N° d'ordre : 39/2012- M/MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Équations Différentielles dans le Champ Complexe

Par : BEZZIOU Mohamed

THÈME

Intégrabilité des équations différentielles dans le champ complexe

Soutenu publiquement, le 24/06/2012, devant le jury composé de :

Mme.	**A. LAOUDI**	Maître de conférences/A	à l'U.S.T.H.B.	Présidente.
Mr.	**DJ. BEHLOUL**	Maître de conférences/A	à l'U.S.T.H.B.	Directeur de Mémoire.
Mr.	**K. BETINA**	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Examinateur.
Mr.	**M-S. RESAOUI**	Maître de conférences/A	à l'U.S.T.H.B.	Examinateur.

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur de thèse, Mr Djilali BAHLOUL pour le sujet qu'il m'a proposé et d'accepter de diriger mon travail avec beaucoup de disponibilité et son encadrement tout au long ces deux années. Grâce à lui, j'ai beaucoup avancé dans mon sujet de travail, je n'oublierai jamais sa précieuse remarque concernant la méthode de travail, ainsi que sa correction de thèse.

J'adresse mes sincères remerciements à Mme Aini LAOUDI de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma thèse.

Je tiens également à remercier vivement le professeur K. BETINA et Mr Mohamed Salem RESAOUI, d'avoir accepté d'examiner et d'évaluer mon travail.

Tout d'abord, un grand merci aux personnes à qui je dois tout : ma famille, mes chers parents qui m'encouragent toujours et me données la volenté pour suivre mes études avec grand succès et supériorité.

Enfin et avant tout, le grand et le vrai merci à Dieu qui m'a donné le moral et la vie pour accomplir mon projet.

Intégrabilité des équations différentielles dans le champ complexe

Résumé

Dans ce mémoire, nous présentons certains aspects de la théorie algébrique d'intégration explicite des systèmes d'équations différentielles polynomialles de la forme: $\frac{dx}{dt} = P(x,y)$ *et* $\frac{dy}{dt} = Q(x,y)$, *où* $P(x,y)$, $Q(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$.

Nous exposons les méthodes classiques d'intégrations de Darbous, Darboux-Jouanolou, Liouville et Lie et on discutera de leur efficacité. un grand nombre de propriétés du système différentiel polynomial sont induites par le champ de vecteurs $X = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$, ou par la 1-forme polynomiale $\omega(x,y) = P(x,y)dy - Q(x,y)dx$ qui sont associés au système différentiel précédent dans $\mathbb{C}^2$.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une intégrale première, sont basées sur le calcul différentiel, la théorie des corps et certains concepts de base de l'algèbre différentielle, et malgré les idées fortes en géométrie, on a choisi des approches qui ne dépendent que de l'algèbre linéaire et certaines propriétés des dérivations, et de la théorie des groupes continus.

Mots-clés : système différentiel polynomial, champ de vecteurs, intégrale première, courbe algébrique invariante, corps différentiel, générateurs infinitésimals, groupe d'homologie.

Table des matières

Introduction

Un système différentiel polynomial est un système de la forme: $\dfrac{dx}{dt} = P(x,y)\ et\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y)$ où les variables x, y et t sont complexes, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ sont des polynômes à coefficients complexes. Nous désignons par $d = \max\{\deg P(x,y), \deg Q(x,y)\}$ le degré du système polynomial.

La théorie d'intégrabilité algébrique est classique, en 1878, Darboux $[Dar78]$ a montré comment on peut construire les facteurs intégrants et les intégrales premières.

La recherche des solutions d'une équation différentielle dans le champ complexe dans le cadre de l'algèbre différentielle, la méthode de Darboux, consiste à chercher des intégrales premières de champs de vecteurs du plan , en particulier on verra que cette méthode donnne des résultats intéressants pour les systèmes différentielles. et les champs de vecteurs polynomiaux possédant suffisamment de courbes algébriques invariantes.

En particulier, il a prouvé que si un champ de vecteurs de degré d est au moins $\dfrac{d\,(d+1)}{2}+1$ courbes algébriques invariantes, alors il a une intégrale première. La théorie d'intégrabilité de Darboux, le théorème 2.7.1 indique que le système polynomial $\dfrac{dx}{dt} = P(x,y)\ et\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y)$ de degré d avec la divergence $div\,(P,Q)$, qui a au moins p courbes algébriques invariantes $C_i = \{f_i\,(x,y) = 0\}$ avec des cofacteurs K_i pour $i \in \{1,2,...,p\}$ satisfaisant la relation $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i K_i + \rho div\,(P,Q) = 0\ pour\ \lambda_i \in \mathbb{C}$ non tous nuls et $\rho \in \{0,1\}$, il existe une intégrale première $(si\ \ \rho = 0)$ ou un facteur intégrant $(si\ \ \rho = 1)$ Jouanolou $[Jou79]$ a montré que si le nombre des courbes algébriques invariantes est au moins $\dfrac{d\,(d+1)}{2}+2$, alors l'intégrale première est rationnelle, et par conséquent toutes les trajéctoires du champ de vecteurs sont contenues dans les courbes algébriques. nous présentons aussi les extensions récentes de la théorie d'intégrabilité de Darboux, notons ici les facteurs exponentieles. en particulier, le système différentiel polynomiel qui admet p courbes algébriques invariantes irréductibles $C_i = \{f_i(x,y) = 0\}$ de cofacteurs K_i pour $i \in \{1,2,...,p\}$, q facteurs exponentiels $\exp\left(\dfrac{g_j}{h_j}\right)$ de cofacteurs L_j pour $j \in \{1,2,...,q\}$, satisfaisant la relation $\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i K_i + \sum\limits_{j=1}^{q}\mu_j L_j + \rho div(p,Q) + s = 0$ *pour* $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ non tous nuls et $\rho \in \{0,1\}$ et $s \in \mathbb{C}$, on obtient une intégrale première (*si* $\rho = 0$) ou un facteur intégrant (*si* $\rho = 1$), alors l'existence des courbes algébriques invariantes est le point clé pour l'application de la théorie d'intégrabilité de Darboux.

Au cours de la période 1833 - 1841, Josephe Liouville a présenté une théorie de l'intégration en terme finis, il a déterminé la forme d'une intégrale de la fonction algébrique, qui peut être exprimer par les opérations de l'analyse élémentaire, efféctuant un nombre limité de fois .

Nous caractérisons les équations différentielles polynomiales dans le champ complexe, qui peuvent êtres intégrées par les méthodes du calcul diffférentiel. La première étape est de formaliser la phrase ci-dessus, et le milieu naturel pour en faire la théorie des corps différentiable, on peut dire que le résultat que nous présentons, proviennent de la théorie des corps différentiables, ainsi que la caratérisation des nombres constructibles.

Nous sommes intéressés par la déscription d'une 1-forme polynomiale qui peut être intégrée à travers une suite finie d'opérations, on parle aussi de la fonction de Liouville qui peut être écrite à partir des fonctions rationnelles et à l'aide d'une suite finie d'opérations du type :

1- Somme et produit.

2- La différentiation.

3- L'intégration des 1-formes fermées.

4- Exponentiation.

5- Solutions des équations algébriques.

Pour définir la notion de fonction de Liouville, plus précisèment nous allons utiliser certains concepts de base de l'algèbre différentielle.

En 1835, Joseph Liouville a prouvé que si le système d'équations différentielles a une intégrale première élémentaire, définie par des formules explicites à partir des fonctions usuelles (fonctions algébriques, exponentielle et logarithme) est de la forme suivante $\omega_0(x,y) + \sum c_i \log \omega_i(x,y)$ où les c_i sont des nombres complexe et les ω_i sont des fonctions algébriques de variables x, y. et pour cela il introduit le concept de corps différentiel qui permet d'aborder le problème d'un point de vue totalement algébrique. Prelle et Singer $[PS83]$ ont aussi montré que si un champ de vecteurs polynomial a une intégrale première Liouvilienne, alors cette intégrale peut être calculer à l'aide de courbes algébriques invariantes (pour les intégrales premières liouvilienne, la connaissance des facteurs exponentiels du système est également nécessaire), le résultat de Jouanolou s'ensuit que pour un système polynomial étant donné de degré maximum, ses courbes algébriques invariantes sont bornées, car soit il a un nombre fini $p \prec [d(d+1)/2] + 2$ de courbes algébriques invariantes, ou toutes ses trajectoires sont contenues dans des courbes algébriques et le système admet une intégrale rationnelle.

La théorie des groupes de symétrie de Lie des équations différentielles a été développé par S. Lie $[Lie93]$. Ces groupes sont des transformations des variables dépendantes et indépendantes des équations différentielles, jouent un rôle très important pour construire les solutions, Plusieurs applications de groupes de Lie dans cette théorie comme: réduction de l'ordre des équations différentielles, la construction de solutions invariantes.

Ainsi, il existe un certain nombre de méthodes d'intégration, chacune adaptée à une seule classe paticulière, cette masse des connaissances a été coordonnée d'une manière très frappante par la théorie des groupes continus.

Nous examinons la corrélation entre les symétries et l'intégrabilité, et nous cherchons une approche élémentaire qui est basée sur le crochet de Lie entre les champs de vecteurs.

On présente dans $\mathbb{C}^2$ les équations polynomiales sous des formes d'intégrales premières admettant les symétries infinitésimales.

Chapitre 1

Généralités

Considérons un système d'équations différentielles de la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases} \tag{1.1}$$

où $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont des polynômes à deux variables complexes.

On dit qu'une fonction holomorphe:

$$\phi : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$$

$$t \mapsto (\phi_1(t), \phi_2(t))$$

est une solution du système d'équations différentielles (1.1) si pour tout

$$t \in U : \phi'(t) = (Po\phi(t), Qo\phi(t))$$

c'est-à-dire :

$$(\phi_1'(t), \phi_2'(t)) = (P(\phi_1(t), \phi_2(t)), Q(\phi_1(t), \phi_2(t))$$

Théorème 1.0.1 *Considérons un système d'équations différentielles* (1.1).

Alors on a:

a) pour tout $p \in \mathbb{C}^2$ il existe un nombre réel positif r_p et une fonction holomorphe

$$\phi_p : D(o, r_p) \to \mathbb{C}^2$$

telle que:

$$\phi_p(0) = p \quad et \quad \phi'_p(t) = (Po\phi_p(t), Qo\phi_p(t))$$

où ϕ_p *est une solution de système(1.1) qui passe par le point* p.

b) Soit $U \subset \mathbb{C}$ *un ouvert contenant l'origine, si la fonction holomorphe* $\Psi : U \to \mathbb{C}^2$ *est une solution de système(1.1) .*

Alors: $\phi_p(0) = p$ *et* $\Psi_{|V} = \phi_{p|V}$ *où* $V = U \cap D(o, r_p)$.

1.1 Champ de vecteurs et dérivations

Définition 1.1.1 *Soit* $\mathbb{C}(x, y)$ *un corps des fonctions rationnelles à deux variables, alors le champ de vecteurs* X *est définie par:*

$$X : \mathbb{C}(x, y) \to \mathbb{C}(x, y)$$
$$f \mapsto X(f) = P(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

Où $P(x, y)$ *et* $Q(x, y)$ *sont des polynômes complexes donnés dans le système d'équations différentielles(1.1) .*

Lemme 1.1.1 *L'application* X *est* $\mathbb{C}$*-linéaire et satisfait la règle de Leibniz c'est-à-dire:*

$$X(\lambda f + \mu g) = \lambda.X(f) + \mu.X(g)$$

et

$$X(f.g) = f.X(g) + g.X(f)$$

Où f *et* g *sont des fonctions holomorphes,* λ *et* μ *sont des nombres complexes.*

Démonstration : Soient $f, g \in \mathbb{C}(x, y)$, $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des polynômes à deux variables complexes et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

1) On montre la linéarité de X.

On a

$$\begin{aligned}
X(\lambda f+\mu g) &= P(x,y)\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial y}\\
&= P(x,y)\left[\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x}+\frac{\partial(\mu g)}{\partial x}\right]+Q(x,y)\left[\frac{\partial(\lambda f)}{\partial y}+\frac{\partial(\mu g)}{\partial y}\right]\\
&= P(x,y)\left[\lambda\frac{\partial(f)}{\partial x}+\mu\frac{\partial(g)}{\partial x}\right]+Q(x,y)\left[\lambda\frac{\partial(f)}{\partial y}+\mu\frac{\partial(g)}{\partial y}\right]\\
&= \lambda\left[P(x,y)\frac{\partial(f)}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial(f)}{\partial y}\right]+\mu\left[P(x,y)\frac{\partial(f)}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial(f)}{\partial y}\right]\\
&= \lambda.X(f)+\mu.X(g).
\end{aligned}$$

Donc l'application X est $\mathbb{C}$-linéaire.

2) On montre que l'application X satisfait la règle de Leibniz.

On a:

$$\begin{aligned}
X(f\times g) &= P(x,y)\frac{\partial(f.g)}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial(f.g)}{\partial y}\\
&= P(x,y)\left[f\frac{\partial(g)}{\partial x}+g\frac{\partial(f)}{\partial x}\right]+Q(x,y)\left[f\frac{\partial(g)}{\partial y}+g\frac{\partial(f)}{\partial y}\right]\\
&= f.\left[P(x,y)\frac{\partial(g)}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial(g)}{\partial y}\right]+g.\left[P(x,y)\frac{\partial(g)}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial(g)}{\partial y}\right]\\
&= f.X(g)+g.X(f).
\end{aligned}$$

Alors X satisfait la règle de Leibniz. ■

Définition 1.1.2 *(dérivations).*

La dérivation dans $\mathbb{C}(x,y)$ est une application $D:\mathbb{C}(x,y)\to\mathbb{C}(x,y)$, $\mathbb{C}$-linéaire et satisfait la règle de Leibniz.

- Tout champ de vecteurs polynomial X peut être considéré comme une dérivation.
- La dérivation définie par $D:\mathbb{C}(x,y)\to\mathbb{C}(x,y)$ est un champ de vecteurs rationnel de la forme $D(x)\frac{\partial}{\partial x}+D(y)\frac{\partial}{\partial y}$.
- Le champ de vecteurs D est polynomial si et seulement si $D(\mathbb{C}[x,y])\subset\mathbb{C}[x,y]$.
- Si

$$X=P(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\ \textit{et}\ \ \omega=P(x,y)dy-Q(x,y)dx,$$

alors pour toute fonction rationnelle $f\in\mathbb{C}(x,y)$ on a:

$$\begin{aligned}
\omega \wedge df &= (pdy - Qdx) \wedge \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) \\
&= p \frac{\partial f}{\partial x} dy \wedge dx - Q \frac{\partial f}{\partial y} dx \wedge dy \\
&= - \left(p \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\
&= -X(f)\, dx \wedge dy
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
d\omega &= d\left(P(x,y)dy - Q(x,y)dx\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(Pdy - Qdx\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(Pdy - Qdx\right) dy \\
&= \frac{\partial P}{\partial x} dy \wedge dx - \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \\
&= - \left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\
&= -div(X)\, dx \wedge dy, \quad \text{où} \quad div(X) = \frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}
\end{aligned}$$

c'est la divergence du champ de vecteurs X associé au système d'équations (1.1) .

1.2 Intégrales premières

Malgré le théorème 1.0.1 qui garanti l'éxistence d'une solution locale pour le système (1.1) qui passe par le point $p \in \mathbb{C}^2$.
Dans la plus part des cas nous ne connaissons pas la nature des solutions, mais dans certaines situations, il est possible de trouver des intégrales premières du système (1.1) qui nous permettent de comprendre le comportement qualitatif des solutions de cette équation différentielle.

Définition 1.2.1 *Soit $U \subset \mathbb{C}^2$ un ouvert et $I : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante.*
On dit que la fonction I est une intégrale première sur U pour le système d'équations différentielles(1.1) si I est constante pour toutes solutions $(x(t), y(t))$ du (1.1) ,

c'est-à-dire:

$$\forall t \in \mathbb{C} : I(x(t), y(t)) = c^{te}.$$

Exemple 1.2.1 *(équation de Lotka-Voltera).*

Considérons le système d'équations différentielles de Lotka-Voltera:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases} \tag{1.2}$$

où a, b, c et d sont des nombres complexes, nous affirmons que pour tout ouvert simplement connexe U contenue dans $\mathbb{C}^2 - \{x.y = 0\}$ et la fonction I définie par:

$$I(x(t), y(t)) = dx + by - c \log x - a \log y$$

est une intégrale première du système d'équations différentielles (1.2) ,et si la fonction holomorphe $\phi = (\phi_1, \phi_2) : V \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ est une solution du système d'équations différentielles (1.2).

On a alors :

$$\phi'(t) = (a\phi_1(t) - b\phi_1(t).\phi_2(t) \quad , \quad - c\phi_2(t) + d\phi_1(t).\phi_2(t)).$$

danc:

$$\frac{d}{dt}(Io\phi)(t) = dI(\phi(t)).\phi'(t)$$

d'où:

$$\left(d - \frac{c}{\phi_1}\right)(a\phi_1 - b\phi_1.\phi_2) + \left(b - \frac{a}{\phi_2}\right)(-c\phi_2 + d\phi_1.\phi_2) = 0.$$

par conséquent, la fonction I est constante pour toutes les solutions du système (1.2).
Danc I est une intégrale première du système d'équations différentielles (1.2).

