

N° d'ORDRE : 25/2010-M/MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE DE HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE
PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MAGISTER.

EN RECHERCHE OPÉRATIONNELLE
OPTION : MATHÉMATIQUES DE GESTION

Par : ABBACI-Leila

Optimisation sur l'ensemble efficient
d'un problème stochastique
multi-objectif discret

Soutenu publiquement, le 15/06/2010, devant le jury composé de :

M.M. AÏDER	Professeur	à l'USTHB	Président
M.M. MOULAÏ	Professeur	à l'USTHB	Directeur de memoire
M.A. BERRACHEDI	Professeur	à l'USTHB	Examineur
M. A. MEZGHICHE	M.A.A	à l'USTHB	Invité

Table des figures

1.1	Représentation de l'espace des décisions et l'espaces objectifs correspondant. . .	12
1.2	Schéma de résolution	14
1.3	Espace convexe	14
1.4	Espace non convexe	14
1.5	Le point noir est dominé par chacun des triangles, domine chacun des étoiles et équivalents aux annaux aux sens de la dominance	16
1.6	Les solutions Pareto-Optimales sont marquées avec les courbes continues pour quatre combinaisons de deux types d'objectifs.	18
1.7	Solutions supportées et non supportées	21
1.8	Principe de Branch and Bound	25
1.9	Graphe de l'exemple (1.9)	32
1.10	Espace des critères	35
1.11	Espace des décisions	35
1.12	Solutions supportées et non supportées	35
1.13	Espace des décision de P	41
1.14	Espace des critères de P	41
3.1	Espace des décisions	65
3.2	Espace des critères	66
3.3	La région réduite D^1	68
3.4	La région réduite D^2	70
3.5	Espace des décisions	74
3.6	Espace des critères	75
3.7	Espace des décisions	76
3.8	La région réduite D^1	78
3.9	La région réduite D^2	80
3.10	Region de faisabilité D et la direction de maximisation d	84

Liste des tableaux

1.1	Tableau optimal associé à la base B.	23
1.2	Tableau des résultats	32
1.3	Les solutions de problème P	42
3.1	Tableau de résultats de l'exemple (3.11)	66
3.2	Tableau des résultats de l'exemple (3.25)	75
3.3	Le tableau associé à la solution optimale $x = (0, 0)$	85
3.4	Le tableau augmenté par $\frac{11}{7}x_1 + \frac{7}{8}x_2 \geq \frac{32}{7}$	86
3.5	Le tableau associé à la solution $x = (\frac{16}{19}, \frac{54}{19})$	87
3.6	Le tableau augmenté par $-\frac{11}{19}x_5 + \frac{1}{19}x_6 \geq \frac{3}{19}$	88
3.7	Le tableau augmenté par $-\frac{11}{19}x_5 + \frac{1}{19}x_6 \geq \frac{3}{19}$	88
3.8	Le tableau associé à l'ajout de la coupe $\theta \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2$	91
3.9	Le tableau optimal associé à l'ajout de la coupe $\theta \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2$	91

Table des matières

liste des figures	2
liste des tableaux	2
Table des matières	5
<i>Introduction Générale</i>	9
1 Optimisation multi-objectif	11
1.1 Introduction	11
1.2 Problème d'optimisation multi-objectif :	12
1.2.1 Optimisation linéaire multi-objectif :	12
1.3 Problématique	13
1.3.1 Convexité	14
1.4 Solution non dominées et solution Pareto optimales :	15
1.4.1 Solutions spéciales :	15
1.4.2 Concept de dominance	16
1.4.3 Propriétés de la relation de dominance :	17
1.4.4 Optimalité de Pareto :	17
1.5 Classification des approches multicritères	18
1.6 Solutions efficaces supportées et non supportées :	20
1.7 Programmation Linéaire mono-objectif en nombres entiers	21
1.7.1 Les Méthodes de résolution d'un programme linéaire en nombres entiers	22
1.8 Programmation fractionnaire Linéaire mono-objectif	25
1.8.1 Formulation mathématique	25
1.8.2 Méthode de A. Cambini et al.[Cambini86]	27
1.9 Programmation fractionnaire Linéaire mono-objectif en nombres entiers	28
1.9.1 Méthode de M. Moulaï et al.[Moulaï et Abbas02]	28
1.9.2 Exemple numérique :	30
1.9.3 Géométrie de la programmation fractionnaire linéaire	31
1.10 Programmation linéaire muti-objectifs en nombres entiers	33
1.11 Détection graphique de l'efficacité :	33
1.12 Exemple illustratif des définitions :	34
1.13 Quelques méthodes de résolution :	36
1.13.1 Méthode de D. Klein & E. Hannan :	36
1.13.2 Méthode de A.Crema et J.Sylva :	38

1.13.3	Exemple :	40
2	Optimisation stochastique multi-objectif	43
2.1	Introduction à la programmation stochastique	43
2.2	Formulation générale	44
2.3	programmation linéaire stochastique	44
2.4	Modèles avec contraintes probabilistes	45
2.5	Modèles de Recours :	46
2.5.1	modèles de recours à 2-niveaux (en 2-étapes) :	47
2.5.2	Différents cas de recours :	48
2.5.3	modèles de recours à niveaux multiples :	49
2.5.4	Propriétés des programmes linéaires avec recours :	50
2.6	Autres techniques de modélisation :	51
2.7	Méthode “L-Shaped”	51
2.7.1	Test de faisabilité	53
2.7.2	Test d’optimalité	53
2.8	La programmation linéaire stochastique en nombres entiers	54
2.9	Formulation du problème linéaire stochastique multi-objectifs en nombres entiers (MOSILP)	54
2.10	Quelques concepts de solutions efficaces	55
2.10.1	Définition	55
2.10.2	Problème déterministe équivalent a MOSILP	56
2.11	Approches de résolution	57
2.12	Algorithme L-Shaped dans le cas discret	58
3	Optimisation d’une fonction sur un domaine efficace discret d’un problème multi-objectifs	59
3.1	Introduction	59
3.2	Résultats fondamentaux	61
3.3	Optimisation d’une fonction linéaire sur l’ensemble des solutions efficaces d’un problème MOILP	62
3.4	La méthode de Gorge	63
3.5	Exemple Illustratif	65
3.6	Une méthode d’optimisation d’une fonction fractionnaire linéaire sur l’ensemble des solutions efficaces d’un MOILP :	70
3.6.1	Algorithme :	71
3.7	Exemple Illustratif	73
3.8	Une méthode d’optimisation d’une fonction linéaire sur l’ensemble des solutions efficaces d’un MOSILP	80
3.8.1	Algorithme	81
3.9	Exemple illustratif	82
	Conclusion Générale	96

Remerciements.

C'est avec un grand honneur et une immense joie que j'ai pu réaliser ce modeste travail sous la direction du professeur Mustapha Moulai ; qui m'a apportée son soutien et son aide tout au long du parcours de cette thèse, un grand merci, pour ses qualités scientifiques, ses commentaires ainsi que ses conseils avisés, sans oublier son humour. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude et reconnaissance.

J'adresse mes remerciements les plus respectueux et profonds au professeur M. Aïder pour avoir été le plus gentil Président du plus gentil Jury que je pouvais espérer pour ma soutenance.

Je tiens à exprimer ma grande reconnaissance au professeur H.Berrachedi, qui m'a fait l'honneur d'être parmi les examinateurs pour cette modeste thèse.

Mes sincères remerciements vont aussi à Mr.Mezghiche, pour avoir accepté d'être membre du jury et pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

Très chaleureusement et sincèrement ; je remercie Mr.Younsi Hakim (mon essentiel) pour m'avoir soutenu, et qui a su me guider et me conseiller, scientifiquement et amicalement, tout au long de ce travail. Merci beaucoup d'être toujours avec moi (abeaugossiwe).

Je ne remercierai jamais assez ma maman, qui m'a apportée un soutien infini ; qui a toujours su trouver le mot juste pour m'aider à rassembler les forces qui me faisaient défaut. J'espère seulement avoir la chance de lui rendre un millième de l'aide que j'ai reçue d'elle...

Un grand merci à ma famille pour le support moral et financier, j'exprime ma sincère gratitude à mon inestimable père pour tous ce qu'il avait fait pour avoir ce résultat.

Aujourd'hui, je suis heureuse d'exprimer toute ma reconnaissance et tout mon respect à mon frère.

Je remercie spécialement et chaleureusement yema Dahbia pour son soutien permanent. Ainsi que vava Boujema "allah yerahmo" étant certaine que s'il était encore vivant il m'aurait félicitée énormément.

Une pensée toute particulière et profonde à mon oncle omar, tata Fadila, mes sœurs et leur

exprime ici toute ma gratitude pour leur soutiens sans limite, ainsi que mes beaux frères. De manière, plus particulière, Dada nonore et chikhe l'hasen et ma très chère Ghania. Aussi, Je remercie mes belles sœurs et leurs maris, samira inchalah tu seras guérie.

Finalement, mes enfants, moubarek, yassine, rayane, yasser, salamo, yahia, moumene, lydia, khadidja et channaze, inchalah Dieu te donneras santé et prospérité. Sans oublier faycel, inasse, zouzou, anayise, celine, cilace, Hani.

J'exprime ma sincère gratitude à Popo, Tihroh, Mido, idris, et tous(tes) mes amis(es) pour leurs sincères amitiés.

Résumé.

L'optimisation d'une fonction linéaire ou fractionnaire linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces qui est un des concepts importants et intéressants de la programmation multi-objectif est un moyen fructueux pour éviter telles situations avec possibilité d'évaluer toutes les solutions efficaces et les distinguer les unes des autres à travers une fonction linéaire ou fractionnaire linéaire qui résume les préférences du décideur.

Dans notre travail, nous proposons deux techniques :

La première est une nouvelle méthode exacte d'un problème d'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble efficient d'un problème linéaire multi-objectif (MOILP), elle généralise tous les résultats de la méthode de Jorge. La seconde technique est une combinaison de la méthode discrète L-shaped et de la méthode de Jorge pour l'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème linéaire stochastique multi-objectif (MOSILP), pour convertir le MOSILP en un problème multi-objectifs déterministe, on a utilisé le modèle de recours à 2-niveaux appliquée sur une relaxation du problème principal et sur un programme linéaire qui teste l'efficacité du point retourné et, en second lieu, rechercher les solutions alternatives à la solution trouvée et réduit le domaine d'admissibilité en ajoutant progressivement des contraintes éliminant tous les points dominés par la solution efficace courante et donc, une complication additionnelle est composée au problème par l'incorporation de l'aspect stochastique. Un exemple illustratif est présenté pour chacune des deux méthodes.

Introduction générale

Les problèmes d'optimisation déterministes sont utilisés pour modéliser et analyser un grand nombre de systèmes pour lesquels on recherche une stratégie optimale (vis-à-vis d'un certain critère appelé encore fonction objectif) satisfaisant un certain nombre de contraintes. Les paramètres de ces problèmes définissant les contraintes et la fonction objectif sont supposés fixés. En réalité les valeurs de ces paramètres sont souvent incertaines dans beaucoup de situations pratiques.

Cependant, malgré ces efforts, l'énumération explicite de toutes les solutions efficaces du problème Multi-objectif stochastique linéaire en nombres entiers (MOSILP) ou Multi-objectif linéaire en nombres entiers (MOILP) n'est pas souvent nécessaire dans beaucoup de cas pratiques, où le décideur se trouve face à un grand nombre de solutions efficaces différentes dont une sélection de ses meilleurs compromis s'avère impossible.

L'optimisation d'une fonction linéaire ou fractionnaire linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces qui est un des concepts importants et intéressants de la programmation multi-objectif, et un moyen fructueux pour éviter telles situations avec possibilité d'évaluer toutes les solutions efficaces et les distinguer les unes des autres à travers une fonction linéaire qui résume les préférences du décideur.

Dans notre travail on s'intéresse au problème d'optimisation sur l'ensemble efficient, deux approches sont proposées : La première, est une combinaison de la méthode discrète L-shaped [Van Slyke et Wets 69] et de la méthode de Jorge [Jesús M. Jorge 2008] pour l'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème (MOSILP). Et donc, une complication additionnelle est superposée au problème par l'incorporation de l'aspect stochastique. La seconde technique est une nouvelle méthode exacte d'un problème d'optimisation d'une fonction sur l'ensemble efficient d'un problème (MOILP), elle généralise tous les résultats de la méthode de Jorge.

Notre travail est structuré de la façon suivante :

Dans le premier chapitre nous rappelons les notions fondamentales liées à la théorie de la décision multi-objectif, nous donnerons une présentation sommaire des approches de base de la programmation fractionnaire linéaire en nombres entiers (PFLE) et puis, de la programmation mathématique multi-objectif en nombres entiers.

Le second chapitre est une introduction de la programmation stochastique où les différents modèles de prise en compte de l'incertitude sont présentés, à savoir les modèles de recours et les contraintes probabilistes. La méthode de décomposition de Benders (L-shaped) concernant la résolution des problèmes pouvant être modélisés en tant que modèles de recours en deux étapes est présenté.

Le troisième chapitre représentant le noyau de ce travail, consiste à l'expose de deux nouvelles méthodes d'optimisation exacte dans l'une est stochastique, il s'agit, premièrement de l'optimisation d'une fonction fractionnaire linéaire sur l'ensemble efficient d'un problème MOILP, et deuxièmement d'une méthode d'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble efficient d'un problème MOSILP basé sur la méthode de Jorge avec un aspect stochastique.

On terminera ce travail avec une conclusion, et quelques perspectives.

1

Optimisation multi-objectif

Sommaire

1.1	Introduction	11
1.2	Problème d'optimisation multi-objectif :	12
1.3	Problématique	13
1.4	Solution non dominées et solution Pareto optimales :	15
1.5	Classification des approches multicritères	18
1.6	Solutions efficaces supportées et non supportées :	20
1.7	Programmation Linéaire mono-objectif en nombres entiers	21
1.8	Programmation fractionnaire Linéaire mono-objectif	25
1.9	Programmation fractionnaire Linéaire mono-objectif en nombres entiers	28
1.10	Programmation linéaire multi-objectifs en nombres entiers	33
1.11	Détection graphique de l'efficacité :	33
1.12	Exemple illustratif des définitions :	34
1.13	Quelques méthodes de résolution :	36

1.1 Introduction

L'optimisation multi-objectif permet de modéliser des problèmes réels faisant intervenir de nombreux critères (souvent conflictuels) et contraintes. Dans ce contexte, la solution optimale recherchée n'est plus un simple point, mais un ensemble de bons compromis satisfaisant toutes les contraintes.

Nous nous intéressons dans ce chapitre principalement aux problèmes d'optimisation multi-objectif. En premier lieu, nous rappelons les concepts de base de l'optimisation multi-objectifs (en variables continues et en variables entières). Ensuite, quelques méthodes existantes traitant les problèmes de programmation mathématique multi-objectifs. La présentation de toutes ces notions ont été décrites dans nombreux ouvrages le lecteur pourra se référer à [Steuer 1985].

1.2 Problème d'optimisation multi-objectif :

Un problème mathématique multiobjectif consiste à optimiser p fonctions objectifs simultanément ($P \geq 2$). Il est défini sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \text{"optimiser"} \quad & Z(x) = (z_1(x), z_2(x), \dots, z_p(x)) \\ \text{t.q} \quad & x \in S \end{aligned} \tag{1.1}$$

Où $P \geq 2$ représente le nombre d'objectifs à optimiser, X représente un vecteur des variables de décision, $S = \{x \in R^n / g_j(x) < 0, x \geq 0\}$ est l'ensemble de solutions réalisables associé à des contraintes d'égalité, d'inégalité et des bornes explicites (espace des décisions) et $z(x)$ est le vecteur des objectifs à optimiser. z_k et g_j , des fonctions à valeurs réelles du vecteur de décision $k = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, m$

Dans le cadre de l'optimisation multi objectif, le plus souvent le décideur raisonne plutôt en termes d'évaluation d'une solution sur chaque critère. L'ensemble $Y = Z(S)$ représente les points réalisables dans l'espace des critères (espaces objectifs), et $Z = (z_1, z_2, \dots, z_p)$ avec $Y_k = z_k(x)$ représente un point de l'espace des critères.

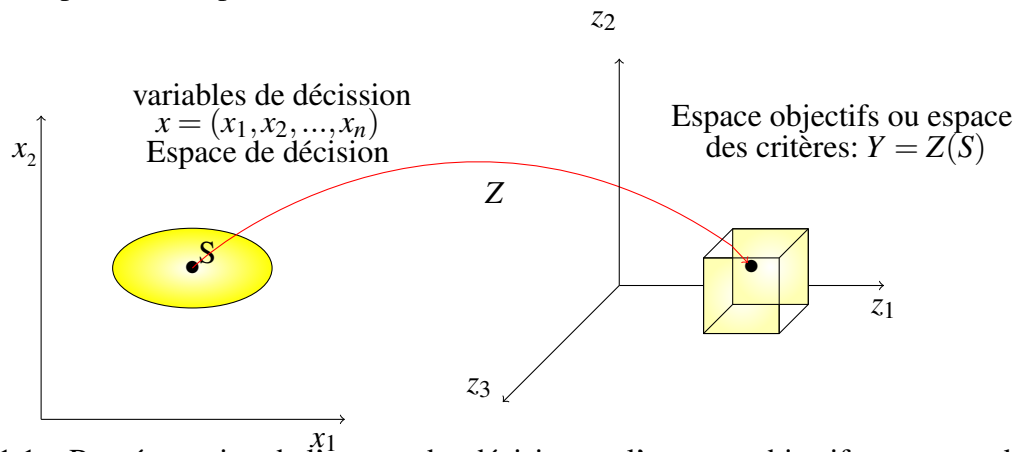


FIG. 1.1 – Représentation de l'espace des décisions et l'espaces objectifs correspondant.

1.2.1 Optimisation linéaire multi-objectif :

Dans tous ce que suit, nous considérons que toutes les fonctions sont à minimiser, le problème d'optimisation linéaire multi-critère peut alors être posé sous la forme générale suivante :

- Problème de programmation linéaire multi-objectif (MOLP : **M**ultiple **O**bjective **L**inear **P**rogramming) est un problème de programmation mathématique multi-objectif avec : les objectifs Z_k et les fonctions g_j sont linéaires .

$$(MOLP) \quad \begin{array}{ll} \text{"optimiser"} & Z_k = C_k x \\ \text{t.q} & x \in S \end{array} \quad (1.2)$$

Où $C \in \mathbb{R}^{1 \cdot n}$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax < b, x \geq 0\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ et $b \in \mathbb{R}^{m \cdot 1}$

- Dans ce travail, nous nous intéressons au problème de programmation linéaire multi-objectif entier (MOILP : **M**ultiple **O**bjective **I**nteger **L**inear **P**rogramming) défini par :

$$(MOILP) \quad \begin{array}{ll} \text{"optimiser"} & Z_k = C_k x \\ \text{t.q} & x \in D \end{array} \quad (1.3)$$

Où $D = S \cap \mathbb{Z}^n$, \mathbb{Z} étant l'ensemble des nombres entiers relatifs.

1.3 Problématique

La difficulté principale d'un problème multi-objectif est qu'il n'existe pas de définition de la solution optimale. Le décideur peut simplement exprimer le fait qu'une solution est préférable à une autre mais il n'existe pas une solution meilleure que toutes les autres.

Dés lors résoudre un problème multi-objectif ne consiste pas à rechercher la solution optimale mais l'ensemble des solutions satisfaisantes pour lesquelles on ne pourra pas effectuer une opération de classement. Les méthodes de résolution de problème multi-objectif sont donc des méthodes d'aide à la décision car le choix final sera laissé au décideur.

Pour répondre à ce problème, il existe deux types de comportement. Le premier est de ramener un problème multi-objectif à un problème uni-critère au risque d'enlever toute signification au problème. Le second comportement est d'apporter des réponses au problème en prenant en compte l'ensemble mono-objectif. La différence entre ces deux communautés s'exprime dans le schéma ci-dessous. Soit le décideur intervient dès le début de la définition du problème, en exprimant sa préférence, afin de transformer un problème multi-objectif en un problème uni-critère. Soit le décideur effectue son choix dans l'ensemble des solutions proposées par le solveur multi-objectif.

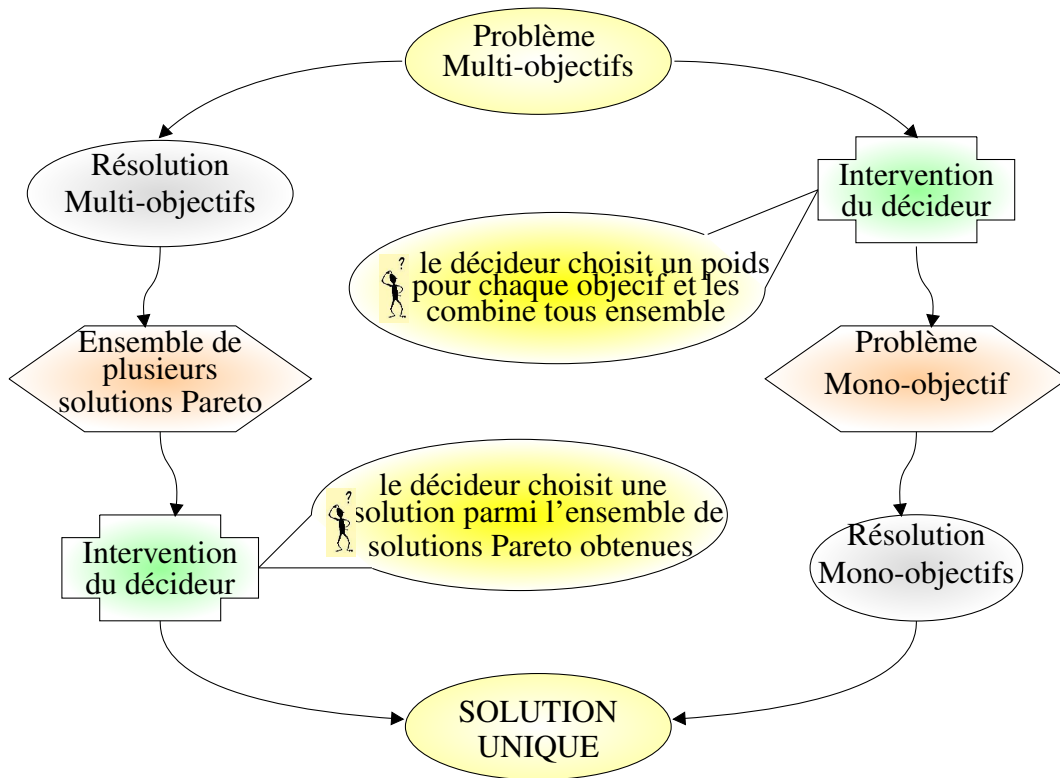


FIG. 1.2 – Schéma de résolution

1.3.1 Convexité

L'ensemble χ est dit convexe si tout segment joignant deux points quelconques de χ est inclus dans χ .

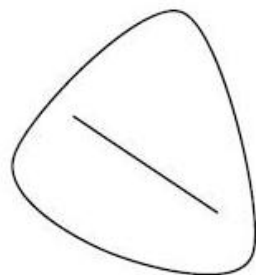


FIG. 1.3 – Espace convexe

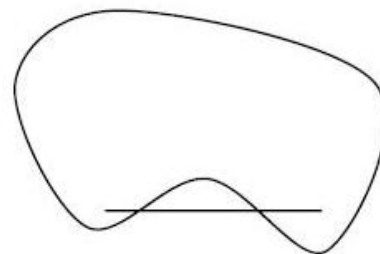


FIG. 1.4 – Espace non convexe

La convexité est le premier indicateur de la difficulté du problème. En effet, certaines méthodes sont dans l'incapacité de résoudre des problèmes non convexes de manière optimale.

1.4 Solution non dominées et solution Pareto optimales :

La plupart des algorithmes de l'optimisation multi-objectifs utilisent le concept de dominance dans leur recherche. Ici, nous définissons le concept de dominance en termes apparentés et plusieurs techniques présentes pour identifier des solutions dominées dans une population finie de solutions.

1.4.1 Solutions spéciales :

Nous définissons en premier quelques solutions spéciales qui sont souvent utilisées dans les algorithmes de l'optimisation multi-objectif.

Vecteur Objectif idéal :

Le vecteur idéal Z^* du problème est le vecteur de l'espace des critères dont chaque composante Z_k est la solution du problème de minimisation de la fonction Z_k sous les contraintes du problème.

Définition 1.1 Le vecteur idéal Z^* est le vecteur qui optimise chacune des fonctions objectifs Z^* , $Z_k^* = \max_{x \in (S)} (Z_k(x))$ $K = 1, \dots, p$.

Vecteur Objectif Nadir : A la différence du vecteur idéal qui représente les bornes inférieures de chaque objectif dans l'espace faisable, le *vecteur de Nadir* Z^{nad} correspond à leurs bornes supérieures sur la surface de Pareto et non pas dans tout l'espace faisable. Ce vecteur est bien plus difficile de vecteur idéal. Pour certains problèmes, la méthode de payoff table peut être utilisée le vecteur de nadir peut être correspondre à une ou à aucune solution existante, en fonction du problème (notamment, de la convexité du domaine de recherche).

Pour normaliser chaque objectif, le vecteur idéal et le vecteur de nadir sont en particulier utilisés de façon suivante :

$$Z_k^{norm} = \frac{Z_k - Z_k^*}{Z_k^{nad} - Z_k^*}$$

Définition 1.2 Soit \hat{x}^j une solution optimale du critère Z_j . La matrice $(p \times p)$ formée des éléments de $z_{kj} = Z_k(\hat{x}^j)$ est dite **matrice des gains**.

$$\begin{pmatrix} \bar{z}_1 & \cdots & z_{1j} & \cdots & z_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z_{k1} & \cdots & \bar{z}_{kj} & \cdots & z_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z_{p1} & \cdots & z_{pj} & \cdots & \bar{z}_p \end{pmatrix}$$

La diagonale de cette matrice représente les coordonnées du point idéal.

De la matrice des gains peut être défini le vecteur nadir noté $\eta \in \mathbb{R}^r$ $\eta_k = \min_{j=1, \dots, p} (Z_{kj})$ $k = 1, \dots, p$.

1.4.2 Concept de dominance

La solution $x^{(i)}$ du problème est dite dominée une autre solution $x^{(j)}$, si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $Z_k(x^{(i)}) \leq Z_k(x^{(j)})$, $\forall k \in 1, \dots, p$
- $\exists k \in 1, \dots, p$ tel que $Z_k(x^{(i)}) < Z_k(x^{(j)})$

Si la solution $x^{(i)}$ domine la solution $x^{(j)}$, nous allons écrire $x^{(i)} < x^{(j)}$

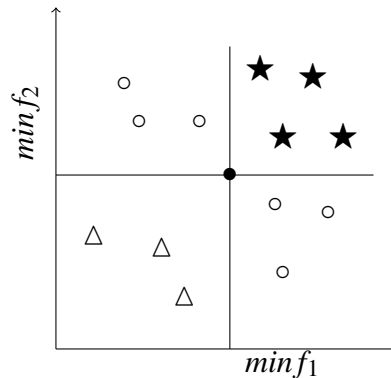


FIG. 1.5 – Le point noir est dominé par chacun des triangles, domine chacun des étoiles et équivalents aux annaux aux sens de la dominance

Notons que pour toute paire de solution $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$, une et seulement une des affirmations suivantes est vraie :

- $x^{(1)}$ domine $x^{(2)}$;
- $x^{(1)}$ est dominée par $x^{(2)}$;
- $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ sont équivalentes au sens de la dominance.

Par la suite, les solutions équivalentes au sens de la dominance seront parfois évoquées comme solutions équivalentes au sens de Pareto ou, encore, comme solutions Pareto équivalentes.

Définition 1.3

- 1- Soient $Z, Z' \in \mathbb{R}^p$. On dit que Z **domine fortement** Z' si et seulement si $Z_k > Z'_k \forall k = 1, \dots, p$.
(si Z domine fortement Z' , alors Z est meilleur que Z' sur tous les critères).
- 2- Un vecteur Z est dit **faiblement non dominé** s'il n'existe pas de $Z' \in \mathbb{R}^p$ tel que Z' domine fortement Z .

1.4.3 Propriétés de la relation de dominance :

- La relation binaire de dominance $<$, tel qu'elle est définie ci-dessus,
- N'est pas réflexive, car une solution ne se domine pas elle-même ;
 - N'est pas symétrique, car on n'a jamais $x^{(1)} < x^{(2)}$ et $x^{(2)} < x^{(1)}$;
 - N'est pas antisymétrique, du fait de l'existence de solutions Pareto-équivalentes ;
 - Est transitive, car $x^{(1)} < x^{(k)}$ et $x^{(k)} < x^{(2)}$ implique $x^{(1)} < x^{(2)}$.

