIMALE ET TENSEUR DES DEFORMATIONS LINEARISE. ....	17
2.3. DESCRIPTION EULERIENNE DU MOUVEMENT ET NOTION DE VECTEUR COURANT RELATIF DE MASSE FLUIDE. ....	17
2.4. NOTION DE DERIVEES PARTICULAIRES ET MATERIELLES.....	18
2.4.1. INTRODUCTION. ....	18
2.4.2. DERIVEE PARTICULAIRE D'UN CHAMP PAR RAPPORT AU SQUELETTE. ....	18
2.4.3. DERIVEE PARTICULAIRE D'UN CHAMP PAR RAPPORT AU FLUIDE. ....	18
2.4.4. DERIVEE PARTICULAIRE PAR RAPPORT AU SQUELETTE D'UNE INTEGRALE DE VOLUME.....	19
2.4.5. DERIVEE PARTICULAIRE PAR RAPPORT AU FLUIDE D'UNE INTEGRALE DE VOLUME. ....	20
2.4.6. DERIVEE MATERIELLE D'UNE INTEGRALE DE VOLUME. ....	20
2.5. CONSERVATION DE LA MASSE EN VARIABLES D'EULER.....	21
2.6. CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT.....	23
2.6.1. FORMULATION DE LA LOI POUR UN MILIEU POREUX SATURE. ....	23
2.6.2. THEOREME D'EULER. ....	24
2.6.3. THEOREME DE LA QUANTITE D'ACCELERATION. ....	25
2.6.4. TENSEUR DES CONTRAINTES DE CAUCHY.....	26
2.6.5. EQUATIONS DU MOUVEMENT. ....	26
2.6.6. COMMENTAIRE.....	27
2.6.7. LOI DE DARCY GENERALISEE. ....	28
2.7. LE COMPORTEMENT POROELASTIQUE LINEAIRE. ....	28
2.8. RESUME. ....	31

## Chapitre3 Formulation Par Eléments Finis

<b>3.1. INTRODUCTION.....</b>	<b>33</b>
<b>3.2. DISCRETISATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT RELATIVES AU SQUELETTE SOLIDE. ....</b>	<b>34</b>
3.2.1. FORME INTEGRALE FAIBLE DES EQUATION DU MOUVEMENT. ....	34
3.2.2. DISCRETISATION SPATIALE . FORME DE GALERKIN. ....	36
<b>3.3. DISCRETISATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT RELATIVES A LA PHASE FLUIDE.38</b>	
3.3.1. FORME INTEGRALE FAIBLE DE L'EQUATION DU MOUVEMENT DE LA PHASE FLUIDE.....	39
3.3.2. DISCRETISATION SPATIALE . FORME DE GALERKIN. ....	40
<b>3.4. THEORIE QUASI-STATIQUE EN FORMULATION U-P. ....</b>	<b>41</b>
<b>3.5. RESUME. ....</b>	<b>43</b>

## Chapitre 4 Intégration des Equations Dans Le Domaine Temporel

<b>4.1. INTRODUCTION.....</b>	<b>45</b>
<b>4.2. CONCEPT D'ELEMENT FINI DE TEMPS. ....</b>	<b>46</b>
4.2.1. PROCESSUS DE RECURRENCE A DEUX POINTS. PROBLEMES DU 1 <sup>ER</sup> ORDRE (THEORIE QUASI STATIQUE DE LA CONSOLIDATION). ....	46
4.2.1.1. Méthode des résidus pondérés. ....	46
4.2.1.2. Méthodes variationnelles. ....	49
4.2.2. PROCESSUS DE RECURRENCE A TROIS POINTS. PROBLEMES DU 2 <sup>EME</sup> ORDRE . ....	50
4.2.2.1. Méthode des résidus pondérés. ....	51
4.2.3. FORME INCREMENTALE DES EQUATIONS EN THEORIE QUASI-STATIQUE. ....	54
4.2.4. FORME INCREMENTALE DES EQUATIONS GENERALES EN DYNAMIQUE. ....	54
<b>4.3. METHODE DES APPROXIMATIONS RATIONNELLES. ....</b>	<b>56</b>
4.3.1. APPROXIMATIONS DE PADE.....	57
4.3.2. APPROXIMATIONS DE NØRSETT . ....	60
<b>4.4. RESUME. ....</b>	<b>62</b>

## Chapitre5 Evaluation De L'erreur

<b>5.1. INTRODUCTION.....</b>	<b>64</b>
<b>5.2. ADMISSIBILITE DE L'APPROXIMATION "CRITERES DE CONVERGENCE." .....</b>	<b>65</b>
<b>5.3. ERREURS PROPRES A LA MODELISATION DES MILIEUX POREUX SATURES .....</b>	<b>66</b>
5.3.1. ERREURS DUES A LA PRESENCE D'UNE FRONTIERE DRAINANTE. ....	66
5.3.2. ERREURS DUES A LA TRONCATURE DU DOMAINE PHYSIQUE. ....	69
5.3.3. ERREURS DUES AU MAUVAIS CONDITIONNEMENT DE LA MATRICE GLOBALE.....	70

5.3.4. ERREURS DUES AU CHOIX DU SCHEMA D'INTEGRATION TEMPOREL.....	71
5.3.4.1. <i>Oscillations et instabilité des méthodes de récurrence à deux points</i> .....	72
5.3.4.2. <i>Oscillations et instabilité des méthodes de récurrence à trois points</i> .....	76
<b>5.4. RESUME.</b> .....	<b>79</b>

## Chapitre6 Mise En Evidence Et Origine Des Oscillations Parasites

<b>6.1. INTRODUCTION</b> .....	<b>82</b>
<b>6.2. POSITION DU PROBLEME.</b> .....	<b>83</b>
<b>6.3. THEORIE QUASI-STATIQUE. SIMULATION DE LA CONSOLIDATION UNIDIMENSIONNELLE (PATCH TEST)</b> .....	<b>84</b>
<b>6.4. THEORIE QUASI-STATIQUE. CAS DE LA CONSOLIDATION BIDIMENSIONNELLE EN DEFORMATION PLANES.</b> .....	<b>88</b>
<b>6.5. RAPPEL: MATRICES ELEMENTAIRES POUR L'ELEMENT QUADRATIQUE STANDARD A 3 NOEUDS</b> .....	<b>91</b>
6.5.1. SIMULATION NUMERIQUE DE LA CONSOLIDATION D'UNE COUCHE D'ARGILE SATUREE (PATCH-TEST). .....	92
<b>6.6. ORIGINE DES OSCILLATIONS PARASITES DE LA SOLUTION.</b> .....	<b>94</b>
6.6.1. ELEMENTS QUADRATIQUES UNIDIMENSIONNELS Q3/3. ....	94
6.6.2. CAS DES ELEMENTS QUADRATIQUES STANDARDS BIDIMENSIONNELS Q8/8. ....	98
<b>6.7. ASPECTS MATHEMATIQUES DU PROBLEME.</b> .....	<b>99</b>
<b>6.8. RESUME .</b> .....	<b>102</b>

## Chapitre7 Réajustement du comportement des éléments Q8/8 Standards

<b>7.1. INTRODUCTION</b> .....	<b>104</b>
<b>7.2. ELEMENTS FINIS ET MODES PARASITES.</b> .....	<b>105</b>
<b>7.3. QUELQUES CONSTATATIONS ELEMENTAIRES.</b> .....	<b>106</b>
<b>7.4. REAJUSTEMENT DU CHAMP DE LA SURPRESSION INTERSTITIELLE.</b> .....	<b>108</b>
7.4.1. TECHNIQUE DE REAJUSTEMENT PAR MOINDRES CARRES. TECHNIQUE "T1".SURFACE BILINEAIRE. ....	108
7.4.2. TECHNIQUE DE REAJUSTEMENT PAR MOINDRES CARRES. TECHNIQUE "T2".SURFACE QUADRATIQUE INCOMPLETE. ....	111
7.4.3. REAJUSTEMENT DIRECT A PARTIR DES POINTS DE GAUSS. TECHNIQUE T3. ....	115
<b>7.5. RESUME.</b> .....	<b>119</b>

## **Chapitre8    Expérimentation Numérique**

<b>8.1. INTRODUCTION.....</b>	<b>121</b>
<b>8.2. PROCEDURE DE RESOLUTION.....</b>	<b>122</b>
<b>8.3. SIMULATION NUMERIQUES.TESTS DE VALIDATIONS.....</b>	<b>124</b>
8.3.1. CAS QUASI STATIQUE DE LA CONSOLIDATION UNIDIMENSIONNELLE.....	124
8.3.2. CAS QUASI STATIQUE DE LA CONSOLIDATION BIDIMENSIONNELLE .....	129
8.3.3. COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UN MILIEU POREUX .....	135
<b>8.4. CONCLUSION.....</b>	<b>139</b>

## Liste des symboles.

### Chapitre 1.

$p$  : Surpression interstitielle  
 $x$  : Variable d'espace  
 $t$  : Variable temps  
 $C_v$   $C_p$  : Coefficient de consolidation  
 $\Delta$  : Opérateur Laplacien  
 $\partial$  : Dérivée partielle .

### Chapitre 2.

$dA$  : Élément d'aire infinitésimale.  
 $E$  : Module de Young  
 $F$  : Densité massique des forces de volumes .  
 $J$  : Jacobien de la transformation .  
 $J_m^n$  : le flux de masse fluide par unité de surface.  
 $k$  : Perméabilité du milieu .  
 $K_s$  : Module de compressibilité des particules solides  
 $K_f$  : Coefficient d' imcompressibilité de la phase fluide .  
 $m$  : Vecteur de composantes [0 0 1]  
 $n$  : Porosité  
 $\bar{n}$  ,  $\bar{N}$  : Normales sortantes  
 $p$  : Surpression interstitielle .  
 $P$  : vecteur Gradient  
 $P_{i\alpha}$  : Composantes du vecteur gradient .  
 $t$  , Variable temps  
 $T$  : Densité des forces surfaciques .  
 $u$  : champ de déplacement des particules solides  
 $U$  : Champ de déplacement des particules fluides  
 $V'$  : Vitesse relative des particules fluides  
 $V^n$  : Vitesse absolue des particules fluides .  
 $V$  : Vitesse absolue des particules solides .  
 $w$  : vecteur courant relatif , vitesse relative des particules fluides par rapport aux particules solides .  
 $X$  : Vecteur position  
 $x_\alpha$  : Composantes du vecteur position .

$d\Omega$  : Élément de volume infinitésimal .  
 $\Gamma$  : Frontière délimitant le domaine  $\Omega$   
 $\Omega$  : Domaine d'étude .  
 $\alpha$ ,  $Q$  : Constantes de Biot .  
 $\varepsilon$  : Tenseur des déformations  
 $\rho_n$  : Masse volumique du fluide

$\gamma$  : Accélération des particules solides .  
 $\dot{(\ )}$  : Dérivée par rapport au temps .  
 $\rho^s$  : Masse volumique des particules solides .  
 $\rho$  : Masse volumique apparente du milieu .  
 $\nu$  : Coefficient de Poisson  
 $\sigma$  : Tenseur des contraintes totales .  
 $\sigma^s$  : Tenseur des contraintes sur la phase solide .  
 $\sigma^{ff}$  : Tenseur des contraintes sur la phase fluide .  
 $\zeta$  : Déformation volumique de la phase fluide.  
 $\mathbf{1}$  : Tenseur unitaire .  
 $\dot{(\ )}$  : Dérivée par rapport au temps .  
 $\partial$  : Dérivée partielle  
 $d$  : Dérivée totale  
 $\otimes$  : Produit tensoriel  
 $\cdot$  : Produit contracté  
 $\wedge$  : Produit vectoriel  
 $\text{Grad}$  ,  $\nabla$  : Opérateur gradient  
 $\text{div}$  : Opérateur Divergence .

### Chapitre 3.

$B_u$  : Matrice élémentaire déformation déplacement.  
 $\mathbf{D}$  : Matrice d'élasticité en déformations planes .  
 $F$  : Forces de volumes .  
 $\{f_u\}$  : Vecteur second membre .  
 $\mathbf{k}$  : Perméabilité du milieu .  
 $[K_{uu}]$  : Matrice de rigidité de la phase solide  
 $[K_{up}]$  : Matrice de couplage Fluide - Solide  
 $[K_{pp}]$  : Matrice d'écoulement de la phase fluide .  
 $L$  : Opérateur de dérivation "div"  
 $[M_{uu}]$  : Matrice masse  
 $\bar{n}$  , : Normale sortante  
 $N_u$  : Fonctions de forme relatives au champ des déplacements des particules solides.  
 $N_p$  : Fonctions de forme relatives au champ de la surpression interstitielle.  
 $\mathbf{p}$  : Surpression interstitielle .  
 $\bar{\mathbf{p}}$  : Vecteur des inconnues nodales relatives à la pression interstitielle.  
 $\mathbf{t}$  : Vecteur des forces de surface .  
 $\mathbf{u}$  : Champ de déplacement des particules solides  
 $\bar{\mathbf{u}}$  : Vecteur des inconnues nodales relatives au déplacement des particules solides.



$\rho_n$  :Masse volumique du fluide  
 $\rho$ :Masse volumique aparente du milieu .  
 $\sigma$ :Tenseur de contraintes  
 $\sigma_{i,j}$ :Composantes du tenseur des contraintes .  
 $\varepsilon$  : Tenseur des déformations  
 $\varepsilon_{i,j}$  :Composantes du tenseur des déformations .  
 $\zeta$ :Déformation volumique de la phase fluide.  
 $\Omega$  : Domaine d'étude .  
 $d\Omega$  :Elément de volume infinitésimal .  
 $\Gamma$  : Frontière délimitant le domaine  $\Omega$   
 $\nabla^T$ :Opérateur gradient transposé .  
 $\alpha, \mathbf{Q}$  :Constantes de Biot .  
 $( \dot{\ } )$  :Désigne une dérivation par rapport au temps .

#### **Chapitre 4 .**

$\mathbf{a}$  : Vecteur champ généralisé .  
 $C_{m,n}$  ,  $D_{m,n}$  : Polynomes de degrés  $n$  et  $m$   
 $\mathbf{F}(\mathbf{z})$  :est une fonction de la variable complexe  $\mathbf{z}$   
 $L_k$  : Polynôme de Laguerre de degré "k "  
 $N_i$  ,  $N_{i+1}$  :Fonctions d'interpolation de la variable temps .  
 $S_n(Z)$  ,  $T_m(Z)$  : Polynomes de degrés  $n$  et  $m$   
 $\xi$  :Coordonnée naturelle par rapport au temps .  
 $\theta$ :Paramètre du scéma d'intégration temporel à deux points.  
 $\pi$  :Désigne une fonctionnelle .  
 $\gamma, \beta$  : Paramètres du schéma d'intégration temporel à trois points

#### **Chapitre 5 .**

$\{a\}$  :Inconnue nodale géométrique relative au champ  $u$  .  
 $e_u$  : Erreur moyenne relative au schéma retenu .  
 $\mathbf{p}$  : Surpression interstitielle .  
 $u(x)$  : Variable champ .  
 $\{y\}$  :Inconnue nodale principale relative au champ  $u$  .  
 $[\Phi]$  : Matrice modale  
 $\theta$ :Paramètre du scéma d'intégration temporel à deux points.  
 $\omega_i$  :Valeur propre associée à l'équation découplée "i"

## **Chapitre 6 .**

**E'** :Module de Young drainé  
 $\bar{C}$  :Coefficient de consolidation .  
**G'** :Module d'élasticité transversal en conditions drainées.  
**k** : Perméabilité du milieu supposé isotrope.  
**L** :Longueur de l' élément  
**m** :Vecteur [0 0 1] .  
 $n_u$  : Nombre d'inconnues nodales reliées à u.  
 $n_p$  :Nombre d'inconnues nodales reliées à p.  
 $N_i(\xi)$  : Fonction de forme .  
**p** : Surpression interstitielle .  
**u** :Champ de déplacement des particules solides .  
**U** :Energie de déformation interne.

$\tau$  : Facteur temps .  
 $\nu'$  :Coefficient de Poisson drainé .  
 $\alpha$  :Coefficient de Biot .  
 $\lambda$  :Valeur propre  
 $\Phi_{i,j}$  : Vecteur propre .

## **Chapitre 7 .**

$N_i$  : Fonctions de forme de l'élément Q8/8.  
 $p_i$  : Valeurs nodales de la surpression interstitielle.  
 $\{P_G\}$  : vecteur des surpression interstitielles aux points de Gauss  
 $\{P\}$  :Vecteur des surpressions nodales non encore réajustées.  
 $[R]$  :Matrice de réajustement  
 $\pi(\xi,\eta)$  :Equation de la surface de la variation de la surpression interstitielle .

## **Chapitre 8 .**

$C_v$  :Coefficient de consolidation .  
**E'** :Module d'Young en conditions drainées .  
 $I_0[z]$  :Fonction de Bessel d'ordre zéro  
**k** :perméabilité du milieu .  
 $p(z,t)$  : Surpression interstitielle à la profondeur z au temps t .  
 $T_v$  : facteur temps .  
 $V_c$  :Vitesse de propagation des ondes de compression .

$\gamma_w$  : Poids volumique du fluide 'eau '.

$1(t)$  : Impulsion uniforme dans le temps

## PREFACE.

Cette étude a pour objectif la formulation d'un élément fini quadratique standard Q8/8, servant à l'étude des problèmes relatifs à la mécanique des milieux poreux saturés.

En réalité la formulation d'un tel élément ne pose aucune difficulté du point de vue mathématique; la mise en oeuvre et les fondements de la méthode des éléments finis font désormais partie des outils quotidiens de bon nombre de chercheurs.

Seulement voilà, la réalité est tout autre et bien qu'en respectant les fameux critères de convergence requis pour tout élément fini, la formulation des éléments quadratiques standards en poro-élasticité se heurte à de sérieux problèmes de convergence de la solution, problèmes qui ont depuis longtemps retenu l'attention des chercheurs.

La question que l'on se pose donc dans cette étude se résume comme suit :

Etant donné que lors de la formulation de ce type d'éléments les critères de convergence étant tous correctement observés, à quoi sont donc dus les oscillations parasites de la solution qui apparaissent lors de la simulation numérique de la consolidation des sols comme observé lors des diverses simulations. Ou encore pourquoi on est aujourd'hui incapable de simuler correctement le passage des ondes sismiques dans des milieux poreux saturés en utilisant ce type d'éléments. On notera au passage que ces problèmes ne sont aucunement rencontrés avec des éléments finis composites qui par définition sont moins riches que les éléments quadratiques standards.

C'est ainsi, que dans la présente recherche, nous mettrons non seulement en évidence l'origine de l'imperfection des éléments quadratiques standards Q8/8, mais on proposera en plus des techniques numériques particulières rendant à ces éléments leur grande fiabilité prévue théoriquement.

## ORGANISATION DE LA THESE.

Pour arriver à la fin escomptée à l'issue de cette étude, il était utile de tracer préalablement mais aussi correctement la voie par laquelle devra être menée cette dernière.

Nous présentons dans ce qui suit les principales étapes qui jalonnent cette thèse .

1. Un aperçu sur le développement des différentes théories rattachées aux sols est donné dans le chapitre premier. Ce chapitre est en fait une étude bibliographique faisant état des principaux travaux expérimentaux et théoriques entrepris dans le domaine.
2. Un exposé théorique complet sur la mécanique des milieux poreux saturé est donné au chapitre deux.  
Ce chapitre, par sa nature purement théorique ,sera censé (faute d'une littérature spécialisée et unifiée dans le domaine) combler un vide trop longtemps négligé.
3. Le troisième chapitre , sera consacré à une présentation des différentes formulation par éléments finis appliquées aux milieux poreux saturés.On s'intéressera en particulier à une variante très appréciée par les chercheurs à savoir la "formulation type **u-p**".
4. Le chapitre quatre , sera lui consacré à la discrétisation dans le domaine temporel de la formulation proposée. On présentera en particulier deux grandes familles de méthodes qui permettent d'intégrer les équations dans le domaine temporel.On aboutit alors à une méthode de résolution incrémentale dans le temps.
5. Etant donné que l'origine de l'imperfection des éléments quadratiques standards semble confuse , il sera utile d'examiner plus en profondeur les principales erreurs qui peuvent surgir lors du processus de résolution. Ceci est tout particulièrement utile dans la mesure ou suite à cette étude , on aura éliminé tout risque d'erreur liée à la méthode de résolution; nous permettant pour la circonstance de nous focaliser sur les véritables causes de l'imperfection des éléments quadratiques standards.
6. Ce chapitre est en réalité la clef de voûte de la présente recherche car c'est autour de ce dernier que s'articule l'ensemble des différents chapitres. En

-

effet dans ce chapitre non seulement on met en évidence les fameuses oscillations observées par plusieurs chercheurs, mais aussi suite à certaines manipulations mathématiques on détermine leurs origine. Plus encore il apparaît que ces oscillations existent aussi bien pour les éléments unidimensionnels que bidimensionnels. On mettra alors en évidence une notion nouvelle que l'on désigne comme "mode parasite mutant" qui se trouve être à l'origine de tous les problèmes que connaissent les éléments quadratiques standards.

7. Ayant déterminé l'origine des imperfections liées aux éléments quadratiques standards , on tentera au chapitre 6 de les éliminer. Ceci est rendu possible à l'aide de techniques mathématiques particulières. A cet effet trois techniques sont développées , deux d'entre elles peuvent être classées dans une seule famille (méthode des moindres carrés) la troisième est par essence totalement différente des deux premières.
8. Ce chapitre , sera consacré à la mise en oeuvre de divers tests de simulation numérique visant à valider l'exactitude et la fiabilité des techniques proposées.

# DEDICACES.

*Je dédie ce modeste travail tout particulièrement à mes bien aimés **Parents** ,en reconnaissance aux innombrables sacrifices qu'ils ont et continuent de faire.*

*A mes deux soeurs Nabila et Leila , et à mon frère Nassim*

*Je le dédie bien sur aussi*

*A mon épouse **Nadjia** , qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance pour sa patience hors du commun*

*A mon Fils **Mohamed Yacine.***

*A toute ma **belle famille** et plus particulièrement **Houria***

*A mes amis dont je ne citerai personne , au risque d'en oublier surement certains*

**Remerciements.**

-

*Je tiens à remercier tout particulièrement mon Directeur de recherche M<sup>r</sup> Abdelkrim Chelghoum pour les précieux conseils qu'il n'a cessé de prodiguer tout au long de cette recherche . Je tiens aussi à souligner son talent inégalable lorsqu'il s'agit d'aborder les problèmes , et mieux encore de les résoudre .Qu'il trouve ici ma profonde et sincère gratitude.*

*Mes vifs remerciements vont à M<sup>me</sup> F.KHARCHI , pour avoir accepté d'examiner ce travail .*

*Je remercie également tous les membres du jury qui m'honorent en acceptant d'examiner ce travail à savoir :*

- M<sup>r</sup> K.BADARI Professeur université de Boumèrdès*
- M<sup>elle</sup> Z.DERRICHE Maître de conférences ENTP . Kouba*
- M<sup>r</sup> F.KAOUA Maître de conférences USTHB*

*Je remercie chaleureusement M<sup>r</sup> A.KHALED Chargé de cours USTHB , d'avoir accepté l'invitation de se joindre au jury en qualité d'invité .*

*Je remercie aussi le Professeur I.M.SMITH de l'université de Manchester du Royaume Uni , pour les précieux documents qu'il m'a "à ses frais envoyé", ainsi que pour sa disponibilité continuelle. J'aurai tant souhaité sa présence aujourd'hui avec nous mais les circonstances ont malheureusement voulu le contraire .*



---

# CHAPITRE 1

---

## Etude bibliographique

### 1.1.Introduction .

Actuellement l'attention des géotechniciens s'oriente de plus en plus vers les problèmes en régime transitoire qui trouvent leurs origines suite à des sollicitations sismiques , de propagation d'ondes de quelque nature que ce soit ou beaucoup plus simplement lors de la consolidation des massifs de sols.

Pour tous les cas cités précédemment , le couplage entre la déformation du milieu solide que l'on assimilera dans la présente étude comme élastique linéaire , et le mouvement du fluide interstitiel est de première importance. De ce fait le champ de contraintes dans un massif de sol est intimement lié au champ de la pression interstitielle régnant dans ce milieu.

Ainsi ,les milieux poreux dans leur diversité peuvent être modélisés comme un milieu bi-phasique composé d'un squelette solide et d'une phase fluide saturant l'espace interstitiel connecté , le tout en interaction mécanique continue.

La connaissance de la réponse de ce type de milieux suite à diverses sollicitations constitue a elle seule l'objectif primordial dans des domaines aussi variés que sont la construction d'ouvrages en génie civil ,propagation d'ondes en sismologie, prospection pétrolière , structures offshore , problèmes de liquéfaction des sables etc.

La mécanique des milieux poreux saturés telle qu'on la connaît de nos jours , n'est arrivée à ce stade de développement qu'après d'innombrables travaux de recherche tant sur le plan théorique qu'expérimental.

Il est par conséquent utile et plus encore loyal de citer les travaux des différents chercheurs ayant contribué de près ou de loin à l'évolution et à la perfection de cette théorie. Cela témoignera en fait de la grande reconnaissance que nous portons envers ces hommes .C'est dans cet axe que s'inscrit l'objectif du présent chapitre.

## 1.2. Etude bibliographique.

La connaissance actuelle dans le domaine des milieux poreux saturés, a atteint un niveau d'évolution considérable comparée aux toutes premières études expérimentales sur la consolidation des sols effectuées au début du siècle dernier par TELFORD [1], qui en 1830 dans l'une de ces expériences chargea une couche d'argile saturée, et nota que le tassement de cette dernière s'accompagnait par l'expulsion de l'eau interstitielle. Ce dernier a en plus noté que ce phénomène était plus ou moins rapide pour tel ou tel type d'argile. TELFORD semblait tout ignorer de la notion de perméabilité qui rappelons le n'était pas encore connue à l'époque.

On notera au passage que la notion de perméabilité prit forme en 1856 suite aux travaux originaux de DARCY (cité par la plupart des textes traitant de la mécanique des sols) sur les phénomènes d'infiltration dans les sols.

Plus tard en 1908, SORBY [2] essaya d'expliquer le phénomène de la consolidation comme conséquence de la variation de la porosité du milieu. Ce dernier n'avait pas tout à fait tort, car à cette époque, on faisait déjà le lien entre porosité et perméabilité. Malheureusement les études de SORBY se résumèrent en de simples constatations expérimentales.

Les premiers travaux expérimentaux plus ou moins sérieux datent de 1910, et ont été réalisés par FRONTARD [3]. Ce dernier réalisa une expérience de consolidation unidimensionnelle à charge constante, puis traça des courbes (teneur en eau - pression interstitielle) ceci dans une tentative visant à classer certains types de sols en fonction de la vitesse d'expulsion de l'eau qu'ils contenaient.

Ceci reflète bien qu'à cette époque déjà on ne pouvait dissocier le phénomène du tassement à celui de l'expulsion de l'eau contenue dans les interstices mais plus encore de la durée de ce phénomène. La nature transitoire du problème commençait à prendre forme.

TERZAGHI et FROHLICH [4], en partant de constatations expérimentales ont développé une théorie complète et cohérente traduisant analytiquement le phénomène de la consolidation unidimensionnelle des sols.

Ce dernier (Terzaghi) écrivit dans l'un de ses mémoires « *Un changement de la pression en un point à l'intérieur d'une couche d'argile causera irrémédiablement une variation de la teneur en eau en ce même point, mais cette variation ne saurait avoir lieu sans l'existence d'un gradient hydraulique qui obligerait l'eau à quitter les vides de façon quasi simultanée. De ce fait, dans le cas de l'argile à cause de sa faible perméabilité, la vitesse d'écoulement de l'eau sera certes petite mais suffisante pour qu'à long terme les pressions interstitielles disparaissent causant par la conséquence un*

*transfert de contraintes au squelette solide qui tout en se déformant (tassement) trouvera un nouvel état d'équilibre stable. »*

La théorie de la consolidation primaire de TERZAGHI et FROHLICH [4] était basée sur les hypothèses simplificatrices suivantes:

1. Couche complètement saturée.
2. Les particules solide ainsi que le fluide interstitiel sont supposés incompressibles.
3. L'écoulement de l'eau suit la loi de DARCY
4. Petits déplacements petites déformations
5. Incréments de déformations et de vitesse etc.. infiniment petits ( Théorie quasi statique).
6. perméabilité  $k$  et Module oedométriques  $E_m$  constants

Sur la base de ces suppositions TERZAGHI et FROHLICH [4] ont arrivés à formuler l'équation différentielle régissant le problème de la consolidation unidimensionnelle des sols. Cette dernière étant du type parabolique similaire à celle régissant le transfert de chaleur dans une barre à une dimension et qui s'écrit:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

$p$  : Surpression interstitielle

$c_v$  : Coefficient de consolidation  $c_v = \frac{kE_m}{\gamma_w}$ .

$x$  : variable d'espace dans le sens de l'écoulement

$t$  : désignant le temps

En dépit de son apparente simplicité, la théorie de la consolidation unidimensionnelle de TERZAGHI [4] présente certaines faiblesses, la principale étant liée au fait que cette théorie ne fasse intervenir qu'une seule composante de déformation ce qui résulte en une analyse séparée (découplée) de la magnitude du tassement et de son évolution dans le temps.

C'est en partant de ces constatations, qu'une extension plus générale et beaucoup plus intéressante que la théorie classique de TERZAGHI fut développée par RENDULIC [5] en 1936. Ce dernier en supposant que la composante volumétrique en termes de contraintes totales suit la même loi de variation dans le temps que la composante volumétrique des contraintes appliquées, il arriva à formuler ce que l'on connaît de nos jours comme étant la théorie de la pseudo-consolidation tridimensionnelle laquelle est régie par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c_p \Delta \cdot p$$

$p$  : Surpression interstitielle

$c_p$  : Coefficient de consolidation.

$\Delta$  : Etant l'opérateur LAPLACIEN

Comme on peut le constater, cette théorie bien que plus générale que la théorie classique de TERZAGHI demeurait tout du moins incapable de faire le lien direct entre la progression des tassements dans le temps et la magnitude de ces derniers.

Aussi cette théorie n'apportait aucun élément d'information quant aux interactions réelles mises en jeu entre la phase solide et le phase fluide. On peut facilement s'en rendre compte en examinant l'équation différentielle régissant cette théorie : la seule inconnue qui apparaît reste la pression interstitielle  $p$ , et ni les contraintes ni les déformations du squelette n'entrent de manière directe dans ladite équation.

Du fait de ces restrictions, la théorie de la pseudo-consolidation de Rendulic fut très peu utilisée comparée à la théorie classique de la consolidation des sols de Terzaghi.

Dans le souci de palier aux incapacités de la théorie de la pseudo-consolidation de Rendulic quant à faire le lien direct entre l'évolution de la déformation du squelette et la dissipation des pressions interstitielles, plusieurs chercheurs ont eu recours à combiner cette dernière avec la théorie de l'élasticité classique exprimée en termes de contraintes totales.

Ainsi MUYARAMA et AKAI [6], en faisant usage de la technique sus citée sont arrivés à résoudre certains problèmes de consolidation bidimensionnelle qui demeuraient jusqu'alors sans solution.

De cette manière la théorie de la pseudo-consolidation tridimensionnelle de Rendulic se rapprochait de plus en plus de la théorie tridimensionnelle de la consolidation des sols.

Notons au passage, qu'à cette époque on ne connaissait pas encore la mécanique des milieux poreux saturés sous sa dénomination actuelle, mais les développements entrepris dans l'étude de la consolidation des sols, laissaient présager l'avènement d'une ère nouvelle où la plupart des problèmes de mécanique des sols allaient être du ressort d'une seule et unique discipline en l'occurrence la mécanique des milieux poreux.

C'est ainsi qu'en 1941 M. BIOT [7] en constatant la faiblesse des théories classiques quant à la prédiction de certains phénomènes et échanges ayant lieu dans les milieux poreux tels que les sols, ce dernier développa une théorie originale prenant en considération la nature bi-phasique du milieu (poro-élasticité).

La formulation de M. BIOT [7] exprimait d'une manière simple et rigoureuse la déformation des sols saturés, ainsi que les échanges permanents de ces derniers avec l'extérieur (expulsion d'eau, transfert de chaleur etc..).

Signalons à cet effet que cette théorie apportait le « chaînon manquant » aux théories classiques de la consolidation en permettant de faire le lien direct entre déformation du squelette solide et comportement de la phase fluide.

De nos jours M.BIOT est unanimement considéré comme le pionnier de la mécanique des milieux poreux, car ce n'est qu'après ses travaux originaux que l'on est réellement parvenu à comprendre la diversité mais aussi la complexité des différents phénomènes ayant lieu dans de tels milieux .

Suite aux travaux de M.BIOT (1941), la mécanique des milieux poreux saturés n'a cessé de connaître des développements considérables, lui offrant plus d'une longueur d'avance sur les théories classiques citées précédemment.

A ce titre, citons les travaux originaux de M.BIOT [8-9] sur la nature anisotrope des milieux poreux saturés, et la manière avec laquelle cette dernière devra être prise en compte dans la pratique, ou encore de l'importance des phénomènes à long terme tels que le fluage ainsi que la relaxation , qui sont tout simplement négligés par les théories classiques.

A la date de parution de ce dernier article, la théorie des milieux poreux saturés telle que formulée par Biot n'était qu'un ensemble d'équations différentielles dont l'intérêt pratique n'était certes pas à prouver .C'est ainsi que bon nombre de chercheurs devenaient de plus en plus sceptiques vis à vis de cette nouvelle théorie surtout que ces derniers demeuraient incapables de trouver une solution analytique pour les problèmes les plus simples.

Et comme le dit le proverbe "A tout seigneur tout honneur" , dans un article datant de la fin de l'année 1956 , M.A.Biot [10] présentait les outils mathématiques (Calcul opérationnel et équations différentielles) à mettre en oeuvre dans la recherche d'une solution aux équations régissant la théorie quasi statique de la consolidation des sols saturés.

Cet article était d'une importance capitale pour la mécanique des milieux poreux saturés ouvrant pour la circonstance la porte aux chercheurs quant à l'intérêt réel de cette discipline .

L'onde de choc suivant cet article ne se fit pas attendre .En effet au début de l'année 1957, JOSSELIN DE JONG[11] proposèrent une solution analytique pour les

problèmes de consolidation des sols dans des conditions axi- symétriques. L'application de cette solution se révéla très pratique pour l'évaluation des tassements sous des ouvrages à symétrie de révolution telles que les réservoirs , tours de refroidissements des réacteurs nucléaires etc. .

En 1960 , MC-NAMEE et GIBSON [12] ont fait de même et ont étudié deux cas de consolidation tridimensionnelle dégénérée (déformation plane, problèmes axi- symétriques) et proposèrent plusieurs solutions analytiques basées sur des approches types « fonctions de déplacements ».L'exemple type que ces derniers ont traité se résume en la consolidation d'un massif de sol infini saturé d'eau , chargé par une densité de charge linéique en sa surface libre .

En 1965 ,SCHIFFMAN et FUNGAROLI [13] ont à leur tour résolu analytiquement le cas de la consolidation tridimensionnelle sous charge tangentielle constante. Cet article mit à jour l'importance des sollicitations horizontales telles que celles produites par le vent , la houle ou les séismes , sur l'évolution des tassements à court et à long terme sous des ouvrages de génie civil.

Nous remarquons à ce niveau , qu'il fallut attendre presque un vingtaine d'années pour que des solutions ne soient apportées aux équations de Biot et ce pour les seuls problèmes quasi statiques. La résolution analytique pour les problèmes dynamiques telles que la propagation d'ondes acoustique , ou d'ébranlement sismiques ne demeurait que pure fiction.

Parallèlement au développement de solutions analytiques aux équations de Biot , la théorie elle même ne demeurait pas statique , mais subissait d'intenses améliorations sous la motivation constante de bon nombre de chercheurs.

A ce titre , citons les travaux de M.ABiot [14-15] , au début de l'année 1962 , lesquels étendaient les équations régissant les phénomènes quasi statiques (consolidation des sols) au cas dynamique afin de traiter certains problèmes aussi complexes que la propagation d'ondes acoustiques voire même sismiques dans de tels milieux

N'oublions pas au passage les travaux de JOSSELIN DE JONG[16] et VERRUIJT [17] .Le premier [16] essaya de raffiner la théorie de BIOT en considérant un module de compressibilité fini pour le fluide interstitiel .Quant au second [17], il s'est particulièrement intéressé aux milieux poreux partiellement saturés pour lesquels le milieu n'étant plus bi-phasique mais triphasique introduisant de ce fait l'effet de l'air contenu dans les pores.

Actuellement la mécanique des milieux poreux saturés est reconnue comme une théorie générale à part entière faisant le point sur le comportement et les échanges dans les milieux poreux saturés.

L'examen des différents articles traitant des solutions analytiques élaborées pour la résolution des équation de Biot, fait ressortir le fait que ces dernières n'intéressaient que quelques cas bien souvent utopiques, inapplicables aux divers problèmes rencontrés en pratique. L'intérêt de cette théorie se trouvait encore une fois sujet à controverse.

La résolution analytique des problèmes dynamiques bidimensionnels et moins encore tridimensionnels relève aujourd'hui de la pure fiction. Car à la complexité mathématique des équations de Biot vient se greffer la diversité des chargements à y inclure .

De plus , la grande variété des cas rencontrés en pratique ne facilitent en aucune manière la recherche d'une représentation analytique de la solution. Ceci dans la mesure ou dans ces cas interviennent des paramètres supplémentaires tels que des conditions aux limites complexes , et d'autres encore qui risqueraient de mettre en péril les fondements même de ladite théorie , on citera par exemple le cas de la non linéarité de la loi de comportement , élastoplasticité , écoulements turbulents .. .

Du moment que les solutions analytiques demeuraient inaccessibles voire même pas envisageables , il fallait à tout prix trouver une solution de rechange qui permettrait de trouver une représentation rationnelle aux problèmes rencontrés.

Fort heureusement , dès le début des années soixante , des développements intéressants dans le domaine de la résolution des systèmes d'équations différentielles sont intervenus et l'avènement de l'ère informatique n'y est certes pas étrangère.

C'est ainsi que les chercheurs se sont systématiquement tournés vers les méthodes de résolution numériques telles que les éléments finis. La puissance de cette méthode et la facilité de sa mise en oeuvre , ont fait qu'elle gagna en l'espace de quelques années la confiance des nombreux chercheurs et spécialistes.

Initialement destinée à la mécanique des structures, principalement dans le domaine de l'aérospatiale ,de la mécanique et du génie civil, cette méthode fut très vite étendue aux milieux continus solides , pour lesquels elle apporta un degré de développement considérable.

La mécanique des milieux poreux quant à elle lui a fallu attendre la fin des années soixantes pour qu'apparaisse la fameuse publication de Sandhu et Wilson (1969)[18] sur la formulation par éléments finis du problème quasi-statique de la consolidation des sols.

Plus tard en (1972) Ghaboussi et Wilson [19] ont proposé une approche variationnelle pour les problèmes dynamiques dans les milieux poreux élastiques ,

ceci en vue d'une formulation par éléments finis .C'est ainsi en (1973) les mêmes auteurs[ 20 ] publièrent un article traitant de l'analyse sismique des barrages en terre , en incluant bien évidemment les phénomènes de l'interaction fluide-solide.

Suite à ces premiers travaux , beaucoup de chercheurs ont essayé chacun à sa manière d'étudier un aspect bien particulier des phénomènes régnant dans les milieux poreux élastiques saturés , mais la plupart des chercheurs se sont focalisés sur les phénomènes quasi statiques relatifs à la consolidation des massifs de sols .

En effet la théorie quasi statique bien que plus simple que la théorie générale trouve d'innombrables applications dans le domaine de la construction en général et du génie civil en particulier. On cite entre autre le tassement qui suit directement la dissipation des pressions interstitielles lors de la construction de remblais , de barrages en terre ou encore sous les fondations d'ouvrages de génie civil.

L'énoncé de tous les travaux entrepris dans ce domaine sortirait du cadre que l'on s'est réservé dans la présente étude. On consultera utilement la Thèse de Magister de M<sup>r</sup> Zourdani [21] "Ecole Nationale Polytechnique" pour un exposé bibliographique détaillé dans ce domaine .

Par souci de brièveté on citera simplement quelques unes des références jugées les plus importantes.

En 1976 R.W.Lewis,G.W.Roberts et O.C.Zienkiewicz [22] ont proposé une méthode de résolution par éléments finis des problèmes de consolidation des sols dans le cas d'écoulements non permanents.

O.C.Zienkiewicz , C.T.Chang ,E.Hinton et K.H.Leung [23]ont publié un article traitant du comportement sous sollicitation sismique d'un barrage en terre à noyau d'argile. Ils examinèrent en particulier le comportement du barrage jusqu'à rupture partielle du noyau .Une loi de comportement non linéaire fut introduite pour la circonstance.

En 1981 O.C.Zienkiewicz [24] présenta lors d'une conférence sur la mécanique des milieux poreux, un résumé des principales formulations par éléments finis ainsi que les différentes manières de leur mise en œuvre. Cet article à lui seul représente une synthèse de pratiquement tous les travaux effectués jusqu'alors dans le domaine de la résolution numérique des problèmes relevant de la mécanique des milieux poreux saturés.

Simultanément aux expérimentations numériques utilisant la méthode des éléments finis , la recherche de solutions analytiques n'était pas abandonnée pour autant.

En1984 Simon, Zienckiewicz et Paul [25] réussirent à trouver une solution analytique au problème très élémentaire de la propagation des ondes longitudinales dans une colonne unidimensionnelle de sol saturé. Les connaissances mathématiques



mises en oeuvre pour la circonstance étaient d'une complexité telle que le lecteur aura tendance à oublier le sens même de l'article. Cette publication a ensuite été utilisée par les mêmes auteurs pour tester différentes formulations par éléments finis dans le domaine de la mécanique des milieux poreux.

Citons aussi une publication importante due à O.C.Zienkiewicz, et T.Shimi [26] traitant de l'analyse dynamique des milieux poreux saturés via les éléments finis. Cet article rassemblait en fait tous les outils mathématiques et numériques à mettre en oeuvre pour arriver à donner une représentation acceptable aux différents phénomènes mis en jeu.

Ainsi, dans un article datant de 1986 O.C.Zienkiewicz et al [27-28], évaluèrent la précision relative à diverses formulations par éléments finis, dans l'étude de la réponse dynamique des milieux poreux saturés. A cet effet, nous pouvons remarquer que dans cet article seuls des modèles unidimensionnels furent utilisés, laissant ainsi subsister plusieurs interrogations sur la fiabilité de ces dites formulations pour les problèmes bi- et tridimensionnels.

Ces dernières années, la mécanique des milieux poreux semble exclusivement retenir l'option "Analyse numérique" comme moyen d'investigation et de recherche à la compréhension de certains phénomènes et d'échanges ayant lieu dans de tels milieux.

Des développements récents incorporent à cette théorie des lois de comportement non linéaires, ou élasto-plastiques du squelette solide. Le comportement de la phase fluide est lui aussi revu en incluant un module de compressibilité fini au fluide interstitiel, écoulements non permanents etc. ..

L'intérêt grandissant que porte les chercheurs à cette discipline on fait qu'elle connaisse en l'espace de quelques années un succès que n'a su prendre la théorie de l'élasticité classique depuis bientôt deux siècles.

### 1.3.Résumé.Objectifs de la thèse

Parmi les articles cités précédemment (ceux relevant de la résolution par simulation numérique des problèmes bidimensionnels en poroélasticité) la quasi totalité des auteurs se contentaient d'utiliser deux catégories bien distinctes d'éléments : les éléments finis *linéaires standards* , et les éléments finis *quadratiques composites* .

La première catégorie d'éléments est caractérisée par une variation linéaire des champs de déplacements et de pression. La seconde quant à elle se contente d'une variation linéaire du champ de la pression pour une variation quadratique du champ de déplacement.