Proposition 1.2.1 *La fonction holomorphe $I : U \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ est une intégrale première du système d'équations différentielles* (1.1) *si et seulement si*

$$P(x, y)\frac{\partial I(x, y)}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial I(x, y)}{\partial y} = 0.$$

pour tous $(x(t), y(t)) \in U$.

Démonstration : Soit $(x(t), (y(t))) \in U$ une solution du (1.1), la fonction holomorphe I est une intégrale du (1.1) si et seulement si, $I(x(t), y(t)) = c$ pour tout $t \in \mathbb{C}$.

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} I(x(t), y(t)) &= \frac{\partial}{\partial x} I(x(t), y(t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} I(x(t), y(t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \frac{\partial c}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= 0, \end{aligned}$$

alors $X(I) = 0$. ■

On dit que le système d'équations différentielles (1.1) est intégrable sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}^2$ s'il existe une intégrale première I dans U.

Exemple 1.2.2 *(équation de Lotka-Voltera).*

Soit la fonction holomorphe I définie sur un ouvert simplement connexe U contenue dans $\mathbb{C}^2 - \{x.y = 0\}$ par:

$$I(x(t), y(t)) = dx + by - c \log x - a \log y$$

pour montrer que I est une intégrale première, il suffit de montrer que $X(I) = 0$.

On a:

$$\begin{aligned} X(I) &= (ax - bxy) \frac{\partial I}{\partial x} + (-cy + dxy) \frac{\partial I}{\partial y} \\ &= (ax - bxy)\left(d - \frac{c}{x}\right) + (-cy + dxy)\left(b - \frac{a}{y}\right) \\ &= adx - bdxy - ac + bcy - bcy + bdxy + ac - adx \\ &= 0 \end{aligned}$$

alors $X(I) = 0$, donc I est une intégrale première du système d'équations différentielles (1.2)*.*

Définition 1.2.2 *Soit $\omega = P(x, y)\, dy - Q(x, y)\, dx$ une 1-forme polynomiale associée au système d'équations différentilles* (1.1) *dans $\mathbb{C}^2$, et $I : U \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante.*

On dit que la fonction Iest une intégrale première pour (1.1) *si et seulement si $\omega \wedge dI = 0$.*

Exemple 1.2.3 *(équation de Lotka-Voltera).*

On a

$$I(x(t), y(t)) = dx + by - c\log x - a\log y,$$

et la 1-forme polynomiale associée au système d'équations différentielles (1.2) *est:*

$$\omega = (ax - bxy)\,dy - (-cy + dxy)\,dx$$

on a

$$\begin{aligned} dI &= \frac{\partial I}{\partial x}dx + \frac{\partial I}{\partial y}dy \\ &= \left(d - \frac{c}{x}\right)dx + \left(b - \frac{a}{y}\right)dy \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \omega \wedge dI &= ((ax - bxy)\,dy - (-cy + dxy)\,dx) \wedge \left(\left(d - \frac{c}{x}\right)dx + \left(b - \frac{a}{y}\right)dy\right) \\ &= (ax - bxy)\left(d - \frac{c}{x}\right)dy \wedge dx + (-cy + dxy)\left(b - \frac{a}{y}\right)dy \wedge dx \\ &= (adx - bdxy - ac + bcy)\,dy \wedge dx + (-bcy + bdxy + ac - adx)\,dy \wedge dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\omega \wedge dI = 0$, *et par conséquent la fonction* I *est une intégrale première de l'équation*(1.2).

Exemple 1.2.4 *considérons le système d'équations différentielles*(1.1) *tel que:*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}$$

la 1-forme différentielle

$$\omega = P(x,y)dy - Q(x,y)dx$$

est fermée,c'est-à-dire $d\omega = 0$, *par conséquent,on a la fonction suivante:*

$$I(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \omega$$

par l'intégration de ω *au longue de chemin reliant le point initiale arbitraire* (x_0, y_0) *par le point* (x, y) *est bien définie.(puisque* ω *est fermée et* $\mathbb{C}^2$*est simplement connexe), tel que* $\omega = dI$, *alors* I*est une intégrale première pour le système d'équations différentielles* (1.1).

1.3 Facteurs intégrants

Définition 1.3.1 *Soit* $U \subset \mathbb{C}^2$*un ouvert et* $\mu : U \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe non constante.*

On dit que μ *est un facteur intégrant du système d'équations différentielles(1.1) , si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée.*

(1) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(x,y\right)p(x,y)\right] = -\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(x,y\right)Q(x,y)\right].$

(2) $div\left(\mu X\right) = 0$.

(3) $X\left(\mu\right) = -div\left(X\right)\mu.$

Remarque 1.3.1 *On montre l'équivalence des trois conditions précidentes.*

a) *On montre que* $(1) \Leftrightarrow (2)$ *.*

On a:

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial\left(\mu\left(x,y\right)P(x,y)\right)}{\partial x} = -\frac{\partial\left(\mu\left(x,y\right)Q(x,y)\right)}{\partial y} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\partial\left(\mu\left(x,y\right)P(x,y)\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\mu\left(x,y\right)Q(x,y)\right)}{\partial y} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad div\left(\mu X\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (2).
\end{aligned}$$

b) *On montre que* $(2) \Leftrightarrow (3)$ *.*

On a:

$$\begin{aligned}
(2) \quad &\Leftrightarrow \quad div\left(\mu X\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\partial\left(\mu\left(x,y\right)P\left(x,y\right)\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\mu\left(x,y\right)Q(x,y)\right)}{\partial y} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \mu\left(x,y\right)\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + P(x,y)\frac{\partial\mu\left(x,y\right)}{\partial x} + \mu\left(x,y\right)\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} + Q(x,y)\frac{\partial\mu\left(x,y\right)}{\partial y} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad P(x,y)\frac{\partial\mu\left(x,y\right)}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial\mu\left(x,y\right)}{\partial y} = -\mu\left(x,y\right)\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} - \mu\left(x,y\right)\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} \\
&\Leftrightarrow \quad X\left(\mu\right) = -\mu\left(x,y\right)\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad X\left(\mu\right) = -\mu\left(x,y\right)div\left(X\right) \\
&\Leftrightarrow \quad (3).
\end{aligned}$$

c) On montre que (3) $\Leftrightarrow$ (1).

On a:

$$
\begin{aligned}
(3) \quad \Leftrightarrow & \quad X(\mu) = -\mu(x,y)\, div\,(X) \\
\Leftrightarrow & \quad X(\mu) = -\mu(x,y) \left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} \right) \\
\Leftrightarrow & \quad P(x,y) \frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x} + Q(x,y) \frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y} = -\mu(x,y) \frac{\partial P(x,y)}{\partial x} - \mu(x,y) \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} \\
\Leftrightarrow & \quad \mu(x,y) \frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + P(x,y) \frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x} + \mu(x,y) \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} + Q(x,y) \frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y} = 0 \\
\Leftrightarrow & \quad \frac{\partial(\mu(x,y)\, P(x,y))}{\partial x} + \frac{\partial(\mu(x,y)\, Q(x,y))}{\partial y} = 0 \\
\Leftrightarrow & \quad \frac{\partial(\mu(x,y)\, P(x,y))}{\partial x} = -\frac{\partial(\mu(x,y)\, Q(x,y))}{\partial y} \\
\Leftrightarrow & \quad (1).
\end{aligned}
$$

- L'intégrale première I associée au facteur intégrant μ est donnée par:

$$I(x,y) = \int \mu(x,y)\, p(x,y) dy + f(x) \ .$$

où f est choisie, et l'intégrale première I satisfait la condition:

$$\frac{\partial I(x,y)}{\partial x} = -\mu(x,y)\, Q(x,y).$$

Aussi on a:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = \mu(x,y)\, P(x,y) = \dfrac{\partial I(x,y)}{\partial y} \\
\dfrac{dy}{dt} = \mu(x,y)\, Q(x,y) = -\dfrac{\partial I(x,y)}{\partial x}
\end{cases}
\tag{1.3}
$$

- Si I est une intégrale première du système d'équations différentielles (1.1) , alors on peut toujours trouver des facteurs intégrant μ à l'aide de (1.3).
- D'après la définition de facteur intégrant μ, on a $X(\mu) = -div\,(X)\,\mu$, implique que $\{\mu(x,y) = 0\}$ est une courbe invariante (en général non algébrique) pour le champ de vecteurs X de cofacteur $-div\,(X)$.

Proposition 1.3.1 *Si le système d'équations différentielles (1.1) a deux facteurs intégrants* μ_1*et* μ_2 *sur un ouvert* $U \subset \mathbb{C}^2$*, et dans l'ouvert* $U - \{\mu_2(x,y) = 0\}$ *la fonction* $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}$ *est une intégrale première.*

Démonstration : $\mu_1$et μ_2 sont des facteurs intégrants tels que $X(\mu_1) = -\mu_1.div(X)$ et $X(\mu_2) = -\mu_2.div(X)$, alors:

$$\begin{aligned} X\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right) &= \frac{\mu_2.X(\mu_1) - \mu_1.X(\mu_2)}{\mu_2^2} \\ &= \frac{-\mu_1\mu_2.div(X) + \mu_1\mu_2.div(X)}{\mu_2^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ est une intégrale première du système d'équations différentielles (1.1) . ∎

Lemme 1.3.1 *Si μ est un facteur intégrant du système d'équations différentielles (1.1) , alors la 1-forme différentielle $\mu.\omega$ est fermée ($d(\mu.\omega) = 0$), de plus l'intégrale première du système d'équations différentielles (1.1) est donnée par:*

$$I = \int \mu.\omega.$$

Démonstration : μ est un facteur intégrant pour le système (1.1) , donc:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\mu(x,y)P(x,y)] = -\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x,y)Q(x,y)].$$

alors:

$$\begin{aligned} d(\mu.\omega) &= \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)\omega(x,y))dx + \frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)\omega(x,y))dy \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)P(x,y)dy - \mu(x,y)Q(x,y)dx)dx \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)P(x,y)dy - \mu(x,y)Q(x,y)dx)dy \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y)P(x,y)dy \wedge dx + \frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)Q(x,y)dy \wedge dx \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y)P(x,y) + \frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)Q(x,y)\right)dy \wedge dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc $d(\mu.\omega) = 0$, c'est-à-dire $\mu.\omega$ est fermée.

De plus on a

$$\begin{aligned} \omega \wedge (\mu.\omega) &= (p(x,y)dy - Q(x,y)dx) \wedge (\mu.p(x,y)dy - \mu.Q(x,y)dx) \\ &= -\mu.p(x,y).Q(x,y)dy \wedge dx - \mu.p(x,y).Q(x,y)dx \wedge dy \\ &= (\mu.p(x,y).Q(x,y) - \mu.p(x,y).Q(x,y))dx \wedge dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\omega \wedge dI = \omega \wedge (\mu.\omega) = 0,$

par conséquent $I = \int \mu.\omega$, est une intégrale première de (1.1) . ■

Exemple 1.3.1 *:(équations différentielles linéaires).*

Considérons l'équation différentielle:$\dfrac{dy}{dx} = a(x)y + b(x),\ a, b \in \mathbb{C}(x),$ *on peut associer à cette équation la 1-forme rationnelle* ω *telle que:*

$$\omega = dy - (a(x)y + b(x))dx.$$

Lorsque on détermine un facteur intégrant μ *qui ne dépend que de la variable* x, *il est nécessaire que* μ *vérifie:*

$$\begin{aligned}
0 &= d(\mu.\omega) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\mu.\omega)dx + \frac{\partial}{\partial y}(\mu.\omega)dy \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\mu dy - \mu a(x)ydx + \mu b(x)dx)dx + \frac{\partial}{\partial y}(\mu dy - \mu a(x)ydx + \mu b(x)dx)dy \\
&= \frac{\partial \mu}{\partial x}dy \wedge dx - \mu a(x)dx \wedge dy \\
&= -\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu.a(x)\right) dx \wedge dy \\
&= \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu.a(x),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu} = -a(x)$$

donc:

$$\mu(x) = \exp\left(-\int a(x)dx\right)$$

et telle que $d(\mu.\omega) = 0,$ *alors* μ *est un facteur intégrant de* ω.

1.4 Solutions algébriques

Définition 1.4.1 *Soit* $\phi : V \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ *une solution du système d'équations différentielles (1.1) .*

On dit que ϕ *est une solution algébrique, s'il existe un polynôme non nul* $f \in \mathbb{C}[x, y]$

tel que:

$$\forall t \in V \;\; : \;\; f\left(\phi\left(t\right)\right) = 0.$$

1.5 Courbes algébriques invariantes

Définition 1.5.1 *Soit $f \in \mathbb{C}\left[x, y\right]$, on dit que la courbe algébrique $c = \{f(x, y) = 0\}$ est invariante pour le système d'équations différentielles(1.1) , si pour toute solution $\phi : D(0, r) \rightarrow \mathbb{C}^2$ de (1.1) satisfait:*

$$\forall t \in D(0, r) : f\left(\phi\left(0\right)\right) = 0 \quad et \quad f\left(\phi\left(t\right)\right) = 0.$$

Proposition 1.5.1 *Soit $f \in \mathbb{C}\left[x, y\right]$ un polynôme réduit, la courbe algébrique $c = \{f(x, y) = 0\}$ est invariante pour le système d'équations différentielles(1.1) si et seulement si, il existe une 2-forme polynomiale Θ_f telle que:*

$$\omega \wedge df = f.\Theta_f \tag{1.4}$$

Démonstration : On suppose qu'il existe une 2-forme polynomiale Θ_f telle que:

$$\omega \wedge df = f.\Theta_f$$

et soit $\phi : D(0, r) \rightarrow \mathbb{C}^2$une solution du système d'équations différentielles(1.1) telle que

$$f\left(\phi\left(0\right)\right) = 0$$

et

$$\omega\left(\phi\left(t\right)\right) \wedge df\left(\phi\left(t\right)\right) = -\left(fo\phi\right)'\left(t\right) dx \wedge dy$$

et d'après la définition (1.4.1)on a:

$$\forall t \in D(0, r) \quad : \left(fo\phi\right)'\left(t\right) = 0.$$

alors ϕ est une solution algébrique de (1.4) et $c = \{f(x, y) = 0\}$est une courbe algébrique invariante.

<u>La réciproque</u>:

Si $c = \{f(x, y) = 0\}$ est une courbe algébrique invariante, on a pour toute solution

$\phi : V \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ contenue dans $c = \{f(x,y) = 0\}$ qui vérifie:

$$\forall t \in V : (\omega \wedge df)(\phi(t)) = 0$$

alors:

$$(\omega \wedge df)_{|c=\{f(x,y)=0\}} = 0.$$

(nous utilisons le théorème des zéros de Hilbert: si $h \in \mathbb{C}[x,y]$ telle que:

$$h_{|c=\{f(x,y)=0\}} = 0$$

alors il existe $g \in \mathbb{C}[x,y]$ qui vérifie $h = f.g$), danc f divise $\omega \wedge df$. ■

• Nous pouvons intèrpréter géométriquement la proposition précédente comme suit : le polynôme f, a travers les courbes de la forme $\{f(x,y) = c \ , c \in \mathbb{C}\}$ définit une décomposition de $\mathbb{C}^2$ par des courbes algébriques.

L'éspace tangent de la courbe qui passe par le point $p \in \mathbb{C}^2$coïncide avec le noyau de $df\,(p)$.

On peut voir alors le lieu des zéros de $\omega\wedge\, df$, qui coïncide avec les tangentes entre les solutions du système d'équations différentielles(1.1) et les courbes algébriques de polynôme f.

Dans ces conditions la proposition nous dit que la courbe algébrique $c = \{f(x,y) = 0\ \}$ est invariante pour le système(1.1) si et seulement si $c = \{f(x,y) = 0\ \}$ est contenu dans le lieu des tangentes entre la solution de(1.1) , et la décomposition de $\mathbb{C}^2$ induit par f.

Lemme 1.5.1 *Soit $f \in \mathbb{C}[x,y]$ un polynôme méromorphe.*

Si la décomposition de f en polynômes irréductibles est donnée par:

$$f = \prod_{i=1}^{k} {f_i}^{n_i}$$

alors

$$\frac{df}{f} = \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{df_i}{f_i}$$

et de plus $\dfrac{df}{f}$ est fermée, c'est-à-dire $d\left(\dfrac{df}{f}\right) = 0$.