La relation de dominance est donc une relation d'ordre partiel strict sur l'espace de décision [Chankong and Haimes 83]. Notons en particulier que $x^{(1)} \not< x^{(2)}$ n'implique pas $x^{(2)} < x^{(1)}$.

1.4.4 Optimalité de Pareto :

Soit P un ensemble de solutions-candidats d'un problème d'optimisation multi-objectif. L'ensemble $P' \subseteq P$, composé de tous les éléments de P qui ne sont dominés par aucun élément de P est dit *sous ensemble non dominé de l'ensemble de solutions* P .

Par la suite, nous allons parfois entendre par un *ensemble* ou *sous ensemble non dominé*, un sous ensemble de solutions qui sont Pareto-équivalentes entre elles même s'il existe d'autres solutions qui dominent des solutions de l'ensemble en question.

De façon analogue aux solutions optimales globales et locales dans le contexte de l'optimisation mono-objectif, les notions d'optimum local et d'optimum global au sens de Pareto peuvent être introduites :

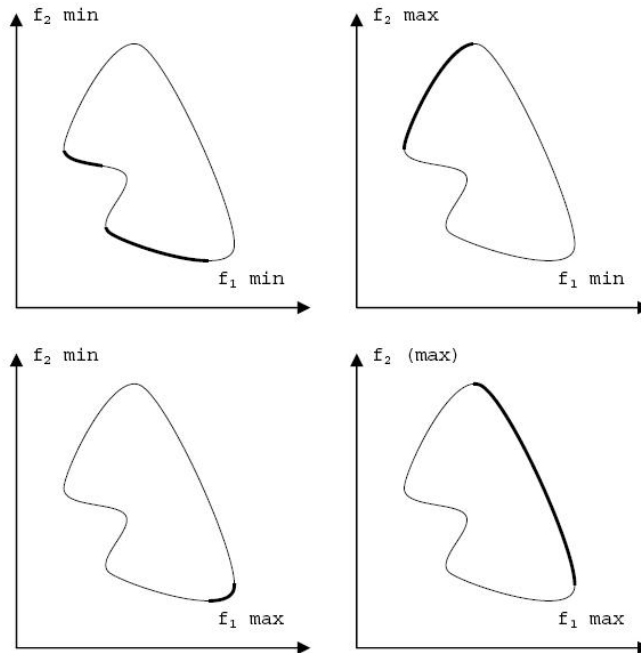


FIG. 1.6 – Les solutions Pareto-Optimales sont marquées avec les courbes continues pour quatre combinaisons de deux types d'objectifs.

- Cet ensemble est constitué par *les solutions non dominées du problème d'optimisation 1.2* appelées aussi *solution de Pareto* ou *solutions Pareto-optimales* de ce problème.
- L'image de l'ensemble de Pareto dans l'espace des critères est appelée la *surface de Pareto* (ou le *front de Pareto* dans le cas de problème bi-objectif), ou également la *surface des compromis optimaux*.
- L'*ensemble de Pareto global* du problème d'optimisation multi-objectif 1.2, est l'ensemble de points tels qu'aucun autre point de l'espace faisable S ne les domine. Souvent, l'ensemble de Pareto global est évoqué simplement comme *l'ensemble de Pareto* ou encore *l'ensemble des compromis optimaux*.
- De manière similaire, un sous-ensemble P'_{loc} de l'espace de décision est appelé *ensemble de Pareto local* s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tous élément x de P'_{loc} il n'existe pas de solutions y dans S (où ε est un nombre positif petit) dominant un élément de P'_{loc} et vérifiant $\|y - x\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

1.5 Classification des approches multicritères

les approches a peiori(décideur → recherche)

Les solutions les plus intuitives pour résoudre des problèmes multiobjectifs consistent souvent à combiner les différentes fonctions objectifs en une fonction d'utilité suivant les préférences du

décideur. Dans ce cas le décideur est supposé connaître à priori le poids de chaque objectif les mélanger dans une fonction unique. Cela revient à résoudre un problème mono-objectif. Cependant dans la plupart des cas, le décideur ne peut pas exprimer clairement sa fonction d'utilité, soit par manque d'expérience ou d'information, soit par ce que les différents objectifs sont non commensurables¹.

les approches a posteriori(recherche → décideur)

Le décideur prend sa décision d'après un ensemble de solutions calculées par un solveur. Dans ce cas la qualité de la décision dépend du choix de la méthode de résolution. Car celle-ci va devoir donner un ensemble le plus représentatif de l'espace des objectifs efficaces

les approches progressives ou interactives(décideur ↔ recherche)

Dans ces méthodes, les processus de décision et d'optimisation sont alternés. Par moment, le décideur intervient de manière à modifier certaines variables ou contraintes afin de diriger le processus d'optimisation. Le décideur modifie ainsi interactivement le compromis entre ses préférences et les résultats. Ces méthodes exigent une connaissance approfondie, de la part du décideur, des outils utilisés. [Vincke 1988] présente plusieurs méthodes progressives utilisées en recherche opérationnelle. Il trouve que la relation de dominance² est trop pauvre pour être utile et les fonctions d'utilité multiattribut³ trop riches pour être fiable. Il tente d'enrichir la relation de dominance par des éléments peu discutables : des préférences solidement établies.

Ce classement adopte un point de vue plus théorique articulé autour des notions d'agrégation et d'optimum de Pareto. Ces notions sont développées dans les sections suivantes car nous adoptons cette classification pour présenter les différentes méthodes.

- *Les méthodes agrégées* : Les méthodes transforment un problème multiobjectif en un problème mono-objectif.
- *Les méthodes fondées sur Pareto* : Au XIX^{ème} siècle, Pareto [Pareto 1896], un mathématicien italien, formule le concept suivant : dans un problème multiobjectif, il existe un équilibre tel que l'on ne peut pas améliorer un critère sans détériorer au moins un des autres critères. Cette équilibre a été appelé optimum de Pareto.
Ces méthodes sont fondées sur la notion de dominance au sens de Pareto⁴ . qui privilégie une recherche satisfaisant au mieux tous les objectifs.
- *Les méthodes non agrégées et non Pareto* : Certaines méthodes n'utilisent aucun des deux concepts précédents. Alors que l'agrégation ou l'utilisation de la dominance de Pareto traitent les objectifs simultanément, en général, les méthodes dites non agrégées et non Pareto possèdent un processus de recherche qui traite séparément les objectifs.

¹Des objectifs sont non commensurables s'ils sont exprimés dans des unités différentes.

²la relation de dominance est essentiellement utilisée dans les méthodes a posteriori. Une définition est donnée au paragraphe 1.4.2 page 16.

³Terme utilisé pour identifier les méthodes d'agrégation.

⁴Cette notion est définie au paragraphe 1.4.4 page 17

Fonctions scalarisantes L'ensemble des méthodes agrégés repose sur l'axiome suivant : tout décideur essaye inconsciemment de maximiser une fonction d'utilité U

$$U = U(z_1, z_2, \dots, z_k)$$

Où $U : \mathbb{R}^p \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^p : \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1, \lambda_k > 0\}$ qui agrège les valeurs des critères pour chaque solution ($\Lambda \subset \mathbb{R}^p$ est l'ensemble des paramètres choisis). Il est possible de définir une

fonction croissante dite fonction scalarisante, qui agrège les valeurs des critères pour chaque solution : $U(Z, \lambda) : \mathbb{R}^p \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$

Les fonctions d'utilités les plus employées sont :

➔ somme pondérée des objectifs (particulièrement utilisée dans le cas linéaire) :

$$U_1(Z, \lambda) = \sum_{k=1}^p \lambda_k Z_k, \lambda \in \Lambda,$$

ou bien,

$$U_2(Z, \lambda) = \sum_{k=1}^p \lambda_k |Z_k - \bar{Z}_k|, \lambda \in \Lambda.$$

Où \bar{Z}_k est la k^{me} composante du point idéal⁵.

➔ Norme L_p pondérée :

$$U_3(Z, \lambda) = \left[\sum_{k=1}^p \lambda_k |Z_k - \bar{Z}_k|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \lambda \in \Lambda, p \in \mathbb{Z}_+^*.$$

➔ Norme L_∞ pondérée de Tchebychev :

$$U_4(Z, \lambda) = \max_{1 \leq k \leq p} \left\{ \lambda_k |Z_k - \bar{Z}_k| \right\}, \lambda \in \Lambda.$$

➔ Norme composée (Tchebychev pondérée augmentée) :

$$U_4(Z, \lambda) = \max_{1 \leq k \leq p} \{ \lambda_k |Z_k - \bar{Z}_k| \} + \rho \sum_{k=1}^p \lambda_k |Z_k - \bar{Z}_k|, \rho > 0.$$

1.6 Solutions efficaces supportées et non supportées :

Dans l'ensemble des solutions efficaces d'un problème de programmation linéaire discrète à objectifs multiples, deux types de solutions peuvent être différenciées :

⁵Cette notion est définie au paragraphe 1.4.1 page 15

- *Solutions supportées* : Elles appartiennent à l'enveloppe convexe de la frontière Pareto. Chacune de ces solutions peut être trouvée en optimisant une agrégation linéaire des objectifs. Cette dernière, consiste à transformer un problème multiobjectif en un problème mono objectif combinant les différentes fonctions objectif en une seule fonction F de façon linéaire :

$$F(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i c^i x$$

Où les $\lambda_i \in [0, 1]$ et vérifiant $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$

Différents poids fournissent différentes solutions supportées ; une même solution pouvant être générée en utilisant des poids différents.

- *Solutions non supportées* : Néanmoins, il existe en général d'autres solutions qui, bien qu'efficaces, ne peuvent être obtenues par la résolution d'un programme paramétrique. Ces solutions, dites non supportées, sont dominées par certaines combinaisons convexes de solutions supportées ; il s'agit de points de $Z(S)$ à l'intérieur de l'enveloppe convexe de $Z(S)$

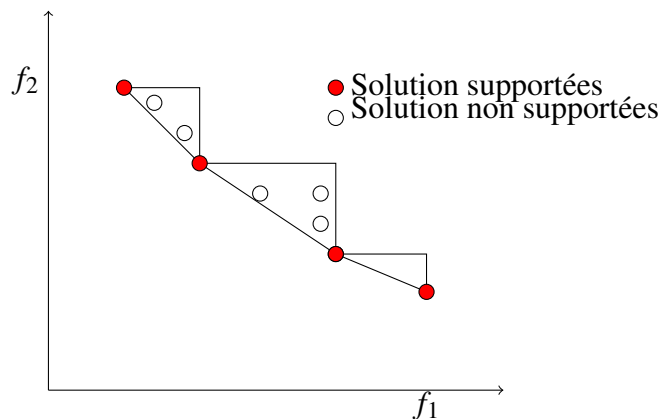


FIG. 1.7 – Solutions supportées et non supportées

1.7 Programmation Linéaire mono-objectif en nombres entiers

Rappelons que la forme générale d'un problème de programmation linéaire uni-critère est définie par :

$$(LP) \begin{array}{ll} \max & Z = Cx \\ \text{t.q} & x \in S \end{array}$$

Où $C \in R^{1 \cdot n}$, $S = \{x \in R^n / Ax = b, x \geq 0\}$, $A \in R^{m \cdot n}$ et $b \in R^{m \cdot 1}$

Dans le cas où seulement quelques variables sont entières, on a alors un problème de programmation linéaire mixte qui s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \max \quad Z = (Cx + hy) \\
 (LPMIX) \quad & \text{t.q} \quad Ax + Gy = b \\
 & \quad \quad x \geq 0 \\
 & \quad \quad y \in \mathbb{N}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Si toutes les variables sont entières, on aura un programme linéaire en nombres entiers donné par :

$$\begin{aligned}
 (ILP) \quad & \max \quad Z = Cx \\
 & \text{t.q} \quad x \in D
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Où $D = S \cap \mathbb{Z}^n$, \mathbb{Z} est l'ensemble des nombres entiers relatifs.

1.7.1 Les Méthodes de résolution d'un programme linéaire en nombres entiers

Les deux principales familles de méthodes actuellement connues pour résoudre les problèmes de programmation linéaire en nombres entiers sont les méthodes de coupes et les méthodes arborescentes.

Coupe fractionnaire de Gomory [Gomory 58]

Soit à résoudre le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$\begin{aligned}
 (ILP) \quad & \max \quad Z = Cx \\
 & \text{t.q} \quad x \in D
 \end{aligned}$$

Dont le problème relaxé est : $(LP) \text{Max}\{Z = Cx \mid x \in S\}$.

Dans cette méthode, le programme linéaire (LP) est résolu en première étape en utilisant la méthode du simplexe. A l'optimum on a les conditions :

- a. $\hat{1} \leq 0$
- b. $\hat{2} \geq 0$

qui sont vérifiées. Si de plus :

3. \hat{b} est entier, alors la solution optimale de (LP) est aussi optimale pour (ILP). Sinon, une ou plus des variables de base soumises à l'intégrité sont à valeurs fractionnaires. L'idée principale de l'algorithme de Gomory [Gomory 58] est de maintenir les conditions (1) et (2) satisfaites et de rajouter des contraintes dites *coupes de Gomory* [Gomory 58] une par une jusqu'à ce que la troisième condition soit vérifiée.

Définition 1.4 Etant donné un programme linéaire en nombres entiers (ILP), On dit que l'inéquation

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \leq \beta$$

est valide si elle est satisfaite par tout point de D. Une coupe est une inéquation valide qui n'est pas satisfaite pour tout point de S.

Définition 1.5 Soit α un scalaire quelconque, on désigne par :

- $\lfloor \alpha \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à α
- $\lceil \alpha \rceil$ le plus petit entier supérieur ou égal à α
- $\langle \alpha \rangle = \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$

$\langle \alpha \rangle$ est appelée la *partie fractionnaire* de α et $\lfloor \alpha \rfloor$ sa *partie entière*.

Génération de la coupe de Gomory :

Soit le tableau optimal issu de la résolution de (LP) par la méthode du simplexe où la solution optimale est supposée non entière (voir tabl.1). Sans perte de généralités, on suppose qu'à l'optimum, il y a un total de $(m + n)$ variables où m représente le nombre de variables de base notées x_i , ($i = 1, m$) et n représente le nombre de variables hors base notées y_j , ($j = 1, n$).

x_B	$\hat{A} = B^{-1}A$	$\hat{b} = B^{-1}b$
$-Z$	$\hat{c} = c - \pi A$	$z - c_B B^{-1}b$

TAB. 1.1 – Tableau optimal associé à la base B.

Où :

$\pi = c_B B^{-1}$: est dit vecteur multiplicateur relatif à la base B.

$\hat{c} = c - \pi A$: est dit vecteur coût réduit relatif à la base B, avec $\hat{c}_B = 0$.

A partir du tableau optimal, choisir une variable de base dont la valeur est fractionnaire, soit x_i . La i^{me} équation du tableau est donnée par :

$$x_i + \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} y_j = \hat{b}_i \tag{1.6}$$

Où : \hat{a}_{ij} : est un élément de la matrice optimale des contraintes \hat{A} .

En décomposant chaque coefficient en la somme de sa partie entière et de sa partie fractionnaire, on obtient :

$$x_i + \sum_{j=1}^n \langle \hat{a}_{ij} \rangle y_j + \sum_{j=1}^n \lfloor \hat{a}_{ij} \rfloor y_j = \langle b_i \rangle + \lfloor \hat{b}_i \rfloor$$

Puisque $0 \leq \langle \hat{a}_{ij} \rangle < 1$, ceci implique :

$$x_i + \sum_{j=1}^n \lfloor \hat{a}_{ij} \rfloor y_j \leq \langle b_i \rangle + \lfloor \hat{b}_i \rfloor$$

Or le membre gauche est entier et $0 \leq \langle \hat{b}_i \rangle < 1$. Par conséquent cette dernière équation implique :

$$x_i + \sum_{j=1}^n \lfloor \hat{a}_{ij} \rfloor y_j \leq \lfloor \hat{b}_i \rfloor$$

et en soustrayant cette dernière inéquation de (1.6), on obtient :

$$\sum_{j=1}^n \langle \hat{a}_{ij} \rangle y_j \geq \langle \hat{b}_i \rangle \quad (1.7)$$

qui est bien valide. De plus (1.7) n'est pas satisfaite par la solution optimale de (LP), donc (1.7) est bien une coupe. En ajoutant une variable d'écart x_s à (1.7), on obtient la coupe de Gomory définie par

$$x_s - \sum_{j=1}^n \langle \hat{a}_{ij} \rangle y_j = -\langle \hat{b}_i \rangle \quad (1.8)$$

Une fois la coupe est générée, les coefficients de (1.8) sont insérés dans une nouvelle ligne du tableau (1.1).

Pour ce nouveau programme, la condition (1) est toujours satisfaite mais pas la condition (2). On effectue donc une ou plusieurs itérations de l'algorithme dual du simplexe, jusqu'à ce que la condition (2) soit satisfaite. Si \hat{b} est entier, la solution courante est optimale pour (1.5), sinon on recommence le processus. Après un nombre fini d'itérations, ou bien on obtient une solution optimale entière, ou bien le problème devient impossible.

Méthode Branch & Bound

La méthode Branch & Bound (par séparation et évaluation) est très efficace pour la résolution des problèmes de programmation linéaire en nombres entiers. Elle a été à l'origine par Land et Doig [Land 60] pour résoudre un problème de programmation linéaire en nombres entiers. Une approche simple pour résoudre un problème de programmation linéaire en nombres entiers est d'énumérer tous les points entiers réalisables du problème, d'évaluer la fonction objectif en chaque point et d'identifier celui qui a la meilleure valeur de fonction objectif. Bien qu'une recherche si approfondie dans l'espace des solutions réalisables soit simple de mettre en oeuvre, elle sera très coûteuse en terme de temps de calcul même pour des problèmes de taille réduite.

Son principe est de découper (branche) l'espace initial de recherche en domaines de plus en plus restreints afin d'isoler l'optimum global (principe de séparation). L'algorithme de recherche forme ainsi un arbre dont chaque nœud représente une partie de l'espace. Ensuite chaque nœud est évalué de façon à déterminer sa borne (bound) inférieure en fonction d'un critère d'évaluation. Si cette borne n'est pas meilleure que la solution courante alors la recherche sur ce nœud est stoppée, sinon la séparation continue.

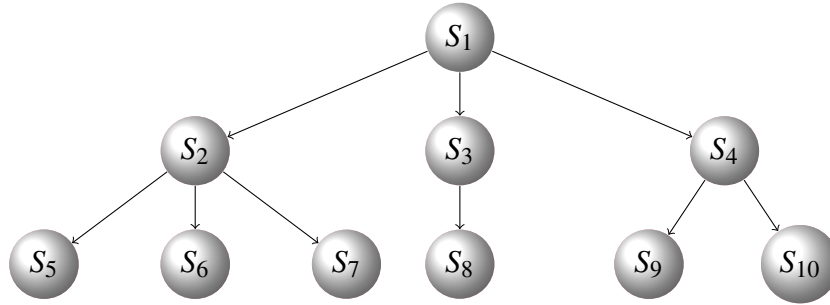


FIG. 1.8 – Principe de Branch and Bound

1.8 Programmation fractionnaire Linéaire mono-objectif

Le terme programmation fractionnaire est utilisé pour désigner un type de problèmes d'optimisation où la fonction objectif est un quotient $\frac{f(x)}{h(x)}$, soumis à un ensemble de contraintes. Différentes versions de ce modèle, linéaires ou non linéaires, en nombres entiers, ou en continus.

Dans ce travail, nous nous intéressons au problème de programmation fractionnaire Linéaire mono-objectif en nombres entiers.

1.8.1 Formulation mathématique

Étant donné f , h et g_i , $i = 1, \dots, m$, des fonctions réelles définies sur \mathbb{R}^n . Désignons par S un sous-ensemble de \mathbb{R}^n sur lequel h ne s'annule pas. Le problème de programmation fractionnaire consiste à déterminer un élément x^* de D maximisant la fonction f/h sur un domaine défini par le système de contraintes $x \in D$, $D = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid g(x) \leq 0, x \geq 0\}$. Il a donc la forme suivante :

$$(ILFP) \quad \max \quad Z = \frac{f(x)}{h(x)} \\ \text{t.q.} \quad x \in S$$

Lorsque la fonction f est concave et les fonctions h et g_i , $i = 1, \dots, m$, sont convexes, (ILFP) est désigné par programme fractionnaire concave-convexe. (ILFP) est dit fractionnaire linéaire,

ou encore hyperbolique, lorsque f , h et g_i $i = 1, \dots, m$, sont des fonctions linéaires ou affines de la variable $x \in \mathbb{R}_+^n$. Il se modélise alors comme suit :

$$(ILFP) \quad \begin{array}{ll} \max & Z = \frac{px + \alpha}{qx + \beta} \\ \text{t.q} & x \in S \end{array}$$

Où :

- $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$, avec α et β sont des réels, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, p et q des vecteurs de $\mathbb{R}^{1 \times n}$
- D borné et non vide.
- $qx + \beta \neq 0 \forall x \in D$

Définition 1.6 Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite concave si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Définition 1.7 Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Définition 1.8 Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable sur \mathbb{R}^n . Alors, f est dite pseudo-concave si et seulement si : $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla f(x)(y - x) \leq 0$, on a : $f(y) \leq f(x)$.

Définition 1.9 Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable sur \mathbb{R}^n . Alors, f est dite pseudo-convexe si et seulement si : $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla f(x)(y - x) \geq 0$, on a : $f(y) \geq f(x)$.

Définition 1.10 On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est quasi-convexe si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

Lemme 1.1 [Choo84] Si f/h est une fonction fractionnaire linéaire sur un ensemble D de \mathbb{R}^n telle que $\forall x \in D : h(x) > 0$, alors :

- pour chaque couple $(x, y) \in D$, on a :
 - $\frac{f(x)}{h(x)} \leq \frac{f(y)}{h(y)}$ si et seulement si $\nabla \left[\frac{f(x)}{h(x)} \right](y - x) \geq 0$
 - $\frac{f(x)}{h(x)} < \frac{f(y)}{h(y)}$ si et seulement si $\nabla \left[\frac{f(x)}{h(x)} \right](y - x) > 0$
- f/h est simultanément pseudo-concave et pseudo-convexe.

1.8.2 Méthode de A. Cambini et al[Cambini86]

On considère le programme fractionnaire linéaire continu (LFP) :

$$(LFP) \begin{array}{l} \max \quad Z = \frac{px + \alpha}{qx + \beta} \\ \text{t.q} \quad x \in S \end{array}$$

Définition 1.11 On dira que x^* est une solution optimale niveau pour le problème (LFP) si et seulement si x^* est solution optimale du problème $P(\theta)$ pour certaines valeurs de θ :

Où $S = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ avec α et β sont des réels, p et q sont des vecteurs de $\mathbb{R}^{1 \times n}$, A est une matrice réelle de format $(m \times n)$ et b un vecteur de \mathbb{R}^m .

$$(P(\theta)) \begin{array}{l} \max \quad px + \alpha \\ \text{t.q} \quad x \in S \\ \quad \quad qx + \beta = \theta \end{array}$$

L'algorithme de Cambini et al. génère une séquence finie $x^k, k = 1, \dots, l$ de solutions optimales niveau dont la première est trouvée de la façon suivante :

Résoudre le programme linéaire :

$$(LFP_0) \{ \min \quad qx + \beta | x \in S \}$$

soit x^0 la solution optimale car sa fonction objectif est bornée. Si x^0 est unique, alors elle est une solution niveau, sinon résoudre le programme linéaire :

$$(LFP_1) \{ \max \quad px + \alpha | qx = qx^0; x \in S \}$$

Si (LFP_1) n'admet pas de solutions, alors la valeur de la fonction objectif est infinie ; sinon une solution optimale x^1 de (LFP_1) est aussi une solution optimale niveau.

Théorème 1.1 Le point x^0 de S est une solution optimale du problème fractionnaire (LFP) si et seulement si le vecteur gradient réduit $\hat{\gamma} = \hat{\beta}p - \hat{\alpha}q$ est tel que $\hat{\gamma}_j \leq 0$ pour tout indice hors base $j \in \mathbb{N}_k$.

Algorithme :

Étape 1 Trouver la solution optimale niveau x^1 .

Si une telle solution n'existe pas, alors $\sup \left\{ \frac{px + \alpha}{qx + \beta} \mid x \in S \right\} = +\infty$, terminer.

Sinon, poser $k = 1$ et aller à l'étape 2.

Étape 2

Si $J = \{j \in N \mid \hat{q}_j > 0\} = \emptyset$, terminer, x^k est une solution optimale du problème (LFP).

Sinon, soit s tel que $\frac{\hat{p}_s}{\hat{q}_s} = \max_{j \in J} \frac{\hat{p}_j}{\hat{q}_j}$

Si $\hat{\gamma}_s > 0$, aller à l'étape 3. Sinon, terminer, x^k est une solution optimale de (LFP).

Étape 3 La variable hors base x_s entre dans la base au moyen d'une opération pivot, poser $k = k + 1$ et aller à l'étape 2. Si une telle opération n'est pas possible, terminer : \sup

$$\left\{ \frac{px + \alpha}{qx + \beta} \mid x \in S \right\} = \frac{\hat{p}_j}{\hat{q}_j},$$

1.9 Programmation fractionnaire Linéaire mono-objectif en nombres entiers

1.9.1 Méthode de M. Moulaï et al.[Moulaï et Abbas02]

Dans cette section, une méthode par séparation et évaluation progressive pour la résolution des problèmes de programmation fractionnaire linéaire discrète (ILFP) est présenté. Elle est basée sur la méthode de résolution des problèmes(LFP)de Cambini et Martein.

Considérons le problème de programmation fractionnaire linéaire en nombres entiers suivant (ILFP) :

$$(ILFP) \max Z = \frac{px + \alpha}{qx + \beta}$$

$$\text{t.q } x \in D$$

Où $D = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$.

On suppose que toutes les données du problème sont entières et que l'on dispose initialement d'une solution réalisable pour (ILFP). Ainsi, (ILFP) peut être écrit d'une manière équivalente comme :

$$\begin{aligned}
 (PR) \quad \max \quad Z &= \frac{\sum_{j \in N} \hat{p}_j x_j + \hat{\alpha}}{\sum_{j \in N} \hat{q}_j x_j + \hat{\beta}} \\
 \text{t.q.} \quad x_B + \hat{A}^N x_N &= \hat{b} \\
 x_B, x_N &\geq 0 \text{ entier}
 \end{aligned}$$

Où : B est l'ensemble des indices de base et N est l'ensemble des indices hors base.

• **Calcul de pénalités** : après l'obtention de la solution optimale continue de (ILFP), la fonction objectif associée est donnée dans le tableau optimale du simplexe par (PR). Soit b_k la valeur non entière de x_k pour un certain $k \in B$. Pour sélectionner la nouvelle branche qui doit être ajoutée à (PR), il faut calculer les pénalités π_r et $\pi_{r'}$ des contraintes $x_k \leq \lfloor e_k \rfloor$ et $x_k \geq \lceil e_k \rceil$ respectivement, donnée par :

$$\pi_r = \frac{b\Delta_r}{\beta(\hat{\beta} + \frac{b\hat{q}_r}{\hat{a}_{kr}})}, \quad \pi_{r'} = \frac{(1-b)\Delta_r}{\beta(\hat{\beta} + \frac{(1-b)\hat{q}_r}{\hat{a}_{kr}})}$$

où

$$\Delta_r = \min\left\{\frac{\hat{y}_j}{-\hat{a}_{kr}} / -\hat{a}_{kr} > 0\right\}, \quad \Delta_{r'} = \min\left\{\frac{\hat{y}_j}{\hat{a}_{kr}} / -\hat{a}_{kr} > 0\right\}, \quad b = b_k - \lfloor b_k \rfloor$$

la branche correspondante à la plus petite valeur des pénalités est sélectionnée.

Algorithme de résolution :

Étape 1 : Trouver la solution optimale niveau x_0 du problème(ILFP) ;

◇ Si une telle solution n'existe pas, alors

- soit $\sup \left\{ \frac{px + \alpha}{qx + \beta} \mid x \in S \right\} = +\infty$, lorsque la solution niveau de base optimale de (ILFP) n'existe pas.
- soit $\sup \left\{ \frac{px + \alpha}{qx + \beta} \mid x \in S \right\} = \max_{j \in J} \frac{\hat{p}_j}{\hat{q}_j}$, lorsque l'opération de pivot est impossible.

◇ Sinon, poser $k = 1, l = 0$ et aller à l'étape 2

Étape 2 :

- Si x_0 est entier, terminer. x_0 est une solution optimale du problème (ILFP).
- Sinon, soit $x_k, k \in B$, une composante non entière de x_0 ayant pour valeur b_k . Poser $\pi_l = 0$ et aller à l'étape 3.

