

N° d'ORDRE :10/2011-M/ MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENE »
FACULTE DE MATHEMATIQUES



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN :Mathématiques

Spécialité :Recherche Opérationnelle

Par : AIT BOUAZZA SOFIA

Sujet

**Sur Le Nombre De Domination Localisatrice
Du Produit Cartésien De Chaines**

Soutenu publiquement le 18 Octobre 2011 à 14 :30, devant le jury composé

de :

Mr- KHELLADI Abdelkader	Professeur,	à l'U.S.T.H.B.	Président
Mr- SEMRI Ahmed	Maître de Conférences A,	à l'U.S.T.H.B.	Directeur du mémoire
Mr- BERRACHEDI Abdelhafid	Professeur,	à l'U.S.T.H.B.	Examineur
Mlle- KAHOUL Nawel	Maître de Conférences ,	à l'U.S.T.H.B.	Invitée

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance à mon directeur de thèse, Mr A. Semri, Maître de Conférences /A à l'U.S.T.H.B., pour l'honneur qu'il m'a fait en assurant la direction du présent mémoire. Je le remercie pour sa disponibilité, malgré ses responsabilités et pour la pertinence de ses conseils avec lesquelles il a su me guider durant mes travaux de recherche.

Je remercie vivement Mr A. KHELLADI, Professeur à l'U.S.T.H.B., qui a bien voulu me faire honneur en acceptant de prendre en charge la présidence du jury.

Je remercie également Mr A. BERRACHEDI, Professeur à l'U.S.T.H.B., et Mlle N. KAHOUl Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B., pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de faire partie du jury.

Je tiens à remercier plus personnellement mon très chère papa "Belaid", ma sœur et mes frères, mes neveux, pour leurs soutiens et leurs encouragements tout au long de ce travail. Je remercie tout particulièrement ma très chère maman "Fariza" pour ses sacrifices, sa générosité, son éducation et ses précieux conseils. Ces quelques mots ne suffiront jamais pour décrire ce que j'éprouve pour toi maman.

Table des matières

Introduction	6
1 Concepts Fondamentaux	9
1.1 Quelques notions de base	9
1.2 Quelques paramètres structurels d'un graphe	15
1.3 Opérations classiques sur les graphes	16
1.4 Concept de la domination	20
2 Etat de l'art sur la domination localisatrice	25
2.1 Introduction	25
2.2 Relations entre γ , γ_L , γ_2 et β_0 dans les arbres	32
2.2.1 Borne supérieure sur γ_L	32
2.2.2 La relation entre $\gamma_L(T)$ et $\gamma(T)$	34
2.2.3 Caractérisation des arbres T tels que $\gamma_L(T) = \gamma(T)$	35
2.2.4 Borne inférieure sur β_0	35
2.2.5 Borne inférieure sur γ_{X2}	36
2.2.6 Relation entre les paramètres γ_L , β_0 et γ_{X2}	37
2.2.7 Bornes supérieures sur quelques rapports	40
2.3 Nombre de domination localisatrice supérieur	40
2.4 Domination dans le produit cartésien	43

3	Ensembles dominants localisateurs totaux	45
3.1	Borne inférieures pour $\gamma_t^L(T)$ dans le cas des arbres	49
3.2	Minimalité d'un dominant localisateur total	52
3.3	Relations entre γ_t^L , γ_{X_2} et β_0	53
3.3.1	Relations entre γ_t^L , γ_{X_2}	53
3.3.2	Bornes sur γ_t^L pour les arbres	55
4	La domination localisatrice du produit cartésien	56
4.1	Nombre de domination localisatrice supérieure	57
4.2	Nombre de domination localisatrice supérieure du produit cartésien . .	60
	Conclusion	70
	Bibliographie	71

Table des figures

1.1	L'étoile $k_{1,6}$	13
1.2	L'étoile double $S_{3,2}$	13
1.3	Exemple d'une chenille	13
1.4	La couronne $C_6 \circ K_1$	14
1.5	Le graphe joint de G_1 et G_2	15
1.6	La grille $P_5 \square P_4$	17
1.7	Le cylindre $C_5 \times P_4$	17
1.8	Le tore $C_5 \times C_4$	18
1.9	Le produit croisé $P_5 \times P_3$	18
1.10	Le produit fort $P_5 \boxtimes P_3$	19
2.1	Un graphe G , avec $\gamma_L(G) = 2$ et $\Gamma_L(G) = 4$	27
3.1	Un graphe G , avec $\gamma_L^t(G) = 3$	46
3.2	Un arbre T admettant deux $i(T)$ – ensembles disjoints, et $i(T) \neq \gamma_t^L(T)$	54
4.1	$\gamma_L(P_5 \square P_3) = 7$	57

Introduction

Souvent, le moyen le plus commode lorsqu'on veut représenter certaines situations ou des relations existantes entre les éléments d'un même système, est de dessiner des points et des traits joignant ces points. Ce dessin est appelé graphe, les points et les traits sont appelés respectivement sommets et arêtes.

La théorie des graphes qui consiste à étudier les différentes propriétés de ces graphes est devenue un outil puissant de la recherche opérationnelle pour la modélisation et la résolution de nombreux problèmes concrets de la vie courante. Elle trouve son origine au 18^{ème} siècle dans l'étude du célèbre problème des ponts de Königsberg (aujourd'hui appelé Kaliningrad) résolu par Euler. Depuis, elle est devenue plus qu'un outil puissant, mais aussi un moyen efficace utilisé dans d'autres disciplines telles que (l'économie, la biologie, la chimie, la physique, l'informatique, etc...).

Un des concepts intéressants de la théorie des graphes est celui de la domination. Les premiers problèmes qui marquent le début de la théorie de la domination sont les problèmes des jeux d'échecs. Grâce à Claude Berge, elle est devenue un domaine théorique en 1958 et ce n'est qu'à partir de 1977 qu'elle connaîtra son expansion grâce aux travaux de Cookayne et Hedetniemi.

L'intérêt majeur à cette théorie est du à sa richesse dans de nombreuses applications (réseaux de communication, de micro processeur, les problèmes de localisation, etc).

La domination localisatrice dans le produit cartésien de chaînes est le principal objet d'étude dans ce mémoire. La notion de domination localisatrice a été introduite en 1987 par P. J. Slater [49] dans le but d'obtenir une analyse d'une installation de détecteurs d'un intrus (incendie etc...) dans un graphe où chaque sommet correspond à une pièce.

Dans ce présent travail, nous nous sommes intéressés à l'étude du nombre de domination localisatrice du produit cartésien de deux chaînes.

Le mémoire s'articule autour de quatre chapitres :

Le premier chapitre contient quelques définitions fondamentales et rappels de notions de base dans le domaine de la théorie des graphes, que nous utilisons dans ce mémoire. On présente aussi un aperçu sur la domination dans les graphes.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons l'essentiel des travaux connus de la littérature sur la domination localisatrice dans les graphes.

Dans le troisième chapitre, nous présentons quelques résultats relatifs à la domination localisatrice totale.

Notre contribution principale se situe dans le dernier chapitre dont l'étude est basée sur le nombre de domination localisatrice total d'une chaîne d'ordre n . Nous étudions

aussi la relation entre le nombre de domination localisatrice supérieur du produit cartésien de deux chaînes et le produit du nombre de domination localisatrice supérieur de ces chaînes. De plus, nous établissons des bornes sur le nombres de domination localisatrice du produit cartésien.

Le mémoire s'achève par une conclusion générale sur l'ensemble du travail réalisé et des perspectives de recherche.

Chapitre 1

Concepts Fondamentaux

Nous consacrons ce premier chapitre à la présentation de définitions et des rappels de quelques concepts de base qui sont utilisés le long de ce mémoire.

1.1 Quelques notions de base

Un graphe G est la donnée d'un couple (V, E) , où V est un ensemble fini non vide dit ensemble des sommets et E est un ensemble des arêtes, dont chaque arête e de $E(G)$ est une paire de sommets (u, v) qu'on note aussi par $e = uv$, où v et u sont les extrémités de e . Dans ce cas, on dit que u et v sont adjacents et que e est incidente à u et v .

Une boucle est une arête dont les deux extrémités sont confondues.

Un graphe est dit simple s'il est sans boucle et sans arête multiple. Tous les graphes considérés dans ce mémoire sont simples et finis.

Voisinage

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Le voisinage ouvert d'un sommet v est $N(v) = \{u : uv \in E\}$ et le voisinage fermé d'un sommet v est $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.

Soit S un sous ensemble de sommets de G .

Le voisinage ouvert d'un sous ensemble S est $N(S) = \cup_{v \in S} N(v)$ et le voisinage fermé d'un sous ensemble S noté par $N[S] = N(S) \cup \{S\}$.

Le voisinage privé d'un sommet v par rapport à un sous ensemble S noté $pn[v, S]$ est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas d'autres voisins dans S c'est-à-dire

$$pn[v, S] = \{u \in V : N(u) \cap S = v\}.$$

Le voisinage privé externe d'un sommet v par rapport à un sous ensemble S noté $epn(v, S)$ est le voisinage privé de v dans $V \setminus S$.

Le voisinage privé interne d'un sommet v par rapport à un ensemble S noté $ipn(v, S)$ est le voisinage privé de v dans S .

Par conséquent $pn[v, S] = epn(v, S) \cup ipn(v, S)$.

Degré d'un sommet

Le degré d'un sommet $v \in V$ noté $d_G(v)$ est le cardinal de son voisinage ouvert. Un sommet de degré nul est dit isolé et un sommet de degré un est dit pendant (feuille), tandis qu'un sommet adjacent à un sommet pendant est dit support. On notera par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ le degré maximum et minimum dans G respectivement. S'il n'y a pas lieu de confusion, on écrira $d(v)$, Δ et δ pour désigner respectivement $d_G(v)$, $\Delta(G)$ et $\delta(G)$.

Chaîne et cycle

Une chaîne C d'un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie $(u_0, u_1, u_2 \dots u_k)$ de sommets distincts tels que pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $u_{i-1}u_i \in E(G)$. Les sommets u_1 et u_k sont appelés les extrémités de la chaîne C , la longueur d'une chaîne est égale au nombre de ses arêtes, ainsi C est de longueur k . Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite simple. Une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite élémentaire.

On appelle cycle C d'un graphe G toute chaîne simple dont les extrémités sont confondues.

Une corde est une arête qui relie deux sommets non consécutifs dans une chaîne.

Une chaîne (resp cycle) minimale induite (resp minimal induit) par k sommets notée P_k (resp C_k) est une chaîne (resp cycle) élémentaire sans corde.

Un graphe qui contient un seul cycle est dit unicycle et un graphe qui ne contient pas de cycle est dit acyclique.

On appelle maille d'un graphe G , notée par $g(G)$, la longueur d'un plus petit cycle dans G .

Distance

Soient u et v deux sommets d'un graphe. On appelle distance entre u et v notée $d_G(u, v)$ la longueur d'une plus courte chaîne entre u et v . Cette chaîne est appelée "chaîne géodésique". L'excentricité d'un sommet v dans un graphe $G = (V, E)$ notée $exc(v)$ est $exc(v) = \max_{w \in V} \{d(v, w) : w \in V\}$.

Le diamètre du graphe G noté $diam(G)$ est $diam(G) = \max_{v \in V} \{exc(v) : v \in V\}$.

Graphes particuliers

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

Pour un sous ensemble $S \subseteq V$, le sous graphe induit par S noté $G[S]$ est le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble S , et l'ensemble des arêtes est le sous ensembles des arêtes de E qui ont leur extrémités dans S .

Pour un sous ensemble $U \subseteq E$, le graphe partiel de G défini par U noté G_U est le graphe dont les ensembles de sommets et des arêtes sont respectivement V et U .

Le graphe complet d'ordre n , noté K_n est le graphe simple dans lequel tous les sommets sont adjacents deux à deux.

Le graphe complémentaire de G noté \overline{G} est le graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête est dans \overline{G} si et seulement si elle n'est pas dans G .

Un graphe est dit biparti si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous ensembles V_1 et V_2 tels que deux sommets quelconques d'un même sous ensemble ne soient pas adjacents.

Un graphe dont tous les sommets ont le même degré k est appelé un graphe k -régulier. Ainsi les cycles élémentaires sont des graphes 2-régulier.

Un graphe est dit connexe si pour toute paire de sommets du graphe il existe une chaîne les reliant. Une composante connexe d'un graphe est un sous graphe connexe maximal.

Un arbre est un graphe connexe sans cycle. Une forêt est un graphe où chaque composante connexe est un arbre. Un noyau est un sous graphe induit par l'ensemble des sommets $C(T) = V(T) \setminus S(T) \cup L(T)$, avec $L(T)$ ensemble de sommets pendant et $S(T)$ ensemble de sommets support d'un arbre T .

On appelle étoile le graphe biparti complet $K_{1,p}$, l'arbre à $p + 1$ sommets ayant p feuilles.

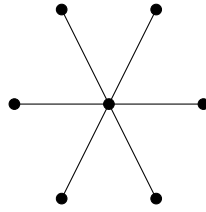


FIG. 1.1 – L'étoile $k_{1,6}$

Une étoile double $S_{p,q}$, $p \geq 1$, $q \geq 1$ est l'arbre obtenu en attachant p sommets pendants à une extrémité d'une chaîne P_2 et q sommets pendants à l'autre extrémité.

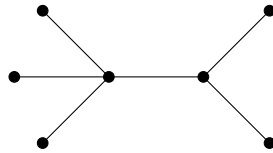


FIG. 1.2 – L'étoile double $S_{3,2}$

Une chenille T_c est un arbre dont la suppression de toutes les feuilles produit une chaîne.

L'exemple de la figure représente une chenille T_c .

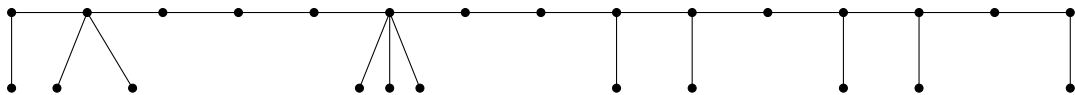


FIG. 1.3 – Exemple d'une chenille

Soient G un graphe d'ordre n avec $V(G) = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ et $S = \{u_1, u_2, u_3 \dots u_n\}$ un ensemble de sommets distincts de V .

On appelle une couronne d'un graphe $G = (V, E)$, le graphe noté par $H = G \circ K_1$ dont l'ensemble de sommets est $V \cup S$ et l'ensemble d'arêtes $E(H) = E(G) \cup \{u_i v_i : i = 1 \dots n\}$, ainsi $|V(H)| = 2n$.