Démonstration : Par récurrence,

a) Pour $i=1$, on a $f={f_1}^{n_1}$ implique que $df=n_1 f^{n_1-1}df_1$, par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{df}{f} &= \frac{d\left({f_1}^{n_1}\right)}{{f_1}^{n_1}}=\frac{n_1{f_1}^{n_1-1}df_1}{{f_1}^{n_1-1}\times f_1}\\ &= n_1\frac{df_1}{f_1}\end{aligned}$$

b) On suppose qu'on a:

$$\frac{df}{f}=\frac{d\left(\prod_{i=1}^{k-1}{f_i}^{n_i}\right)}{\prod_{i=1}^{k-1}{f_i}^{n_i}}=\sum_{i=1}^{k-1}n_i\frac{df_i}{f_i}\ ,\ pour\quad i=k-1$$

et on montre que:

$$\frac{df}{f}=\sum_{i=1}^{k}n_i\frac{df_i}{f_i}\ ,\quad pour\qquad i=k.$$

On a:

$$\begin{aligned}\frac{df}{f} &= \frac{d\left(\prod_{i=1}^{k}{f_i}^{n_i}\right)}{\prod_{i=1}^{k}{f_i}^{n_i}}=\frac{d\left(\prod_{i=1}^{k-1}{f_i}^{n_i}.{f_k}^{n_k}\right)}{\prod_{i=1}^{k}{f_i}^{n_i}}=\frac{d\left(\prod_{i=1}^{k-1}{f_i}^{n_i}\right).{f_k}^{n_k}+\prod_{i=1}^{k-1}{f_i}^{n_i}.d\left({f_k}^{n_k}\right)}{\prod_{i=1}^{k-1}{f_i}^{n_i}\times{f_k}^{n_k}}\\ &= \frac{d\left(\prod_{i=1}^{k-1}{f_i}^{n_i}\right)}{\prod_{i=1}^{k-1}{f_i}^{n_i}}+\frac{d\left({f_k}^{n_k}\right)}{{f_k}^{n_k}}=\sum_{i=1}^{k-1}n_i\frac{df_i}{f_i}+n_k\frac{df_k}{f_k}=\sum_{i=1}^{k}n_i\frac{df_i}{f_i}.\end{aligned}$$

Alors le principe de récurrence est vérifié pour tout $i\succeq 1$.
De plus on a $d\left(\frac{df}{f}\right)=\frac{f.d\left(df\right)-df\wedge df}{f^2}=0.$ c'est-à-dire $\frac{df}{f}$ est fermée. ■

Proposition 1.5.2 *Soit $f\in\mathbb{C}\left[x,y\right]$ un polynôme (pas nécessairement riduit) ω une 1-forme polynomiale.*

a) Si la décomposition de f en polynômes irréductibles est donnée par:

$$f=\prod_{i=1}^{k}{f_i}^{n_i}$$

alors:

$$\omega \wedge \frac{df}{f} = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\omega \wedge \frac{df_i}{f_i} \right)$$

b) La courbe algébriqsue définie par $c = \{ f(x,y) = 0 \}$ *est invariante si et seulement si* $\omega \wedge \dfrac{df}{f}$ *est une 2-forme polynomiale.*

Démonstration : :a) On a $f = \prod_{i=1}^{k} f_i^{\,n_i}$ et d'après le lemme 1.5.1 , $\dfrac{df}{f} = \sum_{i=1}^{k} n_i \dfrac{df_i}{f_i}$ implique que

$$\begin{aligned} \omega \wedge \frac{df}{f} &= \omega \wedge \sum_{i=1}^{k} n_i \frac{df_i}{f_i} \\ &= \sum_{i=1}^{k} n_i . \omega \wedge \frac{df_i}{f_i}. \end{aligned}$$

b) On applique la proposition 1.5.1, on obtient le résultat. ■

Chapitre 2

La méthode d'intégration de Darboux

Comme nous avons vu dans le chapitre précédent, le problème est de déterminer une intégrale première pour le système d'équations différentielles (1.1) , est équivalent à trouver une fonction f telle que: $\omega \wedge df = 0$ où $\omega = P(x,y)\,dy - Q(x,y)\,dx$.

Dans ce chapitre, nous allons faire une exposition de la stratégie utilisée par Darboux pour résoudre ce problème.

2.1 Détermination des intégrales premières

Considérons la 1-forme polynomiale $\omega = P(x,y)\,dy - Q(x,y)\,dx$, si ω admet une courbe algébrique invariante donnée implicitement par $c = \{f(x,y) = 0\}$, alors comme nous avons vu dans le chapitre précédent $\omega \wedge \dfrac{df}{f} = \Theta_f$ où Θ_f est une

2-forme polynomiale.

Définition 2.1.1 *:(Cofacteur d'une courbe algébrique)*

Soit $c = \{f(x,y) = 0\}$ une courbe algébrique invariante par

$$\omega = P(x,y)\,dy - Q(x,y)\,dx.$$

On dit que la 2-forme polynomiale Θ_f est un cofacteur de f , et si ω est de degré d, alors les cofacteurs associés à toutes les courbes algébriques invariantes ont un degré inférieur ou égal à $d-1$.

Proposition 2.1.1 *Soit $\omega = P(x,y)\,dy - Q(x,y)\,dx$ une 1-forme polynomiale dans $\mathbb{C}^2$.*

S'il existe des courbes algébriques invariantes notées $c_1 = \{f_1(x,y)=0\}, ..., c_n = \{f_n(x,y)=0\}$ et des nombres complexes (non tous nuls) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tels que:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Theta_{f_i} = 0$$

alors ω admet une intégrale première de la forme:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log f_i$$

Démonstration : *Considérons la 1-forme méromorphe η donnée par:*

$$\eta = \alpha_1 \frac{df_1}{f_1} + \alpha_2 \frac{df_2}{f_2} + ... + \alpha_n \frac{df_n}{f_n}$$

Il est claire d'après le lemme 1.5.1 *que η est fermée, c'est-à-dire $d\ \eta = 0$,*

et η aussi vérifie

$$\omega \wedge \eta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\omega \wedge \frac{df_i}{f_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Theta_{f_i} = 0 \tag{2.1}$$

ainsi la fonction multiforme:

$$I = \int \eta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log f_i$$

telle que

$$\omega \wedge dI = \omega \wedge \eta = 0$$

on conclut que ω admet la fonction I comme intégrale première.

Plus précisèment, en prenant un ouvert U simplement connexe contenue dans le complémentaire de $\{f_1.f_2...f_n = 0\}$, nous obtenons que toute détèrmination de I dans U est constante le long des solutions de ω contenues dans U. ■

Corollaire 2.1.1 *Soit $\omega = P(x,y)\,dy - Q(x,y)\,dx$ une 1-forme polynomiale de degré d dans $\mathbb{C}^2$.*

Si ω admet $\dfrac{d(d+1)}{2} + 1$ courbes algébriques invariantes et irréductibles.

Alors ω admet une intégrale première I de la forme:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log f_i.$$

Démonstration : Supposons qu'il existe $n = \dfrac{d\,(d+1)}{2} + 1$ courbes algébriques invariantes et irréductibles de ω données par des polynômes $f_1, f_2, ..., f_n$ .les cofacteurs associés aux courbes algébriques invariantes sont des 2-formes différentielles de degré inférieur ou égal à $d-1$.

Comme le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des 2-formes différentielles de degré inférieur ou égal à $d-1$ est de dimension $\dfrac{d\,(d+1)}{2}$.

Les cofacteurs associés aux courbes algébriques invariantes $c_i = \{f_i(x,y) = 0\}$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ sont linéairement dépendants.

Par conséquent il existe des nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Theta_{f_i} = 0 \tag{2.2}$$

et d'après la proposition précédente, on a:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log f_i.$$

où I est une intégrale première pour ω. ■

Exemple 2.1.1 *Supposons que $\omega = \alpha x dy + \beta y dx$, où α et β sont des nombres complexes non nuls.*

Les courbes algébriques définies par:$\{x = 0\}$ et $\{y = 0\}$ sont invariantes. par conséquent on peut calculer aussi ses cofacteurs. alors le cofacteur associé à x est donné par:

$$\Theta_x = \omega \wedge \frac{dx}{x} = -\alpha dx \wedge dy$$

et le cofacteur associé à y est donné par:

$$\Theta_y = \omega \wedge \frac{dy}{y} = \beta dx \wedge dy.$$

on a:

$$\beta \Theta_x + \alpha \Theta_y = 0$$

danc la fonction

$$I = \beta \log x + \alpha \log y$$

est une intégrale première pour ω.

2.2 Polynômes de Darboux

Définition 2.2.1 *Soit $f \in \mathbb{C}[x,y]$ un polynôme non nul, on dit que f est un polynôme de Darboux pour le champ de vecteurs X s'il existe $g \in \mathbb{C}[x,y]$ tel que: $X(f) = g.f$, c'est-à-dire: f divise $X(f)$.*

le polynôme g est le cofacteur de f, noté par $L_f = g$.

Définition 2.2.2 *Soit $f \in \mathbb{C}[x,y]$ non nul, si la courbe algébrique $c = \{f(x,y) = 0\}$ est invariante pour le champ de vecteurs X de degré d , et $\dfrac{X(f)}{f}$ est un polynôme de degré au plus $d-1$. dans ce cas on dit que $c = \{f(x,y) = 0\}$ est une courbe algébrique invariante pour X et $L_f = \dfrac{X(f)}{f}$ est sans cofacteur.*

La courbe algébrique $c = \{f(x,y) = 0\}$ est dite irréductible si elle n'a qu'une seule composante, et réduite si tous les composantes sont de multiplicité 1, c'est-à-dire la courbe $c = \{f(x,y) = 0\}$ est irréductible et réduite si et seulement si f est irréductible comme un polynôme.

Lemme 2.2.1 *Soient $f, g \in \mathbb{C}[x,y]$, premiers entre eux, alors $f.g$ est un polynôme de Darboux si et seulement si f et g sont des polynômes de Darboux.*
De plus $L_{f.g} = L_f + L_g$.

Démonstration : Supposons que $f.g$ est un polynôme de Darboux, on a donc

$$X(f.g) = L_{f.g}.f.g.$$

et d'après la règle de Leibniz:

$$X(f.g) = f.X(g) + g.X(f),$$

Alors :

$$f.X(g) + g.X(f) = L_{f.g}.f.g \tag{2.3}$$

f et g sont premiers entre eux, c'est-à-dire: f divise $X(f)$ et g divise $X(g)$, donc f et g sont des polynômes de Darboux.

<u>La réciproque:</u>

Si f et g sont des polynômes de Darboux, on peut écrire $X(f) = L_f.f$
ce qui implique $X(f).g = L_f.fg$ et $X(g) = L_g.g$ d'ou $X(g).f = L_g.gf$
Alors:

$$\begin{aligned} X(f).g + X(g).f &= L_f.fg + L_g.gf \\ &= (L_f + L_g).fg \\ &= X(f.g). \end{aligned}$$

on remarque que $f.g$ divise $X(f.g)$, alors $f.g$ est un polynôme de Darboux.
Si on pose $X(f) = L_f.f$ et $X(g) = L_g.g$, on remplace danx l'équation
(2.3) on obtient

$$\begin{aligned} L_{fg}.fg &= g.L_f.f + f.L_g.g \\ &= (L_f + L_g).fg \end{aligned}$$

donc $L_{f.g} = L_f + L_g$. ∎

Lemme 2.2.2 *Soit $f \in \mathbb{C}[x,y]$ non nul, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f^n est un polynôme de Darboux si et seulement si f est un polynôme de Darboux . De plus $L_{f^n} = n.L_f$.*

Démonstration : 1) On montre que si f^n est un polynôme de Darboux implique que f est un polynôme de Darboux .
Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f^n est un polynôme de Darboux, c'est-à-dire
$X(f^n) = L_{f^n}.f^n$.
Par récurrense on montre que:

$$X(f^n) = n.f^{n-1}.X(f).$$

1) Pour $n = 1$: on a $X(f) = X(f)$, l'égalité est juste .
2) On suppose que l'égalité est juste pour $n = k$,c'est-à-dire

$$X\left(f^k\right) = k.f^{k-1}.X(f)$$

et on montre l'égalité suivante :

$$X\left(f^{k+1}\right) = (k+1).f^k.X(f),$$

on a

$$\begin{aligned} X\left(f^{k+1}\right) &= X\left(f^{k}.f\right) \\ &= f.X\left(f^{k}\right)+f^{k}.X\left(f\right) \\ &= f.k.f^{k-1}.X\left(f\right)+f^{k}.X\left(f\right) \\ &= (k+1).f^{k}.X\left(f\right). \end{aligned}$$

Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}^{*}$.

on a

$$X\left(f^{n}\right)=L_{f^{n}}.f^{n}=n.f^{n-1}.X\left(f\right)$$

implique

$$L_{f^{n}}.f=n.X\left(f\right)$$

d'où f divise $X\left(f\right)$, donc f est un polynôme de Darboux.

2) On montre que si f est un polynôme de Darboux alors f^{n} est un polynôme de Darboux.

Si f est un polynôme de Darboux, c'est-à-dire :

$$X\left(f\right)=L_{f}.f$$

alors

$$n.f^{n-1}.X\left(f\right)=n.f^{n-1}.L_{f}.f$$

d'où

$$X\left(f^{n}\right)=n.L_{f}.f^{n}$$

on voit que: f^{n} divise $X\left(f^{n}\right)$, donc f^{n} est un polynôme de Darboux. ■

Proposition 2.2.1 *Soit $f \in \mathbb{C}\left[x,y\right]$ un polynôme non nul, la décomposition de f en polynômes irréductibles est donnée par:*

$$f={f_{1}}^{n_{1}}.{f_{2}}^{n_{2}}...{f_{k}}^{n_{k}}.$$

La courbe algébriqsue définie par $C=\{f(x,y)=0\ \}$ est invariante de L_{f} si et seulement si $C_{i}=\{f_{i}\left(x,y\right)=0\}$ pour $i\in\{1,2,...,k\}$ est une courbe *algébrique invariante de* L_{f_i}.

De plus

$$L_f = n_1 L_{f_1} + n_2 L_{f_2} + ... + n_k L_{f_k}.$$

Démonstration : D'après le lemme précédent, nous savons que si $C = \{f(x,y) = 0\}$ est une courbe algébrique invariante de cofacteur L_f si et seulement si $C_i = \{f_i^{n_i}(x,y) = 0\}$ pour $i \in \{1,2,...,k\}$est une courbe algébrique invariante de cofacteur $L_{f_i^{n_i}}$ et de plus

$$L_f = n_1 L_{f_1} + n_2 L_{f_2} + ... + n_k L_{f_k} \ .$$

puisque les ${f_i}^{n_i}$ pour $i \in \{1,2,...,k\}$sont des polynômes de Darboux si et seulement si les f_i sont des polynômes de Darboux. ■

2.3 Critère de Darboux-Jouanolou

Théorème 2.3.1 *Soit* ω *une 1-forme différentielle polynomiale de degré* d *dans* $\mathbb{C}^2$*. Si* ω *admet* $\dfrac{d(d+1)}{2} + 2$ *courbes algébriques invariantes, alors* ω *admet une intégrale première rationnelle.*

Démonstration : Soit $C_1 = \{f_1(x,y) = 0\}, ..., C_k = \{f_k(x,y) = 0\}$ les $\dfrac{d(d+1)}{2} + 2$ courbes algébriques invariantes de ω .

En utilisant les cofacteurs associés aux courbes algébriques invariantes $C_1 = \{f_1(x,y) = 0\}, ...,$ $C_{k-1} = \{f_{k-1}(x,y) = 0\}$, on peut construire une 1-forme rationnelle η_1 de la forme:

$$\eta_1 = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \frac{df_i}{f_i}$$

telle que:

$$\omega \wedge \eta_1 = 0$$

de manière analogue, on peut utiliser les cofacteurs associés aux courbes algébriques invariantes $C_2 = \{f_2(x,y) = 0\}, ..., C_k = \{f_k(x,y) = 0\}$, pour construir une 1-forme rationnelle η_2 de la forme:

$$\eta_2 = \sum_{i=2}^{k} \beta_i \frac{df_i}{f_i} \ , \quad \text{telle que } : \ \omega \wedge \eta_2 = 0 \ \ et \ \ \beta_i \neq 0 \ .$$

Comme $\beta_i \neq 0$, alors l'ensemble des pôles de $\eta_1$et η_2 sont distincts.

Ainsi, on sait qu'il existe une fonction rationnelle non constante I telle que:

$$\eta_1 = I.\eta_2$$

prenant la différentielle extérieure de cette dernière expression on obtient

$$d\eta_1 = Id\eta_2 + dI \wedge \eta_2$$

Mais η_1 et η_2 sont fermés, On conclut que:

$$dI \wedge \eta_2 = 0$$

par conséquent:

$$\omega \wedge \eta_2 = 0.$$

alors:

$$\omega \wedge dI = 0.$$

Donc I est une intégrale première pour ω. ■

Corollaire 2.3.1 *Soit ω une 1-forme polynomiale dans $\mathbb{C}^2$, alors il existe une intégrale première rationnelle pour ω si et seulement si, ω admet une infinité de courbes algébriques invariantes.*

Démonstration : Si ω admet une intégrale première rationnelle, alors il existe f et g dans $\mathbb{C}[x, y]$ telle que

$$\omega \wedge d\left(\frac{f}{g}\right) = 0.$$

et en particulier

$$\omega \wedge (f.dg - g.df) = 0. \tag{2.4}$$

posons $f_\lambda = f - \lambda g \quad , \lambda \in \mathbb{C}$, alors

$$\omega \wedge df_\lambda = \omega \wedge df - \lambda\omega \wedge dg$$

d'après (2.4) :

$$\omega \wedge \frac{df}{f} = \omega \wedge \frac{dg}{g}$$

alors:

$$\omega \wedge df_\lambda = (f - \lambda g)\, \omega \wedge \frac{df}{f} = (f - \lambda g)\, \omega \wedge \frac{dg}{g}.$$

Donc $\omega \wedge \frac{df_\lambda}{f_\lambda}$ est une 2-forme polynomiale, c'est-à-dire les facteurs irréductibles de df_λ sont des courbes algébriques invariantes, puisque λ est un nombre complexe arbitraire, alors on a un nombre infini de courbes algébriques invariantes .