Étape 3 :

- Calculer π_{2k-1}, π_{2k} , Poser $\pi_{2k-1} = \pi_{2k-1} + \pi_l, \pi_{2k} = \pi_{2k} + \pi_l$ et $\pi_l = +\infty$
- Calculer $\pi_l = \min_{1 \leq j \leq 2k} \{\pi_j\}$
- Ajouter la contrainte au tableau du simplexe optimale ,effectuer les opérations de pivot et aller à l'étape 4.

Étape 4 :

- Si x_l est une solution entière, terminer. x_l est une solution optimale du problème(ILFP).
- Sinon,
 - Le problème augmenté n'a pas de solutions, terminer.
 - Soit x_k^l une composante non entière de x^l ayant pour valeur b_k^l . Poser $k = k + 1$ et aller à l'étape 3.

Théorème 1.2 La branche sélectionnée, ayant pour pénalité la valeur minimale $\pi_l = \min_{1 \leq j \leq 2k} \{\pi_j\}$, correspond à la valeur optimale de la fonction objectif pour tous les sommets pendant j de l'arborescence.

1.9.2 Exemple numérique :

Considérons le problème fractionnaire linéaire en nombre entier (P) suivant :

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = \frac{7x_1 + 9x_2 + 3}{3x_1 + 4x_2 + 2} \\ (P) \quad & \text{t.q} \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & \quad \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \text{entiers} \end{aligned}$$

En résolvant le problème relaxé,on obtient le tableau du simplexe optimale qui est représenté par le programme fractionnaire linéaire (PFLR')suivant :

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = \frac{12x_3 + 3x_4 + 108}{6x_3 + x_4 + 51} \\ (PFLR') \quad & \text{t.q} \quad x_1 - \frac{2}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 = \frac{3}{5} \\ & \quad \quad \frac{3}{3} \quad \quad \frac{2}{2} \quad \quad \frac{8}{8} \\ & \quad \quad x_2 - \frac{5}{5}x_3 + \frac{5}{5}x_4 = \frac{5}{5} \\ & \quad \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

La solution continue optimale est $x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = \frac{8}{5}$, et $x_j = 0, j = 3, 4$; avec une valeur de Z égale à $\frac{36}{17}$. Puisque x_1, x_2 ne sont pas entières, cette solution n'est pas réalisable pour (P). Donc

en calculant les pénalités π_1, π_2 des contraintes $x_1 \leq \lfloor \frac{3}{5} \rfloor, x_1 \geq \lceil \frac{3}{5} \rceil$ respectivement, nous obtenons $\pi_1 = \frac{3}{170}, \pi_2 = \frac{1}{153}$.

La branche dont la valeur de la pénalité est la plus petite est sélectionnée et la contrainte respective est rajoutée au problème (*PFLR'*).

La solution obtenue est $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$, et $x_j = 0 \ j \in N$. Maintenant la solution est entière et donc elle est optimale pour le problème (P).

1.9.3 Géométrie de la programmation fractionnaire linéaire

Comme l'a noté Steuer[Steuer 1985], les programmes linéaires fractionnaires présentent un intérêt particulier mis en évidence par la linéarité des courbes niveaux de leurs fonctions critères. En effet, pour illustrer cet aspect, considérons une Z -courbe niveau quelconque de la fonction critère :

$$\bar{Z} = \frac{px + \alpha}{qx + \beta}$$

après simplification, nous obtenons :

$$\bar{Z}(px + \alpha) = (qx + \beta)$$

Ce qui donne : $\bar{Z}\beta - \alpha = (p - \bar{Z}q)^t x$, qui est une expression linéaire de la z -courbe niveau de la fonction objectif.

Puisque \bar{Z} est quelconque, on voit que chaque courbe niveau du critère fractionnaire linéaire est linéaire sur D , à condition que le dénominateur ne soit pas nul sur D . Donc, si un programme fractionnaire linéaire unicritère possède une solution optimale, alors au moins un point extrême de D est optimal.

En dépit de la linéarité de la courbe niveau de la fonction objectif, les courbes niveaux ne sont pas parallèles (lorsque $p \neq 0, q \neq 0$ et $p \neq wq$ pour tout $w \in \mathbb{R}$) comme ils le sont en programmation linéaire. L'ensemble rotation est l'ensemble de tous les points d'intersection entre la 0-courbe niveau du numérateur et la 0-courbe niveau du dénominateur.

L'ensemble rotation est appelé *point de rotation* dans \mathbb{R}^2 et axe de rotation dans \mathbb{R}^3 . Les points de cet ensemble sont déterminés par la résolution du système suivant :

$$p^t x = -\alpha$$

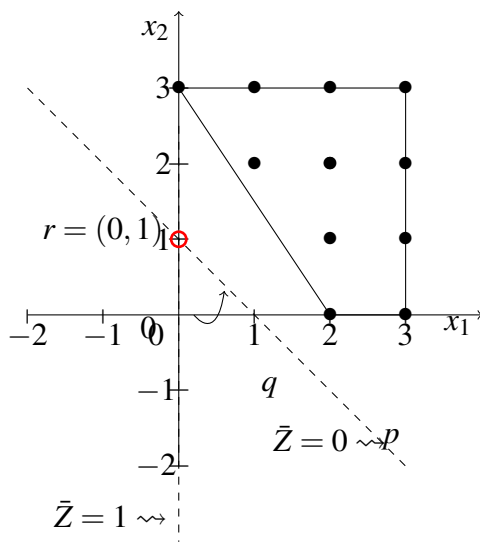
$$q^t x = -\beta$$

Exemple illustratif

Considérons le programme fractionnaire linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z = \frac{x_1 + x_2 - 1}{5x_1 + x_2 - 1} \\
 (LFP) \text{ t.q} \quad & 5x_1 + 2x_2 \geq 6 \\
 & x_1 \leq 3 \\
 & x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{N}
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

dont le graphe est donné par la figure



x^1	(2, 0)	$Z(x^1)$	$\frac{1}{19}$
x^2	(3, 0)	$Z(x^2)$	$\frac{1}{7}$
x^3	(2, 1)	$Z(x^3)$	$\frac{1}{5}$
x^4	(3, 1)	$Z(x^4)$	$\frac{1}{5}$
x^5	(1, 2)	$Z(x^5)$	$\frac{1}{3}$
x^6	(2, 2)	$Z(x^6)$	$\frac{3}{11}$
x^7	(3, 2)	$Z(x^7)$	$\frac{1}{4}$
x^8	(0, 3)	$Z(x^8)$	1
x^9	(1, 3)	$Z(x^9)$	$\frac{3}{7}$
x^{10}	(2, 3)	$Z(x^{10})$	$\frac{1}{3}$
x^{11}	(3, 3)	$Z(x^{11})$	$\frac{5}{17}$

FIG. 1.9 – Graphe de l'exemple (1.9)

TAB. 1.2 – Tableau des résultats

Donc la courbe de niveau \bar{Z} est l'ensemble des points $x = (x_1, x_2)$ satisfaisant l'équation :

$$(1 - 5\bar{Z})x_1 + (1 - \bar{Z})x_2 = 1 - \bar{Z}$$

Donc pour :

- $\bar{Z} = 0$, on a $x_1 + x_2 = 1$: courbe de niveau 0.
- $\bar{Z} = 1$, on a $x_1 = 0$: courbe de niveau 1.

Le problème a onze points entiers dont les valeurs du critère sont indiquées sur le tableau (1.2). Les lignes discontinues représentent les 0–courbes niveaux du numérateur et du dénominateur dont l'intersection est le point de rotation $r = (0, 1)$. La flèche circulaire dénote le gradient

de la fonction fractionnaire linéaire critère et indique le sens et l'angle avec lesquels se déplacent les courbes de niveaux. Donc, en faisant déplacer la courbe de niveau 0 autour du point de rotation suivant le sens de rotation trigonométrique, nous pouvons voir que le point optimal x^4 de valeur optimale $Z^* = 1$ est l'intersection du domaine S avec la courbe de niveau $\bar{Z} = 1$.

1.10 Programmation linéaire multi-objectifs en nombres entiers

Un programme linéaire multi-objectifs en nombres entiers est constitué d'un système de contraintes linéaires définissant un domaine discret de solutions réalisables, et d'un ensemble de fonctions linéaires à maximiser ou à minimiser définissant des objectifs conflictuels. Le problème consiste à déterminer toute solution réalisable entière telle qu'il n'existe aucune autre solution réalisable entière qui fournisse des valeurs au moins aussi bonnes que celles de sur chaque objectif et même meilleure sur au moins un objectif.

Un problème (MOILP) peut être formulé par :

$$(MOILP) \quad \begin{array}{ll} \text{"optimiser"} & Z_k = C_k x \\ \text{t.q} & x \in D \end{array} \quad (1.10)$$

Où $D=S \cap \mathbb{Z}^n$ étant l'ensemble des nombres entiers relatifs.
 $C \in \mathbb{R}^{1 \cdot n}$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax < b, x \geq 0\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ et $b \in \mathbb{R}^{m \cdot 1}$

1.11 Détection graphique de l'efficacité :

Soit le problème de programmation linéaire multiobjectif en nombres entiers (MOILP). Pour tester l'efficacité en un point $x^* \in D$, Steuer [Steuer 1985] a introduit le concept d'ensemble dominant qui est principalement basée sur la notion du cône.

Définition 1.12 (cône) Soit le $V \in \mathbb{R}^n$, $V \neq \emptyset$, V est un Cône si et seulement si $\alpha v \in V$ pour tout scalaire $\alpha \geq 0$ et tout $v \in V$. Le vecteur d'origine $0 \in \mathbb{R}^n$ est contenu dans chaque Cône.

Définition 1.13 (cône polaire) Soit $V \in \mathbb{R}^n$ un Cône. Le cône polaire non négatif de V (noté V^{\geq}) est le cône convexe $V^{\geq} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^t v \geq 0 \forall v \in V\}$
 C'est-à-dire, tous les vecteurs de V^{\geq} font un angle inférieur ou égal à 90° avec chaque vecteur de V .

Définition 1.14 (cône semi-polaire positif) Soit V un cône convexe généré par v^1, v^2, \dots, v^p . Alors, le cône semi-polaire positif (noté $V^{>}$) est le cône convexe $V^{>} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^t v^i \geq 0, \text{ pour tout } i \text{ et } y^t v^i > 0 \text{ pour au moins un } i\} \cup \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

Définition 1.15 (Générateurs.) Considérons v_1, v_2, \dots, v_p , un ensemble de p vecteurs de \mathbb{R}^n et l'ensemble V tel que :

$$V = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v = \sum_{i=1}^p \alpha_i v^i, \alpha_i \geq 0\}$$

V est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires à coefficients non négatifs des v^i , $i = 1, \dots, p$ et est le cône convexe engendré par l'ensemble v_1, v_2, \dots, v_p .

Définition 1.16 (Ensemble dominant.)

$x^* \in D$ et $C^>$ le cône polaire semi positif du cône C généré par les gradients des p fonctions objectives i.e. : $V^> = \{y \in \mathbb{R}^n \mid c^i y \geq 0, \text{ pour tout } i \text{ et } c^i y > 0 \text{ pour au moins un } i\} \cup \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

On définit l'ensemble de dominance de x^* noté ED_{x^*} , comme étant la somme des ensembles x^* et $C^>$:

$$ED_{x^*} = x^* \oplus C^>$$

C'est à dire :

$$ED_{x^*} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x^* + y, y \in C^>\}$$

L'ensemble dominant ED_{x^*} contient tous les points dont les vecteurs critères dominant le vecteur critère de $x^* \in D$. Notons que la somme des ensembles x^* et $C^>$ effectue une translation du cône polaire semi positif de l'origine vers le point en question. Le théorème suivant montre l'importance de cet ensemble dans la détection des solutions efficaces :

Théorème 1.3 [Steuer 1985] Soit ED_{x^*} l'ensemble dominant en $x^* \in D$. Alors x^* est efficace si et seulement si : $ED_{x^*} \cap D = x^*$

1.12 Exemple illustratif des définitions :

Considérons le programme linéaire biobjectif en nombres entiers suivant :

$$(MOILP) \begin{cases} \text{''max''} & (x_1, -x_1 + x_2) \\ \text{t.q} & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \\ & x_1 \leq 4 \end{cases}$$

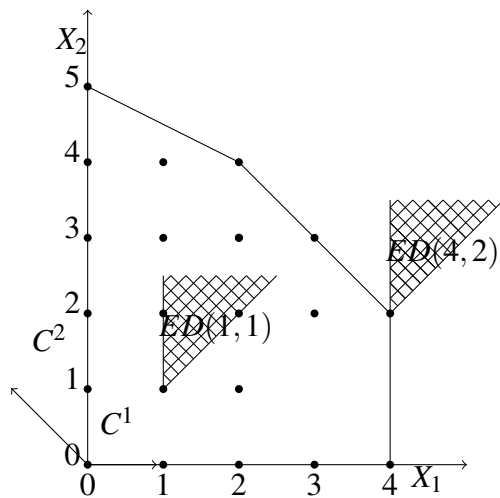


FIG. 1.10 – Espace des critères

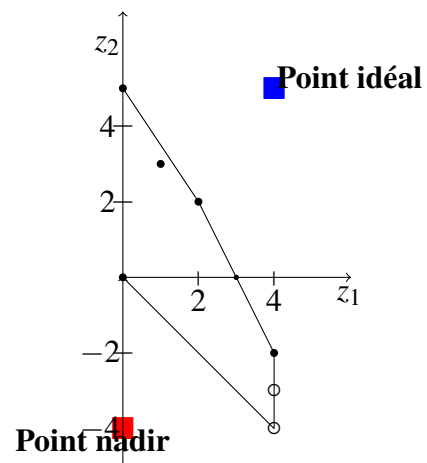


FIG. 1.11 – Espace des décisions

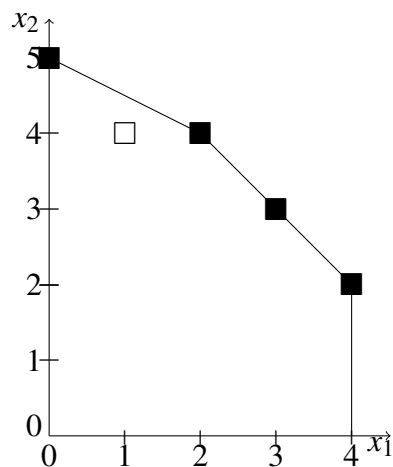


FIG. 1.12 – Solutions supportées et non supportées

- Les solutions efficaces du programme (P) sont $\{(4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 4), (0, 5)\}$. Par exemple le point $x' = (4, 2)$ est efficace car $ED_{x'} \cap ED = x'$, tandis que le point $x^* = (1, 1)$ n'est pas efficace car $ED_{x^*} \cap ED \neq x^*$
- Deux solutions faiblement non dominées sont détectées, c'est les points $(4, -4)$ et $(4, -3)$.
- Les solutions efficaces supportées sont : $(4, 2), (3, 3), (2, 4), (0, 5)$. Une solution efficace non supportée est détectée, c'est le point $(1, 4)$.
- Le point idéal est le point : $(4, 5)$.
- La matrice des gains ici est unique : $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$
- Le point nadir est le point de coordonnées : $\eta = (0, -4)$

1.13 Quelques méthodes de résolution :

Plusieurs chercheurs, citons en particulier, Steuer et Choo [Steuer 1985], Klein et Hannan [klein et Hannan 82], Crema et Sylva [Crema et Sylva 03], Gupta et Malhotra [Malhotra 92], Abbas et Moulaï [Abbas et Moulaï 99], Abbas et Chaabane [Abbas et Chaabane 02], motivés par de nombreuses stratégies (applications), se sont intéressés à caractériser totalement ou partiellement l'ensemble des solutions efficaces du problème de programmation linéaire multi-objectif en nombres entiers. Dans cette partie, quelques méthodes de résolution des problèmes MOILP sont exposées. Quelques-unes nécessitent la présence du décideur (méthodes interactives), et d'autres donnent l'ensemble des solutions efficaces sans intervention de ce dernier.

Nous présentons quelques unes, dans cette section.

1.13.1 Méthode de D. Klein & E. Hannan :

La technique proposée par D. Klein & E. Hannan [klein et Hannan 82] peut être utilisée aussi bien pour identifier l'ensemble de toutes les solutions efficaces que pour en caractériser une partie seulement. Elle consiste à résoudre progressivement une séquence de programmes linéaires mono-objectif en nombres entiers avec des contraintes ajoutées à chaque étape. Les contraintes supplémentaires éliminent les solutions efficaces déjà trouvées, et font en sorte que les nouvelles solutions générées soient efficaces.

Algorithme

Étape1 :

Résoudre le problème (P_1) défini comme suit (L'indice i est pris arbitrairement dans $1, \dots, p$) :

$$(P_1) : \text{Max}\{Z^i = c^i x : x \in D\}$$

Cas 1. Si la solution optimale de (P_1) , soit x^1 , est unique alors elle est efficace pour (P) .

Cas 2. Sinon, déterminer toutes les solutions alternatives et à x^1 et par comparaison deux à deux des vecteurs critère associés, garder uniquement celles qui sont efficaces pour construire l'ensemble $ESE(P_1)$ des solutions efficaces générées à l'étape 1.

Étape générale j :

A l'étape j , c'est le problème (P_j) qui est résolu, il est défini comme suit :

$$(P_j) \begin{cases} \max & Z_i = C^i x \\ \text{t.q} & x \in D \\ & \bigwedge_{k=1}^r (V_{s=1, s \neq i}^p (C^s x \geq C^i \tilde{x}_k + \epsilon^s)) \end{cases} \quad (1.11)$$

Avec $0 < \epsilon^s \leq 1$ et \tilde{x}_k ($k=1, \dots, r$) les points efficaces obtenus aux étapes $1, \dots, j-1$.

Si $ESE(P_j)$ est l'ensemble des solutions efficaces obtenues à l'étape j et Y^j l'ensemble des points efficaces accumulés à la fin de l'étape j , alors $Y^j = Y^{j-1} \cup ESE(Y^j)$ pour $j \geq 2$ avec $Y^1 = ESE(P_1)$.

Étape finale n :

La procédure s'arrête lorsque le problème (P_n) est irréalizable.

Les auteurs R. Gupta et R. Malhorta [Malhorta 92] ont proposé deux procédures pour résoudre le problème (MOILP). La première est basée sur une méthode de coupe Mais il s'est avéré qu'une erreur au niveau du second test d'arrêt empêche dans certains cas l'algorithme de donner tous les points efficaces du problème étudié. Un contre exemple a été présenté par M. Abbas et M. Moulai [Abbas et Moulai 99] ainsi que par D. Chaabane. La deuxième est une variante de la méthode de Klein et Hannan [Klein et Hannan 82].

M. Abbas et M. Moulai ont proposé dans [Abbas et Moulai 99] La Méthode d'Optimisation Discrète Linéaire Multicritère "MODILIM", pour la détermination de toutes les solutions efficaces du problème de programmation linéaire multi-objectif en nombres entiers. Elle peut être vue comme une alternative à celle de Gupta et Malhorta [Malhorta 92] (première procédure), où les auteurs ont proposé un autre test d'arrêt permettant à l'algorithme de fournir toutes les solutions efficaces. Elle est basée sur une technique de coupes planes et est décrite en plusieurs étapes :

- a. L'approche est appropriée pour résoudre le problème de programmation linéaire entière à objectifs multiples.
- b. Tenir en considération une seule fonction objectif. La première itération est de déterminer une solution entière réalisable optimale de cette fonction objectif sous les contraintes du problème (MOILP).
- c. La seconde itération nous permet de trouver toutes les solutions alternatives (alternatives) de la solution entière optimale obtenue ci-dessus, si elles existent, et déduire les premières solutions entières efficaces du problème principal.
- d. On introduit une coupe plane pour dénombrer toutes les autres solutions efficaces restantes en utilisant la méthode duale du simplexe.
- e. Pour l'étape finale, l'algorithme aura exploré toutes les solutions efficaces du problème étudié.

M. Abbas et D. Chaabane ont proposé dans [Abbas et Chaabane 02] la méthode de détermination des Solutions Efficaces dans l'Espace des Variables Discrètes "SEEVD", cette méthode est une forme améliorée de la méthode de Gupta et Malhorta où le test d'arrêt est corrigé pour déterminer toutes les solutions efficaces du problème MOILP sans n'en manquer aucune.

Dans une première étape, une solution initiale est déterminée en résolvant un problème uni-critère en nombre entier, cette solution constitue le premier élément de la liste des solutions efficaces, puis une séquence de coupes est appliquée après avoir exploré les arêtes incidentes à cette solution selon une direction précise définie par un ensemble d'indices hors-base, ceci nous permet de générer une nouvelle solution efficace ajoutée à la liste précédente de solutions efficaces et de réduire le domaine de recherche jusqu'à ce qu'il devient vide. Dans ce cas le processus s'arrête avec une liste finale contenant toutes les solutions efficaces du problème traité.

1.13.2 Méthode de A.Crema et J.Sylva :

La méthode développée par Crema et Sylva [Crema et Sylva 03] est une variante de celle de Klein et Hannan étudiée précédemment. Son principe repose sur la résolution d'une succession de programmes linéaires en nombres entiers optimisant à chaque étape une combinaison positive des critères. Un ensemble de contraintes est rajouté à chaque fois assurant la détection d'une nouvelle solution efficace. A la fin, la méthode fournit l'ensemble de toutes les solutions non dominées du problème de programmation linéaire discrète à objectifs multiples.

Proposition 1.1 [Crema et Sylva 03] Soient x^1, x^2, \dots, x^l des solutions efficaces du problème 1.10. Posons $D_s = \{x \in \mathbb{Z}^n | C^k x \leq C^k x^s, \forall s = 1, \dots, l\}$. Si x^* solution efficace pour le problème :

$$(P_l) \begin{cases} \text{Max} & C^k x \\ \text{tq} & x \in (D \cup_{s=1}^l D_s) \end{cases} \quad (1.12)$$

alors x^* est une solution efficace pour le problème 1.10. De plus, si le problème 1.12 est irréalisable, alors $\{(C^k x^s)_{s=1}^l\}$ est l'ensemble de toutes les solutions non dominées du problème 1.10.

Proposition 1.2 [Crema et Sylva 03] Soient x^1, x^2, \dots, x^l des solutions efficaces du problème 1.10. Posons $D_s = \{x \in \mathbb{Z}^n | C^k x \leq C^k x^s, \forall s = 1, \dots, l\}$. Si x^* est une solution optimale pour le problème mono objectif :

$$(P_l^\lambda) \begin{cases} \text{Max} & \sum_{k=1}^p \lambda_k C^k x \\ \text{tq} & x \in (D \cup_{s=1}^l D_s) \end{cases}$$

pour certaines valeurs du vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^p \lambda > 0$, alors x^* est une solution efficace pour le problème 1.10.

Théorème 1.4 [Geoffrion68] Si x^* une solution optimale du problème mono-objectif

$$(P_\lambda) \begin{cases} \text{''max''} & \lambda^T C x \\ \text{t.q} & x \in S \end{cases}$$

pour un certain $\lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^p : \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1, \lambda_k = 1 > 0 \right\}$ alors, x^* est une solution efficace du problème multi-objectifs "max" $\{Z(x) : x \in S\}$.

Algorithme

Étape1 :

Après avoir fixé le vecteur poids $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ à des valeurs strictement positives, la première étape de l'algorithme consiste en la résolution du problème :

$$(P_1) : \text{Max} \left\{ \sum_{k=1}^p \lambda_k C^k x \mid x \in D \right\}$$

Deux cas se présentent :

Cas 1. Si (P_1) n'admet pas de solutions, alors 1.10 l'est aussi.

Cas 2. Sinon, une solution x^1 est trouvée et elle est efficace.

Ensuite, une suite de programmes linéaires en nombres entiers augmentés par certaines contraintes sont résolus progressivement.

Après k étapes du processus :

Cas 1. Si (P_l) est irréalisable, alors l'algorithme prend fin.

Cas 2. Sinon, une nouvelle solution efficace, soit x^l , est trouvée et le nouveau problème (P_{l+1}) est défini à partir de (P_l) en lui éliminant toutes les solutions vérifiant $C^k x \leq C^k x^l, \forall k = 1, \dots, p$. Ceci peut être traduit par le rajout de contraintes suivantes :

$$\begin{cases} C^k x \geq (C^k x^l + 1)y_k^l - M_k(1 - y_k^l), & k=1, \dots, p \\ \sum_{k=1}^p y_k^l \geq 1, y_k^l \in \{0, 1\}, & k=1, \dots, p \end{cases}$$

Où $-M_k$ est la borne inférieure pour les valeurs réalisables de la k^{me} fonction objectif (Par exemple, dans le cas où la matrice des critères C est positive, M_k peut être fixée à 0 pour tout k).

Étape générale $(l + 1)$. Résoudre le problème (P_{l+1})

$$(P_{l+1}) \begin{cases} \text{Max} & \sum_{k=1}^p \lambda_k C^k x \\ \text{tq} & x \in D \\ & C^k x \geq (C^k x^s + 1)y_k^s - M_k(1 - y_k^s) \\ & \sum_{k=1}^p y_k^s \geq 1 \quad y_k^s \in \{0, 1\} \text{ pour } k = 1, \dots, p, s = 1, \dots, l \end{cases}$$

Étape finale n : La procédure continue jusqu'à ce que le problème (P_n) devienne irréalisable. A la fin, on obtient l'ensemble de toutes les solutions efficaces ou seulement une partie qui intéresse le décideur.

Pour les problèmes de grande taille, la détermination de l'ensemble de toutes les solutions non dominées devient très coûteuse en terme de temps de calcul. Pour cela, une étape d'interaction avec le décideur peut être intégrée à la procédure. Cette étape a pour objectif d'éliminer des solutions efficaces que le décideur juge insatisfaisantes. Dans ce cas le problème (P_{l+1}) devient :

$$(P_{l+1}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \quad \sum_{k=1}^p \lambda_k C^k x \\ \text{tq} \quad x \in D \\ C^k x \geq (C^k x^s + f_k) y_k^s - M_k (1 - y_k^s) \\ \sum_{k=1}^p y_k^s \geq 1 \quad y_k^s \in \{0, 1\} \text{ pour } k = 1, \dots, p, s = 1, \dots, l \end{array} \right.$$

Où f_k représente l'amélioration minimale dans la i^{me} fonction objectif fixée par le décideur, $f_k > 1$ (entier).

1.13.3 Exemple :

Pour illustrer la technique, nous considérons le MOLIP à deux fonctions objectifs suivant :

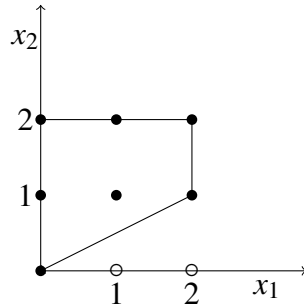
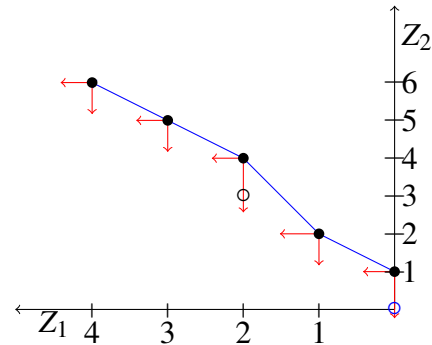
$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \quad Z_1 = x_1 - 2x_2 \\ \text{Max} \quad Z_2 = -x_1 + 3x_2 \\ \text{tq} \quad x_1 - 2x_2 \leq 0, \\ \quad \quad x_1, x_2 \in \{0, 1, 2\}. \end{array} \right.$$

On pose $-M_1 = -4$, $-M_2 = -2$, les bornes inférieures des fonctions objectifs $Z_1, Z_2, f_k = 1, \forall k$ et $\lambda = (4, 3)$. La fonction scalarisante est donnée par : $Z_\lambda = x_1 + x_2$.

Soit :

$$(P_0) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \quad Z_1 = x_1 + x_2 \\ \text{tq} \quad x_1 - 2x_2 \leq 0, \\ \quad \quad x_1, x_2 \in \{0, 1, 2\}. \end{array} \right.$$

La résolution de problème (P_0) donne $x_1 = (2, 2)$ de valeur optimale $Z_\lambda(P_0) = 4$. Donc, x_1 est une solution efficace du problème initial (p) . Correspondant au vecteur non dominée $(-2, 4)$ (Voir figure 1.13).