Les performances de ces deux types d'éléments sont largement commentés par Sandhu , Liu et Singh [27]. De plus les mêmes auteurs [27] ont testé une troisième catégorie d'éléments "Les éléments quadratiques standards" caractérisés par la même variation quadratique des champs de pression et de déplacements.

Ils observèrent que le comportement de tels éléments n'était pas celui attendu, surtout que ces derniers sont d'un point de vue strictement mathématique plus riches en qualité de convergence.

Plus particulièrement , le constat émis par Sandhu , Liu et Singh [27] sur les éléments quadratiques standards concernait des oscillations parasites inexplicables de la solution rendant cette dernière inacceptable.

L'intérêt du présent travail se situe entre la nécessité de disposer d'un élément fini suffisamment performant dans la simulation de divers problèmes en poroélasticité mais aussi combler un vide dans la bibliothèque d'éléments utilisés dans ce domaine.

On s'efforcera donc dans un premier temps d'essayer d'expliquer l'origine de l'imperfection des éléments quadratiques standards puis dans un second temps dans la mesure du possible d'y remédier.

## **REFERENCES .**

- [ 1 ] Telford.T, "Inland navigation" ;pp 209-315 in "Edinburgh Encyclopedia " vol 15 .1830
- [ 2 ] Sorby,H. C. ;"On the application of quantitative methods to the study of the structure and history of rocks, Q ,Jnl,Geol,Soc., Vol.64, pp.171-231,1908
- [ 3 ] Frontard . J .; "Notice sur l'accident de la digue des charmes." ,Ann. Ponts Chaussees 9<sup>th</sup> sep, Vol .23,pp.173-280,1910
- [ 4 ] Terzaghi , K.,and O, K , Frohlich,"Theorie der setzung von tonschichten," F.Deuticke ,Leipzig, 1936
- [ 5 ] Rendulic. L., "Porenziffer und poren wasserdruck in tonen ." Bauingenieur , Vol . 17 pp.559-564, 1936
- [ 6 ] Muyarama . S., and Akai . K., " Studies on the failure and settlement of foundations" , Bulletin N°8,Disaster prevention.
- [ 7 ] Biot .M.A., "General theory of three-dimensional consolidation.",Jnl.Appl.Physics.,Vol.12. pp.155-164. february 1941.
- [ 8 ] Biot .M. A. "Theory of stress strain relations in anisotropic viscoelastic solids and relaxation phenomena." , Jnl.Appli.Physics n° 25 , pp.1385-1391 . 1954
- [ 9 ] Biot .M. A. "Theory of deformations of a porous anisotropic viscoelastic solids." , Jnl.Appli.Physics n° 27 1956 , pp.459-467
- [ 10 ] Biot .M. A. "General solutions of the equation of elasticity and consolidation for a porous material".Jnl,Appl,Mech,Vol.23,91-96 .1956
- [ 11 ] G.De.Josselin de Jong . 'Application of stress functions to consolidation problems ' Proc.Fourth . Int . Conf. Soil . Mech . And .sci .found .eng . , vol 1 pp 320-323 . (1957) .
- [ 12 ] Mc Namee . And Gibson R.E., "Displacement functions and linear transformations applied to diffusion through porous elastic media ."Quater.Jnl .of Mech. And Appl. Math., Vol .13, pp.210-227 -(1960)
- [13]R.L.Schiffman and A.A.Fungaroli , 'Consolidation due to tangeantial loads', Proc.Sixth.Int.Conf.Soil Mech,and Foundation Eng.Vol. 2,188-192-1965
- [14] Biot.M .A. 'Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media'.Jnl . Appl. Phys. , 33 , 1482-1498. (1962).
- [ 15 ] Biot.M .A. "Generalized theory of acoustic propagation in porous media", Jnl. Acous. Soc.of America, 34 , 1254-1264 ,1962.
- [16] G.De.Josselin De Jong . 'Consolidatie in die dimensies',LGM,Meolelingen Delft ,The Netherlands,Vol 7 n°3,57-73-1963
- [17]A.Verruijt , 'Elastic storage of aquifers',flow through porous media' .Edited by R.J.M.de Wiest-Academic Press New york - 1968.
- [ 18 ] Sandhu . R.S. and E.L.Wilson , "finite element analysis of seepage in elastic media.", Proc.Am.Soc.Civ.Engrs., Jnl.Engng.Mech.Div. 95 , (em3) (1969).
- [ 19 ] Ghaboussi.J. And Wilson .E.L., "Variational formulation of dynamics of fluid saturated porous elastic solids." , Proc.ASCE, 98 EM4 ,947-963 (1972)

- [ 20 ] Ghaboussi.J. And Wilson .E.L., "Seismic analysis of earth dam-reservoir systems', *Jnl.Soil.Mech. And Found.Div., ASCE* , **SM10** , 849-862 (1973).
- [21] Zourani 'Conolidation des sols par éléments finis' Thèse de Magister Ecole Nationale Polytechnique Alger .1992
- [22] R.W.Lewis ,G.W.Roberts and O.C.Zienckiewicz, ' A nonlinear flow and deformation analysis of consolidation problems',in C.S.Desai (ed) *Numerical Methods in Geomechanics* ,ASCE 1976
- [23] O.C,Zienckiewicz , C.T.Chang ,E.Hinton and K.H.Leung ,'Earth dam analysis for earthquake numerical solution and constitutive relations for nonlinear damage analysis', Conference on design of dams to resist earthquakes ,Inst.Civ.Eng.London, Oct.1980 (Dams and Engineering,pp179-194).
- [24] O.C,Zienckiewicz ,'Coupled problems and their numerical solution' ,Keynote Lecture, pres. at Int.Conf.Coupled Problems,September 1981,University College of Swansea.
- [25] B.R.Simon,O.C.Zienckiewicz, and D.K.Paul,"An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids ",*Int.Jnl.Numer.Anal.Meth.Geomech.* , **8** , 381-398 (1984).
- [26] O.C,Zienckiewicz and T.Shiomi, ' Dynamic behavior of saturated porius media - the generalized biot formulation and it's numerical solution',*Int.Jnl.Anal.Meth.Geomech.*, **8** ,71-96 (1984) .
- [27] B.R.Simon,, J.S.S.Wu, O.C.Zienckiewicz, and D.K.Paul, ' Evaluation of u-w and u-p finite element methods for the dynamic response of saturated porous media using one dimensional models' *Int.Jnl.Numer.Anal.Meth.Geomech.*, **10** ,461-482 1986
- [28 ] B.R.simon , J.S.S.Wu , and O.C.Zienckiewicz, "Evaluation of higher order , mixed and hermitean finite element procedures for dynamic analysis of saturated porous media using one dimensional models ' *Int.Jnl.Numer.Anal.Meth.Geomech.*, **10** ,483-499. (1986).
- [ 29 ] R.S. Sandhu, H .Liu and K .J .Singh " Numerical performance of some finite element schemes for analysis of seepage in porous elastic media" , *Int.Jnl.Anal.Meth.Geomech*-pp177-194 (1977).

<b>1.2. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE</b> .....	<b>2</b>
<b>1.3. RESUME.OBJECTIFS DE LA THESE</b> .....	<b>10</b>

---

---

## CHAPITRE 2

---

### Présentation de la mécanique des milieux poreux saturés.

#### 2.1.Introduction.

La manière avec laquelle sont entrepris les raisonnements quant à la description du comportement des milieux poreux saturés , diffère grandement de celle relative aux milieux continus classiques. Cette différence fondamentale trouve son origine dans la nature même de ces milieux .

En effet, un des principaux concepts sans lequel les développements qui suivent seraient illusoires , consiste à considérer le milieu poreux comme la superposition dans l'espace et dans le temps de deux milieux : L'un représentant le squelette solide l'autre la phase fluide.

L'objet du présent chapitre , est de présenter aussi brièvement que possible ,la manière avec laquelle sont adaptés les outils classiquement utilisés en mécanique des milieux continus à la description de la déformation et du mouvement des milieux poreux saturés.

On s'attachera en plus dans ce chapitre , à la description de la déformation et de la cinématique d'un milieu poreux saturé. On énoncera en l'occurrence les lois de conservation de la masse ainsi que les équations du mouvement relatives aux deux phases fluide et solide qui découlent directement des lois de conservation de la quantité de mouvement.

La phase fluide étant supposée suivre un écoulement laminaire , on énoncera pour cette dernière l'équation générale de conduction de la masse fluide.

Notons aussi que l'intérêt du présent chapitre réside (faute d'une documentation complète et unifiée dans le domaine de la mécanique des milieux poreux saturés) dans un exposé simple et complet de la théorie mathématique des milieux poreux saturés.

Le nombre d'articles traitant de la mécanique des milieux poreux saturés ne cesse de croître de jour en jour. Ceci témoigne de l'intérêt grandissant que suscite désormais cette théorie auprès des chercheurs dans diverses disciplines telles que la prospection pétrolière , aéronautique , mécanique , génie civil etc. .

La grande diversité des publications traitant de ce domaine, fait ressortir une hétérogénéité importante des notations employées , rendant cette théorie encore plus complexe .Ainsi par souci de simplification de l'exposé on citera quelques unes des références les plus classiques à savoir Biot[1-6], Prevost[7-8],Coussy[9-10].

### 2.1.1. Description d'un milieu poreux saturé.

### 2.1.2. Porosité connectée et porosité occluse.

De par sa dénomination , un milieu poreux est constitué par une matrice solide et un espace interstitiel saturé d'un même fluide.

L'espace interstitiel est en réalité constitué de deux ensembles disjoints : L'espace poreux occlus et l'espace poreux connecté.

L'espace poreux connecté , est l'espace par le biais duquel s'effectuent les différents types d'échanges :c'est un milieu continu représentant la phase fluide.

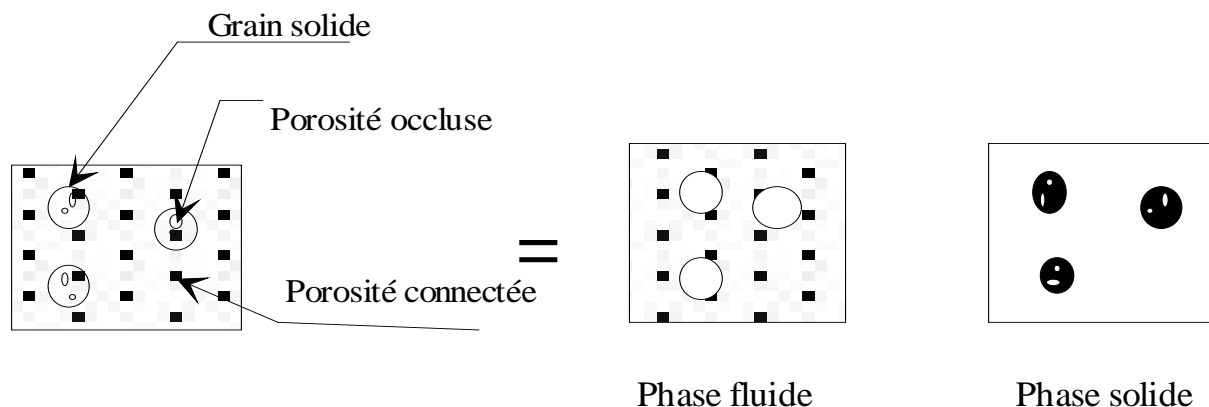
L'espace poreux occlus , est un ensemble de domaines localisées à l'intérieur même des grains composant la phase solide. Cet espace n'est le siège d'aucun échange avec le milieu extérieur.

Dans le cas des sols (Sables et argiles), cet espace est inexistant , mais pour ce qui est des roches il peut constituer l'essentiel de l'espace poreux.

En mécanique des milieux poreux appliquée aux sols , l'espace poreux est complètement représenté par la porosité connectée que l'on notera  $n$  .

Comme nous l'avons souligné en introduction , l'une des principales hypothèses émises pour caractériser un milieu poreux , est la superposition dans l'espace et dans le temps de deux particules de nature différente : Grain solide -fluide interstitiel saturant.

Sur la figure Fig.1-1 , est illustrée l'idée de superposition des deux milieux. Nous constatons entre autre que la matrice solide est définie par simple complémentarité avec la phase fluide.



### Fig.1.1.Constitution d'un milieu poreux saturé.

## 2.2.Description de la déformation du squelette.

### 2.2.1. Introduction.

Sous l'action d'un torseur de forces extérieures , et/ou de gradients de pression du fluide interstitiel , les milieux poreux subissent des déformations.

On notera que la déformation observable et donc accessible aux mesures étant celle du squelette , dont la description est complètement identique à celle que l'on fait pour un milieu continu classique. C'est en partie l'objet de la présente section.

### 2.2.2. Gradient de la transformation.

Dans un repère orthonormé de base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , un point matériel du squelette est repéré par le vecteur position  $\mathbf{X}$  de composantes  $X_\alpha$  ceci dans une position dite de référence A un instant ultérieur 't' , la même particule sera définie par un nouveau vecteur position  $\mathbf{x}$  dans une configuration dite actuelle et de composantes  $x_i$

On écrit :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad x_i = x(\mathbf{X}_\alpha, t) \quad (2.1)$$

Le gradient de la transformation  $\mathbf{P}$  est défini par :

$$\mathbf{P} = \text{Grad} \cdot \mathbf{x} \quad P_{i\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} \quad (2.2)$$

On définit l'inverse et la transposée du gradient de la transformation  $\mathbf{P}$  comme :

$$({}^t\mathbf{P})_{i\alpha} = P_{\alpha i} \quad [\mathbf{P}^{-1}]_{\alpha i} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i} \quad (2.3)$$

Le jacobien de la transformation est donné par :

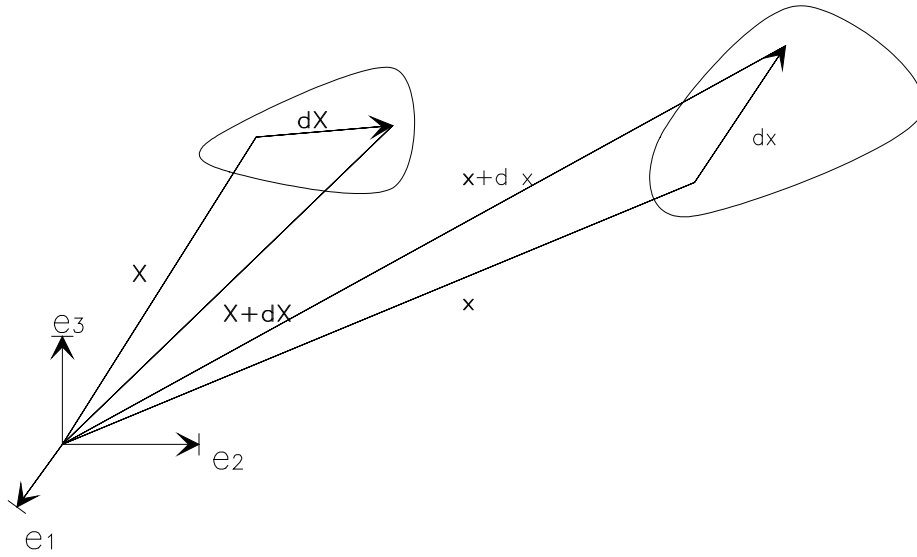
$$J = \det \mathbf{P} \quad (2.4)$$

### 2.2.3. Formules de transport.

Le gradient de la transformation  $\mathbf{P}$  , permet de définir localement la transformation.



Ainsi , deux points infiniment rapprochés repérés par les vecteurs positions  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{X}+d\mathbf{X}$  se trouvent après déformation repérés par les vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}+d\mathbf{x}$  voir Fig 2.2.



**Fig.2.2.Caractérisation de la déformation.**

Par définition même du gradient de la transformation  $\mathbf{P}$  , on peut écrire :

$$d\mathbf{x} = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.5)$$

Par ailleurs , un volume élémentaire matériel  $d\Omega = dX_1 dX_2 dX_3$  devient après déformation à l'instant ' t ' le volume élémentaire matériel  $d\Omega_t = dx_1 dx_2 dx_3$  et on écrit :

$$d\Omega_t = J \cdot d\Omega \quad (2.6)$$

En raisonnant de même pour une surface infinitésimale  $d\mathbf{A}$  de normale unitaire sortante  $\bar{\mathbf{N}}$ , devient après transformation une surface infinitésimale  $d\mathbf{a}$  de normale unitaire sortante  $\bar{\mathbf{n}}$ . On écrit :

$$\bar{\mathbf{n}} \cdot d\mathbf{a} = J \cdot {}^t\mathbf{P}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{N}} dA \quad (2.7)$$

#### **2.2.4. Tenseur des déformations de Green\_Lagrange.**

En vertu de l'équation (2.5) , deux vecteurs infinitésimaux matériels  $d\mathbf{X}, d\mathbf{X}'$  attachés au squelette deviennent après transformation  $d\mathbf{x} , d\mathbf{x}'$  , on peut écrire :

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}' - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}' = 2d\mathbf{X} \cdot \Delta \cdot d\mathbf{X}' \quad (2.8)$$

$\Delta$ : Etant le tenseur symétrique des déformations de Green\_Lagrange donné par :

$$2\Delta = {}^t\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} - \mathbf{1} \quad (2.9)$$

En définissant :

$$\xi = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.10)$$

On aura :

$$2\Delta = \text{Grad} \cdot \xi + {}^t\text{Grad} \cdot \xi + {}^t\text{Grad} \cdot \xi \cdot \text{Grad} \cdot \xi \quad (2.11)$$

### 2.2.5. Transformation infinitésimale et tenseur des déformations linéarisé.

Par définition , une transformation infinitésimale est définie comme :

$$\forall \mathbf{X} \quad \|\text{Grad} \cdot \xi\| \ll 1 \quad (2.12)$$

$\|\cdot\|$  définit une norme du vecteur  $\text{Grad} \xi$

En négligeant les infiniment petits , on pourra écrire l'équation (2.11) comme :

$$2\varepsilon = \text{grad} \cdot \xi + {}^t\text{grad} \cdot \xi \quad (2.13-a)$$

Soit en termes de composantes :

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \quad (2.13-b)$$

$\varepsilon$ :Représente le tenseur des déformations linéarisé

### 2.3.Description eulerienne du mouvement et notion de vecteur courant relatif de masse fluide.

Du fait de la présence de la phase fluide saturante , une surface infinitésimale  $da$  et attachée aux particule du squelette , orientée par la normale unitaire sortante  $\bar{n}$  , se trouve à chaque instant  $t$  traversée par un flux de masse fluide que l'on quantifie par :

$$J_m^{\bar{n}} da = \mathbf{w} \cdot \bar{n} \cdot da \quad (2.14)$$

$J_m^{\bar{n}}$ :Représente le flux de masse fluide par unité de surface.

$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$  : étant le vecteur courant relatif (par rapport au squelette solide) de masse fluide .Ce dernier est défini comme :

$$\mathbf{w} = \rho_n \mathbf{n} V^r \quad (2.15)$$

$V^r(\mathbf{x}, t)$  n'étant autre que la vitesse relative des particules fluides aux particules du squelette coïncidant au même point géométrique au temps " t " .

On notera en plus que la quantité  $\rho_n \mathbf{n}$  , représente la masse volumique apparente du fluide.

## 2.4. Notion de dérivées particulières et matérielles.

### 2.4.1. Introduction.

Du fait de l'existence simultanée au même point géométrique de deux particules fluide et solide ,fait que lors de la caractérisation du mouvement du milieu poreux on devra suivre séparément l'une ou l'autre des particules.

Pour cela , on définit la notion de dérivée particulière par rapport au fluide et au squelette solide .Cette quantité nous permet d'établir conjointement à la notion de dérivée matérielle (relative à la matière dans son ensemble) les lois de conservation de la masse qui représentent un fondement important en mécanique .

### 2.4.2. Dérivée particulière d'un champ par rapport au squelette.

En variables d'Euler , on peut être intéressé par la variation d'un champ quelconque  $g(\mathbf{x}, t)$ . Ce dernier pouvant être n'importe quelle grandeur physique attachée au milieu poreux.

On définit la dérivée particulière par rapport au squelette dans un temps infinitésimal  $dt$  comme :

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \text{grad} \cdot g \cdot \mathbf{V} \quad (2.16)$$

En particulier , si  $g(\mathbf{x}, t)$  s'identifie à la vitesse des particules du squelette , on définit l'accélération  $\gamma$  de ces mêmes particules solides par rapport au squelette , et on écrit :

$$\gamma = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{grad} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \quad (2.17)$$

### 2.4.3. Dérivée particulière d'un champ par rapport au fluide.

De la même manière que précédemment , on peut être amené à traduire la variation d'un champ  $g(\mathbf{x},t)$  au cours du temps en suivant les particules fluides.

On écrit alors :

$$\frac{d^n g}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \text{grad} \cdot g \cdot V^n \quad (2.18)$$

$V^n(\mathbf{x},t)$ : Vitesse absolue du fluide exprimée en variable d'Euler.

D'un point de vue cinématique , on peut écrire :

$$V^n = V + V^r \quad (2.19)$$

En utilisant les équations (2.16), (2.18) et (2.19) on aura :

$$\frac{d^n g}{dt} = \frac{dg}{dt} + \text{grad} \cdot g \cdot V^n \quad (2.20)$$

En faisant usage de l'équation (2.15) on peut écrire :

$$\frac{d^n g}{dt} = \frac{dg}{dt} + \text{grad} \cdot g \cdot \frac{w}{\rho_n \mathbf{n}} \quad (2.21)$$

### 2.4.4. Dérivée particulière par rapport au squelette d'une intégrale de volume.

Comme on le verra par la suite , lors de la formulation de la loi de conservation de la masse , on aura recours à évaluer la variation dans le temps d'intégrales du type :

$$I = \int_{\Omega_t} g(\mathbf{x}, t) d\Omega_t \quad (2.22)$$

En variables d'Euler , on écrit :

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial g}{\partial t} + \text{div}(g \otimes V) \right] d\Omega_t \quad (2.23-a)$$

Ou encore en utilisant le théorème de la divergence :

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial g}{\partial t} d\Omega_t + \int_{\Gamma} g V \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.23-b)$$

### 2.4.5. Dérivée particulière par rapport au fluide d'une intégrale de volume.

De la même manière que précédemment , on définit la dérivée particulière par rapport au fluide d'une intégrale de volume et on écrit :

$$\frac{d^n I}{dt} = \int_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial g}{\partial t} + \text{div}(g \otimes V^{fl}) \right] d\Omega_t \quad (2.24-a)$$

Ou encore après utilisation du théorème de la divergence :

$$\frac{d^n I}{dt} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial g}{\partial t} d\Omega_t + \int_{\Gamma} g V^{fl} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.24-b)$$

### 2.4.6. Dérivée matérielle d'une intégrale de volume.

La notion de dérivée matérielle d'une intégrale de volume d'une variable extensive , est spécifique aux milieux poreux saturés. Cette quantité se révèle être à la base dans la formulation des lois concernant la masse , la quantité de mouvement ainsi que l'énergie.

On désigne donc par DJ la variation dans le temps infinitésimal dt de la grandeur physique  $g(\mathbf{x},t)$  attachée à toute la matière contenue dans le volume élémentaire  $d\Omega_t$

Comme le milieu poreux est à tout instant la superposition de deux milieux fluide-solide, le champ  $g(\mathbf{x},t)$  pourra s'écrire comme :

$$g(\mathbf{x},t) = g^{sk}(\mathbf{x},t) + g^{fl}(\mathbf{x},t) \quad (2.25)$$

$g^{sk}(\mathbf{x},t)$  :Partie liée au squelette solide

$g^{fl}(\mathbf{x},t)$  :Partie liée au fluide interstitiel.

La dérivée matérielle s'écrit donc comme :

$$\frac{DJ}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} g^{sk}(\mathbf{x},t) d\Omega_t + \frac{d^n}{dt} \int_{\Omega_t} g^{fl}(\mathbf{x},t) d\Omega_t \quad (2.26)$$

En utilisant les équations (2.23-a-b) et (2.24-a-b) on aura :

$$\frac{DJ}{dt} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial g}{\partial t} d\Omega_t + \int_{\Gamma} g^{sk} \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Gamma} g^{fl} \mathbf{V}^{fl} \cdot \bar{\mathbf{n}} d\Gamma \quad (2.27-a)$$

que l'on peut aussi écrire comme :

$$\frac{DJ}{Dt} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial g}{\partial t} d\Omega_t + \int_{\Gamma} g \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Gamma} g_m^{\text{fl}} \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{n}} d\Gamma \quad (2.27-b)$$

$g_m^{\text{fl}}(\mathbf{x}, t)$  : Etant la distribution massique de la variable extensive  $g(\mathbf{x}, t)$ .

Ou encore comme :

$$\frac{DJ}{Dt} = \frac{DJ}{dt} + \int_{\Gamma} g_m^{\text{fl}} \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{n}} d\Gamma \quad (2.27-c)$$

## 2.5. Conservation de la masse en variables d'euler.

En l'absence de création de masse fluide , la variation de la densité apparente du milieu est égale au flux (rentrant ou sortant) de masse fluide transitant à travers la frontière  $\Gamma$  du domaine  $\Omega_t$  on écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^{\text{fl}} \mathbf{n} d\Omega_t = - \int_{\Gamma} J_m^{\text{fl}} d\Gamma \quad (2.28)$$

En utilisant l'équation (2.14) et en faisant usage de l'équation (2.27-b) , on pourra réécrire l'équation (2.28) comme :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^{\text{fl}} \mathbf{n} d\Omega_t + \int_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{n}} d\Gamma = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} \rho^{\text{fl}} \mathbf{n} d\Omega_t = 0 \quad (2.29)$$

ou encore :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho^{\text{fl}} \mathbf{n}) d\Omega_t + \int_{\Gamma} (\rho^{\text{fl}} \mathbf{n} \mathbf{V} + \mathbf{w}) \cdot \bar{\mathbf{n}} d\Gamma = 0 \quad (2.30-a)$$

En utilisant le théorème de la divergence , on pourra réécrire (2.30-a) comme :

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho^{\text{fl}} \mathbf{n}) + \text{div} \cdot (\rho^{\text{fl}} \mathbf{n} \mathbf{V} + \mathbf{w}) \right] d\Omega_t = 0 \quad (2.30-b)$$

L'équation (2.30-b) devant rester valable pour tout domaine matériel infinitésimal  $\Omega_t$  on écrira donc les trois équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\rho^f \mathbf{n}) + \text{div} \cdot (\rho^f \mathbf{n} \mathbf{V} + \mathbf{w}) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho^f \mathbf{n}) + \rho^f \mathbf{n} \text{div} \cdot \mathbf{V} + \text{div} \cdot \mathbf{w} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho^f \mathbf{n}) + \text{div} \cdot (\rho^f \mathbf{n} \mathbf{V}^f) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.31- a) \\ (2.31- b) \\ (2.31-c) \end{array}$$

Les équations (2.31) traduisent la loi de conservation de la masse fluide écrite en termes de la densité volumique apparente du fluide  $\rho^f \mathbf{n}$ .

Introduisons à ce niveau la masse volumique totale notée  $\rho$  telle que :

$$\rho = \rho^s(1 - \mathbf{n}) + \mathbf{n} \rho^f \quad (2.32)$$

$\rho^s$ : Masse volumique des grains solides.

En l'absence de création de matière solide , nous pouvons écrire :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \, d\Omega = 0 \quad (2.33)$$

Puis en utilisant l'expression de la dérivée matérielle (2.27-b) on aura :

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\Omega_t + \int_{\Gamma} (\rho \mathbf{V} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0 \quad (2.34)$$

En appliquant à l'équation (2.34) le théorème de la divergence , et du fait que cette équation doit rester valable pour tout domaine matériel infinitésimal  $\Omega_t$  on aura :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V} + \mathbf{w}) = 0 \quad (2.35-a)$$

ou encore :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \text{div} \cdot \rho + \text{div} \cdot \mathbf{w} \quad (2.35-b)$$

Ces équations traduisent la conservation de la matière dans son ensemble.

Le squelette solide étant défini par simple complémentarité avec le milieu fluide , on peut tout de suite affirmer l'existence de la conservation de la masse pour la matière solide.

En utilisant les équations (2.31) (2.32) et (2.35) , on peut écrire la loi de conservation de la masse pour le squelette solide comme :

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho^s(1-\mathbf{n})] + \text{div}[\rho^s(1-\mathbf{n}) \cdot \mathbf{V}] = 0 \quad (2.36-a)$$

soit encore :

$$\frac{d}{dt}[\rho^s(1-\mathbf{n}) + \rho^s(1-\mathbf{n})\text{div}\mathbf{V}] = 0 \quad (2.36-b)$$

## 2.6. Conservation de la quantité de mouvement.

### 2.6.1. Formulation de la loi pour un milieu poreux saturé.

Une hypothèse classique en mécanique consiste à considérer que les efforts extérieurs appliqués pour tout domaine matériel  $\Omega_t$  soient de deux types:

- Des forces de volumes définies par une densité massique notée  $\mathbf{F}(\mathbf{x},t)$ .
- Des forces de surface s'exerçant sur la frontière  $\Gamma$  du domaine dont la densité surfacique est  $\mathbf{T}(\mathbf{x},t, \bar{\mathbf{n}})$ ;  $\bar{\mathbf{n}}$  désignant la normale sortante.

La loi de conservation de la quantité de mouvement ,exprime qu'à tout instant la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement attachée à la matière dans son ensemble (Solide+fluide) dans un volume  $\Omega_t$  est égale à la résultante des efforts extérieurs directement appliqués à la dite matière.

On écrit donc :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} (\rho \mathbf{V} + \rho^f \mathbf{n} \mathbf{V}^r) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{F} d\Omega_t + \int_{\Gamma} \mathbf{T} d\Gamma \quad (2.37)$$

La seconde loi de conservation , est relative à la conservation de la quantité de moment cinétique on écrit alors:



$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} [\mathbf{x} \wedge (\rho \mathbf{V} + \rho^{\text{fl}} \mathbf{n} \mathbf{V}^r)] d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \wedge [\rho \mathbf{F}] d\Omega_t + \int_{\Gamma} \mathbf{x} \wedge \mathbf{T} d\Gamma \quad (2.38)$$

$\wedge$ : Désignant le produit vectoriel.

### 2.6.2. Théorème d'Euler.

En utilisant l'équation (2.27-b) de la dérivée matérielle d'une intégrale de volume, nous pouvons réécrire le premier membre de l'équation (2.37) comme :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} (\rho \mathbf{V} + \rho^{\text{fl}} \mathbf{n} \mathbf{V}^r) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V} + \rho^{\text{fl}} \mathbf{n} \mathbf{V}^r) \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{n}} + (\mathbf{V} + \mathbf{V}^r) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \right] d\Gamma \quad (2.39)$$

En utilisant de même l'équation (2.27-b) au premier membre de l'équation (2.38), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} [\mathbf{x} \wedge (\rho \mathbf{V} + \rho^{\text{fl}} \mathbf{n} \mathbf{V}^r)] d\Omega_t &= \int_{\Omega_t} \left[ \mathbf{x} \wedge \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V} + \rho^{\text{fl}} \mathbf{n} \mathbf{V}^r) \right] d\Omega_t \\ &+ \int_{\Gamma} \left\{ \left[ \mathbf{x} \wedge \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V} + \rho^{\text{fl}} \mathbf{n} \mathbf{V}^r) \right] \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{n}} + \left[ \mathbf{x} \wedge (\mathbf{V} + \mathbf{V}^r) \right] \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{n}} \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.40)$$

A partir des équations (2.39) et (2.40), on énonce le théorème d'Euler :

#### **Théorème d'Euler.**

Dans un référentiel Galiléen, pour tout sous domaine matériel  $\Omega_t$  du système  $\mathbf{S}$  considéré, le torseur des efforts extérieurs est égal à la somme du torseur des vecteurs répartis dans ce même domaine  $\Omega_t$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V} + \rho^{\text{fl}} \mathbf{n} \mathbf{V}^r) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho^s (1 - \mathbf{n}) \mathbf{V} + \rho^{\text{fl}} \mathbf{n} \mathbf{V}^{\text{fl}}) \quad (2.41-a)$$

et du torseur des vecteurs répartis à la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega_t$ .

$$[(\rho V + \rho^f \mathbf{n} V^r)] V \cdot \bar{\mathbf{n}} + [(V + V^r)] \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{n}} = [(\rho^s(1 - \mathbf{n})V) V \cdot \bar{\mathbf{n}} + \rho^f \mathbf{n} V^f \cdot \bar{\mathbf{n}}] \quad (2.41-b)$$

### 2.6.3. Théorème de la quantité d'accélération.

En utilisant le théorème de la divergence , on pourra réécrire les équations de conservation de la quantité de mouvement , et du moment cinétique comme :

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} (\rho V + \rho^f \mathbf{n} V^r) d\Omega_t &= \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho V + \rho^f \mathbf{n} V^r) d\Omega_t + \\ &+ \int_{\Omega_t} \left\{ \text{div}[(\rho V + \rho^f \mathbf{n} V^r) \otimes V] + \text{div}[(V + V^r) \otimes \mathbf{w}] \right\} d\Omega_t \end{aligned} \quad (2.42-a)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} [\mathbf{x} \wedge (\rho V + \rho^f \mathbf{n} V^r)] d\Omega_t &= \left[ \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \wedge \frac{\partial}{\partial t} (\rho V + \rho^f \mathbf{n} V^r) \right] d\Omega_t + \\ &+ \int_{\Omega_t} \left[ \mathbf{x} \wedge \left\{ \text{div}[(\rho V + \rho^f \mathbf{n} V^r) \otimes V] + \text{div}[(V + V^r) \otimes \mathbf{w}] \right\} \right] d\Omega_t \end{aligned} \quad (2.42-b)$$

Ayant en vue l'identité

$$\text{div}(U \otimes V) = \text{grad}[U \cdot V] + U \text{div} V \quad (2.43)$$

Puis en faisant usage des équations de continuité (2.31-a) et (2.35-a) , on en déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho V + \rho^f \mathbf{n} V^r) + \text{div}[(\rho V + \rho^f \mathbf{n} V^r) \otimes V] + \text{div}[(V + V^r) \otimes \mathbf{w}] &= \rho \gamma + \rho^f (\gamma^f - \gamma) = \\ &= \rho^s (1 - \mathbf{n}) \gamma + \rho^f \mathbf{n} \gamma^f \end{aligned} \quad (2.44)$$

Les équations (2.42-a),(2.42-b)et (2.44) permettent une nouvelle formulation des lois de conservation de la quantité d'accélération relatif aux milieux poreux saturés que l'on énonce comme :

#### Théorème de la quantité d'accélération.

Dans un référentiel Galiléen , pour tout sous domaine matériel  $\Omega_t$  du système  $\mathbf{S}$  considéré , le torseur des efforts extérieurs est égal à l'intégrale du torseur des quantités d'accélération élémentaires

$$[\rho^s(1 - \mathbf{n})\gamma + \rho^f \mathbf{n} \gamma^f] d\Omega.$$

Sous forme explicite , on écrit :

$$\int_{\Omega_t} [\rho\gamma + \rho^{\text{fl}}\mathbf{n}(\gamma^{\text{fl}} - \gamma)] d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho\mathbf{F} d\Omega_t + \int_{\Gamma} \mathbf{T} d\Gamma \quad (2.45)$$

$$\int_{\Omega_t} \mathbf{x} \wedge [\rho\gamma + \rho^{\text{fl}}\mathbf{n}(\gamma^{\text{fl}} - \gamma)] d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \wedge \rho\mathbf{F} d\Omega_t + \int_{\Gamma} \mathbf{x} \wedge \mathbf{T} d\Gamma \quad (2.46)$$

#### 2.6.4. Tenseur des contraintes de Cauchy.

L'équation (2.45) peut être réécrite sous la forme suivante

$$\int_{\Omega_t} [\rho\gamma + \rho^{\text{fl}}\mathbf{n}(\gamma^{\text{fl}} - \gamma) - \rho\mathbf{F}] d\Omega_t = \int_{\Gamma} \mathbf{T} d\Gamma \quad (2.47)$$

##### Lemme de tétraèdre.

Partant de l'existence d'une équation de la forme  $\int_{\Omega_t} h(\mathbf{x}, t) d\Omega_t = - \int_{\Gamma} f(\mathbf{x}, t, \bar{\mathbf{n}}) d\Gamma$

vraie quelque soit le volume  $\Omega_t$ , alors la fonction  $f$ , peut être mise sous la forme d'une fonction linéaire des composantes  $\bar{n}_i$  de la normale  $\bar{\mathbf{n}}$ .

$$f(\mathbf{x}, t, \bar{\mathbf{n}}) = f_i(\mathbf{x}, t) \cdot \bar{n}_i$$

En raison des hypothèses faites sur  $\mathbf{T}$ , en appliquant le lemme du tétraèdre, on en déduit l'existence d'un tenseur  $\sigma$ , que l'on appelle communément tenseur des contraintes totales de Cauchy et tel que :

$$\sigma \cdot \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{T} \quad (2.48)$$

#### 2.6.5. Equations du mouvement.

En substituant l'équation (2.48) dans l'équation (2.45), puis en utilisant le théorème de la divergence, on obtient :

$$\int_{\Omega_t} [\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho(\mathbf{F} - \boldsymbol{\gamma}) - \rho^n \mathbf{n}(\boldsymbol{\gamma}^n - \boldsymbol{\gamma})] d\Omega_t \quad (2.49)$$

Cette équation étant valable pour tout sous domaine  $\Omega_t$  on aura :

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho(\mathbf{F} - \boldsymbol{\gamma}) - \rho^n \mathbf{n}(\boldsymbol{\gamma}^n - \boldsymbol{\gamma})$$

ou en terme de composantes  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho(F_i - \gamma_i) - \rho^n \mathbf{n}(\gamma_i^n - \gamma_i)$  (2.50-a)

Que l'on peut tout aussi écrire comme :

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{F} - \rho^s (1 - \mathbf{n}) \boldsymbol{\gamma} - \rho^n \mathbf{n} \boldsymbol{\gamma}^n \quad (2.50-b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i - \rho^s (1 - \mathbf{n}) \gamma_i - \rho^n \mathbf{n} \gamma_i^n$$

Les équation (2.50) sont communément appelées équations du mouvement propres aux milieux poreux saturés.

### 2.6.6. Commentaire.

Il est utile de signaler à ce niveau que le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  est un tenseur qui ne fait pas la distinction entre les contraintes supportées par les éléments solides constitutifs du squelette et celles supportées par les particules fluides.

Il est parfois utile de décomposer ce tenseur des contraintes en deux tenseurs : l'un affecté à la matrice solide , l'autre au fluide interstitiel .

En notant par  $\boldsymbol{\sigma}^s$  et  $\boldsymbol{\sigma}^{ff}$  les tenseurs des contraintes moyennes prévalant respectivement dans les grains solides constitutifs du squelette et dans le fluide , cette décomposition revient donc à poser :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^s (1 - \mathbf{n}) + \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma}^{ff} \quad (2.51)$$

En utilisant le fait que le tenseur des contraintes moyennes  $\boldsymbol{\sigma}^{ff}$  , se réduit à un tenseur sphérique hydrostatique  $\boldsymbol{\sigma}^{ff} = -\mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{1}}$  ( $\mathbf{p}$  pression interstitielle,  $\bar{\mathbf{1}}$  tenseur unitaire sphérique) on aura alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^s (1 - \mathbf{n}) - \mathbf{n} \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{1}} \quad (2.52)$$

### 2.6.7. Loi de Darcy généralisée.

L'une des hypothèses couramment retenue dans l'étude des écoulements d'eau dans les sols , est la nature laminaire de ces derniers .

Ainsi , l'écoulement de l'eau se trouve régi par la loi de Darcy , laquelle en prenant en considération les efforts d'inertie s'écrit comme:

$$-\text{grad} \cdot \mathbf{p} + \rho^f \mathbf{F} = \mathbf{k}^{-1} \dot{\mathbf{w}} + \rho^f \ddot{\mathbf{u}} + \rho^f \frac{\ddot{\mathbf{w}}}{\mathbf{n}} \quad (2.53)$$

Dans cette équation ,

$\mathbf{F}$ : Forces de volume

$\mathbf{u}$  :Champ de déplacement des particules solides.

$\mathbf{w}$ : déplacement relatif de la phase fluide par rapport à la phase solide

on écrit aussi :  $\mathbf{w} = \mathbf{n}(\mathbf{U} - \mathbf{u})$

$\mathbf{U}$  : Champ de déplacement des particules fluides

Le (  $\dot{\quad}$  ) désigne l'opération de dérivation par rapport au temps d'ou :

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \quad \ddot{\mathbf{w}} = \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad \ddot{\mathbf{u}} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} .$$

### 2.7.Le comportement poroélastique linéaire.

Les équations du mouvement établies précédemment ne peuvent à elles seules fournir la réponse d'un milieu poreux à une sollicitation donnée.

Il faut inclure à ces dernières les équations constitutives propres à chaque phase , équations qui relient directement les déformations de chaque phase aux champs de déplacements qui lui sont associés.

Ces relations sont données sous forme explicite comme suit :

■ Concernant la phase solide.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u} \quad (2.54)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$  représente le vecteur des déformations du squelette solide.

$\mathbf{L}$  : Opérateur de dérivation.

$\mathbf{u}$  : Vecteur des déplacements

■ Concernant la phase fluide

$$\zeta = \nabla^T \cdot \mathbf{w}. \quad (2.55)$$

$\zeta$ , représentant la déformation volumique de la phase fluide.

$\nabla^T$  : Transposée du vecteur gradient

$\mathbf{w}$  : Vecteur déplacement relatif des particules fluides par rapport aux particules solides

Aux relations précédentes doivent venir se rattacher des relations constitutives , qui établissent la relation entre la contrainte régnant dans chaque phase aux déformations correspondantes.

Diverses formes de relations constitutives sont de nos jours disponibles . Il faut néanmoins souligner que dans le cadre de la présente étude on se restreindra au comportement élastique linéaire ; toutefois des effets de non linéarité ou d'anisotropie peuvent facilement être inclus sans pour autant changer la validité des équations générale de la théorie. D'une manière générale la loi constitutive pour la phase solide s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \alpha \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} \quad (2.56-a)$$

$$\text{ou encore : } \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{D} + \alpha^2 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^T) + \alpha \mathbf{Q} \mathbf{m} \cdot \zeta \\ \mathbf{p} = \alpha \mathbf{Q} \mathbf{m}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{Q} \cdot \zeta \end{cases} \quad (2.56-b)$$

$\mathbf{D}$  , représente la matrice des constantes élastiques en condition drainée.

Il faut souligner que contrairement à la théorie de la mécanique des milieux continus , la mécanique des milieux poreux nécessite la définition de quatre [04] propriétés mécaniques bien distinctes : le module d'Young  $E$  , le coefficient de Poisson ceci pour ce qui est de la matrice  $\mathbf{D}$  , en plus deux autre quantités supplémentaires introduites par Biot [I.8] à savoir  $\alpha$  et  $\mathbf{Q}$ .

$$\text{Avec: } \quad \mathbf{n} \leq \alpha \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 < \mathbf{Q} \leq \infty \quad (2.57)$$

On introduit à ce niveau la constante de compressibilité volumique relative à la phases solide, soit  $\mathbf{K}_s$  cette constante on aura:

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}_s \mathbf{m}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.58)$$

Dans un article traitant de la résolution analytique des problèmes dynamiques en poroélasticité Simon et al [11 ] ont montré que

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 - \frac{\mathbf{K}_D}{\mathbf{K}_s} \\ \text{et} \\ \frac{1}{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{K}_f} + \frac{\alpha - \mathbf{n}}{\mathbf{K}_s} \end{array} \right. \quad (2.59)$$

La constante  $\mathbf{K}_D$  est donnée par :

$$\mathbf{K}_D = \frac{\mathbf{E}}{3(1-2\nu)}$$

$\mathbf{K}_f$  , désignant la constante de compressibilité de la phase fluide.