La réciproque:

Si ω admet une infinité des courbes algébriques invariantes, le théorème 2.3.1 nous assure que ω admet une intégrale premièr rationnelle. ■

2.4 Détermination des facteurs intégrants

Proposition 2.4.1 *Soit ω une 1-forme polynomiale dans $\mathbb{C}^2$, si ω admet des courbes algébriques invariantes $c_1 = \{f_1(x,y) = 0\}, ..., c_n = \{f_n(x,y) = 0\}$, et qu'il existe des nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tels que:*

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Theta_{f_i}.$$

Alors ω admet un facteur intégrant de la forme:

$$F = \prod_{i=1}^{n} f_i^{\,\alpha_i}.$$

Démonstration : *S'il existe des nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tels que:*

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Theta_{f_i}.$$

Alors la 1-forme différentielle rationnelle fermée donnée par:

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{df_i}{f_i}, \quad \textit{telle que} \;\; d\omega = (-\eta) \wedge \omega.$$

Lorsque nous considérons la fonction multiforme

$$\begin{aligned} F &= \exp\left(\int \eta\right) = \exp\left(\int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{df_i}{f_i}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int \frac{df_i}{f_i}\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log f_i\right) \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \log f_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} f_i^{\alpha_i}. \end{aligned}$$

On voit qsue $dF = F\eta$*, donc:*

$$\begin{aligned} d(F\omega) &= dF \wedge \omega + F d\omega \\ &= F\eta \wedge \omega - F\eta \wedge \omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, F *est un facteur intégrant pour* ω *et plus précisèment, si nous avons* $\{f_1.f_2...f_k = 0\}$*, pour la fonction* F *dans* U *on a la fonction*

$$F.\omega = \prod_{i=1}^{n} f_i^{\alpha_i}.\omega$$

est fermée et exacte, et sa primitive est

$$I = \int F.\omega = \int \prod_{i=1}^{n} f_i^{\alpha_i}.\omega$$

la fonction I *est une intégrale première pour* ω*.* ■

Corollaire 2.4.1 *Soit* ω *une 1-forme polynomiale de degré* d *dans* $\mathbb{C}^2$*.*
Si ω *admet* $\dfrac{d(d+1)}{2}$ *courbes algébriques invariantes irréductibles, alors* ω *admet un facteur intégrant ou une intégrale première de la forme:*

$$F = \prod_{i=1}^{n} f_i^{\alpha_i}. \tag{2.5}$$

Démonstration : Supposons qu'il existe $n = \dfrac{d(d+1)}{2}$ courbes algébriques invariantes de ω données par des polynômes $f_1, f_2, ..., f_n$.

Les cofacteurs associés aux courbes algébriques invariantes sont des 2-formes différentielles de degré inférieur ou égal à $d-1$.

Comme le $\mathbb{C}-$espace vectoriel des 2-formes différentielles de degré inférieur ou égal à $d-1$ est de dimension $\dfrac{d(d+1)}{2}$.

Les cofacteurs associés aux courbes algébriques invariantes $c_1 = \{f_1(x,y) = 0\}, ...,$ $c_n = \{f_n(x,y) = 0\}$ sont linéairement dépendants ou constituent une base pour le $\mathbb{C}-$espace vectoriel des 2-formes différentielles de degré inférieur ou égal à $d-1$, dans le premier cas il existe des nombres complexes (non tous nuls) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tels que:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Theta_{f_i} = 0. \tag{2.6}$$

et d'après la proposition 2.1.1 on a:

$$F = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log f_i.$$

est une intégrale première pour ω, prenant l'exponentielle de Fqui est aussi une intégrale première, donc nous avons une intégrale première de la forme $F = \prod_{i=1}^{n} f_i^{\alpha_i}$.

Lorsque les cofacteurs engendrent l'espace des 2-formes polynomiales de degré inférieur ou égal à $d-1$, alors $d\omega$ est une 2-forme polynomiale de degré inférieur ou égal à $d-1$, on peut écrire $d\omega$ comme combinaison linéaire des Θ_{f_i}. Ainsi d'après la proposition 2.4.1, nous avons un facteur intégrant de la forme $F = \prod_{i=1}^{n} f_i^{\alpha_i}$. ■

Proposition 2.4.2 *Soit ω une 1-forme polynomiale, s'il existe deux formes rationnelles fermées η_1 et η_2 telles que $d\omega = \eta_i \wedge \omega$ pour $i \in \{1,2\}$, alors ω admet un facteur intégrant rationnel.*

Démonstration : Considérons la 1-forme différentielle $\eta_0 = \eta_1 - \eta_2$, d'après l'hypothèse on a $\omega \wedge \eta_0 = 0$, donc il existe une fonction h telle que $h.\omega = \eta_0$ et comme η_0 est fermée, alors h est un facteur intégrant rationnel pour ω. ■

2.5 Facteurs intégrants inverses

Définition 2.5.1 *Soit $U \subset \mathbb{C}^2$, un ouvert et $\mu : U \to \mathbb{C}$, un facteur intégrant du système* *d'équations différentielle (1.1) .*

On dit que la fonction holomorphe non nulle $V = \dfrac{1}{\mu}$ *est un facteur intégrant inverse du(1.1) .*

La fonction holomorphe V est un facteur intégrant inverse du (1.1) sur $W = U \setminus \{V(x,y) = 0\}$, si c'est une solution de l'équation aux dérivées partielles linéaires suivante:

$$P\frac{\partial V}{\partial x} + Q\frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)V$$

L'intégrale première I, du système d'équations différentielles (1.1) associée au facteur intégrant inverse V est définie sur un ensemble ouvert $W = U \setminus \{V(x,y) = 0\}$ par:

$$\begin{aligned} I(x,y) &= \int \mu\omega \\ &= \int \frac{\omega}{V} \end{aligned}$$

Proposition 2.5.1 *Soit* V *un facteur intégrant inverse du (1.1) définie sur un ouvert* $W \subseteq \mathbb{C}^2$.

La fonction $\dfrac{1}{V}$ *définie sur* $W \setminus \{V(x,y) = 0\}$ *est un facteur intégrant, alors la fonction:*

$$I(x,y) = -\int \frac{P(x,y)}{V(x,y)}dy + \int \left(\frac{Q(x,y)}{V(x,y)} + \frac{\partial}{\partial x}\int \frac{P(x,y)}{V(x,y)}dy\right)dx$$

est une intégrale première du (1.1) .

Démonstration : *la fonction* $\dfrac{1}{V}$ *définie sur* $W \setminus \{V(x,y) = 0\}$ *est un facteur intégrant c'est-à-dire:*

$$\begin{aligned} X\left(\frac{1}{V}\right) &= P\left(\frac{1}{V}\right)_x + Q\left(\frac{1}{V}\right)_y \\ &= -\frac{X(V)}{V^2} \\ &= \frac{1}{V}divX \end{aligned}$$

On a $\dfrac{1}{V}$ *est un facteur intégrant c'est-à-dire*

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{P(x,y)}{V(x,y)} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{Q(x,y)}{V(x,y)}$$

alors

$$\begin{aligned}
X\left(I\left(x,y\right)\right) &= \left(P\frac{\partial}{\partial x}+Q\frac{\partial}{\partial y}\right)I\left(x,y\right)\\
&= P\frac{\partial I\left(x,y\right)}{\partial x}+Q\frac{\partial I\left(x,y\right)}{\partial y}\\
&= P\frac{\partial}{\partial x}\left(-\int\frac{P\left(x,y\right)}{V\left(x,y\right)}dy+\int\left(\frac{Q\left(x,y\right)}{V\left(x,y\right)}+\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{P\left(x,y\right)}{V\left(x,y\right)}dy\right)dx\right)\\
&\quad +Q\frac{\partial}{\partial y}\left(-\int\frac{P\left(x,y\right)}{V\left(x,y\right)}dy+\int\left(\frac{Q\left(x,y\right)}{V\left(x,y\right)}+\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{P\left(x,y\right)}{V\left(x,y\right)}dy\right)dx\right)\\
&= -P\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{P\left(x,y\right)}{V\left(x,y\right)}dy+P\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{P\left(x,y\right)}{V\left(x,y\right)}dy+P\frac{Q\left(x,y\right)}{V\left(x,y\right)}\\
&\quad -Q\frac{P\left(x,y\right)}{V\left(x,y\right)}+Q\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{Q\left(x,y\right)}{V\left(x,y\right)}dx+Q\frac{\partial}{\partial y}\int\left(\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{P\left(x,y\right)}{V\left(x,y\right)}dy\right)dx\\
&= P\frac{Q\left(x,y\right)}{V\left(x,y\right)}-Q\frac{P\left(x,y\right)}{V\left(x,y\right)}+Q\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{Q\left(x,y\right)}{V\left(x,y\right)}dx-Q\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{Q\left(x,y\right)}{V\left(x,y\right)}dx\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc la fonction I est une intégrale première du (1.1) . ■

2.6 Facteurs exponentiels

Définition 2.6.1 *Soient $h,g\in\mathbb{C}\left[x,y\right]$, premiers entre eux, la fonction $\exp\left(\frac{g}{h}\right)$ s'appelle facteur exponentiel du système d'équations différentielles (1.1) s'il existe $k\in\mathbb{C}\left[x,y\right]$ de degré $d-1$, vérifiant*

$$X\left(\exp\left(\frac{g}{h}\right)\right)=k.\exp\left(\frac{g}{h}\right).$$

On dit que k est le cofacteur de facteur exponentiel $\exp\left(\frac{g}{h}\right)$.

Proposition 2.6.1 *Si $\mu=\exp\left(\frac{g}{h}\right)$ est un facteur exponentiel du système polynomial(1.1) alors $c=\{h(x,y)=0\}$ est une courbe algébrique invariante, et g satisfait l'équation*

$$X\left(g\right)=g.L_h+h.L_\mu,$$

où L_h et L_μ sont les cofacteurs de h et μ .

Démonstration : Soit $\mu = \exp\left(\frac{g}{h}\right)$ un facteur exponentiel de cofacteur L_μ , on a:

$$\begin{aligned} X\left(\exp\left(\frac{g}{h}\right)\right) &= L_\mu.\exp\left(\frac{g}{h}\right) \\ &= \exp\left(\frac{g}{h}\right).X\left(\frac{g}{h}\right) \\ &= \exp\left(\frac{g}{h}\right).\frac{(X(g)).h-(X(h)).g}{h^2} \end{aligned}$$

équivalent à

$$(X(g)).h-(X(h)).g = h^2.L_\mu.$$

ainsi h et g sont premiers entre eux, h divise $X(h)$, alors $c = \{h(x,y)=0\}$ est une courbe algébrique invariante de cofacteur $L_h = \frac{X(h)}{h}$, maintenant on remplace $X(h)$ par $L_h.h$, dans la dernière équation, on obtient $X(g) = \ g.L_h + h.L_\mu.$ ∎

2.7 La théorie d'intégrabilité de Darboux

Avant de comencer à donner des résultats de la théorie de Darboux, on a besoin de présenter quelques définitions.

Si

$$S(x,y) = \sum_{i+j=0}^{d-1} a_{ij}x^iy^j$$

est un polynôme de degré inférieur ou égal à $d-1$, avec $\frac{d(d+1)}{2}$ coefficients dans $\mathbb{C}$, alors on peut écrire $S \in \mathbb{C}_{d-1}[x,y]$, et par l'identification de l'éspace vectoriel linéaire $\mathbb{C}_{d-1}[x,y]$ avec $\mathbb{C}^{\frac{d(d+1)}{2}}$, on obtient l'isomorphisme:

$$S \to (a_{00}, a_{10}, a_{01}, ..., a_{d-1,0}, a_{d-2,1}, ..., a_{0,d-1}).$$

On dit que les r points $(x_k, y_k) \in \mathbb{C}^2, k \in \{1,2,...,r\}$ sont indépendants si l'intèrséction des r hyperplans:

$$\sum_{i+j=0}^{d-1} a_{ij}x_k^iy_k^j = 0 \quad \text{pour } k \in \{1,2,...,r\}$$

dans $\mathbb{C}^{\frac{d(d+1)}{2}}$ est un sous espace linéaire de dimension $\frac{d(d+1)}{2} - r.$

On remarque que le nombre maximum de points singuliers isolés du système d'équations différentielles (1.1) , est d^2 (par le théorème de Bezout), alors le nombre maximum de points singuliers isolés indépendants du système d'équations(1.1) est $\frac{d\,(d+1)}{2}$, et alors $\frac{d\,(d+1)}{2} \prec d^2$ pour $d \geqslant 2$.
Le point singulier (x_0, y_0) du système d'équations(1.1) s'appelle point faible si $div\,(X) = 0$ en (x_0, y_0).

Théorème 2.7.1 *Considérons le système d'équations différentielles (1.1) de degré d qui admet p courbes algébriques invariantes irréductibles* $c_i = \{f_i\,(x, y) = 0\}$ *de cofacteurs* K_i *pour* $i \in \{1, 2, ..., p\}$ *, q facteurs exponentiels* $\exp\left(\frac{g_j}{h_j}\right)$ *de cofacteurs* L_j *pour* $j \in \{1, 2, ..., q\}$ *, et les r points singuliers indépendants* $(x_k, y_k) \in \mathbb{C}^2$ *avec* $f_i\,(x_k, y_k) \neq 0$ *pour* $i \in \{1, 2, ..., p\}$ *et pour* $k \in \{1, 2, ..., r\}$.

(i) S'il existe λ_i *,*$\mu_j \in \mathbb{C}$ *non tous nuls, alors*

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = 0$$

si et seulement si, la fonction multiforme

$$I = f_1^{\lambda_1} ... f_p^{\lambda_p} . \left(\exp\left(\frac{g_1}{h_1}\right)\right)^{\mu_1} ... \left(\exp\left(\frac{g_q}{h_q}\right)\right)^{\mu_q}$$

est une intégrale première du système (1.1) .

(ii) Si

$$p + q + r \geqslant \frac{d\,(d+1)}{2} + 1,$$

alors il existe λ_i *,*$\mu_j \in \mathbb{C}$ *non tous nuls tels que*

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = 0$$

(iii) Si

$$p + q + r \geqslant \frac{d\,(d+1)}{2} + 2,$$

alors le système (1.1) admet une intégrale première rationnelle .

(iv) S'il existe λ_i *,*$\mu_j \in \mathbb{C}$ *non tous nuls, alors*

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = -div\,(X)$$

si et seulement si

$$I = f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}.\left(\exp\left(\frac{g_1}{h_1}\right)\right)^{\mu_1}...\left(\exp\left(\frac{g_q}{h_q}\right)\right)^{\mu_q}$$

est un facteur intégrant du système (1.1) .

(v) Si

$$p+q+r = \frac{d\,(d+1)}{2}$$

et les r points singuliers isolés indépendants du système d'équations(1.1) sont faible, et la fonction

$$I = f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}.\left(\exp\left(\frac{g_1}{h_1}\right)\right)^{\mu_1}...\left(\exp\left(\frac{g_q}{h_q}\right)\right)^{\mu_q}$$

est une intégrale première si

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = 0,$$

ou un facteut intégrant si

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = -div\,(X)$$

avec λ_i *,*$\mu_j \in \mathbb{C}$ *non tous nuls.*

(vi) S'il existe λ_i *,*$\mu_j \in \mathbb{C}$ *non tous nuls tels que*

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = -s$$

pour $s \in \mathbb{C}^*$*, alors la fonction*

$$I = f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}.\left(\exp\left(\frac{g_1}{h_1}\right)\right)^{\mu_1}...\left(\exp\left(\frac{g_q}{h_q}\right)\right)^{\mu_q}\exp\,(st)$$

est invariante pour le système d'équations (1.1) .

Démonstration : Nous posons

$$F_j = \exp\left(\frac{g_i}{h_i}\right).$$

On a p courbes algébriques invariantes irréductibles $c_i = \{f_i(x, y) = 0\}$ de cofacteurs K_i pour $i \in \{1, 2, ..., p\}$, et q facteurs exponentiels $\exp\left(\frac{g_j}{h_j}\right)$ de cofacteurs L_j pour $j \in \{1, 2, ..., q\}$, alors on a

$$X\left(f_i^{\lambda_i}\right) = \lambda_i.f_i^{\lambda_i}.\frac{X(f_i)}{f_i},\ X\left(F_j^{\mu_j}\right) = \mu_j.F_j^{\mu_j}.\frac{X(F_j)}{F_j}$$

et

$$X(f_i) = K_i.f_i, X(F_j) = L_j.F_j.$$

On va commencer de monter par récurrence que:

$$X\left(f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}\right) = \left(f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}\right)\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\frac{X(f_i)}{f_i}\right).$$

pour tout $p \succeq 1$.

a) Pour $p = 1$, on a

$$X\left(f_1^{\lambda_1}\right) = \lambda_1 f_1^{\lambda_1}.\frac{X(f_1)}{f_1} = f_1^{\lambda_1}.\lambda_1.\frac{X(f_1)}{f_1}.$$

b) Supposons que

$$X\left(f_1^{\lambda_1}...f_{k-1}^{\lambda_{k-1}}\right) = \left(f_1^{\lambda_1}...f_{k-1}^{\lambda_{k-1}}\right)\left(\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\frac{X(f_i)}{f_i}\right).$$

est vraie pour $p = k - 1$, et montrons que

$$X\left(f_1^{\lambda_1}...f_k^{\lambda_k}\right) = \left(f_1^{\lambda_1}...f_k^{\lambda_k}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{X(f_i)}{f_i}\right).$$

On a

$$\begin{aligned}
X\left(f_1^{\lambda_1}...f_k^{\lambda_k}\right) &= X\left(f_1^{\lambda_1}...f_{k-1}^{\lambda_{k-1}}.f_k^{\lambda_k}\right) \\
&= f_k^{\lambda_k}.X\left(f_1^{\lambda_1}...f_{k-1}^{\lambda_{k-1}}\right) + \left(f_1^{\lambda_1}...f_{k-1}^{\lambda_{k-1}}\right)X\left(f_k^{\lambda_k}\right) \\
&= f_k^{\lambda_k}.\left(f_1^{\lambda_1}...f_{k-1}^{\lambda_{k-1}}\right)\left(\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\frac{X(f_i)}{f_i}\right) + \left(f_1^{\lambda_1}...f_{k-1}^{\lambda_{k-1}}\right).f_k^{\lambda_k}.\lambda_k.\frac{X(f_k)}{f_k}. \\
&= \left(f_1^{\lambda_1}...f_{k-1}^{\lambda_{k-1}}.f_k^{\lambda_k}\right)\left(\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\frac{X(f_i)}{f_i} + \lambda_k.\frac{X(f_k)}{f_k}\right) \\
&= \left(f_1^{\lambda_1}...f_k^{\lambda_k}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{X(f_i)}{f_i}\right).
\end{aligned}$$

alors le principe de récurrence est vraie pour tout $p \succeq 1$.