Une k -couronne d'un graphe G est le graphe d'ordre $(k-1)|V(H)|$ obtenu à partir de G en attachant à chaque sommet de G une chaîne de longueur $k-1$ de sorte que les chaînes soient disjointes.

La figure illustre la couronne $C_6 \circ K_1$ d'un cycle C_6 .

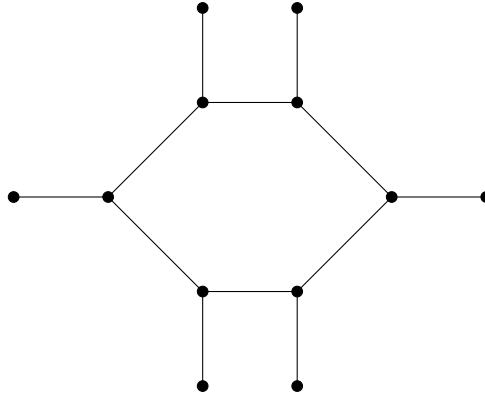


FIG. 1.4 – La couronne $C_6 \circ K_1$

Ensemble minimal /minimum et maximal/maximum pour une propriété P

Soit une propriété P , on dit qu'un ensemble S est minimal pour la propriété P si aucun sous ensemble strict de S ne vérifie la propriété. On dit qu'un sous ensemble S est minimum pour la propriété P si aucun ensemble de cardinalité plus petite que celle de S ne vérifie la propriété.

On dit qu'un ensemble S est maximal pour la propriété P si aucun sous ensemble strict de S ne vérifie la propriété. On dit qu'un ensemble S est maximum pour la propriété P si aucun ensemble plus petit de S ne vérifie la propriété.

Graphe joint

Soient $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ deux graphes.

Le graphe $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E')$ où E' est l'ensemble de toutes les arêtes possibles joignant les sommets de V_1 à V_2 , est appelé le graphe joint de G_1 et G_2 .

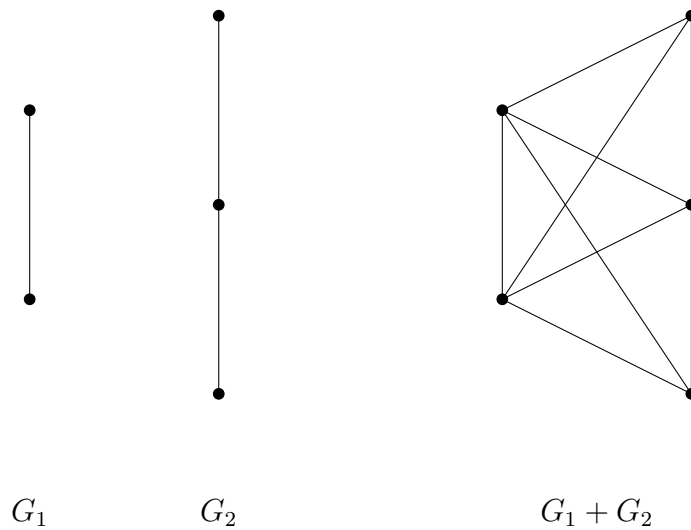


FIG. 1.5 – Le graphe joint de G_1 et G_2

1.2 Quelques paramètres structurels d'un graphe

- Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous ensemble $S \subseteq V$ est dit ensemble stable (ou indépendant) si tous les sommets de S sont deux à deux non adjacents. Le cardinal minimum (resp maximum) d'un sous ensemble stable maximal de G , est noté $i(G)$ (resp $\beta_0(G)$).
- Une clique est un sous ensemble de sommets induisant un graphe complet. La taille d'une clique est le nombre de sommets de la clique.
- Un sous ensemble $S \subset V$ est dit 2 -stable dans G , si pour deux sommets quelconques x et y de S on a $N[x] \cap N[y] = \emptyset$. Le cardinal maximum d'un

ensemble 2 – *stable* de G , noté $\rho(G)$ est appelé le nombre de 2-stabilité.

- Un couplage dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble des arêtes M de E , qui sont deux à deux non adjacentes. Si de plus, tout sommet de V est extrémité d'une arête de M , alors M est dit couplage parfait.

1.3 Opérations classiques sur les graphes

Nous allons présenter dans cette partie, les différents types de produits de graphes. Pour plus de précisions sur le concept de produits de graphes, on pourra se référer à [41].

Avant de définir chaque produit, nous présentons la notion de fibre.

Fibre

Soient $*$ l'un des produits (définis ci dessous) de G et H , x un sommet de G et y un sommet de H . On appelle H – *fibre* associée à x noté H^x le sous graphe de $G * H$ induit sur l'ensemble de sommets $\{x\} * V(H)$, c'est à dire l'ensemble des sommets dont la première coordonnée est x . De même la G – *fibre* est le sous graphe induit sur l'ensemble de sommets $V(H) * \{y\}$.

Produit cartésien de deux graphes

Soient G et H deux graphes. Le *produit cartésien* $G \square H$ de G et H est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$, tels que deux sommets (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de $V(G) \times V(H)$ sont reliés par une arête si et seulement si $x_1 x_2 \in E(G)$ et $y_1 = y_2$ ou $y_1 y_2 \in E(H)$ et $x_1 = x_2$.

Exemples :

1. Une grille $P_m \square P_n$ est le produit cartésien de deux chaînes P_m et P_n .

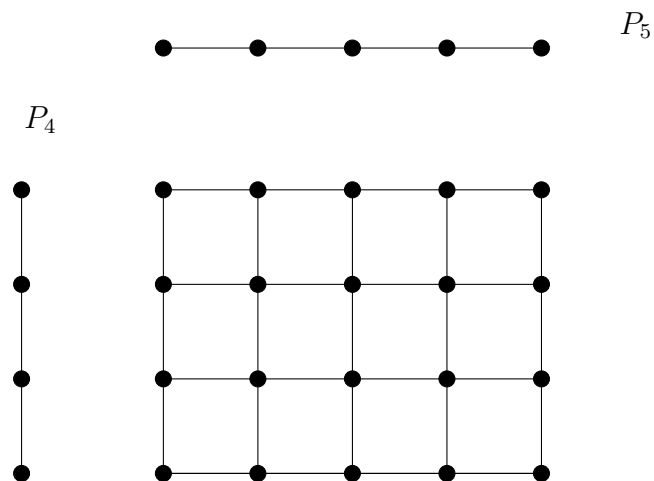


FIG. 1.6 – La grille $P_5 \square P_4$

2. Un cylindre $C_n \times P_m$ est le produit cartésien d'une chaîne P_m par un cycle C_n .

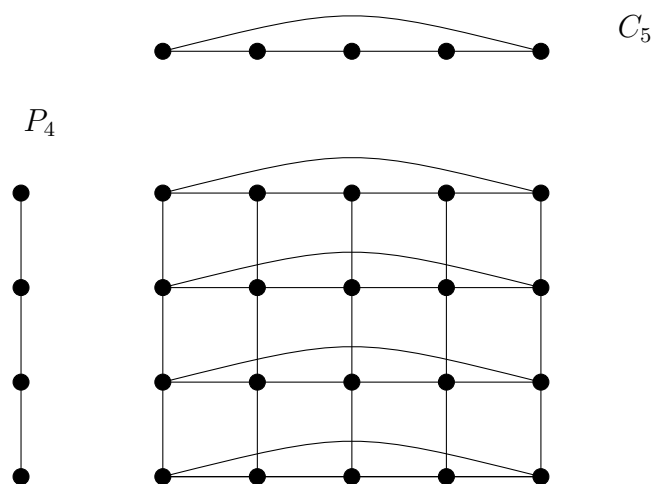


FIG. 1.7 – Le cylindre $C_5 \times P_4$

3. Un tore $C_m \times C_n$ est le produit cartésien de deux cycles C_m et C_n .

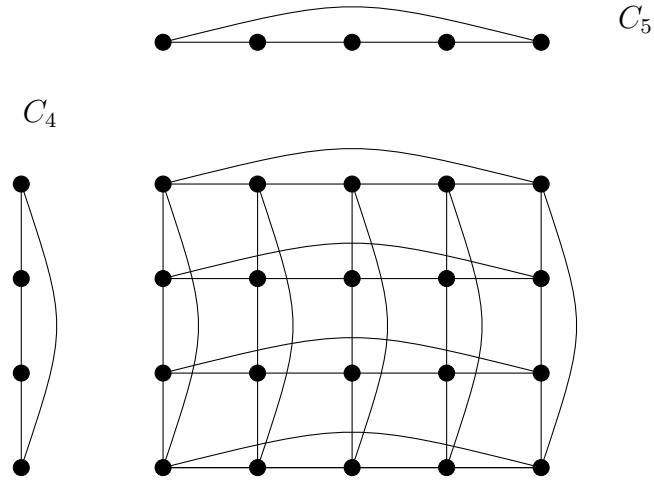


FIG. 1.8 – Le tore $C_5 \times C_4$

Produit croisé (Catégoriel)

Étant donnés deux graphes G et H , le produit direct $G \times H$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ tels que deux sommets (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont reliés par une arête si et seulement si $x_1x_2 \in E(G)$ et $y_1y_2 \in E(H)$. On pourra remarquer que

$$E(G \square H) \cap E(G \times H) = \emptyset.$$

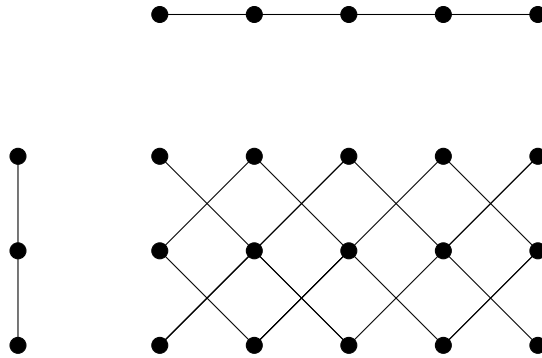


FIG. 1.9 – Le produit croisé $P_5 \times P_3$

Les fibres du produit croisé de graphes sont stables. Enfin, le degré d'un sommet dans le produit croisé est le produit des degrés de ses coordonnées dans les facteurs :

$$d_{G \times H}(u, v) = d_G(u)d_H(v).$$

Produit fort

Étant donnés deux graphes G et H , le *produit fort* $G \boxtimes H$ de G et H est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$, tels que deux sommets (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de $V(G) \times V(H)$ sont reliés par une arête si et seulement si $x_1 = x_2$ ou $x_1x_2 \in E(G)$ et $y_1 = y_2$ ou $y_1y_2 \in E(H)$.

On remarquera que :

$$E(G \boxtimes H) = E(G \times H) \cup E(G \square H).$$

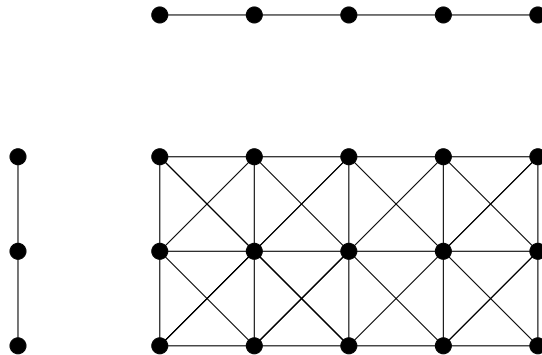


FIG. 1.10 – Le produit fort $P_5 \boxtimes P_3$

1.4 Concept de la domination

Le concept de la domination dans les graphes trouve son origine d'un problème posé au jeu d'échec. Le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée remonte au *XVII^{me}* siècle aux Inde [34].

En 1862, Jaenish [24] avait posé le problème de détermination du nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de façon à ce que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines.

Selon la règle des jeux des échecs, une reine peut se déplacer vers une case horizontalement, verticalement ou en diagonale.

R	X	X	X	X	X	X	X
X	X						
X		R					
X			X				
X				R			
X					R		
X						R	
X							X

X			R				X
						R	
		R					
							R
	R						
				R			
R							
					R		X

Pour un échiquier 8X8 le nombre minimum de reines est 5 et le nombre maximum de reines qui domine toute les cases est egal à 8. En 1958 Claude Berge [3] a écrit un livre sur la théorie des graphes dans lequel il a défini pour la première fois le concept du nombre de domination d'un graphe (il avait nommé nombre de stabilité externe).

En 1962, Ore [44] a utilisé dans le livre "graph theory" les appellations "ensemble dominant" et "nombre de domination".

En 1977, la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi [20] sur les résultats obtenus dans le domaine de la domination. Cet article a incité une recherche approfondie et plus vaste dans ce domaine.

L'idée d'introduire des conditions supplémentaires sur les sommets d'un ensemble dominant a donné naissance à de nouveaux paramètres de domination.

Actuellement, il existe plus de 100 types de domination et plus de 2000 références dans ce domaine.

En 1998 Haynes, Hedetniemi et Slater [37], [36] ont édité deux livres qui comportent 80 types de domination et 1200 références.

Domination

Un sous ensemble de sommet S de V est dit dominant de G si tout sommet v de $V \setminus S$ est adjacent à au moins un sommet de S .

Le cardinal minimum (resp maximum) d'un ensemble dominant minimal de G , noté $\gamma(G)$ (resp $\Gamma(G)$) est appelé le nombre de domination inférieur (resp supérieur) de G .

Un ensemble dominant de G de cardinalité $\gamma(G)$ est appelé un $\gamma(G)$ – ensemble.

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans un graphe :

1. Un ensemble $S \subseteq V$ est un ensemble dominant de G si pour tout sommet v de V

$$|N[v] \cap S| \geq 1.$$

2. Un ensemble $S \subseteq V$ est un ensemble dominant de G si pour tout sommet v de $V \setminus S$

$$N(v) \cap S \neq \emptyset.$$

3. Un ensemble $S \subseteq V$ est un ensemble dominant de G si $N[S] = N(S) \cup_{v \in S} N(v) = V$.

Domination double

Un sous ensemble S de V est dit dominant double de G , si tout sommet de V est dominé par au moins deux autres sommets, c'est à dire si $x \in V \setminus S$ alors x a au moins deux voisins dans S et si $x \in S$ alors x a au moins un voisin dans S .

Le nombre de domination double noté par $\gamma_{X2}(G)$ est le cardinal minimum d'un dominant double de G .

La domination double a été introduite par Harary et Haynes dans [32].

Domination totale

La domination totale est l'une des principales variantes de la domination. Elle a été introduite par Cockayne, Dawes et Hedetniemi dans [22].

Un dominant total $S \subseteq V$ est un sous ensemble de sommets tel que tout sommet de V est adjacent à au moins un sommet de S . Plus formellement, S vérifie $N(S) = V$.

Le nombre de domination totale $\gamma_t(G)$ du graphe G est le cardinal minimum d'un dominant total.