## **2.8. Résumé.**

De ce qui vient d'être exposé , nous pouvons dès lors apprécier les différences qui existent entre la théorie classique des milieux continus et la théorie des milieux poreux saturés.

De plus nous disposons maintenant des outils nécessaires pour pousser plus loin la présente recherche.

L'objectif du prochain chapitre sera consacré à la discrétisation de la dimension espace aboutissant ainsi à la formulation par éléments finis.



**REFERENCES.**

- [1] Biot .M .A., "general theory of three-dimensional consolidation." Jnl. Appl. Physics., Vol. 12. pp. 155-164. February 1941.
- [ 2 ] Biot .M. A. "Theory of stress strain relations in anisotropic viscoelastic solids and relaxation phenomena." , Jnl. Appli. Physics N° 25 1954 , pp. 1385-1391
- [ 3 ] Biot .M. A. "Theory of deformations of a porous anisotropic viscoelastic solids." , Jnl. Appli. Physics N° 27 1956 , pp. 459-467
- [ 4 ] Biot .M. A. And .D.G. Willis 'The elastic coefficient of the theory of consolidation ' Jnl. Appl. Phys . , Vol 24 , pp. 594-601 .(1957).
- [ 5 ] Biot.M .A. 'Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media'. Jnl . Appl. Phys. , 33 , 1482-1498. (1962).
- [ 6 ] Biot.M .A. ."generalized theory of acoustic propagation in porous media", Jnl. Acous. Soc. of America, 34 , 1254-1264 , 1962.
- [ 7 ] J.H. Prevost . 'Mechanics of continuous porous media ' , Int , Jnl , Eng , Sci . , 8 , 787-800 (1980).
- [ 8 ] J.H. Prevost . 'Non linear transient phenomena in saturated porous media ' . Comp , Meth , Appl , Mech . Eng . (1982)
- [ 9 ] O. Coussy 'Mécanique des milieux poreux ' technip Paris 1991
- [ 10 ] O. Coussy 'Mécanique des milieux poreux ' Cours de L'ENPC . Paris 1997 .
- [11] B.R. Simon, O.C. Zienkiewicz, and D.K. Paul, "An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids ", Int. Jnl. Numer. Anal. Meth. Geomech. , 8 , 381-398 (1984).

---

## CHAPITRE 3

---

### Formulation par éléments finis.

#### 3.1.Introduction.

Dans ce chapitre , on se consacrera à l'élaboration de la formulation type éléments finis et ce en vue de donner une représentation numérique fiable au comportement des milieux poreux saturés.La discrétisation concernera exclusivement la dimension espace.

Les premiers travaux visant à modéliser les milieux poreux saturés sont ceux de Sandhu et al [1] relatifs à la modélisation des problèmes quasi-statiques .Par la suite plusieurs autres auteurs ont chacun à sa manière proposé une formulation propre afin de modéliser les milieux poreux saturés , on citera Ghaboussi[2] , Prevost[3] et Zienkiewicz[4-5-6] c'est l'approche de ce dernier qui sera retenue dans le cadre de cette étude.

Une fois le type de formulation retenu , il existe plusieurs approches quant au choix des variables à retenir lors d'une représentation par éléments finis.En effet , nous avons remarqué au chapitre précédent relatif à la présentation de la mécanique des milieux poreux saturés , qu'il existait trois champs de variables indépendantes judicieusement couplés. Il s'agit en fait des:

1. Champ de déplacement des particules solides noté " $\mathbf{u}$ ".
2. Champ de déplacement des particules fluides noté " $\mathbf{U}$ ".
3. Champ de la pression interstitielle noté " $\mathbf{p}$ ".

Il apparaît évident qu'une représentation numérique correcte irait à prendre en considération les trois champs simultanément. Seulement voila , dans la plupart des problèmes pratiques , on ne soucie guère de la variation du champ de déplacement des particules fluides " $\mathbf{U}$ " , et seuls les champs " $\mathbf{u}$ " et " $\mathbf{p}$ " sont retenues dans l'analyse car ce sont ces seuls champs , qui donnent le sens recherché dans toute analyse visant à définir la distribution des contraintes dans le domaine étudié.

De plus la formulation type " $\mathbf{u-p}$ " est tout à fait recommandée pour des milieux de faible perméabilité qui impose la nullité de la vitesse relative du fluide " $\dot{\mathbf{w}}$ " par rapport au squelette solide. Notons au passage que les mérites de la formulation " $\mathbf{u-p}$ " ont été longuement énoncés au chapitre premier.

On s'attachera donc dans ce chapitre à détailler les étapes menant à la formulation type " $\mathbf{u-p}$ " relative au comportement des milieux poreux saturés .

### 3.2. Discretisation des équations du mouvement relatives au squelette solide.

#### 3.2.1. Forme intégrale faible des équations du mouvement.

Reprenons l'équation du mouvement (2.50-c) , et écrivons la sous la forme légèrement modifiée suivante

$$L^T \sigma + \rho F - \rho \ddot{\mathbf{u}} - \rho^n \ddot{\mathbf{w}} = 0 \quad (3.1)$$

$L^T$ : Désignant l'opérateur de dérivation  $L^T = \text{div}$

Pour un milieu faiblement perméable pour lequel on peut affirmer que l'accélération relative du fluide  $\ddot{\mathbf{w}}$  est identiquement nulle on pourra réécrire l'équation (3.1) comme:

$$L^T \sigma + \rho F - \rho \ddot{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.2-a)$$

Soit en termes de composantes comme :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho F_1 - \rho \ddot{u}_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho F_2 - \rho \ddot{u}_2 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho F_3 - \rho \ddot{u}_3 = 0 \end{cases} \quad (3.2-b)$$

Les équation (3.2-a-b) devant etres vérifiées partout dans le domaine  $\Omega_t$  , appliquons à ces dernières l'équation intégrale suivante :

$$\int_{\Omega_t} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}(\mathbf{u}) \, d\Omega = 0 \quad (3.3)$$

ou :

$\delta \mathbf{u}^T = \langle \delta u, \delta v, \delta w \rangle$ : désigne un vecteur arbitraire.

$\mathbf{A}(\mathbf{u})$ : est la forme compacte des équations du mouvement (3.2).

On écrit donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_i} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{A}(\mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega_i} \left[ \delta \mathbf{u} \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho F_2 - \rho \ddot{\mathbf{u}}_2 \right) \right] + \\
\left[ \delta v \left( \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho F_2 - \rho \ddot{\mathbf{u}}_2 \right) \right] + \\
\left[ \delta w \left( \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho F_3 - \rho \ddot{\mathbf{u}}_3 \right) \right] d\Omega = 0
\end{aligned} \quad (3.4)$$

### Formules de Green-Zienkiewicz.

Les formules de Green-Zienkiewicz permettent de transformer une intégrale sur le volume en une somme de deux intégrales l'une sur le même volume , l'autre sur le contour du même volume on écrit donc :

$$\int_{\Omega_i} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \, d\Omega = - \int_{\Omega_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Psi \, d\Omega + \int_{\Gamma} \Phi \cdot \Psi \bar{\mathbf{n}} \, d\Gamma$$

En appliquant ainsi les précédentes formules d'intégration à l'équation (3.4) , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
- \int_{\Omega_i} \left[ \sigma_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} (\delta u) + \sigma_{12} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} (\delta v) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\delta u) \right) + \right. \\
\left. + \sigma_{22} \frac{\partial}{\partial x_2} (\delta v) + \sigma_{13} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} (\delta w) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\delta u) \right) + \sigma_{33} \frac{\partial}{\partial x_3} (\delta w) + \sigma_{23} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} (\delta w) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\delta v) \right) \right] d\Omega + \\
+ \int_{\Gamma} [\delta u (\sigma_{11} \bar{n}_{x1} + \sigma_{12} \bar{n}_{x2} + \sigma_{13} \bar{n}_{x3}) + \delta v (\sigma_{12} \bar{n}_{x1} + \sigma_{22} \bar{n}_{x2} + \sigma_{23} \bar{n}_{x3}) + \\
\delta w (\sigma_{13} \bar{n}_{x1} + \sigma_{22} \bar{n}_{x2} + \sigma_{33} \bar{n}_{x3})] d\Gamma + \int_{\Omega_i} \delta \mathbf{u} (\rho F_1 - \rho \ddot{\mathbf{u}}_1) + \delta v (\rho F_2 - \rho \ddot{\mathbf{u}}_2) + \delta w (\rho F_3 - \rho \ddot{\mathbf{u}}_3) = 0
\end{aligned} \quad (3.5)$$

Si l'on choisit comme vecteur "u" , les composantes du champ de déplacement du squelette solide (ceci est tout à fait possible du fait que le vecteur est arbitraire) , et en observant que :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} \delta u = \delta \varepsilon_{11} ; \frac{\partial}{\partial x_2} \delta v = \delta \varepsilon_{22} ; \frac{\partial}{\partial x_3} \delta w = \delta \varepsilon_{33} \\
\delta \varepsilon_{12} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} (\delta v) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\delta u) \right) ; \delta \varepsilon_{13} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} (\delta w) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\delta u) \right) ; \delta \varepsilon_{23} = \left( \frac{\partial}{\partial x_2} (\delta w) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\delta v) \right)
\end{aligned}$$

On pourra dès lors réécrire l'équation (3.5) sous forme condensée suivante :

$$\int_{\Omega_t} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega_t} \delta \mathbf{u}^T \rho \mathbf{F} d\Omega + \int_{\Omega_t} \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{n}} d\Gamma = 0 \quad (3.6)$$

Avec :

$\delta \mathbf{u}^T = \langle \delta u, \delta v, \delta w \rangle$  Vecteur champ de déplacement des particules fluides.

$\boldsymbol{\sigma}$  : Vecteur des contraintes dites totales.

$\boldsymbol{\varepsilon}$  : Vecteur des déformations du squelette solide.

$\mathbf{t}$  : Vecteur des forces de surface .

Introduisons à ce niveau la loi de comportement régissant le milieu poreux saturé équation (2.56-a) que l'on rappelle à ce niveau

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \alpha \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{p}$$

On pourra alors réécrire l'équation (3.6) comme :

$$\int_{\Omega_t} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega_t} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \alpha \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} d\Omega - \int_{\Omega_t} \delta \mathbf{u}^T \rho \mathbf{F} d\Omega + \int_{\Omega_t} \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{n}} d\Gamma = 0 \quad (3.7)$$

L'équation (3.7) n'est en fait autre que le principe des travaux virtuels appliqué cette fois ci aux milieux que sont les milieux poreux saturés.

### 3.2.2. Discrétisation spatiale . Forme de Galerkin.

Introduisons maintenant la discrétisation spatiale des grandeurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{p}$ , et écrivons :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \bar{\mathbf{u}} \quad \text{et} \quad \mathbf{p} = \mathbf{N}_p \bar{\mathbf{p}} \quad (3.8)$$

$\mathbf{N}_u$  : Fonctions de forme relatives au champ " $\mathbf{u}$ " des déplacements des particules solides.

$\bar{\mathbf{u}}$  : Vecteur des inconnues nodales relatives au déplacement des particules solides.

$N_p$  : Fonctions de forme relatives au champ "p" de la pression interstitielle.

$\bar{\mathbf{p}}$  : Vecteur des inconnues nodales relatives à la pression interstitielle.

Comme il est de coutume dans des procédures de résolution par éléments finis , écrivons la relation déformation - déplacement .

Soit donc :

$$\varepsilon = B_u \bar{\mathbf{u}} \quad (3.9)$$

$B_u$  :Matrice élémentaire déformation déplacement.

En vertu de la relation traduisant la loi de comportement en poro élasticité linéaire équation (2- 56 ) , et des équation (3-8) , le principe des travaux virtuels devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \delta \bar{\mathbf{u}}^T B_u^T D B_u \bar{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega_i} \delta \bar{\mathbf{u}}^T B_u^T \alpha \cdot m \cdot N_p \bar{\mathbf{p}} d\Omega - \int_{\Omega_i} \delta \bar{\mathbf{u}}^T N_u^T \rho F d\Omega + \\ + \int_{\Omega_i} \delta \bar{\mathbf{u}}^T N_u^T \rho N_u \ddot{\bar{\mathbf{u}}} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \bar{\mathbf{u}}^T N_u^T \mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{n}} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

En simplifiant par  $\delta \bar{\mathbf{u}}^T$  , nous obtenons l'équation matricielle suivante :

$$[M_{uu}] \left\{ \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \right\} + [K_{uu}] \left\{ \bar{\mathbf{u}} \right\} + [K_{up}] \left\{ \bar{\mathbf{p}} \right\} = \left\{ f_u \right\} \quad (3.11)$$

Avec :

$$\begin{aligned} [M_{uu}] &= \int_{\Omega} N_u^T \rho N_u d\Omega & [K_{uu}] &= \int_{\Omega_i} B_u^T D B_u d\Omega \\ [K_{up}] &= \int_{\Omega_i} B_u^T \alpha \cdot m \cdot N_p d\Omega & \left\{ f_u \right\} &= \int_{\Omega_i} N_u^T \rho F d\Omega - \oint_{\Gamma} N_u^T \mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{n}} d\Gamma \end{aligned}$$

### 3.3. Discretisation des équations du mouvement relatives a la phase fluide.

Dans ce paragraphe on établit la manière avec laquelle on arrive à la discrétisation des équations du mouvement relatives à la phase fluide en formulation "**u-p**".

Rappelons à ce niveau la loi de Darcy qui s'écrit comme :

$$\text{grad} \cdot \mathbf{p} + \rho^f F = k^{-1} \dot{\mathbf{w}} + \rho^f \ddot{\mathbf{u}} + \rho^f \frac{\ddot{\mathbf{w}}}{\mathbf{n}} \quad (2.53)$$

Nous savons qu'en formulation "**u-p**", on suppose que la vitesse relative du fluide interstitiel est constante de sorte que l'on a  $\ddot{\mathbf{w}} = 0$ . De cette manière l'équation de Darcy peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\text{grad} \cdot \mathbf{p} + \rho^f F - k^{-1} \dot{\mathbf{w}} - \rho^f \ddot{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.12)$$

Sachant que  $\varepsilon = \mathbf{B}_u \cdot \bar{\mathbf{u}}$  et  $\zeta = \nabla^T \mathbf{w}$

$\zeta$ : Déformation volumique de la phase fluide.

$\nabla^T$ : Opérateur gradient  $\nabla^T = \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_3} \right\rangle$ .

En utilisant l'équation (2.53) et suite à certaines manipulations on pourra réécrire l'équation (3.12) comme :

$$\nabla^T \mathbf{k} \nabla \cdot \mathbf{p} - \mathbf{Q}^{-1} \dot{\mathbf{p}} + \nabla^T \mathbf{k} \rho^f F + \alpha \mathbf{m}^T \dot{\varepsilon} - \nabla^T \mathbf{k} \rho^f \ddot{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.13)$$

Sous forme éclatée l'équation du mouvement de la phase fluide s'écrit comme :

$$k_1 \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x_2} + k_3 \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x_3} + \nabla^T \mathbf{k} \rho^f \mathbf{F} - \mathbf{Q}^{-1} \dot{\mathbf{p}} + \alpha \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_1}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_2}{\partial x_2} + \alpha \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_3}{\partial x_3} - \rho^f k_1 \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_1}{\partial x_1} - \rho^f k_2 \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_2}{\partial x_2} - \rho^f k_3 \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_3}{\partial x_3} = 0 \quad (3.14)$$

### 3.3.1. Forme intégrale faible de l'équation du mouvement de la phase fluide.

L'équation (3.14) devant être vérifiée partout dans le domaine d'étude  $\Omega_t$ , écrivons comme pour la phase solide la forme intégrale (3.3), qui pour toute fonction arbitraire  $\bar{w}$  s'écrit comme :

$$\int_{\Omega_t} \bar{w} \mathbf{A}(\mathbf{p}) \, d\Omega = 0 \quad (3.15-a)$$

Avec  $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ : Forme compactée de l'équation du mouvement de la phase fluide.

Sous forme développée l'équation précédente s'écrit comme :

$$\int_{\Omega_t} \bar{w} \left[ k_1 \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x_1^2} + k_2 \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x_2^2} + k_3 \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x_3^2} + \nabla^T \mathbf{k} \rho^f \mathbf{F} - \mathbf{Q}^{-1} \dot{\mathbf{p}} + \alpha \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_1}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_2}{\partial x_2} + \alpha \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_3}{\partial x_3} - \rho^f k_1 \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_1}{\partial x_1} - \rho^f k_2 \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_2}{\partial x_2} - \rho^f k_3 \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_3}{\partial x_3} \right] d\Omega = 0 \quad (3.15-b)$$

En utilisant le théorème de Green-Zienkiewicz nous arrivons à la forme intégrale faible de l'équation du mouvement relative à la phase fluide qui s'écrit dans ce cas comme :

$$\int_{\Omega_t} \left[ k_1 \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_2} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} + k_3 \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_3} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_3} \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \left[ \bar{w} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \bar{\mathbf{n}}_1 + \bar{w} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2} \bar{\mathbf{n}}_2 + \bar{w} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_3} \bar{\mathbf{n}}_3 \right] d\Gamma + \int_{\Omega_t} \bar{w} \left[ \nabla^T \rho^f \mathbf{k} \mathbf{F} - \mathbf{Q}^{-1} \dot{\mathbf{p}} + \alpha \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_3}{\partial x_3} \right) - \rho^f \left( k_1 \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_1}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_2}{\partial x_2} + k_3 \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_3}{\partial x_3} \right) \right] d\Omega \quad (3.16)$$



### 3.3.2. Discrétisation spatiale . Forme de Galerkin.

En utilisant la discrétisation spatiale des différentes grandeurs équation (3.8 ) et tout en choisissant l'ensemble des fonctions  $\bar{\mathbf{w}}$  identiquement égales à  $N_p$  l'équation (3.16) donne :

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega_t} \nabla N_p^T \mathbf{k} \nabla^T N_p \ddot{\bar{\mathbf{p}}} \, d\Omega + \oint_{\Gamma} N_p \hat{\mathbf{q}} \, d\Gamma + \int_{\Omega_t} N_p^T \nabla^T \rho^{\text{fl}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{F} \, d\Omega - \\
 & \int_{\Omega_t} N_p^T \mathbf{Q}^{-1} N_p \dot{\bar{\mathbf{p}}} \, d\Omega + \int_{\Omega_t} N_p^T \alpha \mathbf{m}^T \mathbf{B}_u \dot{\bar{\mathbf{u}}} \, d\Omega - \int_{\Omega_t} N_p^T \rho^{\text{fl}} \mathbf{k} \nabla^T N_u \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \, d\Omega \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

$$\text{ou } \hat{\mathbf{q}}_i = \mathbf{k} \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial x_i} \cdot \bar{\mathbf{n}}_i$$

Sous forme matricielle l'équation (3.17) s'écrit :

$$\left[ \mathbf{M}_{pu} \right] \left\{ \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \right\} - \left[ \mathbf{C}_{pu} \right] \left\{ \dot{\bar{\mathbf{u}}} \right\} + \left[ \mathbf{C}_{pp} \right] \left\{ \dot{\bar{\mathbf{p}}} \right\} + \left[ \mathbf{K}_{pp} \right] \left\{ \bar{\mathbf{p}} \right\} = \left\{ \mathbf{f}_p \right\} \quad (3.18)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \left[ \mathbf{M}_{pu} \right] &= \int_{\Omega_t} N_p^T \rho^{\text{fl}} \mathbf{k} \nabla^T N_u \, d\Omega & \left[ \mathbf{C}_{pp} \right] &= \int_{\Omega_t} N_p^T \mathbf{Q}^{-1} N_p \, d\Omega \\
 \left[ \mathbf{C}_{pu} \right] &= \int_{\Omega_t} N_p^T \alpha \mathbf{m}^T \mathbf{B}_u \, d\Omega & \left[ \mathbf{K}_{pp} \right] &= \int_{\Omega_t} \left( \nabla N_p \right)^T \mathbf{k} \left( \nabla N_p \right) \, d\Omega \\
 \left\{ \mathbf{f}_p \right\} &= \oint_{\Gamma} N_p \hat{\mathbf{q}} \, d\Gamma + \int_{\Omega_t} N_p^T \nabla^T \rho^{\text{fl}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{F} \, d\Omega
 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant écrire le système global en regroupant les équations (3.11) et (3.18) soit alors :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{uu} & 0 \\ \mathbf{m}_{pu} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \\ \ddot{\bar{\mathbf{p}}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mathbf{c}_{pu} & \mathbf{c}_{pp} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{u}}} \\ \dot{\bar{\mathbf{p}}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{uu} & \mathbf{k}_{up} \\ 0 & \mathbf{k}_{pp} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_p \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Dans le cas où le squelette solide ainsi que le fluide interstitiel sont incompressibles c.à.d. ( $\alpha \rightarrow 1$  et  $Q \rightarrow \infty$ ) le système du second ordre devra être résolu en posant  $\mathbf{c}_{pp} = 0$ .

### 3.4. Théorie quasi-statique en formulation u-p.

La théorie quasi statique est couramment employée dans l'analyse du comportement des milieux poreux saturés. On la rencontre en particulier dans les problèmes de consolidation des sols.

C'est cette même théorie qui fut à l'origine de la mécanique des milieux poreux telle que l'on connaît actuellement Biot (1941).

En réalité la théorie quasi-statique n'est qu'une restriction apportée aux équations générales régissant le comportement des milieux poreux. Cette dernière se traduit par

la nullité de l'accélération relative aux particules solides à savoir  $\ddot{\bar{\mathbf{u}}} = 0$ .

De cette manière, les équation du mouvement (3.11) et (3.18) deviennent :

$$[\mathbf{K}_{uu}] \{\bar{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}_{up}] \{\bar{\mathbf{p}}\} = \{\mathbf{f}_u\} \quad (3.20-a)$$

$$-[\mathbf{C}_{pu}] \{\dot{\bar{\mathbf{u}}}\} + [\mathbf{C}_{pp}] \{\dot{\bar{\mathbf{p}}}\} + [\mathbf{K}_{pp}] \{\bar{\mathbf{p}}\} = \{\mathbf{f}_p\} \quad (3.20-b)$$

Dans le cas courant où la matrice solide ainsi que le fluide interstitiel sont incompressibles ( $Q \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \rightarrow 1$ ) ces mêmes équations se réduisent à

$$[\mathbf{K}_{uu}]\{\bar{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}_{up}]\{\bar{\mathbf{p}}\} = \{\mathbf{f}_u\} \quad (3.21-a)$$

$$-[\mathbf{C}_{pu}]\{\dot{\bar{\mathbf{u}}}\} + [\mathbf{K}_{pp}]\{\bar{\mathbf{p}}\} = \{\mathbf{f}_p\} \quad (3.21-b)$$

De la même manière que pour les équation du second ordre, regroupons les équations (3.21-a,b) sous la forme d'un système compact soit alors :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mathbf{c}_{pu} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{u}}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{uu} & \mathbf{k}_{up} \\ 0 & \mathbf{k}_{pp} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_p \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Le système d'équations (3.22) (du premier ordre) traduit en fait les équations discrètes régissant la théorie quasi-statique de la consolidation des milieux poreux saturés. Ce système présente l'avantage de par sa simplicité d'être symétrique tout en étant similaire du point de vue mathématique au système originel.

### 3.5. Résumé.

Une fois les fonctions d'interpolation choisies, les systèmes d'équations algébriques (3.19) et (3.22) fournissent les matrices élémentaires du système fluide-solide.

Nous remarquons par le biais de ces deux systèmes que le couplage inhérent entre la phase fluide et la phase solide est explicitement modélisé par la présence des termes  $(m_{pu}, c_{pu}, k_{up})$ .

Notons aussi que bien que ces équations soient discrètes dans la dimension spatiale demeurent continus dans le domaine temporel (présence dans les équations des termes  $\ddot{\bar{u}}, \ddot{\bar{p}}, \dot{\bar{u}}, \dot{\bar{p}}$ ).

L'objectif du prochain chapitre sera réservé à l'intégration des équations précédentes dans le domaine temporel avec une étude détaillée sur les principales méthodes menant à cette fin.

**REFERENCES .**

- [1] Sandhu . R.S. and E.L.Wilson , "Finite element analysis of seepage in elastic media .", Proc.Am.Soc.Civ.Engrs., Jnl.Engng.Mech.Div. **95** , (EM3) (1969).
- [2] Ghaboussi.J. and Wilson .E.L., "Variational formulation of dynamics of fluid saturated porous elastic solids." , Proc.ASCE, **98** EM4 ,947-963 (1972)
- [3]J.H.Prevost, 'Nonlinear transient phenomena in saturated porous media', Comp.Meth.Appl.Mech.Eng (1982).
- [4] O.C,Zienkiewicz , 'Coupled problems and their numerical solution' ,Keynote lecture,pres.at Int.Conf.Coupled Problems,September 1981,University College of Swansea.
- [5] O.C,Zienkiewicz and T.Shiomi, 'Dynamic behavior of saturated porous media - The generalized Biot formulation and it's numerical solution',Int.J.Anal.Meth.Geomech., **8** ,71-96 (1984) .
- [ 6 ] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. The Finite Element Method, volume 2. McGraw-Hill, London, 4th edition, 1991.

---

## CHAPITRE 4

---

### Discrétisation temporelle des équations matricielles.

#### **4.1.Introduction.**

Dans le chapitre précédent , nous nous sommes penchés exclusivement sur la discrétisation spatiale des équations du mouvement relatives aux milieux poreux saturés laissant ces dernières continues dans le domaine temporel .

Il est bien connu , qu'aucune procédure de résolution numérique ne saurait prendre effet sans que l'on intègre les équations dans le domaine temps. C'est en partie ce que l'on s'attachera à faire dans ce chapitre , sans oublier pour la circonstance un commentaire détaillé sur les différents schémas d'intégration proposés.

Nous évoquerons de ce fait deux principales méthodes d'intégration des équations du mouvement il s'agit des méthodes basées sur le concept d'élément fini de temps ainsi que la méthode des approximations rationnelles.

## 4.2. Concept d'élément fini de temps.

### 4.2.1 . Processus de récurrence à deux points. Problèmes du 1<sup>er</sup> ordre (Théorie quasi statique de la consolidation).

Reprenons à ce niveau le système d'équations (3.23) traduisant le comportement quasi statique des milieux poreux saturés et que l'on réécrit sous la forme compacte suivante :

$$C \cdot \dot{a} + K \cdot a + f = 0 \quad (4.1)$$

où "a" désigne la variable champ généralisée :

$$a = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{p} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{a} = \begin{Bmatrix} \dot{\bar{u}} \\ \dot{\bar{p}} \end{Bmatrix}$$

Nous remarquons , que cette équation demeure continue dans le domaine temporel "t" à

cause de la présence du terme  $\dot{a} = \begin{Bmatrix} \dot{\bar{u}} = \frac{d\bar{u}}{dt} \\ \dot{\bar{p}} = \frac{d\bar{p}}{dt} \end{Bmatrix}$ .

Il s'agira alors d'intégrer cette dernière équation (4.1) dans le domaine temps de sorte que l'on puisse entreprendre une résolution numérique sur ordinateur.

#### 4.2.1.1 .Méthode des résidus pondérés.

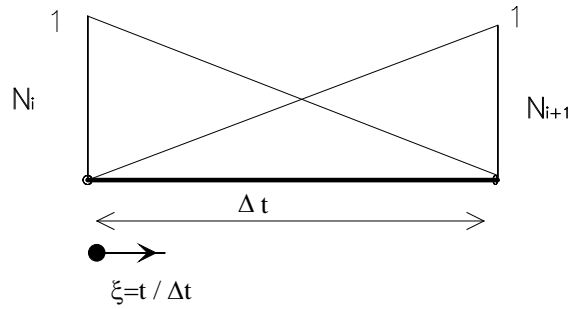
Le temps étant considéré comme une variable indépendante qui de plus est supposée suivre une variation polynomiale. On pourra ainsi écrire pour la variable champ généralisée a(t) au temps "t" :

$$a(t) = \sum_{i=1}^{i=n} N_i(t) a_j \quad (4.2)$$

$a_j$  :Représentant les variables nodales du champ "a" au temps "t"

$N_i(t)$  :Ensemble de fonctions devant être au moins une fois dérivables.

Considérons alors un élément typique de temps de longueur  $\Delta t$  Fig.4.1 .



**Fig.4.1. Schématisation d'un élément fini de temps. Problèmes du 1<sup>er</sup> ordre.**

Dans le repère naturel lié à l'élément, et défini par la coordonnée naturelle  $\xi$  telle que

$$\xi = \frac{t}{\Delta t} \quad ; \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (4.3)$$

Les fonctions de forme  $N_i$  s'écrivent alors comme :

$$N_i = 1 - \xi \quad N_{i+1} = \xi \quad (4.3-a)$$

On en déduit directement :

$$\dot{N}_i = \frac{-1}{\Delta t} \quad \dot{N}_{i+1} = \frac{1}{\Delta t} \quad (4.3-b)$$

Ecrivons alors à ce niveau l'équation classique des résidus pondérés étendue au domaine englobant l'élément dans son entier on aura :

$$\int_0^1 W_j \left[ C \left( a_n \dot{N}_n + a_{n+1} \dot{N}_{n+1} \right) + K \left( a_n N_n + a_{n+1} N_{n+1} \right) + f \right] \cdot d\xi = 0 \quad (4.4)$$

$W_j$  : Désignant la fonction de pondération.

En substituant les relations (4.3-a) et (4.3-b) dans l'équation (4.4) nous obtenons :

$$\left[ K \int_0^1 W_j \xi d\xi + C \int_0^1 W_j \frac{d\xi}{\Delta t} \right] a_{n+1} + \left[ K \int_0^1 W_j (1 - \xi) d\xi - C \int_0^1 W_j \frac{d\xi}{\Delta t} \right] a_n + \int_0^1 W_j f d\xi = 0 \quad (4.5)$$

Notons à ce niveau que la fonction de pondération  $W_j$  reste encore indéterminée.

D'une manière générale, nous pouvons réécrire l'équation (4.5) comme :



$$\left(\frac{C}{\Delta t} + K\theta\right)a_{n+1} + \left(\frac{-C}{\Delta t} + K(1-\theta)\right)a_n + \bar{F} = 0 \quad (4.6)$$

Avec :

$$\theta = \frac{\int_0^1 W_j \xi \, d\xi}{\int_0^1 W_j \, d\xi} \quad (4.7-a)$$

et

$$\bar{F} = \frac{\int_0^1 W_j f \, d\xi}{\int_0^1 W_j \, d\xi} \quad (4.7-b)$$

En examinant l'équation (4.6), on peut dès lors remarquer que l'on peut déterminer la valeur  $a_{n+1}$  au temps  $(t+\Delta t)$  par simple connaissance de la valeur de la variable  $a_n$  et  $\bar{f}$  au temps  $(t)$ . Nous obtenons ainsi un processus de résolution incrémental dans le temps.

La forme incrémentale (4.6) génère pour chaque choix du paramètre  $\theta$  un ensemble de schémas d'intégrations dont certains comme on le verra par la suite sont désormais classiques.

En particulier pour  $\theta=0$  et si la matrice  $C$  est une matrice diagonale, la solution  $a_{n+1}$  au temps  $(t+\Delta t)$  est triviale : *chaque valeur peut être calculée en fonction uniquement de la valeur précédente*. De telles procédures sont souvent désignées par le vocable méthodes explicites.

Tandis que celles avec  $\theta \neq 0$  nécessitent la résolution du système algébrique dans son ensemble sont souvent dénommées comme **procédures implicites**.

Ainsi, selon le choix de la fonction de pondération  $W_j$ , on aura affaire soit à des procédures de type implicite ou de type explicite.

Pour  $W_j=1$ , (Appliquée au point nodal  $a_n$ ),  $\theta$  prendra dans ce cas la valeur nulle, nous retrouvons alors après substitution de la valeur de  $\theta$  dans l'équation (4.6) la méthode des différences avant que l'on appelle aussi méthode d'Euler explicite.

Toujours pour  $W_j=1$ , mais cette fois ci appliquée au milieu du domaine  $\Delta t$ , le paramètre  $\theta$  prendra la valeur  $\theta = \frac{1}{2}$ . Le schéma d'intégration correspondant coïncide exactement avec la méthode explicite des différences centrales de Crank-Nicholson.

Si la fonction de pondération  $W_j$  prend la valeur unité ( $W_j=1$ ) au point nodal  $a_{n+1}$ , la paramètre  $\theta$  quant à lui prendra la valeur unité ( $\theta=1$ ), et après substitution dans l'équation (4.6) on reconnaîtra la méthode des différences arrière.

Les trois méthodes citées précédemment font partie d'une seule et même méthode d'intégration que l'on appelle dans la littérature "Collocation ponctuelle".

Comme nous l'avons signalé, la formule de récurrence (4.6) permet outre les méthodes d'intégrations classiques de développer de nouveaux schémas très performants.

Nous citerons entre autre les procédures de type Galerkin pour lesquelles la fonction de pondération  $W_j$  est identiquement égale à l'une des fonctions de formes de l'élément de temps utilisé; Soit alors ( $W_j = N_n$ , d'où  $\theta=1/3$ ) ou ( $W_j = N_n$ , d'où  $\theta=2/3$ ).

Ce type de procédures fut utilisé pour la première fois par Zienkiewicz [1,2].

Nous remarquons que la panoplie de schémas d'intégrations que l'on peut obtenir par application du concept d'élément fini de temps, sont nombreux et tous aussi divers et différents les uns des autres. Les performances numériques de chaque schéma seront discutés au chapitre suivant.

#### 4.2.1.2 .Méthodes variationnelles.

La méthode des résidus pondérés, ne représente pas à elle seule l'unique alternative quant à la formulation d'éléments finis de temps.

Il est souvent possible d'utiliser comme point de départ une fonctionnelle dont la condition de stationnarité conduit à la formulation de processus de récurrence similaires à celui défini par l'équation (4.6).

A titre indicatif, on citera le principe de Hamilton [3] qui se trouve à l'origine des équations du second ordre.

Gurtin [4], a lui aussi établi d'autres principes généraux utiles aussi bien pour les équations du premier ordre que du second ordre. Ces fonctionnelles variationnelles ont été utilisées par plusieurs auteurs afin de définir des éléments finis de temps. Citons entre autres Wilson et Nikell [5] Fried [6] et Argyris [7].

Dans le cadre de la présente étude et à titre indicatif, nous citerons une forme variationnelle basée sur la minimisation du carré de l'erreur. Il s'agit de la méthode des moindres carrés.

Nous aurons donc à minimiser la fonctionnelle  $\pi$  suivante :

$$\pi = \int_0^1 \left[ C \left( a_n \dot{N}_n + a_{n+1} \dot{N}_{n+1} \right) + K \left( a_n N_n + a_{n+1} N_{n+1} \right) + F \right]^T \bullet \left[ C \left( a_n \dot{N}_n + a_{n+1} \dot{N}_{n+1} \right) + \dots \right] d\xi \quad (4.8)$$

La condition de stationnarité exige que :

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_{n+1}} = 0 \quad (4.9)$$

On obtient finalement la relation de récurrence suivante :

$$\left[ \frac{C^T C}{\Delta t} + \frac{K^T C + C^T K}{2} + \frac{K^T K \Delta t}{3} \right] a_{n+1} + \left[ \frac{-C^T C}{\Delta t} - \frac{(K^T C - C^T K)}{2} + \frac{K^T K \Delta t}{6} \right] a_n - K^T \int_0^1 \frac{F \cdot \xi}{\Delta t^3} d\xi + C^T \int_0^1 \frac{F}{\Delta t} d\xi \quad (4.10)$$

Nous pouvons dès lors constater un surcroît du volume des calculs , mais la forme symétrique des équations obtenues même si les matrices  $K$  et  $C$  ne le sont pas donnent à ce schéma son grand intérêt pratique.

Ainsi plusieurs auteurs semblent retenir ce type de schéma, O.C Zienkiewicz R.L.Lewis [8] , W.L.Wood ,R.L.Lewis [9].

#### 4.2.2 . Processus de récurrence à trois points. Problèmes du 2<sup>ème</sup> ordre .

Reprenons à ce niveau le système d'équations (2.20) traduisant le comportement général des milieux poreux saturés que l'on réécrit sous la forme compacte suivante :

$$M \ddot{a} + C \dot{a} + K a + f = 0 \quad (4.12)$$

où "a" désigne la variable champ généralisée :

$$a = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{p} \end{Bmatrix}, \quad \dot{a} = \begin{Bmatrix} \dot{\bar{u}} \\ \dot{\bar{p}} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \ddot{a} = \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{u}} \\ \ddot{\bar{p}} \end{Bmatrix}$$

Nous remarquons , que cette équation demeure toujours continue dans le domaine temporel "t" à cause de la présence des termes

$$\dot{a} = \begin{Bmatrix} \dot{\bar{u}} = \frac{d\bar{u}}{dt} \\ \dot{\bar{p}} = \frac{d\bar{p}}{dt} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \ddot{a} = \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{u}} = \frac{d^2\bar{u}}{dt^2} \\ \ddot{\bar{p}} = \frac{d^2\bar{p}}{dt^2} \end{Bmatrix}.$$

Comme nous l'avons déjà fait pour les équations du premier ordre ,il s'agira alors d'intégrer cette dernière équation (4.12) dans le domaine temps de sorte que l'on puisse entreprendre une quelconque résolution numérique.

#### 4.2.2.1 .Méthode des résidus pondérés.

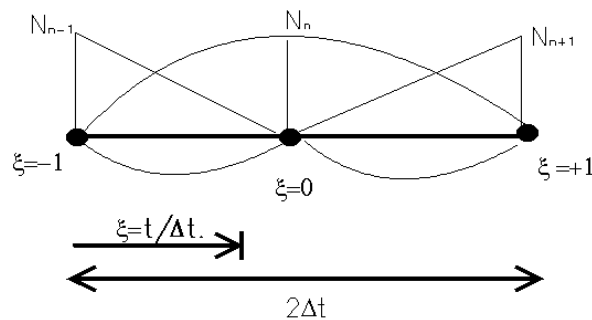
Comme pour les problèmes du premier ordre , le temps étant considéré comme une variable indépendante qui de plus est supposée suivre une variation polynomiale , on pourra écrire pour la variable champ généralisée  $a(t)$  au temps "t" ce qui suit :

$$a(t) = \sum_{i=1}^{i=n} N_i(t) a_j$$

$a_j$  :Représentant les variables nodales du champ "a" au temps "t"

$N_i(t)$  :Ensemble de fonctions devant être au moins deux fois continûment dérivables.

Considérons alors un élément typique de temps de longueur  $2\Delta t$  Fig.4.2 .



**Fig.4.2. Schématisation d'un élément fini de temps.Problèmes du 2<sup>ème</sup> ordre.**

Dans le repère naturel lié à l'élément , et défini par la coordonnée naturelle  $\xi$  telle que

$$\xi = \frac{t}{\Delta t} \quad ; \quad -1 \leq \xi \leq +1 \quad (4.13-a)$$

Les fonctions de forme  $N_i$  s'écrivent alors comme :

$$N_{n+1} = \xi(1+\xi)/2 \quad N_n = (1-\xi)(1+\xi) \quad N_{n-1} = -\xi(1-\xi)/2 \quad (4.13-b)$$

On en déduit directement :

$$\dot{N}_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \xi\right) / \Delta t \quad \ddot{N}_{n+1} = 1 / \Delta t^2$$

$$\dot{N}_n = -2\xi / \Delta t \quad \ddot{N}_n = -2 / \Delta t^2$$

$$\dot{N}_{n-1} = \left(-\frac{1}{2} + \xi\right) / \Delta t \quad \ddot{N}_{n-1} = 1 / \Delta t^2$$

Ecrivons alors à ce niveau l'équation classique des résidus pondérés étendue au domaine englobant l'élément dans son entier on aura :

$$\int_{-1}^{+1} (\mathbf{W}_j [M(\mathbf{a}_{n-1} \ddot{N}_{n-1} + \mathbf{a}_n \ddot{N}_n + \mathbf{a}_{n+1} \ddot{N}_{n+1}) + C(\mathbf{a}_{n-1} \dot{N}_{n-1} + \mathbf{a}_n \dot{N}_n + \mathbf{a}_{n+1} \dot{N}_{n+1}) + K(\mathbf{a}_{n-1} N_{n-1} + \mathbf{a}_n N_n + \mathbf{a}_{n+1} N_{n+1}) + f] \cdot d\xi = 0 \quad (4.14)$$

En utilisant un calcul similaire à celui ayant conduit à la relation (4.6) pour les problèmes du premier ordre nous aurons :

$$\begin{aligned} & [M + \gamma \Delta t C + \beta \Delta t^2 K] \cdot \mathbf{a}_{n+1} + [-2M + (1 - 2\gamma) \Delta t C + (\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma) \Delta t^2 K] \cdot \mathbf{a}_n + \\ & [M - (1 - \gamma) \Delta t C + (\frac{1}{2} - 2\beta - \gamma) \Delta t^2 K] \cdot \mathbf{a}_{n-1} + \bar{f} \Delta t^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Avec :

$$\gamma = \frac{\int_{-1}^{+1} \mathbf{W}_j (\xi + \frac{1}{2}) d\xi}{\int_{-1}^{+1} \mathbf{W}_j d\xi} \quad (4.16-a)$$

$$\beta = \frac{\int_{-1}^{+1} \mathbf{W}_j \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) d\xi}{\int_{-1}^{+1} \mathbf{W}_j d\xi} \quad (4.16-b)$$

$$\bar{f} = \int_{-1}^{+1} W_j f d\xi \Big/ \int_{-1}^{+1} W_j d\xi \quad (4.16-c)$$

L'expression (4.15) , est en fait un algorithme général obtenu par Newmark [10] par une technique complètement différente que celle utilisée à ce niveau .

Comme pour les problèmes du premier ordre , nous pouvons utiliser de nombreuses formes pour les fonctions de pondération.

Sur la tableau Tab. 4.1. , sont données diverses valeurs de  $\gamma$  et de  $\beta$  correspondant à une série de fonctions de pondération .

$\gamma$	$\beta$	Caractérisation.
$-\frac{1}{2}$	0	Collocation ponctuelle au point $a_{n-1}$ .
$\frac{1}{2}$	0	Différence centrale explicite. Collocation ponctuelle au point $a_n$ .
$\frac{3}{2}$	1	Différence arrière. Collocation ponctuelle au point $a_{n+1}$ .
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	Collocation par sous domaine étendue à tout l'élément .
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	Méthode de l'accélération linéaire. $W_j = N_2(\xi)$ .
$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{5}$	Galerkin. $W_j = N_{1,3}(\xi)$ .
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	Méthode de Fox et Goodwin.[11]
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	Méthode de l'accélération moyenne.

**Tableau. 4.1.Méthodes possibles d'intégration des équations du 2<sup>ème</sup> ordre**

Après examen de la relation (4.15) , nous pouvons remarquer que si  $\beta = 0$  et si les matrices M et C sont diagonales , aucune inversion de matrice n'est nécessaire pour connaître  $a_{n+1}$  et la méthode dans ce cas est explicite.

En particulier si de plus  $\gamma = \frac{1}{2}$  , on arrive la formule de différence centrale qui présente un intérêt pratique considérable :économie en temps de calculs.

Notons aussi que pour les équations du second ordre , deux valeurs de départ sont nécessaires  $a_n$  et  $a_{n+1}$ . Ces deux valeurs sont en général fournies en considérant l'état initial en termes de vitesses et de déplacements.

Aussi , il faudra être très prudent dans le choix des paramètres d'intégration  $\gamma$  et  $\beta$  , auquel cas la solution risquerait de ne plus être acceptable , ceci sera discuté au chapitre suivant .

### 4.2.3 . Forme incrémentale des équations en théorie quasi-statique.

Dans l'établissement des équations incrémentales globales , on utilisera les formules données par la formulation élément fini de temps à savoir équation (4.6).