(i) On a

$$\begin{aligned}
X(I) &= X\left(f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}.F_1^{\mu_1}...F_q^{\mu_q}\right) \\
&= \left(F_1^{\mu_1}...F_q^{\mu_q}\right).X\left(f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}\right) + \left(f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}\right).X\left(F_1^{\mu_1}...F_q^{\mu_q}\right) \\
&= \left(F_1^{\mu_1}...F_q^{\mu_q}\right)\left(f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}\right)\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\frac{X(f_i)}{f_i}\right) \\
&\quad + \left(f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}\right)\left(F_1^{\mu_1}...F_q^{\mu_q}\right)\left(\sum_{j=1}^{q}\mu_j\frac{X(F_j)}{F_j}\right) \\
&= \left(f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}.F_1^{\mu_1}...F_q^{\mu_q}\right)\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\frac{X(f_i)}{f_i} + \sum_{j=1}^{q}\mu_j\frac{X(F_j)}{F_j}\right) \\
&= \left(f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}.F_1^{\mu_1}...F_q^{\mu_q}\right)\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q}\mu_j L_j\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(ii) On a les cofacteurs K_i et L_j sont des polynômes de degré $d-1$, alors K_i , $L_j \in \mathbb{C}_{d-1}[x,y]$ et la dimension de $\mathbb{C}_{d-1}[x,y]$ est $\dfrac{d(d+1)}{2}$.
Le point (x_k, y_k) est un point isolé du système (1.1) , $p(x_k, y_k) = Q(x_k, y_k) = 0$.
Alors

$$X(f_i) = P\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right) = K_i.f_i,$$

et donc

$$K_i(x_k, y_k).f_i(x_k, y_k) = 0$$

et comme $f_i(x_k, y_k) \neq 0$, alors $K_i(x_k, y_k) = 0$ pour $i \in \{1, 2, ..., p\}$.
De la même manière on a

$$X(F_j) = p\left(\frac{\partial F_j}{\partial x}\right) + Q\left(\frac{\partial F_j}{\partial y}\right) = L_j.F_j$$

et comme

$$L_j(x_k, y_k).F_j(x_k, y_k) = 0$$

c'est-à-dire

$$F_j = \exp\left(\frac{g_j}{h_j}\right) \neq 0$$

alors

$$L_j(x_k, y_k) = 0$$

pour tout $j \in \{1, 2, ..., q\}$; par conséquent les r points singuliers $(x_k, y_k) \in \mathbb{C}^2$ sont indépendants. Soient K_i , L_j pour ($i = 1, ..., p$ et $j = 1, ..., q$) une famille de polynômes dans le sous espace S de $\mathbb{C}_{d-1}[x, y]$, de dimension $\dfrac{d(d+1)}{2} - r$, on a $p + q$ polynômes K_i , L_j et comme $p + q \succ \dfrac{d(d+1)}{2} - r$, on en déduit que les $p + q$ polynômes sont linéairement dépendant dans S.

Alors il existe λ_i ,$\mu_j \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = 0.$$

(iii)Le nombre r de points singuliers indépendants vérifie $r \prec \dfrac{d(d+1)}{2}$, donc $p + q \geq 2$ et d'après les hypothèses de (iii) et par application de (ii) sur $p + q + 1$ fonctions qui forment des courbes algébriques invariantes ou des facteurs exponentiels . On peut ecrire

$$M_1 + \alpha_3 M_3 + ... + \alpha_{p+q-1} M_{p+q-1} = 0, \ M_2 + \beta_3 M_3 + ... + \beta_{p+q-1} M_{p+q-1} = 0,$$

où M_l sont des cofacteurs K_i et L_j, et les α_l et β_l sont des nombres complexes. et d'après (i), les deux fonctions

$$G_1.G_3^{\alpha_3}...G_{p+q-1}^{\alpha_{p+q-1}} \quad , \quad G_2.G_3^{\beta_3}...G_{p+q-1}^{\beta_{p+q-1}} \quad ,$$

sont des intégrales premières du système (1.1) , où G_l est le polynôme qui définit une courbe algébrique invariante ou facteur exponentiel qui admet le cofacteur M_l pour $l \in \{1, 2, ..., p + q - 1\}$. et si on prend le logararithme des deux intégrales premières on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \log(G_1) + \alpha_3 \log(G_3) + ... + \alpha_{p+q-1} \log(G_{p+q-1}), \\ I_2 &= \log(G_2) + \beta_3 \log(G_3) + ... + \beta_{p+q-1} \log(G_{p+q-1}), \end{aligned}$$

sont des intégrales premières du système (1.1) , sur leur domaine de définition.

chaqu'un à un facteur intégrant R_i tel que

$$P(x,y) = R_i(x,y)\frac{\partial I_i}{\partial y} \quad , \quad Q(x,y) = -R_i(x,y)\frac{\partial I_i}{\partial x},$$

ainsi on a

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\dfrac{\partial I_2}{\partial x}}{\dfrac{\partial I_1}{\partial x}}$$

et les fonctions G_l sont des polynômes ou des exponentiels avec des quotients sont des polynômes, et les fonctions $\dfrac{\partial I_i}{\partial x}$ sont rationnelles pour $i \in \{1,2\}$.
Alors de la dernière égalité, le quotient $\dfrac{R_1}{R_2}$ de deux facteurs intégrants est une fonction rationnelle et la proposition 1.3.1 donne (iii).
(iv) L'égalité

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q}\mu_j L_j = -div(X)$$

est équivalente à

$$\begin{aligned}
X(I) &= X\left(f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}.F_1^{\mu_1}...F_q^{\mu_q}\right) \\
&= \left(f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}.F_1^{\mu_1}...F_q^{\mu_q}\right)\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\frac{X(f_i)}{f_i} + \sum_{j=1}^{q}\mu_j\frac{X(F_j)}{F_j}\right) \\
&= \left(f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}.F_1^{\mu_1}...F_q^{\mu_q}\right)\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q}\mu_j L_j\right) \\
&= -\left(f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}.F_1^{\mu_1}...F_q^{\mu_q}\right) div(X).
\end{aligned}$$

(v) Soit $K = div(X)$, tel que $K \in \mathbb{C}_{d-1}[x,y]$. les r points singuliers (x_k, y_k) sont faibles, alors $K(x_k, y_k) = 0$ pour $k \in \{1,2,...,r\}$, donc K est linéaire dans le sous espace S (de la preuve (ii)).
Ainsi $S = p + q = \dfrac{d(d+1)}{2} - r \geq 0$ et on a $p+q+1$ polynômes :

$$K_1, K_2, ..., K_p, L_1, L_2, ..., L_q, K$$

dans S (on suit la même démonstration de (ii)), il est claire que ces polynômes sont linéairement indépendants dans S.

Alors, il existe λ_i ,$\mu_j, \alpha \in \mathbb{C}$, non tous nuls, tels que

$$\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i K_i\right) + \left(\sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j\right) + \alpha K = 0.$$

Si $\alpha = 0$ et comme dans la démonstration de (i) , la fonction

$$I = f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}.\left(\exp\left(\frac{g_1}{h_1}\right)\right)^{\mu_1}...\left(\exp\left(\frac{g_q}{h_q}\right)\right)^{\mu_q}$$

est une intégrale première du système (1.1) .

On suppose que $\alpha \neq 0$, par division de l'équation précédente par α(si c'est nécessaire), on peut dire que $\alpha = 1$, alors on a

$$K = -\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i K_i\right) - \left(\sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
X(I) &= X\left(f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}.F_1^{\mu_1}...F_q^{\mu_q}\right) \\
&= \left(f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}.F_1^{\mu_1}...F_q^{\mu_q}\right)\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\frac{X(f_i)}{f_i} + \sum_{j=1}^{q}\mu_j\frac{X(F_j)}{F_j}\right) \\
&= \left(f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}.F_1^{\mu_1}...F_q^{\mu_q}\right)\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q}\mu_j L_j\right) \\
&= -\left(f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}.F_1^{\mu_1}...F_q^{\mu_q}\right)K \\
&= -\left(f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}.F_1^{\mu_1}...F_q^{\mu_q}\right)div\,(X).
\end{aligned}$$

(vi) Nous avons λ_i ,$\mu_j \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum\limits_{j=1}^{q} \mu_j L_j = -s.$
alors

$$\begin{aligned}
X(I) &= X\left(f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}.F_1^{\mu_1}...F_q^{\mu_q}.e^{st}\right) \\
&= \left(f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}.F_1^{\mu_1}...F_q^{\mu_q}.e^{st}\right)\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\frac{X(f_i)}{f_i} + \sum_{j=1}^{q}\mu_j\frac{X(F_j)}{F_j} + s\right) \\
&= \left(f_1^{\lambda_1}...f_p^{\lambda_p}.F_1^{\mu_1}...F_q^{\mu_q}.e^{st}\right)\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q}\mu_j L_j + s\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

donc (vi) est vérifie. ■

2.8 Applications sur la théorie de Darboux

Exemple 2.8.1 *Considérons le système quadratique suivant:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y\,(ay+b) - (x^2+y^2-1) \\ \dfrac{dy}{dt} = x\,(ay+b) \end{cases} \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

Soit $f_1(x,y) = ay+b$ *, on montre que* $C_1 = \{ay+b=0\}$ *est une courbe algébrique invariante de ce système .*

On a $X(f_1) = K_1.f_1$*, tel que*

$$X = \left(-y\,(ay+b) - \left(x^2+y^2-1\right)\right)\frac{\partial}{\partial x} + x\,(ay+b)\frac{\partial}{\partial y},$$

alors

$$\begin{aligned} X(f_1) &= \left(-y\,(ay+b) - \left(x^2+y^2-1\right)\right)\frac{\partial\,(ay+b)}{\partial x} + x\,(ay+b)\frac{\partial\,(ay+b)}{\partial y} \\ &= ax\,(ay+b) \\ &= ax.f_1(x,y) \end{aligned}$$

donc $C_1 = \{ay+b=0\}$*est une courbe algébrique invariante de cofacteur*$K_1(x,y) = ax$*.*
De la même manière, on peut montrer que $C_2 = \{x^2+y^2-1=0\}$ *est une courbe algébrique invariante, soit* $f_2(x,y) = x^2+y^2-1$*, on a :*

$$\begin{aligned} X(f_2) &= \left(-y\,(ay+b) - \left(x^2+y^2-1\right)\right)\frac{\partial\,(x^2+y^2-1)}{\partial x} + x\,(ay+b)\frac{\partial\,(x^2+y^2-1)}{\partial y} \\ &= -2xy\,(ay+b) - 2x\left(x^2+y^2-1\right) + 2xy\,(ay+b) \\ &= -2x\left(x^2+y^2-1\right) \\ &= -2x.f_2(x,y)\,. \end{aligned}$$

Alors $C_2 = \{x^2+y^2-1=0\}$ *est une courbe algébrique invariante de cofacteur* $K_2(x,y) = -2x$*.*
Donc d'après (i) du théorème de Darboux, on a $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0$*, c'est-à-dire* $\lambda_1 ax - 2\lambda_2 x = 0$*, alors* $a\lambda_1 = 2\lambda_2$ *. Par conséquent la fonction est définie par*

$$\begin{aligned} I(x,y) &= f_1^{\lambda_1}.f_2^{\lambda_2} \\ &= (ay+b)^2.\left(x^2+y^2-1\right)^a \end{aligned}$$

est une intégrale première du système.

Exemple 2.8.2 *Considérons le système d'équations différentielles suivant:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\,(ax+c) \\ \dfrac{dy}{dt} = y\,(2ax+by+c) \end{cases} \quad avec \quad abc \neq 0.$$

Ce système admet cinq solutions algébriques de degré 1*, d'où cinq courbes algébriques c'est-à-dire:*

$f_1(x,y) = x \Longleftrightarrow C_1 = \{x=0\}$ *de cofacteur* $K_1(x,y) = ax+c$,

$f_2(x,y) = ax+c \Longleftrightarrow C_2 = \{ax+c=0\}$ *de cofacteur* $K_2(x,y) = ax$,

$f_3(x,y) = y \Longleftrightarrow C_3 = \{y=0\}$ *de cofacteur* $K_3(x,y) = 2ax+by+c$,

$f_4(x,y) = ax+by \Longleftrightarrow C_4 = \{ax+by=0\}$ *de cofacteur* $K_4(x,y) = ax+by+c$,

$f_5(x,y) = ax+by+c \Longleftrightarrow C_5 = \{ax+by+c=0\}$ *de cofacteur* $K_5(x,y) = ax+by$.

Et d'après (ii) *du théorème de Darboux le système admet une intégrale première de la forme:*

$$I(x,y) = f_1^{\lambda_1}.f_2^{\lambda_2}.f_3^{\lambda_3}.f_4^{\lambda_4}.f_5^{\lambda_5} \quad avec \quad \lambda_i \in \mathbb{C}$$

qui satisfait

$$\sum_{i=1}^{5} \lambda_i K_i = 0,$$

les solutions de cette équation sont $\lambda_1 = \lambda_5 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_4 = 1$ *et* $\lambda_3 = 0$,
par conséquent l'intégrale première est

$$I(x,y) = \frac{(ax+c)(ax+by)}{x\,(ax+by+c)}.$$

On remarque que ce système a cinq courbes algébriques invariantes et d'après (iii) du théorème de Darboux, le système admet une intégrale première rationnelle.

Exemple 2.8.3 *Considérons le système d'équations différentielles suivant:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - b\,(x^2+y^2) \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases} \quad avec\ b \neq 0$$

On a $c = \{x^2+y^2=0\}$ *est une courbe algébrique invariante de cofacteur* $K(x,y) = -2bx$*, ainsi* $div\,(X) = -2bx$*, alors d'après* (iv) *du théorème de Darboux* $(x^2+y^2)^{-1}$ *est un facteur intégrant, et facilement on peut montrer que la fonction définie par:*

$$I(x,y) = \exp(2by)\left(x^2+y^2\right)$$

est une intégrale première du système.

Exemple 2.8.4 *(Equation de Lotka-Volterra).*

Considérons le système d'équations différentielles de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy \end{cases} \tag{2.7}$$

ou α, β, γ*et* δ *sont des nombres complexes.*

L'éxistence d'intégrales premières de l'équation 2.7 *est équivalent à l'existence d'intégrales premières de la 1-forme différentielle:*

$$\omega = y\left(\gamma - \delta x\right) dx + x\left(\alpha - \beta y\right) dy$$

il est facile de voir que les courbes données implicitement par:

$$\{x = 0\} \qquad et \quad \{y = 0\}$$

sont invariantes et leur cofacteurs sont donnés par:

$$\begin{aligned} \Theta_x &= \omega \wedge \frac{dx}{x} = \left(\beta y - \alpha\right) dx \wedge dy \\ & \quad et \\ \Theta_y &= \omega \wedge \frac{dy}{y} = \left(\gamma - \delta x\right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

En générale, ces cofacteurs sont linéairement indépendants, lorsque nous considérons la différentielle de ω, *on a :*

$$d\omega = -\left(\beta y - \alpha\right) dx \wedge dy - \left(\gamma - \delta x\right) dx \wedge dy = -\Theta_x - \Theta_y$$

donc on a

$$d\omega = \omega \wedge \left(-\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right).$$

$(xy)^{-1}$*est un facteur intégrant pour* ω, *alors on a une intégrale première c'est la fonction multiforme* I, *donnnée par l'intégrale de* $(xy)^{-1}.\omega$, *c'est-à-dire*

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\omega}{xy} \\ &= \int \left(\gamma - \delta x\right) \frac{dx}{x} + \left(\alpha - \beta y\right) \frac{dy}{y} \\ &= -\delta x - \beta y + \gamma \log x + \alpha \log y. \end{aligned}$$

Remarque:

Nous résumons dans le tableau ci-dessous les types d'intégrales premières obtenus au cours de ce chapitre par une relation linéaire entre les cofacteurs associés aux courbes algébriques invariantes, les facteurs exponentiels et la différentielle extérieure de la 1-forme pour être intégrée.