Paire domination

Un paire dominant d'un graphe G est un dominant S tel que le sous graphe induit $G[S]$ admet un couplage parfait. Tout graphe sans sommet isolé admet un paire dominant.

Le nombre de paire domination de G , noté $\gamma_p(G)$ est le cardinal d'un paire dominant minimum.

Domination stable

Un sous ensemble S de V est dit dominant stable de G si S est un dominant et le sous graphe induit par S ne contient pas d'arête.

Le cardinal minimum (resp maximum) d'un stable maximal de G noté $i(G)$ (resp $\beta_0(G)$) est appelé le nombre de domination stable (resp le nombre de stabilité) de G .

Domination localisatrice

Un sous ensemble S de V est dit dominant localisateur si S est un ensemble dominant de G et si de plus pour toute paire de sommets u, v de $V \setminus S$, $N(v) \cap S \neq N(u) \cap S$.

Le nombre de domination localisatrice, noté $\gamma_L(G)$ désigne le cardinal minimum d'un ensemble dominant localisateur de G .

La notion d'ensemble dominant localisateur a été introduite par P. J. Slater dans [49].

Domination localisatrice totale

Un sous ensemble S de V est dit dominant localisateur total si S est un ensemble dominant total de G et si de plus pour toute paire de sommets u, v de $V \setminus S$, $N(v) \cap S \neq N(u) \cap S$.

Le nombre de domination localisatrice total, noté $\gamma_t^L(G)$ désigne le cardinal minimum d'un ensemble dominant localisateur total de G .

La notion d'ensemble dominant localisateur total a été introduite par Haynes, Henning et Howard dans [35].

Paramètres de domination

La notion de stabilité dans un graphe est liée en premier lieu aux ensembles dominants. On peut facilement voir que tout stable maximal est un dominant. Par conséquent on a pour tout graphe simple G ,

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G).$$

En 1978, Cockayne, Hedetniemi et Miller [21] donnaient une extension à cette chaîne en introduisant une nouvelle notion liée à la domination appelée l'irrédondance. On dira qu'un ensemble $S \subseteq V$ est irrédondant si pour tout $x \in S$ on a $pn[x, S] \neq \emptyset$, c'est à dire chaque sommet de S possède un voisinage privé relatif à S .

Le cardinal minimum (respectivement maximum) d'un ensemble irrédondant maximal noté $ir(G)$ (respectivement $IR(G)$) est appelée le nombre d'irrédondance inférieur (respectivement supérieur).

Il est facile de voir aussi que tout ensemble dominant minimal est un irrédondant.

La chaîne d'inégalité introduite par Cockayne, Hedetniemi et Miller est la suivante

$$ir(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G) \leq IR(G).$$

Vu la diversité des problèmes liés à la domination, notre étude sera restreinte à quelques types de domination qui contribueront à l'étude des paramètres concernés dans ce mémoire.

Chapitre 2

Etat de l'art sur la domination localisatrice

Nous présentons dans ce chapitre quelques travaux publiés sur la domination localisatrice.

2.1 Introduction

La notion d'ensemble dominant localisateur a été introduite par Slater [49], en 1987. Dans le but d'obtenir une analyse d'une installation garantie de tout danger, lors d'une étude pour protection contre l'incendie. Cette installation peut être représentée par un réseau, un sommet peut représenter une chambre, un hall, une cour ou une cage d'escalier etc..., ou chaque arête peut connecter deux zones qui sont adjacentes. Une des fonctions primaires d'un système de sauvegarde est la détection de certains objet (incendie, combrioleur, etc ...), et pour cela ont supposé la présence d'un appareil de détection. Etant donné que ces appariels sont coûteux, cela a incité à optimiser leur usage. Le graphe associé à cette analyse motiva le concept des ensembles localisateurs, et davantage l'idée des ensembles dominants localisateurs.

On commence par rappeler la définition d'un ensemble dominant localisateur, et donner une remarque qui sera utile par la suite.

Définition 2.1. [23]

Soient un graphe $G = (V, E)$ et S un sous ensemble de V .

On dit que S est un ensemble dominant localisateur (EDL) de G , on le note EDL, si S est un ensemble dominant et si pour toute paire de sommets u et v de $V \setminus S$, $N(v) \cap S \neq N(u) \cap S$.

Le cardinal minimum d'un ensemble dominant localisateur de G est appelé nombre de domination localisatrice, noté $\gamma_L(G)$.

Le cardinal maximum d'un EDL minimal de G est appelé nombre de domination localisatrice supérieur, on le note par Γ_L .

Un EDL de G de cardinal $\gamma_L(G)$ (resp $\Gamma_L(G)$) est appelé un $\gamma_L(G)$ -ensemble (resp $\Gamma_L(G)$ -ensemble) de G .

On donne une illustration, soit G un graphe représenté dans la figure 2.1.

L'ensemble $S = \{e, b\}$ représente l'ensemble dominant localisateur de cardinalité minimum du graphe G , avec $\gamma_L = 2$.

On vérifie facilement que les ensemble $N(c) \cap S = \{b\}$, $N(d) \cap S = \{e, b\}$ et $N(a) \cap S = \{e, b\}$ sont deux à deux distincts.

L'ensemble $\dot{S} = \{a, b, c, e\}$ représente l'ensemble dominant localisateur minimal de cardinalité maximum du graphe G , avec $\Gamma_L = 4$.

On vérifie facilement que les ensemble $N(d) \cap \dot{S} = \{a, e\}$. De plus pour chaque sommet $x \in \dot{S}$ on a $pn(x, \dot{S}) \neq \emptyset$, car $pn(a, \dot{S}) = \{e\}$, $pn(e, \dot{S}) = \{a\}$, $pn(c, \dot{S}) = \{b\}$ et $pn(b, \dot{S}) = \{c\}$.

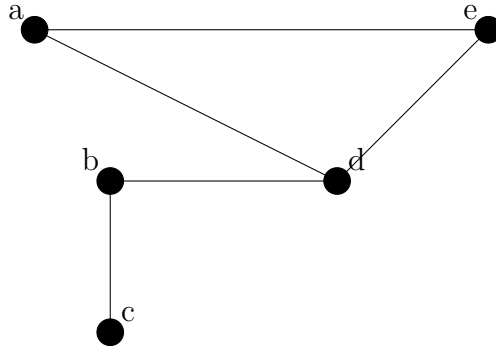


FIG. 2.1 – Un graphe G , avec $\gamma_L(G) = 2$ et $\Gamma_L(G) = 4$

Remarque 2.1. Soit G un graphe. Alors :

- Il existe un $\gamma_L(G)$ – ensemble contenant tous sommets supports de G .
- Si v est un sommet support et L l'ensemble des sommets pendants de G , alors tout $\gamma_L(G)$ – ensemble contient exactement $|L_v|$ sommets de $L_v \cup \{v\}$.

Lemme 2.1. (Slater [49])

Soient S un ensemble dominant localisateur de G et u, v deux sommets de $V(G)$

tels que :

- Si $uv \notin E(G)$ alors $N(u) = N(v)$.
- Si $uv \in E(G)$ alors $N[u] = N[v]$.

Alors S contient au moins un des deux sommets u et v .

On conclut à partir du lemme 2.1 que $\gamma_L(K_{1,p}) = p$ et $\gamma_L(P_n) = \gamma_L(C_n) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$.

Théorème 2.1. (Slater [49], [50])

1. Pour tout graphe G , on a $\gamma_L(G) \geq \gamma(G)$.
2. $\gamma_L(G) = n$ si et seulement si $G = \overline{K_n}$.
3. $\gamma_L(G) = n - 1$ si et seulement si $G = K_n$ ou $G = K_{1,n-1}$.

4. Pour toute chaîne P_n et cycle C_n d'ordre n , on a :

$$\gamma_L(C_n) = \gamma_L(P_n) = \begin{cases} 2K & \text{si } n = 5K \\ 2K + 1 & \text{si } n = 5K + 1 \text{ ou } n = 5K + 2; \\ 2K + 2 & \text{si } n = 5K + 3 \text{ ou } n = 5K + 4; \end{cases}$$

5. Si $G_1, G_2, G_3, \dots, G_K$ sont les composantes connexes d'un graphe G , alors on a :

$$\gamma_L(G) = \gamma_L(G_1) + \gamma_L(G_2) + \dots + \gamma_L(G_k).$$

Dans le Théorème suivant Slater a donné une borne inférieure sur γ_L pour les graphes r -réguliers.

Théorème 2.2. (Slater [51])

Si G est un graphe r -réguliers, alors :

$$\gamma_L(G) \geq \frac{2n}{(r+3)}.$$

Théorème 2.3. (Slater [50])

Si pour un graphe G d'ordre n , $\gamma_L(G) = h$, alors on a :

$$n \leq h + 2^h - 1.$$

A partir du Théorème 2.3, les graphes G dont $\gamma_L(G) = 1$ sont K_1 ou K_2 , et ceux dont $\gamma_L(G) = 2$, sont P_3, P_4, P_5 ou C_5 .

Le résultat suivant donne une amélioration de la borne du Théorème 2.3 pour certains graphes.

Théorème 2.4. (Slater [50])

Si pour un graphe G d'ordre n et de degré maximum Δ , $\gamma_L(G) = h$, alors on a :

$$n \leq h + \sum_{i=1}^{\Delta} \binom{h}{i}$$

Dans [49], Slater a montré que tout $\gamma_L(G)$ – ensemble d'un arbre T d'ordre n contient plus de $\frac{n}{3}$ sommets de T . Cette borne a été améliorée par Blidia, Challali, Maffray, Semri et Moncel. Par le Théorème suivant :

Théorème 2.5. (Blidia et al [8])

Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$ avec $S(T)$ l'ensemble de sommets support et $L(T)$ l'ensemble des sommets pendants de G , alors :

$$\gamma_L(T) \geq \frac{(n + L(T) - S(T) + 1)}{3}.$$

La borne est atteinte pour la chaîne P_5 .

Avant de présenter le résultat obtenu par Finbow et Hartnell sur une classe de graphes appelée les graphes bien-couverts, on donne la définition suivante :

Définition 2.2. [23]

Un graphe G est dit bien-couvert si $i(G) = \beta(G)$, c'est à dire les ensembles indépendants maximaux ont le même cardinal.

Théorème 2.6. (*Finbow et Hartnell [28]*)

Soit G un graphe avec $g(G) \geq 5$, alors G est bien couvert si et seulement si tout dominant stable de G est localisateur.

Dans [9], Blidia et Lounès ont caractérisé les sommets qui sont dans tous et dans aucun dominant localisateur minimal, pour la classe des arbres.

Dans un récent travail, Blidia et al [10] ont caractérisé les arbres admettant un ensemble dominant localisateur unique. Un arbre vérifiant cette propriété sera noté ADLU.

Notons que des études ont été faites afin de déterminer l'unicité d'un ensemble dominant minimum pour quelques paramètres de domination dans des classes de graphes tels les arbres.

Pour plus de details, on pourra consulter les articles [14], [15], [31] et [33].

Commençons par donner la remarque suivante :

Remarque 2.2. [10]

Si T est un arbre non trivial qui admet un $\gamma_L(T)$ – ensemble unique D , alors :

1. Tout sommet support appartient à D .
2. Chaque sommet support est adjacent à exactement un sommet pendent.
3. D ne contient aucun sommet pendent.

Lemme 2.2. (*Blidia et al [10]*)

Soient G un graphe connexe non trivial et D un $\gamma_L(G)$ – ensemble. Si pour tout sommets $v \in D$, $\gamma_L(G - v) > \gamma_L(G)$, alors G admet un $\gamma_L(G)$ – ensemble unique.

Les mêmes auteurs donnent un exemple qui montre que la réciproque du lemme précédent est fausse en général. Considérons un graphe G obtenu à partir de deux cycles disjoints C_5 , $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ et $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$. En identifiant les sommets x_1

et y_1 , désignons par w le nouveau sommet obtenu, ajouter deux sommets u, v ainsi que les arêtes ux_i, vy_i pour $i = 2, 3, 4, 5$.

L'ensemble $S = \{x_2, x_5, y_2, y_5\}$ est un unique $\gamma_L(G)$ – *ensemble* mais pour tout $z \in \{x_2, x_5, y_2, y_5\}$, $\gamma_L(G - v) = \gamma_L(G)$.

Soient T_1 et T_2 deux ADLU disjoints d'ordre au moins 5. Soient A_1 l'unique $\gamma_L(T_1)$ – *ensemble*, et A_2 l'unique $\gamma_L(T_2)$ – *ensemble*.

On définit ci dessous deux opérations qui permettront de lier les deux ADLU T_1 et T_2 afin d'obtenir un nouvel ADLU.

- **Opération O_1** : Relier par une arête un sommet de A_1 à un sommet de A_2 .
- **Opération O_2** : Relier par une arête un sommet de $V(T_1 - A_1)$ à un sommet de $V(T_2 - A_2)$.

Soient T_1, T_2, \dots, T_k k ADLU disjoints, d'ordre au moins cinq, et soient respectivement A_1, A_2, \dots, A_k leur unique $\gamma_L(T_i)$ – *ensembles*. Pour chaque i , soit u_i un sommet de A_i .

On définit les deux opérations suivantes :

- **Opération O_3** : Si $k \geq 3$ Relier par l'arête vu_i un nouveau sommet v à un sommet u_i de chaque A_i pour tout i , ($1 \leq i \leq k$).

Opération O_4 : Si $k \geq 2$ Relier par l'arête $w_i u_i$ un sommet pendant w_i d'une étoile $S_{1,k}$ centrée en v à un sommet u_i de chaque A_i pour tout i , ($1 \leq i \leq k$), sous la condition qu'au moins deux sommets de $\{u_1, \dots, u_k\}$ admettent chacun un voisin privé par rapport à A_i dans T_i .

Afin de donner une caractérisation des arbres admettant un $\gamma_L(T)$ – *ensemble* unique, Blidia et al ont défini une famille d'arbre μ obtenue à partir de couronnes d'ordre au moins quatre en subdivisant une seule fois toute les arêtes entre les sommets supports.

Théorème 2.7. (Blidia et al [10])

Soit T un arbre d'ordre $n \geq 2$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. T est un ADLU;
2. T admet un $\gamma_L(T)$ – ensemble D tel que $\gamma_L(G - v) > \gamma_L(G)$ pour tout sommet $v \in D$;
3. $T \in \mu$ ou bien T peut être construit à partir d'arbres disjoints de μ par une séquence finie d'opérations O_1, O_2, O_3 ou O_4 .

2.2 Relations entre γ , γ_L , γ_2 et β_0 dans les arbres

Dans cette section, on présente les récents résultats obtenus par Blidia, Favaron et Lounés concernant la relation entre les paramètres γ , γ_L , γ_2 et β_0 dans les arbres.