Il sera utile de réécrire à ce niveau ces mêmes équations sous une forme légèrement modifiée.

$$(C + K\theta\Delta t) \cdot \Delta a = -\bar{F} - K \cdot \Delta t \cdot a_n \quad (4.17)$$

$$\text{avec :} \quad \Delta a = a_{n+1} - a_n \quad \Delta t = t_2 - t_1$$

en revenant au système original , on aura :

$$\begin{bmatrix} k_{uu} & k_{up} \\ -C_{pu} & k_{pp}\theta \cdot \Delta t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{u} \\ \Delta \bar{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_u \\ f_p - k_{pp}\Delta t \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

#### Commentaire :

Le système d'équations (4.18) est en fait un système incrémental dans le temps donnant pour chaque pas de temps  $\Delta t$  les accroissements  $\Delta \bar{u}$   $\Delta \bar{p}$  ,la résolution se faisant pas à pas dans le temps .

Le choix du paramètre d'intégration  $\theta$  sera fait au chapitre suivant

### 4.2.4 . Forme incrémentale des équations générales en dynamique .

Comme nous l'avons entrepris pour les équations du premier ordre en théorie quasi-statique , nous allons établir la forme incrémentale des équations générales de la dynamique des milieux poreux en formulation **u-p** .

Pour cela , signalons que pour des raisons que l'on discutera au chapitre suivant , on prendra comme paramètres d'intégrations  $\gamma=1/2$  et  $\beta=1/4$  .

Tout calcul fait on arrive aux équations suivantes :

$$\left[ \begin{array}{cc} \left( m_{uu} + \frac{\Delta t^2}{4} k_{uu} \right) & \left( \frac{\Delta t^2}{4} k_{up} \right) \\ \left( m_{pu} + \frac{\Delta t^2}{4} c_{pu} \right) & \left( \frac{\Delta t}{2} c_{pp} + \frac{\Delta t^2}{4} k_{pp} \right) \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \bar{u}_{t+\Delta t} \\ \bar{p}_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A(t, t - \Delta t) \\ B(t, t - \Delta t) \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

avec :

$$\begin{Bmatrix} A(t, t - \Delta t) \\ B(t, t - \Delta t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left( 2m_{uu} + \frac{\Delta t^2}{2} k_{uu} \right) \bar{u}_t - \left( m_{uu} + \frac{\Delta t^2}{4} k_{uu} \right) \bar{u}_{t-\Delta t} - \frac{\Delta t^2}{2} k_{up} \bar{p}_t - \frac{\Delta t^2}{4} k_{up} \bar{p}_{t-\Delta t} + f_u \\ 2m_{pu} \bar{u}_t - \frac{\Delta t^2}{2} k_{pp} \bar{p}_t - \left( m_{pu} + \frac{\Delta t^2}{2} c_{pu} \right) \bar{u}_{t-\Delta t} - \left( \frac{\Delta t}{2} c_{pp} + \frac{\Delta t^2}{4} k_{pp} \right) \bar{p}_{t-\Delta t} + f_p \Delta t^2 \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Nous remarquons principalement que ce système traduit une résolution incrémentale dans le temps .En effet , l'inconnue au temps  $t + \Delta t$  est déterminée en fonction des valeurs qu'elle prend aux instants  $t$  et  $t - \Delta t$ .

Aussi nous pouvons remarquer que ce système n'est pas symétrique ce qui peut causer certains problèmes dans la résolution numérique de ce dernier. Une procédure de type élimination de Gauss peut toutefois être entreprise mais il faudra être très prudent quant aux résultats qu'elle fournit (pour un problème à géométrie et à chargement symétrique , la solution doit impérativement l'être aussi.)

Il existe cependant d'autres techniques d'intégration du système (3-19) dans le domaine temporel connues sous le nom de 'Staggered solution' ou schéma d'intégration titubant amplement commentées par Belytschko [12] , Fellipa [13] , Park [14]

Dans ce type de procédures , le système (3-19) est réécrit sous la forme élargie suivante :

$$m_{uu} \ddot{\bar{u}} + k_{uu} \bar{u} = f_u - k_{up} \bar{p} \quad (4.21-a)$$

$$c_{pp} \ddot{\bar{p}} + k_{pp} \bar{p} = f_p + k_{up}^T \dot{\bar{u}} - m_{pu} \ddot{\bar{u}} \quad (4.21-b)$$

et la résolution portera en deux étapes :

1. La première des équations (4.21) est résolue en prenant en considération une distribution initiale de la surpression interstitielle notée  $\bar{p}_i$ .



2. une fois déterminée la distribution du champ déplacement  $u$ , la deuxième équation est résolue à son tour fournissant la nouvelle distribution de la surpression interstitielle dans le domaine étudié.

Notons, que ces procédures, présentent l'avantage de pouvoir incorporer des effets de non linéarité du matériau au cours de la résolution.

De plus, il est clair que le nombre d'opérations (cumulé) à effectuer aux deux étapes de résolution est nettement inférieur à celui qui prévaut dans la résolution classique: d'où une économie appréciable en temps de calcul.

### 4.3.Méthode des approximations rationnelles.

L'approche éléments finis de temps, ne représente pas la seule issue pour l'obtention de schéma de récurrence pour les équations du mouvement. Ces dernières années sur la base d'un raisonnement purement mathématique, de nouvelles procédures d'intégration des équations dans le domaine temps ont vu le jour et sont connues sous nom des approximations rationnelles. un exposé exhaustif de ces méthodes est donné par Smith [15].

Nous allons dans ce qui suit donner un aperçu bref sur ces nouvelles méthodes, seul le cas quasi-statique sera étudié, l'extension au cas général sera toutefois triviale

L'équation (3-22) étant un système d'équations différentielles à conditions initiales imposées, sa solution mathématique est en fait triviale. Réécrivons dans ce qui suit ce système sous sa forme compacte.

$$K\mathbf{a} + C \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{f} \quad \text{à } t = 0 \quad \text{on a } \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0 \quad (4.22)$$

La solution quant à elle pourra s'écrire comme :

$$\mathbf{a}(t) = \text{EXP}[-t C^{-1}K] [\mathbf{x}_0 - C^{-1}\mathbf{f}] + C^{-1}\mathbf{f} \quad (4.23)$$

que l'on peut aussi écrire sous forme incrémentale :

$$\mathbf{a}(t + \Delta t) = \text{EXP}[-\Delta t C^{-1}K] [\mathbf{a}(t) - C^{-1}\mathbf{f}] + C^{-1}\mathbf{f} \quad (4.24)$$

En définissant la matrice  $\mathbf{Z}$  comme

$$\mathbf{Z} = \Delta t C^{-1}K \quad (4.25)$$

Alors la matrice  $\mathbf{EXP}[-\mathbf{Z}]$  peut être définie par une série convergente telle que :

$$\mathbf{EXP}[-\mathbf{Z}] = \mathbf{I} - \mathbf{Z} + \frac{1}{2}\mathbf{Z}^2 - \dots \quad (4.26)$$

Il est évident que si l'on veut approcher  $\mathbf{EXP}[-\mathbf{Z}]$  en utilisant l'expression précédente, il faudra effectuer une succession de produits matriciels chose qui rend la tâche très vite complexe et fastidieuse par conséquent ce type de procédure est déconseillé en pratique.

Mais puisque le caractère exponentiel de la solution est un fait évident, et en supposant qu'il soit possible de trouver une approximation à  $\mathbf{EXP}[-\mathbf{Z}]$  ayant les caractéristiques voulues tout en fournissant un effort de calcul assez négligeable, le problème s'en trouvera résolu par lui-même.

Ce type d'approximations est plus connu sous le nom d'approximations rationnelles, et les procédures de résolutions incrémentales basées sur ces dernières auront comme objectif de combiner un maximum de précision avec le minimum d'effort de calculs.

Dans cette étude, on présentera deux grandes classes d'approximations rationnelles, à savoir:

1. Approximations de Padé
2. Approximations de Nørsett

#### 4.3.1. Approximations de Padé.

Donnelly [16] (1965), a donné ce nom à une famille d'approximations rationnelles définies par :

$$\mathbf{F}(\mathbf{Z}) = \mathbf{EXP}(-\mathbf{Z}) = \mathbf{P}_{n,m}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{S}_n(\mathbf{Z})}{\mathbf{T}_m(\mathbf{Z})} \quad (4.27)$$

$\mathbf{F}(\mathbf{z})$  :est une fonction de la variable complexe  $\mathbf{z}$ , continue et dérivable dans le plan complexe contenant l'origine.

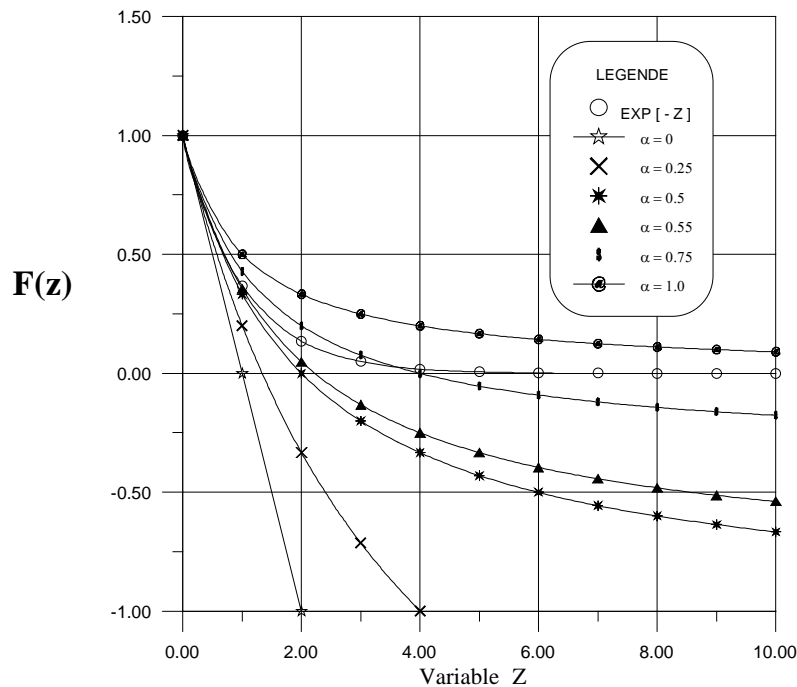
$\mathbf{S}_n$ ,  $\mathbf{T}_m$  : polynômes de degré  $n$  et  $m$  respectivement.

Ainsi pour chaque paire d'entiers positifs  $n$  et  $m$  les polynômes  $\mathbf{S}_n$  et  $\mathbf{T}_m$  peuvent être sélectionnés de façon à ce que le développement en série de Taylor de  $\mathbf{P}_{m,n}$  à l'origine coïncide avec le développement en série de Taylor de  $\mathbf{F}(\mathbf{z})$  au voisinage de zéro.

Une forme simple de ce type d'approximation est connue sous le nom d'approximation rationnelle linéaire Graves-Morris[17]. Cette dernière est définie comme suit :

$$\mathbf{EXP}(-\mathbf{Z}) = \frac{1 - (1 - \alpha)\mathbf{Z}}{1 + \alpha} \quad (4.28)$$

Pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$ , on pourra apprécier à quel point ce type d'approximation tend vers  $\mathbf{EXP}[-\mathbf{Z}]$ . Sur la figure 4.3, nous pouvons facilement apprécier à quel point l'approximation rationnelle linéaire approche la fonction  $\mathbf{Exp}[-\mathbf{Z}]$



**Fig.4.3. Précision de l'approximation rationnelle linéaire .**

La forme incrémentale associée à cette catégorie d'approximation s'écrit comme:

$$a_{n+1} = [\mathbf{I} + \alpha \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{I} - (1 - \alpha) \Delta t \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K}] \cdot (a_n - \mathbf{K}^{-1} f) + \mathbf{K}^{-1} f \quad (4.29)$$

On constate facilement que la forme incrémentale précédente permet pour des valeurs particulières de  $\alpha$  de retrouver des schémas classiques tels que ceux de Crank-Nicholson, d'Euler etc... .

On voit ainsi la puissance de telles méthodes comparées aux méthodes classiques, ceci dans la mesure où elles permettent d'imaginer toute une gamme de variantes par simple choix du paramètre  $\alpha$ .

Pour la formulation des approximations de type Padé proprement dites, les détails relatifs à la dérivation de  $S_n$  et  $T_m$  sont donnés dans Siemieniuch et Gladwell (1974) [18]. On présente dans ce qui suit les expressions usuelles des approximations de Padé pour des couples  $0 \leq n, m \leq 2$ , voir tableau 4.2.

EXP [- Z]	n = 0	n = 1	n=2
m = 0	1	$1 - Z$	$1 - Z + \frac{Z^2}{2}$
m = 1	$\frac{1}{1 - Z}$	$\frac{1 - Z}{1 + Z}$	$\frac{1 - \frac{2Z}{3} + \frac{Z^2}{6}}{1 + \frac{Z}{3}}$
m = 2	$\frac{1}{1 + Z + \frac{Z^2}{2}}$	$\frac{1 - \frac{Z}{3}}{1 + \frac{2Z}{3} + \frac{Z^2}{6}}$	$\frac{1 - \frac{Z}{2} + \frac{Z^2}{12}}{1 + \frac{Z}{2} + \frac{Z^2}{12}}$

**Tab .4.2.Approximations rationnelles de type Padé.**

### **REMARQUES**

Les observations suivantes peuvent être faites après étude du tableau 4.2.

1. Les approximations de Padé du premier ordre couvrent les méthodes devenues aujourd'hui classiques telles que différence centrale différence arrière etc... .
2. La précision des approximations de Padé peut être mise en évidence à partir de leur développement en série de chaque type d'approximations.

Ainsi sachant que

$$\text{EXP} [- Z] = 1 - Z + \frac{Z^2}{2} - \frac{Z^3}{6} + \frac{Z^4}{24} - \frac{Z^5}{120} + \dots$$

et que

$$P_{1,0} = 1 - Z + Z^2 - Z^3 + Z^4 - \dots$$

$$P_{1,1} = 1 - Z + Z^2/2 - Z^3/4 + Z^4/8 - \dots$$

$$P_{2,2} = 1 - Z + Z^2/2 - Z^3/6 + Z^4/24 - Z^5/144 + \dots$$

On peut alors remarquer que la méthode  $P_{2,2}$  possède une erreur de l'ordre  $O(Z^5)$ , contrairement à la méthode  $P_{1,1}$  qui est moins précise et qui possède une erreur de  $O(Z^3)$ .

Cependant, l'amélioration de la précision des approximations de Padé d'ordre supérieur passe malheureusement par un surcroît du volume de calculs, et ainsi pour la méthode  $P_{2,2}$  l'algorithme est le suivant:

$$\left[ C + K \frac{\Delta t}{2} + \Delta t^2 K C^{-1} K \right] a_{n+1} = \left[ C - K \frac{\Delta t}{2} + \Delta t^2 K C^{-1} K \right] a_n + \Delta t f \quad (4.30)$$

On remarque tout de suite qu'il faudra évaluer  $C^{-1}$  puis effectuer une série de multiplication matricielles avant d'arriver à l'étape ultime qui est la résolution du système linéaire.

Siemieniuch et Gladwell [18], ont mis au point un algorithme permettant de résoudre (4.30) sans passer par l'inversion de la matrice  $C$ , mais il est à souligner que cette alternative faisait intervenir des multiplicateurs complexes, chose qui a fait que le coût du traitement numérique a doublé en volume et en temps d'exécution et qui en fin de compte a rendu cette méthode sans grand intérêt pratique.

### 4.3.2. Approximations de Nørsett.

Makinson [19], puis Nørsett [20] ont développé ce type d'approximations rationnelles qui comme les approximations de Padé approchent la fonction  $\text{EXP}[-Z]$  à l'aide d'une expression rationnelle qui s'écrit dans ce cas comme

$$\text{EXP}(-Z) \cong F(Z) = \frac{C_{m,n}}{D_{m,n}} \quad (4.31)$$

$$\text{Avec } ; D_{m,n} = \prod_{i=1}^m (1 + \alpha_i Z_i) \quad \alpha_i \text{ réel} \quad (4.32)$$

Siemieniuch et Gladwell [18] ont montré que  $F(Z)$  approchait au mieux  $\text{EXP}(-Z)$ , si :

$$F(Z) = \frac{1}{1 + \alpha Z} \sum_{k=0}^{n-1} L_k \left( \frac{\alpha Z}{1 + \alpha Z} \right) \quad (4.32)$$

avec :

$L_k$  : Polynôme de Laguerre de degré "k "

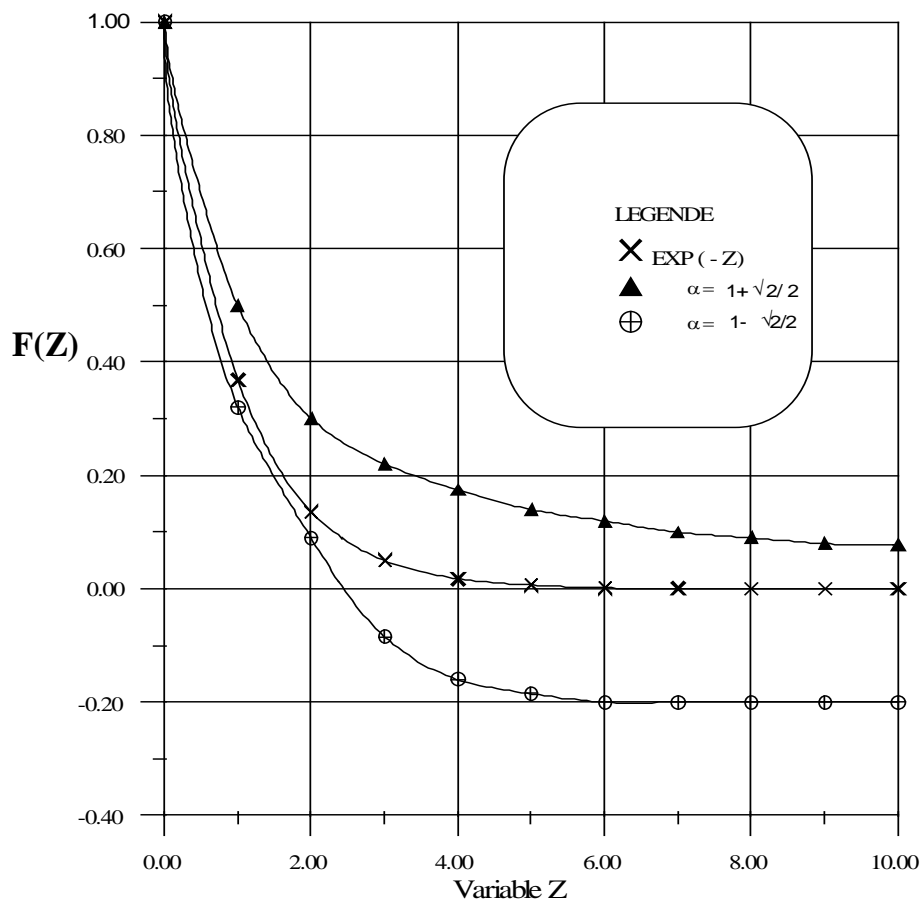
et :

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = 1 - x$$

$$L_{n+1}(x) = \left[ \frac{2n+1-x}{n+1} \right] L_n(x) - \left[ \frac{n}{n+1} \right] L_{n-1}(x) \quad (4.33)$$

Sur la figure Fig.4.4 . nous avons représenté une comparaison entre une approximation de Nørsett du deuxième ordre relative à deux valeurs du paramètre  $\alpha$  et  $EXP(-Z)$ .



**Fig.4.4.Approximation de Nørsett du second ordre**

Il est à noter que selon l'étude comparative effectuée par Smith [15] a clairement démontré que les approximations rationnelles de Nørsett restent de loin les plus compétitives tant pour les problèmes quasi statiques du premier ordre que pour les problèmes dynamiques du deuxième ordre.

#### 4.4. Résumé.

Nous avons mis en évidence dans ce chapitre la diversité des méthodes d'intégration des équations dans le domaine temporel .

De plus nous avons aussi constaté que les deux principales familles d'intégration (éléments finis de temps , approximations rationnelles), génèrent pour des choix particuliers de leurs paramètres respectifs des schémas de récurrence identiques.

Bien que les schémas de récurrence issus des méthodes des approximations rationnelles sont connus pour leurs grande fiabilité ,ces derniers ont dans la présente étude été volontairement écartés à cause de l'importance du temps de calcul qu'ils requièrent . Il faut souligner que de nos jours la méthode des approximations rationnelles n'est retenue que pour des applications purement industrielles très spécifiques.

Au chapitre suivant , nous traiterons des principales sources d'erreurs pouvant se produire dans toute procédure d'analyse par éléments finis en général , ou plus particulièrement lors de la simulation du comportement des milieux poreux saturés.

## REFERENCES

- [ 1 ] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. The Finite Element Method, volume 1. McGraw-Hill, London, 4th edition, 1989.
- [ 2 ] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. The Finite Element Method, volume 2. McGraw-Hill, London, 4th edition, 1991.
- [ 3 ] K.Washizu, 'Variational methods in elasticity and plasticity ' 2 nd Ed.Pergamon Press 1975.
- [ 4 ] M.Gurtin.'Variational principles for linear elastodynamics',Arch.Nat.Mech.Anal.,**16** 34-50 , (1969) .
- [ 5 ]E.L.Wilson and R.E.Nickell,'Application of finite element method to heat conduction analysis',Nucl.Eng.Des.,**4**, 1- 14 ,(1966) .
- [ 6 ] I.Fied.'Finite element analysis of time dependant phenomena' , J.A.I.A.A. , **7** , 1170-3 .(1969)
- [ 7 ]J.H.Argyris and D.W.Sharpe ,'Finite element in time and space', Nucl.Eng.Des.,**10** ,456-69 .(1969).
- [ 8 ] O.C. Zienkiewicz and R.L.Lewis , 'An analysis of various time stepping schemes for initial value problems 'Int .Jnl,Earthquake,Eng,Struc,Dynam.**1** , 407-8 . 1973
- [ 9 ] W.L.Wood ,and R.L.Lewis ,'A comparison of time marching schemes for the transient heat conduction equation ' , Int ,Jnl ,Num,Meth,Eng , , **9** , 679-689 ,1975.
- [10 ] N.M.Newmark , 'A method for computation of structural dynamics ' , Proc,Am,Soc ,Civ , Eng , **85** , EM3,67-94,1959
- [11]L.Fox and E.TGoodwin , 'Some new methods for the numerical integration of ordinary differential equations', Proc.Camb.Phil.Soc,**49**, 373-377, 1953.
- [12 ]T.Belytschko , H.J.Yen , and , R.Mullen , 'Mixed methods for time integration', Comp, Meth ,Appl , Eng ,**17/18** , 259-275 (1979).
- [13]C.A.Fellippa , and , K.C.Park , 'Staggered transient analysis procedures for coupled mechanical systems:Formulation ' , Comp. Meth , Mechs , Eng . , **24** , 61-111, (1980).
- [14 ]K.C.Park , ' Stabilization of partitioned solution procedures for pore-fluid -soil interaction analysis', Int .Jnl.Numer.Methods eng . , **19** , 1669-1673 (1983)
- [15 ] I.M.Smith"Some time dependant soil-structure interaction problems 'Proc.N.M.S.R.Symp.Karlsruhe . (1975)
- [16 ] J.O.P.Donnely 'The padé table in methods of numerical approximations',Handscob (eds) Pergamon , (1965) .
- [17 ] P.R.Graves-Morris (ed), 'Padé approximants and their applications', Academic Press (1973).
- [ 18 ]J.L.Siemieniuch and T.Gladwell,'On time discretisations for linear time-dependant partial differential euations 'Numerical Analysis Report N°5,Dept of Mathematics.University of .Manchester .(1974) .
- [ 19 ]G.J.Makinson,'Stable high order implicit methods for numerical solution of systems of differential equations ' , The computer journal ,**2** , 3.
- [ 20 ] S.P.Nørsett ,'One step methods of Hermite type for numerical integration of stiff systems ' ,B.I.T. ,**14**. (1974)



---

## CHAPITRE 5

---

### Estimation des erreurs

#### **5.1.Introduction.**

Il est bien connu des praticiens , que la méthode des éléments finis bien qu'elle apporte une représentation satisfaisante aux problèmes étudiés peut dans une large mesure demeurer imprécise. Ceci s'observe surtout si des dispositions particulières ne sont pas respectées .

Etant donné que les éléments quadratiques standards semblent ne pas fonctionner correctement en mécanique des milieux poreux saturés . Il sera utile , voire primordial de passer en revue toutes les sources d'erreurs possibles , pour essayer soit de les éliminer soit d'en minimiser l'impact. Ainsi on pourra complètement isoler l'origine de l'imperfection de ce type d'éléments.

Dans ce chapitre, on passera en revue en premier les résultats élémentaires de convergence de la méthode des éléments finis , puis on présentera les différentes sources d'erreurs propres à la modélisation des milieux poreux saturés .

## 5.2. Admissibilité de l'approximation "Critères de convergence."

Réécrivons la forme intégrale faible ayant conduit à la formulation du problème par éléments finis sous la forme suivante :

$$W(u, u_{,x}, u_{,y}, \dots) = \int_{\Omega} (\dots) d\Omega + \int_{\Gamma} (\dots) d\Gamma \quad (5-1)$$

$u, u_{,x}, \dots$  représentent les fonctions solutions au sens large déplacements, pressions et leurs dérivées.

L'approximation par éléments finis du champ généralisé  $u(x)$  est notée  $\bar{u}(x)$  conduit à une expression variationnelle discrétisée associée notée  $\bar{W}$  telle que :

$$\bar{W} = \{\bar{u}^*\}^T [ [K] \cdot \{\bar{u}\} - \{f\} ] = 0 \quad \forall \{\bar{u}^*\} : \text{champ virtuel quelconque.} \quad (5-2)$$

De cette manière, on dit que l'approximation éléments finis est admissible, ou que le modèle éléments finis converge de manière monotone en énergie si et seulement si :

1.  $[K]$  est inversible pour toutes les discrétisations : Condition dite de stabilité. Cette condition sera étudiée avec plus de détails au chapitre suivant.
2. La solution  $\{\bar{u}\}$  converge vers la solution exacte dans la limite lorsque la taille des éléments, notée  $h$  tend (régulièrement) vers zéro. Cette condition dite de cohérence ou de validité des approximations 'Consistency [ 1 ]. D'un point de vue purement mathématique, on dit que la solution éléments finis  $\{\bar{u}\}$  converge si l'erreur d'approximation de tous les termes de la forme intégrale faible  $W$  est d'ordre  $n \geq 1$  (La condition de stabilité étant toutefois supposée vérifiée) i.e. :

$$e_u = 0(h^n) \leq Ch^n \quad (5-3)$$

$$\text{avec } C > 0 \text{ et } n \geq 1 \quad (5-4)$$

$e_u$  : représente une norme d'erreur d'ordre  $r$  dite  $L^r$

En considérant une norme quadratique  $r=2$  on peut écrire :

$$e_u^2 = \|\{\bar{u}\} - \{u_{ex}\}\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} (\{\bar{u}\}^T - \{u_{ex}\}^T) \cdot (\{\bar{u}\} - \{u_{ex}\}) d\Omega \quad (5-5)$$

Il découle des considérations précédentes que si la forme intégrale  $W$  fait intervenir les fonctions  $u(x)$  et leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $m$ , alors les approximations de  $\bar{u}(x)$

doivent alors être complètes jusqu'à l'ordre  $m$  afin d'assurer la représentation constante des dérivées de  $\bar{u}(x)$  d'ordre  $m$ .

En mécanique du solide, ceci voudra dire que l'approximation des composantes de déplacements devront au moins contenir tous les termes constants et linéaires en  $x, y, z$ . La même remarque est aussi pertinente pour la variable surpression interstitielle.

De cette manière une base polynomiale complète sera à même de représenter tous les modes rigides ou modes à déformation nulle possibles dans chaque cas.

A la condition de complétude s'ajoute aussi une deuxième condition dite de conformité. Ainsi l'approximation est dite conforme si et seulement si toutes les fonctions solutions  $\bar{u}(x)$  apparaissant dans l'expression de  $W$  sont continues jusqu'à l'ordre  $m-1$ . Notons que la condition de conformité n'est pas d'une exigence primordiale dans la construction d'un élément fini (des éléments non conformes très performant existent), mais si cette dernière est satisfaite elle garantit conjointement avec la condition de complétude la convergence monotone en énergie de l'élément fini ainsi construit.

Il est aussi de coutume d'effectuer sur des éléments des tests de convergence ou patch test qui permettent une vérification quantitative des qualités d'un élément fini

Plusieurs auteurs, fournissent des conditions supplémentaires sur l'admissibilité et la convergence des éléments finis, et retiennent à l'unanimité que [ Consistency + Stability = Convergence [2-7 ]

Etant donné que l'élément quadratique standard, comme son nom l'indique possède une base polynomiale complète au delà de celle requise, et étant du type conforme, ce dernier ne peut théoriquement que présenter une convergence monotone bien sur si la matrice  $[K]$  est non singulière 'Condition de stabilité'.

On peut tout de suite conclure que la défaillance des éléments quadratiques standards en MMP n'est aucunement liée au choix de l'interpolation quadratique.

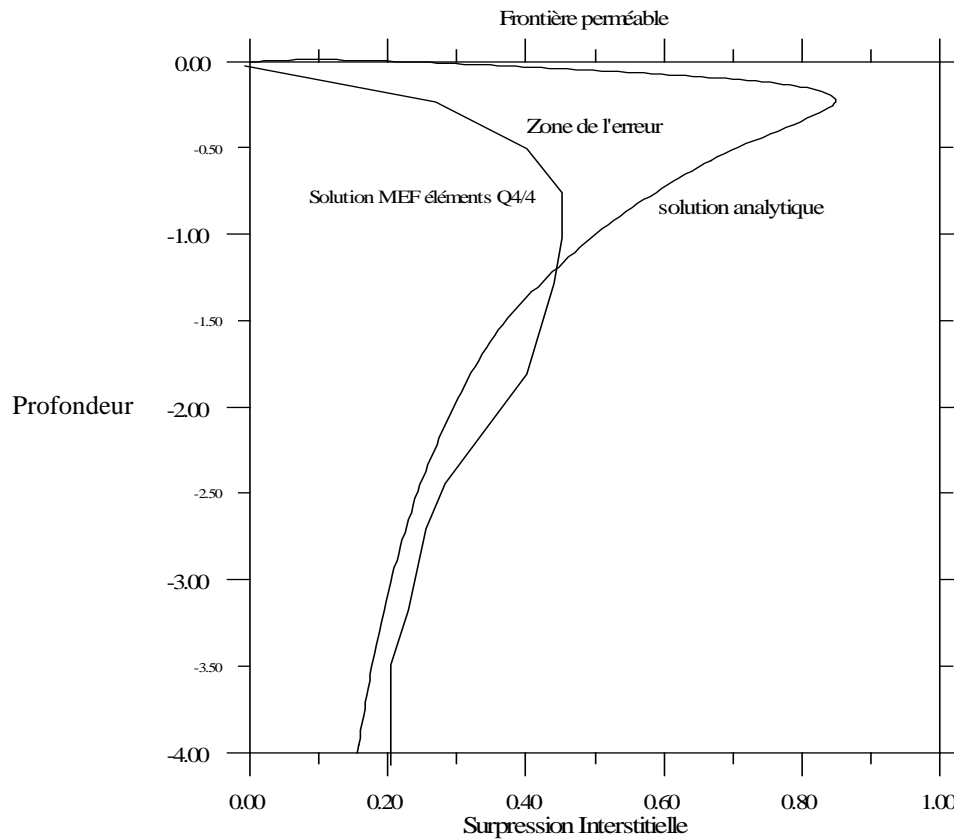
Il semble bien que c'est la condition de stabilité qui cause problème. Ceci sera discuté aux chapitres suivants

### **5.3. Erreurs propres à la modélisation des milieux poreux saturés .**

#### **5.3.1 . Erreurs dues à la présence d'une frontière drainante.**

Par sa définition même , une frontière drainante implique la nullité de la variable champ pression interstitielle "p" .

Plus particulièrement , immédiatement après application d'un chargement extérieur aux milieux poreux saturés , la distribution de la surpression interstitielle au voisinage d'une surface drainante croit rapidement d'une valeur nulle vers une valeur finie que l'on note " p " ceci se faisant sur une distance relativement petite notée  $\Delta z$ . Voir Figure Fig.5.1.



**Fig. 5.1.Singularité au voisinage d'une frontière drainante à l'instant initial.**

Les fonctions d'interpolation polynomiales classiquement utilisées dans les méthodes d'éléments finis se trouvent incapables de modéliser correctement cette singularité.

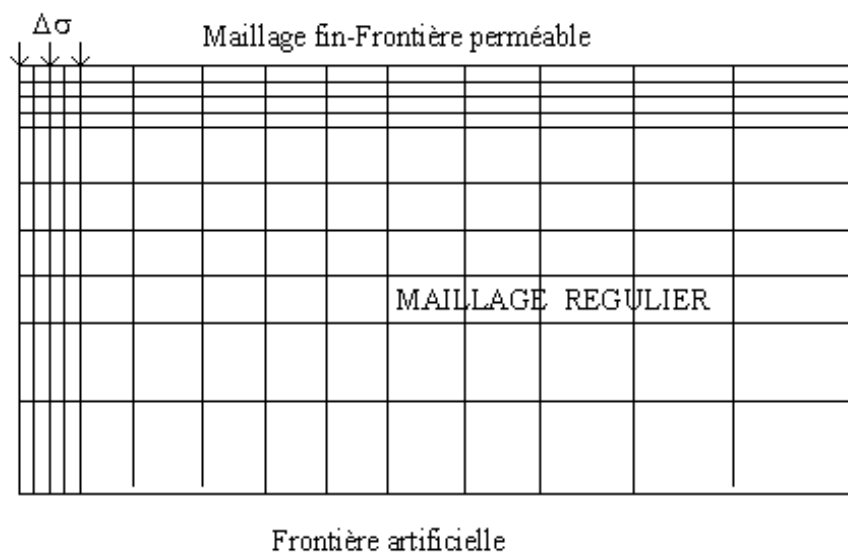
En effet , on peut aisément remarquer sur la figure Fig.5.1, que l'interpolation polynomiale ne pourra rejoindre la distribution exacte que graduellement , d'où une source d'erreur appréciable et d'autant non négligeable .

Pour parer à ce problème , il existe plusieurs alternatives possibles on citera principalement :

1. Yokoo et al [8] , ont proposé une formulation particulière au problème , laquelle ne nécessitait pas l'introduction de la pression interstitielle comme variable nodale de base aux cotés des éléments connectés à une frontière drainante. Les résultats de

cette technique furent selon ses auteurs à la limite satisfaisants .Mais ces derniers font remarquer un surcroit du temps machine lors de la résolution.

2. Buchmaier [9] , proposa l'utilisation d'éléments de transition au voisinage de la surface drainante .Il est à remarquer que cette technique très complexe du point de vue de la programmation donna des résultats jugés médiocres .
3. Une autre méthode beaucoup plus simple , mais aussi onéreuse en temps de calcul et espace mémoire consiste à raffiner le maillage à proximité directe de la surface drainante Fig.5.2. Cette manière de faire permet en augmentant le nombre de points nodaux aux abords directs de la surface drainante à la suppression interstitielle de suivre une croissance plus accentuée se rapprochant alors de la distribution réelle.Cette technique est très couramment utilisée et donne de très bons résultats.



**Fig.5.2.Raffinement du maillage au droit des frontières drainantes.**

4. La dernière technique que l'on présente est due à R.Sandhu et al [10] , utilise ce qu'on appelle des éléments finis de singularité .Ce type d'éléments très utilisé en mécanique de la rupture se révèle être d'une grande efficacité . Malheureusement , seules les variantes linéaires standard Q 4/4 et quadratique composite Q8/4 existent dans la littérature .Les éléments de singularité quadratiques standards Q 8/8 sont quasi inexistant il faudrait alors les formuler et les expérimenter pour enfin les utiliser dans un code de calcul .Ceci nous éloignera de l'objectif initialement fixé dans la présente étude.

En définitive , pour lever l'ambiguïté et éliminer tout risque d'erreur lié à la présence d'une frontière drainante, on fera systématiquement usage de la méthode basée sur le raffinement du maillage au voisinage des frontières perméables.

### 5.3.2 . Erreurs dues à la troncature du domaine physique.

De par leur nature même , les milieux géologiques (Sols et Roches) , ne peuvent être considérés comme bornés dans l'espace et l'on parle de milieux infinis ou semi infinis.

L'étude de ces milieux grâce à des procédures analytiques lorsque cela est possible ,traite les limites infinies du domaine de manière quasi systématique.

Mais lorsque de pareils domaines sont étudiés à l'aide de procédures numériques telles que la méthode des éléments finis la modélisation des frontières infinies serait impossible.

En effet , il serait illusoire de vouloir étendre le maillage à l'infini : le nombre des variables nodales deviendrait très vite trop important pour la plus puissante des machines .C'est ainsi que l'on a coutume dans pareils cas de tronquer le domaine physique infini en choisissant une frontière artificielle suffisamment éloignée de la zone chargée , à laquelle on imposerait des conditions aux limites particulières.

Cette manière de faire , il est clair introduit dans le calcul une erreur supplémentaire qu'il faudrait minimiser au maximum .

D'une manière générale , plusieurs tests de convergence sont effectués avant de fixer définitivement la position de la frontière artificielle.

Signalons au passage qu'une méthode de loin beaucoup plus fiable consisterait à utiliser des éléments dits infinis .De tels éléments se sont avérés très performants en mécanique des milieux continus et il en existe une très grande variété [11-13] .

En mécanique des milieux poreux saturés , Selvadurai et al [ 14 ] ont proposé un élément infini composite de type Q 8/4 destiné à l'étude des problèmes quasi statiques de consolidation , mais pouvant être étendu au cas de la théorie générale .

Cet élément infini , se révéla être d'une grande utilité et d'une très bonne qualité de convergence .Malheureusement il ne peut être incorporé dans le cadre de notre étude à cause de la discontinuité qu'il provoquerait dans le champ de la surpression interstitielle s'il est assemblé à un élément Q8/8 standard.

On pourrait sans grande difficulté , s'inspirer de la formulation de l'élément infini composite Q8/4 pour formuler un élément infini standard Q8/8 , mais on serait obligé de lui faire subir des tests de convergence très poussés .Ceci ne représente nullement l'objectif fixé dans la présente recherche .

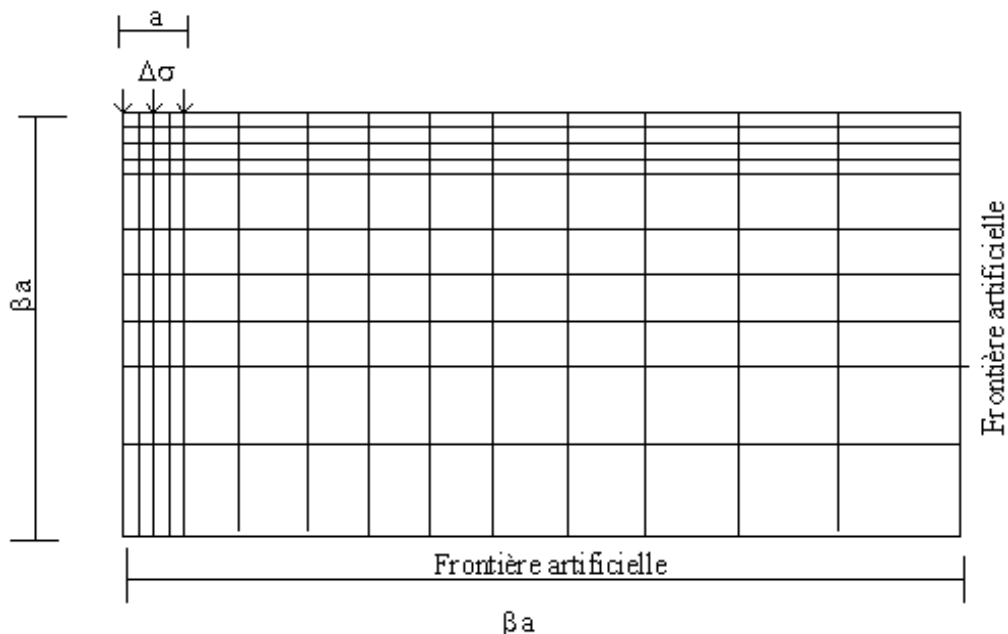
Toutefois , dans le cadre de la présente étude , la localisation de la frontière artificielle ne se fera pas de manière aléatoire mais sera effectuée en observant certains résultats

issus de l'article de Selvadurai et al [ 14 ] lors de l'étude des éléments infinis composites Q8/4 .

En particulier , les auteurs ont introduit un paramètre de maillage noté  $\beta$  et désigné comme facteur d'éloignement de la charge fig.5.3.

Une étude paramétrique fut alors entreprise par les auteurs afin de fixer la valeur optimale acceptable à donner à ce paramètre.

La conclusion voulait que l'on prenne  $\beta=10$  : de cette manière l'erreur commise serait toujours inférieure à 10 % garantissant l'acceptabilité de la solution.



**Fig.5.3.Frontières artificielles appliquées au domaine étudié .**

### 5.3.3 . Erreurs dues au mauvais conditionnement de la matrice globale.

Dans la modélisation des milieux poreux saturés à l'aide d'éléments finis de n'importe quelle catégorie , on est toujours confrontés à un problème de mauvais conditionnement de la matrice globale  $[K_G]$  .

En effet les termes  $k_{ij}$  associés au squelette solide sont proportionnels au module de Young non drainé  $E'$  de l'ordre de  $(10^4 \text{ à } 10^7 \text{ KN/m}^2)$  , tandis que les termes  $k_{p, q}$

associés au fluide interstitiel sont proportionnels à la perméabilité du milieu , laquelle est de l'ordre de ( $10^{-7}$  à  $10^{-3}$  m/s).

Il est alors clair qu'une matrice dont les pivots présentent un si grand écart possède un degré de mauvais conditionnement assez élevé , et peut à défaut de précautions particulières fournir une fois la résolution (élimination de Gauss ) effectuée des résultats sans réelle valeur .

Par conséquent , nous nous devons d'éliminer l'impact du mauvais conditionnement sur la matrice globale  $[K_G]$  au moyen de techniques spécifiques , et on utilisera pour la circonstance la méthode du facteur d'échelle (Scale factor).

Nous expliciterons cette méthode pour les problèmes du premier ordre , la généralisation aux problèmes du second ordre étant toutefois triviale.

Dans cette méthode , on essaye de rétablir un conditionnement acceptable de la matrice globale  $[K_G]$  en affectant certains de ses termes par un coefficient "s" ou "1/s" selon le cas .

Ainsi , les sous matrices affectées aux surpressions interstitielles , sont multipliées par s .Les surpressions interstitielles sont alors remplacées par 1/s .

Afin de rétablir la symétrie du système , on devra multiplier les matrices de couplage aussi par s .

Le système obtenu s'écrira enfin comme

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -sc_{pu} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\bar{u}} \\ \dot{\bar{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{uu} & sk_{up} \\ 0 & s^2k_{pp} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{u}} \\ \frac{1}{s}\ddot{\bar{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_u \\ \frac{1}{s}f_p \end{Bmatrix} \quad (5-6)$$

L'effet du facteur d'échelle est de relever la magnitude des éléments de la sous matrice  $k_{pp}$  à un facteur  $s^2$  près. De ce fait le problème du mauvais conditionnement n'apparaît plus , et on pourra sans problème effectuer un procédure de résolution type Gauss .

Il faut toutefois noter , que la valeur du facteur d'échelle s ne peut être fixe et dépendra de l'écart entre la perméabilité (k , m/s) et le module de Young , E (KN/m<sup>2</sup>) en conditions drainées .

Plusieurs tests doivent être entrepris avant de choisir une valeur pour le facteur d'échelle s , lequel est fonction de k , E et  $\Delta t_0$  .