 FIG. 1.13 – Espace des décision de P

 FIG. 1.14 – Espace des critères de P

Le deuxième problème à résoudre est :

$$(P_1) \begin{cases} \text{Max} & Z_1 = x_1 + x_2 \\ \text{tq} & x_1 - 2x_2 \geq -y_1^1 - 4(1 - y_1^1), \\ & -x_1 + 3x_2 \geq 5y_2^1 - 2(1 - y_2^1), \\ & y_1^1 + y_2^1 \geq 1, \\ & x_1, x_2 \in \{0, 1, 2\}, \\ & y_1^1, y_2^1 \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

La résolution de (P_1) donne $x_1 = 2, x_2 = 1, y_1^1 = 1, y_2^1 = 0$, avec valeur optimale $Z_\lambda(P_1) = 3$. Donc, $x_2=(2,1)$ est un autre point efficace correspondant au couple non-dominée $(0,1)$, (1.13).

Formons le problème suivant (P_2) en ajoutant au domaine précédent D_1 de (P_1) cinq contraintes :

$$(P_2) \begin{cases} \text{Max} & Z_1 = x_1 + x_2 \\ \text{tq} & x \in D_1 \\ & x_1 - 2x_2 \geq y_1^2 - 4(1 - y_1^2), \\ & -x_1 + 3x_2 \geq 2y_2^2 - 2(1 - y_2^2), \\ & y_1^2 + y_2^2 \geq 1, \\ & y_1^2, y_2^2 \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Une solution optimale à ce problème est $x_1 = 1, x_2 = 2, y_1^1 = y_1^2 = 0, y_2^1 = y_2^2 = 1$ avec valeur optimale $Z_\lambda(P_2) = 2$. Cela correspond à un nouveau point efficace $x_3=(1,2)$ avec un vecteur de la valeur de la fonction objectif égale à $(-3,5)$.

Le pas suivant en ajoutant des contraintes qui effacent seulement le point efficace x^3 , on obtient le problème (P_3) :

$$(P_3) \begin{cases} \text{Max} & Z_1 = x_1 + x_2 \\ \text{tq} & x \in D_2 \\ & x_1 - 2x_2 \geq y_1^3 - 4(1 - y_1^3), \\ & -x_1 + 3x_2 \geq 2y_2^3 - 2(1 - y_2^3), \\ & y_1^3 + y_2^3 \geq 1, \\ & y_1^3, y_2^3 \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Une solution optimale au dernier problème est $x_1 = 0, x_2 = 2, y_1^1 = y_1^2 = y_1^3 = 0, y_2^1 = y_2^2 = y_2^3 = 1$ avec $Z_\lambda(P_3) = 2$. Cela correspond à une solution efficace $x_3=(0,2)$ Avec une valeur de la fonction objective égale au vecteur à $(-4,6)$.

Maintenant, problème (P_4) est défini :

$$(P_4) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } Z_1 = x_1 + x_2 \\ \text{tq } x \in D_3 \\ x_1 - 2x_2 \geq -3y_1^4 - 4(1 - y_1^4), \\ -x_1 + 3x_2 \geq 7y_2^4 - 2(1 - y_2^4), \\ y_1^4 + y_2^4 \geq 1, \\ y_1^4, y_2^4 \in \{0, 1\}. \end{array} \right.$$

Ce problème a un seul point réalisable $x_1 = x_2 = 1, y_1^1 = y_1^3 = y_1^4 = 1, y_1^2 = 0, y_2^1 = y_2^3 = y_2^4 = 0, y_2^2 = 1$ avec $Z_\lambda(P_4) = 2$. Cela correspond à un nouveau point efficace $x_4=(1,1)$ Avec une valeur de la fonction objective égale au vecteur à $(-1,2),(1,14)$.

Comme ce n'est pas optimal dans D pour toute combinaison positive des fonctions objectives de problème P . Le prochain problème être résolu est le suivant :

$$(P_4) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } Z_1 = x_1 + x_2 \\ \text{tq } x \in D_4 \\ x_1 - 2x_2 \geq -4(1 - y_1^5), \\ -x_1 + 3x_2 \geq 3y_2^5 - 2(1 - y_2^5), \\ y_1^5 + y_2^5 \geq 1, \\ y_1^5, y_2^5 \in \{0, 1\}. \end{array} \right.$$

Comme ce problème est irréalisable, le processus s'arrête, et nous avons l'ensemble complet de vecteurs objectifs non dominée aussi bien qu'un point efficace de la décision pour chacun de ceux (1.3).

(x_1, x_2)	(z_1, z_2)
(2,2)	(-2,4)
(2,1)	(0,1)
(1,2)	(-3,5)
(0,2)	(-4,6)
(1,1)	(-1,2)

TAB. 1.3 – Les solutions de problème P

2

Optimisation stochastique multi-objectif

Sommaire

2.1	Introduction à la programmation stochastique	43
2.2	Formulation générale	44
2.3	programmation linéaire stochastique	44
2.4	Modèles avec contraintes probabilistes	45
2.5	Modèles de Recours :	46
2.6	Autres techniques de modélisation :	51
2.7	Méthode “L-Shaped”	51
2.8	La programmation linéaire stochastique en nombres entiers	54
2.9	Formulation du problème linéaire stochastique multi-objectifs en nombres entiers (MOSILP)	54
2.10	Quelques concepts de solutions efficaces	55
2.11	Approches de résolution	57
2.12	Algorithme L-Shaped dans le cas discret	58

2.1 Introduction à la programmation stochastique

La notion d’incertitude dans la programmation mathématique est apparue pour la première fois dans les années 50 avec les travaux de Dantzig [Dantzig55], Cooper et Charnes [Charnes 58], Beale [Beale55].

L’incertitude dans les problèmes d’optimisation touche notamment les coûts de production, les prix des marchés, les pénalités en cas des violations des contrats, aussi bien que la demande de

clients, les délais de livraison, les temps de traitement, la disponibilité des machines et d'autres coefficients technologiques.

Il se peut que l'on connaisse partiellement certains aspects du phénomène à travers soit des scénarios, soit un historique, soit une loi de probabilité, soit des moments de la variable aléatoire (par exemple espérance mathématique, variance). Des scénarios peuvent être créés à partir des historiques, (comme par exemple les ventes des dernières années).

2.2 Formulation générale

Lorsque l'on parle de la programmation stochastique, on entend la programmation mathématique sous incertitude. La programmation stochastique n'est pas une famille de problèmes, de modèles et d'outils différents des autres domaines d'optimisation (programmation linéaire, non-linéaire, dynamique); au contraire, elle constitue un complément de ces familles lorsque la notion d'incertitude intervient. On se permet donc de parler de programmation stochastique linéaire, non-linéaire ou bien de programmation stochastique dynamique. Dans le présent travail on s'intéresse à la programmation stochastique linéaire.

Un problème stochastique est défini, en général, comme suit [Kall et Wallace 94] :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(x, \xi) \\
 \text{s.c.} \quad & g_i(x, \xi) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\
 & Ax = b \\
 & x \in S
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

avec :

- S est un ensemble déterministe des décisions réalisables,
- ξ est un vecteur aléatoire variant sur l'ensemble $\Xi \subset R^k$, k est le nombre de variables aléatoires, paramètres incertains, du problème,
- on suppose connaître une famille d'événements $F, F \in P(\Xi)$, appelés scénarios, et la distribution de probabilités P dans F , c-à-d, $\forall A \in F (A \subset \Xi), P(A)$ est connue, (A est une réalisation de la variable aléatoire ξ),
- la fonction objectif et les contraintes sont des fonctions réelles dépendantes du vecteur aléatoire,

2.3 programmation linéaire stochastique

On parle d'un problème de programmation linéaire stochastique (SLP : Stochastic Linear Programming) dans le cas où les contraintes ainsi que la fonction objectif dépendent linéairement de x , et S un polyèdre convexe, il est défini par :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & Z = C(\xi)x \\
 \text{s.c.} \quad & T(\xi)x = h(\xi) \\
 & x \in S
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

avec :

- $C(\xi)$, $T(\xi)$, $h(\xi)$ sont des vecteurs aléatoires de dimensions respectives 1), $(1 \times n_1)$, $(m_2 \times n_1)$, $(m_2 \times 1)$, définis sur l'espace de probabilités (Ξ, F, P) .
- $S = \{Ax = b : x \geq 0\}$ un polyèdre convexe des décisions x , A et b sont des vecteurs déterministes de dimensions $(m_1 \times n_1)$, $(m_1 \times 1)$ respectivement.

Dans l'ensemble, la littérature est assez riche concernant des méthodes qui abordent des problèmes en deux étapes. Surtout pour le recours simple il existe plusieurs travaux ([W.T. Ziemba] [Roger J.-B.Wets]) qui établissent des résultats pour les problèmes linéaires continus, aussi bien que pour les problèmes quadratiques [Roger and Wets] ainsi qu'en nombres entiers [Klein et al].

Les approches qui dominent sur la modélisation et la résolution des problèmes de la programmation stochastique sont les suivantes :

- Modèles avec contraintes probabilistes.
- Modèles de recours.

Les travaux de [Sahinidis] et [Birge] présentent l'état de l'art de la programmation stochastique, alors que [Willem Haneveld and Maarten] se focalise aux méthodes de résolution de programmation stochastique en nombres entiers. La littérature autour de la programmation stochastique devient de plus en plus riche, les ouvrages les plus importants dans le domaine étant ceux de [Birge et Louveaux], [Kall et Mayer] et [Kall et Wallace 94].

2.4 Modèles avec contraintes probabilistes

Des problèmes dont la modélisation appartient à la catégorie des modèles probabilistes sont apparus pour la première fois dans [Charnes 58] sous le nom de programmation sous contraintes probabilistes ("chance constrained programming"). L'ensemble réalisable du problème (2.1) peut être aussi défini par des contraintes définissant des événements qui doivent être réalisés avec une certaine probabilité notée $\alpha \in [0, 1]$ (chaque contrainte est considérée comme étant un événement).

Sous cette supposition, le problème déterministe équivalent de (2.1) peut être défini comme suit :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \mathbf{E}[f(x, \xi)] \\
 \text{s.c.} \quad & P(\{\xi | g_i(x, \xi) \leq 0\}) \geq \alpha_i \\
 & x \in \mathcal{S}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Le problème (2.4) est appelé problème stochastique avec articulation de contraintes probabilistes (probabilistically constrained ou problem with joint probabilistic constraints)[Kall et Wallace 94] En particulier, pour le problème linéaire stochastique (2.2), on aura le problème déterministe équivalent suivant :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \mathbf{E}[C^T(\xi)x] \\
 \text{s.c.} \quad & P(\{\xi | T_i(\xi) \leq h_i \leq \alpha_i\}) \\
 & x \in \mathcal{S}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

α étant une probabilité réglée par l'utilisateur qui reflète par exemple la fiabilité d'un système ou une tolérance acceptable.

T_i, h_i représentant la ligne i de la matrice T, h resp et α_i la probabilité que cette contrainte soit satisfaite.

2.5 Modèles de Recours :

La programmation stochastique s'intéresse essentiellement à des problèmes où on doit prendre une décision sur le champ sous présence d'incertitude, sans attendre la réalisation des certaines variables aléatoires ; on fait souvent appel à ce type de problèmes sous le nom de "here and now problems".

Dans la famille "here and now" on est obligé de déterminer au moment t_0 certaines valeurs x_0^j qui ne peuvent plus changer dans la suite, quoi qu'il arrive aux instants ultérieurs. Il se peut qu'une décision à l'instant initial t_0 coûte trop cher dans le futur, cet effet faisant émerger la nécessité d'une approche systématique de la prise de telles décisions.

Dans la suite on étudiera plus particulièrement la programmation stochastique linéaire avec recours. L'idée est d'optimiser les décisions que l'on doit prendre au moment t_0 tout en tenant compte des conséquences de ces décisions pour toute réalisation des aléas qui pourrait se produire aux instants ultérieurs. Le mot "*recours*" révèle la possibilité dont on dispose de remédier à une décision éventuellement trop optimiste à l'instant t_0 , en mettant en oeuvre des actions correctives, évidemment plus chères, qui satisfont pourtant les contraintes posées aux instants ultérieurs $t_i, i > 0$. On précise qu'après avoir pris la décision au moment t_0 , on passe au moment t_1 où tous les événements inconnus jusqu'à cet instant se révèlent. Par conséquent, l'étude de tels cas a un intérêt seulement si on dispose de quelques informations sur les réalisations des événements qui nous sont inconnus au moment t_0 (information comme par exemple la distribution de probabilité,

des scénarios, la moyenne, la variance etc).

Le problème peut s'étendre en plusieurs étapes suivant l'horizon d'étude, mais considérons d'abord le cas de deux étapes seulement.

2.5.1 modèles de recours à 2-niveaux (en 2-étapes) :

Les variables de la première étape sont considérées comme étant des variables structurantes, stratégiques qui ne peuvent plus changer à la seconde étape. La décision à la première étape doit être prise en respectant des contraintes propres à cette étape. La seconde étape comprend des actions (pénalisantes) qui peuvent être entreprises afin de satisfaire des contraintes qui font intervenir des variables de la première étape. Toutes ces idées sont résumées dans le programme suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & C^T x + \mathbf{Q}(x) \\ \text{s.c} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

et

$$\mathbf{Q}(x) = \mathbf{E}_\xi \mathbf{Q}(x, \xi)$$

,

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad & \mathbf{Q}(x, \xi) = \min_{q^T} (\xi) y(\xi) \\ \text{s.c} \quad & T(\xi)x + W(\xi)y(\xi) = h(\xi), \end{aligned} \tag{2.6}$$

où x et C sont des vecteurs de \mathbb{R}^{n_1} , A est une matrice de dimension $m_1 \times n_1$, $b \in \mathbb{R}^{m_1}$ le vecteur du second membre, et de façon similaire y , $q \in \mathbb{R}^{n_2}$, $h \in \mathbb{R}^{m_2}$ le vecteur aléatoire qui dépend de la variable aléatoire $\xi \in \mathbb{R}^r$, \mathbf{E}_ξ l'espérance mathématique par rapport à la variable aléatoire ξ , alors que T et W sont des matrices dépendant de la variable ξ et de dimensions appropriées $T : (m_2 \times n_1)$ et $W : (m_2 \times n_2)$.

Les variables x représentent les décisions avant que toute réalisation de la variable aléatoire ξ ne soit connue, alors que les variables y représentent les décisions prises, une fois que ξ sera observé. On cherche à minimiser sur les variables de la première étape $x \in X$, mais on veille en même temps à ce que les coûts au second niveau, après la ξ réalisation de la variable aléatoire ξ , soient minimaux en moyenne.

Dans de nombreuses applications on pourra supposer qu'il existe une mesure de probabilité \mathbb{P} tel que $\mathbb{P}\{\xi = \xi^s\} = p_s$ avec $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^s \in \mathbb{R}^r$. L'ensemble des réalisations possibles est fini, et les réalisations ξ^i s'appellent souvent des "scénarios", dont p est la probabilité d'occurrence. Cette hypothèse va nous permettre de passer de (2.5) au programme suivant :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & C^T x + \sum_i^s p_i q_i^T y_i \\
 \text{s.c} \quad & Ax = b \\
 & T_1 x + W_i y_i = h_i \\
 & x \geq 0, \quad y_i \geq 0 \quad i = 1 \dots s
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Où les indices $1, 2, \dots, S$ font référence aux scénarios correspondants. Par ailleurs dans notre cas, X désigne un polyèdre convexe construit par un ensemble de contraintes linéaires.

2.5.2 Différents cas de recours :

En observant la formulation 2.5 on peut distinguer différents cas de recours en fonction des types de (q, y, W) ou plus généralement des $q(\xi)$, $y(\xi)$, et $W(\xi)$. Les cas qui méritent une étude plus spéciale et qui sont cités dans la littérature sont le recours fixe, le recours complet et le recours simple.

◇ *Recours fixe :*

Définition 2.1 Le recours est considéré comme étant fixe ou déterministe si les valeurs q et W d'un programme avec recours comme le (2.5) ne dépendent pas de ε , leurs valeurs sont donc à priori connues.

Si on considère le terme q du programme (2.5) comme des pénalités pour toute action corrective y que l'on doit effectuer à la seconde étape, le recours fixe exige que ces pénalités ne dépendent pas de la réalisation de la variable aléatoire. Ce cas est assez courant d'ailleurs : dans le cas des problèmes de transport, si le nombre de camions (décision à la première étape) n'est pas suffisant pour couvrir la forte demande du lendemain, on fait appel à la location, dont le prix ne dépend pas de la demande de notre clientèle.

◇ *Recours complet :*

Définition 2.2 Le recours fixe est complet si $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ il existe $y \geq 0$, tels que $Q(x, \varepsilon) < +\infty$, $\forall \varepsilon \in \Xi$.

◇ *Recours relativement complet :*

Définition 2.3 Le recours fixe est relativement complet si $x \in X \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ il existe $y \geq 0$, tels que $Q(x, \varepsilon) < +\infty$, $\forall \varepsilon \in \Xi$.

Notons que la différence entre les deux types de recours porte sur l'ensemble des x pour lesquels il existe une solution au second niveau. Si cet ensemble est le domaine de définition de x à la première étape le recours est relativement complet, tandis que si c'est \mathbb{R}^{n_1}

alors le recours est complet.

Considérons à titre d'exemple le problème de transport stochastique. Si on décide à la première étape d'installer des entrepôts qui ne disposent pas d'une capacité suffisante pour couvrir la demande réelle (révélée à la seconde étape) qui peut se produire suivant un scénario (pessimiste), le problème résultant devient non-réalisable, puisque on n'arrivera jamais à satisfaire la demande clientèle. Ceci est un exemple où le recours n'est pas complet. Si, au contraire, on a la possibilité de recourir à d'autres actions, par exemple locations des entrepôts, supplémentaires, alors on arrivera à satisfaire la demande à un coût certes plus élevé mais fini.

◇ **Recours simple :**

Définition 2.4 Le recours fixe est simple si sa forme canonique est celle-ci :

$$\begin{pmatrix} q \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^+ & q^- \\ I & -I \end{pmatrix}$$

où q^+, q^- sont les $(1 \times n_2)$ vecteurs de pénalités et I est la $(n_2 \times n_2)$ matrice identité.

2.5.3 modèles de recours à niveaux multiples :

Cette approche modélise les situations où les décisions à prendre sont déterminées périodiquement à base de certaines réalisations de certaines variables aléatoires. Chaque niveau (le premier n'y pas compris) correspond au moment où certaines informations sont disponibles et on doit prendre une décision (sur la période qui suit).

Un problème linéaire à K-niveaux avec recours peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \min \quad & C^T x_1 + \{\mathbf{E}[\min q_2^T x_2] + \dots + \mathbf{E}[\min q_K^T x_K]\} \\ \text{s.c} \quad & Ax_1 = b \\ \text{avec} \quad & T_2 x_1 + W_2 x_2 = h_2 \\ & \vdots \\ & T_K x_{K-1} + W_K x_K = h_K \\ & x_1 \geq 0, \dots, x_K \geq 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Donc là, au lieu des deux décisions x et y qu'on doit prendre aux niveaux 1 et 2, on est face à K décisions séquentielles x_1, x_2, \dots, x_K , qui correspondent aux niveaux 1, 2, ..., K .

Au niveau τ ($2 \leq \tau \leq K$), les réalisations des variables aléatoires (ξ_1, \dots, ξ_K) sont disponibles ainsi que les décisions $x_1, x_2, \dots, x_{\tau-1}$ et on doit se décider sur x_τ d'une façon que les contraintes à ce niveau soient satisfaites.

2.5.4 Propriétés des programmes linéaires avec recours :

Deux propriétés de la fonction de recours vont être présentées dans ce paragraphe :

la convexité et la linéarité par morceaux. Ces deux propriétés nous seront utiles pour la description des méthodes de résolution.

On s'intéressera d'abord à la convexité de la fonction de recours. Considérons le problème de départ (2.5). L'espace des solutions du problème de recours est construit à travers des équations linéaires, il est donc convexe. De plus, si la fonction $\mathbf{EQ}(x, \xi)$ est convexe en x (on parle de minimisation) on a finalement un problème convexe. En faisant l'hypothèse que la fonction $\mathbf{Q}(x, \xi)$ est convexe pour tout $\xi \in \Xi$, alors par la linéarité de l'espérance, il est évident que la fonction à minimiser est convexe :

Pour $\tilde{x} = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \forall \xi \in \Xi$.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\tilde{x}, \xi) &\leq \lambda \mathbf{Q}(x_1, \xi) + (1 - \lambda) \mathbf{Q}(x_2, \xi) \\ &\Leftrightarrow \\ \mathbf{EQ}(\tilde{x}, \xi) &\leq \lambda \mathbf{EQ}(x_1, \xi) + (1 - \lambda) \mathbf{EQ}(x_2, \xi) \end{aligned} \quad (2.9)$$

et donc $c^T + \mathbf{EQ}(x, \xi)$ est une fonction à minimiser convexe. Dans le cas de fonctions non-linéaires, il est plus difficile d'assurer la convexité des problèmes.

Regardons plus précisément la fonction $\mathbf{Q}(x, \xi)$ pour un $\bar{\xi}$ donné. Cette fonction est exprimée à (2.25) comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(x) &= \min q^T y \\ \text{s.c. } &Wy = h(\bar{\xi}) - Tx, \end{aligned} \quad (2.10)$$

On va maintenant montrer la linéarité par morceaux de la fonction de recours. On se place dans le cas d'un recours fixe (W et q sont déterministes ; T pas nécessairement). On construit le dual :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(x) &= \max y^T (h(\bar{\xi}) - Tx) \\ \text{s.c. } &W^T y \leq q \\ &y \geq 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Le polyèdre $y : W^T y \leq q$ est fermé et convexe ; par conséquent il a un nombre fini de points extrêmes. La fonction $\mathbf{Q}(x)$ peut être réécrite comme suit :

$$\mathbf{Q}(x) = \max_{y_i, i=1, \dots, N} y_i^T (h(\bar{\xi}) - Tx) \quad (2.12)$$

et il est bien connu de la théorie de la programmation linéaire que cette fonction, représentée comme le maximum point à point d'un ensemble de fonctions affines, est une fonction linéaire par morceaux.

2.6 Autres techniques de modélisation :

Ce qui nous a intéressé jusqu'à maintenant dans les problèmes, ce sont les décisions que l'on prend aujourd'hui qui doivent être optimales (dans un sens prédéterminé) et doivent permettre de faire face aux situations inconnues qui se produiront demain. Ce type de problème s'appellent "**here and now problems**".

Il y a également une autre catégorie de problèmes. Imaginons que l'on soit capable de connaître la réalisation de la variable aléatoire pour demain. Alors on est également capable de trouver la solution optimale d'aujourd'hui qui correspond à ce problème. Ces problèmes s'appellent également "**wait and see problems**".

Approche déterministe nécessite la connaissance des moyennes des variables aléatoires. Un modèle déterministe est établie en remplaçant chaque variable aléatoire du problème par sa moyenne, la solution ainsi obtenue est appelée solution en moyenne "**expected value solution**".

2.7 Méthode "L-Shaped"

En 1962 Benders [J.F. Benders62] a proposé une méthode de décomposition consistant à partitionner les variables d'un programme linéaire en deux catégories.

En s'inspirant de cette idée Wets [R.J.B Wets66] en 1966 a appliqué la décomposition de Benders sur les problèmes de recours en deux étapes. En 1969 Van Slyke et Wets [Van Slyke et Wets 69] ont développé la première méthode de la programmation stochastique sous le nom "L-Shaped" destinée à résoudre les problèmes représentés en tant que modèles de recours en deux étapes.

L'idée de la méthode "L-Shaped" consiste donc à partager les variables en deux niveaux. Les variables du premier niveau sont les variables dont la valeur doit être fixée avant la réalisation des aléas et ne peut en aucun cas être modifiée suivant la réalisation de la variable aléatoire. De l'autre part, les variables du second niveau (les variables de recours) sont autorisées à dépendre des variables aléatoires et des variables du premier niveau. La logique derrière cette règle est que l'on tient compte de toute information déjà disponible afin de prendre nos décisions, mais en même temps, il est irréaliste de tenir compte des événements inconnus, qui n'existent, au moment de la décision, que dans un espace probabiliste.

On crée deux problèmes complémentaires, le problème maître (master) et les problèmes satellites ou sous-problèmes ou problèmes-esclaves. Les problèmes satellites (un pour chaque scénario) reçoivent comme entrée les valeurs des variables du premier niveau et calculent les variables de recours propres à chaque scénario ainsi que le coût associé. Le problème maître comporte les variables du premier niveau et une description approximée de la fonction de recours dont la forme exacte n'est pas connue. Si une telle fonction était donnée de façon explicite, alors on connaîtrait automatiquement l'impact de chaque solution du premier niveau au second. Le but est de construire cette fonction de recours à partir des solutions proposées au fur et à mesure par le problème maître et en ajoutant des coupes déduites de la résolution des problèmes-satellites.

L'algorithme ne démarre qu'avec les contraintes du premier niveau :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & C^T x + \theta \\
 \text{s.c.} \quad & Ax = b \\
 & \theta \geq \mathbf{Q}(x) \\
 & x \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

θ est la variable qui donne l'approximation de la fonction réelle de recours. Si on n'y rajoute pas la contrainte supplémentaire $\theta \geq \mathbf{Q}(x)$ à la première itération de l'algorithme, il est évident que le problème sera non-bornée et une solution x ne sera pas obtenue. À chaque itération on injecte la variable x à chaque sous-problème du second niveau. On demande de chaque sous-problème deux informations : (i) la valeur de sa fonction objectif et (ii) le vecteur des variables duales optimales. Ces informations se regroupent en une coupe, constituant une combinaison linéaire de tous les problèmes-satellites.

Au moment où la fonction de recours $\mathbf{Q}(x)$ sera "très proche" de son approximation θ , la méthode s'arrête avec la précision souhaitée. Tant que ceci n'est pas le cas, l'algorithme procède en ajoutant des coupes dont l'existence et la validité est assurée par la théorie de la dualité (trouver une direction d'amélioration).

Au départ on résout le problème 2.13. On récupère la solution (x^*, θ) et on fait passer cette solution à chaque sous-problème :

$$\begin{array}{ll}
 \text{Primal} & \text{Dual} \\
 \min \quad q(\xi)^T y & \max \quad \pi^T (h(\xi) - T(\xi)x^*) \\
 \text{s.c.} \quad Wy \geq h(\xi) - T(\xi)x^* & \text{s.c.} \quad \pi W \leq q(\xi) \\
 y \geq 0, &
 \end{array} \tag{2.14}$$

À base du lemme de dualité de Farkas [Kall et Wallace 94], On a :

$$\left\{ Wy = h(\xi) - T(\xi)x^* \quad y \geq 0 \right\} = \emptyset$$

si et seulement si

$$\pi W \leq q(\xi) \quad \text{implique} \quad \pi(h(\xi) - T(\xi)x^*) \leq 0$$

2.7.1 Test de faisabilité

Si lors d'une itération et pour un x^* donné le problème dual n'est pas borné, ce qui signifie que le primal est non-réalisable, on rajoute dans le problème maître la coupe de réalisabilité suivante :

$$\hat{\sigma}^T (h(\xi) - T(\xi)x) \leq 0 \quad (2.15)$$

Cette contrainte est satisfaite également pour la solution x^* qui rendait le problème non réalisable. De cette manière, on arrive à imposer implicitement le recours relativement complet . À noter que $\hat{\sigma}$ est une direction extrême du cône polaire correspondant à la matrice W et elle est calculée pour un point donné x^* à partir du problème suivant :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sigma^T (h(\xi) - T(\xi)x^*) \\ \text{s.c} \quad & \sigma^T W \leq 0 \\ & \|\sigma\|_1 \leq 1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.7.2 Test d'optimalité

Si tous les problèmes admettent une solution, on essaiera de faire mieux en obtenant une direction d'amélioration de la fonction réelle de recours (ceci pour chaque scénario séparément).

La fonction de recours est la combinaison linéaire de la fonction de chaque sous problème différent. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(x^*) &= \sum_{i=1}^N p_i \mathbf{Q}(x^*, \xi_i) \\ &= \sum_{i=1}^N p_i \pi_i^T (h_i - T_i x^*) \end{aligned} \quad (2.17)$$

où p_i est la probabilité d'occurrence du scénario i qui pondère la partie $Q_i(x^*)$ correspondant au scénario i .

La fonction $\mathbf{Q}(x^*)$ étant convexe. La coupe à rajouter dans le maître, qui regroupe toute information de tout sous-problème est la suivante :

$$\theta \geq \sum_{i=1}^N p_i \pi_i^T (h_i - T_i x) \quad (2.18)$$

Les coupes du type (2.15) sont appelées coupes de réalisabilité et celles du type (2.18) coupes d'optimalité. À chaque itération on rajoute au problème maître soit une coupe de réalisabilité, soit

une coupe d'optimalité.