2.2.1 Borne supérieure sur γ_L

Le Théorème suivant donne une borne supérieure sur le nombre de domination localisatrice pour les arbres.

Théorème 2.8. (Blidia et al [8])

Si T est un arbre d'ordre n avec L sommets pendants et S sommets supports, alors :

$$\gamma_L(T) \leq \frac{(n + L - S)}{2}.$$

La borne est atteinte pour la chaîne P_5 .

Remarque 2.3. La borne du Théorème 2.8 est atteinte pour la famille d'arbres F pouvant être obtenue à partir de la séquence d'arbres T_1, T_2, \dots, T_k ($k \geq 1$) tel que T_1 est une chaîne $P_3 = x-y-t$ ou une chaîne P_4 . $T = T_k$ et si $2 \leq i \leq k$, T_{i+1} peut être obtenu

à partir de T_i par une des cinq opérations définies ci-dessous. On pose $D(T_1) = \{x, y\}$ si $T_1 = P_3$ et $D(T_1) = S(P_4)$ si $T_1 = P_4$.

- **Opération F_1** : Ajouter à T_i un sommet w en attachant par une arête un sommet support de T_i à w . Poser $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{w\}$.
- **Opération F_2** : Ajouter à T_i un $P_2 = u - v$ en attachant par l'arête uz un sommet support z de T_i . Poser $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{u\}$.
- **Opération F_3** : Ajouter à T_i une étoile subdivisée $H = SS_p$, avec $p \geq 2$ centrée en a , en attachant par l'arête ab un sommet pendant b d'un support fort de T . Poser $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup S(H)$.
- **Opération F_4** : Ajouter à T_i un $P_3 = b - c - d$ et $p \geq 0$ chaîne $P_2 = u_i - v_i$ en attachant par les arêtes df et $u_i f$ pour chaque i , un sommet pendant f de $D(T_i)$ ou f est un pendant d'un support fort de T_i . Poser $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{c, u_1 \dots u_p\}$.
- **Opération F_5** : Ajouter à T_i un $P_4 = a - b - c - d$ et $p \geq 0$ chaîne $P_2 = u_i - v_i$ en attachant par les arêtes dy et $u_i d$ pour chaque i , un sommet y de T_i qui n'est pas un sommet support et pour lequel $\gamma_L(T_i - y) = \gamma_L(T_i)$. Poser $D(T_{i+1}) = D(T_i) \cup \{b, d, u_1 \dots u_p\}$.

Notons que l'opération F_5 ne peut être appliquée à un sommet pendant y d'un support fort puisque dans ce cas $\gamma_L(T_{i-y}) < \gamma_L(T_i)$.

Théorème 2.9. (*Blidia et al [8]*)

Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$, alors

$$\gamma_L(T) = \frac{n + l - s}{2}$$

Si seulement si $T \in F$.

2.2.2 La relation entre $\gamma_L(T)$ et $\gamma(T)$

La classe des graphes G d'ordre n pair et sans sommets isolés avec $\gamma(G) = \frac{n}{2}$, a été caractérisée indépendamment par Payan et Xuong [27] et Fink, Jacobson, Kinch et Roberts [30].

Théorème 2.10. (*Payan, Xuong [27], Fink et al [30]*)

Soit G un graphe d'ordre n pair sans sommets isolés, alors $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ si et seulement si chaque composante de G est ou bien un cycle C_4 ou bien une couronne d'un graphe connexe.

Remarque 2.4. (Chellali, Mimouni et Slater [17])

Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors :

$$\gamma_L(T) \leq \frac{(n + l(T) - s(T))}{2}.$$

La borne est atteinte si et seulement si T est un arbre d'ordre $l(T) + s(T)$.

Rappelons qu'un ensemble $R \subseteq V(G)$ est dit *2-stable* dans G si pour deux sommets quelconques x et y de S on a $N[x] \cap N[y] = \emptyset$. Le cardinal maximum d'un ensemble *2-stable* de G noté $\rho(G)$ est appelé le nombre de *2-stable*.

Proposition 2.1. (*Chellali, Mimouni et Slater [17]*)

Pour tout graphe connexe non trivial G , on a :

$$\gamma_L(G) \leq n - \rho(G).$$

Farber [27] a prouvé que le nombre de domination et le nombre de 2-stable sont égaux pour tout graphe fortement triangulé, qui inclut la classe des arbres. Ainsi, le corollaire suivant est une conséquence de la proposition précédente :

Corollaire 2.1. (Chellali, Mimouni et Slater [17])

Pour tout arbre non trivial T , on a :

$$\gamma_L(T) + \gamma(T) \leq n.$$

La borne est atteinte si et seulement si T est un arbre d'ordre $l(T) + s(T)$.

2.2.3 Caractérisation des arbres T tels que $\gamma_L(T) = \gamma(T)$

La caractérisation des arbres T satisfaisant $\gamma_L(T) = \gamma(T)$ a été faite par Blidia, Chellali, Maffray, Semri et Moncel dans [8].

Soit la famille d'arbres φ pouvant être obtenue à partir de la séquence d'arbres T_1, T_2, \dots, T_k ($k \geq 1$) tel que T_1 est une chaîne $P_2 = x - y$. $T = T_k$ et si $2 \leq i \leq k$, T_{i+1} peut être obtenu à partir de T_i par une des trois opérations définies ci-dessous. Considérons $x \in T_1$, comme support, et l'autre sommet $y \in T_1$ comme feuille.

- **Opération φ_1** : Ajouter à T_i un $P_2 = u - v$ en attachant par l'arête uz un sommet support z de T_i .
- **Opération φ_2** : Ajouter à T_i une étoile subdivisée $H = SS_p$ avec $p \geq 2$ centrée en a , en attachant par l'arête ab un sommet quelconque b de T_i .
- **Opération φ_3** : Ajouter à T_i un $P_3 = u - v - w$ en attachant par l'arête uc un sommet c appartenant à un $\gamma_L(T_i)$.

Théorème 2.11. (Blidia et al [8])

Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_L(T) = \gamma(T)$ si et seulement si $T \in \varphi$.

2.2.4 Borne inférieure sur β_0

La proposition suivante donne une borne inférieure sur le nombre de stabilité β_0 établie par Blidia et al dans [15].

Donnons d'abord une remarque utile pour la suite.

Remarque 2.5. Dans un graphe G , il existe un $\beta_0(G)$ – ensemble contenant tous les sommets pendants de G .

Si u est un sommet support fort dans G , alors tout $\beta_0(G)$ – ensemble contient l'ensemble des sommets pendants de u .

Proposition 2.2. (*Blidia et al [15]*)

Si G est un graphe biparti connexe d'ordre n , avec l sommets pendants et s sommets supports, alors on a :

$$\beta_0(G) \geq \frac{(n + l - s)}{2}.$$

L'inégalité $\beta_0(G) \geq \frac{(n+l-s)}{2}$ est satisfaite pour tout graphe biparti mais les graphes extrémaux n'ont pas été déterminés, sauf pour le cas des arbres.

Cette borne est atteinte pour les arbres T appartenant à la famille d'arbre φ qui a été caractérisée par Blidia et al dans [6].

Proposition 2.3. (*Blidia, Favaron et Lounès, [6]*)

Soit T un arbre, alors $T \in \varphi$ (ie $\beta_0(G) = \frac{(n+L(T)-S(T))}{2}$) si et seulement si son noyau $C(T) = V(T)/S(T) \cup L(T)$ induit un arbre avec un couplage parfait.

2.2.5 Borne inférieure sur γ_{X2}

Dans [29], Fink et Jacobson ont donné une borne inférieure sur γ_{X2} pour le cas des arbres. Avant de présenter leur Théorème, on donne la remarque suivante :

Remarque 2.6. Dans un graphe G , $\gamma_{X2}(G)$ – ensemble contient tous les sommets pendants de G .

Théorème 2.12. (*Fink et Jacobson [29]*)

Si T est un arbre d'ordre n , alors on a :

$$\gamma_{X_2}(G) \geq \frac{(n+1)}{2}.$$

Dans [12], Chellali a montré cette borne pour les arbres avec $l(T) > s(T)$:

Théorème 2.13. (*Chellali [12]*)

Si G est un graphe d'ordre n avec au plus un cycle, L sommets pendants et S sommets supports, alors on a :

$$\gamma_2(G) \geq \frac{(n+L-S)}{2}.$$

2.2.6 Relation entre les paramètres γ_L , β_0 et γ_{X_2}

En général, les paramètres γ_L , β_0 et γ_{X_2} sont incomparables. En effet si G est le graphe biparti complet $K_{p,q}$ avec $4 \leq p \leq q$, on peut voir que $\gamma_L(K_{p,q}) = p + q - 2$, $\beta_0(K_{p,q}) = q$ et $\gamma_2(K_{p,q}) = 4$.

Le Théorème suivant de Blidia et all donne une relation entre β_0 et γ_2 dans les arbres.

Théorème 2.14. (*Blidia, Chellali et Favaron [5]*)

Pour tout arbre T , on a :

$$\gamma_{X_2}(T) \geq \beta_0(T).$$

La borne est atteinte pour la famille d'arbre A caractérisée par Blidia et all dans [5].

Soit A la famille d'arbres qui peut être obtenue à partir d'une séquence d'arbres T_1, T_2, \dots, T_k ($k \geq 1$) tel que T_1 est une étoile $S_{1,t}$ ($t \geq 2$) centrée en un sommet w ; $T = T_k$ et si $2 \leq i \leq k$, T_{i+1} peut être obtenu à partir de T_i par une des trois

opérations définies ci-dessous. Poser $A(T_1) = L_w$.

- **Opération A_1** : Ajouter à T_i une étoile $S_{1,p}$, $p \geq 1$ centrée en un sommet x en attachant par l'arête yx un sommet pendant y de T_i . Poser $A(T_{i+1}) = L_x$.
- **Opération A_2** : Ajouter à T_i une étoile $S_{1,p}$, $p \geq 1$ centrée en un sommet x en attachant par l'arête yx un sommet non pendant y de T_i . Poser $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup L_x$.
- **Opération A_3** : Ajouter à T_i une étoile $S_{1,p}$, $p \geq 1$ centrée en un sommet x en attachant par l'arête yx un sommet y de $V(T_i) - A(T_i)$. Poser $A(T_{i+1}) = A(T_i) \cup L_x$.

Soit A_1 la sous famille de A constituée des arbres construits à partir de T_1 par l'application récursive de l'opération A_1 .

La caractérisation des arbres T tels que $\gamma_2(T) = \beta(T)$ est donnée par le Théorème suivant.

Théorème 2.15. (*Blidia et al [5]*)

Soit T un arbre d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_2(T) = \beta_0(T)$ si et seulement si $T \in A$.

On déduit le corollaire suivant comme conséquence des Théorèmes 2.8, 2.2 et 2.14.

Corollaire 2.2. (*Blidia et al [6]*)

Pour tout arbre T , on a :

$$\gamma_L(T) \leq \frac{(n + l(T) - s(T))}{2} \leq \beta_0(T) \leq \gamma_2(T).$$

Définition 2.3. [6]

Un arbre T est une pseudocouronne si son noyau $C(T) = V(T) \setminus S(T) \cup L(T)$ est vide.

Définition 2.4. [6]

Un arbre T est une couronne forte s'il est obtenu à partir d'un arbre \acute{T} en attachant à chaque sommet de \acute{T} au moins deux sommets pendants.

Théorème 2.16. (Blidia et al [6])

Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 2$, on a :

$$\beta_0(T) + \gamma_L(T) \leq n + l(T) - s(T).$$

La borne est atteinte pour la famille \mathfrak{S} des pseudo-couronnes des arbres.

Dans le Théorème suivant, Blidia et al [6] ont donné une caractérisation descriptive des arbres vérifiant $\gamma_L(T) = \gamma_2(T) = n + l(T) - s(T)/2$.

Théorème 2.17. (Blidia et al [6])

Soit T un arbre, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\gamma_L(T) = \gamma_2(T)$.
- L'arbre T est une couronne forte.
- $\gamma_2(T) = \frac{(n+l(T)-s(T))}{2}$.

Le Théorème qui suit, établi par Blidia et al, donne une caractérisation des arbres T tels que $\gamma_L(T) = \beta_0(T)$

Théorème 2.18. [6]

Pour tout arbre T , $\gamma_L(T) = \beta_0(T)$ si et seulement si $T \in F$.

Théorème 2.19. [6]

Soit T un arbre, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\gamma_L(T) = \frac{(n+l(T)-s(T))}{2}$.
- $\gamma_L(T) = \beta_0(T)$.

2.2.7 Bornes supérieures sur quelques rapports

Dans la section suivante, on présente quelques bornes supérieures établies sur les rapports tels que $\frac{\beta_0}{\gamma_L(T)}$ et $\frac{\gamma_2}{\gamma_L(T)}$.

Théorème 2.20. (Blidia et al [6])

Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$, T satisfait la propriété suivante :

$$\frac{\beta_0}{\gamma_L(T)} \leq \frac{\gamma_2}{\gamma_L(T)} \leq 2.$$

Cette borne est asymptotiquement atteinte.

Comme conséquence du Théorème, on énonce le corollaire suivant :

Corollaire 2.3. [6]

Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$ on a :

$$\beta_0(T) \leq \gamma_2(T) \leq 2\gamma_L(T) - 1.$$

2.3 Nombre de domination localisatrice supérieur

Dans cette section, on présente les récents résultats obtenus par Blidia, Mimouni et Slater concernant le paramètre de domination localisatrice supérieur.

Théorème 2.21. (Chellali, Mimouni et Slater [17])

Tout graphe non trivial connexe G d'ordre n satisfait :

$$\Gamma_L(G) \leq n - 1.$$

La borne est atteinte si et seulement si G est un graphe complet ou bien une étoile.

Le Théorème suivant établit la valeur exacte du nombre de domination localisatrice supérieur pour la chaîne.

Théorème 2.22. (Chellali, Mimouni et Slater [17])

Pour toute chaîne P_n on a :

$$\Gamma_L(P_n) = \begin{cases} 4K & \text{si } n = 7K ; \\ 4K + 1 & \text{si } n = 7K + 1 \text{ ou } 7K + 2 ; \\ 4K + 2 & \text{si } n = 7K + 3 \text{ ou } n = 7K + 4 ; \\ 4K + 3 & \text{si } n = 7K + 5 ; \\ 4K + 4 & \text{si } n = 7K + 6 ; \end{cases}$$

Le Théorème suivant établit une relation entre un dominant localisateur minimal et un ensemble indépendant maximum.