#### 5.3.4 . Erreurs dues au choix du schéma d'intégration temporel.



Nous avons présenté au chapitre 4 les principales méthodes d'intégration des équations dans le domaine temporel sans pour autant parler des performances numériques de chacune d'entre elles.

Dans ce qui suit, nous allons nous focaliser sur la précision des différents schémas d'intégration et ce aussi bien pour les problèmes du premier ordre que ceux du

second ordre. Ceci nous permettra en fin de parcours de choisir le schéma d'intégration garantissant un maximum de précision à la solution.

### 5.3.4.1 .Oscillations et instabilité des méthodes de récurrence à deux points.

Nous avons remarqué à la section [4.2.1.1] équation. (4-6) , l'existence de plusieurs schémas de récurrence chacun basé sur un choix particulier du paramètre  $\theta$  .

Parmi les schémas proposés il en existe certains qui donnent de meilleurs résultats que d'autres ,une question se pose alors et se résume comme suit :

Quel est le taux de l'erreur que l'on commet lors de l'intégration des équation par tel ou tel schéma ?.

Ou plus précisément comment peut on garantir à la solution un maximum de précision ?.

On est alors amené , à étudier avec plus de détails les questions de la convergence de la solution.

Dans une telle étude , il sera commode de projeter le système algébrique original (4-1) dans une nouvelle base modale associée  $F_u$  [16 ], afin que ce dernier se découple donnant un ensemble d'équations scalaires indépendantes de la forme :

$$c_i \dot{y}_i + k_i y_i + f_i = 0 \quad (5-7)$$

$y_i$  étant la composante duale de  $a_i$  dans la base modale , on écrit :

$$\{a\} = [\Phi] \cdot \{y\} \quad (5-8)$$

où  $[\Phi]$  représente la matrice modale .

Dans le cas d'une réponse en régime libre la relation de récurrence (4-6) appliquée à l'équation (5-7) donne

$$\left(\frac{c_i}{\Delta t} + k_i\theta\right)y_i^{n+1} + \left(\frac{-c_i}{\Delta t} + k_i(1-\theta)\right)y_i^n = 0 \quad (5-9)$$

En posant

$$y_i^{n+1} = \lambda \cdot y_i^n \quad (5-10)$$

l'équation (5-9) pourra s'écrire comme :

$$\lambda\left(\frac{c_i}{\Delta t} + k_i\theta\right) + \left(\frac{-c_i}{\Delta t} + k_i(1-\theta)\right) = 0 \quad (5-11)$$

On constate que la solution diverge si  $|\lambda| > 1$ : le problème devient instable alors qu'une solution amortie en décroissance exponentielle est attendue pour ce type de problème.

Aussi pour  $\lambda < 0$ , nous constatons un comportement oscillant de la solution qui ne représente pas la solution souhaitée.

A partir de l'équation (5-11), nous définissons ce que l'on appelle l'équation caractéristique comme :

$$\lambda = \frac{1 - k_i(1-\theta) \cdot \frac{\Delta t}{c_i}}{1 + k_i\theta \cdot \frac{\Delta t}{c_i}} \quad (5-12)$$

On voit immédiatement que si l'on impose à  $|\lambda| < 1$ , le second membre de (5-12) doit être supérieur à **-1**.

$$\text{En posant } \omega_i = \frac{k_i}{c_i} \quad (5-13)$$

$\omega_i$  désignant la valeur propre associée à l'équation découplée "i":

En utilisant l'équation (5-13), on pourra réécrire la condition sur  $\lambda$  comme :

$$1 - \omega_i\Delta t(1-\theta) > -1 - \omega_i\Delta t\theta \quad (5-14-a)$$

ou encore :

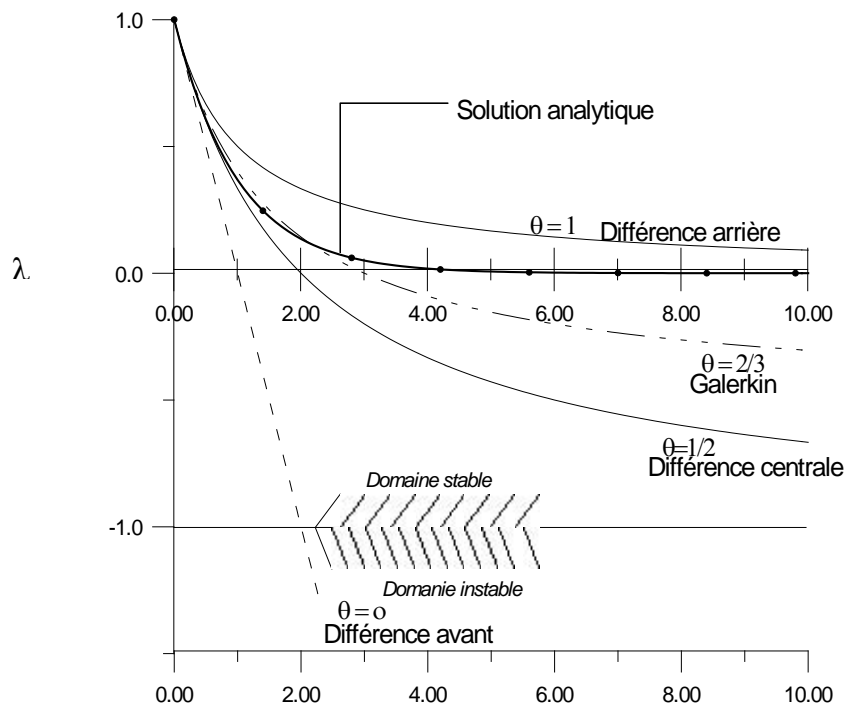
$$\omega_i\Delta t(2\theta - 1) > -2 \quad (5-14-b)$$

On peut facilement remarquer que les schémas pour lesquels  $\theta \geq \frac{1}{2}$ , ces derniers sont inconditionnellement stables (solution bornée absence d'oscillations parasites).

Lorsque  $0 < \theta < \frac{1}{2}$ , la stabilité est conditionnelle et exige que :

$$\omega_i \Delta t < \frac{2}{1 - 2\theta} \quad (5-15)$$

L'étude de l'équation caractéristique revêt un caractère important dans les procédures d'intégrations temporelles des équations du premier ordre. La fig.5.4, montre les variations du paramètre  $\lambda$  simultanément en fonction de  $\Delta t$  et de  $\omega_i$



**Fig.5.4. Variation de  $\lambda$  en fonction de  $\omega_i \Delta t$  pour différents schémas d'intégration.**

On constate dès lors que le choix du pas de temps  $\Delta t$  conditionne grandement la qualité de chaque schéma d'intégration.

Ainsi pour des valeurs importantes de  $\Delta t$ , l'ensemble des schémas proposés donnent des solutions divergentes  $\lambda \rightarrow -1$  exception faite pour le schéma des différences arrières ( $\theta = 1$ ).

La conclusion est évidente , dès que  $\theta < 1$  des résultats oscillants sont probables [17].

La réponse dans le temps d'un système à plusieurs degrés de liberté n'est autre que la combinaison linéaire de toutes les réponses modales .Or on observe en pratique que la part la plus importante de la réponse provient généralement des modes de plus basse fréquence  $\omega_1$ .Ainsi en utilisant une méthode inconditionnellement stable on choisit généralement des pas de temps largement supérieurs à ceux nécessaires pour obtenir une bonne précision pour les fréquences les plus élevés  $\omega_i$  , et les oscillations parasites

peuvent ne pas s'amortir comme elles devraient le faire en réalité pour des méthodes inconditionnellement stables pour une valeur de  $\lambda$  négative .

Ce phénomène est observé pour la méthode de Cranck-Nicolson  $\theta = \frac{1}{2}$  , et on utilise en général pour parer à cet inconvénient des techniques numériques particulières telles que celles qui consistent à faire la moyenne des résultats pour des pas de temps successifs .

Une méthode intéressante et surtout très efficace supprimant pratiquement toutes les oscillations parasites de la solution stipule l'utilisation d'un paramètre  $\theta > \frac{1}{2}$ .En pratique l'utilisation de procédures de type Galerkin avec  $\theta = \frac{2}{3}$  se sont soldés d'une réussite quasi totale supprimant toutes les erreurs ainsi que les oscillations parasites.

Des méthodes conditionnellement stables , telles que les méthodes explicites pour lesquelles  $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$  auront l'inconvénient de présenter presque toujours une instabilité numérique à chaque fois que le pas de temps retenu dans l'analyse dépassera celui imposé par la plus grande valeur propre du système.

Bien que cela semble handicaper ce genre de procédures , ces dernières n'en demeurent pas moins attrayantes du point de vue économie de calcul. En effet dans des procédures de ce type on évite pour chaque pas de temps  $\Delta t$  d'inverser le système algébrique mais les incréments de temps retenus sont souvent assez importants.

Une question se pose alors sur l'estimation de la valeur critique du pas de temps  $\Delta t$ . Cette dernière étant conditionnée par la valeur de la plus grande valeur propre du système , on pourrait croire qu'une résolution d'un problème aux valeurs propres s'impose à chaque fois. En réalité il n'en est rien , car Irons [ 15 ] a démontré que la plus grande valeur propre d'un système à plusieurs degrés de liberté est toujours inférieure à la la plus grande valeur propre d'un élément du système pris isolément. De cette manière on peut obtenir une estimation sécuritaire du pas de temps critique à retenir dans l'analyse .

En conclusion à ce qui vient d'être établi , on retiendra pour les problèmes du premier ordre un paramètre d'intégration  $\Theta=1$ . Cette manière de faire aura pour effet d'éliminer tout risque d'oscillations parasites , la précision à ce stade de l'étude ne représente pas vraiment un grand intérêt , surtout que l'on sait que l'on s'est fixé comme tâche initiale la connaissance de la cause des imperfections des éléments quadratiques standards.

### 5.3.4.2 .Oscillations et instabilité des méthodes de récurrence à trois points.

En suivant la même méthodologie que pour les problèmes du premier ordre , nous allons dans ce qui suit étudier en détails la stabilité de la solution pour les schémas de récurrence à trois points.

Plaçons nous alors dans la base duale associée au système (4-12) ce dernier se découple alors en un ensemble d'équations scalaires de la forme

$$m_i \ddot{y} + c_i \dot{y}_i + k_i y_i + f_i = 0 \quad (5-16)$$

Etudions alors la réponse en régime libre de l'équation (5-16) :  $f_i = 0$ .

$$\text{Posons : } \omega_i^2 = \frac{k_i}{m_i} \quad (5-17)$$

Supposant que la solution soit de la forme :

$$(y_i)_{n+1} = \lambda (y_i)_n \quad (5-18-a)$$

$$(y_i)_n = \lambda (y_i)_{n-1} \quad (5-18-b)$$

De cette manière l'équation de récurrence (I5-15) devient :

$$\begin{aligned} \lambda^2 [m_i + \gamma \Delta t c_i + \beta \Delta t k_i] + \lambda [-2m_i + (1 - 2\gamma) \Delta t c_i + (\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma) \Delta t^2 k_i] \\ + [m_i - (1 - \gamma) \Delta t c_i + (\frac{1}{2} + \beta - \gamma) \Delta t^2 k_i] = 0 \end{aligned} \quad (5-19)$$

La relation (5-19) est désignée comme l'équation caractéristique car ce sont les racines de cette équation qui détermineront le caractère de la solution.

Afin d'imposer à la solution qu'elle reste bornée on devra limiter le domaine de variation du module de la racine de façon à satisfaire :

$$|\lambda| \leq 1 \quad (5-20)$$

Dans le cas d'une oscillation non amortie la solution peut s'exprimer comme :

$$y_i = \bar{y}_i e^{-i\omega t} \quad (5-21)$$

$$\text{D'où :} \quad \lambda = \frac{(y_i)_{n+1}}{(y_i)_n} = e^{-i\omega \Delta t} \quad (5-22)$$

Avec une valeur absolue de  $|\lambda| = 1$ , la solution est non amortie permanente. Pour toute méthode où  $|\lambda| < 1$  donnera une solution artificiellement amortie.

Considérons l'équation caractéristique avec  $c_i = 0$  et posons :

$$p_i = \frac{k_i}{m_i} \Delta t^2 = \omega^2 \Delta t^2 \quad (5-23)$$

on obtient alors :

$$\lambda^2 [1 + \beta p_i] + \lambda [-2 + (\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma) p_i] + [1 + (\frac{1}{2} + \beta - \gamma) p_i] = 0 \quad (5-24)$$

Soient :

$$g = \frac{(\frac{1}{2} + \gamma) p_i}{1 + \beta p_i} \quad (5-25-a)$$

et

$$h = \frac{(\frac{1}{2} - \gamma) p_i}{1 + \beta p_i} \quad (5-25-b)$$

Dans ce cas les racines de l'équation (5-24) s'écrivent :

$$\lambda_{1,2} = \frac{(2 - g) \pm \sqrt{(2 - g)^2 - 4(1 + h)}}{2} \quad (5-26)$$

Les racines sont alors complexes si et seulement si :

$$4(1+h) > (2-g) \quad (5-27)$$

ou encore si :

$$p_i \left[ 4\beta - \left( \frac{1}{2} + \gamma \right)^2 \right] > -4 \quad (5-28)$$

le module de la racine  $\lambda$  devient :

$$|\lambda| = \sqrt{1+h} \leq 1 \quad (5-29)$$

Ce qui entraîne la condition :

$$-1 < h = \frac{\left( \frac{1}{2} - \gamma \right) p_i}{1 + \beta p_i} < 0 \quad (5-30)$$

La résolution des inéquations (5-28) et (5-30), conduit à :

$$\beta \geq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \gamma \right)^2 \quad (5-31-a)$$

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad (5-32-b)$$

$$\gamma + \frac{1}{2} + \beta \geq 0 \quad (5-31-c)$$

Les équations (5-31-a-b-c) garantissent la stabilité inconditionnelle du schéma de récurrence quelle que soit la valeur de  $p_i$  [18-20].

Il est à remarquer que même si les conditions (5-31-a-b-c) ne sont pas vérifiées, la stabilité peut encore être obtenue si

$$p_i < p_{\text{crit}} \quad (5-32-a)$$

ou encore si

$$\Delta t < \Delta t_{\text{crit}} \quad (5-32-b)$$

Deux méthodes seulement parmi celles établies sur la figure Tab.4.1 sont inconditionnellement stables, et le choix sur  $\gamma$  et  $\beta$  est :

$$\gamma = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta \geq \frac{1}{4} \quad (5-33-a)$$

$$\gamma = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \beta \geq \frac{1}{4} \quad (5-33-b)$$

Dans le présent travail , nous retiendrons comme paramètres du schéma d'intégration à deux points les valeurs de  $\gamma = \frac{1}{2}; \beta = \frac{1}{4}$  ceci nous garantira un schéma inconditionnellement stable sans introduire aucun amortissement artificiel de la solution

#### **5.4.Résumé.**

Dans ce chapitre , nous avons passé en revue les principales sources d'erreurs probables lors de la modélisation des milieux poreux saturé à l'aide d'éléments finis.

De plus , nous savons maintenant comment dans le meilleur des cas éliminer les erreurs possibles , ou au pire d'en minimiser considérablement l'impact .

Dès lors , tout comportement illégitime de l'élément Q8/8 standard , aura pour origine la cause réelle de l'imperfection de ce type d'élément. Ceci nous facilitera grandement la tâche dans la recherche d'une solution visant à redresser le comportement de cette catégorie d'éléments .



## **REFERENCES.**

- [ 1 ] G.Strang , O.J. Fix ' Analysis of the finite element method ' , Prentice Hall , 1973 (Wellesley-Cambridge Press ) 1988 .
- [ 2 ] Taylor .R.L , Simo. J.C , Zienkiwicz .O .C ,Chan .C.H. , ' The patch test -A condition for assessing FEM convergence ' , Int ,Jnl , Num , Meth , Eng .VOL **22** , pp 39-62 , 1986.
- [ 3 ] Arantes e Oliveira , E.R . , 'The patch test and the general convergence criteria of the finite element method' ,Int.Jnl.Solids,Struct.Pergamon Press Vol 13,pp 159-178. 1977
- [ 4 ] Ciarlet ,P.G. 'The finite element method for elliptic problems' .North Holland . 1978 .
- [ 5 ] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. The Finite Element Method, volume 1. McGraw-Hill, London, 4th edition, 1989.
- [ 6 ] J.L.Batoz, Gouri Dhatt , 'Modélisation des structures par éléments finis 'Vol .I.Editions Hermès.1990.
- [ 7 ] Hughes ,T. 'The finite element method -Linear elastic and dynamic finite element 'analysis ' , Prentice Hall 1987 .
- [ 8 ] Y.Yokoo , K.Yamagata , and P.Nagaonka 'Finite element method applied to Biot's consolidation theory ' , Soils and Found , **11** , pp 29-46 . 1971
- [ 9 ] R.Buchmaier 'Personnal communication' 1980
- [ 10 ] R.Sandhu , S.C.Lee , H.I.The , ' Special finite elements for analysis of soil consolidation' , Int, Jnl , Num , Anal ,Meth ,Geom, vol **9**,pp 125-147 . 1985 .
- [ 11 ] P. Bettess , ' Infinite elements ' Int , Jnl , Num , Meth ,Eng ., **11** , pp 53-64 .1977
- [ 12 ] P.Kumar , 'Static infinite elements formulation. ' , Jnl ,Struc , Eng .ASCE **111** , 2355-2372 -1987
- [ 13 ] O.C.Zienkiewicz., C.Emson ., P. Bettess . 'A novel boundary infinite element ' , Int, Jnl ,Num , Meth ,Eng . , **19** , pp 393-404 .1983 .
- [ 14 ] A.P.S.Seladurai and Rajagopal Karpurapu 'Composite infinite element for modelling unbounded Saturated-Soil media 'Jnl,Geotech,Eng .Vol 115 N°11 Nov 1989 .ASCE.

- [ 15 ] B.M.Irons 'Application of a theorem on eigenvalues to finite element problems ', Univ, of Wales , Dept of Civil Engineering , Swansea , 1970 (CR/132/70).
- [ 16 ] C.C.Fu , 'On the stability of explicit methods for numerical integration of the equation of matrices in finite element methods ' , Int , Jnl , Num , Meth , Eng , 4 , 95-107 , 1972
- [ 17 ] T.J.R.Hughes , and , W.K.Liu , 'Implicit-Explicit finite element in transient analysis', Jnl. Appl. Mech. ,A.S.M.E. Vol .45 , pp 371-378 (1978)
- [18 ] K.J.Bathe , and E.L.Wilson, 'Stability and accuracy analysis of direct integration methods' Int , J , arthquake, Struct , Dynam , 1,283-291 , 1973
- [ 19 ] D.Shantaram , D.R.J.Owen , O.C.Zienkiewicz , 'Dynamic transient behaviour of two and three dimensional structures including Plasticity , large deformations and fluid interaction', Int , J , Earthquake, Struct , Dynam , 4,561-578 , 1976
- [ 20 ] R.D.Kreig , and , S.W.Key , 'Transient shock response by numerical time integration ' , Int , Jnl , Num , Meth , Eng , 7 , 273-286 , 1973

---

## CHAPITRE 6

---

### Mise en évidence et origine des oscillations parasites

#### **6.1.Introduction.**

Dans ce chapitre , on tentera en premier lieu de mettre en évidence les oscillations parasites de la solution puis d'identifier au moyen de tests de simulation numériques simples leur origine .

Ce chapitre est en fait la clé de voûte de la présente recherche , car c'est autour de ce dernier que s'articule l'ensemble des différents chapitres , surtout si l'on envisage à redresser le comportement des éléments quadratiques standards Q8/8.

## 6.2. Position du problème.

Comme il a été développé aux chapitres précédents, la modélisation du comportement des milieux poreux saturés par éléments finis, peut être mise au point à l'aide de divers types d'éléments. On peut ainsi en distinguer trois grandes classes.

1. Eléments linéaires.
2. Eléments quadratiques standards.
3. Eléments composites.

La première classe concerne des éléments de forme triangulaire ou quadrilatérale. Vu la nature des milieux poreux saturés, Ces éléments sont en réalité la superposition de deux éléments l'un solide l'autre fluide judicieusement couplés entre eux. Ainsi pour cette catégorie d'éléments la globalité des variables nodales  $u_x$ ,  $u_y$ , et  $p$  obéissent à une variation linéaire le long des cotés de l'élément voir Fig.6.1-a.

C'est ce type d'éléments qui a été développé initialement par Sandhu et Wilson [ 1 ] en 1969 afin d'étudier certains problèmes relatifs à la théorie de la consolidation des sols.

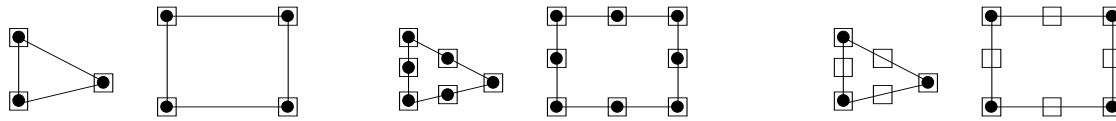
Mais ces derniers ont très vite observé que cette classe d'éléments était pauvre en qualité de convergence, et seul un raffinement poussé du maillage permettait d'approcher certains résultats analytiques.

La seconde classe d'éléments concerne aussi des éléments de forme triangulaire ou quadrilatérale. Dans cette classe d'éléments, la globalité des variables nodales  $u_x$ ,  $u_y$ , et  $p$  obéissent cette fois à une variation quadratique le long des cotés de l'élément voir Fig.6.1-b.

Apparemment, ce type d'éléments peut sembler plus riche que le précédent mais malheureusement, plusieurs chercheurs qui lors de la simulation numérique utilisant ce type d'éléments ont observé des comportements oscillatoires inexplicables qui s'écartent beaucoup des résultats attendus surtout pour des pas de temps  $\Delta t$  voisins de zéro [ 2 ].

- La troisième classe d'éléments est en fait une classe « hybride » d'où la désignation d'élément composite que l'on donne souvent à ce type d'éléments. En réalité ces éléments « composites » ne sont d'autre que la superposition d'un élément solide dont les variables nodales en l'occurrence les déplacements  $u_x$ ,  $u_y$  obéissent à une variation quadratique, et d'un élément fluide dont les variables nodales ( Pressions) suivent une variation linéaire voir Fig.6.1-c.

C'est ce type d'éléments qui semble retenir l'attention de l'unanimité des chercheurs, suite aux bons résultats qu'il fournit (comparé aux éléments linéaires).



(a) Élément linéaire

(b) Élément quadratique

(c) Élément composite

□ : Variables nodales type déplacements . ● : Variables nodales type pression.

**Fig. 6.1. Divers types d'éléments en mécanique des milieux poreux.**

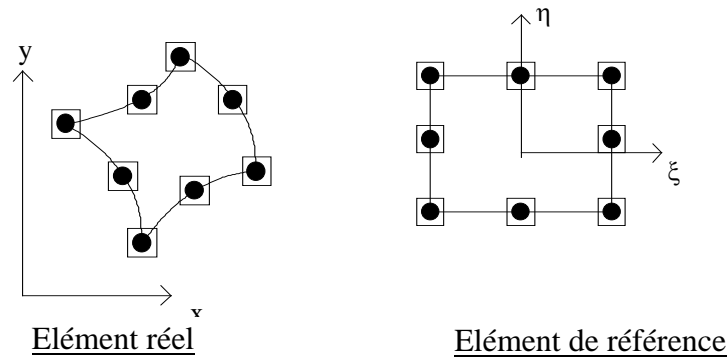
Dans ce chapitre on essaiera dans un premier temps de mettre en évidence les résultats oscillatoires obtenus avec les éléments quadratiques standards, puis dans un second temps d'identifier leurs origine pour tenter au chapitre suivant de les éliminer .

L'attention que nous donnons aux éléments quadratiques standards est complètement justifiée, surtout si l'on sait que c'est grâce uniquement à ce type d'éléments que l'on pourra :

1. Avoir de très bonnes prédictions de la déformation du squelette solide aux premiers instants suivant l'application du chargement comme déjà mentionné par Sandhu et al.[ 2 ]
2. Pouvoir modéliser correctement des contours courbes.
3. Faciliter d'avantage la programmation et l'introduction quasi systématique des données grâce à l'emploi de générateurs automatiques des maillages.
4. Disposer d'un élément fini théoriquement excellent en qualité de convergence.

### **6.3. Théorie quasi-statique. Simulation de la consolidation unidimensionnelle (patch test)**

L'élément que nous nous proposons d'étudier , et qui est censé représenter à nos yeux la classe des éléments quadratiques standards est l'élément Q8/8 Fig.6.2.



**Fig. 6.2.Élément quadratique standard Q8/8.**

Dans un premier temps nous essaierons de retrouver les résultats oscillatoires déjà observés .

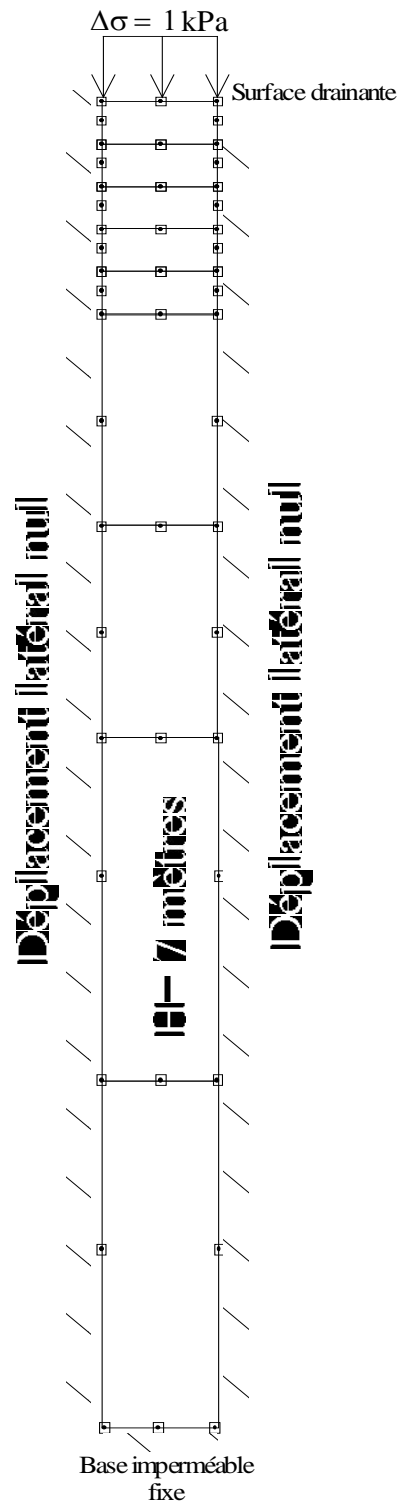
Pour ce faire nous nous proposons de faire la simulation numérique en théorie quasi statique de la consolidation unidimensionnelle d'une couche d'argile saturée à l'aide d'éléments bidimensionnels de type Q8/8. Ceci se fera en fixant bien sur correctement les conditions aux limites. On recherchera par ailleurs la solution à l'instant initial  $\Delta t = 0^+$  (distribution de la surpression à l'instant initial en conditions non drainées)

Les caractéristiques géométriques et mécaniques du problème se résument comme suit.

- Hauteur totale de la couche  $H=7$  Mètres.
- Drainage sur la face supérieure seulement.
- Base supposée fixe.
- Module d'élasticité longitudinal  $E=6000 \text{ kN/m}^2$
- Coefficient de poisson  $\nu=0.4$
- Perméabilité dans le cas isotrope  $k_x=k_y=1.e^{-4} \text{ m/s}$
- Chargement extérieur consistant en un seul incrément  $\Delta\sigma =1.\text{kPa}$
- $\Delta T=1.e^{-6} \text{ s}$  (Instant initial)

Le maillage retenu pour l'étude consiste en l'assemblage de 9 Eléments quadratiques standards Q 8/8.

Le maillage à été volontairement raffiné sur la surface drainante afin de pouvoir simuler au mieux la singularité à ce niveau [ 3 ].Voir fig. 6.3.



**Fig. 6. 3. Modélisation consolidation unidimensionnelle. Maillage 9 éléments Q8/8**

La solution analytique à ce problème, à été formulée pour la première fois par Terzaghi et Frohlich en 1935 [ 4 ] , et dans ce cas précis ( $t=0$ ) elle s'exprime par  $p = \Delta\sigma$  sur toute la hauteur de la couche d'argile (sauf pour les points situés sur la frontière drainante où  $p=0$ ).

En réalité après résolution, le résultat est tout à fait autre à celui prédit par la solution analytique, et le tableau Tab .6.1. donne des indications sur l'évolution de la surpression interstitielle sur la hauteur de la couche étudiée.

PROFONDEUR (z)	Surpression Interstitielle initiale $\Delta t=1E^{-6}$
0.0	0.000
0.10	1.500
0.20	0.000
0.30	1.500
0.40	0.000
0.50	1.500
0.60	0.000
0.70	1.500
0.80	0.000
0.90	1.500
1.00	0.000
1.50	1.500
2.00	0.000
2.50	1.500
3.00	0.000
4.00	1.500
5.00	0.000
6.00	1.500
7.00	0.000

**Tableau .6.1. Surpressions interstitielles.**

**Maillage à 9 Eléments quadratiques standards**

L'examen des résultats précédents révèle que pour les noeuds sommets de tous les éléments la surpression interstitielle est identiquement nulle, toutefois pour les noeuds secondaires (intermédiaires) elle est égale à:

$$P=1.5 \Delta\sigma$$

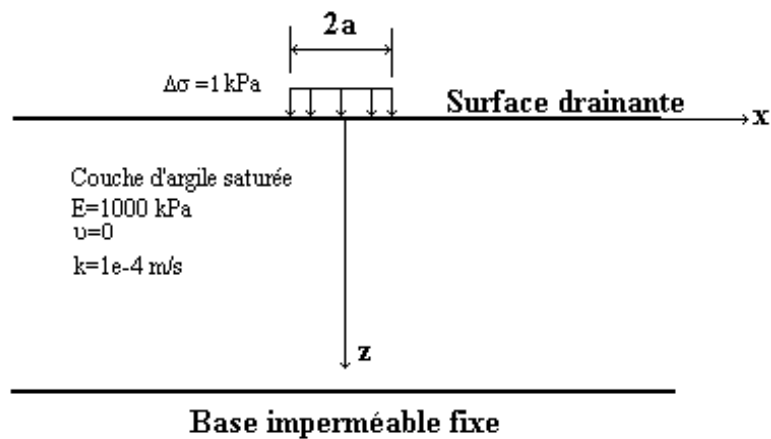
Il est alors clair que la solution obtenue est à rejeter, et on confirme bien ainsi les résultats oscillatoires observés auparavant par plusieurs chercheurs Sandhu et al[ 2 ], chose qui semble attester l'incapacité que possède les éléments quadratiques standards à représenter correctement le phénomène de la consolidation surtout aux premiers instants suivant le chargement ( $\Delta t$  voisin de zéro).



### 6.4. Théorie quasi-statique. cas de la consolidation bidimensionnelle en déformation plane.

Afin de vérifier que le comportement oscillatoire obtenu lors de la simulation unidimensionnelle est en réalité tout à fait général à cette catégorie d'éléments, on se propose à ce niveau d'élaborer une simulation numérique à deux dimensions en déformations planes.

Il s'agit alors de déterminer le champ des surpressions interstitielles dans un massif semi infini chargé par une densité de charges « q » s'étendant sur une distance de " 2a " Fig. 6.4.



**Figure. 6. 4. Problème quasi statique de la consolidation bidimensionnelle**

La solution à ce problème pour des instants  $t$  voisins de zéro à été donnée par Schiffman et Chen en 1969 [ 5 ], et qui s'écrit comme :

$$p = \frac{\Delta\sigma}{\pi} \left[ \tan^{-1} \frac{2 \cdot a \cdot z}{z^2 + x^2 - a^2} + \left[ 2 \left( \frac{a}{\eta} \right) \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \right] \cdot \left[ \frac{x+a}{z^2 + (x+a)^2} - \frac{x-a}{z^2 + (x-a)^2} \right] \right] \quad (6-1)$$

Avec:

$$\eta = \frac{1 - \nu'}{1 - 2\nu'} \quad : \text{Constante adimensionnelle auxiliaire.}$$

$$\tau = \frac{\bar{C}t}{a^2} \quad : \text{Facteur temps.}$$

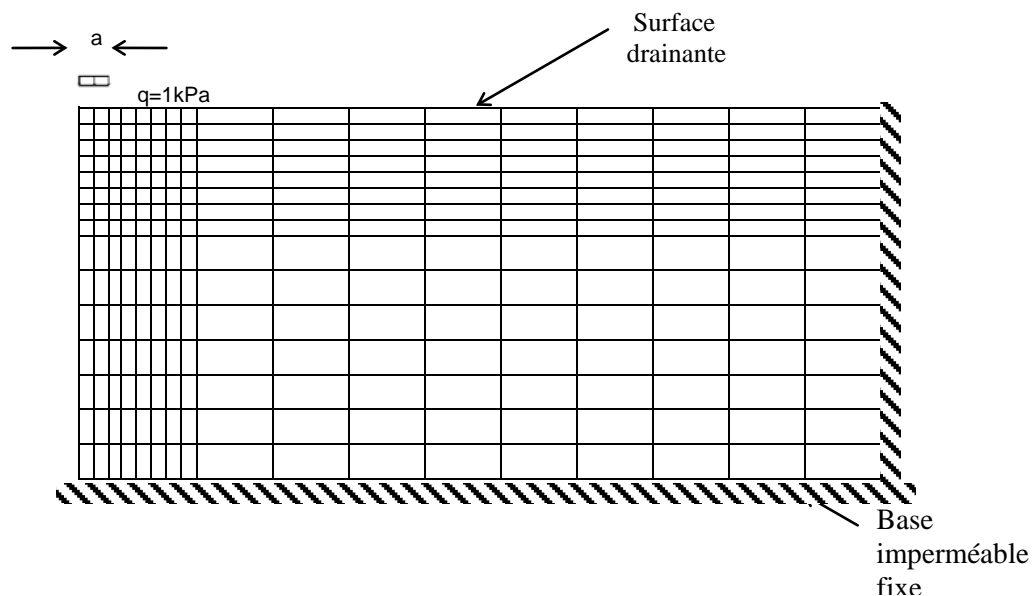
$$\bar{C} = \frac{2G'k}{\gamma_w} : \text{Coefficient de consolidation.}$$

$G'$  : Module d'élasticité transversal en conditions drainées.

$k$  : Perméabilité du milieu supposé isotrope.

Vu la symétrie du problème, seule la moitié du domaine devra être modélisée en prenant bien soin d'imposer les conditions aux limites appropriées.

Pour ce faire , on choisira un maillage assez fin comprenant 255 éléments (17 selon la longueur ,15 selon la hauteur ) fig.6.5.On prendra aussi soin de bien raffiner ce dernier au voisinage de la surface drainante.

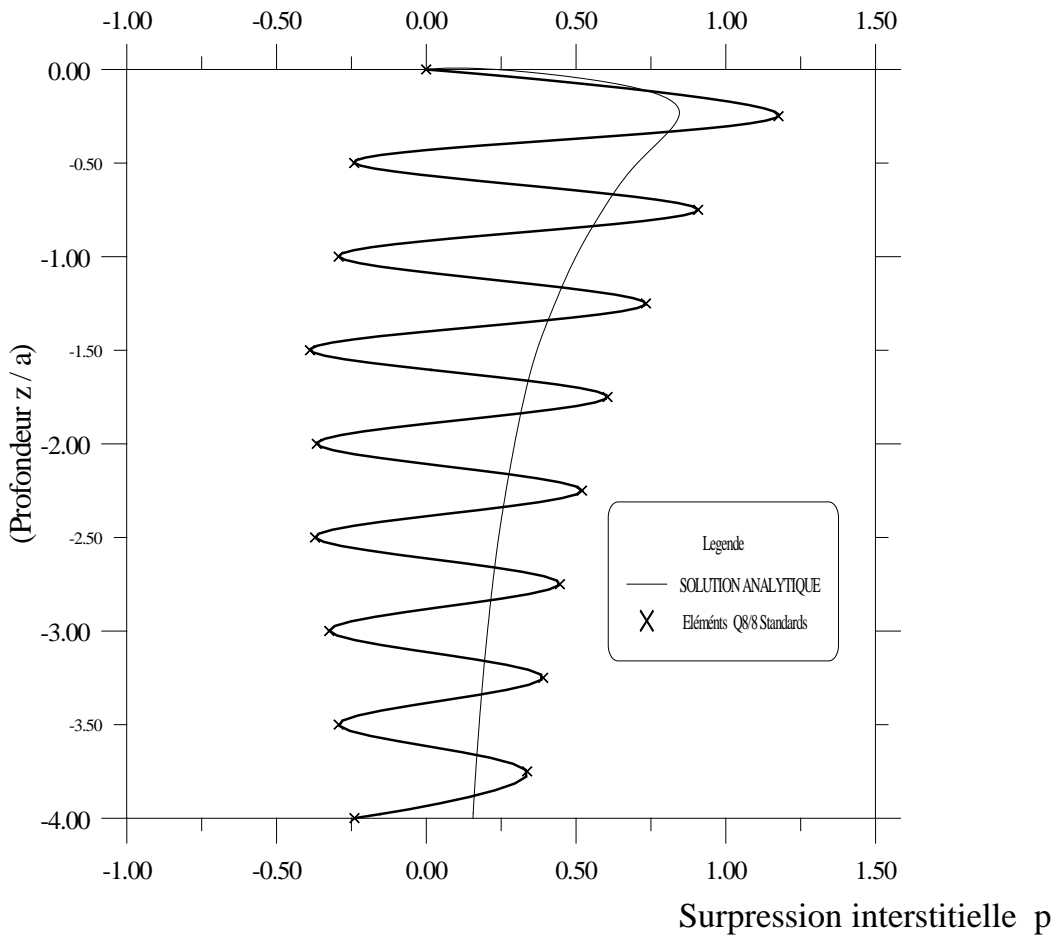


**fig.6 . 5. Maillage (255éléments) consolidation bidimensionnelle.**

Afin de cerner d'avantage le problème, on examinera l'évolution de la surpression interstitielle sur toute la hauteur de la couche au niveau de l'axe de symétrie du domaine (la solution analytique de ce problème étant toutefois connue Schiffman et Chen 1969 [ 5 ],Eq.(6.1)

Sur la figure Fig.6.6, nous avons représenté la solution analytique en termes de surpression interstitielle (solution de Schiffman , Chen ), sur laquelle on superpose le résultat issu de la simulation numérique.

On a représenté en abscisses le rapport de la surpression a la charge appliquée ,et en ordonnées la fraction de profondeur ( $z/a$ ).



**Fig.6.6.Oscillations parasites de la solution éléments finis Q8/8.**

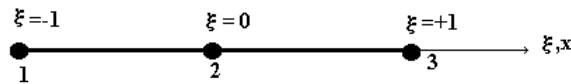
On remarque immédiatement, que dans cet exemple plus général des oscillations de la solution ont lieu, chose qui semble confirmer d'avantage que le comportement des éléments quadratiques standards semble être perturbé par quelque chose lorsque  $\Delta t$  tend vers zéro.

Une question se pose alors à ce niveau. Le comportement oscillatoire observé pour les éléments bidimensionnels quadratiques standards, affecte-t-il aussi leurs semblables unidimensionnels ?.

Si oui, alors il sera d'autant plus facile pour nous d'examiner en détails ce type d'éléments puis de dégager les différentes solutions à y apporter, plutôt qu'à engager directement un raisonnement quelconque pour les éléments bidimensionnels, et ce vu la taille importante des matrices et vecteurs élémentaires.

### 6.5.RAPPEL: Matrices élémentaires pour l'élément quadratique standard à 3 noeuds-

En se reportant au chapitre relatif à la formulation par éléments finis du comportement des milieux poreux saturés , les quantités élémentaires peuvent facilement s'obtenir comme suit Fig . 6.7



**Fig.6.7 élément unidimensionnel Q3/3**

Sachant que les fonctions de forme sont les suivantes,

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \quad (6.2-a)$$

$$N_2(\xi) = (1 - \xi^2) \quad (6.2-b)$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \quad (6.2-c)$$

#### Matrice de rigidité de l'élément solide

$$[K_{uu}] = \int_{\Omega_e} B_u^T D B_u d\Omega \quad (6.3)$$

Tout calcul fait on trouve

$$[K_{uu}] = \frac{E \cdot (1-\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \cdot \frac{L}{3} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

---

. **NOTA:**Dans ce qui suit toutes les intégrations ont été effectuées à l'aide de 2 points d'intégration suivant le schéma de GAUSS, ce qui implique que toutes les quantités sous citées sont exactes.

Matrice de rigidité de l'élément fluide.

$$[\mathbf{K}_{pp}] = \int_{\Omega_t} (\nabla \mathbf{N}_p)^T \mathbf{k} (\nabla \mathbf{N}_p) d\Omega \quad (6.5)$$

Tout calcul fait, on trouve

$$[\mathbf{K}_{pp}] = \frac{k}{\gamma_w} \cdot \frac{L}{3} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Matrice de couplage.

$$[\mathbf{C}_{pu}] = \int_{\Omega_t} \mathbf{N}_p^T \alpha \mathbf{m}^T \mathbf{B}_u d\Omega \quad (6.7)$$

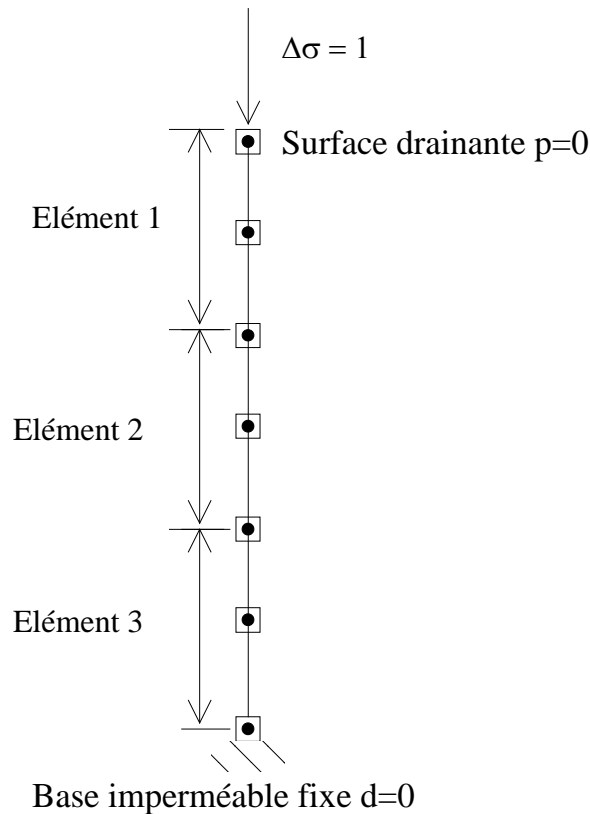
On trouve après intégration

$$[\mathbf{C}_{pu}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

### 6.5.1 . Simulation numérique de la consolidation d'une couche d'argile saturée (PATCH-TEST).

On se propose maintenant d'essayer d'obtenir la solution initiale dans le cas d'une simulation de la consolidation d'une couche d'argile de hauteur 3 unités soumise à un chargement unitaire  $\Delta\sigma = +1$

Le maillage retenu pour la circonstance sera composé de 03 éléments identiques de hauteur chacun 1 unité voir fig.6-8 .La solution initiale à l'instant  $t=0^+$  devant être  $p=\Delta\sigma = +1$  sur toute la hauteur du domaine exception faite sur la surface drainante où  $p=0$  , et ceci conformément à la solution analytique.



**Fig.6-8. Maillage 3 éléments Q3/3.**

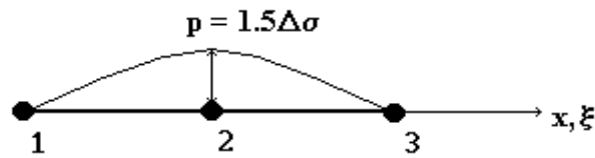
Une fois les matrices élémentaires assemblées, et les conditions aux limites imposées, on remarque que le résultat après résolution est tout à fait similaire à celui obtenu lors de la simulation du même problème à l'aide d'éléments bidimensionnels.