2.8 La programmation linéaire stochastique en nombres entiers

Comme dans le cas continu de la programmation linéaire stochastique beaucoup de problème pratique peuvent avoir des variables de décision a valeur entières. Leur formulation est la même que c'elle citée précédemment 2.2 en rajoutant tout simplement la condition d'intégrité.

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = C_{\xi}x \\ \text{s.c} \quad & T(\xi)x = h(\xi) \\ & x \in D \end{aligned} \quad (2.19)$$

Où $D=S \cap \mathbb{Z}^n$

2.9 Formulation du problème linéaire stochastique multi-objectifs en nombres entiers (MOSILP)

Un problème de programmation linéaire stochastique multicritère (MOSILP ; Multiple Objective Stochastic Integer Linear Programming) est défini, en général, comme suit :

$$\begin{aligned} \text{"min"} \quad & Z_k = C_k(\xi)x, \quad k = 1, \dots, p \\ \text{s.c} \quad & T(\xi)x = h(\xi) \\ & x \in D \end{aligned} \quad (2.20)$$

Où $D=S \cap \mathbb{Z}^n$

avec $C_k(\xi)$, $T(\xi)$, $h(\xi)$ sont des vecteurs aléatoires de dimensions respectives $(1 \times n_1)$, $(m_2 \times n_1)$, $(m_2 \times 1)$, définis sur l'espace de probabilités (Ξ, F, P) , $D = \{Ax = b : x \geq 0 \text{entiers}\}$, un polyèdre convexe et déterministe des décisions x , A et b sont des vecteurs déterministes de dimensions $(m_1 \times n_1)$, $(m_1 \times 1)$ respectivement.

La plupart des méthodes de résolution des MOSILP transforment d'abord le problème (2.20) en un problème déterministe et puis le résoudre par une méthode interactive, dans ce contexte, nous citons la méthode PROTRADE [Goicoechea et al.76], STRANGE [Teghem et al. 86] et PROMISE [Urli et Nadeau90].

La méthode STRANGE-MOMIX développée par Teghem [Teghem 90] traite le problème MOSLP à variables entières (MOSILP), ce cas a été aussi considéré par Moulaï et Amrouche

dans [Moulaï et Amrouche 06] et par Abbas et Bellahcene qui ont proposé dans [Abbas et Bellahcene 06] une méthode basée sur la méthode des coupes planes [Abbas et Moulaï 99] et la technique L-Shaped.

2.10 Quelques concepts de solutions efficaces

L'analyse de l'efficacité pour les problèmes stochastiques multi-objectifs dont les variables aléatoires sont discrètes a été abordée dans plusieurs travaux, nous citons à titre d'exemple les travaux de Ben Abdelaziz dans [Ben Abdelaziz 92], [Ben Abdelaziz et al. 97] et [Ben Abdelaziz et al. 99].

Nous nous intéressons dans ce travail à la définition de quelques concepts de solutions efficaces qui coïncident avec l'approche multi-objectif, à savoir, ces solutions sont déterminées en transformant chacun des objectifs stochastiques en leurs équivalents déterministes, en utilisant le critère de l'espérance mathématique (le critère adapté dans le modèle de recours), la variance minimum, . . . Ce dernier problème, l'équivalent déterministe résultant sera ensuite résolu et les solutions efficaces obtenues seront considérées comme étant les solutions efficaces du problème initial.

2.10.1 Définition

Considérons le problème linéaire stochastique multi-objectif (2.20) et supposons que l'ensemble réalisable est constitué uniquement de contraintes déterministes ou bien qu'il a été transformé en son équivalent déterministe. Soit D , l'ensemble réalisable du MOSILP (2.20).

✂ Solution efficace en moyenne (attendue)

Définition 2.5 [D.J. White82] $x \in D$ est une solution efficace en moyenne du problème (2.20), si elle est une solution efficace du problème multi-objectif déterministe (2.25).

$$\begin{aligned}
 \text{''min''} \quad & Z'_k(x) \quad k = 1, \dots, p \\
 \text{s.c} \quad & Ax = b \\
 & x \in D \\
 \text{avec} \quad & Z'_k(x) = \sum_{i=1}^N p_i Z_{ki} = \sum_{i=1}^N p_i C_k(\xi)x = \mathbf{E}[C_k(\xi)x]
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

L'application du critère de la variance minimale pour transformer le problème (2.20) en un problème déterministe donne le concept de solution efficace suivant :

✂ Solution efficace de variance minimale

Définition 2.6 [D.J. White82] $x \in D$ est une solution efficace avec une variance minimale du problème (2.20), si elle est une solution efficace du problème

$$\min(\sigma_1^2(x), \dots, \sigma_p^2(x)) \quad (2.22)$$

avec $\sigma_k^2(x)$ la variance du k-ème critère.

On peut aussi considérer le critère du risque minimum pour la transformation du problème (2.20) en un problème déterministe.

Dans ce contexte, on suppose que le décideur peut fixer, à priori, les niveaux d'aspiration u_k pour chacun des objectifs stochastiques Z_k . Le but est donc de déterminer la solution x qui maximise les probabilités que les objectifs soient inférieures à leurs niveaux d'aspiration : $P(Z_k \leq u_k)$.

✘ Solution efficace à risque minimum

Définition 2.7 [Stancu-Minasian et Tigan84] $x \in D$ est une solution efficace avec une variance minimale du problème (2.20), si elle est une solution efficace du problème

$$\max_{x \in D} (P(Z_1 \leq u_1), \dots, P(Z_p \leq u_p)) \quad (2.23)$$

Cette définition nécessite la connaissance des fonctions de répartition, où bien des lois de probabilité des objectifs stochastiques et encore la collaboration du décideur pour la détermination des niveaux d'aspiration.

$$\begin{aligned} \text{''min'' } & \bar{Z}_k(x) \\ \text{s.c. } & Ax = b \\ & x \in D \\ \text{avec } & \bar{Z}_k = \mathbf{E}[Z_k] = \mathbf{E}[C(\xi)_{kx}] \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.10.2 Problème déterministe équivalent a MOSILP

Dans notre travail, nous avons adapté le modèle de recours pour transformer le problème (2.20) en un problème déterministe équivalent. Pour ce faire, nous supposons que le vecteur aléatoire, ξ , possède une distribution de probabilités discrète et finie, $\{(\xi_i, p_i), i = 1, \dots, N\}$.

- Nous associons à chaque scénario ξ_i , un critère Z_{ki} , une matrice T_i et un vecteur h_i , pour mettre en évidence toutes les conséquences de toutes les réalisations possibles.

- b. Revenant à l'idée de l'approche de recours, on suppose que le décideur peut préciser les coûts des pénalités, $q_i = q(\xi_i)$, des contraintes violées y_i . On ajoute, à chaque critère Z_{ki} , la fonction de recours $\mathbf{Q}(x, \xi_i)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(x) &= \min q_i^T y_i \\ \text{s.c. } & W y_i = h_i - T_i x, y_i \geq 0 \end{aligned}$$

On aura, ainsi, à minimiser l'espérance mathématique du coût total, $\bar{Z}_k = \mathbf{E}[Z_k + \mathbf{Q}(x, \xi)]$, $k = 1, \dots, p$.

Le problème stochastique multi-objectifs à 2-niveaux avec recours en nombre entier (TSMOSIPR : Two Stage Multiple Objective Stochastic Integer Programm with Recorse) résultant en termes des décisions du premier niveau est décrit par :

$$\begin{aligned} \text{"min"} \quad & \tilde{Z}_k = \bar{Z}_k + \mathbf{Q}(x) \\ \text{s.c.} \quad & Ax = b \\ & x \in D \end{aligned} \tag{2.25}$$

avec $\mathbf{Q}(x) = \mathbf{E}[\mathbf{Q}(x, \xi)] = \sum_{i=1}^N p_i(\mathbf{Q}(x, \xi_i))$

et

$$\begin{aligned} \bar{Z}_k = \mathbf{E}[Z_k] &= \sum_{i=1}^N p_i C_k(\xi_i) x \\ &= \mathbf{E}[C_k(\xi) x], \end{aligned} \tag{2.26}$$

2.11 Approches de résolution

En général, la résolution de ces problèmes est abordée avec des techniques de la programmation multicritère et de la programmation stochastique. Ainsi, Stancu et Minasian montrent dans [Stancu-Minasian84] que la résolution de ces problèmes nécessite une double transformation : transformation du problème multicritère en un problème monocritère et du problème stochastique en un problème déterministe. Les mêmes étapes sont aussi considérées par Ben Abdelaziz [Ben Abdelaziz 92], il a classé les techniques disponibles pour la résolution de ces problèmes selon l'ordre d'exécution de ces transformations. Il a appelé :

- **approche multi-objectif** l'ensemble des techniques qui considèrent tout d'abord la transformation du problème multicritère stochastique en un problème multicritère déterministe équivalent,
- **approche stochastique** pour se référer à toutes les techniques qui transforment le problème multicritère stochastique en un problème stochastique avec un seul critère, qui vont être, par la suite, résolus avec une des approches existantes dans la littérature.

Il est à souligner que toutes les deux approches présentent des faiblesses du fait qu'elles ne considèrent pas les deux aspects du problème simultanément, à savoir, l'aspect stochastique et l'aspect multicritère.

2.12 Algorithme L-Shaped dans le cas discret

Initialiser $s = 0$ $\bar{Z} = \infty$, et la valeur de θ est mise à $-\infty$ ou à une borne inférieure appropriée qui n'est pas prise en considération (qui sera ignoré).

La liste créée contient uniquement un seul nœud correspondant au sous problème initial.

Étape 1 : Sélectionner quelques nœuds dans la liste comme étant le problème courant. s'il n'existe pas. Terminer.

Étape 2 : Résoudre le problème maître courant. Si ce problème courant n'est pas réalisable alors le nœud courant est stérilisé et retourner l'étape 1.

Sinon, soit $(\hat{x}, \hat{\theta})$, la solution optimale obtenue.

Étape 3 : Résoudre le dual de problème (2.16) pour tout scénario ξ_i avec $x = \hat{x}$.

Vérifier s'il y a une contrainte violée (c'est-à-dire que le problème de recours n'est pas réalisable, pour un certain scénario ξ_i , $\sigma^T(h_i - T_i\hat{x}) > 0$), ajouter une coupe de faisabilité (2.15) au problème maître courant et retourner à l'étape 2.

Si $C^T\hat{x} + \hat{\theta} > \bar{Z}$, alors stériliser le problème courant et retourner à l'étape 1.

Étape 4 : Vérifier toutes restrictions (conditions), si une condition n'est pas vérifiée, créer deux nouvelles branches suivant la branche courante et arrêter la procédure.

Ajouter les deux nouveaux nœuds à la liste et retourner à l'étape 1.

Étape 05 : Résoudre le problème (2.14), pour tout scénario ξ_i avec $x = \hat{x}$. Calculer $\mathbf{Q}(\hat{x})$ et $\hat{Z} = C^T\hat{x} + \mathbf{Q}(\hat{x})$.

Si $\hat{Z} < \bar{Z}$, actualiser $\bar{Z} = \hat{Z}$

Étape 6 : Si $\hat{\theta} \geq \mathbf{Q}(\hat{x})$, alors stériliser le nœud courant et retourner à l'étape 1,

sinon ajouter une coupe optimale (2.18) et mettre $s = s + 1$, et retourner à l'étape 2.

3

Optimisation d'une fonction sur un domaine efficace discret d'un problème multi-objectifs

Sommaire

3.1	Introduction	59
3.2	Résultats fondamentaux	61
3.3	Optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème MOILP	62
3.4	La méthode de Gorge	63
3.5	Exemple Illustratif	65
3.6	Une méthode d'optimisation d'une fonction fractionnaire linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un MOILP :	70
3.7	Exemple Illustratif	73
3.8	Une méthode d'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un MOSILP	80
3.9	Exemple illustratif	82

3.1 Introduction

Les problèmes de programmation mathématique à objectifs multiples consistent à optimiser simultanément plusieurs critères non comparables sur un ensemble de solutions réalisables non vide. Le concept de points efficaces joue un rôle important dans l'analyse et la résolution de

ces problèmes.

Au cours de la dernière décennie, plusieurs chercheurs, citons en particulier : Benson [H.P. Benson84], Isermann [Isermann et Steuer87], Yamamoto [Y.Yamamoto2001], Ecker et Song [Ecker et Song94], Sayin [S. Sayin2000], et autre, motivés par de nombreuses applications, se sont intéressés à l'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème multi-objectif linéaire :

$$\begin{aligned} \text{"max"} \quad & Z = Cx \\ \text{t.q} \quad & x \in S \end{aligned} \tag{3.1}$$

Où $C \in \mathbb{R}^{1 \cdot n}$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ et $b \in \mathbb{R}^{m \cdot 1}$

Après la caractérisation des points efficaces, ils se sont intéressés à la résolution du problème de minimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des points efficaces \mathbf{E}_{ff} du problème (3.1) :

$$\begin{aligned} \max \quad & \Phi(x) = dx \\ (P_E) \quad \text{t.q} \quad & x \in \mathbf{E}_{ff} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Notons que l'ensemble des solutions réalisable \mathbf{E}_{ff} est en générale non convexe. Le problème (3.2) rentre alors dans le cadre de l'optimisation globale (ou programmation non convexe).

Le problème a été étudié la première fois dans le cas continu en 1972 par Philip [Philip72], qui a décrit un algorithme basé sur le déplacement sur les sommets efficaces adjacents et un bon nombre de chercheurs.

Contrairement au cas continu qui a été complètement étudiée par plusieurs auteurs : le cas discret n'a pas vu beaucoup de développements semblable, une méthode donne seulement une borne supérieure de la fonction objectif Φ est proposée par N.C. Nguyen [Nguyen92], la première méthode proposée pour l'optimisation sur l'ensemble efficace d'un problème (MOILP) en évitant l'énumération explicite de tous les points efficaces est celle de M.Abbas et D.Chaabane [Abbas et Chaabane 02], où différents types de coupes sont imposées de telle manière que l'amélioration de la valeur optimale de la fonction objectif à chaque itération soit garantie, plus une autre méthode exacte proposée par D.Chaabane [D. Chaabane06] pour résoudre le même problème dans l'espace des critères en optimisant une somme pondérée des critères initiaux, suivie par l'algorithme de Jesús M. Jorge [Jesús M. Jorge 2008] qui est basé sur l'analyse d'un ordre approprié des problèmes linéaires en nombres entiers pour éliminer successivement les solutions moins bonnes sur le critère principal.

et aussi le cas d'optimisation d'une fonction non linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces entières d'un problème MOILP, à notre connaissance n'a pas vu aucun étude. Nous proposons, dans ce travail, une méthode exacte dont le critère principale est une fonction fractionnaire

linéaire.

Moulai et Ghazli ont proposé une technique dans [Moulaï et Ghazli2008] qui combine la méthode L-Shaped et la méthode d'Ecker et Song pour résoudre le problème d'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème (MOSLP).

Connaissant a priori la structure des préférences du décideur, nous proposons, aussi, deux techniques : la première est une nouvelle méthode exacte d'un problème d'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème linéaire multi-objectif (MOILP), elle généralise tous les résultats de la méthode de Jorge. La seconde, c'est une méthode exacte pour résoudre le problème d'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces du MOSILP. Cette méthode est inspirée de la méthode de gorge [Jesús M. Jorge 2008] et la méthode L-Shaped [Van Slyke et Wets 69] dans le cas discret qui traite les problèmes linéaires stochastiques à deux niveaux avec recours.

3.2 Résultats fondamentaux

Théorème 3.1 ([Isermann 74]) *Soit x^* un élément arbitraire de la région S . $x^* \in \mathbf{E}$ si et seulement si, Θ^* , la valeur optimale de la fonction objectif, est nulle dans le problème de programmation linéaire suivant :*

$$(P_{x^*}) \quad \begin{array}{ll} \max & \Theta(x) = \sum_{i=1}^p \Psi_i \\ \text{t.q} & Cx - I\Psi = Cx^* \\ & x \in S, \Psi_i \in \mathbb{R}^+; \forall i = \overline{1, P}. \end{array} \quad (3.3)$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax < b, x \geq 0\}, A \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ et } b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$$

où C est une matrice $p \times n$, dont la $i^{\text{ème}}$ ligne correspond à c^i , $i = 1, 2, \dots, p$, I est la matrice identité ($p \times p$) et $\Psi = (\Psi_i)_{i=1, \dots, p}$.

Le problème (P_{x^*}) est souvent utilisé pour tester l'efficacité d'un point donné. Le théorème suivant, montre que (P_{x^*}) peut être aussi utilisé pour générer un point efficace même si le point x^* ne l'est pas.

Théorème 3.2 ([Ecker et Kouada 75]) *Si (P_{x^*}) possède une valeur maximale finie non nulle atteinte en un point w alors w est efficace.*

Théorème 3.3 ([Ecker et Kouada 75]) *Si (P_{x^*}) n'admet pas une solution optimale finie, alors l'ensemble, \mathbf{E} , des solutions efficaces est vide.*

Ces résultats sont vrais aussi pour le cas des variables discrètes, son utilisation est très simple, à chaque fois qu'on veut tester l'efficacité d'une solution donnée, on résout un problème de programmation linéaire en variables mixtes inchangé dans tous ces paramètres sauf le vecteur

second membre des contraintes, qu'il faut le remplacer par la solution en question, le théorème suivant est utilisé dans les différentes étapes des algorithmes pour tester l'efficacité d'une solution réalisable donnée.

Théorème 3.4 *Soit x^* un élément arbitraire de la région S . $x^* \in \mathbf{E}$ si et seulement si, Θ^* , la valeur optimale de la fonction objectif, est nulle dans le problème de programmation linéaire suivant :*

$$(P_{x^{**}}) \quad \begin{array}{ll} \max & \Theta(x) = \sum_{i=1}^p \Psi_i \\ \text{t.q} & Cx - I\Psi x^* = Cx^* \\ & x \in D, \Psi_i \in \mathbb{R}^+; \forall i = \overline{1, p}. \end{array} \quad (3.4)$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax < b, x \geq 0\}, A \in \mathbb{R}^{m \cdot n} \text{ et } b \in \mathbb{R}^{m \cdot 1}$$

Où $D = S \cap \mathbb{Z}^n$ étant l'ensemble des nombres entiers relatifs.

Preuve (\Rightarrow) Soit $x^* \in \mathbf{E}$. Comme $\Psi_i \geq 0$ pour tout $i \in 1, 2, \dots, p$, alors $Cx \geq Cx^*$ dans $P(x^*)$. Supposons que, $\Theta^* = 0$, alors il existe i tel que $\Psi_i > 0$, $I\Psi_i \geq 0$ et $I\Psi_i \neq 0$ ce qui implique $Cx > Cx^*$. Ainsi, il existe $x \in D$ tel que $Cx \geq Cx^*$ et $Cx \neq Cx^*$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle x^* est efficace.

\Leftarrow Soit $\Theta^* = 0$, supposons que x^* est non efficace, il existe un point $x \in D$ tel que $Cx \geq Cx^*$ et $Cx \neq Cx^*$. Par conséquent, il existe $x \in D$ tel que $Cx \neq Cx^*$ et $Cx - Cx^* \neq 0$, d'où $I > 0$, et donc, il existe i tel que $i > 0$ qui est en contradiction avec l'hypothèse $\Theta^* = 0$.

□

3.3 Optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème MOILP

$$(P(D)) \quad \begin{array}{ll} \text{"max"} & Z_k = C_k x \\ \text{t.q} & x \in D \end{array} \quad (3.5)$$

$C \in \mathbb{R}^{1 \cdot n}$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax < b, x \geq 0\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ et $b \in \mathbb{R}^{m \cdot 1}$ Où $D = S \cap \mathbb{Z}^n$ étant l'ensemble des nombres entiers relatifs.

l'ensemble de toutes les solutions efficaces entières du problème $(P(D))$ est noté \mathbf{E} . Le problème principal est décrit par :

$$(P_{\mathbf{E}}) \quad \begin{array}{ll} \max & \Phi(x) = dx \\ \text{t.q} & x \in \mathbf{E} \end{array} \quad (3.6)$$

Où d est un vecteur ligne de dimension n de composantes entières.

Le problème relaxé (P_R) est donné par

$$(P_R) \quad \begin{array}{ll} \max & \Phi(x) = dx \\ \text{t.q} & x \in D \end{array} \quad (3.7)$$

Soit le problème mono-objectif ($P_i(D)$), $i \in 1, 2, \dots, p$.

$$(P_i(D)) \quad \begin{array}{ll} \max & Z_i = C_i x \\ \text{t.q} & x \in D \end{array} \quad (3.8)$$

Un problème ($P_i(D)$) peut avoir plusieurs solutions optimales, nous donnons la notion de solution alternative dans la définition suivante :

Définition 3.1 Soit x^* une solution optimale du problème (3.8), une solution réalisable $\tilde{x} \in D$ est dite solution alternative à x^* si $Z_i(x^*) = Z_i(\tilde{x})$.

Dans l'analyse et la résolution des problèmes multi-objectifs, le concept de points efficaces joue un rôle important, rappelons la signification d'un point efficace dans la définition suivante :

Définition 3.2 un point $x \in D$ est dit solution efficace du problème (3.5), si et seulement si, il n'existe pas d'autre solution $\hat{x} \in D$ tel que $C\hat{x} \geq Cx$ et $C\hat{x} \neq Cx$, et le vecteur critères $Z(x)$ est dit solution non dominée.

3.4 La méthode de Gorge

Jorge a proposé [Jesús M. Jorge 2008] un algorithme qui est prouvé pour fournir une solution optimale globale de (3.2) sans devoir calculer l'ensemble de toutes les solutions efficaces de (3.5). Dans faire ceci, la procédure commence à résoudre le problème relaxé (3.7). Évidemment, seulement dans un nombre réduit de cas spéciaux la solution optimale de (3.7) fournit une solution optimale de (3.2) . Donc, si ce n'était pas le cas, une nouvelle solution efficace qui domine la précédente est alors obtenue.

Ensuite, dans chaque itération, le critère principal est optimisé sur le domaine restreint par des contraintes en nombres entiers qui sont incluses progressivement pour éliminer les solutions dominées par la solution efficace courante, afin de fournir une solution non dominée par les solutions détectées antérieurement jusqu'à ce qu'une solution optimale soit finalement trouvée.

Formulation du l'algorithme :

Étape 0 : Initialisation

poser $\Phi_{inf} = -\infty$, $\Phi_{sup} = +\infty$, $l = 1$, et résoudre le problème relaxé (P_R)

- Si (P_R) n'est pas réalisable. Alors terminer, le problème (P_E) n'a pas de solution.
- Autrement, soit x^l solution optimale de (P_R) .

Étape 1 : Tester l'efficacité de x^l

- Si x^l est efficace, l'algorithme prend fin et $X_{opt} = x^l$, $\Phi_{opt} = dx^l$.
- Sinon, poser $\Phi_{sup} = dx^l$ et aller à l'étape 2.

Étape 2 : Soit $\tilde{x}^l \in E$ une solution optimale du test d'efficacité dont le vecteur critères domine celui de x^l .

Dans l'espace des critères, plusieurs solutions efficaces peuvent avoir le même vecteur critères, pour cela le problème (T_l) est résolu pour optimiser le critère principal sur toutes les solutions équivalentes à \tilde{x}^l .

Le problème (T_l) est défini par

$$(T_l) : \max \left\{ dx \mid Cx = C\tilde{x}^l, x \in D \right\} \quad (3.9)$$

soit \tilde{x}^l une solution optimale du (3.9).

- Si $d\tilde{x}^l > \Phi_{inf}$, poser $\Phi_{inf} = d\tilde{x}^l$ et $X_{opt} = \tilde{x}^l$. Aller à l'étape 3.
- Sinon, $\Phi_{inf} = \Phi_{sup}$. Terminer, X_{opt} est la solution optimale de (P_E) .

Étape 3 : Résoudre le problème (R_l) défini par

$$(R_l) : \max \left\{ dx \mid x \in D - \cup_{s=1}^l D_s \right\} \quad (3.10)$$

où $D_s = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid Cx \leq C\tilde{x}^s\}$ avec $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^l$ sont les solutions optimales des problèmes $(T_1), (T_2), \dots, (T_l)$ respectivement.

- Si (3.10) n'est pas réalisable. Terminer, X_{opt} est une solution optimale de (P_E) .
- Autrement, soit x^{l+1} solution optimale de (3.10).
 - ▷ Si $dx^{l+1} \leq \Phi_{inf}$. Terminer, X_{opt} est une solution optimale de (P_E) .
 - ▷ Sinon, poser $l = l + 1$ et aller à l'étape 1.

Proposition 3.1 [Jesús M. Jorge 2008] Soit x^{l+1} une solution optimale du problème (R_l) telle que $\Phi(x^{l+1}) > \max_{s \in \{1, \dots, l\}} \{\Phi(\tilde{x}^s)\}$. Si $x^{l+1} \in \mathbf{E}$ alors x^{l+1} est une solution optimale de (P_E) .

Proposition 3.2 [Jesús M. Jorge 2008] Soient $\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^l \in \mathbf{E}$, si (R^l) est irréalisable, alors l'ensemble de toutes les solutions non dominées est $Z(\mathbf{E}) = \{C\tilde{x}^1, \dots, C\tilde{x}^l\}$.

3.5 Exemple Illustratif

Considérons l'exemple suivant :

$$\begin{aligned}
 & \max Z_1 = x_1 - 2x_2 \\
 & \max Z_2 = -x_1 + 4x_2 \\
 (P_{(D)}) \quad & \text{t.q. } -2x_1 + x_2 \leq 0, \\
 & x_1 \leq 3, \\
 & x_2 \leq 2, \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{N}
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

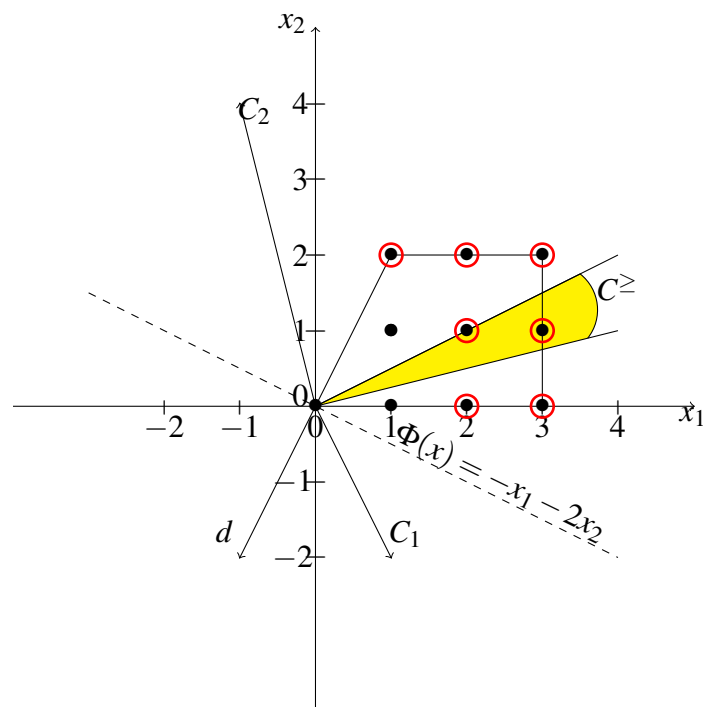


FIG. 3.1 – Espace des décisions

Donc l'ensemble de toutes les solutions efficaces du problème (3.11) est $\mathbf{E} = \{(1,2), (2,0), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1), (3,2)\}$.