Théorème 2.23. (Chellali, Mimouni et Slater [17])

Si G est un arbre ou bien un graphe avec $g(G) \geq 5$, alors tout ensemble indépendant maximum S est un dominant localisateur minimal. De plus, si $\delta \geq 2$, alors $V - S$ est dominant localisateur.

En conséquence du Théorème précédent, on énonce les corollaire suivants :

Corollaire 2.4. (Chellali, Mimouni et Slater [17])

Si G est un arbre ou un graphe avec $g(G) \geq 5$, alors

$$\Gamma_L(G) \geq \beta_0(G) \geq \gamma_L(G).$$

Corollaire 2.5. (Blidia et al [6])

Si T est un arbre, alors $\beta_0(G) \geq \gamma_L(G)$

Corollaire 2.6. (Chellali, Mimouni et Slater [17])

Si G est un graphe d'ordre n , avec $\delta \geq 2$ et $g(G) \geq 5$, alors :

$$\gamma_L(G) \leq \frac{n}{2}.$$

Théorème 2.24. (Chellali, Mimouni et Slater [17])

Si T est un arbre non trivial d'ordre n , avec l feuilles, alors :

$$\Gamma_L(G) \leq \frac{(2n + l - 2)}{3}.$$

Cette borne est atteinte pour les étoiles non triviales.

On rappelle la borne inférieure sur le nombre de stabilité pour les graphes bipartis données dans [7]

Proposition 2.4. (Chellali, Blidia, Favaron et Meddah [7])

Si G est un graphe biparti, alors :

$$\beta_0(G) \geq \frac{(n + l(G) - s(G))}{2}.$$

A partir du Théorème 2.24 et la proposition 2.3, on présente les deux corrolaires qui donnent une borne supérieure sur $\Gamma_L(T)$, pour les arbres en fonction de $\beta_0(T)$, le

nombre de feuilles et de supports.

Corollaire 2.7. (*Chellali et al [17]*)

Si T est un arbre non trivial, alors

$$\Gamma_L(T) \leq \frac{4}{3}\beta_0(T) - \frac{1}{3}(l(T) - 2s(T) + 2).$$

Corollaire 2.8. (*Chellali, Mimouni et Slater [17]*)

Si T est un arbre non trivial, alors

$$\Gamma_L(T) - \beta_0(T) \leq \frac{1}{6}(n - l(T) - 3s(T) - 4).$$

2.4 Domination dans le produit cartésien

Dans cette section, nous étudions le problème lié à la domination dans le produit cartésien de deux graphes en fonction des nombres de domination des facteurs. On se doit de citer la célèbre conjecture de Vizing, suggérée en 1963 dans [46] et formulée comme conjecture en 1968 dans [47] :

Conjecture. (*Vizing [47]*)

Pour tous graphes G et H ,

$$\gamma(G \square H) \leq \gamma(G) * \gamma(H).$$

Mais on ignore toujours si cette conjecture est vraie ou non.

Clark et Suen ont montré dans [19] que l'inégalité était vraie avec un facteur $\frac{1}{2}$.

Théorème 2.25. (Clark et Suen [19])

Pour tous graphes G et H ,

$$\gamma(G \square H) \leq \frac{1}{2} \gamma(G) * \gamma(H).$$

Cela reste le seul résultat connu à ce jour. Des travaux ont montré que cette conjecture est vraie pour certaines classes de graphes. Citons en particulier celui de Barcalkin et German [2] quand l'un des facteurs est le graphe couvrant d'un graphe décomposable de même nombre de domination comme corollaire à ce résultat, ceux sur les arbres de Jacobson et Kinch [38], [39] et celui sur les cycles de El Zahar et Parek [26].

En parallèle à cette conjecture, de nombreuses études visent à définir ou à borner les paramètres de domination des produits de graphes.

Nowakowski et Rall [43] ont conjecturé en 1996 que pour tous graphes G et H ,

$$\Gamma(G \square H) \geq \Gamma(G) * \Gamma(H).$$

Une preuve élégante de cette conjecture a récemment été proposée par Bresar [?].

Henning et Rall dans [40] concerne le nombre de domination totale du produit cartésien de graphes. Ils suggèrent que :

$$2 * \gamma_t(G \square H) \geq \gamma_t(G) * \gamma_t(H).$$

et prouvent le résultat pour certaines classes de graphes, y compris la classe des arbres non triviaux.

Chapitre 3

Ensembles dominants localisateurs totaux

Ce chapitre est consacré à l'étude du nombre de domination localisatrice total.

Commençons par rappeler la définition suivante :

Définition 3.1. [23]

Soient un graphe $G = (V, E)$ et S un sous ensemble de V .

On dit que S est un ensemble dominant localisateur total (EDLT) de G si S est un ensemble dominant total et de plus, pour toute paire de sommets u et v de $V \setminus S$, $N(v) \cap S \neq N(u) \cap S$.

Le cardinal minimum d'un ensemble dominant localisateur total de G est appelé nombre de domination localisatrice total, noté $\gamma_t^L(G)$.

On donne une illustration, soit G un graphe représenté dans la figure 3.1.

et l'ensemble $S = \{a, d, b\}$ représente l'ensemble dominant localisateur total de cardinalité minimum $\gamma_t^L = 3$.

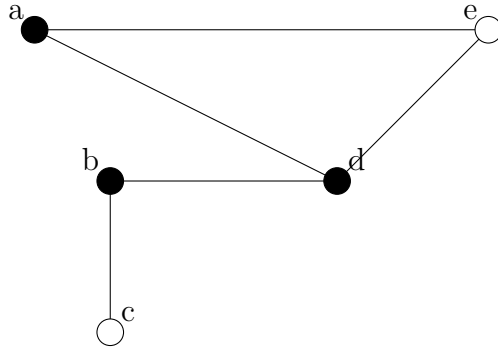


FIG. 3.1 – Un graphe G, avec $\gamma_L^t(G) = 3$

Il est clair que tout ensemble dominant localisateur total est un ensemble dominant total. Par conséquent, on a :

Proposition 3.1. [23] *Pour tout graphe G sans sommets isolés, on a :*

$$\gamma_t^L(T) \geq \gamma_t(T).$$

Remarque 3.1. (Haynes, Henning et Howard [35])

Si G est une chaîne alors tout ensemble dominant total est un ensemble dominant localisateur total.

Suite à cette remarque, on énonce le Théorème suivant de Haynes et al.

Théorème 3.1. (Haynes et al [35])

Pour toute chaîne P_n d'ordre $n \geq 2$, on a :

$$\gamma_t^L(P_n) = \gamma_t(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$$

Lemme 3.1. (J. Rad [48])

Soit K_n un graphe complet d'ordre n , on a :

1. $\gamma_t^L(K_2) = 2$ et $\gamma_t^L(K_n) = n - 1$ pour $n \geq 3$.
2. $\gamma_t^L(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ pour $n \geq 3$.
3. $\gamma_t^L(K_{1,n}) = n$ pour $n \geq 2$, $\gamma_t^L(K_{m,n}) = m + n - 2$ pour $\min\{m, n\} = 2$.

Avant de donner une caractérisation d'une certaine classe de graphes vérifiant la propriété qu'on va cité ci dessous, on présente la remarque suivante.

Remarque 3.2. [48]

Pour tout graphe connexe $G = (V, E)$, d'ordre $n \geq 2$, on a

$$2 \leq \gamma_t^L(G) \leq |V(G)| - 1.$$

Soit A_1 la famille de tous les graphes obtenue à partir d'un $P_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ par l'opération suivante :

O : On ajoute un sommet x aux sommets v_2, v_3 relié par les arêtes xv_2 et xv_3 et on ajoute au moins une arête à $\{v_1, v_4\}$.

et A_2 la famille de tous les graphes obtenus à partir d'un cycle C_4 , par l'opération suivante :

\hat{O} : On ajoute un sommet x à au moins deux sommets de $V(C_4)$.

et A_3 la famille de tous les graphes obtenus à partir de la couronne $C_3 \circ K_1$ en supprimant au moins un sommet de la couronne. Par conséquent, on énonce le Théorème suivant :

Théorème 3.2. (J. Rad [48] 2008)

Soit G un graphe d'ordre $n \geq 2$, alors

1. $\gamma_t^L(G) = 2$ si et seulement si $G \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \{P_2, P_3, P_4, C_4, K_4 - \{e\}\}$.

2. $\gamma_t^L(G) = |V(G)| - 1$ si et seulement si G est une étoile ou un graphe complet d'ordre au moins trois.

Dans le Théorème suivant, J. Rad a donné une borne inférieure sur le nombre de domination localisatrice totale d'un graphe G , en fonction de l'ordre de G .

Théorème 3.3. [48]

Si G est un graphe avec n sommets et $\gamma_t^L(G) = a$ alors $n \leq 2^a + a - 1$ et la borne est atteinte.

La borne supérieure du Théorème 3.3 est atteinte pour les graphes construits de la façon suivante :

Soit $V(K_a) = \{v_1, v_2, \dots, v_a\}$. Pour chaque sommets v_i , on lui ajoute un sommet w_i , en reliant l'arête $w_i v_i$ pour obtenir le graphe G_1 . Par conséquent, $\gamma_t^L(G) = a$. On construit le graphe G_{i+1} à partir du graphe G_i pour $i = 1, \dots, a - 1$ comme suit :

Pour chaque $\binom{a}{2}$ sous ensemble S_1 de $\{v_1, v_2, \dots, v_a\}$, on ajoute un nouveau sommet

à G_1 et relier ce sommet à tous les sommets de S_1 pour obtenir le graphe G_2 . Pour

chaque $\binom{a}{3}$ sous ensemble S_2 de $\{v_1, v_2, \dots, v_a\}$, on ajoute un nouveau sommet à G_2

et relier ce sommet à tous les sommets de S_2 pour obtenir le graphe G_3 et ainsi de

suite. On obtient les graphes $G_4, \dots, G_a = H$. Finalement il est facile de vérifier que

$\gamma_t^L(G_1) = \gamma_t^L(G_2) = \dots = \gamma_t^L(H) = a$ et $|V(H)| = 2^a + a - 1$.

Théorème 3.4. [48]

Soient a et b deux entiers positifs tels que $a + 1 \leq b \leq 2^a + a - 1$, alors il existe un graphe G avec $\gamma_t^L(G) = a$ et $|V(G)| = b$.

On présente dans ce qui suit un Théorème qui donne la borne inférieure sur le nombre de domination localisatrice totale d'un graphe G en fonction du diamètre de G .

Théorème 3.5. [48]

Pour tout graphe connexe G ,

$$\gamma_t^L(G) \geq \lceil \frac{\text{Diam}(G) + 1}{2} \rceil.$$

Cette borne est atteinte pour les chaînes P_n , $n \geq 3$.

3.1 Borne inférieures pour $\gamma_t^L(T)$ dans le cas des arbres

Deux bornes inférieures ont été données par Haynes, Henning et Howard [35] sur le nombre de domination localisatrice totale pour les arbres, ainsi que la caractérisation des arbres extrémaux pour chaque borne inférieure. On énonce le résultat suivant :

Théorème 3.6. [35]

Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$ alors

$$\gamma_t^L(T) \geq \frac{2(n+1)}{5}.$$

Remarque 3.3. La borne est atteinte si et seulement si T appartient à la famille d'arbres obtenue à partir de k copies disjointes de P_4 en ajoutant $k - 1$ arêtes de telle sorte à ce qu'elles soient incidentes uniquement avec les supports. Le graphe ainsi obtenu est connexe et par la suite, chaque nouveau sommet est subdivisé une seule fois.

Le Théorème suivant établit une borne inférieure sur γ_t^L pour tout arbre T en fonction de ses sommets supports, ses feuilles ainsi que son ordre.

Théorème 3.7. [35]

Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$ avec l sommets pendants et s sommet supports, alors :

$$\gamma_t^L(T) \geq \frac{(n + 2(l - s) + 1)}{3}.$$

Remarque 3.4. La borne est atteinte si et seulement si T appartient à la famille d'arbres obtenue à partir d'un arbre quelconque \hat{T} en attachant au moins deux feuilles à chaque sommets de \hat{T} . Si de plus, \hat{T} est non trivial, alors on subdivise chaque arête de \hat{T} une seule fois.

Le Théorème suivant a amélioré la borne du théorème 3.6, pour tout arbre non trivial T ainsi que celle de Théorème 3.7 pour les arbres d'ordre $n \geq 4l - 4s$.

Théorème 3.8. (Chellali [13] 2007)

Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$ avec l sommets pendants et s sommet supports, alors :

$$\gamma_t^L(T) \geq \frac{2(n + l - s + 1)}{5}.$$

Remarque 3.5. La borne est atteinte si et seulement si $T = P_2$ ou T appartient à la famille d'arbres obtenue à partir de k copies disjointes de P_4 en ajoutant $k - 1$ arêtes de telle sorte à ce qu'elles soient incidentes uniquement avec les supports. Le graphe ainsi obtenu est connexe, et chaque nouveau sommet est subdivisé une seule fois.

Notons que Chellali et Haynes [16] ont montré que tout arbre non trivial satisfait

$$\gamma_t(T) \geq \frac{(n + 2 - l)}{2}.$$

Etant donné que tout ensemble dominant localisateur total est un ensemble dominant total on a $\gamma_t^L(T) \geq \frac{(n+2-l)}{2}$. Le Théorème suivant améliore la borne inférieure du Théorème 3.8.

Théorème 3.9. [13]

Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$ avec l sommets pendants et s sommet supports, alors $\gamma_t^L(T) \geq \frac{(n+2-s)}{5}$. La borne est atteinte si et seulement si $T = P_n$ avec $n \equiv 0(\text{mod}4)$.

Nous énonçons deux Théorèmes dont l'un deux montre l'effet de la subdivision d'une arête dans un graphe G et l'autre l'effet de la suppression d'un sommet d'un graphe G .

Théorème 3.10. (J. Rad [48])

soit \hat{G} le graphe obtenu à partir d'un graphe G en subdivisant une arête alors

$$\gamma_t^L(G) \leq \gamma_t^L(\hat{G}) \leq \gamma_t^L(G) + 1$$

Théorème 3.11. [48]

Soit \hat{G} le graphe obtenu à partir d'un graphe G en supprimant un sommet $x \in V \setminus S$, où S est un $\gamma_t^L(G) -$ ensemble de G , alors :

$$\gamma_t^L(G) - 1 \leq \gamma_t^L(\hat{G}).$$

De plus, la différence $\gamma_t^L(\hat{G}) - \gamma_t^L(G)$ est arbitrairement large.

Avant d'énoncer le lemme suivant, on donne la définition de graphe $\gamma_t^L -$ critique.