A savoir que  $p=1.5 \Delta\sigma$  aux nœuds secondaires (milieu de l'élément) et  $p=0$  sur les nœuds principaux.

On en conclut que les mêmes avaries semblent frapper les éléments quadratiques standards à une dimension, et ce de la même manière qui affecte leurs semblables bidimensionnels.

De ce qui précède, on voit qu'il se produit une singularité apparente de la solution, qui se manifeste par une valeur surestimée de la surpression interstitielle aux nœuds secondaires, et une valeur nulle de cette dernière aux nœuds principaux voir Fig. 6-9.

Cette caractéristique concerne donc aussi bien les éléments unidimensionnels que bidimensionnels.



**Fig.6.9. Distribution de la surpression interstitielle élément Q3/3.**

Une question se pose alors, ce mode de comportement est-il légitime ou non? . Ou plus encore sachant que n'importe quel mode de comportement est une superposition des modes propres de la matrice de rigidité élémentaire de l'élément considéré, est-on capable de justifier la présence de ce dernier ?

## 6.6. Origine des oscillations parasites de la solution.

Pour répondre à la question posée à la section précédente, nous nous proposons de rechercher les modes propres et les vecteurs propres correspondant aux éléments quadratique unidimensionnels Q3/3 ainsi que ceux de son homologue bidimensionnel Q8/8, et ce pour le cas où  $\Delta t = 0^+$  et  $\Delta t \neq 0$ .

### 6.6.1. Éléments quadratiques unidimensionnels Q3/3.

Pour répondre à la question posée à la section précédente, nous nous proposons de rechercher les modes propres et les vecteurs propres correspondant à l'élément quadratique unidimensionnel Q3/3 pour le cas où  $\Delta t = 0^+$ , mais aussi pour  $\Delta t \neq 0$ .

Soit alors à déterminer les modes et vecteurs propres de la matrice suivante:

$$[K] = \begin{bmatrix} 7r & -8r & r & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{6} \\ -8r & 16r & -8r & \frac{-2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ r & -8r & 7r & \frac{1}{6} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{6} & 7k\Delta t & -8k\Delta t & k\Delta t \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -8k\Delta t & 16k\Delta t & -8k\Delta t \\ \frac{-1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{2} & k\Delta t & -8k\Delta t & 7k\Delta t \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec } r = \frac{E'(1-\nu')}{(1+\nu') \cdot (1-2\nu')} \cdot \frac{L}{3}$$

$$k = \frac{k}{\gamma_w} \cdot \frac{L}{3}$$

Il faut toutefois noter que normalement vu la formulation employée on doit impérativement trouver une valeur propre nulle et cinq valeurs propres réelles non nulles.

Après avoir effectué la recherche des valeurs et vecteurs propres à l'aide de la méthode générale de Jacobi, on obtient le résultat suivant (à une constante près):

### **a)- 1<sup>er</sup> cas $\Delta t=0$**

1. (04) quatre valeurs propres réelles non nulles.
2. (02) deux valeurs propres nulles.

Concernant les valeurs propres non nulles elles représentent les différents modes de déformations possibles de l'élément et ne requièrent par conséquent aucune attention à ce niveau du fait que l'on s'attendait à ce résultat la matrice étant symétrique définie positive.

Quant aux deux valeurs propres nulles, signalons que normalement on s'attendait en fait à obtenir une valeur propre nulle cette dernière étant censée représenter le mode relatif au mouvement de corps rigide.

Ainsi la deuxième valeur propre nulle se trouve être injustifiée, et il semble bien que sa présence soit à l'origine des oscillations observées lors de la simulation numérique.

### **b)- 2<sup>ème</sup> cas $\Delta t \neq 0$**

Dans ce cas nous obtenons

1. (01) Une seule valeur propre nulle.
2. (05) Cinq valeurs propres réelles.

Nous constatons dans ce cas que les choses semblent se rétablir car comme on peut le remarquer on obtient exactement le résultat prédit théoriquement soit une valeur propre nulle relative au mouvement de corps rigide, et cinq autres valeurs propres réelles non nulles qui représentent les différents modes de comportement possibles.

Ce résultat est tout à fait justifié du moment que les oscillations déjà observées disparaissent dès que le pas de temps s'éloigne de zéro.



En conclusion , il paraît évident que la présence de la valeur propre nulle supplémentaire soit la cause principale de la faiblesse des éléments finis quadratiques standards,

Dans ce qui suit , il sera utile mais surtout intéressant de vérifier ce qui vient d'être établi du point de vu de l'algèbre linéaire.

On sait toutefois que le rang d'une matrice carrée est directement relié au nombre de valeurs propres nulles, ce dernier n'étant autre que le nombre de lignes ou de colonnes non nulles de cette même matrice réduite sous sa forme échelonnée.

Pour cela on se propose dans ce qui suit de réduire la matrice de rigidité de l'élément unidimensionnel sous sa forme échelonnée.

Soit alors à échelonner la matrice suivante (Cas où  $\Delta t = 0$ ):

$$[K] = \begin{bmatrix} 7r & \frac{1}{2} & -8r & \frac{2}{3} & r & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ -8r & -\frac{2}{3} & 16r & 0 & -8r & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ r & \frac{1}{6} & -8r & -\frac{2}{3} & 7r & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est relative aux variables nodales suivantes:

$$\{d_1 \quad P_1 \quad d_2 \quad P_2 \quad d_3 \quad P_3\}^T$$

En appelant  $L_i$  la  $i^{\text{ème}}$  ligne de cette même matrice ,et moyennant certaines opérations élémentaires sur ces dernières et qui résument en :

$$\begin{aligned} L_3 + L_1 &\longrightarrow L_3 & ; & \quad L_3 + L_5 &\longrightarrow L_3 & ; & \quad L_2 + L_6 &\longrightarrow L_2 & ; \\ -2L_2 + L_4 &\longrightarrow L_2 \end{aligned}$$

On obtient finalement:

$$[K_{\text{é chlonné}}] = \begin{bmatrix} 7r & \frac{1}{2} & -8r & \frac{2}{3} & r & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{3} & 0 \\ r & \frac{1}{6} & -8r & \frac{-2}{3} & 7r & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

L'ordre de cette matrice est bien évidemment (06) six ,mais son rang comme on peut le constater sur la matrice échelonnée il est de seulement (04) quatre, ce qui justifie le fait d'obtenir deux valeurs propres nulles.

Allons plus loin encore , et examinons les vecteurs propres associés à chaque valeurs propres nulle:

**a)- 1<sup>er</sup> cas  $\Delta t=0$**

$$\text{On a } ^2 : \lambda_1=0 \rightarrow \{\Phi_1\} = \begin{cases} d_1 = 0.574 \\ P_1 = -0.762e^{-1} \\ d_2 = 0.574 \\ P_2 = 0.380e^{-1} \\ d_3 = 0.574 \\ P_3 = -0.762e^{-1} \end{cases} ; \lambda_2=0 \rightarrow \{\Phi_2\} = \begin{cases} d_1 = 0.659e^{-1} \\ P_1 = 0.662 \\ d_2 = 0.659e^{-1} \\ P_2 = -0.331e^{-1} \\ d_3 = 0.659e^{-1} \\ P_3 = 0.662 \end{cases}$$

Sachant que les modes rigides vérifient la relation

$$U = \frac{1}{2} \Phi^T \cdot K \cdot \Phi = 0 \quad (6.9)$$

U :Energie de déformation interne.

$\Phi$  :Vecteur propre associé au mode considéré.

K :Matrice de rigidité de l'élément.

<sup>2</sup> Vecteurs propres obtenus pour r=1

Il est facile de remarquer que les deux modes possédant des valeurs propres nulles vérifient bien la relation précédente , mais un seul d'entre eux doit caractériser réellement le mode associé au mouvement de corps rigide , l'autre est en fait un mode illégitime, et comme on le sait aujourd'hui ces derniers sont souvent difficiles à déceler mais aussi à identifier.

Dans notre cas , on se contentera à ce niveau d'affirmer la présence d'un mode parasite , seulement son identification n'a aucune importance à ce niveau.

### **b)- 2<sup>ème</sup> cas $\Delta t \neq 0$**

Examinons maintenant le cas pour lequel  $\Delta t \neq 0$  , on sait qu'on obtient une seule valeur propre nulle et dont le vecteur propre associé est

$$\{\Phi\} = \begin{cases} d_1 = 1 \\ P_1 = 0 \\ d_2 = 1 \\ P_2 = 0 \\ d_3 = 1 \\ P_3 = 0 \end{cases}$$

On remarque immédiatement que l'énergie de déformation interne  $U$  relative à ce mode est nulle, de plus l'allure de ce mode caractérise effectivement le mouvement de corps rigide attendu , et on confirme bien le fait que ce type d'éléments possède un comportement satisfaisant lorsque le pas de temps  $\Delta t$  diffère de zéro (absence des oscillations par conséquent de modes illégitimes) .

Aussi en comparant les vecteurs propres relatifs aux deux valeurs propres nulles obtenues pour  $\Delta t = 0$  ainsi que pour  $\Delta t \neq 0$  , on remarque qu'aucun des deux vecteurs propres associés ne représente effectivement le mode relatif au mouvement de corps rigide, mais tout laisse à croire qu'il puisse bien s'agir de deux modes parasites (le mode de corps rigide ayant quant à lui disparu.).

Il paraît donc clair que la présence du mode à énergie nulle ou encore du mode parasite ainsi que la disparition du mode relatif au mouvement de corps rigide semble la cause essentielle du mauvais comportement de ce type d'éléments quand le pas de temps est voisin de zéro.

### **6.6.2 . Cas des éléments quadratiques standards bidimensionnels Q8/8.**

Dans la section précédente l'étude des éléments quadratiques standards unidimensionnels nous a permis de déterminer la cause des imperfections liées à l'utilisation de pareils éléments surtout pour des pas de temps voisins de zéro ( $t \rightarrow 0^+$ ).

Concernant les éléments quadratiques standards bidimensionnels, une recherche systématique des valeurs et vecteurs propres pour l'élément Q8/8 à fourni des résultats analogues à ceux déjà obtenus pour leurs homologues unidimensionnels , à savoir la présence de modes illégitimes à énergies interne nulle , mis à part bien sur les modes liés aux mouvements de corps rigides<sup>3</sup> .

On est alors confronté à un sérieux dilemme .D'une part ,pour des raisons de stabilité de la solution , il est imposé de choisir un pas de temps relativement petit .Or on constate que lorsque le pas de temps avoisine "  $t \rightarrow 0^+$ " des oscillations de la solution apparaissent.

L'apparition puis la disparition des modes illégitimes à déformation nulle , nous incite à introduire une notion nouvelle : celle du **mode parasite mutant**.Ce dernier apparaissant puis disparaissant en fonction du pas de temps retenu lors de l'analyse aussi bien pour les éléments unidimensionnels que bidimensionnels.

### 6.7.Aspects mathématiques du problème.

La Stabilité des procédures de résolution par éléments finis est une condition indispensable pour assurer la convergence de cette méthode .

La stabilité étant directement liée à la singularité de la matrice globale , nous allons dans ce qui suit étudier avec plus de détails cette question.

Cette manière de faire , nous permettra de dégager certaines conclusions importantes qui nous guiderons plus loin dans cette recherche à élaborer une procédure visant à redonner aux éléments quadratiques standards leur suprématie.

Reprenons l'équation (IV-18) dans laquelle , on choisira  $\theta = 1$  on aura donc :

$$\begin{bmatrix} k_{uu} & k_{up} \\ -C_{pu} & k_{pp} \cdot \Delta t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{u} \\ \Delta \bar{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_u \\ f_p - k_{pp} \Delta t \end{Bmatrix} \quad (6.10)$$

En éliminant la variable  $\Delta \bar{u}$  de la première équation du système (6.10) , puis en substituant dans la seconde équation on arrive à :

$$\left( k_{pp} \Delta t - C_{pu} \cdot k_{uu}^{-1} \cdot k_{up} \right) \cdot \Delta \bar{p} = f_p + k_{pp} \cdot \Delta t - C_{pu} k_{uu}^{-1} \cdot f_u \quad (6.11)$$

Nous remarquons que lorsque  $\Delta t=0$  , l'équation précédente devient :

<sup>3</sup> NOTA:Vu la dimension importante des vecteurs propres , et dans le souci d'alléger au maximum le texte ces derniers ont été volontairement écartés.

$$\left(-C_{pu} \cdot k_{uu}^{-1} \cdot k_{up}\right) \cdot \Delta \bar{p} = f_p - C_{pu} k_{uu}^{-1} \cdot f_u \quad (6.12)$$

cette nouvelle équation matricielle , possédera une solution unique si et seulement si :

$$H = -C_{pu} \cdot k_{uu}^{-1} \cdot k_{up} \quad (6.13)$$

est non singulière .

Sachant que la singularité de la matrice H est directement reliée au nombre de degrés de libertés inconnus relatifs à u et p

Il est clair qu'une singularité apparaît dès que le nombre d'inconnues  $\bar{u}$  devient inférieur au nombre d'inconnues nodales  $\bar{p}$ .

Ainsi , pour prévenir toute singularité de la matrice H , il faut assurer :

$$n_u \geq n_p \quad (6.14)$$

avec :

$n_u$ : Nombre d'inconnues nodales reliées à u.

$n_p$ : Nombre d'inconnues nodales reliées à p.

Notons que la condition (6. 14) fait partie d'un ensemble de conditions établies par Brezzi [6] et Babuška [7-8] ,garantissant la stabilité et par suite la convergence de schémas d'éléments finis ayant la même forme que le système (6.10) et que l'on rencontre lors d'une résolution avec multiplicateurs de lagrange , ou encore dans le cas de l'élasticité des milieux incompressibles ( $\nu > 0.4$ ) .L'exposé de toutes les conditions du critère de Brezzi-Babuška , nous engagerait dans un raisonnement mathématique très poussé et nécessiterait à lui seul plus d'un chapitre.

Afin d'attester de la stabilité d'un élément fini type , et pour des raisons de simplicité , on retiendra dans la suite la plus pénalisante des conditions de Brezzi-Babuška à savoir celle représentée par l'équation (6. 14).

La question que l'on se pose maintenant se résume comme suit :

Au sens de la condition de Brezzi-Babuška, les éléments quadratiques standards Q8/8, constituent ils une classe d'éléments robustes (ang .Robustness=consistency+stability" ?

La question de l'admissibilité de l'interpolation (Ang. Consistency) ayant été discutée au chapitre précédent, seule la question de la stabilité demeure au centre de nos préoccupations. L'étude de la stabilité comme il est de coutume se fera au moyen de simulations numériques spécifiques "Patch-tests".

Sans aucun doute la simulation de la consolidation unidimensionnelle représente en soi le meilleur patch-test que l'on pourrait prescrire .

En effet , en reprenant l'exemple de la fig .6.3 , il est clair que la condition de Brezzi-Babuška [9-10] est à **la limite** vérifiée : car on a une égalité au sens stricte  $n_u = n_p$ . Ainsi en vertu de la condition de stabilité (6.14) le patch test devrait être positif et la stabilité assurée. Or c'est tout à fait le contraire qui semble se produire (Oscillations parasites).

La défaillance des éléments quadratiques standards Q8/8 n'est donc plus à prouver. Ces éléments bien que vérifiant les conditions élémentaires et nécessaires à la convergence demeurent incapables de donner un résultat fiable .

## 6.8.Résumé .

Tout au long de ce chapitre , nous avons mis en évidence au moyen de simulations numériques très simples les oscillations parasites de la solution obtenues avec les éléments quadratiques standards.

De plus , l'origine de ces oscillations est vraisemblablement dûe à l'apparition de modes illégitimes à énergie nulle .Ces derniers apparaissant puis disparaissant en fonction du pas de temps retenu dans l'analyse , c'est pour cela qu'on a été amené à introduire la notion de **modes parasites mutants**.

Bien que pour les éléments quadratiques standards les critères de convergence sont pleinement remplis (Admissibilité + Stabilité)  $\equiv$  (Ang.Consistency+Stability) , leurs comportement n'est pas tout à fait celui attendu.

Il s'agira dans la suite de trouver un moyen (s'il en existe un) permettant de réparer le comportement de cette catégorie d'éléments .

**REFERENCES .**

- [ 1 ] Sandhu . R.S. and E.L.Wilson , "Finite element analysis of seepage in elastic media .", Proc.Am.Soc.Civ.Engrs., Jnl.Engng.Mech.Div. **95** , (EM3) (1969).
- [ 2 ] R.S. Sandhu, H .Liu and K .J .Singh "Numerical performance of some finite element schemes for analysis of seepage in porous elastic media" Int.Jnl.Anal.Meth.Geomech;pp177-194 (1977).
- [ 3 ] R.Sandhu , S.C.Lee , H.I.The , ' Special finite elements for analysis of soil consolidation' , Int, Jnl , Num , Anal ,Meth ,Geom, vol **9** ,pp 125-147 . 1985 .
- [ 4 ] Terzaghi , K.,and O, K , Frohlich,"Theorie der setzung von Tonschichten," F.Deuticke ,Leipzig, 1936
- [5]R.L.Schiffman and A.T.Chen,'An analysis of consolidation theories', Jnl.Soil.Mech.Found. Div . ASCE. **SM1** . Jan.1969.
- [6]F.Brezzi,'On the existence , uniqueness and approximation of saddle point problems arising from lagrangian multipliers,'RAIRO ,**8-R2** ,129-151,1974.
- [7] I.Babuška.,'Errors bounds for finite element methods' , Num,Math.,**16**, 322-333 ,1971
- [8]I.Babuška.,'The finite element method with lagrange multipliers', Num,Math.,**20**, 179-192 ,1973
- [ 9 ] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. The Finite Element Method, volume 1. McGraw-Hill, London, 4th edition, 1989.
- [10] J.L.Batoz, Gouri Dhatt , 'Modélisation des structures par éléments finis 'Vol .I.Editions Hermès.1990.



Les problèmes rencontrés avec les éléments quadratiques standards étaient en fait attendus , car l'examen détaillé de la fonctionnelle menant à la formulation par éléments finis on peut remarquer sans grande difficulté qu'il peut y avoir ' INCOHERENCE ' dans le choix des interpolations du champ des contraintes effectives et celui de la pression interstitielle.

Notons que l'adjectif ' INCOHERENT ' est utilisé à ce niveau afin de caractériser la différence éventuelle qui pourrait exister entre le degré du polynôme caractérisant le champ des contraintes effectives , et celui relatif à la pression interstitielle.

A titre d'exemple, une variation quadratique des déplacements impliquerait un champ de contraintes à variation linéaire, de ce fait si on choisit un champ de pression interstitiel quadratique une incohérence se produit et le comportement de l'élément peut ne pas être celui attendu théoriquement. Ceci se produit entre autre lors de la formulation des éléments quadratiques standards.

Contrairement lors de la formulation d'un élément quadratique composite, les déplacements obéissent à une variation quadratique, les contraintes quant à elles suivent une loi linéaire de même que le champ de la pression interstitielle. Dans ce cas précis le critère de cohérence est bien respecté , chose qui se traduit dans la réalité par le comportement satisfaisant de ce type d'éléments .

Tout ce qui vient d'être dit peut se justifier donc en examinant la fonctionnelle issue du principe des travaux virtuels à savoir ,

$$\int_{\Omega} \varepsilon^T \sigma \cdot d\Omega = \int_{\Gamma} d^T \tau d\Gamma + \int_{\Omega} d^T f d\Omega$$

Sachant que :  $\sigma = \sigma' + p$

$\sigma'$  : Contrainte effective.

$p$  : Pression interstitielle.

L'équation précédente peut s'écrire comme

$$\int_{\Omega} \varepsilon^T \sigma' \cdot d\Omega + \int_{\Omega} p \cdot m^T \varepsilon \cdot d\Omega = \int_{\Gamma} d^T \tau d\Gamma + \int_{\Omega} d^T f d\Omega$$

On remarque ici que la pression interstitielle intervient au même titre dans l'évaluation de l'énergie interne que la contrainte effective.

Il faut savoir que l'aboutissement au système d'équations algébriques se fera suite à un choix approprié des interpolations sur les différentes grandeurs (déplacements, pressions) , puis à l'utilisation d'une procédure de pondération de type Galerkin , et puisque dans cette procédure la fonction de pondération doit être la même pour les deux intégrales du terme de gauche de l'équation [ ] (auquel cas le principe des contraintes totales et effectives ne serait plus valide), on remarque que la pondération sur la contrainte (implicite dans ce cas) est

différente de celle faite sur la pression ce qui est en soi une aberration ,et c'est ce qui représente en réalité la source de tous les problèmes liés à ce type d'éléments.

Notons enfin que la notion de cohérence est à l'origine de divers problèmes rencontrés lors de la formulation d'éléments mixtes en élasticité , et les fondements mathématiques relatifs à cette notion ont été largement couverts par les travaux de Brezzi-Babuska voir (BATOZ)

---

## CHAPITRE 7

---

### **Réajustement du comportement des éléments quadratiques standards Q8/8**

#### **7.1.Introduction**

Au chapitre précédent , on a remarqué que la présence de modes parasites mutants à énergie de déformation nulle (dont la présence au stade élémentaire était due à la formulation employée), est à l'origine de l'imperfection des éléments quadratiques standards Q8/8.

L'objectif essentiel que l'on s'est fixé dans cette section est d'essayer de corriger le comportement de cette catégorie d'éléments par suppression des oscillations parasites observées lorsque le pas de temps se rapproche de zéro.

Pour ce faire , nous présentons dans cette section trois techniques menant à la fin souhaitée.

## 7.2.Éléments finis et modes parasites.

Les modes parasites , sont souvent la cause de l'imperfection de certains éléments finis. Ces derniers étant très difficilement décelables peuvent conduire à abandonner purement et simplement la catégorie d'éléments victime de ce type de modes illégitimes.

Cependant fort heureusement , les modes parasites peuvent à l'aide de techniques particulières être écartés, éliminés ou plus simplement disparaître d'eux mêmes.

A titre d'exemple l'élément fini isoparamétrique à huit noeuds en élasticité fait apparaître un mode parasite si l'intégration numérique se fait à l'aide de  $2 \times 2$  points de Gauss. Mais ce mode ne peut se propager et disparaît automatiquement si au moins deux éléments sont assemblés l'un à l'autre Bicanic et Hinton [ 1 ] .

Les choses se compliquent rapidement lors de la formulation d'un élément fluide à quatre noeuds. Dans ce cas précis apparaît , un type très spécial de modes parasite dénommés modes en sablier "Ang. hour glass modes" mis en évidence pour la première fois par Kosloff et Frasier [ 2 ]. Ces modes parasites "en sablier", possèdent entre autre la particularité de se propager avec facilité , rendant l'utilisation de cette catégorie d'éléments sans intérêt. Les auteurs [ 2 ] , dans une tentative visant à redonner à ces éléments un comportement acceptable, proposent alors la manière avec laquelle on devra manipuler ce genre d'éléments afin d'éviter que ce type de mode parasite ne pollue la solution.

Toujours dans le domaine de la mécanique des fluides , Sani et al [ 3 ] , sont arrivés à déceler la présence de modes parasites lors de la résolution des équations de Navier - Stokes à l'aide de la méthode des éléments finis. Dans leur article [ 3 ] figure même une technique permettant de neutraliser ces modes parasites rendant le schéma de résolution par éléments finis stable et performant.

Lors de la formulation d'éléments mixtes en élasticité  $(\sigma, u)$ , des modes parasites peuvent aussi apparaître comme l'on prouvé Pian et Chen [ 4 ]. Dans ce cas précis l'apparition des modes parasites , trouvent selon les auteurs leur origine dans le choix incohérent des interpolation sur le champ des contraintes , et le champ des déplacements. Notons que Pian et Chen [ 4 ] proposent dans leur article une méthode permettant l'élimination des modes parasites à énergie nulle .

Pour ce qui est des éléments quadratiques standards en mécanique des milieux poreux , la notion de mode parasite n'apparaît pas et rien dans la littérature ne semble attribuer l'imperfection de éléments quadratiques standards Q8/8 à la présence de modes parasites "Mutants". Nous rappelons que cette notion est utilisée pour la première fois dans le présent travail.

Nous allons dans ce qui suit tenter d'éliminer l'impact des modes parasites mutants à l'aide de techniques particulières. L'efficacité de ces techniques sera vérifiée sur des divers exemples au chapitre suivant.

### 7.3. Quelques constatations élémentaires.

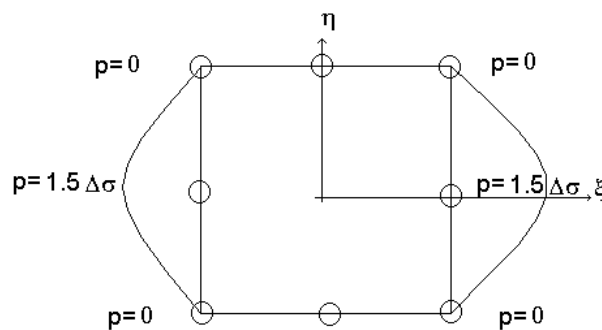
Avant de tenter d'éliminer l'impact des modes parasites mutants, il est utile à ce niveau, de mettre en évidence certains aspects particuliers constatés lors de la simulation à l'aide d'éléments quadratiques standards type Q8/8.

Reprenons les résultats obtenus dans le chapitre précédent dans le cas de la simulation quasi statique de la consolidation unidimensionnelle à l'aide des éléments quadratiques standards Q8/8, et que l'on résume à ce niveau

$$\begin{cases} p = 1.5\Delta\sigma & \text{Pour les noeuds centraux de l'élément} \\ p = 0 & \text{Pour les noeuds extrémités de l'élément} \end{cases}$$

Avec  $\Delta\sigma$  incrément de contrainte appliqué au temps initial.

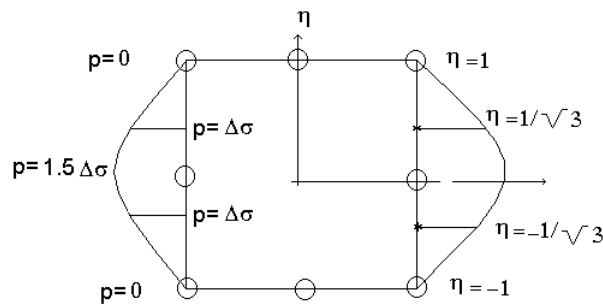
Schématiquement ceci peut s'illustrer comme suit fig. 7-1.



**fig. 7-1. Distribution de la surpression interstitielle au niveau élémentaire.**

Il est désormais évident que cette distribution de la surpression interstitielle est inacceptable du moment que l'on s'attendait à avoir  $p = \Delta\sigma$  au niveau de tous les nœuds de l'élément (voir chapitre 6).

En examinant plus en détails la distribution des surpressions précédente, un aspect intéressant attire l'attention. On peut ainsi remarquer que la solution réelle (à savoir  $p = \Delta\sigma$ ) a lieu cette fois en des points bien précis sur le contour de l'élément. Ces derniers se trouvent être confondus avec les points d'intégration numérique de Gauss Fig. 7-2.



**Fig. 7-2. Localisation de la surpression interstitielle vraie au points d'intégration.**

Une question se pose alors et qui se résume comme suit :

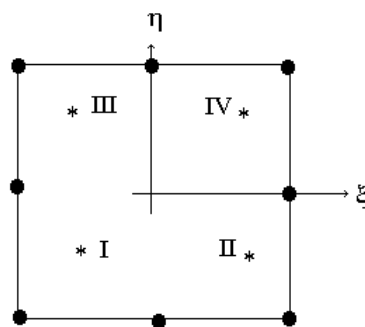
Comment pourra t on bénéficier des surpressions réelles localisées aux points d'intégration numérique pour tenter de corriger les surpressions interstitielles nodales ?

La réponse à cette question peut sembler triviale. Il s'agira donc de repositionner au moyen de techniques mathématiques spécifiques le champ de la surpression interstitielle de façon à ce que la surpression vraie soit affectée aux nœuds de l'élément.

#### **7.4. Réajustement du champ de la surpression interstitielle.**

Pour redistribuer la surpression interstitielle des points de Gauss aux nœuds de l'élément, on fera usage des techniques bien connues de lissage des contraintes [5-7] sous une forme légèrement modifiée.

Les points d'intégration numérique sont repérés à l'intérieur de l'élément de référence par les coordonnées intrinsèques suivantes fig.7-3



**Fig.7-3. Élément quadratique standard dans son repère naturel.**

La position des points d'intégration numérique est donnée par le couple de valeurs  $(\xi_i, \eta_i)$  soit alors,

$$\begin{aligned} \text{I} &\rightarrow \left( \xi = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \eta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) & ; & & \text{II} &\rightarrow \left( \xi = \frac{1}{\sqrt{3}}, \eta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ \text{III} &\rightarrow \left( \xi = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \eta = \frac{1}{\sqrt{3}} \right) & ; & & \text{IV} &\rightarrow \left( \xi = \frac{1}{\sqrt{3}}, \eta = \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

Nous présentons dans ce qui suit trois techniques forçant le champ de la pression interstitielle à suivre une variation bien précise à l'intérieur de chaque élément, avec toutefois une condition subsidiaire que ce même champ, prenne exactement les mêmes valeurs obtenues initialement aux points d'intégration numérique.

Parmi ces trois techniques, deux d'entre elles s'apparentent à une méthode d'optimisation par moindres carrés. Quant à la troisième elle consistera à extrapoler vers les noeuds de l'élément "lissage" le champ de la pression interstitielle directement à partir des points d'intégration numérique de Gauss.

#### 7.4.1. Technique de réajustement par moindres carrés. Technique "T1". Surface bilinéaire.

Supposons que par les quatre points d'intégration numérique définis précédemment passe une surface bilinéaire unique dont l'équation en coordonnées intrinsèques est :

$$\pi(\xi, \eta) = C_1 + C_2\xi + C_3\eta \quad (7-1)$$

$C_1, C_2, C_3$  : Constantes indéterminées.

Le champ de la pression interstitielle s'écrivant sous forme discrétisée comme :

$$p(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i \cdot p_i \quad (7-2)$$

$N_i$  : Fonctions de forme de l'élément Q8.

$p_i$  : Valeurs nodales de la surpression interstitielle.

En évaluant la forme discrétisée du champ de la pression interstitielle aux points de Gauss, on arrive à la relation matricielle suivante :

$$\{P_G\} = [M] \cdot \{P\} \quad (7-3)$$

Avec:  $\{P_G\}$  vecteur des surpression interstitielles aux points de Gauss.

$\{P\}$  Vecteur des surpressions nodales non encore réajustées.

$$\text{Et } [M] = \begin{bmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3}-1 & -1 & \sqrt{3}-1 & -1 & 1+\sqrt{3} \\ \frac{6\sqrt{3}}{6} & \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} & \frac{6}{6} & \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} & \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} & \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} & \frac{6}{6} & \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \\ -1 & 1+\sqrt{3} & 1 & 1+\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3}-1 & -1 & \sqrt{3}-1 \\ \frac{6}{6} & \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} & \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} & \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} & \frac{6}{6} & \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} & \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} & \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \\ -1 & \sqrt{3}-1 & -1 & \sqrt{3}-1 & -1 & 1+\sqrt{3} & 1 & 1+\sqrt{3} \\ \frac{6}{6} & \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} & \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} & \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} & \frac{6}{6} & \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} & \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} & \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \\ -1 & \sqrt{3}-1 & -1 & 1+\sqrt{3} & 1 & 1+\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3}-1 \\ \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} & \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} & \frac{6}{6} & \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} & \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} & \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} & \frac{6}{6} & \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Evaluons maintenant l'expression de  $\pi(\xi, \eta)$  toujours aux points d'intégration numérique, on aura la relation suivante,

$$\begin{Bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 1 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \quad (7-4)$$

Que l'on peut mettre sous forme matricielle compacte :

$$\{\pi_G\} = [N] \cdot \{C\} \quad (7-5)$$

Sachant entre autre qu'on impose la condition subsidiaire aux points d'intégration numérique on doit avoir:



$$\{\pi_G\} = \{P_G\} \quad (7-6)$$

et en faisant usage de (7-3) et (7-5), on peut écrire ;

$$[M] \cdot \{P\} = [N] \cdot \{C\} \quad (7-7)$$

L'équation (7-7) représente en fait un système linéaire d'équations algébriques, dont l'inconnue est le vecteur  $\{C\}$ , de plus on peut aussi remarquer que ce système est surabondant, le nombre d'équations ( $N_{\text{équations}} = 8$ ) est supérieur au nombre d'inconnues ( $N_{\text{inconnues}} = 3$ ).

Ainsi pour résoudre un tel système d'équations, on fera les manipulations matricielles suivantes.

Multiplions à gauche et à droite l'égalité (7-7) par  $[N]^T$  on aura ;

$$[N]^T [M] \cdot \{P\} = [N]^T [N] \cdot \{C\} \quad (7-8)$$

On remarque immédiatement que le nombre d'équations est devenu égal au nombre d'inconnues d'où  $N_{\text{eq}} = N_{\text{inc}} = 3$ , est le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_I + P_{II} + P_{III} + P_{IV} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(-P_I + P_{II} - P_{III} + P_{IV}) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(-P_I - P_{II} + P_{III} + P_{IV}) \end{Bmatrix} \quad (7-9)$$

Avec  $:P_I, P_{II}, P_{III}, P_{IV}$  valeurs de la pression interstitielle aux points d'intégration numérique.

Une fois les inconnues  $C_i$  déterminées on pourra en faisant usage de la relation (7-5), avoir la surpression corrigée en n'importe quel point de l'élément, en particulier aux noeuds et ceci tout simplement en remplaçant les coordonnées  $\xi, \eta$  correspondantes.

Tout ceci étant fait on arrive à la relation matricielle donnant les surpressions interstitielles réajustées en fonction des pressions interstitielles nodales initiales ; soit alors

$$\{\bar{P}\} = [R] \cdot \{P\} \quad (7-10)$$

Avec:  $\{\bar{P}\}$  Vecteur des pression interstitielles nodales réajustées.

$\{P\}$  Vecteur des pression interstitielles nodales initiales.

$[R]$  Matrice de réajustement.

$$\text{Et } [R] = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{12} & 0 & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{-1}{12} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{12} & \frac{2}{3} & \frac{1}{12} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{12} & 0 & \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} & 0 \\ \frac{4}{12} & 0 & \frac{-1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{2}{12} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{12} & 0 \\ \frac{-1}{6} & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{12}{12} & 0 & \frac{4}{4} & 0 & \frac{-1}{12} & \frac{2}{3} & \frac{1}{12} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

On voit à ce niveau l'importance de cette technique ainsi que son avantage. En effet connaissant la solution nodale initiale (avec oscillation parasites) , il est très simple d'obtenir les surpressions nodales corrigées (réelles) par simple multiplication matricielle. Les performances de cette technique seront établies au chapitre suivant .

#### 7.4.2 . Technique de réajustement par moindres carrés. Technique 'T2'.Surface quadratique incomplète.

Cette technique est par essence identique à celle développée à la section précédente. Cependant la forme de la surface censée représenter l'évolution de la pression interstitielle à l'intérieur de l'élément est légèrement différente, et on la définit comme:

$$\pi(\xi, \eta) = C_1 + C_2\xi + C_3\eta + C_4\xi\eta \quad (7-11)$$

$C_1, C_2, C_3, C_4$  : Constantes indéterminées.

Le champ de la pression interstitielle s'écrivant toujours sous forme discrète comme :

$$p(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i \cdot p_i \quad (7-12)$$

$N_i$  Fonctions de forme de l'élément Q8.

$p_i$  : Valeurs nodales de la surpression interstitielle.

En évaluant comme précédemment la forme discrétisée du champ de la surpression interstitielle aux points de Gauss, on arrive à la relation matricielle suivante :

$$\{P_G\} = [M] \cdot \{P\} \quad (7-13)$$

Avec:  $\{P_G\}$  vecteur des surpression interstitielles aux points de Gauss.

$\{P\}$  Vecteur des pressions nodales non encore réajustées.

$$\text{Et } [M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} & \frac{-1}{6} & \frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}} & \frac{-1}{6\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}} & \frac{-1}{6} & \frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} & \frac{-1}{6} & \frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}} & \frac{-1}{6\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}} \\ \frac{6}{-1} & \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} & \frac{6\sqrt{3}}{-1} & \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} & \frac{6}{-1} & \frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} & \frac{6\sqrt{3}}{1} & \frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \\ \frac{6}{-1} & \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} & \frac{6\sqrt{3}}{-1} & \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} & \frac{6}{-1} & \frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} & \frac{6\sqrt{3}}{-1} & \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \\ \frac{-1}{6\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}} & \frac{-1}{6} & \frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} & \frac{-1}{6} & \frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Cette matrice est bien évidemment la même que celle déjà obtenue dans la section précédente.

Évaluons maintenant de la même manière l'expression de  $\pi(\xi, \eta)$  toujours aux points d'intégration numérique d'où,

$$\begin{Bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{3} \\ 1 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{3} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \quad (7-14)$$

Que l'on peut mettre sous forme matricielle compacte

$$\{\pi_G\} = [N] \cdot \{C\} \quad (7-15)$$

Sachant entre autres qu'on impose la condition subsidiaire qu'aux points d'intégration numérique on doit avoir:

$$\{\pi_G\} = \{P_G\} \quad (7-16)$$

puis en faisant usage de (7-13) et (7-15), on peut toujours écrire comme précédemment que :

$$[M] \cdot \{P\} = [N] \cdot \{C\} \quad (7-17)$$

L'équation (7-17) représente elle aussi un système linéaire d'équations algébriques, dont l'inconnue est le vecteur  $\{C\}$ . On peut aussi remarquer que ce système est toujours surabondant, le nombre d'équations ( $N_{\text{équations}} = 8$ ) est supérieur au nombre d'inconnues ( $N_{\text{inconnues}} = 4$ ).

Pour résoudre ce dernier, utilisons les mêmes manipulations que celles déjà faites lors de l'élaboration de la technique T1.

Multiplions alors à gauche et à droite l'égalité (7-17) par  $[N]^T$  on aura ;

$$[N]^T [M] \cdot \{P\} = [N]^T [N] \cdot \{C\} \quad (7-18)$$

On remarque immédiatement que le nombre d'équations est devenu égal au nombre d'inconnues d'où  $N_{eq} = N_{inc} = 4$ , est le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_I + P_{II} + P_{III} + P_{IV} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(-P_I + P_{II} - P_{III} + P_{IV}) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(-P_I - P_{II} + P_{III} + P_{IV}) \\ \frac{1}{3}(P_I - P_{II} - P_{III} + P_{IV}) \end{Bmatrix} \quad (7-19)$$

Avec :  $P_I, P_{II}, P_{III}, P_{IV}$  valeurs de la surpression interstitielle aux points d'intégration numérique.

Une fois les inconnues  $C_i$  déterminées on pourra en faisant usage de la relation (7-15), calculer la surpression corrigée en n'importe quel point de l'élément, en particulier aux noeuds et ceci tout simplement en remplaçant les coordonnées  $\xi, \eta$  correspondantes .

Tout ceci étant fait on arrive à la relation matricielle donnant les surpressions interstitielles réajustées en fonction des surpressions interstitielles nodales initiales ; soit alors

$$\{\bar{P}\} = [R] \cdot \{P\} \quad (7-20)$$

Avec:  $\{\bar{P}\}$  Vecteur des surpression interstitielles nodales réajustées.

$\{P\}$  Vecteur des surpression interstitielles nodales initiales.

$[R]$  Matrice de réajustement.

Avec

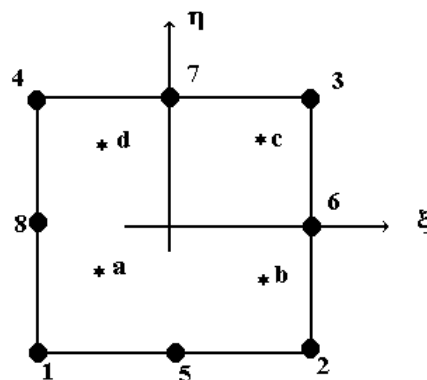
$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Les performances numériques de cette technique seront explicitées comme pour la technique T1 au chapitre suivant .

### 7.4.3 . Réajustement direct à partir des points de Gauss. Technique T3.

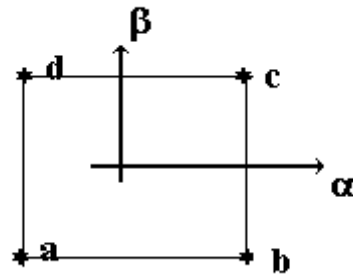
Les développements suivants , s'inspirent grandement des techniques de lissage du champ de contraintes dans les éléments d'élasticité. Ils diffèrent par conséquent complètement des développements précédents (techniques T1, et T2).

Considérons à ce titre, l'élément Q8/8 dans son repère intrinsèque Fig. 7-4.



**FIG. 7-4.Elément quadratique standard Q8/8.Repère naturel.**

Considérons le quadrilatère formé par les quatre points de Gauss, auquel on lui associe un repère de coordonnées intrinsèques  $(\alpha \ \beta)$  , Fig. (7-5)



**Fig. 7-5. Points d'intégration numérique pour l'élément Q8/8**

La surpression à l'intérieur de ce domaine étant supposée suivre une variation linéaire , on pourra sans peine exprimer cette dernière dans le repère  $(\alpha \ \beta)$  comme combinaison linéaire de ses valeurs aux points d'intégration numérique (a , b , c , d), et on écrit :

$$p = N_1(\alpha \ \beta) \cdot p_a + N_2(\alpha \ \beta) \cdot p_b + N_3(\alpha \ \beta) \cdot p_c + N_4(\alpha \ \beta) \cdot p_d \quad (7-21)$$

L'équation précédente , nous permet d'avoir la surpression interstitielle en n'importe quel point P de coordonnées  $(\alpha_p \ \beta_p)$ .

Plus encore , si on arrive à exprimer  $\alpha_p$  et  $\beta_p$  en fonction des coordonnées  $\xi_p$  et  $\eta_p$  du même point mais cette fois dans le repère intrinsèque de l'élément, puis en choisissant  $\xi_p$  et  $\eta_p$  de manière à les faire coïncider aux noeuds de l'élément on pourra ainsi avoir d'une manière très simple la pression extrapolée (réajustée) en ces points et ce en faisant usage simplement de la relation (7-21)

Notons par ailleurs que les fonctions  $N_i$  ne sont d'autre que les fonctions de forme de l'élément classique à quatre noeuds. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} N_1(\alpha \ \beta) &= \frac{1}{4}[(1-\alpha) \cdot (1-\beta)] & N_2(\alpha \ \beta) &= \frac{1}{4}[(1-\alpha) \cdot (1+\beta)] \\ N_3(\alpha \ \beta) &= \frac{1}{4}[(1+\alpha) \cdot (1+\beta)] & N_4(\alpha \ \beta) &= \frac{1}{4}[(1+\alpha) \cdot (1-\beta)] \end{aligned}$$

La formule d'interpolation sur la géométrie nous permet d'écrire :

$$\xi_p = N_1(\alpha \ \beta)\xi_a + N_2(\alpha \ \beta)\xi_b + N_3(\alpha \ \beta)\xi_c + N_4(\alpha \ \beta)\xi_d \quad (7-22)$$

$$\eta_p = N_1(\alpha \ \beta)\eta_a + N_2(\alpha \ \beta)\eta_b + N_3(\alpha \ \beta)\eta_c + N_4(\alpha \ \beta)\eta_d \quad (7-23)$$

Avec  $\alpha = \alpha_p$  et  $\beta = \beta_p$ .