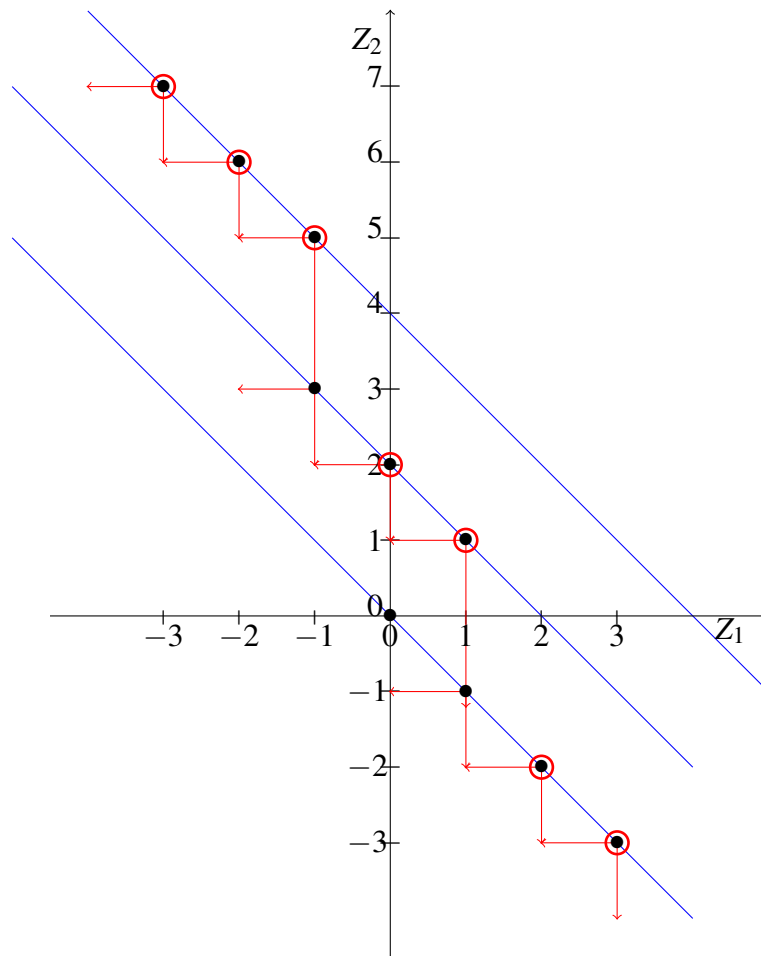


FIG. 3.2 – Espace des critères

x	(0, 0)	(1, 0)	(1, 1)	(2, 0)	(3, 0)	(2, 1)	(3, 1)	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)
$Z(x)$	(0, 0)	(1, -1)	(-1, 3)	(2, -2)	(3, -3)	(0, 2)	(1, 1)	(-3, 7)	(-2, 6)	(-1, 5)
$\Phi(x)$	0	-1	-3	-2	-3	-4	-5	-5	-6	-7

TAB. 3.1 – Tableau de résultats de l'exemple (3.11)

Le problème principal est :

$$(P_{(E)}) \quad \begin{array}{ll} \max & \Phi = -x_1 - 2x_2 \\ \text{t.q} & x_1, x_2 \in \mathbf{E} \end{array} \quad (3.12)$$

Avec \mathbf{E} est l'ensemble de toutes les solutions efficaces entières du problème (3.11).

On prend les bornes inférieures des deux fonctions objectifs $-M_1 = -3, -M_2 = -3$.

Itération1 :

Étape 0 : poser $\Phi_{inf} = -\infty, \Phi_{sup} = +\infty, l = 1$.

Résoudre le problème relaxé :

$$\begin{aligned}
 (P_{(R)}) \quad & \max \quad \Phi = -x_1 - 2x_2 \\
 & t.q \quad -2x_1 + x_2 \leq 0, \\
 & \quad x_1 \leq 3, \\
 & \quad x_2 \leq 2, \\
 & \quad x_1, x_2 \in \mathbb{N}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Soit $x^1 = (0, 0)$ une solution optimale de (3.40) dont le vecteur critères $Z(x^1) = (0, 0)$.
on note $D = \{-2x_1 + x_2 \leq 0, x_1 \leq 3, x_2 \leq 2, x_1, x_2 \in \mathbb{N}\}$

Étape 1 : tester l'efficacité de x^1 en résolvant le problème suivant :

$$\begin{aligned}
 (P_{(x^1)}) \quad & \max \quad \Theta = \Psi_1 + \Psi_2 \\
 & t.q \quad x_1, x_2 \in D \\
 & \quad x_1 - 2x_2 - \Psi_1 = 0 \\
 & \quad -x_1 + 4x_2 - \Psi_2 = 0 \\
 & \quad \Psi_i \geq 0, i = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

à l'optimum $\Theta^* = 2$ avec les deux vecteurs suivants $\hat{x}^{11} = (2, 1)$; $\Psi^{11} = (0, 2)$ et $\hat{x}^{12} = (3, 1)$; $\Psi^{12} = (1, 1)$ donc $\Theta^* \neq 0$ c'est-à-dire que $x^1 = (0, 0)$ n'est pas efficace, poser $\Phi_{sup} = \Phi(x^1) = 0$, et aller à l'étape 2.

Étape 2 : Soit $\hat{x}^{11} = (2, 1)$ une solution optimale de (3.28), qui est efficace, le vecteur critères correspondant est $Z(\hat{x}^{11}) = (0, 2)$.

Résoudre le problème (T_1) tel que $((T_1) : \max\{dx | Cx = C\hat{x}^{11}\})$ pour trouver les solutions efficaces qui ont le même vecteur critère :

$$\begin{aligned}
 (T_1) \quad & \max \quad \Phi = -x_1 - 2x_2 \\
 & t.q \quad x_1, x_2 \in D \\
 & \quad x_1 - 2x_2 = 0 \\
 & \quad -x_1 + 4x_2 = 2
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

La solution optimale de (3.15) est $\tilde{x}^1 = \hat{x}^{11} = (2, 1)$ et comme $\Phi(\tilde{x}^1) = -4 > \Phi_{inf} = -\infty$, poser $\Phi_{inf} = -4$ et $X_{opt} = \tilde{x}^1$

$\Phi_{inf} \neq \Phi_{sup}$, aller à l'étape 3.

Étape 3 : Résoudre le problème (R_1) tel que $((R_1) : \max\{dx|x \in D - \cup_{s=1}^l D_s\}$ où $D_s = \{x \in \mathbb{Z}^n | Cx \leq C\tilde{x}^s\}$; avec \tilde{x}^1 , est la solution optimale de problème (T_1) défini par :

$$(R_1) \quad \begin{aligned} \max \quad & \Phi = -x_1 - 2x_2 \\ \text{t.q} \quad & x_1, x_2 \in D \\ & Z_i(x) \geq (Z_i(X_{opt}) + 1)y_i^1 - M_i(1 - y_i^1) \\ & \sum_{i=1}^2 y_i^1 \geq 1; \\ & y_i^1 \in \{0, 1\}, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

qui est formulé par :

$$(R_1) \quad \begin{aligned} \max \quad & \Phi = -x_1 - 2x_2 \\ \text{t.q} \quad & x_1, x_2 \in D \\ & x_1 - 2x_2 \geq y_1^1 - 3(1 - y_1^1) \quad (1) \\ & -x_1 + 4x_2 \geq 3y_2^1 - 3(1 - y_2^1) \quad (2) \\ & y_1^1 + y_2^1 \geq 1, \quad y_1^1, y_2^1 \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Soit $x^2 = (1, 0)$, $y = (1, 0)$ une solution optimale de (3.17) et $Z(x^2) = (1, -1)$. Comme $\Phi(x^2) = -1 > \Phi_{inf}$, poser $l = l + 1 = 2$ et aller à l'étape 1.

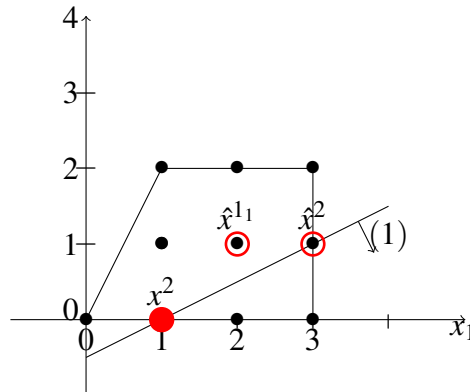


FIG. 3.3 – La région réduite D^1

Itération 2 :

Étape 1 : La solution x^2 est testée pour l'efficacité en résolvant le problème $(P(x^2))$, on trouve qu'elle n'est pas efficace ($\Theta^* \neq 0$), poser $\Phi_{sup} = \Phi(x^2) = -1$ et aller à l'étape 2.

$$\begin{aligned}
 (P_{(x^2)}) \quad & \max \quad \Theta = \Psi_1 + \Psi_2 \\
 & t.q \quad x_1, x_2 \in D \\
 & \quad x_1 - 2x_2 - \Psi_1 = 1 \\
 & \quad -x_1 + 4x_2 - \Psi_2 = -1 \\
 & \quad \Psi_i \geq 0, i = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

à l'optimum $\Theta^* = 2$ avec le vecteur $\hat{x}^2 = (3, 1)$; $\Psi^3 = (0, 2)$ donc $\Theta^* \neq 0$ c'est-à-dire que $x^2 = (1, 0)$ n'est pas efficace, poser $\Phi_{sup} = \Phi(x^1) = -1$, et aller à l'étape 2.

Étape 2 : $\hat{x}^2 = (3, 1)$ une solution optimale de (3.31) qui est efficace, $Z(\hat{x}^2) = (1, 1)$
 Résoudre le problème suivant :

$$\begin{aligned}
 (T_2) \quad & \max \quad \Phi = -x_1 - 2x_2 \\
 & t.q \quad x_1, x_2 \in D \\
 & \quad x_1 - 2x_2 = 1 \\
 & \quad -x_1 + 4x_2 = 1
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

La solution de (3.19) est $\tilde{x}^2 = \hat{x}^2 = (3, 1)$.
 Comme $\Phi(\tilde{x}^2) = -5 < \Phi_{inf} = -4$, aller à l'étape 3 sans faire la mise à jour.

Étape 3 : Résoudre le problème R_2

$$\begin{aligned}
 (R_2) \quad & \max \quad \Phi = -x_1 - 2x_2 \\
 & t.q \quad x_1, x_2 \in D \\
 & \quad x_1 - 2x_2 \geq y_1^1 - 3(1 - y_1^1) \\
 & \quad -x_1 + 4x_2 \geq 3y_2^1 - 3(1 - y_2^1) \\
 & \quad y_1^1 + y_2^1 \geq 1, \quad y_1^1, y_2^1 \in 0, 1 \\
 & \quad x_1 - 2x_2 \geq 2y_1^2 - 3(1 - y_1^2) \quad (3) \\
 & \quad -x_1 + 4x_2 \geq 2y_2^2 - 3(1 - y_2^2) \quad (4) \\
 & \quad y_1^2 + y_2^2 \geq 1, \quad y_1^2, y_2^2 \in 0, 1
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Soit $x^3 = (2, 0)$, $y = (1, 0, 1, 0)$ une solution optimale de (3.20) et $Z(x^3) = (2, -2)$. Comme $\Phi(x^3) = -2 > \Phi_{inf} = -4$, poser $l = l + 1 = 3$ et aller à l'étape 1.

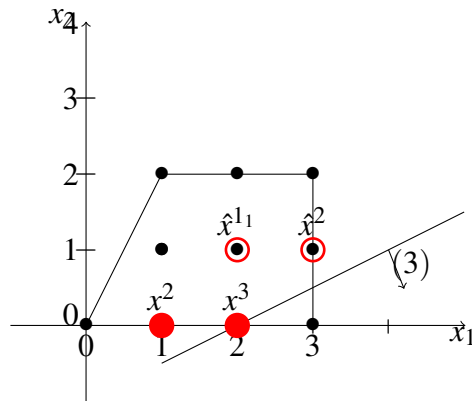


FIG. 3.4 – La région réduite D^2

Itération 3 :

Étape 1 : La solution $x^3 = (2, 0)$ est testée pour l'efficacité en résolvant le problème $(P(x^3))$, on trouve qu'elle est efficace ($\Theta^* = 0$), donc l'algorithme prend fin. $X_{opt} = (2, 0)$ solution optimale de (3.12) et $\Phi_{opt} = -2$ est la valeur optimale du critère principal.

3.6 Une méthode d'optimisation d'une fonction fractionnaire linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un MOILP :

Le problème principal est décrit comme suit :

$$\begin{aligned} \max \quad & \Phi(x) = \frac{px + \alpha}{qx + \beta} \\ (Pf_E) \quad & \text{t.q } x \in E_{ff} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Le problème relaxé (Pf_R) est donné par :

$$\begin{aligned} \max \quad & \Phi(x) = \frac{px + \alpha}{qx + \beta} \\ (Pf_R) \quad & \text{t.q } x \in D \end{aligned} \tag{3.22}$$

Théorème 3.5 [Cambini86] *Le point x^0 de S est une solution optimale du problème fractionnaire (Pf_R) si et seulement si le vecteur gradient réduit $\bar{\gamma} = \bar{\beta}p - \bar{\alpha}q$ est tel que $\bar{\gamma}_j \leq 0$ pour tout indice hors base $j \in \mathbb{N}_k$.*

3.6.1 Algorithme :

Étape 0 : Initialisation

poser $\Phi_{inf} = -\infty$, $\Phi_{sup} = +\infty$, $l = 1$, Résoudre le problème relaxé (Pf_R) par n'importe quelle méthode de la programmation fractionnaire discrète.

- Si (Pf_R) n'est pas réalisable. Alors terminer, le problème (Pf_E) n'a pas de solution.
- Autrement, soit x^l solution optimale de (Pf_R) .

Étape 1 : Tester l'efficacité de x^l

Résoudre le problème (P_{x^*}) au point x^l

- Si x^l est efficace, l'algorithme prend fin et $X_{opt} = x^l$, $\Phi_{opt} = \frac{px^l + \alpha}{qx^l + \beta}$.
- Sinon, poser $\Phi_{sup} = \frac{px^l + \alpha}{qx^l + \beta}$ et aller à l'étape 2.

Étape 2 :

Soit $\hat{x}^l \in E$ une solution optimale de (P_{x^*}) dont le vecteur critères domine celui de x^l .

Dans l'espace des critères, plusieurs solutions efficaces peuvent avoir le même vecteur critères, pour cela le problème (T_l) est résolu pour optimiser le critère principal sur toutes les solutions équivalentes à \hat{x}^l .

Le problème (Tf_l) est défini par

$$(Tf_l) : \max \left\{ \frac{px^l + \alpha}{qx^l + \beta} \mid Cx = C\hat{x}^l, x \in D \right\} \quad (3.23)$$

Résoudre le problème (Tf_l) par une méthode directe de la programmation fractionnaire discrète.

soit \tilde{x}^l une solution optimale du (3.23).

- Si $\frac{p\tilde{x}^l + \alpha}{q\tilde{x}^l + \beta} > \Phi_{inf}$, poser $\Phi_{inf} = \frac{p\tilde{x}^l + \alpha}{q\tilde{x}^l + \beta}$ et $X_{opt} = \tilde{x}^l$. Aller à l'étape 3.
- Sinon, $\Phi_{inf} = \Phi_{sup}$. Terminer, X_{opt} est la solution optimale de (Pf_E) .

Étape 3 :

Appliquer une méthode directe de la programmation fractionnaire discrète pour Résoudre le problème (Rf_l) défini comme suit :

$$(Rf_l) : \max \left\{ \frac{px + \alpha}{qx + \beta} \mid x \in D - \cup_{j=1}^l D_j \right\} \quad (3.24)$$

Où $D_s = \{x \in \mathbb{Z}^n | Cx \leq C\tilde{x}^s\}$ avec $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^l$ sont les solutions optimales des problèmes $(Tf_1), (Tf_2), \dots, (Tf_l)$ respectivement.

- Si (3.24) n'est pas réalisable. Terminer, X_{opt} est une solution optimale de $(Pf_{\mathbf{E}})$.
- Autrement, soit x^{l+1} solution optimale de (3.24).

- ▷ Si $\frac{px^{l+1} + \alpha}{qx^{l+1} + \beta} \leq \Phi_{inf}$. Terminer, X_{opt} est une solution optimale de $(Pf_{\mathbf{E}})$.
- ▷ Sinon, poser $l = l + 1$ et aller à l'étape 1.

Proposition 3.3 L'algorithme de recherche d'une solution optimale du problème $(Pf_{\mathbf{E}})$ converge en un nombre fini d'itérations.

Preuve Par l'hypothèse que la région d'admissibilité D est bornée (c'est-à-dire il y a un nombre limité de solutions entières), D est supposé non vide et Le théorème (3.5) nous garantit une solution optimale entière de (Pf_R) si elle existe et avec le théorème (3.2, 3.1) soit on obtient une solution optimale pour le $(Pf_{\mathbf{E}})$ soit une autre solution retournée efficace. Au fur et à mesure d'avancer dans l'algorithme, le domaine de faisabilité devient de plus en plus restreint dû au théorème (sylva). En outre, d'après la proposition (3.1, 3.2), dans chaque itération, ou bien une amélioration du critère principal, où bien une réduction de domaine de recherche progressivement jusqu'à ce qu'il devient vide. L'algorithme convergence vers la solution du problème $(Pf_{\mathbf{E}})$ est assurée par toutes ces conditions.

□

Proposition 3.4 Soit x^{l+1} une solution optimale du problème (3.24) telle que $\frac{px^{l+1} + \alpha}{qx^{l+1} + \beta} > \max_{j=1, \dots, l} \left\{ \frac{p\tilde{x}^s + \alpha}{q\tilde{x}^s + \beta} \right\}$. Si $x^{l+1} \in \mathbf{E}$ alors x^{l+1} est une solution optimale de (3.21).

Preuve

Supposons que x^{l+1} n'est pas optimale pour le problème (3.21), alors, il existe une solution réalisable $\hat{x} \in \mathbf{E}$ telle que $\frac{p\hat{x} + \alpha}{q\hat{x} + \beta} > \frac{px^{l+1} + \alpha}{qx^{l+1} + \beta}$. Comme x^{l+1} solution optimale de (3.24) alors

$\hat{x} \in \bigcup_{j=1}^l D_j$. Ceci implique que, il existe $s \in 1, \dots, l$ tel que $\hat{x} \in D_s$, c'est-à-dire, $C\hat{x} \leq C\tilde{x}^s$ car $D_s = \{x \in \mathbb{Z}^n | Cx \leq C\tilde{x}^s\}$

Comme $\hat{x} \in \mathbf{E}$ nous aurons certainement $C\hat{x} = C\tilde{x}^s$ (\hat{x} solution équivalente à \tilde{x}^s) donc $\frac{p\hat{x} + \alpha}{q\hat{x} + \beta} \leq \frac{p\tilde{x}^s + \alpha}{q\tilde{x}^s + \beta}$ car \tilde{x}^s est une solution optimale du problème (T_l) .

par conséquence, $\frac{px^{l+1} + \alpha}{qx^{l+1} + \beta} \leq \frac{p\hat{x} + \alpha}{q\hat{x} + \beta} \leq \frac{p\tilde{x}^s + \alpha}{q\tilde{x}^s + \beta}$ qui est en contradiction avec l'hypothèse $\frac{px^{l+1} + \alpha}{qx^{l+1} + \beta} > \max_{j \in \{1, \dots, l\}} \left\{ \frac{p\tilde{x}^j + \alpha}{q\tilde{x}^j + \beta} \right\}$

□

Proposition 3.5 Soient $\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^l \in \mathbf{E}$, si (3.24) est irréalisable, alors l'ensemble de toutes les solutions non dominées est $Z(\mathbf{E}) = \{C\tilde{x}^1, \dots, C\tilde{x}^l\}$.

Preuve

(\supseteq) est vérifiée par hypothèse.

(\subseteq) Si (3.24) n'est pas réalisable, alors $D \in \bigcup_{j=1}^l D_j$ donc $\forall x \in D$, il existe $s \in \{1, \dots, l\}$ tel que $x \in D_s$.

Particulièrement, soit $\bar{x} \in \mathbf{E}$ il existe $s \in \{1, \dots, l\}$ tel que $C\bar{x}^s \geq C\hat{x}$, ce qui implique $C\bar{x}^s = C\hat{x}$ car $\bar{x} \in \mathbf{E}$.

□

3.7 Exemple Illustratif

Considérons l'exemple suivant :

$$\begin{aligned}
 & \max \quad Z_1 = x_1 - 2x_2 \\
 & \max \quad Z_2 = -x_1 + 4x_2 \\
 (P_{(D)}) \quad & t.q \quad -2x_1 + x_2 \leq 0, \\
 & \quad \quad 6x_1 + x_2 \leq 21, \\
 & \quad \quad -2x_1 + 4x_2 \leq 6, \\
 & \quad \quad x_1, x_2 \in \mathbb{N}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

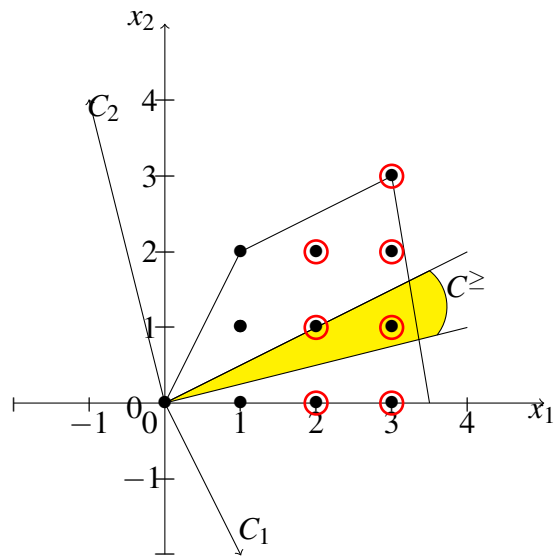


FIG. 3.5 – Espace des décisions

Donc l'ensemble de toutes les solutions efficaces du problème $(P_{(D)})$ est

$$\mathbf{Eff} = \left\{ (2,0), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3) \right\}.$$

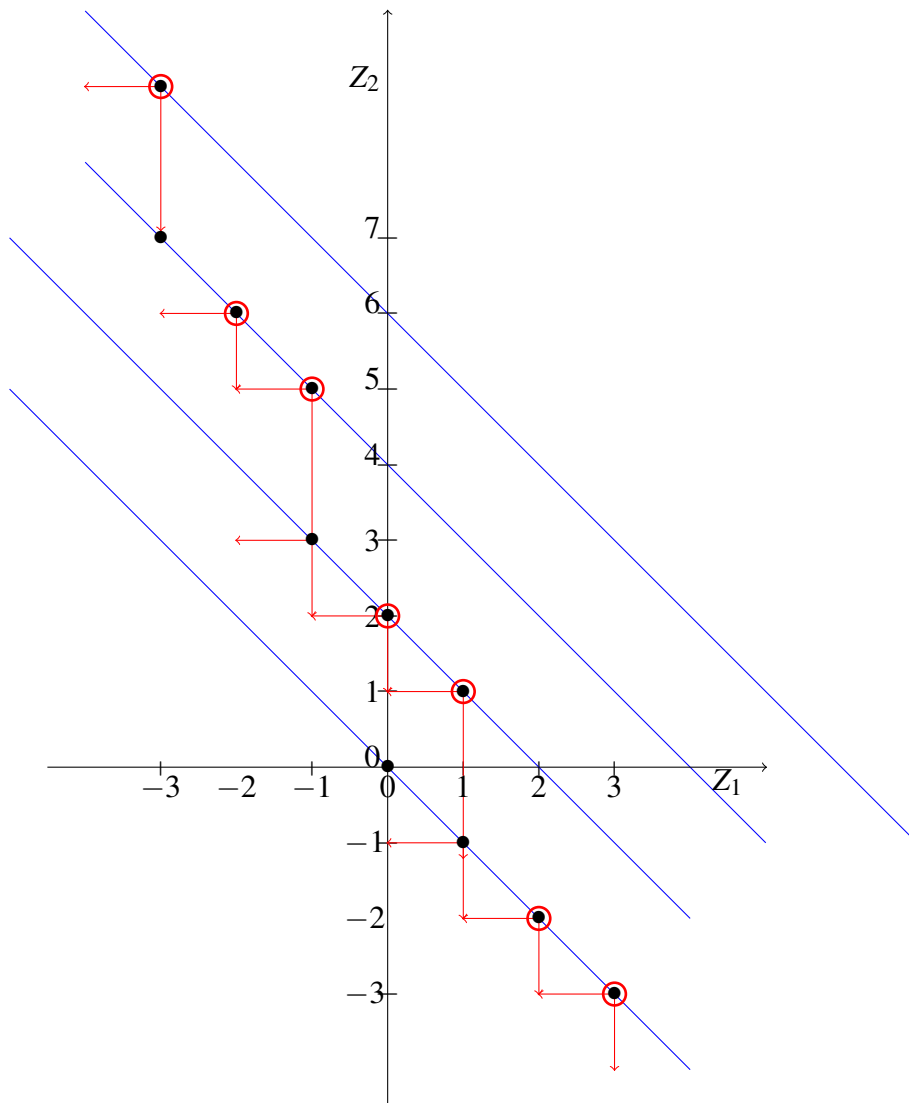


FIG. 3.6 – Espace des critères

x	(0, 0)	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(2, 0)	(3, 0)
$Z(x)$	(0, 0)	(1, -1)	(-1, 3)	(-3, 7)	(2, -2)	(3, -3)
$\Phi(x)$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$
x	(2, 1)	(3, 1)	(2, 2)	(3, 2)	(3, 3)	
$Z(x)$	(0, 2)	(1, 1)	(-2, 6)	(-1, 5)	(-3, 9)	
$\Phi(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{17}$	

TAB. 3.2 – Tableau des résultats de l'exemple (3.25)

Le problème principal est :

$$\begin{aligned} \max \quad & \Phi = \frac{x_1 + x_2 - 1}{5x_1 + x_2 - 1} \\ (Pf_{(E)}) \quad & t.q \quad x_1, x_2 \in \mathbf{E}_{ff} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Avec \mathbf{E}_{ff} est l'ensemble de toutes les solutions efficaces entières du problème $(P_{(D)})$.

On prend les bornes inférieures des deux fonctions objectifs $-M_1 = -3$, $-M_2 = -3$.

Itération1 :

Étape 0 : poser $\Phi_{inf} = -\infty$, $\Phi_{sup} = +\infty$, $l = 1$.

Résoudre le problème relaxé :

$$\begin{aligned} \max \quad & \Phi = \frac{x_1 + x_2 - 1}{5x_1 + x_2 - 1} \\ (Pf_{(R)}) \quad & t.q \quad -2x_1 + x_2 \leq 0, \\ & 6x_1 + x_2 \leq 21, \\ & -2x_1 + 4x_2 \leq 6, \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (3.27)$$

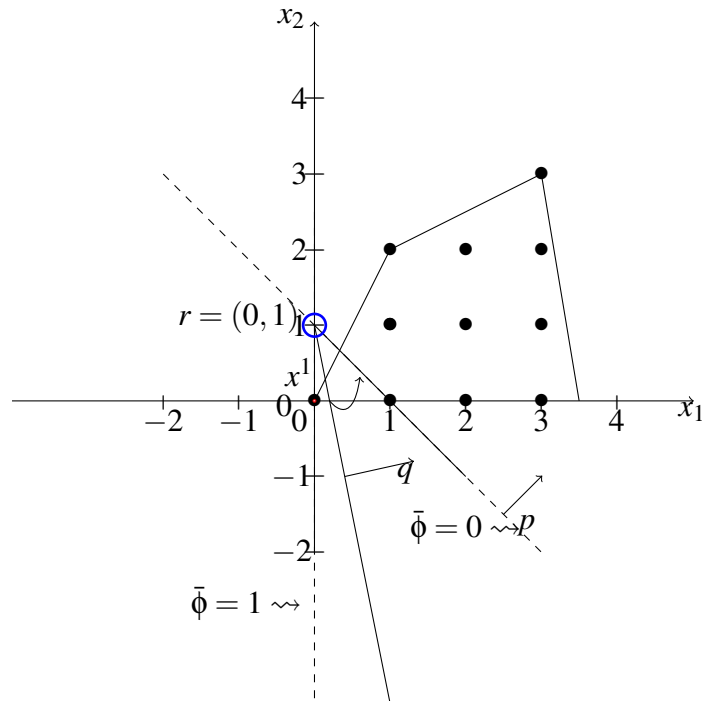


FIG. 3.7 – Espace des décisions

La courbe de niveau $\bar{\phi}$ est l'ensemble CN défini par :

$$CN = \left\{ (x_1, x_2) \mid (1 - 5\bar{\phi})x_1 + (1 - \bar{\phi})x_2 = 1 - \bar{\phi} \right\}$$

Donc pour :

- $\bar{\phi} = 0$, on a $x_1 + x_2 = 1$: courbe de niveau 0.
- $\bar{\phi} = 1$, on a $x_1 = 0$: courbe de niveau 1.

Les lignes discontinues représentent les courbes de niveau 0 du numérateur et du dénominateur dont l'intersection est le point rotation $r = (0, 1)$. La flèche circulaire représente le gradient de la fonction fractionnaire linéaire, elle indique le sens et l'angle avec lequel se déplacent les courbes de niveaux. Tandis que p et q représentent respectivement les gradient des courbes de niveau 0 du numérateur et du dénominateur. Le point extrême $x = (0, 0)$ de valeur optimale $\phi^* = 1$ est l'intersection du domaine D avec la courbe de niveau 1 en faisant déplacer la courbe de niveau 0 autour du point r suivant le sens de rotation trigonométrique.