Relations	Types d'intégrale première
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Theta_{f_i} = d\omega \ , \ \ \alpha_i \in \mathbb{C}$	$I = \int \prod_{i=1}^{n} f_i^{\alpha_i} . \omega$
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Theta_{f_i} = 0 \ , \ \ \alpha_i \in \mathbb{C}$	$I = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log f_i$
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Theta_{f_i} = 0 \ , \ \ \alpha_i \in \mathbb{Q}$	$I = \dfrac{G}{H}$ avec $G, H \in \mathbb{C}[x, y]$
$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = 0, \ \ \lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$	$I = \prod_{i=1}^{p} f_i^{\lambda_i} . \prod_{j=1}^{q} \left(\exp\left(\dfrac{g_j}{h_j} \right) \right)^{\mu_j}$
$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j L_j = -s, \ \lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{C}^*$	$I = \prod_{i=1}^{p} f_i^{\lambda_i} . \prod_{j=1}^{q} \left(\exp\left(\dfrac{g_j}{h_j} \right) \right)^{\mu_j} \exp(st)$

Tableau 1: les relations entre les cofacteurs et les intégrales premières .

Chapitre 3

La méthode d'intégration de Liouville

3.1 Corps différentiel

Définition 3.1.1 *Soit K un corps et Δ un ensemble fini de dérivations sur K.*

On dit que le couple (K, Δ) est un corp différentiel, si pour tout δ_1 , $\delta_2 \in \Delta$ et $f \in K$, on a :

$$\delta_2 (\delta_1 (f)) = \delta_1 (\delta_2 (f))$$

Exemple 3.1.1 *D'après le lemme de Schwartz on a*

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad pour\ tout \quad f \in \mathbb{C}(x, y),$$

le couple $\left(\mathbb{C}(x, y), \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\right)$ *est un corps différentiel.*

Dans ce qui suit nous allons travailler uniquement avec le corps différentiel $\left(\mathbb{C}(x, y), \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\right)$ et ses extensions Liouvillienne.

3.2 Extension Liouvilienne

Définition 3.2.1 *Une extension Liouvilienne (K, Δ) du corps différentiel* $\left(\mathbb{C}(x, y), \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\right)$ *est un corps différentiel obtenu comme suit: il existe une chaine finie de corps* *différentiels* (K_i, Δ_i) *où* $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *tels que:*

1) $(K_0, \Delta_0) = \left(\mathbb{C}(x, y), \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\right)$ *et* $(K_n, \Delta_n) = (K, \Delta)$.

2) $\mathbb{C} = K_0 \subset K_1 \subset ... \subset K_n = K$.

3) $\Delta_{i|K_{i-1}} = \Delta_{i-1}$ *et notons* $\Delta_i = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$.

4) *le corps des constantes de* K_i *coincide avec* $\mathbb{C}$ *c'est-à-dire:*

$$\left\{f \in K_i \quad | \; \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0\right\} = \mathbb{C}.$$

5) $K_i \;=\; K_{i-1}(t_i)$ *où* t_i *vérifie l'un des trois types ci-dessus*:

(5.a) t_i *est algébrique sur* K_{i-1}.

(5.b) $\frac{\partial t_i}{\partial x}, \frac{\partial t_i}{\partial y}$ *dans* K_{i-1}.

(5.c) $\frac{1}{t_i}\frac{\partial t_i}{\partial x}, \frac{1}{t_i}\frac{\partial t_i}{\partial y}$ *dans* K_{i-1}.

1- Si f est un élément de K par construction, f peut être considéré comme une fonction analytique dans un certain ouvert U_f de $\mathbb{C}^2$.

2- La condition (5.b) nous permet d'ajouter la primitive d'une forme différentielle fermée, avec des coefficients dans K_{i-1}.

3- La condition (5.c) nous permet d'ajouter l'exponentielle d'un élément de K_{i-1}.

4- Si K est une extension Liouvillienne de $\mathbb{C}(x, y)$, alors pour tout élément $f \in K$, nous considérons que sa différentielle extérieure est:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

donc df est une 1-forme différentielle à coefficients dans K.

5- Nottons le $K-$ module des 1-formes différentielles à coefficients dans K par Ω_K^1 c'est-à-dire: α appartient à Ω_K^1 si et seulement si $\alpha = adx + bdy$ où $a, b \in K$.

6- En utilisant la forme différentielle, nous pouvons reformuler les conditions (5.b) et (5.c) de la définition de l'extension Liouvillienne:

(5.b) : $dt_i \in \Omega^1_{K_{i-1}}$.

(5.c) : $\frac{dt_i}{t_i} \in \Omega^1_{K_{i-1}}$.

Définition 3.2.2 *Soit ω une 1-forme différentielle rationnelle dans $\mathbb{C}^2$.*

On dit que ω a une intégrale première Liouvillienne, s'il existe une extension Liouvillienne $\left(K\ ,\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)$ de $\mathbb{C}(x,y)$ et un élément $f\in K$ telles que:

$$df\neq 0\quad et\quad \omega\wedge df=0.$$

3.3 Critère de Singer

Le résultat suivant en raison de Singer, qui caractérise une 1-forme différentielle rationnelle dans $\mathbb{C}^2$ qui admet une intégrale première Liouvillienne.

Théorème 3.3.1 *Si ω une 1-forme différentielle rationnelle dans $\mathbb{C}^2$, alors ω admet une intégrale première Liouvillienne, si et seulement si, il existe une 1-forme rationnelle fermée η telle que:*

$$d\omega=\eta\wedge\omega.$$

Lemme 3.3.1 *Soit K une extesion de $\left(\mathbb{C}(x,y)\,,\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)$ et $K(t)$ une extension de K telle que:*

a) t est algébrique, ou

b) $\frac{dt}{t}\in\Omega_K^1$, ou

c) $dt\in\Omega_K^1$.

Si $\omega\in\Omega_K^1$, alors :

$$\begin{cases} d\omega=\eta\wedge\omega \\ d\eta=0 \end{cases}$$

admet une solution dans Ω_K^1 si et seulement si, elle admet une solution dans $\Omega_{K(t)}^1$.

Démonstration : Il est clair que toute solution dans Ω_K^1 est également une solution dans $\Omega_{K(t)}^1$.

Supposons donc que nous avons une solution η dans $\Omega_{K(t)}^1$, examinons chaque possibilité séparament pour t .

a) <u>t est algébrique</u>.

Soit σ un automorphisme de Galois de l'extension $K\subset K(t)$, si η est fermée, alors $\sigma^*\eta$

où $\sigma^*\eta = \eta \circ \sigma$ est fermée aussi, donc:

$$d\omega = \left(\frac{1}{[K(t) : K]} \sum_{\sigma \in Gal[K(t):K]} \sigma^* \eta \right) \wedge \omega.$$

nous avons donc une solution dans Ω^1_K .

b) $\underline{\frac{dt}{t} \in \Omega^1_K}$.

La solution $\eta \in \Omega^1_{K(t)}$, peut s'écrire sous la forme :

$$\eta = a(t)dx + b(t)dy \quad \text{où} \quad a, b \in K(t) \ .$$

Considérons la série de Laurent de a et b, nous pouvons ecrire η comme suit :

$$\eta = \sum_{i=-k}^{\infty} t^i \eta_i \qquad \text{avec} \quad \eta_i \in \Omega^1_K \ .$$

et comme t est transcendant, nous voyons que $d\omega = \eta \wedge \omega$, implique que :

$$\eta_i \wedge \omega = \begin{cases} d\omega & \text{pour} \quad i = 0 \\ 0 & \text{pour} \quad i \neq 0 \end{cases}$$

on a η est fermée, donc :

$$0 = \sum_{i=-k}^{\infty} t^i \left(d\eta_i + i\frac{dt}{t} \wedge \eta_i \right). \tag{3.1}$$

Notant que pour tout entier i supérieure ou égale à $-k$, $d\eta_i + i\frac{dt}{t} \wedge \eta_i \in \Omega^1_K$, et d'après le résultat de l'équation (3.1), on a $d\eta_0 = 0$, par conséquent η_0 est une solution dans Ω^1_K.

c) $\underline{dt \in \Omega^1_K}$.

On écrit η de la manière suivante :

$$\eta = \frac{\sum_{i=0}^{k} t^i \eta_i}{P(t)}$$

où $\eta_i \in \Omega^1_K$ et $P(t)$ est un polynôme unitaire dans $K(t)$ de degré l .

En différenciant η, on obtient

$$0 = P(t) \left(\sum_{i=0}^{k} t^i d\eta_i + i t^{i-1} dt \wedge \eta_i \right) - \left(\sum_{i=0}^{k} t^i \eta_i \right) \wedge dP(t) \ .$$

en rappelant que $P(t)$ est unitaire et le coefficient de t^{l+k} dans l'expression ci-dessus est $d\eta_k$, donc $d\eta_k = 0$, et comme $d\omega = \eta \wedge \omega$ on a

$$P(t)d\omega = \left(\sum_{i=0}^{k} t^i \eta_i \right) \wedge \omega$$

alors k est supérieure ou égale à l .

1) Si $k = l$ alors $d\omega = \eta_k \wedge \omega$ et nous avons une solution dans Ω_K^1 .

2) Si $k \gneqq l$ alors $\eta_k \wedge \omega = 0$ et par conséquent il existe $h \in K$ telle que $\eta_k = h\omega$.

Donc nous avons une solution dans Ω_K^1 donnnée par $d\omega = -\frac{dh}{h} \wedge \omega$. ■

Démonstration : (le théorème3.3.1).

Supposons qu'il existe une 1-forme rationnelle fermée η telle que $d\omega = \eta \wedge \omega$, donc il existe une extension Liouvillienne K de $\mathbb{C}(x, y)$, où nous définissons la fonction: $F = \exp\left(\int \eta\right)$; il est clair que F satisfait $dF = F\eta$

alors:

$$d\left(\frac{\omega}{F}\right) = \frac{Fd\omega - dF \wedge \omega}{F^2} = 0 .$$

Si on ajoute la primitive de la fonction $\frac{\omega}{F}$ à K on obtient une extension Liouvillienne de K, et par conséquent une extension Liouvillienne de $\mathbb{C}(x, y)$, où ω admet une intégrale première.

Réciproquement:

Si ω admet une intégrale première I dans l'extension Liouvillienne de K , alors il existe $h \in K$ telle que $dI = h\omega$, comme précédament $d\omega = -\frac{dh}{h} \wedge \omega$.

Par application du lemme, on voit qu'il existe une 1-forme rationnelle η dans $\mathbb{C}^2$, telle que $d\omega = \eta \wedge \omega$. ■

3.4 Forme rationnelle fermée

Théorème 3.4.1 *Soit η une 1-forme rationnelle fermée dans $\mathbb{C}^2$, alors η est de la forme:*

$$\eta = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{df_j}{f_j} + d\left(\frac{g}{f_1{}^{n_1}.f_2{}^{n_2}...f_p{}^{n_p}} \right) .$$

Où $n_j \in \mathbb{N}$, $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$, g , $f_j \in \mathbb{C}[x,y]$ *et les* f_j *sont des polynômes irréductibles, les courbes algébriques* $f_j = 0$ *sont des pôles de* η *et les* λ_j *sont des résidus de* η *autour de* $f_j = 0$, $\lambda_j = \dfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} \eta$, *où* γ_j *sont des petits cercles autour de* $f_j = 0$.

Démonstration : Soient $f_1, f_2, ..., f_p \in \mathbb{C}[x,y]$ et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in \mathbb{C}^*$, d'après les données la 1-forme méromorphe $\Omega = \eta - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \dfrac{df_j}{f_j}$ est fermée qui vérifie

$$\int_{\gamma_j} \Omega = 0 \qquad \text{pour} \quad j \in \{1, 2, ..., p\} \tag{3.2}$$

en fait, $\int_{\gamma_j} \Omega = \lambda_k.2\pi i - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \int_{\gamma_k} \dfrac{df_j}{f_j}$.

Par la formule de changement de variables , on obtient

$$\int_{\gamma_j} \frac{df_j}{f_j} = \int_{f_j \circ \gamma_k} \frac{dz}{z} = \begin{cases} 2\pi i & \text{si} \quad k = j \\ 0 & \text{si} \quad k \neq j \end{cases}$$

car les f_j sont irréductibles .

Donc on a montré l'équation (3.2) .

Nous utilisons maintenant le fait que le premier groupe d'homologie de

$$\mathbb{C}^2 - \{f_1 \times f_2 \times ... \times f_p = 0\}$$

à coefficients complexes est généré par γ_j .

En termes plus précis , pour toute 1-forme Ω définie dans un ouvert $U = \mathbb{C}^2 - \{f_1 \times f_2 \times ... \times f_p = 0\}$ vérifiant l'équation (3.2), il existe une fonction holomorphe $H : U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que:

$$\Omega = dH \tag{3.3}$$

il reste à montrer que la fonction holomorphe H qui est définie dans l'ouvert U est une fonction rationnelle, c'est-à-dire $H \in \mathbb{C}(x, y)$.

Pour cela, nous utilisons la propriété des fonctions holomorphes définies dans un ouvert dans le champ complexe , si pour tous x_0 et y_0 fixés, les fonctions:

$$\begin{cases} z \mapsto H(x_0 \, , z) \\ z \mapsto H(z \, , y_0) \end{cases}$$

sont rationnelles , alors la fonction H est une fonction rationnelle.

Supposons que l'ensemble des pôles de Ω ne contient pas des droites de la forme $x = c$ et $y = c$ où $c \in \mathbb{C}$.

Considérons maintenant la fonction $f_c(z) = H(c, z)$ pour certains $c \in \mathbb{C}$.

Si $i_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ désigne l'application de l'inclusion telle que $z \mapsto (c, z)$, alors on a d'après l'égalité suivante $f_c = H \circ i_c$ et l'équation (3.2),

$df_c = d(H \circ i_c) = \Omega \circ i_c = \dfrac{P(z)}{Q(z)} dz$ avec P , $Q \in \mathbb{C}[z]$, il est clair que nous pouvons prendre $Q \in \mathbb{C}[z]$ et on désigne par $a_1, a_2, ..., a_p \in \mathbb{C}$ ses racines, alors on peut écrire

$$Q(z) = \sum_{j=1}^{p} (z - a_j)^{n_j}$$

où n_j , $j \in \{1, 2, ..., p\}$ sont des entiers positifs , considérons donc la décomposition partielle de la fraction $\dfrac{p(z)}{Q(z)}$, c'est-à-dire

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = r(z) + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij}}{(z - a_j)^{n_j}} \text{ , où } r \in \mathbb{C}[z] \text{ et } \alpha_{ij} \in \mathbb{C}$$

par définition de Ω on a $\alpha_{ij} = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., p\}$, pour cela nous pouvons dire que la primitive de $\dfrac{p(z)}{Q(z)}$ est f_c, telle que f_c est une fonction rationnelle pour tout les $c \in \mathbb{C}$.

De la même façon, nous pouvons dire que les fonctions $z \mapsto H(z, c)$ sont également rationnelles pour tout les $c \in \mathbb{C}$, nous concluons que H est une fonction rationnelle. ■

Corollaire 3.4.1 *Soit ω une 1-forme rationnelle dans $\mathbb{C}^2$, si ω admet une intégrale première Liouvillienne, alors ω admet une intégrale première Liouvillienne de la forme*

$$\int f_1^{\lambda_1}.f_2^{\lambda_2}...f_k^{\lambda_k}.\exp\left(\frac{g}{f_1^{n_1}.f_2^{n_2}...f_k^{n_k}}\right).\omega$$

où g , $f_i \in \mathbb{C}[x, y]$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et $n_i \in \mathbb{N}$ pour $i \in \{1, 2, ..., k\}$.

Démonstration : d'après le théorème 3.4.1 , si ω possède une intégrale première Liouvillienne, alors il existe une 1-forme rationnelle fermée η de la forme:

$$\eta = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{df_j}{f_j} + d\left(\frac{g}{f_1^{n_1}.f_2^{n_2}...f_p^{n_p}}\right),$$

on obtient par l'intégration

$$\begin{aligned}\int \eta &= \int \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{df_j}{f_j} + d\left(\frac{g}{f_1^{n_1}.f_2^{n_2}...f_p^{n_p}} \right) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \int \frac{df_j}{f_j} + \frac{g}{f_1^{n_1}.f_2^{n_2}...f_p^{n_p}} \\ &= \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \log f_j + \frac{g}{f_1^{n_1}.f_2^{n_2}...f_p^{n_p}},\end{aligned}$$

dont l'éxponentiel de l'intégrale est un facteur intégrant de ω

c'est-à-dire que ω admet une intégrale première de la forme $\int e^{\int \eta}\omega$,

en intégrant η on obtient le résultat . ■

3.5 La méthode de Darboux (Révisée).

En supposant que nous pouvons déterminer toutes les courbes algébriques invariantes par une 1-forme polynomielle ω dans $\mathbb{C}^2$, la méthode d'intégration de Darboux comme c'était présentée dans le chapitre 2, n'est pas " loin " de la déterminer si ω admet une intégrale première Liouvillienne.

La méthode de Darboux est basée sur la recherche d'une 1-forme différentielle de la forme

$$\eta = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$$

de telle sorte que $d\omega = \eta \wedge \omega$.