Définition 3.2. [23] Soit x un sommet non support d'un graphe G . On dit que x est un sommet de domination localisatrice totale critique ou un sommet $\gamma_L^t(G) -$ critique si $\gamma_t^L(G - x) \leq \gamma_t^L(G)$.

On dit qu'un graphe G est un ensemble dominant localisateur total critique ou G est un graphe $\gamma_L^t(G) -$ critique si tout sommet de $V \setminus S$ est un sommet $\gamma_L^t(G) -$ critique.

Si G est un graphe $\gamma_L^t(G) -$ critique et $\gamma_L^t(G) = k$ alors G est dit un graphe $k - \gamma_L^t(G) -$ critique

Du Théorème 3.11 on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 3.1. [48] Soit G un graphe $\gamma_L^t(G)$ – critique, pour tout $v \in V \setminus S$, on a :

$$\gamma_t^L(G - v) = \gamma_t^L(G) - 1.$$

Dans le cas de graphe non connexes, on donne le lemme suivant :

Lemme 3.2. [48] Soit G est un graphe non connexe, alors

- G est $\gamma_L^t(G)$ – critique si et seulement si chaque composante connexe est $\gamma_L^t(G)$ – critique.
- si G est un graphe connexe et $\delta \geq 2$, alors $G \circ K_1$ est un $\gamma_L^t(G)$ – critique.

Les résultats obtenus sur la domination localisatrice totale critique dans [48] concernent uniquement les graphes connexes.

Dans le lemme suivant, on donne le nombre de domination localisatrice totale critique pour certaines classes de graphes.

Lemme 3.3. [48]

- K_n est un $\gamma_L^t(G)$ – critique si et seulement si $n \geq 4$.
- Aucune chaîne n'est $\gamma_L^t(G)$ – critique.
- C_n est un $\gamma_L^t(G)$ – critique si et seulement si $n \equiv 1(\text{mod}4)$ ou $n \equiv 2(\text{mod}4)$.

3.2 Minimalité d'un dominant localisateur total

Par le Théorème suivant, on donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un EDLT d'un graphe G sans sommet isolé soit minimal.

Théorème 3.12. [23]

Soit G un graphe sans sommets isolés et S un dominant localisateur total, alors S est minimal si et seulement si tout sommet v de S vérifie l'une des conditions suivantes :

1. Il existe un sommet u de $V \setminus S$ tel que $N(u) \cap S = \{v\}$.
2. $G[S-v]$ contient un sommet isolé.
3. Il existe deux sommets $u, w \in (V - S) \cup \{v\}$, tels que $N(u) \cap (S - \{v\}) = N(w) \cap (S - \{v\})$.

3.3 Relations entre γ_t^L , γ_{X_2} et β_0

3.3.1 Relations entre γ_t^L , γ_{X_2}

La proposition suivante établit une relation entre le nombre de domination localisatrice et le nombre de domination double, dans le cas général.

Proposition 3.2 ([23]). Si G est un graphe non trivial, et sans sommet isolé d'ordre n , alors on a

$$\gamma_{X_2}(G) \leq 2\gamma_t^L(G).$$

Remarque 3.6. La borne est atteinte pour les couronnes d'un graphe quelconque non trivial.

Le Théorème suivant est donné par Blidia et al dans [4].

Théorème 3.13. (Blidia et al [4] (2006)

soit T est un arbre non trivial, alors $\gamma_{X_2}(T) \geq 2i(T)$. La borne est atteinte si et seulement si T admet deux $i(T)$ – ensembles disjoints.

A noter que les arbres ayant deux $i(T)$ – ensembles disjoints ont été caractérisés par Henning et Haynes dans [42].

Comme conséquence immédiate du Théorème 3.13 et de la proposition 3.2 on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.2. [23]

Pour tout arbre T non trivial tel que $\gamma_t^L(T) = i(T)$, T admet deux $i(T)$ – ensembles disjoints. La réciproque est fausse.

Preuve :

D’après le Théorème 3.13 et de la proposition 3.2, on a $2i(T) \leq \gamma_{x2}(T) \leq 2\gamma_t^L(T)$. Etant donné que $i(T) = \gamma_t^L(T)$, alors $2i(T) = \gamma_{x2}(T)$. Suite au Théorème 3.13, on conclut que T admet deux $i(T)$ – ensembles disjoints.

□

Remarque 3.7. La réciproque est fausse, il suffit de considérer l’arbre de la figure 3.1. Il est facile de vérifier que T admet deux $i(T)$ – ensembles disjoints, $S_1 = \{a, f, g, k\}$ et $S_2 = \{c, d, e, b\}$.

On remarque que l’ensemble $D = \{a, c, f, g, d, e\}$ est un ensemble dominant localisateur total minimum de T . On déduit que $\gamma_t^L(T) = 6 \neq 4 = i(T)$

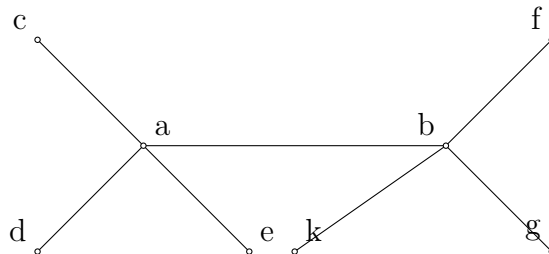


FIG. 3.2 – Un arbre T admettant deux $i(T)$ – ensembles disjoints, et $i(T) \neq \gamma_t^L(T)$

3.3.2 Bornes sur γ_t^L pour les arbres

On établira dans la proposition qui suit une borne inférieure sur le nombre de domination localisatrice totale en fonction de γ , $l(T)$ et $s(T)$ dans le cas d'un arbre quelconque T .

Proposition 3.3 ([23]). *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors :*

$$\gamma_t^L(T) \geq \gamma(T) + l(T) - s(T).$$

Cette borne est atteinte.

Par le Théorème suivant, on donne une borne supérieure sur le nombre de domination localisatrice total pour la class des arbres.

Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$ avec l sommets pendants, alors :

$$\gamma_t^L(T) \leq \frac{(n + l(T))}{2}.$$

La borne est atteinte.

La borne est atteinte pour les 2 couronnes des arbres non triviaux.

Chapitre 4

La domination localisatrice du produit cartésien

Dans ce chapitre, nous étudions le nombre de la domination localisatrice totale supérieure d'une chaîne d'ordre n . Par la suite, nous établissons une relation entre le nombre de domination localisatrice supérieure du produit cartésien de deux chaînes et le produit des nombres de domination localisatrice de ces chaînes.

On commence par rappeler la définition d'un ensemble dominant localisateur d'un graphe G .

Soient un graphe $G = (V, E)$ et S un sous ensemble de V .

Définition 4.1. [23]

On dit que S est un ensemble dominant localisateur de G , on le note EDL si S est un ensemble dominant et si de plus, pour toute paire de sommets u et v de $V \setminus S$, $N(v) \cap S \neq N(u) \cap S$.

Le cardinal minimum d'un ensemble dominant localisateur de G est appelé nombre de domination localisatrice, noté $\gamma_L(G)$.

Le cardinal maximum d'un EDL minimal de G est appelé nombre de domination

localisatrice supérieure, on le note par Γ_L .

Un EDL de G de cardinal $\gamma_L(G)$ (resp $\Gamma_L(G)$) est appelé un $\gamma_L(G)$ -ensemble (resp $\Gamma_L(G)$ -ensemble) de G .

On dit que S est un ensemble dominant localisateur total (EDLT) de G , si S est un ensemble dominant total, et si de plus pour toute paire de sommets u et v de $V \setminus S$, $N(v) \cap S \neq N(u) \cap S$. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant localisateur total de G est appelé nombre de domination localisatrice totale, noté $\gamma_t^L(G)$.

On donne une illustration dans le cas du produit cartésien $P_5 \square P_3$ (voir la figure 4.1).

Le sous ensemble de sommets S colorés forme un ensemble dominant localisateur. En effet en examinant tous les ensembles $N(v) \cap S$ tel que $v \in V \setminus S$, on trouvera que S couvre et sépare tous les sommets.

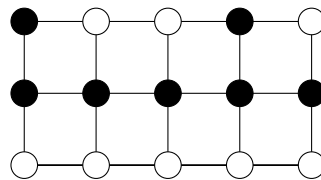


FIG. 4.1 - $\gamma_L(P_5 \square P_3) = 7$

4.1 Nombre de domination localisatrice supérieure

Commençons par donner la remarque ainsi le Théorème suivant :

Remarque 4.1. [25]

Soit S un ensemble dominant localisateur total d'un graphe G sans sommet isolé. On dit que S est un EDL minimal si et seulement si tout sommet $v \in S$ vérifie $pn(v, S) \neq \emptyset$.

Théorème 4.1. [11]

Un ensemble dominant S est un ensemble dominant minimal si et seulement si pour chaque sommet $u \in S$, une des deux conditions suivantes sont vérifiées :

- u n'est adjacent à aucun sommet de S .
- Il existe un sommet $v \in V \setminus S$ tel que u est le seul voisin de v dans S .

Nous allons donner dans la proposition suivante, une valeur exacte du nombre de domination localisatrice totale supérieure d'une chaîne d'ordre n .

Proposition 4.1. *Pour toute chaîne non triviale d'ordre n on a :*

$$\Gamma_t^L(P_n) = 2 \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor.$$

Preuve :

On procède par induction sur l'ordre n . Il est facile de vérifier que le résultat est valide pour $n \leq 4$ car $\Gamma_t^L(P_n) = 2$.

Soit $n \geq 5$, on suppose que toute chaîne $P_{\tilde{n}}$ d'ordre \tilde{n} tel que $\tilde{n} < n$ satisfait la propriété.

Le tableau suivant donne quelques nombres de domination localisatrice totale supérieure d'une chaîne d'ordre $n \leq 12$.

n	5	6	7	8	9	10	11	12
$\Gamma_t^L(P_n)$	4	4	4	6	6	6	8	8

TAB. 4.1 – Quelques valeurs de $\Gamma_t^L(P_n)$ pour $n \leq 12$

On va montrer que la propriété reste valide pour toute chaîne d'ordre n obtenue à partir d'une chaîne d'ordre \tilde{n} .

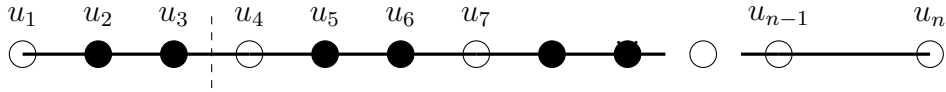
Dans le cas où P_n est obtenue à partir de $P_{\tilde{n}}$, on rajoutant au plus deux sommets la propriété reste toujours valide.

Soit $P_n = P_{\tilde{n}} \cup \{u_1, u_2, u_3\}$.

On va montrer que tout dominant localisateur total minimal de $P_{\hat{n}}$ peut être étendu en un dominant localisateur total de P_n en rajoutant 2 sommets.

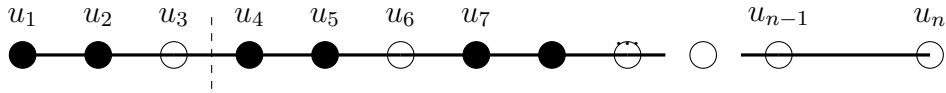
Si D contient u_1 et u_3 alors D doit contenir u_2 car D est un dominant localisateur total contradiction avec le fait que D est minimal (u_1 n'a pas de voisinage privé c'est à dire $pn(u_1, D) = \emptyset$). D'où on note que D ne contient pas trois sommets consécutifs ie $|D \cap \{u_1, u_2, u_3\}| = 2$.

Soit \hat{D} un EDLT minimal de $P_{\hat{n}}$ qui ne contient pas u_4 , alors \hat{D} peut être étendu à un EDLT minimal P_n en rajoutant un EDLT minimal de P_3 à \hat{D} .



On suppose maintenant que u_4 appartient à EDLT minimal de la chaîne d'ordre \hat{n} , d'où $D = \hat{D} \cup \{u_1, u_2\}$ est un EDLT minimal de la chaîne d'ordre n .

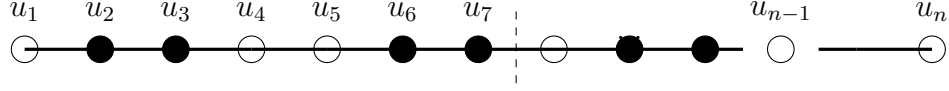
$$\text{Donc } \Gamma_t^L(P_n) \geq \Gamma_t^L(\hat{P}_n) + 2$$



Pour montrer l'autre inégalité, choisissons un ensemble dominant localisateur total D qui contient u_1 . Donc u_2 appartient à EDLT de cardinalité maximum et $u_3 \notin D$ sinon u_1 n'aurait pas de voisin privé contradiction avec le fait que D est un ensemble dominant localisateur total minimal. D'où $D \setminus \{u_1, u_2\}$ est un ensemble dominant localisateur total minimal de \hat{P} , donc $\Gamma_t^L(P_n) \leq \Gamma_t^L(\hat{P}_n) + 2$.

On suppose maintenant que D est un ensemble dominant localisateur total minimal tel que $u_1 \notin D$ donc $u_2, u_3 \in D$.

Supposons que u_4 appartient au voisinage privé du sommet u_3 par rapport à l'ensemble dominant localisateur total D alors $u_5 \notin D$.



Alors $S = D \setminus \{u_3\} \cup \{u_1, u_5\}$ un ensemble dominant localisateur total de cardinalité plus grande mais s'il n'est pas minimal. Cela signifie que u_5 domine un sommet qui était le seul voisin privé d'un sommet de D , c'est à dire si $n \geq 7$ et que u_6 est le seul voisin privé de $u_7 \in D$ par conséquent $S \setminus \{u_7\}$ est un ensemble dominant localisateur total minimal de P de même cardinalité que D et qui contient u_1 . Ceci contredit l'hypothèse qu'aucun ensemble dominant localisateur total de P contient u_1 . Donc $u_4 \notin pn(u_3, S)$ et $D \setminus \{u_2, u_3\}$ est un ensemble dominant localisateur total minimal \dot{P} . Donc $\Gamma_t^L(P_n) \leq \Gamma_t^L(\dot{P}_n) + 2$.

En conclusion $\Gamma_t^L(P_n) = \Gamma_t^L(\dot{P}_n) + 2$ et par induction pour $n \geq 2$, $\Gamma_t^L(P_n) = 2 \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$

■

4.2 Nombre de domination localisatrice supérieure du produit cartésien

Proposition 4.2. Pour toute chaîne d'ordre m on a :

$$2\Gamma_t^L(P_2 \square P_m) \geq \Gamma_t^L(P_2) * \Gamma_t^L(P_m).$$

Preuve :

Soit $V(P_2) = \{x_1, x_2\}$ ensemble des sommets de la chaîne d'ordre 2 et D est un ensemble dominant localisateur total de cardinalité supérieure de P_2 .