Soit $x^1 = (0, 0)$ une solution optimale de (3.27) dont le vecteur critères $Z(x^1) = (0, 0)$.

on note $D = \left\{ -2x_1 + x_2 \leq 0, 6x_1 + x_2 \leq 21, -2x_1 + 4x_2 \leq 6, x_1, x_2 \in \mathbb{N} \right\}$

Étape 1 : tester l'efficacité de x^1 en résolvant le problème suivant :

$$\begin{aligned}
 & \max \quad \Theta = \Psi_1 + \Psi_2 \\
 (P_{(x^1)}) \quad & t.q \quad (x_1, x_2) \in D \\
 & x_1 - 2x_2 - \Psi_1 = 0 \\
 & -x_1 + 4x_2 - \Psi_2 = 0 \\
 & \Psi_i \geq 0, i = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

à l'optimum $\Theta^* = 2$ avec les deux vecteurs suivants $\hat{x}^{11} = (2, 1)$; $\Psi^{11} = (0, 2)$ et $\hat{x}^{12} = (3, 1)$; $\Psi^{12} = (1, 1)$ donc $\Theta^* \neq 0$ c'est-à-dire que $x^1 = (0, 0)$ n'est pas efficace, poser $\Phi_{sup} = \Phi(x^1) = 1$, et aller à l'étape 2.

Étape 2 : Soit $\hat{x}^{11} = (2, 1)$ une solution optimale de (3.28), qui est efficace, le vecteur critères correspondant est $Z(\hat{x}^{11}) = (0, 2)$.

Pour trouver les solutions efficaces qui ont le même vecteur critère on résout le problème (3.29) :

$$\begin{aligned}
 (Tf_1) \quad & \max \quad \Phi = \frac{x_1 + x_2 - 1}{5x_1 + x_2 - 1} \\
 & t.q \quad (x_1, x_2) \in D \\
 & \quad \quad x_1 - 2x_2 = 0 \\
 & \quad \quad -x_1 + 4x_2 = 2
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

La solution optimale de (3.29) est $\bar{x}^1 = \hat{x}^1 = (2, 1)$ et comme $\Phi(\bar{x}^1) = 1/5 > \Phi_{inf} = -\infty$, poser $\Phi_{inf} = 1/5$ et $X_{opt} = \bar{x}^1$

$\Phi_{inf} \neq \Phi_{sup}$, aller à l'étape 3.

Étape 3 : Résoudre le problème (3.30) :

$$\begin{aligned}
 (RF_1) \quad & \max \quad \Phi = \frac{x_1 + x_2 - 1}{5x_1 + x_2 - 1} \\
 & t.q \quad x_1, x_2 \in D \\
 & \quad \quad x_1 - 2x_2 \geq y_1^1 - 3(1 - y_1^1) \quad (1) \\
 & \quad \quad -x_1 + 4x_2 \geq 3y_2^1 - 3(1 - y_2^1) \quad (2) \\
 & \quad \quad y_1^1 + y_2^1 \geq 1, \quad y_1^1, y_2^1 \in \{0, 1\}
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

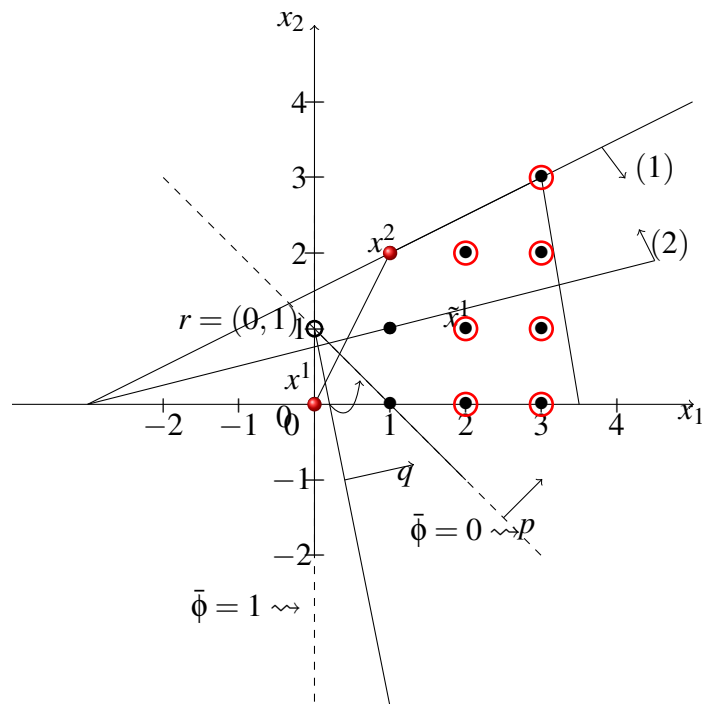


FIG. 3.8 – La région réduite D^1

Soit $x^2 = (1, 2)$, $y = (0, 1)$ une solution optimale de (3.30) et $Z(x^2) = (-3, 7)$. Comme

$\Phi(x^2) = 1/3 > \Phi_{inf}$, poser $l = l + 1 = 2$ et aller à l'étape 1.

Itération 2 :

Étape 1 : La solution x^2 est testée pour l'efficacité en résolvant le problème $P(x^2)$:

$$\begin{aligned}
 (P_{(x^2)}) \quad & \max \quad \Theta = \Psi_1 + \Psi_2 \\
 & t.q \quad (x_1, x_2) \in D \\
 & \quad \quad x_1 - 2x_2 - \Psi_1 = -3 \\
 & \quad \quad -x_1 + 4x_2 - \Psi_2 = 7 \\
 & \quad \quad \Psi_i \geq 0, i = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

à l'optimum $\Theta^* = 2$, avec $\hat{x}^2 = (3, 3)$; $\Psi = (0, 2)$; c'est-à-dire que $x^2 = (1, 2)$ n'est pas efficace, poser $\Phi_{sup} = \Phi(x^2) = \frac{1}{3}$, et aller à l'étape 2.

Étape 2 : Soit $\hat{x}^2 = (3, 3)$ une solution optimale de (3.31), qui est efficace, le vecteur critères correspondant est $Z(\hat{x}^2) = (-3, 9)$.

Pour trouver les solutions efficaces qui ont le même vecteur critère on résout le problème (3.32) :

$$\begin{aligned}
 (Tf_2) \quad & \max \quad \Phi = \frac{x_1 + x_2 - 1}{5x_1 + x_2 - 1} \\
 & t.q \quad (x_1, x_2) \in D \\
 & \quad \quad x_1 - 2x_2 = -3 \\
 & \quad \quad -x_1 + 4x_2 = 9
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

La solution optimale de (3.32) est $\tilde{x}^2 = \hat{x}^2 = (3, 3)$ et comme $\Phi(\tilde{x}^1) = 5/17 > \Phi_{inf} = 1/5$, poser $\Phi_{inf} = 5/17$ et $X_{opt} = \tilde{x}^2$

$\Phi_{inf} \neq \Phi_{sup}$, aller à l'étape 3.

Étape 3 : Résoudre le problème (3.33) :

$$\begin{aligned}
 & \max \quad \Phi = \frac{x_1 + x_2 - 1}{5x_1 + x_2 - 1} \\
 (RF_2) \quad & t.q \quad (x_1, x_2) \in D \\
 & x_1 - 2x_2 \geq y_1^1 - 3(1 - y_1^1) \quad (1) \\
 & -x_1 + 4x_2 \geq 3y_2^1 - 3(1 - y_2^1) \quad (2) \\
 & y_1^1 + y_1^1 \geq 1, \quad y_1^1, y_2^1 \in \{0, 1\} \\
 & x_1 - 2x_2 \geq -2y_1^2 - 3(1 - y_1^2) \quad (3) \\
 & -x_1 + 4x_2 \geq 10y_2^2 - 3(1 - y_2^2) \quad (4) \\
 & y_1^2 + y_2^2 \geq 1, \quad y_1^2, y_2^2 \in \{0, 1\}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

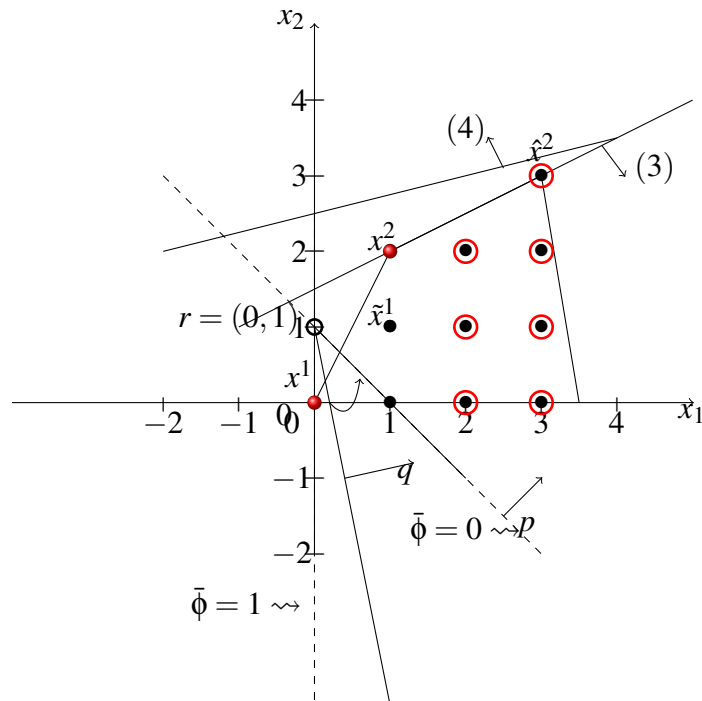


FIG. 3.9 – La région réduite D^2

Le problème (3.33) n'est pas réalisable. Terminer, donc la solution optimale de (3.26) $X_{opt} = x^2 = (3, 3)$ avec la valeur de $\Phi = 5/17$.

3.8 Une méthode d'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un MOSILP

Rappelons que le problème central que l'on veut étudier est le problème d'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces du TSMOSIPR :

$$(P_{Es}) \quad \begin{aligned} \max \quad & \Phi(x) = dx \\ \text{t.q} \quad & x \in E_{ffs} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Avec E_{ffs} est l'ensemble des solutions efficaces du TSMOSIPR. La reformulation L-Shaped du problème relaxé (Rs) nous conduit à la forme équivalente suivante (problème maître associé au problème relaxé) :

$$(P_{Rs}) \quad \begin{aligned} \max \quad & \tilde{\Phi}(x) = \Phi(x) + \theta \\ \text{t.q} \quad & x \in \tilde{D} \\ & \theta \geq \mathbf{Q}(x). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Avec

$$\tilde{D} = \{x \in D \mid \sigma^T (h_i - T_i) \leq 0; i \in 1, \dots, N\}$$

3.8.1 Algorithme

Étape 0 : Initialisation

poser $\Phi_{inf} = -\infty$, $\Phi_{sup} = +\infty$, $l = 1$, et résoudre le problème relaxé (P_{Rs}) Appliquer la méthode L-Shaped integer au problème maître 3.35

- Si (P_{Rs}) n'est pas réalisable. Alors terminer, le problème (P_{Es}) n'a pas de solution.
- Autrement, soit (x^l, θ^l) solution optimale de (P_{Rs}).

Étape 1 : Tester l'efficacité de x^l

- Si x^l est efficace, l'algorithme prend fin et $(X_{opt}, \theta^{opt}) = (x^l, \theta^l)$, $\Phi_{opt} = dx^l$.
- Sinon, poser $\Phi_{sup} = dx^l$ et aller à l'étape 2.

Étape 2 :

Soit $\hat{x}^l \in E_{ffs}$ une solution optimale (la solution retournée) du test d'efficacité dont le vecteur critères domine celui de x^l .

Dans l'espace des critères, plusieurs solutions efficaces peuvent avoir le même vecteur critères, pour cela le problème (T_{ls}) (Appliquer la méthode procédure L-Shaped Integer et résoudre le problème) est résolu pour optimiser le critère principal sur toutes les solutions équivalentes à \hat{x}^l .

$$(T_{ls}) : \max \left\{ dx + \theta \mid Cx = C\hat{x}^l, x \in \bar{D}, \theta \geq \mathbf{Q}(x) \right\}. \quad (3.36)$$

soit $(\tilde{x}^l, \tilde{\theta}^l)$ une solution optimale du (3.36).

- Si $d(\tilde{x}^l) > \Phi_{inf}$, poser $\Phi_{inf} = d(\tilde{x}^l)$ et $(X_{opt}, \theta^{opt}) = (\tilde{x}^l, \tilde{\theta}^l)$. Aller à l'étape 3.
- Sinon, $\Phi_{inf} = \Phi_{sup}$. Terminer, (X_{opt}, θ^{opt}) est la solution optimale de (P_{Es}) .

Étape 3 :

Résoudre le problème (R_{ls}) défini par

$$(R_{ls}) : \max \left\{ dx + \theta \mid x \in \bar{D} - \cup_{s=1}^l D_s, \theta \geq \mathbf{Q}(x) \right\} \quad (3.37)$$

où $D_s = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid Cx \leq C\tilde{x}^s\}$ avec $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^l$ sont les solutions optimales des problèmes $(T_{1s}), (T_{2s}), \dots, (T_{ls})$ respectivement.

- Si (3.37) n'est pas réalisable. Terminer, (X_{opt}, θ^{opt}) est une solution optimale de (P_{Es}) .
- Autrement, soit (x^{l+1}, θ^{l+1}) la solution optimale de (3.37).
 - ▷ Si $dx^{l+1} \leq \Phi_{inf}$. Terminer, (X_{opt}, θ^{opt}) est une solution optimale de (P_{Es}) .
 - ▷ Sinon, poser $l = l + 1$ et aller à l'étape 1.

Proposition 3.6 L'algorithme de recherche d'une solution optimale du problème (P_{Es}) décrit ci-dessus converge en un nombre fini d'itération, sous l'hypothèse D borné et non vide.

Preuve La convergence de la méthode vers la solution du problème (P_{Es}) est garanti par le teste d'efficacité, la méthode de décomposition de benders (L-Shaped), la méthode branche and bound et par l'hypothèse que D borné et non vide. Puisque la région des points réalisables est bornée et est tronquée à chaque itération par l'application répétées des coupes de faisabilités et d'optimalités suivie éventuellement par le branchement de la méthode de branche and bound et le théorème (3.32)(il y a un nombre fini de solutions entières). En outre, d'après le théorème de sylvia et créma la région est réduite d'une itération à l'autre jusqu'à ce qu'elle devienne vide. Au fur et a mesure d'avancer dans l'algorithme le critère principale est améliorer ou bien le demain de solution efficace est strictement réduit.

□

3.9 Exemple illustratif

Nous considérons le problème central suivant :

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \max & \Phi(x) = -2x_1 - x_2 \\ \text{t.q} & x \in \mathbf{E}_{effs} \end{array} \quad (3.38)$$

E_{effs} , l'ensemble des solutions efficace du (MOSILP).

nous présentons un problème de programmation linéaire stochastique en nombres entiers multi-objectif avec une structure semblable à celle du problème (2.20) ; $K = 2$; $n_0 = 4$; $m_0 = m = n = 3$:

Contraintes déterministes :

$$\begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 &\geq -8, \\ x_1 + x_2 &\leq 5, \\ -x_1 + x_2 &\leq 2, \end{aligned}$$

Deux scénarios ($R = 2$) affectent les trois objectifs et les contraintes stochastiques :

$$C_2(\xi_1) = (-3, 5); C_3(\xi_1) = (-8, 11);$$

$$C_2(\xi_2) = (-7, -1); C_3(\xi_2) = (4, -9);$$

$$T(\xi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad T(\xi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$h(\xi_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad h(\xi_2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$q(\xi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}^T; \quad q(\xi_2) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T;$$

$$p(\xi_1) = \frac{1}{2}; \quad p(\xi_2) = \frac{1}{2};$$

$$W(\xi) = W = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & -6 \end{pmatrix};$$

Calcul de $\mathbb{E}(Z_i(x, \xi))$, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \hat{Z}_2 = \mathbb{E}(Z_2(x, \xi)) &= \frac{1}{2}C_2(\xi_1)x_1 + \frac{1}{2}C_2(\xi_2)x_2 \\ &= \frac{1}{2}(-3, 5)x_1 + \frac{1}{2}(-7, -1)x_2 \\ &= -5x_1 + 2x_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Z}_3 = \mathbb{E}(Z_3(x, \xi)) &= \frac{1}{2}C_3(\xi_1)x_1 + \frac{1}{2}C_3(\xi_2)x_2 \\ &= \frac{1}{2}(-8, 11)x_1 + \frac{1}{2}(4, -9)x_2 \\ &= -2x_1 + x_2. \end{aligned}$$

L'adaptation de l'approche de recours donne le problème stochastique multi-objectif à 2-niveaux avec recours suivant (TSMOSIPR) :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \tilde{Z}_1 = -5x_1 + 2x_2 + \mathbf{Q}(x) \\
 \min \quad & \tilde{Z}_2 = -2x_1 + x_2 + \mathbf{Q}(x) \\
 \text{t.q} \quad & 4x_1 - 2x_2 \leq 8, \\
 & x_1 + x_2 \leq 5, \\
 & -x_1 + x_2 \leq 2, \\
 & x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \text{ entiers.}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Avec $\mathbf{Q}(x) = \frac{1}{2}\mathbf{Q}(x, \xi_1) + \frac{1}{2}\mathbf{Q}(x, \xi_2)$.

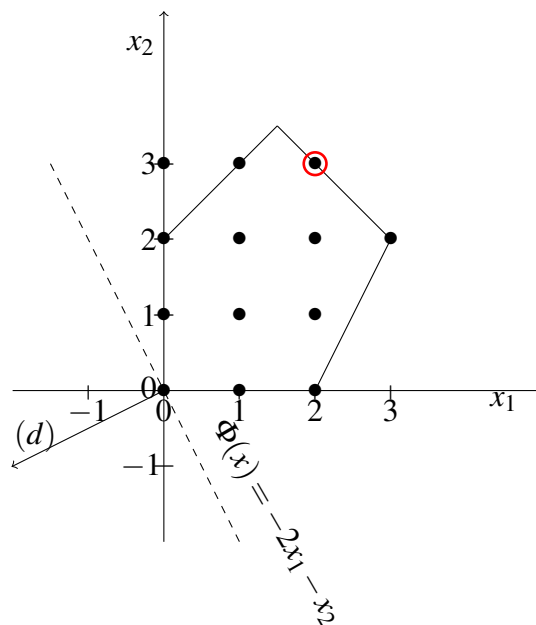


FIG. 3.10 – Region de faisabilité D et la direction de maximisation d .

Comme expliqué dans l'étape initialisation de l'algorithme, nous devons résoudre le problème relaxé (R) par L-Shaped et la méthode de séparation et évaluation ("Branche& Bound") pour déterminer une solution optimale.

Itération1 :

Étape 0 : poser $\Phi_{inf} = -\infty$, $\Phi_{sup} = +\infty$, $l = 1$, $-M_1 = -11$, $-M_2 = -4$.
Résoudre le problème relaxé :

$$\begin{aligned}
 & \max \quad \Phi(x) = -2x_1 - x_2 + \mathbf{Q}(x) \\
 (P_{(R)}) \quad & \text{t.q.} \quad 4x_1 - 2x_2 \leq 8, \\
 & \quad \quad x_1 + x_2 \leq 5, \\
 & \quad \quad -x_1 + x_2 \leq 2, \\
 & \quad \quad x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \text{ entiers.}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_B
x_3	4	-2	1	0	0	8
x_4	1	1	0	1	0	5
x_5	-1	1	0	0	1	2
$d_j - \phi_j$	-2	-1	0	0	0	0

TAB. 3.3 – Le tableau associé à la solution optimale $x = (0, 0)$

Test de faisabilité de $x = (0, 0)$;

Pour tester la faisabilité des problèmes du second niveau $\mathbf{Q}(x, \xi_1)$ et $\mathbf{Q}(x, \xi_2)$, on résout le problème pour ξ_1 et ξ_2 pour déterminer les vecteurs σ_1 et σ_2 avec :

$$\begin{aligned}
 h(\xi_1) - T(\xi_1)x &= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \\
 h(\xi_2) - T(\xi_2)x &= \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix};
 \end{aligned}$$

$ \begin{aligned} \max \quad & 3\sigma_1^1 + 5\sigma_1^2 \\ \text{t.q.} \quad & -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 + 1\sigma_1^2 \leq 1, \end{aligned} $	<p>Le maximum est atteint à</p> $ \sigma_1^T = (\sigma_1^1, \sigma_1^2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) $
--	---

$\begin{aligned} \max \quad & 6\sigma_2^1 + 1\sigma_2^2 \\ \text{t.q} \quad & -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 + 1\sigma_2^2 \leq 1, \end{aligned}$	Le maximum est atteint à $\sigma_2^T = (\sigma_2^1, \sigma_2^2) = (\frac{5}{7}, \frac{2}{7})$
--	--

$$\sigma_1^T [h(\xi_1) - T(\xi_1)x] = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{11}{3} > 0$$

$$\sigma_2^T [h(\xi_2) - T(\xi_2)x] = (\frac{5}{7}, \frac{2}{7}) \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{32}{7} > 0$$

Cela implique que le problème du second niveau $\mathbf{Q}(x, \xi_1)$, $\mathbf{Q}(x, \xi_2)$ sont pas réalisables. On génère la coupe de faisabilité de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix};$$

équivalente à $-\frac{11}{7}x_1 - \frac{8}{7}x_2 + x_6 = -\frac{32}{7}$, avec x_6 la variable d'écart introduite par la contrainte, l'ajout de cette contrainte au tableau précédent, engendre le tableau (3.4)

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_B
x_3	4	-2	1	0	0	0	8
x_4	1	1	0	1	0	0	5
x_5	-1	1	0	0	1	0	2
x_6	$-\frac{11}{7}$	$-\frac{8}{7}$	0	0	1	1	$-\frac{32}{7}$
$d_j - \phi_j$	-2	-1	0	0	0	0	0

TAB. 3.4 – Le tableau augmenté par $\frac{11}{7}x_1 + \frac{7}{8}x_2 \geq \frac{32}{7}$

En procédant par le dual du simplexe, on obtient la solution $x = (\frac{16}{19}, \frac{54}{19})$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	B
x_3	0	0	1	0	$\frac{54}{19}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{196}{19}$
x_4	0	0	0	1	$-\frac{3}{19}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{25}{19}$
x_1	1	0	0	0	$-\frac{8}{19}$	$-\frac{1}{19}$	$\frac{16}{19}$
x_2	0	1	0	0	$\frac{11}{19}$	$-\frac{1}{19}$	$\frac{54}{19}$
$d_j - \phi_j$	0	0	0	0	$-\frac{5}{19}$	$-\frac{3}{19}$	0

TAB. 3.5 – Le tableau associé à la solution $x = (\frac{16}{19}, \frac{54}{19})$

Test de faisabilité de $x = (\frac{16}{19}, \frac{54}{19})$;

Pour tester la faisabilité des problèmes du second niveau $\mathbf{Q}(x, \xi_1)$ et $\mathbf{Q}(x, \xi_2)$, on résout le problème pour ξ_1 et ξ_2 pour déterminer les vecteurs σ_1 et σ_2 avec :

$$h(\xi_1) - T(\xi_1)x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{16}{19} \\ \frac{54}{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{67}{19} \\ \frac{73}{19} \end{pmatrix} ;$$

$$h(\xi_2) - T(\xi_2)x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{16}{19} \\ \frac{54}{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{98}{19} \\ -\frac{245}{19} \end{pmatrix} ;$$

$\begin{aligned} \max \quad & -\frac{67}{19}\sigma_1^1 + \frac{73}{19}\sigma_1^2 \\ \text{t.q} \quad & -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 + 1\sigma_1^2 \leq 1, \end{aligned}$	<p>Le maximum est atteint à</p> $\sigma_1^T = (\sigma_1^1, \sigma_1^2) = (0, 0)$
---	--

$\begin{aligned} \max \quad & \frac{98}{19}\sigma_2^1 - \frac{245}{19}\sigma_2^2 \\ \text{t.q} \quad & -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 + 1\sigma_2^2 \leq 1, \end{aligned}$	<p>Le maximum est atteint à</p> $\sigma_2^T = (\sigma_2^1, \sigma_2^2) = (0, 0)$
---	--

$$\sigma_1^T [h(\xi_1) - T(\xi_1)x] = (0, 0) \begin{pmatrix} -\frac{67}{19} \\ \frac{73}{19} \end{pmatrix} = 0$$

$$\sigma_2^T [h(\xi_2) - T(\xi_2)x] = (0, 0) \begin{pmatrix} \frac{98}{19} \\ -\frac{245}{19} \end{pmatrix} = 0$$

Cela implique que la solution optimale obtenue, $x = (\frac{16}{19}, \frac{54}{19})$ engendre des problèmes du second niveau, $\mathbf{Q}(x, \xi_1)$, $\mathbf{Q}(x, \xi_2)$, réalisables.

La solution n'est pas entier, à partir de la variable x_2 , en génère deux sous-problèmes (deux branches)

$$\text{node1} : S_1 = \{x \in S_0 \mid x_2 \geq \lfloor \frac{54}{19} \rfloor + 1\}, \text{ et } x_2 \geq 3 \Rightarrow \frac{11}{19}x_5 - \frac{1}{19}x_6 \leq -\frac{3}{19}$$

$$\text{node2} : S_2 = \{x \in S_0 \mid x_2 \leq \lfloor \frac{54}{19} \rfloor\}, \text{ et } x_2 \leq 2 \Rightarrow -\frac{11}{19}x_5 + \frac{1}{19}x_6 \leq -\frac{16}{19}$$

On rajoute la contrainte $\frac{11}{19}x_5 - \frac{1}{19}x_6 + x_7 = -\frac{3}{19}$ au tableau (3.5), on obtient le tableau suivant :

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_B
x_3	0	0	1	0	$\frac{54}{19}$	$\frac{2}{19}$	0	$\frac{196}{19}$
x_4	0	0	0	1	$-\frac{3}{19}$	$\frac{2}{19}$	0	$\frac{25}{19}$
x_1	1	0	0	0	$-\frac{8}{19}$	$-\frac{1}{19}$	0	$\frac{16}{19}$
x_2	0	1	0	0	$\frac{11}{19}$	$-\frac{1}{19}$	0	$\frac{54}{19}$
x_7	0	1	0	0	$\frac{11}{19}$	$-\frac{1}{19}$	1	$-\frac{3}{19}$
$d_j - \phi_j$	0	0	0	0	$-\frac{5}{19}$	$-\frac{3}{19}$	0	0

TAB. 3.6 – Le tableau augmenté par $-\frac{11}{19}x_5 + \frac{1}{19}x_6 \geq \frac{3}{19}$

En procédant par le dual du simplexe, on obtient la solution $x = (1, 3)$ pour le S_2 (c'est-à-dire le sous-problème précédent).

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_B
x_3	0	0	1	0	$\frac{32}{19}$	0	2	10
x_4	0	0	0	1	1	0	2	1
x_1	1	0	0	0	-1	0	-1	1
x_2	0	1	0	0	0	0	-1	3
x_6	0	0	0	0	-11	1	-19	3
$d_j - \phi_j$	0	0	0	0	-2	0	-3	

TAB. 3.7 – Le tableau augmenté par $-\frac{11}{19}x_5 + \frac{1}{19}x_6 \geq \frac{3}{19}$

Test de faisabilité de $x = (1, 3)$

Testons la faisabilité des problèmes du second niveau engendrés par $x = (1, 3)$

$$h(\xi_1) - T(\xi_1)x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$h(\xi_2) - T(\xi_2)x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \end{pmatrix};$$

$\begin{aligned} \max \quad & -4\sigma_1^1 + 4\sigma_1^2 \\ \text{t.q} \quad & -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 + 1\sigma_1^2 \leq 1, \end{aligned}$	Le maximum est atteint à $\sigma_1^T = (\sigma_1^1, \sigma_1^2) = (0, 0)$
---	--

$\begin{aligned} \max \quad & 5\sigma_2^1 - 14\sigma_2^2 \\ \text{t.q} \quad & -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 + 1\sigma_2^2 \leq 1, \end{aligned}$	Le maximum est atteint à $\sigma_2^T = (\sigma_2^1, \sigma_2^2) = (0, 0)$
---	--

$$\sigma_1^T [h(\xi_1) - T(\xi_1)x] = (0, 0) \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\sigma_2^T [h(\xi_2) - T(\xi_2)x] = (0, 0) \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \end{pmatrix} = 0$$

Cela implique que la solution optimale obtenue, $x^1 = (1, 3)$, engendre des problèmes du second niveau, $\mathbf{Q}(x, \xi_1)$, $\mathbf{Q}(x, \xi_2)$, réalisables.