D'autre part , le théorème 3.4.1 , nous dit que 1-forme rationnelle fermée dans $\mathbb{C}^2$ est de la forme:

$$\eta = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{df_j}{f_j} + d\left(\frac{g}{f_1^{n_1}.f_2^{n_2}...f_p^{n_p}} \right)$$

donc il reste à modifier la méthode de Darboux pour prendre en compte le terme

$$d\left(\frac{g}{f_1^{n_1}.f_2^{n_2}...f_p^{n_p}} \right)$$

dans l'expression de ω si-dessus.

Définition 3.5.1 *Soit ω une 1-forme différentielle polynomiale de degré d et $f, g \in \mathbb{C}[x,y]$ deux polynômes sans facteurs communs.*
On dit que $h = \exp\left(\frac{g}{f}\right)$ est un facteur exponentiel de 1-forme polynomiale ω.
si $\omega \wedge \frac{dh}{h}$ est une 2-forme polynomiale de degré inférieur ou égale à $d-1$
et la 2-forme est appelée le cofacteur exponentiel de h ; notons le cofacteur de h par Θ_h .

Proposition 3.5.1 *Soit ω une 1-forme polynomiale de degré d dans $\mathbb{C}^2$ et $h = \exp\left(\frac{g}{f}\right)$ un facteur exponentiel pour ω , on a*

1) la courbe algébrique $\{f(x,y) = 0\}$ est invariante pour ω .

2) le polynôme $g \in \mathbb{C}[x,y]$ vérifie l'équation suivante

$$\omega \wedge dg = g\Theta_f + f\ \Theta_g.$$

Proposition 3.5.2 *Soit ω une 1-forme polynomiale dans $\mathbb{C}^2$.*
Si ω admet k courbes algébriques invariantes distinctes f_i pour $i \in \{1,2,...,k\}$.
et l facteurs exponentiels indépendants e_j pour $j \in \{1,2,...,l\}$
Alors on a:

a) S'il existe α_i , $\beta_j \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \Theta_{f_i} + \sum_{j=1}^{l} \beta_j \Theta_{e_j} = d\omega.$$

Alors la fonction $I = \int \prod_{i=1}^{k} f_i^{\alpha_i}. \prod_{j=1}^{l} e_j^{\beta_j}.\omega$ est une intégrale première de ω .

b) S'il existe α_i , $\beta_j \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \Theta_{f_i} + \sum_{j=1}^{l} \beta_j \Theta_{e_j} = 0,$$

alors la fonction $I = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \log f_i + \sum_{j=1}^{l} \beta_j \log e_j$ est une intégrale première de ω .
Lorsque tous les α_i sont des nombres entiers, alors ω admet une intégrale première donnée par:

$$I = \exp(F) = \prod_{i=1}^{k} f_i^{\alpha_i}. \prod_{j=1}^{l} e_j^{\beta_j} .$$

c) S'il existe $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ tels que:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \Theta_{f_i} = d\omega$$

alors il existe $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $n_i \in \mathbb{N}$ et $g \in \mathbb{C}[x, y]$ tels que:

$$I = {f_1}^{\alpha_1}.{f_2}^{\alpha_2}...{f_k}^{\alpha_k} \exp\left(\frac{g}{{f_1}^{n_1}.{f_2}^{n_2}...{f_k}^{n_k}}\right)$$

est une intégrale première de ω.

Remarque:

Nous résumons dans le tableau ci-dessous les types des intégrales premières utilisées au cours de ce chapitre , suivant le théorème de Singer.

Relations	Le type de l'intégrale première
$\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \Theta_{f_i} + \sum\limits_{j=1}^{l} \beta_j \Theta_{e_j} = d\omega$; α_i , $\beta_j \in \mathbb{C}$	$I = \int \prod\limits_{i=1}^{k} {f_i}^{\alpha_i}. \prod\limits_{j=1}^{l} e_j^{\beta_j}.\omega$
$\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \Theta_{f_i} + \sum\limits_{j=1}^{l} \beta_j \Theta_{e_j} = 0$; α_i , $\beta_j \in \mathbb{C}$	$I = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \log f_i + \sum_{j=1}^{l} \beta_j \log e_j$
$\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \Theta_{f_i} = d\omega$; $\alpha_i \in \mathbb{Z}$	$I = {f_1}^{\lambda_1}.{f_2}^{\lambda_2}...{f_k}^{\lambda_k} \exp\left(\frac{g}{{f_1}^{n_1}.{f_2}^{n_2}...{f_k}^{n_k}}\right)$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$
$\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \Theta_{f_i} = 0$; $\alpha_i \in \mathbb{Q}$	$I = \dfrac{G}{H}$ avec $G, H \in \mathbb{C}[x, y]$

Tableau 2: Les relations entre les cofacteurs et les intégrales premières .

Chapitre 4

La méthode d'intégration de Lie

Considérons un système d'équations différentielles de la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases} \tag{4.1}$$

où $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont des polynômes à deux variables complexes. Ce système est équivalent à l'équation différentielle ordinaire d'ordre un suivante:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}.$$

4.1 Symétrie d'une équation différentielle

Définition 4.1.1 *La symétrie d'une équation différentielle est un changement de variables, pouvant porter sur les variables dépendantes ou indépendantes, qui laisse l'équation différentielle invariante.*

Exemple 4.1.1 *Considérons un système d'équations différentielles de la forme:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = \omega(x) \end{cases}$$

la solution de cette équation est $y(x) = \int \omega(x)\,dx + c$ *où* c *est une constante, cette équation est invariante par le changenent de variable,* $y \to y + c$ *; si* y *est une solution alors* $y + c$ *est également une solution.*

On voit que la constante additive d'intégration est liée à l'existence d'une symétrie de l'équation par translation de la variable dépendante y.

Exemple 4.1.2 *Considérons un système d'équations différentielles de la forme:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

la solution de cette équation est $y(x) = c_1 e^x$ *où* c_1 *est une constante, cette équation est invariante par le changenent de variable,* $x \to x + c$*. Si* $y(x)$ *est une solution alors* $y(x+c)$ *est également une solution, c'est-à-dire* $y(x) = c_1 e^x \to y(x+c) = c_1 e^{x+c} = (c_1 e^c) e^x$*.*

On voit que la constante est liée à l'existence d'une symétrie de l'équation par translation de la variable indépendante x.

4.2 Groupe des symétries de Lie.

4.2.1 Groupe de transformations à un paramètre.

Définition 4.2.1 *Soit* (x, y) *un point d'un ouvert* $U \subset \mathbb{C}^2$ *et* T_ϵ *une transformation à un paramètre* ϵ *appartenant à un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ *, avec* Φ *est une loi additive interne définie sur* I *,* T_ϵ *est définie comme suit:*

$$T_\epsilon : U \to \ \mathbb{C}^2 \ \text{ telle que : } (x, y) \mapsto T_\epsilon(x, y) = (\hat{x}, \hat{y}).$$

L'ensemble des transformations T_ϵ *forme un groupe* G *à un paramètre si:*

1) pour tout $\epsilon \in I$ *la transformation* T_ϵ *est holomorphe.*

2) I *avec la loi additive intèrne* Φ *forment un groupe noté* (I, Φ)*.*

3) $T_0(x, y) = (\hat{x}, \hat{y}) = (x, y)$ *, où* $\epsilon = 0$ *est l'identité du groupe* (I, Φ)*.*

4) pour tout $T_\epsilon \in G$*,* T_ϵ *est inversible et* $(T_\epsilon)^{-1} = T_{-\epsilon}$ *.*

Exemple 4.2.1 *Le groupe de transformations dans* $\mathbb{C}^2$ *suivant:*

$$\begin{cases} \hat{x} = x + \frac{1}{2}\epsilon \\ \hat{y} = y + \frac{\sqrt{3}}{2}\epsilon \end{cases} , \quad \epsilon \in \mathbb{R}$$

est un groupe à un paramètre ϵ *, avec* $\Phi(\epsilon, \epsilon') = \epsilon + \epsilon'$*, ce groupe correspond à des mouvements paralleles à l'orbite* γ *, qui est une orbite d'angle* $\frac{\pi}{3}$*,* G *est un groupe des translations.*

4.2.2 Transformation infinitésimale.

Considérons une transformation infinitésimale:

$$T_\epsilon(x, y) = (\hat{x}(x, y; \epsilon), \hat{y}(x, y; \epsilon)) \quad \text{où} \quad \epsilon \in I$$

Le développement limité (de Taylor) de la transformation $T_\varepsilon(x, y)$ au voisinage de l'identité 0, donne:

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y) + \epsilon \left(\frac{\partial \hat{x}(x, y; \epsilon)}{\partial \epsilon} |_{\epsilon=0}, \frac{\partial \hat{y}(x, y; \epsilon)}{\partial \epsilon} |_{\epsilon=0} \right) + \left(o\left(\epsilon^2\right), o\left(\epsilon^2\right) \right)$$

c'est-à-dire:

$$\begin{cases} \hat{x} = x + \epsilon \frac{\partial \hat{x}(x, y; \epsilon)}{\partial \epsilon} |_{\epsilon=0} + o(\epsilon^2) \\ \hat{y} = y + \epsilon \frac{\partial \hat{y}(x, y; \epsilon)}{\partial \epsilon} |_{\epsilon=0} + o(\epsilon^2) \end{cases} .$$

Notons:

$$\begin{cases} \xi(x, y) = \frac{\partial \hat{x}(x, y; \epsilon)}{\partial \epsilon} |_{\epsilon=0} \\ \eta(x, y) = \frac{\partial \hat{y}(x, y; \epsilon)}{\partial \epsilon} |_{\epsilon=0} \end{cases} .$$

La transformation:

$$\begin{cases} \hat{x} = x + \epsilon \xi(x, y) + o(\epsilon^2) \\ \hat{y} = y + \epsilon \eta(x, y) + o(\epsilon^2) \end{cases}$$

est dite transformation infinitésimale de la transformation T_ϵ et $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ est dite composante infinitésimale de la transformation T_ϵ .

Générateur infinitésimal.

Définition 4.2.2 *Le générateur infinitésimal de la transformation T_ϵ du groupe G, est l'opérateur*

$$X = \xi\left(x,y\right)\frac{\partial}{\partial x} + \eta\left(x,y\right)\frac{\partial}{\partial y} \ ,$$

et pour toute fonction holomorphe F, on a l'égalité suivante:

$$XF\left(x,y\right) = \xi\left(x,y\right)\frac{\partial F\left(x,y\right)}{\partial x} + \eta\left(x,y\right)\frac{\partial F\left(x,y\right)}{\partial y} \ .$$

L'opérateur différentiel $X = \xi(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ est l'opérateur du groupe G et XF est la dérivée de Lie de la fonction F.

Une série de Lie peut être définie sous une forme condensée en utilisant l'application exponentielle:

$$\begin{aligned} F\left(\hat{x},\hat{y}\right) &= F\left(x,y\right) + \epsilon XF\left(x,y\right) + \frac{\epsilon^2}{2!}X\left(XF\right) + \ldots.. \\ &= \exp\left(\epsilon X\right).F \end{aligned}$$

L'avantage de cette formule est de remplacer une transformation non linéaire par une série de transformations linéaires infinitésimales.

La connaissance de l'opérateur X (ou des coefficients infinitésimaux) permet de reconstruire la transformation T_ϵ puisque:

$$\begin{cases} \hat{x} = \exp\left(\epsilon X\right)x \\ \hat{y} = \exp\left(\epsilon X\right)y \end{cases}$$

qui appelé série de Lie.

Exemple 4.2.2 *Considérons la composante infinitésimale de la transformation T_ϵ dans $\mathbb{C}^2$ suivante:*

$$\left(\xi\left(x,y\right), \eta\left(x,y\right)\right) = \left(-y, x\right).$$

On a $X\left(x\right) = \xi(x,y) = -y$, $X\left(X\left(x\right)\right) = X\left(-y\right) = -\eta(x,y) = -x$, $X^3\left(x\right) = y$, ...etc .

On a montré alors qu'on a la série suivante:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= x\left(1-\frac{\epsilon^2}{2!}+\frac{\epsilon^4}{4!}+...\right)-y\left(\epsilon-\frac{\epsilon^3}{3!}+\frac{\epsilon^5}{5!}+...\right)\\ &= x\cos\epsilon - y\sin\epsilon.\end{aligned}$$

En faisant de la même manière avec $\hat{y}$*, on trouve:* $X(y)=\eta(x,y)=x$,
$X(X(y))=X(x)=-y$, $X^3(y)=-x$ *, ...etc.*
On a montré, alors qu'on a la série suivante:

$$\begin{aligned}\hat{y} &= x\left(\epsilon-\frac{\epsilon^3}{3!}+\frac{\epsilon^5}{5!}+...\right)+y\left(1-\frac{\epsilon^2}{2!}+\frac{\epsilon^4}{4!}+...\right)\\ &= x\sin\epsilon + y\cos\epsilon.\end{aligned}$$

Le groupe G*, il s'agit du groupe de rotations, le générateur infinitésimal associé à ce groupe est*

$$\begin{aligned}X &= \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\\ &= -y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}$$

Etant donné un générateur infinitésimal X, on peut reconstruire la transformation à un paramètre associée en résolvant le problème:

$$\begin{cases}\dfrac{dT_\epsilon(x,y)}{d\epsilon}=XT_\epsilon(x,y)\\ T_0(x,y)=(x,y)\end{cases}.$$

Alors il ya une équivalence entre le groupe de transformation à un paramètre et son générateur infinitésimal .

Nom	Transformations pontuélles	Générateurs infinitésimaux
translation	$(\hat{x},\hat{y})=(x+\epsilon,y)$	$X=\dfrac{\partial}{\partial x}$
translation	$(\hat{x},\hat{y})=(x,y+\epsilon)$	$X=\dfrac{\partial}{\partial y}$
translation	$(\hat{x},\hat{y})=(x+\epsilon,y+\epsilon)$	$X=\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial y}$
dilation	$(\hat{x},\hat{y})=(\epsilon x,y) \quad , \quad \epsilon \gneqq 0$	$X=x\dfrac{\partial}{\partial x}$
dilation	$(\hat{x},\hat{y})=(x,\epsilon y) \quad , \quad \epsilon \gneqq 0$	$X=y\dfrac{\partial}{\partial y}$
dilation	$(\hat{x},\hat{y})=(\epsilon x,\epsilon y) \quad , \quad \epsilon \gneqq 0$	$X=x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}$
rotation	$\begin{cases}\hat{x}=x\cos\epsilon+y\sin\epsilon\\ \hat{y}=x\sin\epsilon+y\cos\epsilon.\end{cases}$	$X=y\dfrac{\partial}{\partial x}+x\dfrac{\partial}{\partial y}$
rotation	$\begin{cases}\hat{x}=x\cos\epsilon+y\sin\epsilon\\ \hat{y}=-x\sin\epsilon+y\cos\epsilon.\end{cases}$	$X=y\dfrac{\partial}{\partial x}-x\dfrac{\partial}{\partial y}$

Tableau 4.1: définition des principaux groupes de transformation ponctuelle.

Définition 4.2.3 *Une fonction holomorphe F est dite invariante par le groupe G de tran formations à un paramètre, si et seulement si*

$$F\left(T_\epsilon\left(x,y\right)\right)=F\left(x,y\right) \ \ ,\forall T_\epsilon\in G \ .$$

On peut montrer que F est invariante par la transformation T_ϵ si et seulement si $XF=0$. Maintenant on s'interesse à la détèrmination des groupes de transformations à un paramètre pour une équation différentielle ordinaire.

4.3 Prolongation

Considérons un système d'équations différentielles de la forme:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=P(x,y)\\ \dfrac{dy}{dt}=Q(x,y)\end{cases}$$

où $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des polynômes à deux variables complexes.
Notons : $\mathbf{X} \cong \mathbb{C}$ l'espace des variables indépendantes x, $\mathbf{Y} \cong \mathbb{C}$ l'espace des variables dépendantes y, $\mathbf{Y}_k$ l'espace des germes à l'ordre k, dont chaque élément est de la forme $y^{(k)}$et $\mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{Y}\times\ \mathbf{Y}_1 \times ... \times \mathbf{Y}_k$ est l'espace de produit cartésien.
Un groupe de transformations associé à cette équation différentielle d'ordre un est défini par ces éléments comme suit:

$$T_\epsilon : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \quad , \qquad \text{tel que:} \qquad (x, y) \mapsto (\hat{x}, \hat{y})$$

òu $\hat{x}$ et $\hat{y}$ sont respectivement , l'image des variables indépendantes et dépendantes.
Avant la mise en oeuvre d'une méthode de calcul du groupe de symétries à un paramètre d'une équation différentielle ordinaire , nous avons besoin de remplacer la notion d'équation differetielle par un objet "géométrique" .
Pour le faire nous avons besoin de prolonger l'espace de base $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ représentant la variable indépendante et dépendante à l'étude à un espace total qui représente également les différents dérivés partielles survenant dans l'équation .
Cet espace totale $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}^{(k)}$ dont les coordonnées représentent les variables indépendantes, dépendantes et les dérivés des variables dépendantes à l'ordre k est appelé l'espace de jet $\mathbf{J}^{(k)}$ d'ordre k de l'espace de base $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.