D'où $|D| = \Gamma_t^L(P_2) = 2$.

On considère $V(P_m) * \{x_1\}$ ensemble dominant localisateur total minimal de $P_2 \square P_m$,

et donc

$$\Gamma_t^L(P_2 \square P_m) \geq |V(P_m)| \geq \Gamma_t^L(P_m)$$

Tel que $\Gamma_t^L(P_m) = \frac{1}{2}\Gamma_t^L(P_2) * \Gamma_t^L(P_m)$ d'ou

$$\Gamma_t^L(P_2 \square P_m) \geq \frac{1}{2}\Gamma_t^L(P_2) * \Gamma_t^L(P_m).$$

On obtient alors

$$2\Gamma_t^L(P_2 \square P_m) \geq \Gamma_t^L(P_2) * \Gamma_t^L(P_m).$$

■

Avant d'énoncer le résultat suivant, d'après le Théorème 4.1 on présente une partition d'ensemble de sommet de G .

Soit D un ensemble dominant localisateur supérieur, qui peut être partitionné en deux sous ensembles si la condition ii est vérifiée.

Soit $\dot{D}(P_n)$ ensemble de sommets admettant un seul voisinage privé, ie

$$\dot{D} = \{u \in D \setminus |pn((u, D)| = 1)\}.$$

Soit $P = \{v \in V \setminus D : v \text{ est un voisin privé des sommets de } \dot{D}\}$ et $N = \{v \in V \setminus D : v \text{ est adjacent à un sommet de } \dot{D} \text{ mais n'est pas un voisin privé des sommets de } \dot{D}\}$.
D'ou l'ensemble $\ddot{D} = D \setminus \dot{D}$.

Finallement,

$$R = V \setminus (D \cup P \cup N).$$

B. Bresar a montré dans [11], le résultat suivant :

Théorème 4.2. (bresar [11] en 2005)

Pour toute paire de graphe G et H on a :

$$\Gamma(G \square H) \geq \Gamma(G) * \Gamma(H) + 1.$$

Nous nous inspirons de ce résultat, pour énoncer la proposition suivante :

Proposition 4.3. Pour toute chaîne d'ordre m et n on a :

$$\Gamma_L(P_n \square P_m) \geq \Gamma_L(P_n) * \Gamma_L(P_m).$$

Preuve :

On va construire un ensemble dominant localisateur minimal D de cardinalité maximum de $P_n \square P_m$.

Soit $D(P_n)$ (resp $D(P_m)$) un ensemble dominant localisateur minimal de cardinalité maximum de P_n (resp EDL minimal P_m), avec $\Gamma_L(P_n) = |D(P_n)|$ (resp $\Gamma_L(P_m) = |D(P_m)|$).

Si on suppose que $\dot{D}(P_n)$ est un ensemble vide alors il est clair que $D = \dot{D}(P_n) * V(P_m)$ est un ensemble dominant localisateur minimal de $P_n \square P_m$ (car chaque sommet $v \in D$ tel que $pn(v, D) \neq \emptyset$) avec $|D| \geq \Gamma_L(P_n) * \Gamma_L(P_m)$.

Si on suppose que les deux ensembles $\dot{D}(P_n) = \emptyset$ et $\dot{D}(P_m) = \emptyset$, alors

$$D = (\dot{D}(P_n) * \dot{D}(P_m)) \cup \tilde{I}.$$

Ou \tilde{I} est un ensemble indépendant maximum d'un sous graphe induit par les sommets $[V(P_n) \setminus D(P_n)] * [V(P_m) \setminus D(P_m)]$, d'où D est un ensemble dominant localisateur minimal qui contient au moins $\Gamma_L(P_n) * \Gamma_L(P_m)$ sommets.

Dans la suite on considère sans perte de généralité que $\dot{D}(P_m) \neq \emptyset$, $\dot{D}(P_n) \neq \emptyset$ et $\dot{D}(P_n) \neq \emptyset$. On construit un ensemble dominant localisateur D à partir de six ensembles

deux à deux disjoint,

$$D = \bigcup_{i=1}^6 D_i.$$

Soit le premier ensemble D_1 donné comme suit :

$$D_1 = \dot{D}(P_n) * D(P_m)$$

Avec $|D_1| = |\dot{D}(P_n)|\Gamma_L(P_m)$.

Soit le deuxième ensemble $D_2 = I$ ensemble indépendant maximum d'un sous graphe induit par $R(P_n) * R(P_m)$.

Le troisième ensemble D_3 de D est donnée par

$$D_3 = \bigcup_{x \in R(P_n)} \{x\} * SP(\dot{D}(P_m), pp_m(I_x))$$

avec D_3 est un sous ensemble de $R(P_n) * D(P_m)$.

Tel que $I_x = I \cap (\{x\} * V(P_m))$, ou $x \in R(P_n)$ et $SP(\dot{D}(P_m), pp_m(I_x))$ un sous ensemble de $\dot{D}(P_m)$ sachant que $SP(\dot{D}(P_m), pp_m(I_x)) \cup pp_m(I_x)$ est un ensemble dominant localisateur minimal de $P(P_m) \cup N(P_m)$, et $pp_m(I_x)$ la projection de I_x dans $R(P_m) \subset V(P_m)$. On considère le sous ensemble $\{x\} * SP(\dot{D}(P_m), pp_m(I_x))$ correspond à $P_n \square P_m$.

le quatrième ensemble est obtenu de la même façon que D_3 .

$$D_4 = \bigcup_{y \in R(P_m)} \{y\} * SP(\dot{D}(P_n), pp_n(I_y)).$$

Avec D_4 est un sous ensemble de $R(P_m) * \dot{D}(P_n)$.

Tel que $I_y = I \cap (\{y\} * V(P_n))$, ou Pour chaque sommet $y \in R(P_m)$. Et soit $SP(\dot{D}(P_n), pp_n(I_y))$ un sous ensemble de $\dot{D}(P_n)$ sachant que $SP(\dot{D}(P_n), pp_n(I_y)) \cup (I_y)$

est un dominant localisateur de $P(P_n) \cup N(P_n)$, et $pp_n(I_y)$ la projection de I_y dans $R(P_n) \subset V(P_m)$. On considère le sous ensemble $\{y\} * SP(\dot{D}(P_n), pp_n(I_y))$ correspond à $P_n \square P_m$.

On définit D_5 comme suit

$$D_5 = \bigcup_{y \in \dot{D}(P_m)} \{y\} * \dot{S}P(\dot{D}(P_n), pp_n(J_y))$$

Avec D_5 est un sous ensemble de $\dot{D}(P_m) * \dot{D}(P_n)$, tel que

$$J_y = (D_1 \cup D_3) \cap (V(P_n) * \{y\})$$

Ou $y \in \dot{D}(P_n)$, $J_y \subset V(P_n) * \{y\}$ inclu dans D ; et soit $\dot{S}P(\dot{D}(P_n), pp_n(J_y))$ un sous ensemble de $\dot{D}(P_n)$, et $pp_n(J_y)$ la projection de I_y tel que $pp_n(J_y) \subseteq \dot{D}(P_n) \cup R(P_n)$, sachant que $\dot{S}P(\dot{D}(P_n), pp_n(J_y)) \cup (J_y)$ est un dominant localisateur de $P(P_n) \cup N(P_n)$.
et finalement

$$D_6 = \dot{D}(P_n) * (V(P_m) \setminus (\dot{D}(P_m) \cup R(P_m)))$$

Si $|P(P_m)| \geq |\dot{D}(P_m)|$, alors on a $(V(P_m) \setminus (\dot{D}(P_m) \cup R(P_m))) \geq |D(P_m)|$ d'ou

$$|D_6| \geq |\dot{D}(P_n)| * \Gamma_L(P_m)$$

Soit D un ensemble dominant localisateur, $D = \{D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5 \cup D_6\}$ tel que les six ensembles sont deux à deux disjoint, on a

$$|D_1| + |D_6| \geq |\dot{D}(P_n)| \cdot \Gamma_L(P_m) + |\dot{D}(P_n)| \cdot \Gamma_L(P_m)$$

$$|D_1| + |D_6| \geq |D(P_n)| \cdot \Gamma_L(P_m)$$

$$|D_1| + |D_6| \geq \Gamma_L(P_n) \cdot \Gamma_L(P_m)$$

De plus $\dot{D}(P_n) \neq \emptyset$ et $\dot{D}(P_m) \neq \emptyset$ on a $R(P_n) \cup N(P_n) \neq \emptyset$ et $R(P_m) \cup N(P_m) \neq \emptyset$.

Si $R(P_n) = \emptyset$ alors $D_5 \neq \emptyset$

Si $R(P_n) \neq \emptyset$ et $R(P_m) = \emptyset$ alors $D_3 \neq \emptyset$

Et si $R(P_n) \neq \emptyset$ et $R(P_m) \neq \emptyset$ alors $D_2 \neq \emptyset$

D'où on conclut $|D| \geq \Gamma_L(P_n) \Gamma_L(P_m)$

Dans la suite on considère D un ensemble dominant localisateur $P_n \square P_m$. Et on va montrer que D est un ensemble dominant localisateur pour chaque partition de $P_n \square P_m$.

D_1 est un ensemble dominant localisateur de $\dot{D}(P_n) * V(P_m)$.

On considère en suite l'ensemble $R(P_n) * V(P_n)$. D_2 est un ensemble dominant localisateur des sommets $R(P_n) * R(P_m)$, D_1 est un dominant localisateur de $R(P_n) * D(P_m)$. L'ensemble $D_2 \cup D_3$ est un dominant localisateur de $R(P_n) * V(P_m)$.

D_6 est un dominant localisateur de $\dot{D}(P_n) * V(P_m)$. De plus D_6 est l'ensemble $\dot{D}(P_n) * (P(P_m) \cup \dot{D}(P_m) \cup N(P_m))$ et l'ensemble $\dot{D}(P_m) \cup N(P_m)$ est un ensemble dominant localisateur de P_m .

$D_2 \cup D_4$ est un dominant localisateur de l'ensemble $(P(P_n) \cup N(P_n)) * \{y\}$ si y est un sommet de $R(P_m)$. $D_1 \cup D_3 \cup D_5$ est un dominant localisateur de l'ensemble $(P(P_n) \cup N(P_n)) * \{y\}$ si y est un sommet de $\dot{D}(P_m)$. D'où D est un dominant localisateur de $P_n \square P_m$.

Et pour montrer que D est minimal on doit utiliser la remarque précédente.

Soit $(x, y) \in D_1$, si $y \in V(P_m) \subset \dot{D}(P_m)$, alors il est clair que (x, y) n'est pas adjacent à aucun sommet de D , et si $y \in \dot{D}(P_m)$ alors y a un voisin privé $z \in V(P_m)$, il est clair que (x, z) est un voisin privé de (x, y) d'où la deuxième condition est vérifiée.

Soit $(x, y) \in D_2$ sachant que D_2 est un ensemble indépendant maximum d'un sous graphe induit par $R(P_n) * R(P_m)$, et d'après la définition d'un ensemble indépendant

donc D_2 ne contient pas d'arête, d'où (x,y) n'est adjacent à aucun sommet de D qui est dans $\{x\} * \dot{D}(P_m)$ ou bien dans $\dot{D}(P_n) * \{y\}$. D'où chaque sommet de D_2 vérifie la première condition.

Soit $(x,y) \in D_3$ alors $y \in SP(\dot{D}(P_m), pp_m(I_x))$ sachant que il existe $v \in P(P_m) \cup N(P_m)$ tel que y est le seul voisin de v dans $SP(\dot{D}(P_m), pp_m(I_x)) \cup pp_m(I_x)$. D'où (x,y) est le seul voisin de (x,v) dans $D \cap (\{x\} * V(P_m))$. Il est clair que (x,v) n'a pas de voisin dans $D \cap (\{v\} * V(P_n))$ ce qui implique que (x,y) vérifie la deuxième condition.

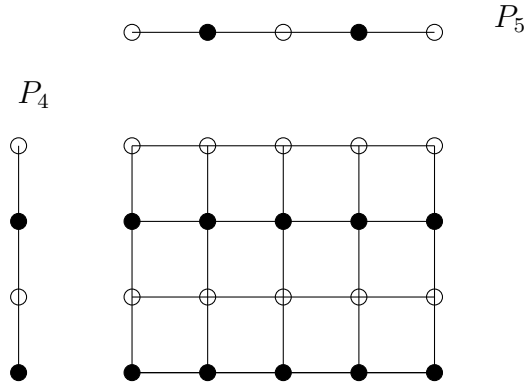
Soit $(x,y) \in D_6$ avec $x \in \dot{D}(P_n)$ de plus x a un voisin privé $u \in P(P_m)$ et $y \in \dot{D}(P_m) \cup P(P_m) \cup N(P_m)$. D'où il est clair que (u,y) est un voisin privé de (x,y) .

Lemme 4.1. Soit $m \geq 2$, alors il existe un ensemble dominant localisateur minimum D de $P_n \square P_m$ sachant que chaque sommet $i \in V(P_n)$, $|(P_m)_i \cap D| \leq m - 1$.

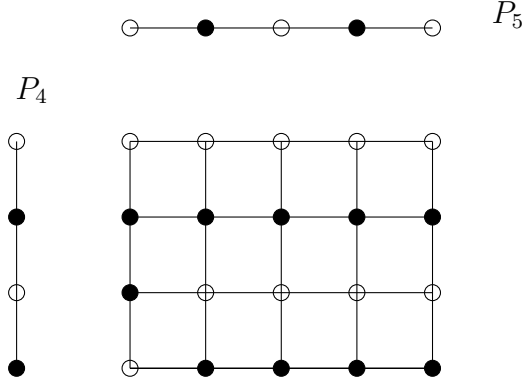
Preuve :

Soit D un ensemble dominant localisateur minimum de $P_n \square P_m$, on suppose $|(P_m)_i \cap D| = m$.

Le sous ensemble de sommets D colorés forme un ensemble dominant localisateur, en examinant tous les ensembles $N(v) \cap D$ tel que $v \in V \setminus D$, on trouvera que D couvre et sépare tous les sommets.



On construit un ensemble dominant localisateur minimum \dot{D} tel que $|\dot{D}| = |D|$.



Si $|(P_m)_0 \cap D| = m$ alors $|(P_m)_1 \cap D| = \emptyset$ d'ou $\dot{D} = (D \cup (0, 1)) \setminus (0, 0)$;

Et si $|(P_m)_{n-1} \cap D| = m$ alors $|(P_m)_n \cap D| = \emptyset$ d'ou $\dot{D} = (D \cup (n-1, n)) \setminus (n-1, n-1)$.