Test d'optimalité de $x = (1, 3)$:

Pour tester l'optimalité $x = (1, 3)$, on résout les deux problèmes suivant :

$\begin{aligned} \max \quad & -4\pi_1^1 + 4\pi_1^2 \\ \text{t.q} \quad & -2\pi_1^1 + 3\pi_1^2 \leq 1, \\ & -1\pi_1^1 + 2\pi_1^2 \leq 0, \\ & 2\pi_1^1 - 5\pi_1^2 \leq 6, \\ & 1\pi_1^1 - 6\pi_1^2 \leq 2, \end{aligned}$	Le maximum est atteint à $\pi_1^T = (\pi_1^1, \pi_1^2) = (-1, -\frac{1}{2})$
--	---

$\begin{aligned} \max \quad & 5\pi_2^1 - 14\pi_2^2 \\ \text{t.q} \quad & -2\pi_2^1 + 3\pi_2^2 \leq 5, \\ & -1\pi_2^1 + 2\pi_2^2 \leq 3, \\ & 2\pi_2^1 - 5\pi_2^2 \leq 2, \\ & 1\pi_2^1 - 6\pi_2^2 \leq 1, \end{aligned}$	Le maximum est atteint à $\pi_2^T = (\pi_2^1, \pi_2^2) = (1, 0)$
--	---

On a : $\mathbf{Q}(x) = \frac{1}{2}\mathbf{Q}(x, \xi_1) + \frac{1}{2}\mathbf{Q}(x, \xi_2)$.

où

$$\mathbf{Q}(x, \xi_1) = \pi_1^T [h(\xi_1) - T(\xi_1)x] = (-1, -\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 2$$

$$\mathbf{Q}(x, \xi_2) = \pi_2^T [h(\xi_2) - T(\xi_2)x] = (1, 0) \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \end{pmatrix} = 5$$

alors on trouve $\mathbf{Q}(x) = \frac{1}{2}(2 + 5) = \frac{7}{2}$.

Or, $\theta = -\infty < \mathbf{Q}(x) = \frac{7}{2}$, et donc, on introduit la coup d'optimalité de la forme 2.18,

$$\theta \geq \frac{1}{2}\pi_1^T [h(\xi_1) - T(\xi_1)x] + \frac{1}{2}\pi_2^T [h(\xi_2) - T(\xi_2)x], \text{ où, } \theta \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2$$

On aura, après avoir rajouté la variable d'écart t_1 : $-\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2 - \theta + t_1 = -\frac{1}{4}$, et en ré-écrivant la contrainte en fonction des variables hors base, x_5 et x_7 , on aura l'équation $-\frac{1}{2}x_5 + \frac{3}{4}x_7 - \theta + t_1 = -\frac{7}{2}$.

On introduit cette contrainte au problème, on obtient le tableau suivant.

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ	t_1	x_B
x_3	0	0	1	0	$\frac{32}{19}$	0	2	0	0	10
x_4	0	0	0	1	1	0	2	0	0	1
x_1	1	0	0	0	-1	0	-1	0	0	1
x_2	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	3
x_6	0	0	0	0	-11	1	-19	0	0	3
t_1	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	-1	1	$-\frac{7}{2}$
$d_j - \phi_j$	0	0	0	0	-2	0	-3	0	0	

TAB. 3.8 – Le tableau associé à l'ajout de la coupe $\theta \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2$

On appliquant le dual du simplexe, on obtient le tableau optimal (3.9).

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ	t_1	x_B
x_3	0	0	1	0	$\frac{32}{19}$	0	2	0	0	10
x_4	0	0	0	1	1	0	2	0	0	1
x_1	1	0	0	0	-1	0	-1	0	0	1
x_2	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	3
x_6	0	0	0	0	-11	1	-19	0	0	3
t_1	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	1	-1	$\frac{7}{2}$
$d_j - \phi_j$	0	0	0	0	-2	0	-3	0	0	

TAB. 3.9 – Le tableau optimal associé à l'ajout de la coupe $\theta \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2$

$\theta^1 = \frac{7}{2}$. Alors $x = (1, 3)$ est la solution de base réalisable optimale dans la region de faisabilité courante du problème (p_R) , avec $Z(x^1) = (1, 1)$. On la note x^1 .

après avoir résoudre le problème S_1 , on obtient la solution $x = (\frac{304}{209}, 2)$, engendre des problèmes du second niveau, $\mathbf{Q}(x, \xi_1)$, $\mathbf{Q}(x, \xi_2)$, réalisables.

La solution n'est pas entier, a partir de la variable x_1 , en génère deux sous-problèmes (deux branches).

Au fur et à mesure d'avancer dans l'algorithme, dans la résolution les deux sous problème, on se trouve dans l'un des critères d'arete.

Étape 1 : Tester l'efficacité de x^1 .

tester l'efficacité de x^1 en résolvant le problème suivant :

$$\begin{aligned}
 & \max \quad \Theta = \Psi_1 + \Psi_2 \\
 (P_{(x^0)}) \quad & \text{t.q. } x_1, x_2 \in \tilde{D} \\
 & -5x_1 + 2x_2 - \Psi_1 = 1 \\
 & -2x_1 + x_2 - \Psi_2 = 1 \\
 & \Psi_i \geq 0, i = 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

à l'optimum $\varphi^* = 17$ avec $\hat{x}^1 = (3, 2)$; c'est-à-dire que $x^1 = (1, 3)$ n'est pas efficace,

Testons la faisabilité des problèmes du second niveau engendrés par $x = (3, 2)$

$$h(\xi_1) - T(\xi_1)x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix};$$

$$h(\xi_2) - T(\xi_2)x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -16 \end{pmatrix};$$

$ \begin{aligned} \max \quad & -4\sigma_1^1 + 9\sigma_1^2 \\ \text{t.q.} \quad & -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 + 1\sigma_1^2 \leq 1, \end{aligned} $	Le maximum est atteint à $\sigma_1^T = (\sigma_1^1, \sigma_1^2) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
---	--

$ \begin{aligned} \max \quad & 3\sigma_2^1 - 16\sigma_2^2 \\ \text{t.q.} \quad & -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 + 1\sigma_2^2 \leq 1, \end{aligned} $	Le maximum est atteint à $\sigma_2^T = (\sigma_2^1, \sigma_2^2) = (0, 0)$
---	--

$$\sigma_1^T [h(\xi_1) - T(\xi_1)x] = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} > 0$$

$$\sigma_2^T [h(\xi_2) - T(\xi_2)x] = (0, 0) \begin{pmatrix} 3 \\ -16 \end{pmatrix} = 0$$

Cela implique que le problème du second niveau $\mathbf{Q}(x, \xi_1)$ n'est pas réalisables. On génère la coupe de faisabilité

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix};$$

équivalente à $-\frac{5}{3}x_2 \leq -\frac{11}{3}$, l'ajout de cette contrainte au tableau optimale du problème précédant, nous donne la solution $x = (\frac{14}{5}, \frac{11}{5})$;

après avoir tester la faisabilité de $x = (\frac{14}{5}, \frac{11}{5})$, on trouve que cette solution , engendre des problèmes du second niveau, $\mathbf{Q}(x, \xi_1)$, $\mathbf{Q}(x, \xi_2)$, réalisable.

La solution n'est pas entier, on génère deux branches, qui nous donne la solution $x = (2, 3)$

Test de faisabilité de $x = (2, 3)$

Testons la faisabilité des problèmes du second niveau engendrés par $x = (2, 3)$

$$h(\xi_1) - T(\xi_1)x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix};$$

$$h(\xi_2) - T(\xi_2)x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -17 \end{pmatrix};$$

$\begin{aligned} \max \quad & -5\sigma_1^1 + 6\sigma_1^2 \\ \text{t.q} \quad & -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 + 1\sigma_1^2 \leq 1, \end{aligned}$	Le maximum est atteint à $\sigma_1^T = (\sigma_1^1, \sigma_1^2) = (0, 0)$
---	--

$\begin{aligned} \max \quad & 4\sigma_2^1 - 17\sigma_2^2 \\ \text{t.q} \quad & -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 + 1\sigma_2^2 \leq 1, \end{aligned}$	Le maximum est atteint à $\sigma_2^T = (\sigma_2^1, \sigma_2^2) = (0, 0)$
---	--

$$\sigma_1^T [h(\xi_1) - T(\xi_1)x] = (0, 0) \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\sigma_2^T [h(\xi_2) - T(\xi_2)x] = (0, 0) \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \end{pmatrix} = 0$$

Cela implique que la solution optimale obtenue, $x = (2, 3)$, engendre des problèmes du second niveau, $\mathbf{Q}(x, \xi_1)$, $\mathbf{Q}(x, \xi_2)$, réalisables.

Test d'optimalité de $x = (2, 3)$:

Pour tester l'optimalité $x = (2, 3)$, on résout les deux problèmes suivant :

$\begin{aligned} \max \quad & -5\pi_1^1 + 6\pi_1^2 \\ \text{t.q} \quad & -2\pi_1^1 + 3\pi_1^2 \leq 1, \\ & -1\pi_1^1 + 2\pi_1^2 \leq 0, \\ & 2\pi_1^1 - 5\pi_1^2 \leq 6, \\ & 1\pi_1^1 - 6\pi_1^2 \leq 2, \end{aligned}$	Le maximum est atteint à $\pi_1^T = (\pi_1^1, \pi_1^2) = (-1, -\frac{1}{2})$
--	---

$\begin{aligned} \max \quad & 4\pi_2^1 - 17\pi_2^2 \\ \text{t.q} \quad & -2\pi_2^1 + 3\pi_2^2 \leq 5, \\ & -1\pi_2^1 + 2\pi_2^2 \leq 3, \\ & 2\pi_2^1 - 5\pi_2^2 \leq 2, \\ & 1\pi_2^1 - 6\pi_2^2 \leq 1, \end{aligned}$	Le maximum est atteint à $\pi_2^T = (\pi_2^1, \pi_2^2) = (1, 0)$
--	---

On a : $\mathbf{Q}(x) = \frac{1}{2}\mathbf{Q}(x, \xi_1) + \frac{1}{2}\mathbf{Q}(x, \xi_2)$.

où

$$\mathbf{Q}(x, \xi_1) = \pi_1^T [h(\xi_1) - T(\xi_1)x] = (-1, -\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix} = 2$$

$$\mathbf{Q}(x, \xi_2) = \pi_2^T [h(\xi_2) - T(\xi_2)x] = (1, 0) \begin{pmatrix} 4 \\ -17 \end{pmatrix} = 4$$

alors on trouve $\mathbf{Q}(x) = \frac{1}{2}(2 + 4) = 3$.

poser $\Phi_{sup} = \Phi(x^1) = -5$ avec une pénalité $\theta = 7/2$, et aller à l'étape 2.

Étape 2 : Soit $\hat{x}^1 = (2, 3)$ une solution optimale du problème du teste d'efficacité de x^1 , qui est efficace, le vecteur critères correspondant est $Z(\hat{x}^1) = (4, 1)$ avec une pénalité $\theta = 3$.

Résoudre le problème (Ts_1) tel que $((Ts_1) : \max\{dx + \theta | Cx = C\hat{x}^1, x \in \tilde{D}\})$ pour trouver les solutions efficaces qui ont le même vecteur critère) :

La solution optimale de (Ts_1) est $\tilde{x}^1 = \hat{x}^1 = (2, 3)$ et comme $\Phi(\tilde{x}^1) = -7 > \Phi_{inf} = -\infty$, poser $\Phi_{inf} = -7$ et $X_{opt} = \tilde{x}^1$

Étape 3 : Résoudre le problème (RS_1) tel que $((RS_1) : \max\{dx + \theta | x \in \tilde{D} - \cup_{s=1}^l D_s\})$ où $D_s = \{x \in \mathbb{Z}^n | Cx \leq C\tilde{x}^1\}$; avec \tilde{x}^1 est la solution optimale de problème (Ts_1) :

$$\begin{aligned}
 & \max \quad \Phi = -2x_1 - x_2 \\
 (RS_1) \quad & t.q \quad x_1, x_2 \in \tilde{D} \\
 & 5x_1 - 2x_2 \geq 5y_1^1 - 11(1 - y_1^1) \quad (1) \\
 & 2x_1 - x_2 \geq 2y_2^1 - 4(1 - y_2^1) \quad (2) \\
 & y_1^1 + y_2^1 \geq 1, \quad y_1^1, y_2^1 \in \{0, 1\}
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Le problème n'admet pas de solution réalisable pour que les problèmes du second niveau $\mathbf{Q}(x, \xi_1)$, $\mathbf{Q}(x, \xi_2)$ soient réalisables. Terminer.

En conclusion, on termine la résolution du problème (P) avec la solution optimale $x_{opt} = (2, 3)$ avec une pénalité $\theta = 3$, $(Z_1, Z_2) = (4, 1)$ le vecteur critère associé et la valeur de la fonction objectif $\phi_{opt} = -7$.

Conclusion générale

Les outils de l'optimisation sont importants parce qu'ils peuvent donner de l'aide indispensable aux processus de décision. L'optimisation multi-objectif est sans doute un axe de recherche primordial pour les scientifiques et les ingénieurs, non seulement à cause de la nature multi-objectif de la plupart des problèmes réels, mais aussi parce que de nombreuses questions restent ouvertes dans ce domaine.

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés aux problèmes de programmation linéaire multi-objectifs en nombres entiers. L'intérêt de tels problèmes résulte du fait que dans de nombreuses situations réelles modélisables par la programmation mathématique, les variables de décision ne peuvent prendre que des valeurs entières. Le décideur doit réaliser une analyse de l'ensemble des solutions efficaces du problème pour sélectionner les solutions efficaces préférées, et cela s'avère impossible lorsque cet ensemble est large.

Dans le cas où les préférences du décideur sont modélisées, explicitement, par une fonction linéaire ou fractionnaire linéaire, alors le problème du choix des solutions efficaces peut être énoncé sous forme d'un problème d'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces. Ce type de problèmes est en principe très difficile à résoudre vu que son ensemble d'admissibilité (l'ensemble des solutions efficaces) n'est pas convexe.

Une complication additionnelle est superposée au problème par l'introduction de l'aspect stochastique, les paramètres du problème sont incertains, modélisables par un vecteur aléatoire, induisant un problème d'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème linéaire stochastique multi-objectifs (MOSLP).

Nous avons commencé ce travail par introduire les notions de base concernant l'optimisation multi-objectifs et après nous avons réalisé une description détaillée sur l'optimisation multi-objectifs discrète (linéaire et fractionnaire linéaire) et quelques méthodes de résolution existantes dans la littérature dans le premier chapitre. Nous avons réalisé une description sur l'optimisation stochastique avec une méthode de décomposition de Benders dans le deuxième chapitre.

Dans le troisième chapitre, est consacré à l'optimisation d'une fonction fractionnaire linéaire sur l'ensemble de solution efficace d'un problème MOILP d'une part, pour résoudre ce problème, nous avons proposé une méthode qui généralise la méthode de Jorge dans le cas où la fonction principale est fractionnaire linéaire ; et de l'autre part sur l'optimisation d'une fonction

linéaire sur l'ensemble de solution efficace d'un problème MOSILP, une méthode qui intègre la méthode Branch&Bound dans la méthode L-shaped et cette dernière dans la méthode de Jorge. Pour convertir le MOSILP en un problème multi-objectifs déterministe, on a utilisé le modèle de recours à 2-niveaux, sous l'hypothèse que le décideur peut mener des actions correctives une fois un scénario est réalisé.

Ce travail ouvre des perspectives de recherche nombreuses et intéressantes, parmi lesquelles nous privilégions les suivantes :

L'optimisation d'un critère linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème multi-objectifs non linéaire. Nous pensons plus particulièrement au cas quadratique ; le cas où le critère principal est quadratique et le problème secondaire est un problème MOILP, le cas où le critère principal est quadratique et les critères du problème multi-objectifs sont quadratiques.

L'optimisation d'un critère linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème stochastique multi-objectifs non linéaire. Nous pensons plus particulièrement au cas fractionnaire ; le cas où le critère principal est linéaire et le problème secondaire est un problème MOSILP, le cas où le critère principal est fractionnaire et les critères du problème multi-objectifs sont fractionnaire stochastique. Le cas où le critère principal fractionnaire stochastique et le problème secondaire est un problème MOILP.

Dans certaines applications, le décideur n'a pas souvent la possibilité de faire recours dans le futur, après l'occurrence d'un scénario, dans ce cas, nous devons faire recours à une autre approche de la programmation stochastique pour convertir le problème stochastique à un problème déterministe, à savoir le modèle CCP. Supposons qu'on est dans les conditions d'adaptation de cette approche, nous suggérons d'introduire cette approche, à la place du modèle de recours que nous avons utilisé, pour résoudre le problème(P_E).

Bibliographie

- [Abbas et Moulai 99] M. Abbas and M. Moulai, Solving multiple objective integer linear programming, *Journal of the Italian Operations Research Society (Ricerca Operativa)*29,pp. 15-38, (1999).
- [Moulai et Abbas02] M. Moulai and M. Abbas, Integer linear fractional programming with multiple objective, *Journal of the Italian Operations Research Society*, vol 1 N°1. 103-104, pp. 15-38, (2002).
- [Steuer 1985] R. Steuer, *Multiple Criteria Optimization : Theory, Computation and Applications*. John Wiley & Sons, New-York (1985).
- [Abbas et Chaabane 02] M. Abbas and D. Chaabane, An algorithm for solving multiple objective integer linear programming problem, *RAIRO Operations Research* 36,pp. 351-364,(2002).
- [Malhotra 92] R. Gupta and R. Malhotra, Multi-criteria integer linear programming problem, *Cahiers de CERO* 34, (1992).
- [Klein et Hannan 82] D. Klein and E. Hannan, An algorithm for multiple objective integer linear programming problem, *European Journal of Operational Research* 9, pp. 378-385, (1982).
- [Jesús M. Jorge 2008] J.M.Jorge, An algorithm for Optimizing a linear function over an Integer Efficient Set, *European Journal of Operational Research*, (2008).
- [Van Slyke et Wets 69] R. Van Slyke, R. J-B. Wets, L-shaped linear programs with applications to optimal control and stochastic programming, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 17, 638- 663, 1969.
- [Isermann 74] H. Isermann, Proper efficiency and the linear vector maximization problem, *Operations Research* 22, 189-191, 1974
- [Ecker et Kouada 78] J.G. Ecker, I.A. Kouada, Finding All Efficient Extreme Points for Multiobjective Linear Programs, *Mathematical Programming* 14, 249-261, 1978.
- [Ecker et Kouada 75] J.G. Ecker, I.A. Kouada, Finding Efficient Points for Multi-objective Linear Programs, *Mathematical Programming* 8, 375–377, 1975.
- [Vincke 1988] P. Vincke, *L'Aide Multicritère à la Décision : Statistique et mathématique appliquées*. Ellipses, Paris, 1988.

- [Ritzel 1994] B. Ritzel and al, Using Genetic Algorithms to Solve a Multiple Objective Groundwater Pollution Containment Problem : *Water 30*, Resources Research P.1589-1603, 1994.
- [Van Veldhuizen99] David A. Van Veldhuizen, Multiobjective, Evolutionary Algorithms : *Classification, Analyses and New Innovation*, Air force Intitute of Technology United States, 1999.
- [Coello 1996] A. Carlos. C. Coelli. An Empirical Sludy of Evolutionary Techniques for multiobjective Optimization in Engineering *Ph.D.Thesis, Departement of Computer Science, design, Tutane University New orleans*, 1996.
- [Charnes 1961] A.Charnes and N.Cooper, management models and Industrial applications on linear Programming, *Vol. 1, Joho Wiley, newyork*, 1961.
- [Charnes 58] A. Charnes, W.W. Cooper, and G.H. Symonds. Cost horizons and certainty equivalents : An approach to stochastic programming of heating oil. *Management Science*, 4 :183–195, 1958.
- [Beale55] E.M.L. Beale. On minimizing a convex function subject to linear inequalities. *J. Roy. Statist. Soc.*, 17, 1955.
- [Fourman 1985] Fourman. Compaction of Symbolic Layout using Genetic Algorithms. : *In Genetic Algorithms Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms*, 1985.
- [Vincke 89] Vanderpooten D. and Vincke Ph, “ *Description and Analysis of Some Representative Interactive Multicriteria Procedures*”, *Mathematical and Computer Modeling*, (1989), pp. 1221-1238.
- [Land 60] A.H. Land and A.G. Doig, *An automatic method for solving discrete programming problems*, *Econometrica* 28, pp. 497-520, (1960).
- [Gomory 58] R.E. Gomory, *Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs*, *Bulletin of the AMS* 64, pp. 275-278, (1958).
- [Crema et Sylva 03] A. Crema and J. Sylva, *A method for finding the set of non-dominated vectors for multiple objective integer linear programs*, *European Journal of Operational Research*, in press, (2003).
- [Teghem 86] J. Teghem, P.L. Kunsch, Interactive Method for Multiobjective Integer Linear Pro- gramming, in : G. Fandel et al. (Eds.), *Large Scale Modelling and Interactive Decision Analysis*, Springer Verlag,(1986).
- [J.Teghem 86] J. Teghem, P. Kunsch, *A Survey of Techniques to Determine the Efficient Solutions to Multi-Objective Integer Linear Programming*, *Asia Pacific Journal of Operations Research* 3 (1986).
- [Pareto1896] Vilfredo pareto,*Cours d'économie politique*, Vol.1 et .2, F. Rouge Lausanne , 1896.
- [Geoffrion68] A.M.Geoffrion,Proper Efficiency and the theory of Vector Maximiza- tion, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* ,22, pp.618-630,(1968).

- [Chankong and Haimes 83] Chankong, V. and Haimes, Y. Y., 1983, *Multiobjective Decision Making Theory and Methodology*, North-Holland, New York.
- [K. Deb2001] K. Deb. *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*. New York : John wiley, 2001.
- [Kung et al 75] H.T. Kung, F. Luccio, and F.P.Preparata. On finding the maxima of a set of vectors. *Jornal of the Assiciationfor Computing Machinery*, 22(4) :469-476, 1975.
- [Birge] John R. Birge. *Stochastic programming computation and applications*. *INFORMS J. Comput.*, 9(2) :111–133, 1997.
- [Willem Haneveld and Maarten] Willem K. Klein Haneveld and Maarten H. van der Vlerk. *Stochastic integer programming : general models and algorithms*. *Ann. Oper. Res.*, 85 :39–57, 1999. *Stochastic programming. State of the art, 1998* (Vancouver, BC).
- [Birge et Louveaux] John R. Birge and François Louveaux. *Introduction to stochastic programming*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [Kall et Wallace 94] P. Kall and S.W. Wallace. *Stochastic Programming*. Wiley, Chichester etc., 1994.
- [Andrzej Darinka et Alexander] Andrzej Ruszczyński, Darinka Dentcheva and Alexander Shapiro, editors. *Lecteur On Stochastic Programming, Modeling and Theory*, society for industrial and applied mathematics and the mathematical programming society. 2009.
- [Sahinidis] N. Sahinidis. *Optimization under uncertainty : state-of-the-art and opportunities*. Technical report, *Computers and Chemical Engineering*, 2003.
- [Kall et Mayer] P.Kall and J.Mayer. *Stochastic Linear Programming*. Springer, New York, 2005.
- [J.F. Benders62] J.F. Benders. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische Mathematik*, 4 :238–252, 1962.
- [R.J.B Wets66] R.J.B Wets. Programming under uncertainty : the equivalent convex program. *SIAM Journal on Applied Mathematic*, 14 :89–105, 1966.
- [D. Chaabane06] M. Abbas and D. Chaabane, Optimizing a Linear Function Over an Integer Efficient Set, *European Journal of Operations Research*, 174, pp. 1140-1161, (2006).
- [H.P. Benson84] H.P. Benson, Optimization over the efficient set, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 98, 562–580, 1984.
- [Ben Abdelaziz 92] F. Ben Abdelaziz, L'efficacité en programmation multi-objectifs stochastique, Ph.D. Thesis, Université de Laval, Québec, 1992.
- [Ben Abdelaziz et al. 97] F. Ben Abdelaziz, P. Lang, R. Nadeau, Distributional unanimity multiobjective stochastic linear programming, *Multicriteria Analysis : Proceedings of the XIth International Conference on MCDM*, Springer-Verlag, Berlin, 225–236, 1997.

- [Ben Abdelaziz et al. 99] F. Ben Abdelaziz, P. Lang, R. Nadeau, Dominance and efficiency in multicriteria decision under uncertainty, *Theory and Decision* 47, 191–211, 1999.
- [Abbas et Bellahcene 06] M. Abbas, F. Bellahcene, Cutting plane method for multiple objective stochastic integer linear programming, *European Journal of Operational Research* 168, 967–984, 2006.
- [Teghem 90] J. Teghem, STRANGE-MOMIX : An interactive method for mixed integer linear programming, in : R. Slowinski, J. Teghem (Eds.), *Stochastic Versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming Under Uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 101–115, 1990.
- [Moulaï et Amrouche 06] M. Moulaï, S. Amrouche, Optimisation linéaire stochastique multiobjectifs en nombres entiers, *Actes COSI'06*, 404-420, 2006.
- [Abbas et Bellahcene 06] M. Abbas, F. Bellahcene, Cutting plane method for multiple objective stochastic integer linear programming, *European Journal of Operational Research* 168, 967–984, 2006.
- [Klein et al] W.K. Klein Haneveld, L. Stougie, and M.H. van der Vlerk. Stochastic integer programming with simple recourse. Research Memorandum 455, Institute of Economic Research, University of Groningen, 1991
- [Roger and Wets] R.T. Rockafellar and Roger J.-B. Wets. A dual solution procedure for quadratic stochastic programs with simple recourse. In *Numerical methods (Caracas, 1982)*, volume 1005 of *Lecture Notes in Math.*, pages 252–265. Springer, Berlin, 1983.
- [Roger J.-B. Wets] Roger J.-B. Wets. Solving stochastic programs with simple recourse. *Stochastics*, 10(3-4) :219–242, 1983.
- [W.T. Ziemba] W.T. Ziemba. Stochastic programs with simple recourse. In P.L. Hammer and G. Zoutendijk, editors, *Mathematical Programming in Theory and Practice*, pages 213–273. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1974.
- [D.J. White82] D.J. White, *Optimality and Efficiency*, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
- [Stancu-Minasian et Tigan84] I. Stancu-Minasian, S. Tigan, The vectorial minimum risk problem, *Proceedings of the Colloquium on Approximation and Optimization*, Cluj-Napoca, 321–328, 1984.
- [Stancu-Minasian84] I.M. Stancu-Minasian, *Stochastic Programming with Multiple Objective Functions*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1984.
- [Dantzig55] G.B. Dantzig. Linear programming under uncertainty. *Management Science*, 1 :197–206, 1955.

- [Urli et Nadeau90] B. Urli, R. Nadeau, Multiobjective stochastic linear programming with incomplete information : A general methodology, In : R. Slowinski, J. Teghem (Eds.), 131–161, 1990.
- [Teghem et al. 86] J. Teghem, D. Dufrane, M. Thauvoys, P.L. Kunsch, STRANGE : Interactive method for multiobjective linear programming under uncertainty, *European Journal of Operational Research* 26 (1), 65–82, 1986.
- [Goicoechea et al.76] A. Goicoechea, L. Dukstein, R.L. Bulfin, Multiobjective stochastic programming the PROTRADE-method, *Operation Research Society of America*, 1976.
- [Cambini86] A. Cambini and L. Martein, A modified version of Martos’s algorithm for the linear fractional problem, *Methods of Oper. Res.* 53, pp. 33-44, (1986).
- [Choo84] Choo, E.-U., “ Proper efficiency and the linear fractional vector maximum problem”, *Operational Research* 32/1 (1984), pp. 216-220.
- [Ecker et Song94] J. G. Ecker, H.G. Song, Optimizing a Linear Function over an Efficient Set, *Journal of Optimization Theory and Applications* 83 (3),pp 541-563,(1994).
- [Y.Yamamoto2001] Y.Yamamoto, *Optimization over the Efficient Set, Overview*,Kluwer Academic Publishers, (2001).
- [S. Sayin2000] S. Sayin, Optimizing over the efficient set using a top-down search of faces, *Operations Research* 48, 65–72, 2000.
- [Isermann et Steuer87] H. Isermann, R. E. Steuer, Computational Experience Concerning Payoff Tables and Minimum Criterion Values over the Efficient Set, *European Journal of Operational Research* 33, 91-97, 1987.
- [Philip72] J. Philip. Algorithms for the vector maximization problem, *Mathematical Programming* 2, 207–229, 1972.
- [Nguyen92] N.C. Nguyen, An algorithm for optimizing a linear function over the Integer Efficient Set, *Konrad-Zuse-Zentrum fur Informationstechnik. Berlin*, (1992).
- [Moulaï et Ghazli2008] M. Moulaï et K.Ghazli. Optimisation continue d’une fonction linéaire sur l’ensemble des solutions efficaces d’un problème linéaire stochastique multi-objectifs.Mémoire Magister en Mathématiques USTHB. 2008