4.3.1 Prolongement à l'ordre 1

Etant donné une équation différentielle ordinaire d'ordre un, une transformation à un paramètre associée à cette équation différentielle est de la forme:

$$(\hat{x}, \hat{y}) = T_\epsilon (x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \tag{4.2}$$

avec $\hat{y} = \hat{y}(x, y, \epsilon) \ \in \mathbf{Y}$. Le générateur infinitésimal associé à (4.1) de la forme:

$$X = \xi (x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta (x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

où

$$\begin{cases} \hat{x} = x + \epsilon\xi (x, y) + o(\epsilon^2) \\ \hat{y} = y + \epsilon\eta (x, y) + o(\epsilon^2) \end{cases} \tag{4.3}$$

Le prolongement d'ordre un de X , noté $X^{(1)}$, est un champ de vecteurs défini dans l'espace de jet $\mathbf{J}^{(1)} = \mathbf{X} \times \mathbf{Y}^{(1)}$ comme suit:

$$X^{(1)} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x,y,y')\frac{\partial}{\partial y'}$$

et

$$\eta^{(1)}(x,y,y') = D_x\eta(x,y) - y'D_x\xi(x,y),$$

où D_x est l'opérateur différentiel total par rapport à x :

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + \ldots.$$

On a d'après (4.3) : $\hat{x} = x + \epsilon\xi(x,y) + o(\epsilon^2)$ implique que

$$\begin{aligned} d\hat{x} &= dx + \epsilon d\xi(x,y) \\ &= dx + \epsilon\left(\frac{\partial\xi(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial\xi(x,y)}{\partial y}dy\right) \\ &= \left(1 + \epsilon\left(\xi_x + y'\xi_y\right)\right)dx \end{aligned}$$

de la même manière pour $\hat{y}$ on obtient

$$d\hat{y} = (y' + \epsilon(\eta_x + y'\eta_x))\,dx$$

alors

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \hat{y}_{\hat{x}} = \frac{y' + \epsilon(\eta_x + y'\eta_x)}{1 + \epsilon\left(\xi_x + y'\xi_y\right)}$$

En utilisant le développement limité, on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{y}_{\hat{x}} &= y_x + \epsilon\left(\eta_x + y'\eta_y\right)\left(1 + \epsilon\left(\xi_x + y'\xi_y\right)\right) + o\left(\epsilon^2\right) \\ &= y_x + \epsilon\left(\eta_x + y_x\eta_y - y_x\xi_x - y_x^2\xi_y\right) + o\left(\epsilon^2\right) \\ &= y_x + \epsilon\eta^{(1)}(x,y,y') + o\left(\epsilon^2\right). \end{aligned}$$

D'où : $\eta^{(1)}(x,y,y') = \eta_x + y_x\eta_y - y_x\xi_x - y_x^2\xi_y = D_x\eta(x,y) - y'D_x\xi(x,y)$.

4.4 Détermination du groupe de symétrie

Considérons un système d'équations différentielles de la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases} \tag{4.4}$$

Soit $T_\epsilon(x,y) = (\hat{x},\hat{y})$ une transformation holomorphe qui dépend continûment de ϵ, cette transformation est une symétrie de l'équation (4.4) si

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\hat{x}}{dt} = P(\hat{x},\hat{y}) \\ \dfrac{d\hat{y}}{dt} = Q(\hat{x},\hat{y}) \end{array}\right. \tag{4.5}$$

Avant de définir le groupe de symétries, on aborde la notion de groupe de Lie.

Définition 4.4.1 *Un groupe de Lie est une variété holomorphe G, munie d'une structure de groupe telles que les opérations de multiplication et l'inversion sont holomorphes*

Définition 4.4.2 *Le groupe de symétries de Lie d'une équation différentielle ordinaire est l'ensemble des transformations à un paramètre local ϵ dans un voisinage centré en* 0 *continues par rapport à ϵ et vérifiant l'équivalence* (4.5)*.*

Cet ensemble vérifie les axiomes d'un groupe et T_0 est son élément neutre.

Après la définition de ces deux groupes, on peut voir que les groupes de Lie comme des familles de symétries qui varient d'une façon régulières en fonction des paramètres.

Exemple 4.4.1 *le groupe de rotation $SO(2)$ d'angle θ est une famille de symétries qui dépend d'une façon continue d'un paramètre θ , où l'action de ce groupe sur $\mathbb{C}^2$ est définie comme suit:*

$$\left(\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \to \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$

De plus, le calcul du groupe de symétrie est algorithmique.

4.5 Facteur intégrant de Lie

Soit l'équation différentielle $\dfrac{dy}{dx} = \omega(x,y)$ associée au système (1.1), l'idée consiste à déterminer une intégtale première I, définie par la relation $D_x I(x,y) = 0$, c'est-à-dire

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \omega(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\right) I = 0.$$

Si on connaît une symétrie de générateur X et si I est une intégtale première, XI l'est également. Comme elle est unique, on peut écrire: $XI = F(I)$, où F est une fonction inconue. Il en résulte qu'il est possible de trouver une intégrale première Φ,telle que

$$X\Phi = \xi(x,y)\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y} = 1,$$

pour cela, il suffit que Φ soit la primitive de $\frac{1}{F}$.
Alors il existe une intégrale première Φ,telle que

$$\begin{aligned} X\Phi &= \xi(x,y)\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y} = 1 \\ D_x\Phi &= \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x} + \omega(x,y)\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

implique que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x} &= -\frac{\omega(x,y)}{\eta(x,y) - \omega(x,y)\xi(x,y)} \\ \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y} &= -\frac{1}{\eta(x,y) - \omega(x,y)\xi(x,y)} \end{aligned}$$

L'intégrale première s'écrit :

$$\Phi(x,y) = \int \frac{dy - \omega(x,y)\,dx}{\eta(x,y) - \omega(x,y)\xi(x,y)} = c^{te}. \text{ avec } \eta - \omega\xi \neq 0$$

Autrement dit,

$$\frac{1}{\eta(x,y) - \omega(x,y)\xi(x,y)}$$

est un facteur intégrant de l'équation $\frac{dy}{dx} = \omega(x,y)$.

Exemple 4.5.1 *Soit l'équation différentielle* $\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{y}{x}$ *, la condition de symétrie s'écrit:*

$$\left(\xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(y^2 - \frac{y}{x}\right) = \frac{\partial\eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(y^2 - \frac{y}{x}\right) - \frac{\partial\xi}{\partial y}\left(y^2 - \frac{y}{x}\right)^2$$

cette condition possède une infinité de solutions, il suffit de trouver une solution particulière qui n'annule pas le facteur $\eta(x,y) - \omega(x,y)\xi(x,y)$. *une solution polynomiale est facile à trouver, si elle existe, il suffit d'essayer tous les polynômes dans l'ordre des degrés croissants, on a* $\xi(x,y) = x$ *et* $\eta(x,y) = -y$ *est une solution,* *d'où*

$$\frac{1}{\eta(x,y)-\omega(x,y)\xi(x,y)}=-\frac{1}{xy^2}$$

est un facteur intégrant de l'équation $\frac{dy}{dx}=y^2-\frac{y}{x}$. *On a* $dy=\left(y^2-\frac{y}{x}\right)dx$,

d'où

$$-\frac{1}{xy^2}dy+\frac{y^2-\frac{y}{x}}{xy^2}dx=0,$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x} &= \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2y}\\ \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y} &= -\frac{1}{xy^2}\end{aligned}$$

alors $\Phi(x,y)=\frac{1}{xy}+\ln|x|=c$, *c'est-à-dire:*

$$y=\frac{1}{x(c-\ln|x|)}.$$

4.6 Crochet de Lie et les symétries infinitésimales

Définition 4.6.1 *Soient* X *et* Y *deux champs de vecteurs holomorphes dans* $\mathbb{C}^2$.

Le crochet de Lie entre X *et* Y, *est noté* $[X,Y]$, *c'est le champ de vecteurs holomorphe donné par l'expression:*

$$[X,Y]=(X(Y(x))-Y(X(x)))\frac{\partial}{\partial x}+(X(Y(y))-Y(X(y)))\frac{\partial}{\partial y}.$$

Exemple 4.6.1 *Soient* X *et* Y *deux champs de vecteurs linéaires dans* $\mathbb{C}^2$ *donnés par:*

$$\begin{cases} X=a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\\ Y=cx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\end{cases}.$$

Où a,b,c *et* d *sont des nombres complexes, alors le crochet de Lie entre* X *et* Y *est* $[X,Y]=ac\frac{\partial}{\partial x}+bd\frac{\partial}{\partial y}$.

Définition 4.6.2 *Soit X un champ de vecteurs rationnel dans $\mathbb{C}^2$.*

On dit qu'un champ de vecteurs rationnel Y est une symétrie infinitésimale de X, s'il existe une fonction rationnelle $\mu \in \mathbb{C}(x,y)$ telle que:

$$[X,Y] = \mu X$$

Exemple 4.6.2 *Soient X et Y deux champs de vecteurs linéaires dans $\mathbb{C}^2$ donnés par*

$$\begin{cases} X = a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} \\ Y = cx\dfrac{\partial}{\partial x} + dy\dfrac{\partial}{\partial y} \end{cases} .$$

Où a, b, c et d sont des nombres complexes, supposons que $ac \neq 0$ et $bd \neq 0$, dans ce cas, s'il existe $\mu \in \mathbb{C}(x,y)$ telle que: $[X,Y] = \mu X$, μ est une fonction rationnelle constante, c'est-à-dire $\mu \in \mathbb{C}$.

Il est clair que Y est une symétrie infinitésimale de X si et seulement si Y est un multiple du champ radial c'est-à-dire $Y = \mu\left(x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.

Proposition 4.6.1 *Soient X et Y deux champs de vecteurs rationnels dans $\mathbb{C}^2$ et $T = \det(X,Y)$. Si $T \neq 0$, alors:*

$$[X,Y] = \left(div(Y) - \frac{Y(T)}{T}\right)X + \left(\frac{X(T)}{T} - div(X)\right)Y \quad .$$

Démonstration : *Supposons que :*

$$\begin{cases} X = a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} \\ Y = cx\dfrac{\partial}{\partial x} + dy\dfrac{\partial}{\partial y} \end{cases} .$$

alors

$$T = \det(X,Y) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

et

$$[X,Y] = \left(X(c) - Y(a)\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(X(d) - Y(b)\right)\frac{\partial}{\partial y} \; .$$

La décomposition de $[X,Y]$ par rapport à X et Y, donne

$$[X,Y] = \frac{\det([X,Y],Y)}{T}X - \frac{\det([X,Y],X)}{T}Y$$

ainsi, la preuve de la proposition revient à montrer que :

$$\det\left([X,Y],X\right) = -X(T) + T.div(X)$$

et

$$\det\left([X,Y],Y\right) = -Y(T) + T.div(Y)$$

nous montrons la validité de la première égalité par l'utilisation de la multi linéarité de déterminant, nous obtenons:

$$(1) \qquad X(T) = \det\begin{pmatrix} X(a) & c \\ X(b) & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a & X(c) \\ b & X(d) \end{pmatrix}$$

et

$$(2) \qquad \det\left([X,Y],X\right) = \det\begin{pmatrix} X(c) & a \\ X(d) & b \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} Y(a) & a \\ Y(b) & b \end{pmatrix}$$

par conséquent, après la somme (1) + (2) , *on obtient :*

$$(*) \qquad X(T) + \det\left([X,Y],X\right) = \det\begin{pmatrix} X(a) & c \\ X(b) & d \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} Y(a) & a \\ Y(b) & b \end{pmatrix}$$

on développe l'expression à gauche de $(*)$, *on obtient :*

$$X(T) + \det\left([X,Y],X\right) = (ad - bc)\,div(X) = T.div(X) \qquad .$$

Donc on a: $\det\left([X,Y],X\right) = -X(T) + T.div(X)$ *, et par le même raisonnement on obtient :* $\det\left([X,Y],Y\right) = -Y(T) + T.div(Y)$. ■

4.7 Symétrie et l'intégration des facteurs rationnels

Théorème 4.7.1 *Soit* X *un champ de vecteurs polynomial dans* $\mathbb{C}^2$.
Il existe un facteur intégrant rationnel pour X *si et seulement si* X *admet une symétrie infinitésimale.*

Démonstration : Supposons que le champ de vecteurs $X = P(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ admet une symétrie infinitésimale, par définition il existe un champ de vecteurs rationnels Y et une fonction rationnelle μ tels que: $[X,Y] = \mu X$, et d'après la proposition 4.6.1, on a $T = \det(X,Y)$ tel que: $\dfrac{X(T)}{T} + div(X) = 0$, par conséquent:

$$div(TX) = \frac{\partial(TP)}{\partial x} + \frac{\partial(TQ)}{\partial y} = T\left(\frac{X(T)}{T} + div(X)\right) = 0$$

nous concluons que T est un facteur intégrant rationnel pour X.

<u>De l'autre côté</u>. Si X admet un facteur intégrant rationnel que nous noterons μ, nous avons :

$$Y = \frac{1}{div(X)}\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

tel que: $T = \det(X,Y) = -\dfrac{X(\mu)}{div(X)}$, et comme μ est un facteur intégrant pour X alors: $0 = div(\mu X) = \mu div(X) + X(\mu)$.

Si pour $T = \mu$ et par la proposition 4.6.1 on a:

$$[X,Y] = \left(\frac{Y(T)}{T} + div(Y)\right)X \ .$$

Ainsi nous voyons que Y est une symétrie infinitésimale pour X . ■

Exemple 4.7.1 *Soit X un champ de vecteurs polynomial dans $\mathbb{C}^2$.*
X admet une symétrie infinitésimale si et seulement si X admet une intégrale première de la forme :

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \log f_i + \left(\frac{g}{f_1^{\ n_1}.f_2^{\ n_2}...f_k^{\ n_k}}\right).$$

Où $n_i \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$, $g, f_i \in \mathbb{C}[x,y]$ et les f_i sont des polynômes irréductibles.

Conclusion

Pour la méthode d'intégration de Darboux, elle peut être considérer comme un algorithme pour décider si une équation différentielle admet, ou non, une intégrale première Liouvilllienne, afin que nous puissions résoudre deux problèmes algorithmiquement.

(1) étant donné une 1-forme polynomiale ω : limiter le degré des courbes algébriques invariantes .

(2) étant donné une 1-forme polynomiale ω et une courbe algébrique invariante : $\{f(x,y)=0\}$ limiter le degré des polynômes $g\in\mathbb{C}[x,y]$ tels que : $\exp\left(\frac{g}{f^{\,k}}\right)$; $k\in\mathbb{N}$, est un facteur exponentiel de ω .

En fait, si nous résolvons (1) et (2) , nous pouvons déterminer toutes les courbes algébriques invariantes et tous les facteurs exponentiels que ω admet .

Avec ces informations, la méthode de Darboux (révisée) le problème d'intégration se réduit à un simple problème d'algèbre linéaire .

L'étude des symétries dans les équations différentielles ne se limite pas aux équations différentielles du premier ordre. La théorie est également applicable aux équations différentielles d'ordre r, $r\geqslant 2$. On peut aussi appliquer la théorie de Lie aux équations différentielles aux dérivées partielles, à des problèmes de types variationnelles (théorème de Noether) et aux problèmes hamiltonniens. ceci n'est qu'une petite liste des diverses applications des groupes de Lie. Plus récemment, plusieurs efforts de recherche sont consacrés à développer une théorie analogue pour les équations aux différences finies.

Bibliographie

[Cha90] B. Chabat, *Introduction à l'analyse complexe.*Tome 2: *Fonctions de plusieurs variables*, Edition Mir Moscou, 1990.

[CL99] C.Christopher, J.Llibre, *Algebraic aspects of integrability for polynomial systems,* Qual.Theory Dyn. Syst. 1 (1999), no. 1, 71-95.

[CM82] D. Cerveau and J-F.Mattei, *Formes intégrables holomorphes singulières*, Astérique 97,SMF,1982.

[Dar78] G. Darboux, *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (Mélanges)*, Bulletin Sciences Mathématiques 2éme série 2(1878), 60-96;123-144;151-200.

[Hil76] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley & Sons, 1976.

[Inc56] E. L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover, 1956.

[Jou79] J. P. Jouanolou, *Equations de Pfaff Algébriques*, Lecteur Notes in Math. 708, Springer,1979.

[Lio00] J. M. Lion, *Un critère de Darboux d'existence d'intégrale première pour les 1-formes différentielles analytiques*, Boletim da Sociedade Brasileira de matematica, 31 (2), 2000.

[Lie93] S.Lie, *Theories der Transformation gruppen.* Dritter und Letzter Abschmitt, Teubner, Leipzig, 1893.

[Olv95] P. J. Olver, *Applications of the Lie groups to differenttial equations,*(New York Springer), 1995.

[Per01] J. V. Pereira, *Vector fields, invariant varieties and linear systems,* Annales de l'institut de Fourier, 5, 2001, 1385-1405.

[Poi91-97] H. Poincaré, *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré I et II*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 5 (1891),161-191;11(1897), 193-239.

[PS83] M. J. Prelle , M. F. Singer, *Elementary first integrals of differential equations,* Trans. Amer. Math. Soc. 279 (1983), no. 1, 215-229.

[Rit48] J. F. Ritt, *Integration in finite terms: Liouville's Theory of Elementary Methods*, Columbia University Press, 1948.

[Sin92] M. F. Singer, *Liouvillian first integrals of differential equations*, Transactions of the American Mathematical Society 333 (1992), 673-688.