On suppose maintenant que $|(P_m)_i \cap D| = m$ pour quelque sommet i tel que $i \notin \{0, n-1\}$ et de plus $|(P_m)_{i-1} \cap D| = |(P_m)_{i+1} \cap D| = \emptyset$ alors

$$\dot{D} = (D \cup \{(0, i-1), (1, i+1)\}) \setminus \{(0, i), (1, i)\}.$$

Et finalement si $|(P_m)_i \cap D| = m$ pour quelque sommet i tel que $i \notin \{0, n-1\}$ sachant que $|(P_m)_{i-1} \cap D| = \emptyset$, $|(P_m)_{i+1} \cap D| \neq \emptyset$ et soit $(j, i+1) \in (P_m)_{i+1} \cap D$ alors il est clair que $(j, i-1) \notin (P_m)_{i-1} \cap D$, et de plus $|(P_m)_{i-1} \cap D| < m-1$ d'ou \dot{D} est donné par

$$\dot{D} = (D \cup (j, i-1)) \setminus (j, i).$$

■

Proposition 4.4. Pour toute chaine d'ordre n on a $\gamma_L(P_2 \square P_n) = n$

Preuve :

Soit D un ensemble dominant localisateur minimum de $P_2 \square P_n$ tel que $D \subseteq V(P_2) * V(P_n)$.

on suppose que toute chaine $P_{\hat{n}}$ d'orde \hat{n} tel que $\hat{n} < n$ satisfait la propriété. Soit

$V(P_2) * V(P_n) = \{u_{ij} : i=1,2; j = 1..n\}$ et D un ensemble dominant localisateur quelconque de $P_2 \square P_n$.

on suppose que n'importe qu'elle colonne C_j de $P_2 \square P_n$ tel que $|D \cap C_j| = 2$ pour $2 \leq j \leq n - 1$ sachant que $C_j = \{x_{1,j}, x_{2,j} : j = 1..n\}$.on construit un ensemble dominant localisateur \dot{D} obtenu à partir de D tel que $\dot{D} = D \setminus \bigcup_{j=2}^{n-1} \{x_{2,j}\} \cup \{x_{1,1}, x_{1,n}\}$ sachant que toute paire de sommet $u, v \in V \setminus \dot{D}$ non pas les même voisin dans \dot{D} avec $|C_j \cap \dot{D}| = 1$ on conclut que $\dot{D} = \bigcup_{j=1}^n \{x_{1,j}\}$ avec $|\dot{D}| = n < |D|$ contradiction avec le faite que D est un ensemble dominant localisateur minimum d'ou est un ensemble dominant localisateur minimum de $(P_2 \square P_n)$ de cardinalité n .

d'après lemme précédant on a $\gamma_L(P_2 \square P_n) \geq n$. Soit $D = \{(0, i) : \forall i \in V(P_n)\} \subseteq V(P_2 \square P_n)$ alors D est un ensemble dominant localisateur de $(P_2 \square P_n)$ d'ou $\gamma_L(P_2 \square P_n) = n$

Nous nous s'insperons pour preuver le résultat suivant à l'article [11], dont Brear a donné une relation entre le nombre de domination du produit cartésien de deux graphe et le produit du nombre de domination de ces deux graphe.

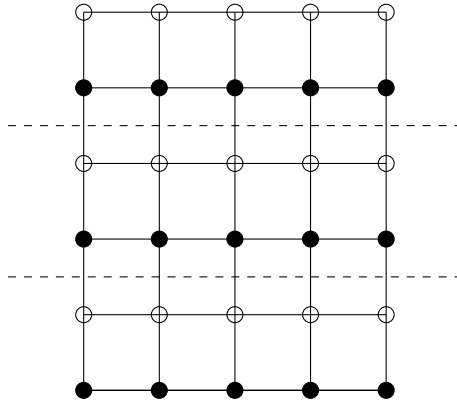
Proposition 4.5. Pour toutes chaines d'ordre n, m on a :

$$\gamma_L(P_m \square P_n) \leq \lfloor \frac{m * n}{2} \rfloor$$

Preuve :

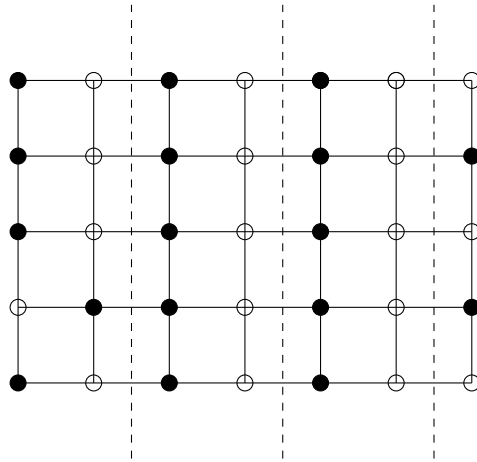
Par construction si n est pair ($n = 2K$) alors on va construire des bloc de $P_m \square P_2$ tel que chaque bloc contient un ensemble dominant localisateur de cardinalité qui égal à m de $P_m \square P_2$.

Le sous ensemble de sommets S colorés forme un ensemble dominant localisateur de $P_m \square P_2$ (d'après la proposition 4.4).



D'ou le nombre de domination localisatrice du produit cartésien de deux chène P_n et P_m est egal à $K * m$.

Si n est impair ($n = 2K + 1$) alors nombre de domination localisatrice du produit cartésien de deux chène P_n et P_m est egal à $K * m + \frac{2m}{5}$.



Finalement on a $\gamma_L(P_m \square P_n) \leq \lceil \frac{m*n}{2} \rceil$.

Conclusion

Tout au long de ce travail, nous nous sommes intéressés principalement à l'étude du problème de la domination localisatrice du produit cartésien de deux chaînes.

Dans un premier temps, nous avons déterminé une valeur exacte du nombre de domination localisatrice supérieur total d'une chaîne d'ordre n .

Par la suite, nous avons donné une relation entre le nombre de domination localisatrice supérieur total du produit cartésien de deux chaînes $P_2 \square P_m$ et le produit du nombre de domination localisatrice supérieur total de ces deux chaînes, ainsi une relation entre le nombre de domination localisatrice supérieur du produit cartésien de deux chaînes $P_n \square P_m$ et le produit du nombre de domination localisatrice supérieur de ces deux chaînes.

Enfin, nous avons donné une valeur exacte du nombre de domination localisatrice du produit cartésien de deux chaînes, ainsi nous avons établi une borne supérieure sur le nombre de domination localisatrice du produit cartésien de deux chaînes.

Comme perspectives de recherche, et qui fera suite à ces résultats, c'est de poursuivre et compléter les travaux sur le problème de la domination localisatrice du produit

cartésien, nous proposons :

- Caractériser les grilles telle que $\gamma_t^L = \gamma_L$.*
- Étendre les bornes obtenues à d'autres produits de graphes tel que (Produit Croisé, Produit Fort,...).*
- Déterminer le nombre de domination localisatrice d'un hypercube $\gamma_L(Q_n)$.*

Bibliographie

- [1] R. Aharoni et T. Szabo, Vizings Conjecture for chordal graphs. *Soumis*.
- [2] A. M. Barcalkin et L. F. German, The external stability number of the cartesian product of graphs. *Bul. Akad. Shtiince RSSMoldoven 1 (1977), 1521, 93*.
- [3] C. Berge, Graphs et hypergraphes, 2ème edition. *Dunod, Paris, 1973*.
- [4] M. Blidia, M. Chellali, T. W. Haynes et M. A. Henning, Independent and double domination in trees. *Utilitas Mathematica 70(2006)159-173*.
- [5] M. Blidia, M. Chellali et O. Favaron, Independence and 2-domination in trees. *Australasian Journal of Combinatorics, 33(2005)317-327*.
- [6] M. Blidia, O. Favaron et R. Lounes, Locating domination, 2-domination and independence in trees. *Australasian Journal of Combinatorics, 33(2005)317-327*.
- [7] M. Blidia, M. Chellali, N. Meddah et O. Favaron, On k-independence in graphs with emphasis on trees. *Discrete Mathematics, (2007)307*.
- [8] M. Blidia, M. Chellali, F. Maffray, J. Moncel et A. Semri, Locating domination and identifying codes in trees. *Australasian journal of Combinatorics, 39(2007)219-232*.
- [9] M. Blidia and R. Lounes, Vertices belongings to all or to no minimum locating dominating sets of trees and γ_L -excellent trees, *Opuscula Mathematica, 29(2009)*.
- [10] M. Blidia, M. Chellali, R. Lounes et F. Maffray, Trees with unique minimum locating dominating sets. *Soumis*.

- [11] B. Bresar, Vizing like conjecture for the upper domination of cartesian products of graphs- the proof. *Electronic J. Combin.* 12 (2005),N12.
- [12] M. Chellali, Bounds on the 2-domination number in cactusgraphs. *Opuscula Mathematica*, 26(1)(2006)5-12.
- [13] M. Chellali, On locating and differentiating total domination in trees. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 28 (3) (2008) 383-392.
- [14] M. Chellali et T. W. Haynes, Trees with unique minimum paired dominating sets. *Ars. Comb*, 73(2004) 3-12.
- [15] M. Chellali et T. W. Haynes, A characterisation of trees with unique minimum double dominating sets. *Soumis*.
- [16] M. Chellali et T. W. Haynes, A note on the total domination number of a tree. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 58(2006)189-193.
- [17] M. Chellali, M. Mimouni et Slater, On locating domination in graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 30(2010)223-235.
- [18] M. Chellali, M. Mimouni et Slater, Sur la domination localisatrice dans les graphes. *COSI2009, soumis*.
- [19] W. E. Clark et S. Suen, An Inequality Related to Vizings Conjecture. *Elec. J. Combinatorics* 7 (2000), N4.
- [20] E. J. Cockayne et S. T. Hedetniemi, Towards a theory of domination graphs. *Networks*, 7(1977) 247-261.
- [21] E. J. Cockayne et S. T. Hedetniemi et D.J. Miller, Properties of hereditary hypergraphs and middle graphs. *Can. Math. Bull*, 21(1978) 461-468.
- [22] E. J. Cockayne et S. T. Hedetniemi et R.M. Dawes, Total domination in graphs. *Net-works*. 10(1980) 211-219.

- [23] W. DALI, Nombres de Bondage et Graphes Critiques par rapport aux Nombres de Domination (Totale) Localisatrice. *Mémoire Magister, USTHB, 25/07/1998.*
- [24] C. F. De Jaenish, Applications de l'analyse mathématique au jeu d'échec. *Petrograd, 1862.*
- [25] P. Dorbec, M. A. Henning et D. Rall, On upper total domination number of cartesian products of graphs. *A paraître dans J. Combinatorial optimization.*
- [26] M. El-Zahar et C. M. Pareek, Domination number of products of graphs. *Ars Combin. 31 (1991), 223-227.*
- [27] M. Farber, Domination, Independent domination and duality in strongly chordal graphs. *Disc. Appl. Math. 7(1984) 115-130.*
- [28] A. Finbow et B.L. Hartnel, On locating sets and well covered graphs. *Congr. Numer, 65(1988) 191-200.*
- [29] J. F. Fink et M.S. Jacobson, n-domination in graphs in Graph Theory with applications to Algorithms and Computer. *Y. Alavi and A. J. Schwenk(eds), (1985) 283-300 (Kalamazoo, MI 1984) Wiley.*
- [30] J. F. Fink, M. S. Jacobson, L. F. Kinch et J. Roberts, On graphs having domination number half their order. *Period. Math. Hungar, 16(1985) 287-293.*
- [31] G. Gunter, H. Hartnell, L. R. Markus et D. Rall, Graphs with unique minimum dominating sets. *Congr. Numer, 101(1994) 55-63.*
- [32] F. Harary et T. W. Haynes, Double domination in graphs. *Ars Combin, 55(2000) 201-213.*
- [33] T. W. Haynes et A. M. Henning, Trees with unique minimum total dominating sets. *Discuss. Math. Graph Theory, 22 (2002) 233-246.*
- [34] S. T. Hedetniemi et R. C. Lasker, Introduction. *Discrete Mathematics, 86 (1990) 3-9.*

- [35] T. W. Haynes, A. M. Henning et J. Howard, Locating and total dominating sets in trees. *Discrete Applied Mathematics*, 154(2006)1293-1300.
- [36] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et P. J. Slater, Domination in Graphs. *Advanced Topics*, Marcel Dekker New York 1998.
- [37] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et P. J. Slater, Fundamentals of domination in graphs. *Marcel Dekker New York 1998*
- [38] T. W. Haynes et M. A. Henning, On the Domination of the Products of Graphs. I, *Ars Combinatoria* 18 (1983), 334-412.
- [39] T. W. Haynes et M. A. Henning, On the Domination of the Products of Graphs II : Trees. *J. Graph Theory* 10 (1986), 97-106.
- [40] M. A. Henning et D. F. Rall, On the total domination number of Cartesian products of graph. *Graphs and Combinatorics* 21 (2005), 63-69.
- [41] W. Imrich et S. Klavzar, Product Graphs : structure and Recognition. *J. Wiley sons, New York 2000*.
- [42] M. S. Jacobson et L. F. Kinch, Trees with two disjoint minimum independent dominating sets. *Discrete Mathematics* 304(2005) 69-78.
- [43] R. Nowakowski et D. F. Rall, Associative graph products and their independence, domination and coloring numbers, *Discuss. Math. Graph Theory* 16 (1996).
- [44] O. Ore. theory of graphs. *Amer Soc Coloq Pub* 38 Providence R I, 1962.
- [45] C. Payan et N. H. Xuong, Domination balanced graphs. *J. Graph Theory*, 6(1982)23-32.
- [46] V. G. Vizing, The cartesian product of graphs. *Vycisl. Sistemy No. 9 (1963)*, 30-43.
- [47] V. G. Vizing, Some unsolved problems in graph theory. *Uspehi Mat. Nauk* 23 (6(144)) (1968), 117-134.

- [48] *N. J. Rad*, Results on locating total domination in graphs. *En préparation*.
- [49] *P. J. Slater*, Domination and location in acyclic graphs. *Networks* 17(1987) 55-64.
- [50] *P. J. Slater*, Dominating and reference sets in graphs. *J Mathematical and Physical Sciences* 22 (1988) 445-455.
- [51] *P. J. Slater*, Locating Dominating sets and locating-dominating sets. *Y. Alavi and A. J. Schwenk (eds). graph Theory, Combinatorics, proc. Seventh. Quad. Internat. Conf. on the theory and Applications of graphs (1995) 1073-1079. John Wiley Sons , Inc.*