En développant les équations (7-22) et (7-23), et en remarquant que :

$$\xi_a = \xi_d \quad \text{et} \quad \xi_b = \xi_c \quad \text{ainsi que} \quad \eta_b = \eta_a \quad \text{et} \quad \eta_d = \eta_c$$

on arrive à :

$$\xi_p = \frac{\alpha_p}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \eta_p = \frac{\beta_p}{\sqrt{3}} \quad (7-24)$$

ou encore :

$$\alpha_p = \sqrt{3}\xi_p \quad \text{et} \quad \beta_p = \sqrt{3}\eta_p \quad (7-25)$$

$\xi_p$  et  $\eta_p$  définissent en fait la position du noeud pour lequel on désire faire l'extrapolation (réajustement).

Ainsi en balayant tour à tour les huit noeuds de l'élément on arrive à exprimer la pression en ces derniers en fonction de celles obtenues pour les points d'intégration numérique.

On arrive alors à la relation matricielle suivante :

$$\{\bar{\mathbf{P}}\} = [\mathbf{S}] \cdot \{\mathbf{P}_G\} \quad (7-26)$$

$\{\bar{\mathbf{P}}\}$  : Vecteur des pressions interstitielles nodales ajustées

$\{\mathbf{P}_G\}$  : Vecteur des pressions interstitielles initiales calculées aux points de Gauss.

$[\mathbf{S}]$  : Matrice d'extrapolation.



$$[S] = \begin{bmatrix} 2(1+\sqrt{3})^2 & 2(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) & 2(1-\sqrt{3})^2 & 2(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) \\ (1+\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) & (1+\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) & (1-\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) & (1+\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) \\ 2(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) & 2(1+\sqrt{3})^2 & 2(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) & 2(1-\sqrt{3})^2 \\ (1-\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) & (1+\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) & (1+\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) & (1-\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) \\ 2(1-\sqrt{3})^2 & 2(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) & 2(1+\sqrt{3})^2 & 2(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) \\ (1-\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) & (1-\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) & (1+\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) & (1+\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) \\ 2(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) & 2(1-\sqrt{3})^2 & 2(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) & 2(1+\sqrt{3})^2 \\ (1+\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) & (1-\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) & (1-\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) & (1+\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) \end{bmatrix}$$

Cette matrice relie donc les surpressions nodales réajustées aux valeurs que prend cette dernière aux points d'intégration numérique.

En faisant usage de la relation (7-3) ou (7-13), on aura

$$\{\bar{P}\} = [S] \cdot [M] \cdot \{P\} \tag{7-27}$$

Dans cette dernière on a exprimé les pressions réajustées directement en fonctions des valeurs initiales, et on écrit alors simplement :

$$\{\bar{P}\} = [R] \cdot \{P\} \tag{7-28}$$

Avec:  $\{\bar{P}\}$  Vecteur des pression interstitielles nodales réajustées.

$\{P\}$  Vecteur des pression interstitielles nodales initiales.

$[R]$  Matrice de réajustement qui s'écrit cette fois comme:

$$[R] = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{32}{6} & \frac{-4}{\sqrt{3}} & \frac{-8(\sqrt{3}-1)}{3} & \frac{-4}{3} & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{16}{3(\sqrt{3}-1)} \\ 0 & \frac{32}{6} & 0 & \frac{8}{3} & \frac{-4}{3} & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{8}{3} \\ \frac{-4}{\sqrt{3}} & \frac{32}{6} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{16}{3(\sqrt{3}-1)} & \frac{-4}{3} & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{-8(\sqrt{3}-1)}{3} \\ -\frac{[(1+\sqrt{3})^2-2]}{3} & \frac{8}{3} & \frac{(1+\sqrt{3})^2-2}{3(2+\sqrt{3})} & \frac{8}{3} & \frac{-[(1+\sqrt{3})^2-2]}{3} & \frac{8}{3} & \frac{(1+\sqrt{3})^2-2}{3(2+\sqrt{3})} & \frac{8}{3} \\ \frac{-4}{3} & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{-8(\sqrt{3}-1)}{3} & \frac{-4}{\sqrt{3}} & \frac{32}{6} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{16}{3(\sqrt{3}-1)} \\ \frac{-4}{3} & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{8}{3} & 0 & \frac{32}{6} & 0 & \frac{8}{3} \\ \frac{-4}{3} & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{16}{3(\sqrt{3}-1)} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{32}{6} & \frac{-4}{\sqrt{3}} & \frac{-8(\sqrt{3}-1)}{3} \\ \frac{(1+\sqrt{3})^2-2}{3(2+\sqrt{3})} & \frac{8}{3} & \frac{-[(1+\sqrt{3})^2-2]}{3} & \frac{8}{3} & \frac{(1+\sqrt{3})^2-2}{3(2+\sqrt{3})} & \frac{8}{3} & \frac{-[(1+\sqrt{3})^2-2]}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

Comme pour les précédentes techniques , les performances de la méthode du lissage direct à partir des points d'intégration numérique de Gauss seront exposées au chapitre suivant.

### **7.5.Résumé.**

Dans cette section , par le biais de simples constatations élémentaires plusieurs techniques de réajustement ont été formulées afin d'éliminer l'effet des modes parasites mutants et corriger pour la circonstance es imperfections liées aux éléments quadratiques standards Q8/8.

Il faut aussi noter que si la rigueur des méthodes proposées restent du point de vue mathématique contestable pour certains , seule l'expérimentation numérique pourra trancher quant à la validité des techniques proposées. Ceci fera l'objet du chapitre suivant .

-

## **REFERENCES.**

- [ 1 ] N. Bicanic. and E. Hinton 'Spurious modes in two dimensional isoparametric elements' Int. Jnl. Num.Meth Eng.,**14**,1545-57, 1979
- [ 2 ] D.Kosolff and G.A.Frasier, 'Treatment of hour glass pattern in low order finite element codes', Int. Jnl. Anal. Num . Meth.Geomechanics,**2**,57-72 ,1978.
- [ 3 ] R.L.Sani , P.M.Gresho , R.L.Lee , and D.Griffiths , 'The cause and cure of the spurious pressures generated by certain finite element methods solutions of the Navier - Stockes equation , Part 1' , Int.Jnl.Num.Meth.Fluids,**1** , 17, 1981.
- [ 4 ] TH.Pian , and D.Chen 'On the supression of zero energy modes ' , Int.Jnl.Num.Meth Eng.**19**, 1741-1752,1983.
- [ 5 ] E.Hinton , and J.Campbell ,'Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method ' , Int.Jnl,Num ,Meth,Eng, .**8** ,461-80 , 1974.
- [ 6 ] J.Barlow.'Optimal stress locations in finite element models ' ,Int,Jnl,Num,Meth,Eng, .**10**,243-51,1976.
- [ 7 ] E.Hinton , F.C.Scott ,and R.E.Ricketts ,'Local least squares stress smoothing for parabolic isoparametric elements', Int.Jnl.Num.Meth.Eng., **9** , 235-56, 1975.

### 7.6.2. Aspects mathématiques du problème.

Avant de tenter d'éliminer les modes parasites mutants qui apparaissent lorsque le pas de temps avoisine la valeur nulle, essayons de trouver une justification mathématique au problème.

En examinant la fonctionnelle issue du principe des travaux virtuels appliqué aux milieux poreux saturés équation (3-7) à savoir,

$$\int_{\Omega_i} \delta \varepsilon^T D \varepsilon d\Omega + \int_{\Omega_i} \delta \varepsilon^T \alpha \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} d\Omega - \int_{\Omega_i} \delta \mathbf{u}^T \rho \mathbf{F} d\Omega + \int_{\Omega_i} \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{n}} d\Gamma = 0 \quad (3-7)$$

Sachant que :

$$\sigma = \sigma' + p$$

$\sigma$ : Contrainte totale

$\sigma'$ : Contrainte effective.

$p$  : Pression interstitielle.

et que :

$$D \cdot \varepsilon = \sigma'$$

l'équation précédente s'écrira alors :

$$\int_{\Omega_t} \delta \varepsilon^T \sigma' d\Omega + \int_{\Omega_t} \delta \varepsilon^T \alpha \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{p} d\Omega - \int_{\Omega_t} \delta \mathbf{u}^T \rho F d\Omega + \int_{\Omega_t} \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{n}} d\Gamma = 0 \quad (7-1)$$

L'examen détaillé de la fonctionnelle (7-1) menant à la formulation par éléments finis nous fait remarquer sans grande difficulté qu'il peut y avoir '**Incohérence**' dans le choix des interpolations du champ des contraintes effectives et celui de la surpression interstitielle. Notons que l'adjectif '**Incohérence**' est utilisé à ce niveau afin de caractériser la différence éventuelle qui pourrait exister entre le degré du polynôme caractérisant le champ des contraintes effectives, et celui relatif à la surpression interstitielle.

A juste titre, une variation quadratique des déplacements impliquerait un champ de contraintes à variation linéaire. De ce fait si on choisit un champ de surpression interstitiel quadratique une incohérence se produit et le comportement de l'élément peut ne pas être celui attendu théoriquement (Apparition éventuelle de modes parasites, cas des éléments Q8/8).

Contrairement lors de la formulation d'un élément quadratique composite Q8/4, les déplacements obéissent à une variation quadratique, les contraintes quant à elles suivent une loi linéaire de même que le champ de la surpression interstitielle. Dans ce cas précis le critère de cohérence est bien respecté, chose qui se traduit dans la réalité par le comportement pratiquement satisfaisant de ce type d'éléments.

Notons que la notion de cohérence devient souvent une exigence lors de la formulation d'éléments finis de type mixtes en élasticité comme l'on démontré Pian et al [ 1-2 ] P4 et P5, toutefois aucune exigence similaire ne semble être requise concernant la formulation d'éléments finis en mécanique des milieux poreux saturés.

Notons par ailleurs, que la fonctionnelle (7-1) possède une forme similaire à celle conduisant à la formulation d'éléments finis mixtes Batoz [ 3 ]. Ceci, nous incitera à affirmer que la cohérence des approximations entre le champ des déplacements et celui de la surpression interstitielle est fortement exigé : sans quoi le comportement de l'élément formulé serait imprévisible.

Etant donné que la cohérence entre les différentes approximations n'est pas assurée lors de la formulation de l'élément quadratique standard

En d'autres termes on recherche un champ de déplacements polynomial d'un certain degré donné ' p ' cinématiquement admissible avec les conditions aux limites imposées, et auquel correspond un champ de contraintes ( implicitement de degré ' p -1 ' ), en équilibre avec les forces extérieures agissantes ainsi qu'un champ de surpression interstitielles traduisant l'équilibre en termes de contraintes totales.

On remarque à ce niveau que la pression interstitielle intervient au même titre dans l'évaluation de l'énergie interne que la contrainte effective.

Il faut savoir que l'aboutissement au système d'équations algébriques se fera suite à un choix approprié des interpolations sur les différentes grandeurs (déplacements, pressions) , puis à l'utilisation d'une procédure de pondération de type Galerkin , et puisque dans cette procédure la fonction de pondération doit être la même pour les deux intégrales du terme de gauche de l'équation [ ] (auquel cas le principe des contraintes totales et effectives ne serait plus valide), on remarque que la pondération sur la contrainte ( implicite dans ce cas ) est différente de celle faite sur la pression ce qui est en soit une aberration ,et c'est ce qui représente en réalité la source de tous les problèmes liés à ce type d'éléments.

Notons enfin que la notion de cohérence est à l'origine de divers problèmes rencontrés lors de la formulation d'éléments mixtes en élasticité , et les fondements mathématiques relatifs à cette notion ont été largement couverts par les travaux de Brezzi-Babuska voir (BATOZ)

Suite aux argumentations faites au chapitre précédent , qui consistaient à affirmer que le comportement de l'élément était en grande partie affecté par le choix incohérent des interpolations faites sur la contrainte effective et sur la pression interstitielle et afin de corriger cette incohérence , on tentera de forcer le champ des pressions interstitielles à suivre une variation linéaire à l'intérieur de l'élément ; en tirant bien sur profit du fait que la pression interstitielle est correctement évaluée aux points d'intégration numérique.

Ainsi , en faisant usage de certains concepts purements mathématiques le champ de pression interstitielle sera réajusté au fur et à mesure du processus de résolution à partir des valeurs aux points d'intégration numérique afin de donner en fin de compte la distribution vraie de la pression interstitielle dans tout le domaine.

A présent trois principales techniques seront élaborées puis testées numériquement sur quelques applications simples.

---

## CHAPITRE 8

---

### **Expérimentation numérique.**

#### **8.1.Introduction**

Au chapitre 7, trois techniques ont été développées dans le but de corriger le comportement des éléments finis quadratiques standards Q8/8 quand ces derniers sont utilisés dans le domaine de la mécanique des milieux poreux saturés, sans toutefois donner des détails sur les performances réelles de ces dernières

C'est ainsi que dans le présent chapitre , on effectuera essentiellement des tests numériques spécifiques qui nous permettront de :

1. Démontrer l'acceptabilité générale des techniques proposées.
2. De mettre en évidence laquelle parmi les trois techniques proposées est la plus performante.

Notons que l'ensemble des simulations numériques proposées traitent exclusivement des cas pour lesquels une représentation analytique existe .Cette manière de procéder est tout indiquée car ne l'oublions pas l'objectif essentiel du présent travail réside dans la correction du comportement des éléments quadratiques standards , et non une étude de cas .

Nous commencerons par traiter le cas quasi statique de la consolidation unidimensionnelle et bidimensionnelle des sols. Les résultats issus des différentes simulations numériques seront confrontés à ceux donnés par les solutions analytiques. Le cas de la consolidation bidimensionnelle sera quant à lui traité avec plus d'égards et ce vu l'importance qu'il revêt en pratique.

Le dernier test de simulation concernera la réponse dynamique d'une colonne de sol saturé soumise à une impulsion .Cet exemple est censé représenter les performances des éléments Q8/8 sous un chargement dynamique quelconque.

## 8.2. Procédure de résolution.

Avant d'entamer l'exposé des différentes simulations effectuées dans ce chapitre, nous présentons dans ce qui suit un bref aperçu sur la manière avec laquelle est menée la résolution des différents problèmes présentés .

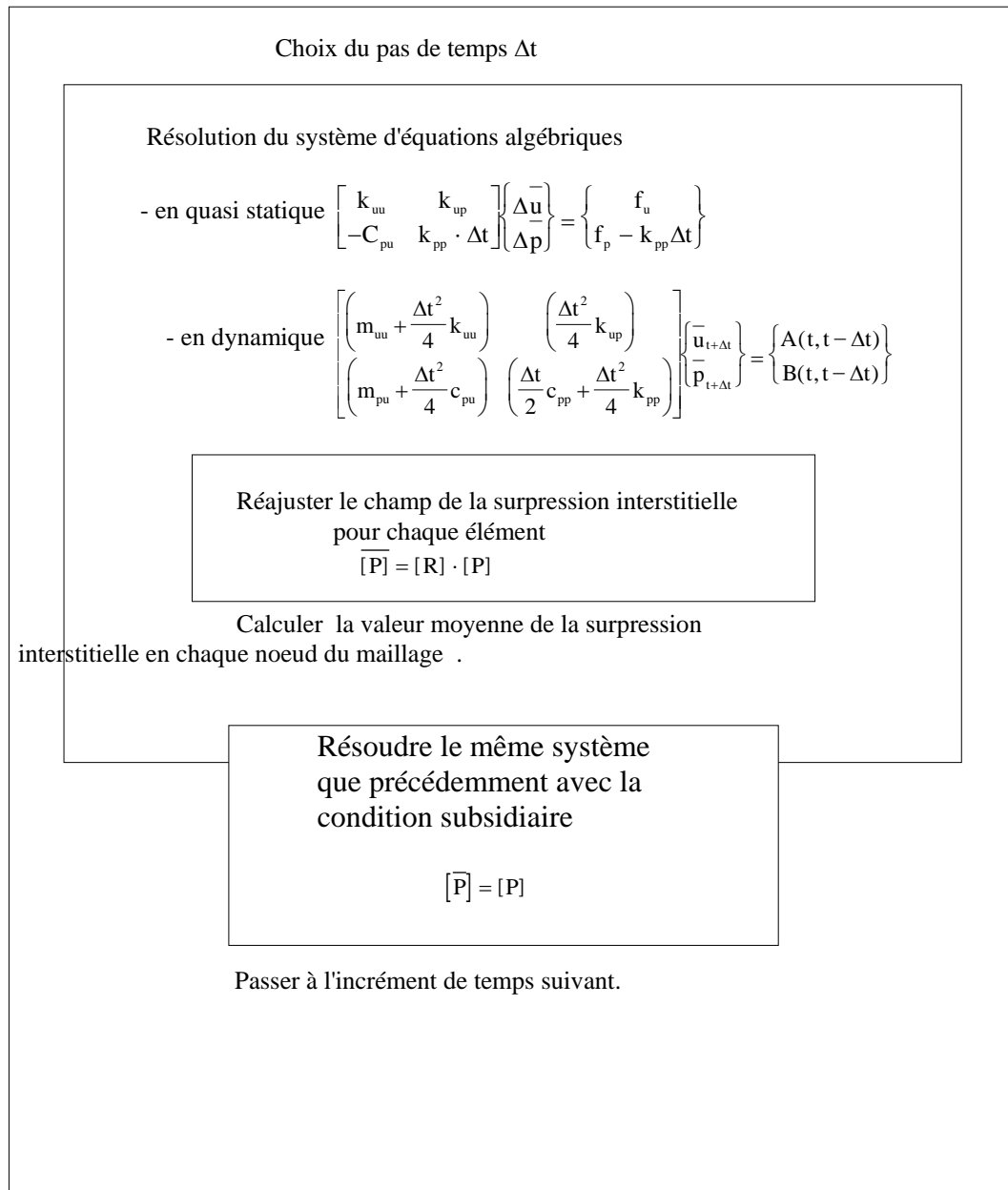
Etant donné que la surpression interstitielle doit être réajustée à chaque pas de temps  $\Delta t$  , il est clair que des dispositions particulières devront être prises tout au long de la résolution pour garantir la fiabilité des résultats obtenus. Les étapes de la résolution se résument alors comme suit :

1. En premier lieu pour un pas de temps arbitraire  $\Delta t$  donné on résout le système d'équations algébriques normalement comme il est de coutume dans des procédures d'éléments finis.
2. Une fois la solution numérique obtenue, et sachant qu'il peut y avoir des oscillations parasites de la solution , (du moins pour la pression interstitielle) on devra réajuster cette dernière en faisant usage des matrices précédemment définies. Il faut toutefois remarquer que le processus de réajustement intéressera à tour de rôle l'ensemble des noeuds de chaque élément pris isolément. Comme un noeud peut être commun à plusieurs éléments la moyenne des valeurs réajustées issues de chaque élément sera appliqué au dit noeud .
3. Finalement, connaissant la nouvelle "vraie" distribution de la pression interstitielle aux différents noeuds du maillage , il est impératif de recalculer le champ des déplacements qui sera compatible avec cette nouvelle distribution. Car n'oublions pas que les deux milieux sont à chaque instant couplés (couplage fluide - solide) Ceci sera effectué en résolvant le même système d'équations algébriques initial mais en imposant cette fois des conditions subsidiaires qui forcent la pression interstitielle en chaque noeud à être effectivement égale à celle trouvée dans la phase de réajustement. On utilisera pour ce faire la méthode des pénalités.
4. Une fois l'analyse terminée pour le pas de temps considéré , on passera à l'incrément suivant en répétant à chaque fois les étapes 1 à 3.

Dans ce qui suit , nous présentons en forme d'organigramme simplifié les principales étapes du calcul



## Organigramme.



### 8.3.Simulation numériques. Tests de validation.

#### 8.3.1.Cas quasi statique de la consolidation unidimensionnelle.

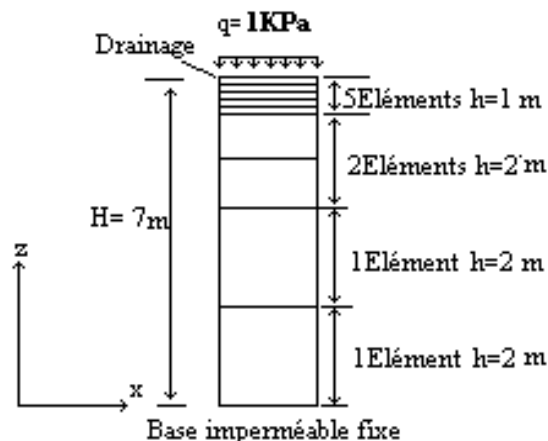
Afin d'attester du bien fondé des techniques de réajustement proposées dans ce travail, reprenons l'exemple de la consolidation unidimensionnelle déjà traité au chapitre 6. Ce dernier étant censé représenter à nos yeux un type de patch test numérique.

Ce dernier rappelle que la consolidation consiste en l'analyse de la consolidation d'une couche d'argile saturée de hauteur  $H=7$  mètres, le maillage retenu pour le calcul est représenté sur la figure 8-1.

Les caractéristiques matérielles sont:

$$E=6.10^3 \text{ KPa}, \nu=0.4, k_x = k_y = 4.10^{-6} \text{ m/s}$$

Le maillage retenu est composé de 9 éléments voir (Fig .8-1).



**Fig .8.1-Maillage 9 éléments Q8/8 . Cas quasi-statique .**

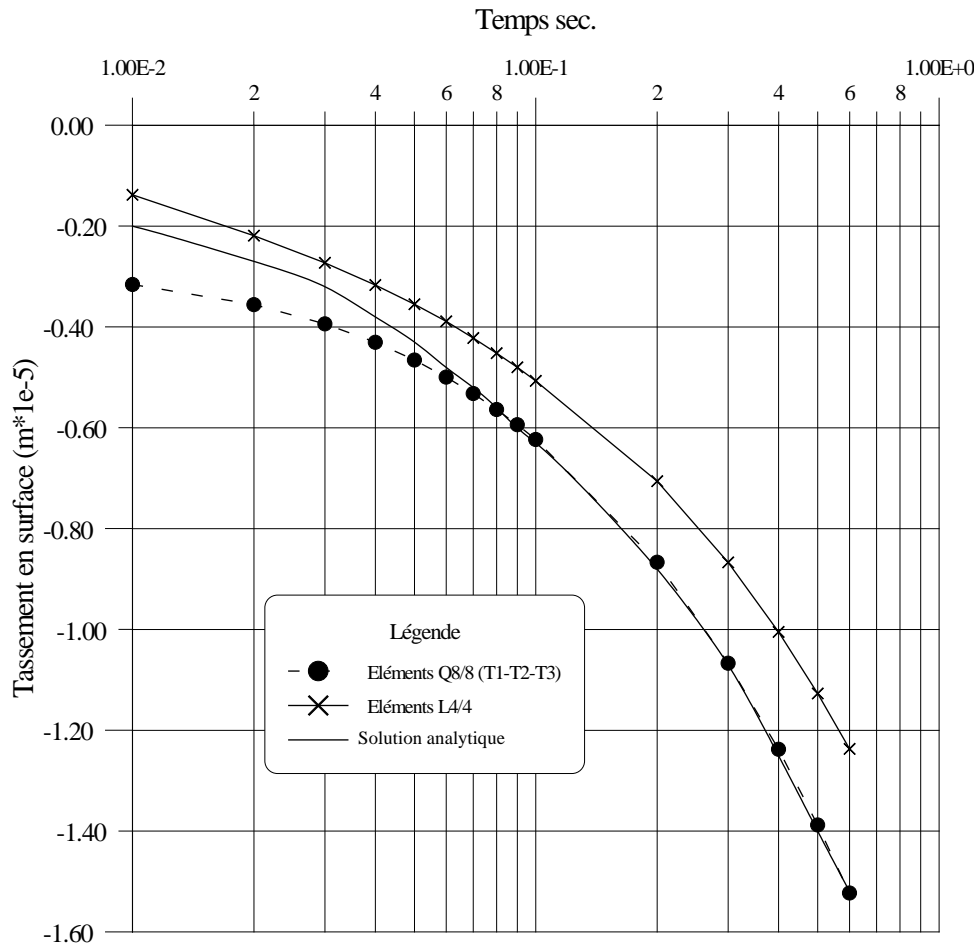
L'étude a consisté à appliquer simultanément :

- Dans une première partie 16 incréments de temps jusqu'à  $t=0.6\text{ s}$  dont la répartition est la suivante:  
10 Incréments de  $\Delta t=0.01$  chacun sur l'intervalle  $[0.01, 0.1\text{ s}]$

6 Incréments de  $\Delta t=0.1$  chacun sur l'intervalle  $[0.1s, 0.6s]$

- Dans une seconde étape 15 incréments de temps jusqu'à  $t=2400s$  (40 mn).

Sur la figure 8-2, est représenté l'évolution du tassement en surface de la couche d'argile obtenu à l'aide de la simulation numérique à  $t=0.6s$  et ce pour les trois techniques proposées. Sur ce même graphe est représenté la solution analytique du même problème afin de mieux apprécier et surtout afin d'attester du comportement satisfaisant de l'élément.



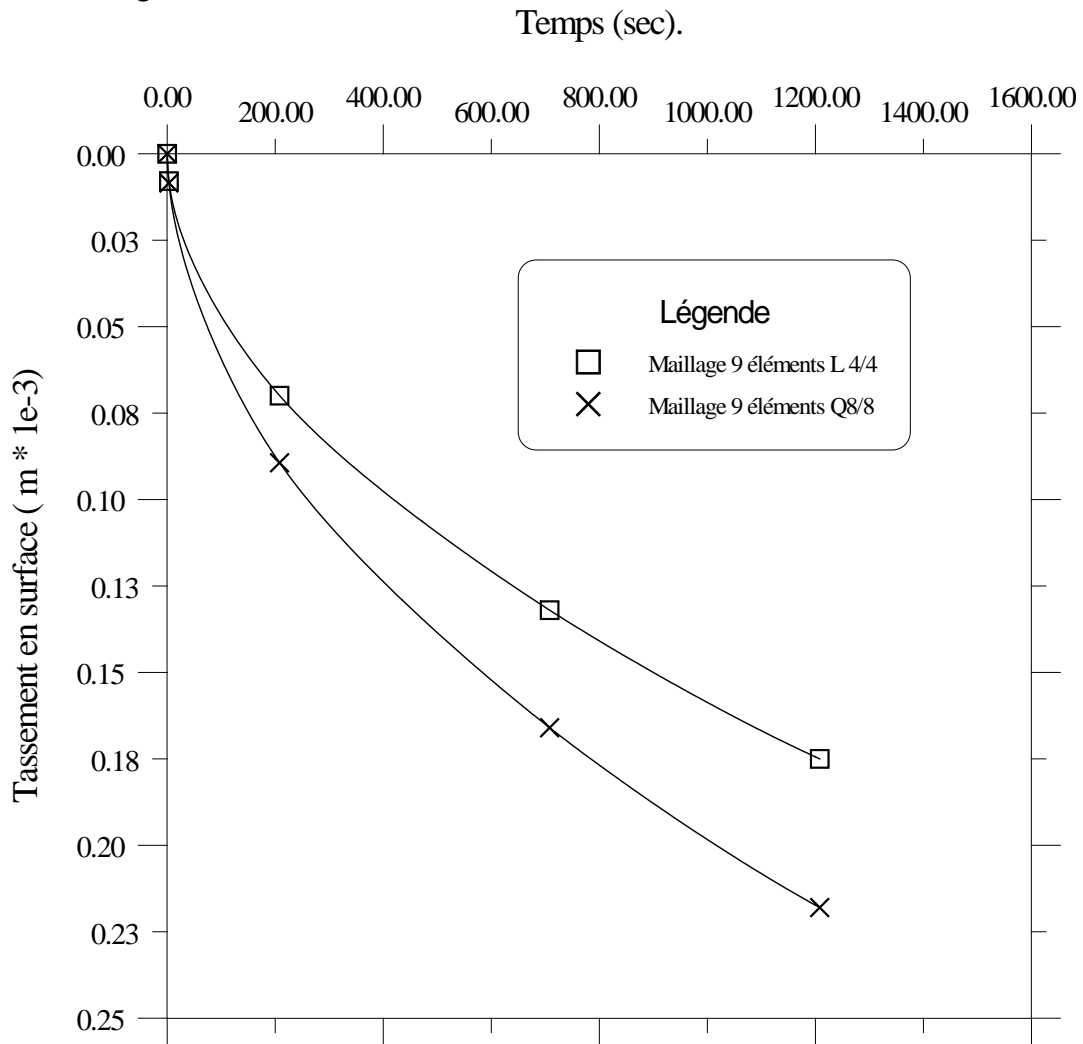
**Fig.8-2. Evolution du tassement instantané  $t_{final}=0.1s$ .**

On remarque immédiatement sur la fig 8-2 que les trois techniques proposées donnent des résultats globalement similaires rejoignant assez fidèlement la solution analytique.

Aussi sur ce même graphique est représentée l'évolution du tassement obtenu à l'aide d'une simulation numérique utilisant des éléments linéaires de type L4/4.

Nous pouvons dès lors remarquer la supériorité des éléments Q8/8 quant à la prédiction des tassements directement après application des charges extérieures confirmant pour la circonstance le fait que les éléments L4/4 surestiment largement l'amplitude des tassement en surface chose qui fût remarquée par de nombreux chercheurs.

En poussant l'analyse pour un temps de ½ heure environ , nous remarquons que la sous-estimation du tassement calculé à l'aide des éléments L4/4 est toujours significative fig. 8-3.



**Fig.8-3.Evolution du tassement dans le temps technique "T2"**  
**( éléments Q8/8 .vs.L4/4) T<sub>final</sub>=40mn.**

Nous examinons dans ce qui suit , l'évolution de la surpression interstitielle au cours du temps .Notons par ailleurs , que la solution analytique a été donnée par Terzaghi [1]en 1935 , et s'exprime comme :

$$P(z, t) = \frac{4}{\pi} \cdot q \cdot \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{2N+1} \text{SIN} \left[ \frac{(2N+1)(H-z)}{2H} \right] \cdot \text{EXP} \left( \frac{-(2N+1)^2 \pi^2 T_v}{4} \right) \quad (8-1)$$

Avec:  $p(z, t)$  : Pression interstitielle à la profondeur  $z$  au temps  $t$

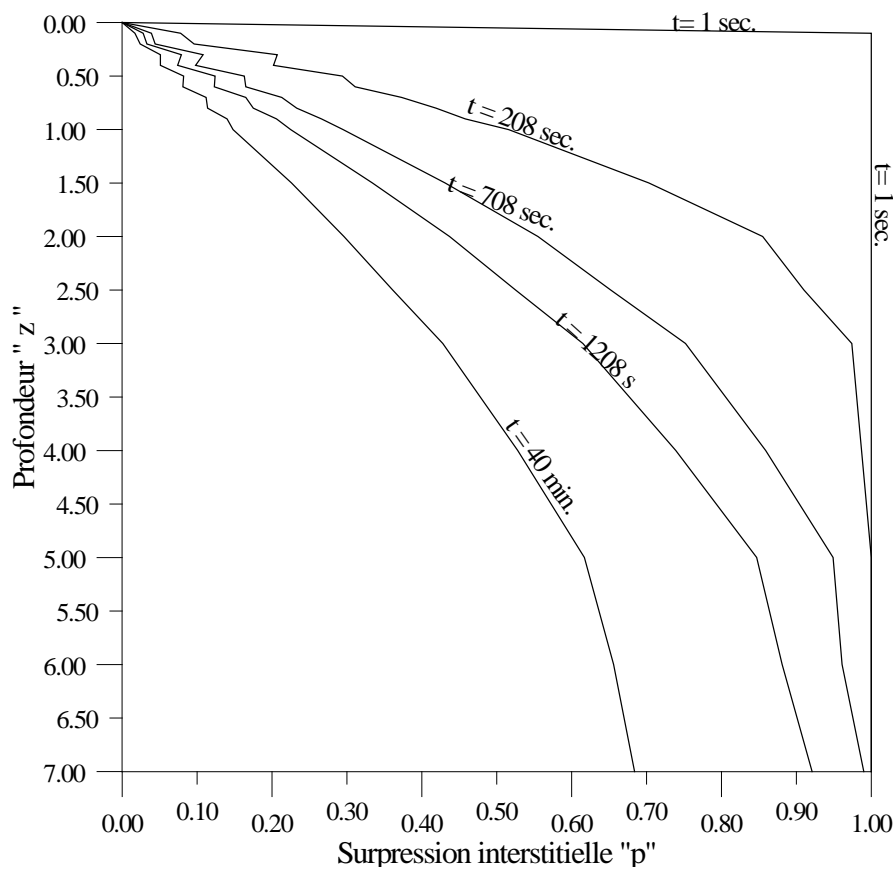
$$T_v = \frac{C_v}{H^2} \cdot t \quad \text{Facteur temps}$$

$H$ : Hauteur de la couche d'argile.

$$C_v : \text{Coefficient de consolidation } C_v = \frac{k \cdot E'}{\gamma_w}$$

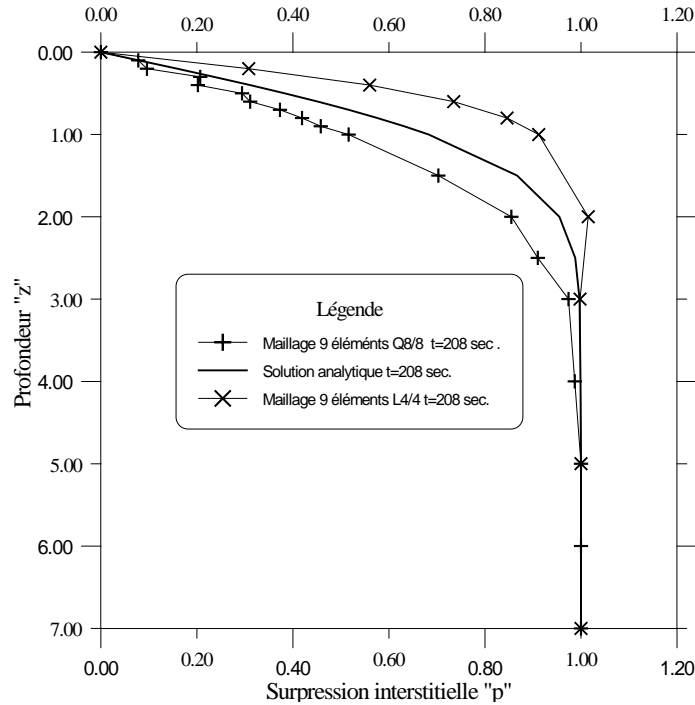
Sur la figure 8-4 , est représenté la variation de la surpression interstitielle du temps initial à environ 40 mn suivant l'application du chargement extérieur.

Qualitativement ,on peut tout de suite apprécier le caractère décroissant de la solution comme constaté expérimentalement et prévu théoriquement.

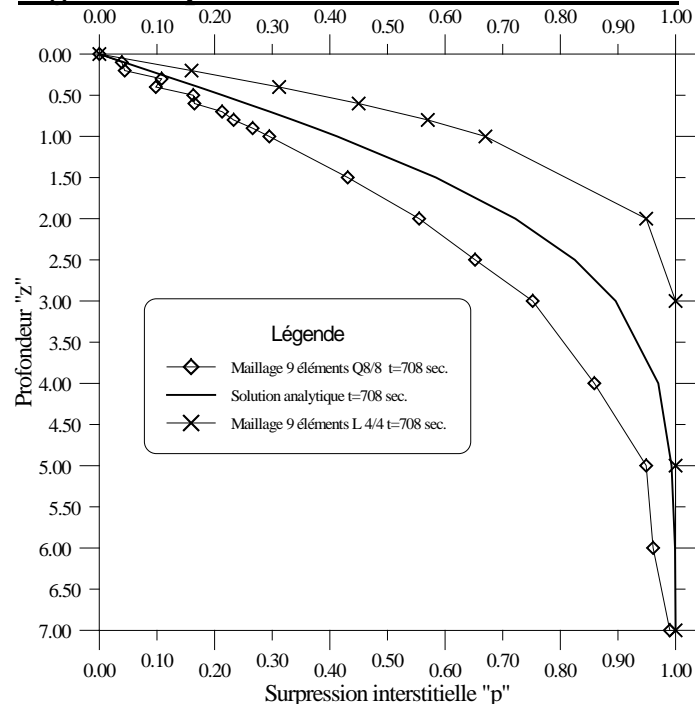


**Fig.8-4.Evolution de la surpression interstitielle  $T_{\text{final}}=40\text{mn}$ .Technique "T2".**

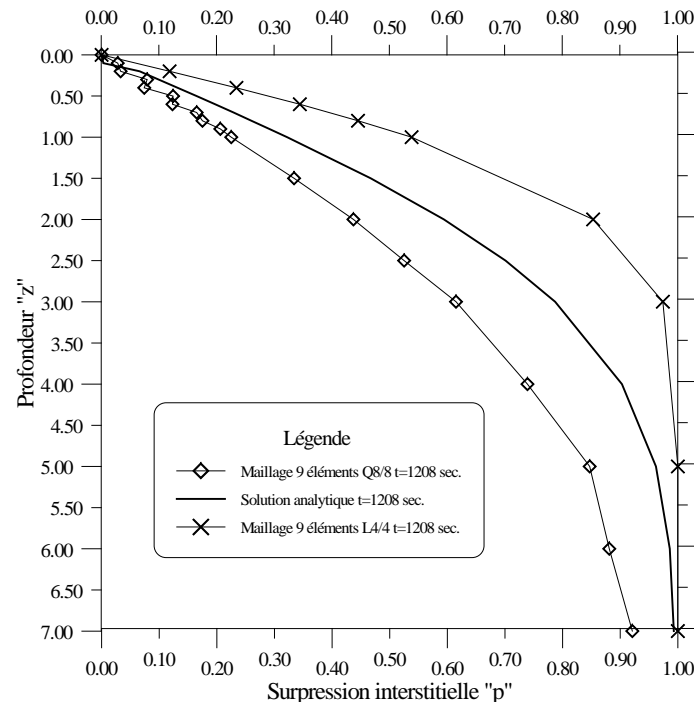
Afin d'apprécier quantitativement à quel point les éléments standards Q8/8 convergent vers la solution exacte, on représente sur la figure 8-5, 8-6 et 8-7 simultanément la solution numérique obtenue à l'aide d'éléments L4/4, Q8/8 ainsi que la solution analytique de Terzaghi.



**Fig.8-5.Surpression intersitielle t=208 sec.**



**Fig.8-6.Surpression intersitielle t=708sec. Technique "T2".**



**Fig.8-7.Surpression intersitielle t=1208 sec. Technique "T2".**

L'étude de ces trois graphes montre l'acceptabilité générale des éléments Q8/8, quel que soit la technique de réajustement adoptée. De plus il est clair que les éléments L4/4 surestiment grandement la surpression interstitielle tandis que les éléments Q8/8 la sous estiment. La solution analytique se trouve donc encadrée par les solutions issues des éléments L4/4 et Q8/8.

En conclusion à ce qui vient d'être établi, on peut affirmer que les techniques de réajustement proposées s'avèrent très satisfaisantes : du moins pour ce qui est de la simulation de la consolidation unidimensionnelle.

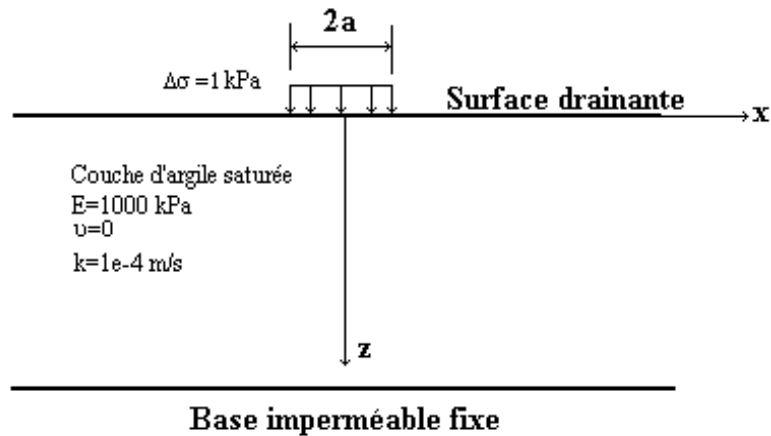
Il faut toutefois rester prudent concernant les conclusions à émettre. Seule une simulation bidimensionnelle nous permettra de conclure définitivement sur la question.

### 8.3.2.Cas quasi statique de la consolidation bidimensionnelle .

A présent, une fois les tests numériques portant sur la simulation numérique de la consolidation unidimensionnelle se sont avérés satisfaisants, il serait souhaitable de confirmer ce fait par une expérimentation numérique plus générale portant sur l'analyse d'un cas de consolidation bidimensionnelle.

Pour ce faire reprenons à ce niveau le cas déjà étudié au chapitre IV, et sur lequel rappelons le on a mis en évidence les oscillation parasites de la pression interstitielle.

Il s'agit alors de déterminer la distribution initiale ( $t=0^+$ ) de la pression interstitielle dans un massif de sol saturé semi infini chargé par une densité de charge uniforme " $q=1\text{KPa}$ ", s'étendant sur " $2a$ ", Voir fig 8.8.



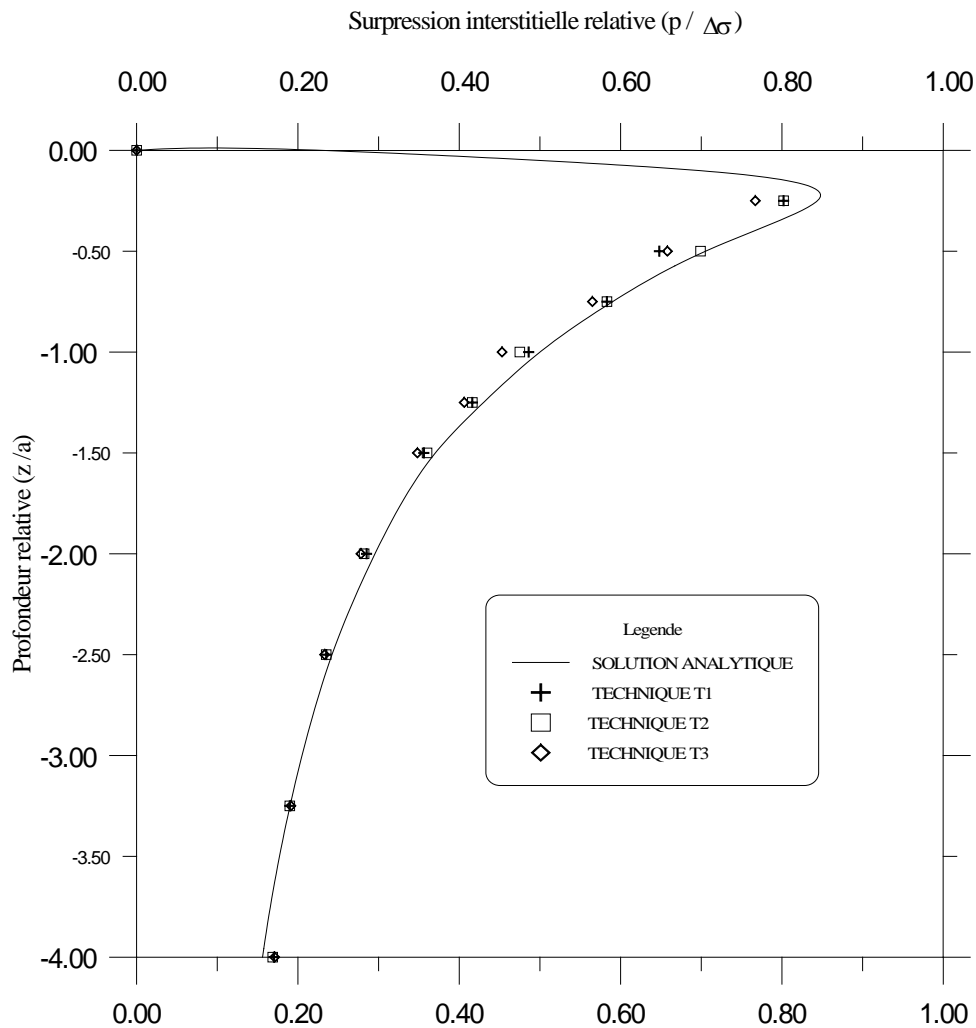
**Fig.8-8. Consolidation bidimensionnelle**

La solution à ce problème pour des instants  $t$  voisins de zéro a été donnée par Schiffman et Chen [2] en 1966 (voir chapitre 6)

Etant donné que l'on recherche la solution initiale ( $t=0^+$ ), et sachant que les oscillations parasites déjà observés sont très prononcées pour des pas de temps relativement petits, il va de soi que l'on choisisse une incrémentation dans le domaine temporel suffisamment réduite pour que si les oscillations parasites persistent après la phase de réajustement on pourra sans grande difficulté les mettre en évidence. Ainsi on retiendra pour la présente simulation un seul incrément de temps de valeur  $\Delta t = 1E^{-6}$ . Le maillage est toutefois le même que celui utilisé dans le chapitre 5 à savoir 255 éléments avec modélisation d'une moitié du domaine en raison de la symétrie.

Sur la figure Fig.8-9, on a représenté l'évolution de la pression interstitielle en fonction de la profondeur pour les points du maillage situés sur l'axe de symétrie, ces résultats sont confrontés sur le même graphique avec la solution analytique de Schiffman et Chen.

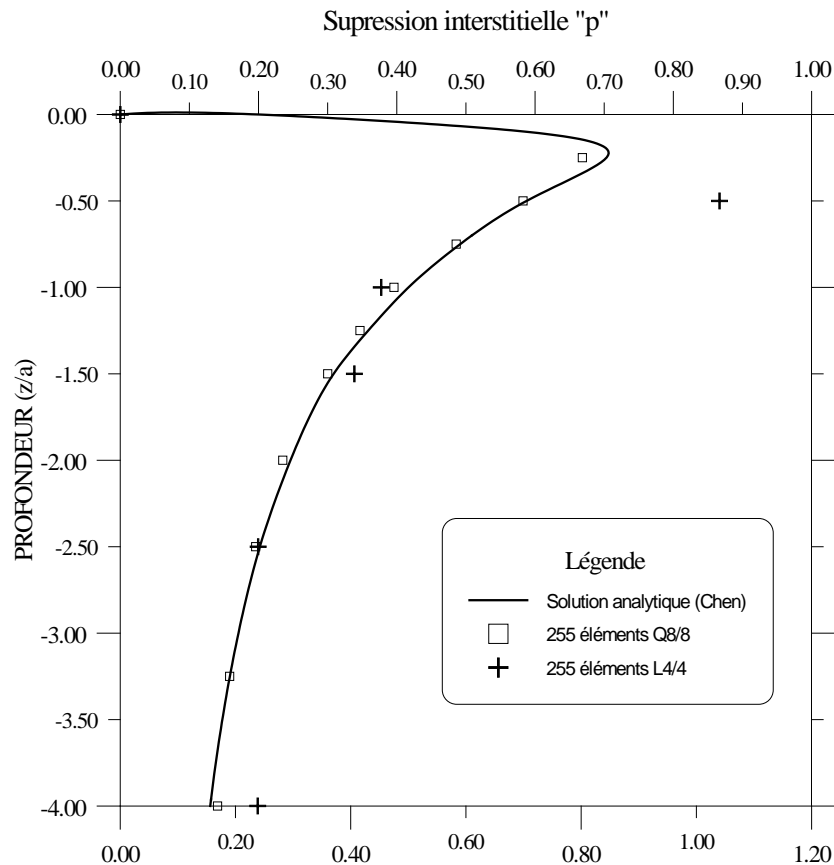




**fig.8-9.Evolution de la surpression interstitielle  $t=0^+$**   
**(Solution analytique .vs .Eléments Q8/8 "T1-T2-T3" ).**

On peut tout de suite remarquer que les oscillations parasites ont quasiment disparues de plus on remarque que d'une manière générale les trois techniques semblent suivre de très près la solution analytique .

Pour attester d'avantage de la validité des techniques de réajustement proposées et plus encore afin de mettre en évidence la supériorité des éléments finis quadratiques standards face aux éléments quadratiques composites, nous avons effectué la même simulation précédente utilisant des éléments L4/4 . Les résultats sont présentés sur la figure fig.8-10 , et nous pouvons sans peine constater la supériorité des éléments Q8/8 aux éléments linéaires standards L4/4.

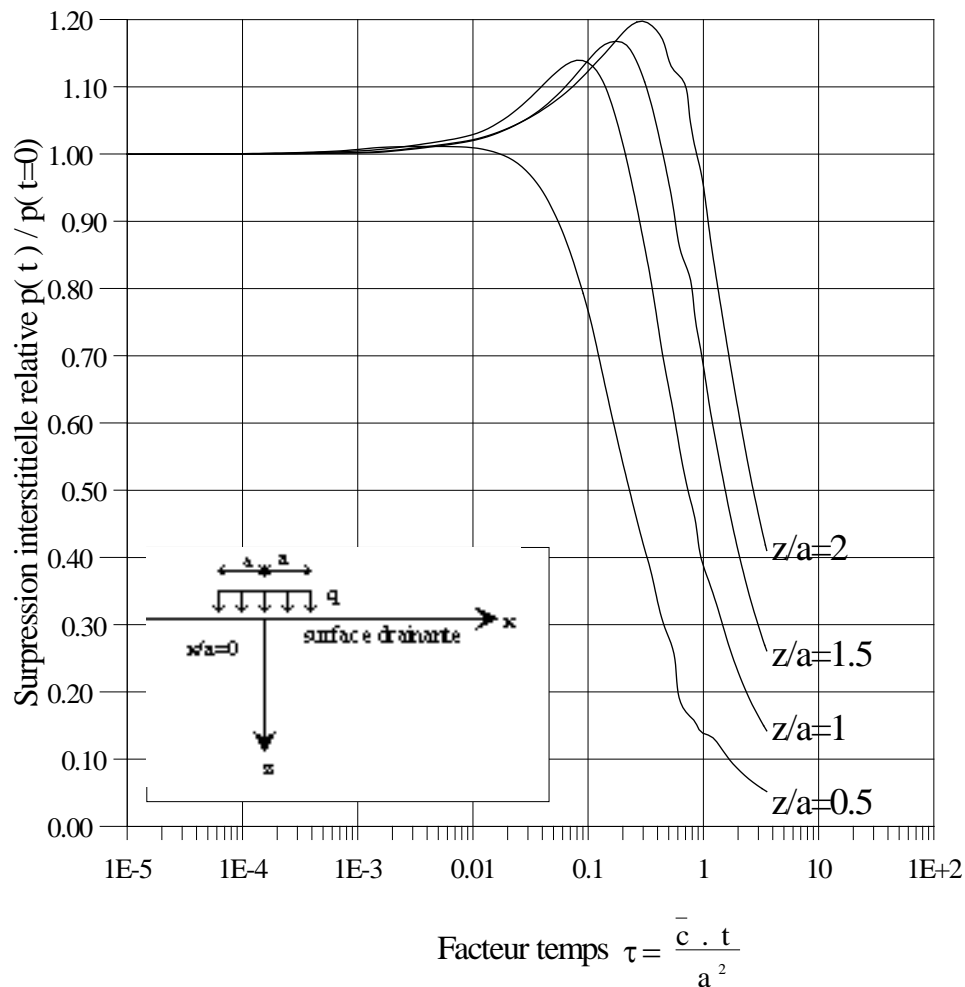


**fig.8-9. Evolution de la surpression interstitielle  $t=0^+$   
(Solution Analytique .vs .Eléments Q8/8 "T2"- Eléments L4/4 ).**

Nous allons dans ce qui suit , examiner un aspect particulièrement important propre aux milieux poreux saturés . Il s'agit de l'effet Mandel-Cryer du nom des chercheurs qui l'on observé expérimentalement .Ce phénomène consiste à un instant " t " en l'augmentation locale de la surpression interstitielle au delà de sa valeur initiale à l'instant initial "  $t_0$  ".

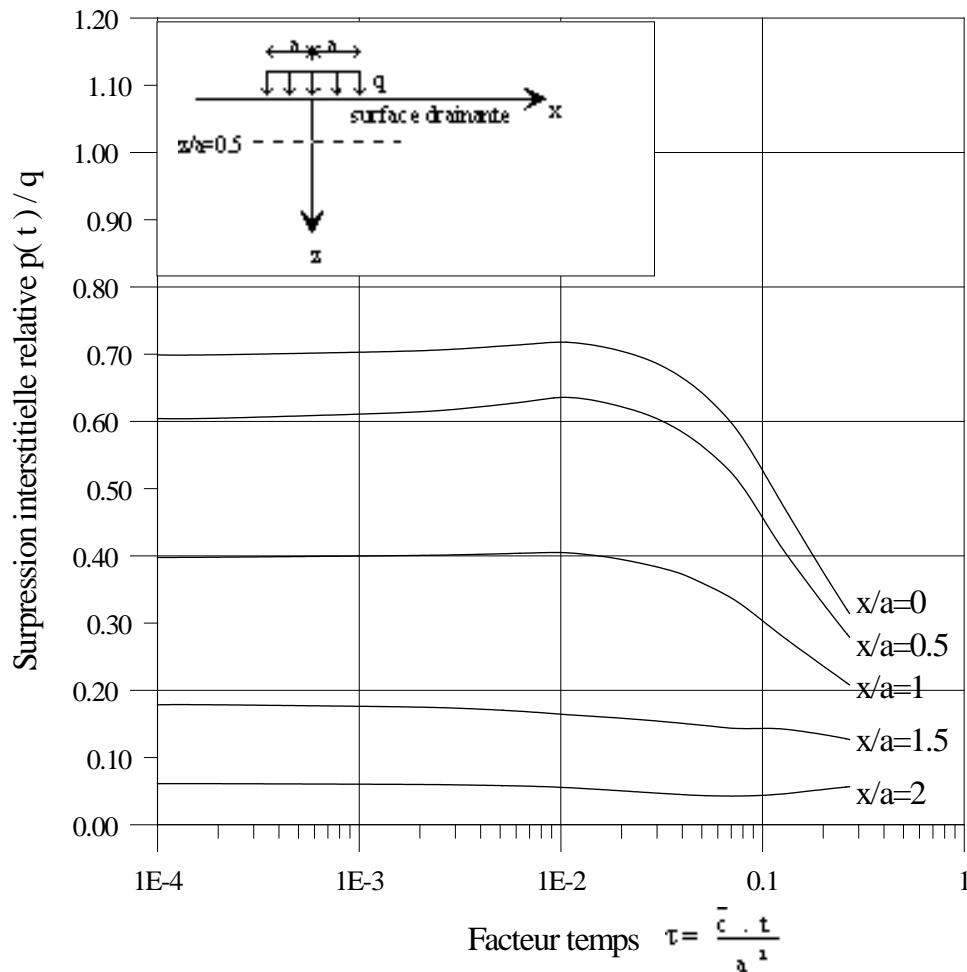
Qualitativement, l'effet Mandel - Cryer se traduit par une augmentation substantielle de la surpression interstitielle au temps " t " , au delà de sa valeur initiale au temps "  $t_0$  ".Principalement cette augmentation se fait ressentir à l'intérieur d'une zone définie par  $x^2 - z^2 < a^2$  qui défini une hyperbole dont la surface libre représente une asymptote horizontale .

Afin de démontrer comment se manifeste l'effet Mandel - Cryer lors de simulations utilisant Les éléments Q8/8 nous avons représenté sur la figure Fig.8-10 , la variation dans le temps de la surpression interstitielle pour différentes valeurs de z/a en maintenant  $x/a=0$  (Axe de symétrie). Nous pouvons constater que plus on avance en profondeur (z/a croissants) l'augmentation de la surpression interstitielle se fait de plus en plus ressentir pour atteindre pour  $z/a= 2$  une valeur de 20% supérieure à celle enregistrée à l'instant initial  $t=0^+$  .



**fig.8-10.Effet de la profondeur sur l'évolution de la surpression interstitielle.**  
**Simulation éléments finis 255 éléments Q 8/8. Technique "T2"**

Sur la figure Fig.8-11 l'effet de la distance latérale sur la variation de la surpression interstitielle est clairement mis en évidence. Ainsi pour une profondeur fixée à  $z/a=0.5$ , en reportant la valeur de la surpression pour différentes valeurs de  $x/a$ , nous pouvons remarquer que l'effet Mandel Cryer est très prononcé pour  $x/a=0$  et diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'axe du chargement extérieur.



**fig.8-11.Effet de la distance latérale sur l'évolution de la surpression interstitielle.**  
**Simulation éléments finis 255 éléments Q8/8. Technique "T2"**

Les constatations émises lors de l'examen des figures Fig8-10 et Fig 8-11 , sont bel et bien typiques de l'effet Mandel - Cryer , et témoigne bien du fait que les éléments Q8/8 une fois redressés par l'une des techniques proposées donnent des résultats qui rejoignent étroitement aussi bien les résultats théoriques mais aussi les résultats observés expérimentalement.

### 8.3.3. Comportement dynamique d'un milieu poreux .

Le dernier exemple que nous traiterons dans cette étude , est relatif au comportement d'une couche de sol saturé soumis à un chargement dynamique .

Notons que la solution analytique dans ce cas précis a été donnée par Simon et al [3] que l'on résume comme suit :

En observant le changement de variable  $\xi = \frac{x}{(\rho k V_c)}$  et  $\tau = \frac{t}{(\rho k)}$  (Facteur temps )

Avec  $V_c = \sqrt{\left[ \frac{\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q}{\rho} \right]^{\frac{1}{2}}}$  , Vitesse de propagation des ondes de compression .

La solution analytique du problème s'écrit alors :

$$w = w(\xi, \tau) = c \cdot \int_0^{\tau} f(\tau - \bar{\tau}) \exp\left(\frac{-b\bar{\tau}}{2a}\right) \cdot I_0 \left[ \frac{b\sqrt{(\bar{\tau}^2 - a \cdot \xi^2)}}{2a} \right] \cdot 1(\bar{\tau} - \sqrt{a\xi}) \cdot d\bar{\tau} \quad (8-2-a)$$

$$u = u(\xi, \tau) = - \int_0^{\tau} f(\tau - \bar{\tau}) \cdot 1(\bar{\tau} - \xi) \cdot d\bar{\tau} - \beta \cdot w(\xi, \tau) \quad (8-2-b)$$

Avec :

$1(t)$  : Impulsion uniforme dans le temps

$I_0 [ z ]$  : Fonction de Bessel d'ordre zéro

Avec :  $a = \gamma - \beta^2 b$  ;  $b = (\kappa - \beta^2)^{-1}$  ;  $\beta = \frac{\rho^n}{\rho} z$  ;  $\gamma = \frac{\beta}{n}$  ;  $\kappa = \frac{Q}{(\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q)}$

$$c = \frac{\alpha}{\left[ \sqrt{a \cdot (1 - \alpha\beta)} \right]}$$

La simulation portera sur l'analyse d'une couche semi-infinie de 120 m soumise à une impulsion rectangulaire constante  $\sigma = \sigma_0(t) = 1$  . Les caractéristiques matérielles sont résumées comme suit :

Module de Young Drainé  $E = 3000$  kPa

Coefficient de Poisson  $\nu = 0.2$

Densité apparente  $\rho = 21 \text{ kN} / \text{m}^3$

Densité du fluide  $\rho^f = 10 \text{KN} / \text{m}^3$

Constantes de Lamé (Drainées)  $\lambda = 833.3 \text{kPa}$  et  $\mu = 1250 \text{kPa}$

Porosité du milieu  $n = 0.333$

Perméabilité du milieu  $k = 4.833 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$

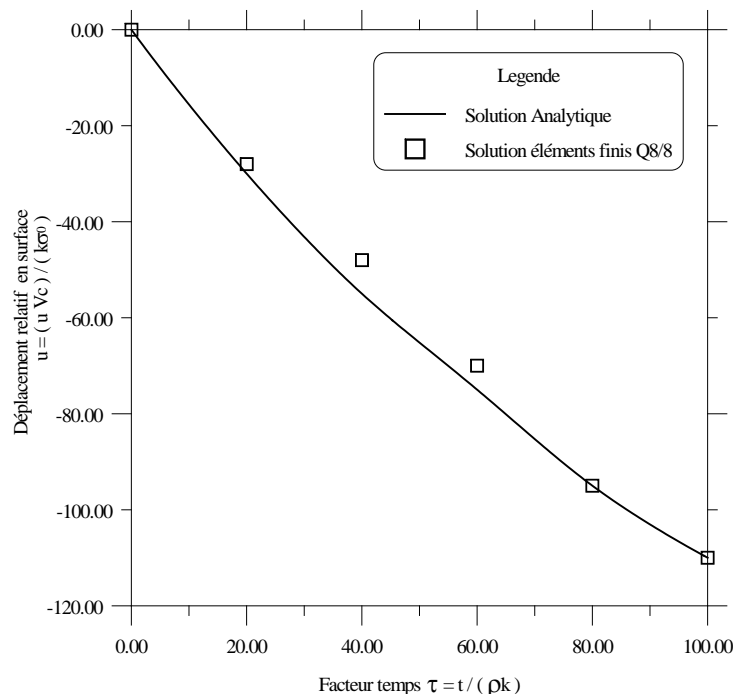
$K_s = \infty$  ;  $K_f = 0.4 \cdot 10^5 \text{ KN} / \text{m}^3$

Constantes de Biot  $\alpha = 1$  et  $Q = 0.1201 \cdot 10^6 \text{ KN} / \text{m}^2$

Le milieu est modélisé en utilisant 50 éléments Q8/8 , les conditions aux limites sont telles que

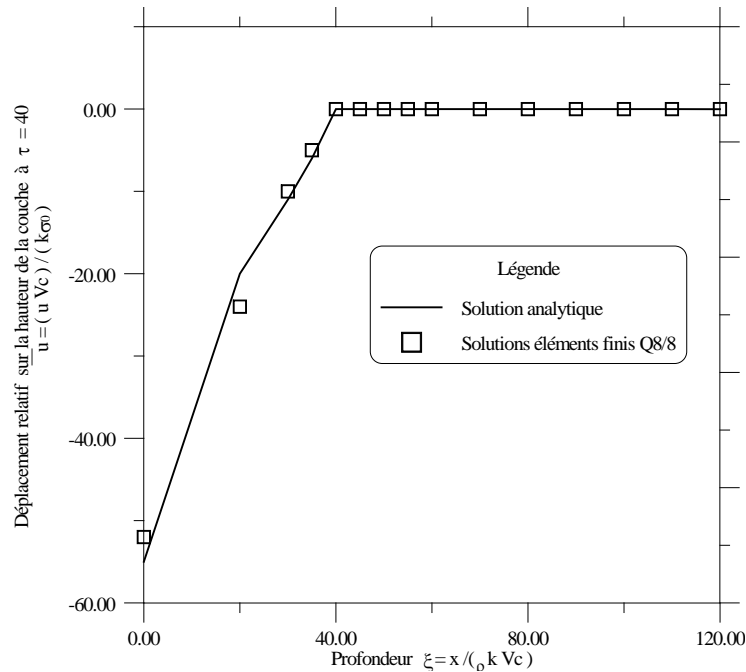
- Aucun déplacement latéral n'est permis ( $u_x=0$ )
- Surface supérieure drainante ( $p(t)=0$ )
- Surface inférieure fixe et imperméable

Sur la fig.8.12 , est représenté le déplacement calculé en surface aussi bien par la solution analytique que celui issu de la simulation numérique utilisant les éléments Q8/8. On note facilement qu'il y a une bonne concordance entre les deux résultats .



**fig.8-12.Evolution du déplacement en surface.Impulsion rectangulaire. Technique 'T2'**

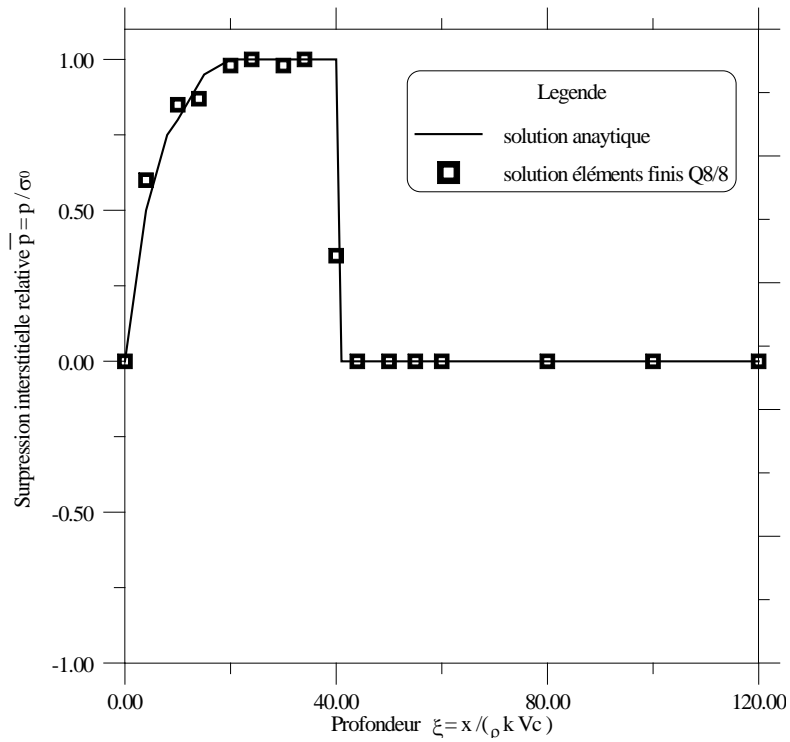
De même sur la figure Fig.8-13 sont confrontés les résultats issus de la simulation numérique avec ceux donnés par la solution analytique quant à la prédiction des déplacements sur la hauteur de la couche pour  $\tau = 40$ .



**fig.8-13.Evolution du déplacement sur la hauteur de la couche  $\tau=40$  .  
 Impulsion rectangulaire.Tehcnique "T2".**

L'examen de cette figure montre clairement l'aptitude que possèdent les éléments Q8/8 une fois redrésés à reproduire le comportement réel (en termes de déplacements) des milieux poreux saturés.

Sur la figure Fig.8-14. nous remarquons que la distribution de la surpression interstitielle sur la hauteur de la couche pour  $\tau = 40$  rejoint globalement la solution analytique . Chose qui confirme d'avantage la qualité des résultats fournis par les éléments quadratiques standards Q8/8



**fig.8-14.Evolution de la surpression interstitielle sur la hauteur de la couche  $\tau=40$**

**Impulsion rectangulaire."Technique T2"**

Au vu de ces derniers résultats , nous pouvons confirmer le redressement définitif des éléments quadratiques standards Q8/8.Surtout pour ce dernier cas où le chargement est en soi assez pénalisant (Impulsion rectangulaire).



## **8.4. Conclusion.**

En conclusion à ce qu'il vient d'être établi , nous pouvons affirmer que les éléments finis quadratiques standards Q8/8 , une fois redressés permettent non seulement de prédire le comportement quasi statique des milieux poreux saturés mais aussi leur comportement sous sollicitation dynamique. Aussi , les performances de ces éléments sont nettement supérieures comparées à celle des éléments linéaires L4/4.

De ce fait , le vide qui existait dans la bibliothèque des éléments finis utilisés en mécanique des milieux poreux est désormais bel et bien comblé par les éléments quadratiques standards Q8/8 (redressés).

## **REFERENCES.**

- [ 1 ] Terzaghi , K.,and O, K , Frohlich,"Theorie der setzung von Tonschichten," F.Deuticke ,Leipzig, 1936
- [ 2 ]R.L.Schiffman and A.T.Chen,'An analysis of consolidation theories', Jnl.Soil.Mech.Found. Div . ASCE. **SM1** . Jan.1969.
- [3] B.R.Simon,O.C.Zienkiewicz, and D.K.Paul,"An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids ",Int.Jnl.Numer.Anal.Meth.Geomech. , **8** , 381-398 (1984).

## Conclusions et recommandations.

### Conclusion.

Cette section termine la présente étude , consacrée à la formulation d'un élément fini quadratique standard en vue de son application à la mécanique des milieux poreux saturés.

Initialement , l'origine de l'imperfection des éléments quadratiques standards ne pouvait trouver une explication systématique acceptable . Il était par conséquent primordial de suivre scrupuleusement une certaine logique dans le raisonnement, afin de tenter de palier au dysfonctionnement de ces éléments.

Par ailleurs , la supériorité des éléments Q8/8 n'étant certes plus à prouver - les critères de convergence requis pour tout élément fini sont tous correctement observés - , il s'avérait utile de rechercher ailleurs l'origine de la défaillance de ces derniers .

La méthode des éléments finis étant une méthode numérique approchée , demeure dans une large mesure vouée à l'échec si certaines règles élémentaires ne sont pas observées lors de la formulation de l'élément fini lui même ou (ainsi que) lors de la modélisation.

C'est ainsi , qu'il fallait dans cette recherche procéder spontanément à une étude détaillée des principales sources d'erreurs pouvant entacher le processus de résolution numérique . Cette manière de faire pouvait garantir (tout du moins) à isoler l'origine de l'imperfection des éléments quadratiques standards , laissant apparaître une échappatoire probable menant à la correction du comportement des éléments quadratiques standards .

Fort heureusement , ceci a été rendu possible suite à une étude détaillée des valeurs et vecteurs propres des matrices de rigidité élémentaires . En effet il apparaissait suite à cette analyse l'apparition et la persistance de modes illégitimes à énergie de déformation nulle . Plus encore , ces modes dits parasites apparaissaient et disparaissaient au cours du processus de résolution au gré du choix de l'incrément de temps : d'ou la désignation (nouvelle) des ces modes illégitimes comme modes parasites mutants.

Une fois l'origine de l'imperfection des éléments quadratiques standards localisée , il devenait facile d'essayer de les éliminer. Sur la base de simples constatations au niveau élémentaire de chaque élément , trois techniques numériques ont été développées afin d'éliminer non pas l'apparition de ces modes , mais d'en éliminer l'impact.

Suite à ceci , plusieurs tests et simulations numériques , laissent apparaître que le nouvel élément ainsi reformulé , retrouvait les performances théoriques dont on lui associait .Plus précisément en terme de qualité de convergence dans la catégorie des éléments standards l'élément Q8/8 surclassait largement l'élément L4/4. De même du point de vue de la précision l'élément Q8/8 donne des résultats qui rejoignent fidèlement les solutions analytiques connues à ce jour , aussi bien pour les problèmes quasi-statique que pour les problèmes dynamiques.

Désormais , nous pouvons affirmer que le maillon manquant à la panoplie des éléments utilisées en poro-élasticité est enfin retrouvé , plus encore ses performances le classent bel et bien en première place .

### **Recommandations**

Nous terminerons la présente section en présentant certains points qui pourraient représenter non seulement une suite logique à donner à ce travail mais aussi contribuer à enrichir ce dernier.

- Introduire un comportement anisotrope pour la phase solide.
- Il serait souhaitable d'étendre ce travail en introduisant certaines sources de non linéarités quelles soient matérielles ou géométriques .
- L'écoulement de l'eau dans le sol peut être supposée suivre un écoulement non permanent ou tourbillonnaire au lieu du régime stationnaire .
- Introduire un coefficient de compressibilité fini pour le fluide interstitiel.
- Simulation du champ lointain et introduction de frontières de transmission adaptées pour les milieux poreux saturés.
- L'écoulement de l'eau dans les sols ne suit pas exactement un cheminement linéaire mais un chemin plus ou moins sinueux .D'ou la nécessité de l'introduction de l'effet de tortuosité.
- Elaborer un élément fini prenant en charge les milieux partiellement saturés.
- Etendre l'étude aux domaines tridimensionnels.

## REFERENCES CHAPITRE I

- [ 1 ] Telford.T, "Inland navigation" ;pp 209-315 in "Edinburgh Encyclopedia " Vol 15 .1830
- [ 2 ] Sorby,H. C. ;"On the application of quantitative methods to the study of the structure and history of rocks, Q ,Jnl,Geol.Soc., Vol.64, pp.171-231,1908
- [ 3 ] Frontard.J .; "Notice sur l'accident de la digue des charmes." ,Ann. Ponts Chaussées 9<sup>th</sup> sep,vol .23,pp.173-280,1910
- [ 4 ] Terzaghi , K.,and O, K , Frohlich,"Theorie der setzung von Tonschichten," F.Deuticke ,Leipzig, 1936
- [ 5 ] Rendulic. L.,"porenziffer und poren wasserdruck in tonen ."Bauingenieur , vol . 17 pp.559-564, 1936
- [ 6 ] Muyarama.s.,and Akai . K.,Studies on the failure and settlement of foundations"Bulletin N°8,Disaster Prevention.
- [ 7 ] Biot .M .A.,"general theory of three-dimensional consolidation."Jnl.Appl.Physics.,Vol.12. pp.155-164.February 1941.
- [ 8 ] Biot .M. A. "Theory of stress strain relations in anisotropic viscoelastic solids and relaxation phenomena." , Jnl.Appli.Physics N° 25 1954 , pp.1385-1391
- [ 9 ] Biot .M. A. "Theory of deformations of a porous anisotropic viscoelastic solids." , Jnl.Appli.Physics N° 27 1956 , pp.459-467
- [ 10 ] Biot .M. A."General solutions of the equation of elasticity and consolidation for a porous material ".Jnl,Appl,Mech,Vol.23,91-96 .1956
- [ 11 ]G.De.Josselin De Jong .'Application Of stress functions to consolidation problems ' Proc.Fourth . Int . Conf . Soil . Mech . and .SCI .Found .Eng . , Vol 1 pp 320-323 . (1957) .
- [ 12 ] Mc Namee . and Gibson R.E.,"Displacement functions and linear transformations applied to diffusion through porous elastic media ."Quater.Jnl .of Mech. and appl. Math., Vol .13, (1960) pp.210-227
- [13]R.L.Schiffman and A.A.Fungaroli ,'Consolidation due to tangeantial loads', Proc.Sixth.Int.Conf.Soil Mech,and Foundation Eng.Vol.2,188-192-1965
- [14 ] Biot.M .A.'Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media'.Jnl . Appl. Phys. , 33 , 1482-1498. (1962).
- [ 15 ] Biot.M .A ."generalized theory of acoustic propagation in porous media", Jnl. Acous. Soc.of America, 34 , 1254-1264 ,1962.

[16] G.De.Josselin De Jong . 'Consolidatie in die dimensies',LGM,meolelingen delft ,the Netherlands,Vol 7 N°3,57-73-1963

[17]A.Verruijt ,'Elastic storage of aquifers',flow through porous media .edited by R.J.M.De wiest - Academic Press New york 1968.

[ 18 ] Sandhu . R.S. and E.L.Wilson ,"Finite element analysis of seepage in elastic media .",Proc.Am.Soc.Civ.Engrs., Jnl.Engng.Mech.Div. **95** , (EM3) (1969).

[ 19 ] Ghaboussi.J. and Wilson .E.L.,"Variational formulation of dynamics of fluid saturated porous elastic solids." , Proc.ASCE, **98** EM4 ,947-963 (1972)

[ 20 ] Ghaboussi.J. and Wilson .E.L.,"seismic analysis of earth dam-reservoir systems', Jnl.Soil.Mech. and Found.Div., ASCE (SM10) , 849-862 (1973).

[21] Zourdani 'Conolidation des sols par éléments finis' Thèse de magister ecole nationale polytechnique ALGER .1992

[22] R.W.Lewis ,G.W.Roberts and O.C.Zienckiewicz,'A nonlinear flow and deformation analysis of consolidation problems',in C.S.Desai (ed)Numerical methods in geomechanics ,A.S.C.E 1976

[23] O.C,Zienckiewicz , C.T.Chang ,E,Hinton and K.H.Leung ,'Earth dam analysis for earthquake numerical solution and constitutive relations for nonlinear damage analysis',Conference on design of dams to resist eathquakes ,Inst.Civ.eng.london,Oct.1980 (Dams and engineering,pp179-194).

[24] O.C,Zienckiewicz ,'Coupled problems and their numerical solution' ,Keynote lecture,pres.at Int.Conf.Coupled Problems,September 1981,University College of Swansea.

[25] B.R.Simon,O.C.Zienckiewicz, and D.K.Paul,"An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids " ,Int.Jnl.Numer.Anal.Meth.Geomech. , **8** , 381-398 (1984).

[26] O.C,Zienckiewicz and T.Shiomi, 'Dynamic behavior of saturated porius media - The generalized Biot formulation and it's numerical solution',Int.J.Anal.Meth.Geomech., **8** ,71-96 (1984) .

[27] B.R.Simon,, J.S.S.Wu, O.C.Zienckiewicz, and D.K.Paul, ' Evaluation of u-w and u-p Finite element methods for the dynamic response of saturated porous media using one dimensional models' Int.Jnl.Numer.Anal.Meth.Geomech., **10** ,461-482 1986

[28 ] B.R.Simon,J.S.S.Wu , and O.C.Zienckiewicz, "Evaluation of higher order , mixed and hermitean finite element procedures for dynamic analysis of saturated porous media using one dimensional models ' Int.Jnl.Numer.Anal.Meth.Geomech., **10** ,483-499. (1986).

[ 29 ] R.S. Sandhu, H .Liu and K .J .Singh "Numerical performance of some finite element schemes for analysis of seepage in porous elastic media"Int.Jnl.Anal.Meth.Geomech;pp177-194 (1977).

[36]R.L.Schiffman and A.T.Chen,'An analysis of consolidation theories', Jnl.Soil.Mech.Found. Div . ASCE. **SM1** . Jan.1969.

[21] O.C,Zienckiewicz 'Nonlinear problems of soil statics and dynamics ',Proc.Europe-U.S.Symp. On nonlinear finite elements analysis in structural mechanics.Ruhr, Universitat Bochum, Springer-Verlag (1980) .

---

## **REFERENCES CHAPITRE II 'Presentation de la M.M.P'.**

- [ ] Biot .M .A., "general theory of three-dimensional consolidation." Jnl. Appl. Physics., Vol.12. pp.155-164. February 1941.
- [ ] Biot .M. A. "Theory of stress strain relations in anisotropic viscoelastic solids and relaxation phenomena." , Jnl. Appli. Physics N° 25 1954 , pp.1385-1391
- [ ] Biot .M. A. "Theory of deformations of a porous anisotropic viscoelastic solids." , Jnl. Appli. Physics N° 27 1956 , pp.459-467
- [ ] Biot .M. A. And .D.G. Willis "The elastic coefficient of the theory of consolidation ' Jnl. Appl. Phys. , Vol **24** , pp. 594-601 .(1957).
- [ ] Biot.M .A. 'Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media'. Jnl . Appl. Phys. , **33** , 1482-1498. (1962).
- [ ] Biot.M .A. ."generalized theory of acoustic propagation in porous media", Jnl. Acous. Soc.of America, **34** , 1254-1264 ,1962.
- [ ] J.H.Prevost .'Mechanics of continuous porous media ' , Int , Jnl , Eng , Sci ., **8** ,787-800 (1980).
- [ ] J.H.Prevost .'Non linear transient phenomena in saturated porous media ' . Comp , Meth , Appl , Mech .Eng . (1982)
- [ ] O.Coussy 'Mécanique des milieux poreux ' Cours de L'ENPC . Paris 1997 .
- [ ] O.Coussy 'Mécanique des milieux poreux ' technip Paris 1991

## **REFERENCES CHAPITRE III 'formulation par elements finis'.**

[ 14 ] Sandhu . R.S. and E.L.Wilson ,"Finite element analysis of seepage in elastic media .",Proc.Am.Soc.Civ.Engrs., Jnl.Engng.Mech.Div. **95** , (EM3) (1969).

[ 15 ] Ghaboussi.J. and Wilson .E.L.,"Variational formulation of dynamics of fluid saturated porous elastic solids." , Proc.ASCE, **98** EM4 ,947-963 (1972)

[17] R.W.Lewis ,G.W.Roberts and O.C.Zienkiewicz,'A nonlinear flow and deformation analysis of consolidation problems',in C.S.Desai (ed)Numerical methods in geomechanics ,A.S.C.E 1976

[19] O.C,Zienkiewicz ,'Coupled problems and their numerical solution' ,Keynote lecture,pres.at Int.Conf.Coupled Problems,September 1981,University College of Swansea.

[23]J.H.Prevost, 'Nonlinear transient phenomena in saturated porous media', Comp.Meth.Appl.Mech.Eng (1982) .

[24] O.C,Zienkiewicz and T.Shiomi, 'Dynamic behavior of saturated porous media - The generalized Biot formulation and it's numerical solution',Int.J.Anal.Meth.Geomech., **8** ,71-96 (1984) .

[19] O.C,Zienkiewicz ,'Coupled problems and their numerical solution' ,Keynote lecture,pres.at Int.Conf.Coupled Problems,September 1981,University College of Swansea.

[ ] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. The Finite Element Method, volume 1. McGraw-Hill, London, 4th edition, 1989.

[ ] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. The Finite Element Method, volume 2. McGraw-Hill, London, 4th edition, 1991.

---

## **REFERENCES CHAPITRE IV.**

[ 1 ] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. The Finite Element Method, volume 1. McGraw-Hill, London, 4th edition, 1989.

[ 2 ] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. The Finite Element Method, volume 2. McGraw-Hill, London, 4th edition, 1991.

[ 3 ] K.Washizu, 'Variational methods in elasticity and plasticity '2 nd Ed.Pergamon Press 1975.



- [ 4 ] M.Gurtin.'Variational principles for linear elastodynamics',Arch.Nat.Mech.Anal.,**16** 34-50 , (1969) .
- [ 5 ]E.L.Wilson and R.E.Nickell,'Application of finite element method to heat conduction analysis',Nucl.Eng.Des.,**4**, 1- 14 ,(1966) .
- [ 6 ] I.Fied.'Finite element analysis of time dependant phenomena' , J.A.I.A.A. , **7** , 1170-3 .(1969)
- [ 7 ]J.H.Argyris and D.W.Sharpe ,'Finite element in time and space', Nucl.Eng.Des.,**10** ,456-69 .(1969).
- [ 8 ] O.C. Zienkiewicz and R.L.Lewis , 'An analysis of various time stepping schemes for initial value problems 'Int ,Jnl,Earthquake,Eng,Struc,Dynam.**1** , 407-8 . 1973
- [ 9 ] W.L.Wood ,and R.L.Lewis ,'A comparison of time marching schemes for the transient heat conduction equation ' , Int ,Jnl ,Num,Meth,Eng, , **9** , 679-689 ,1975.
- [10] N.M.Newmark , 'A method for computation of structural dynamics ' , Proc,Am,Soc ,Civ , Eng , **85** , EM3,67-94,1959
- [11]L.Fox and E.TGoodwin , 'Some new methods for the numerical integration of ordinary differential equations', Proc.Camb.Phil.Soc,**49**, 373-377, 1953.
- [12] T.Belytschko , H.J.Yen , and , R.Mullen , 'Mixed methods for time integration', Comp, Meth ,Appl , Eng ,**17/18** , 259-275 (1979).
- [13]C.A.Fellippa , and , K.C.Park , 'Staggered transient analysis procedures for coupled mechanical systems:Formulation ' , Comp. Meth , Mechs , Eng ., **24** , 61-111, (1980).
- [14 ]K.C.Park , ' Stabilization of partitioned solution procedures for pore-fluid -soil interaction analysis', Int .Jnl.Numer.Methods eng ., **19**, 1669-1673 (1983)
- [15 ] I.M.Smith"Some time dependant soil-structure interaction problems 'Proc.N.M.S.R.Symp.Karlsruhe . (1975)
- [16 ] J.O.P.Donnelly 'The padé table in methods of numerical approximations',Handscomb (eds) Pergamon , (1965) .
- [17 ] P.R.Graves-Morris (ed), 'Padé approximants and their applications', Academic Press (1973).
- [ 18 ]J.L.Siemieniuch and T.Gladwell,'On time discretisations for linear time-dependant partial differential euations 'Numerical Analysis Report N°5,Dept of Mathematics.University of .Manchester .(1974) .
- [ 19 ]G.J.Makinson,'Stable high order implicit methods for numerical solution of systems of differential equations ' , The computer journal ,**2** , 3.
- [ 20 ] S.P.Nørsett ,'One step methods of Hermite type for numerical integration of stiff systems ' ,B.I.T. ,**14**. (1974)

## FIN REFERENCES CHAPITRE IV

---

### REFERENCES CHAPITRE ERREURS.

- [ ]G.Strang , O.J. Fix ' Analysis of the finite element method ' , Prentice Hall , 1973 (Wellesley-Cambridge Press ) 1988 .

- [ ] Arantes e Oliveira, E.R. , 'The patch test and the general convergence criteria of the finite element method', *Int.Jnl.Solids,Struct.Pergamon Press* Vol 13,pp 159-178. 1977
- [ ] Ciarlet ,P.G. 'The finite element method for elliptic problems' .North Holland . 1978 .
- [ ] Hughes ,T. 'The finite element method -Linear elastic and dynamic finite element 'analysis ' , Prentice Hall 1987 .
- [ ] Taylor .R.L , Simo. J.C , Zienkiwicz .O .C ,Chan .C.H. , ' The patch test -A condition for assessing FEM convergence ' , *Int ,Jnl , Num , Meth , Eng .VOL 22* , pp 39-62 , 1986.
- [ ] Y.Yokoo , K.Yamagata , and P.Nagaonka 'Finite element method applied to Biot's consolidation theory ' , *Soils and Found* , **11** , pp 29-46 . 1971
- [ ] R.Buchmaier 'Personnal communication' 1980
- [ ] R.Sandhu , S.C.Lee , H.I.The , ' Special finite elements for analysis of soil consolidation' , *Int, Jnl , Num , Anal ,Meth ,Geom, vol 9*,pp 125-147 . 1985 .
- [ ] P. Bettess ,' Infinite elements ' *Int , Jnl , Num , Meth ,Eng ., 11* , pp 53-64 .1977
- [ ] P.Kumar , 'Static infinite elements formulation. ' , *Jnl ,Struc , Eng .ASCE 111* , 2355-2372
- [ ] O.C.Zienkiewicz., C.Emsom ., P. Bettess . 'A novel boundary infinite element ' , *Int, Jnl ,Num , Meth ,Eng . , 19* , pp 393-404 .1983 .
- [36]R.L.Schiffman and A.T.Chen,'An analysis of consolidation theories', *Jnl.Soil.Mech.Found. Div . ASCE. SM1* . Jan.1969.
- [37] J.L.Batoz, Gouri Dhatt ,'Modélisation des structures par éléments finis 'Vol .I.Editions Hermès.1990.
- [ ] C.C.Fu , 'On the stability of explicit methods for numerical integration of the equation of matrices in finite element methods ' , *Int , Jnl , Num , Meth , Eng , 4* , 95-107 , 1972
- [ ] R.D.Kreig , and , S.W.Key ,'Transient shock response by numerical time integration ' , *Int , Jnl , Num , Meth , Eng , 7* , 273-286 , 1973
- [ ] D.Shantaram , D.R.J.Owen , O.C.Zienkiewicz , 'Dynamic transient behaviour of two and three dimensional structures including Plasticity , large deformations and fluid interaction', *Int , J , Earthquake, Struct , Dynam , 4*,561-578 , 1976
- [ ] T.J.R.Hughes , and , W.K.Liu , 'Implicit-Explicit finite element in transient analysis', *Jnl. Appl. Mech. ,A.S.M.E. Vol .45* , pp 371-378 (1978)
- [ ] B.M.Irons 'Application of a theorem on eigenvalues to finite element problems ' ,*Univ, of Wales , Dept of Civil Engineering , Swansea , 1970 (CR/132/70).*

[ ] K.J Bathe , and E.L.Wilson, 'Stability and accuracy analysis of direct integration methods' Int , J ,  
arthquake, Struct , Dynam , 1,283-291 , 1973

[36]R.L.Schiffman and A.T.Chen,'An analysis of consolidation theories', Jnl.Soil.Mech.Found. Div .  
ASCE. **SM1** . Jan.1969.

[37] J.L.Batoz, Gouri Dhatt ,'Modélisation des structures par éléments finis 'Vol .I.Editions  
Hermès.1990.