

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE

FACULTE DE GENIE CIVIL ET DE GENIE MECANIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL LABORATOIRE BATI DANS L'ENVIRONNEMENT

THESE

Présentée à l'USTHB en vue de l'obtention du Grade de Magister en Structure

Par M^r **Essaid DJAKAB**

THEME

IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS DE LA MATRICE DE L'AMORTISSEMENT, DES FREQUENCES DE RESONANCE ET DES MODES DE DEFORMATIONS D'UNE STRUCTURE DYNAMIQUE.

Soutenue le : **23 juin 2001**

Devant le jury composé de :

Président :	N. LARADI	Maître de conférence	USTHB
Directeur de thèse	D. BENOUAR	Maître de conférence	USTHB
Examineurs :	M. CHABAAT	Maître de conférence	USTHB
	M. CHEMROUK	Maître de conférence	EPAU
	S. BENMANSOUR	Professeur	USTHB
	A. AFRA	Maître de recherche	CGS

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au Laboratoire Bâti dans l'Environnement du Département de Génie Civil de l'USTHB, dirigé par le Docteur BENOUAR DJILLALI. Qu'il me soit permis de lui exprimer ma profonde reconnaissance pour avoir assuré la direction scientifique de ce mémoire, pour la confiance qu'il m'a toujours témoignée et pour sa disponibilité amicale.

Je remercie très vivement M. LARADI du département de Génie Civil, M. CHABAAT vice recteur de l'USTHB, M. CHEMROUK directeur de l'EPAU, M. BENMANSOUR du département de génie mécanique et M. AFRA du CGS pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être membres du jury.

Mes remerciements vont également au professeur M. E. GAYLARD de l'Université de BRUNEL (GB) pour avoir mis à ma disposition sa documentation personnelle.

Je remercie aussi M. HOUACINE du département d'Electronique de l'USTHB pour toutes les discussions que nous avons eu sur le traitement de signal.

TABLE DES MATIERES

	N° de pages
Remerciements	2
Abstract	3
Résumé	4
Nomenclature	9
Liste des figures et tableaux	12
1 INTRODUCTION	15
1.1 revue des méthodes d'identification	16
1.1.1 identification des paramètres modaux	16
1.1.2 identification des paramètres physiques	16
2.THEORIE GENERALE, FORMULATION ET APPLICATION DE LA METHODE D'IDENTIFICATION PROPOSEE	20
2.1 formulation de l'équation du mouvement : modèle avec amortissement visqueux en domaine temporel.	20
2.1.1 matrices des réponses	24
2.2 modèle avec amortissement visqueux dans l'espace des fréquences	25
2.2.1 réponses en fréquences et fonction de transfert	25
2.2.2 matrice des fonctions de transfert	27
2.3 méthode d'identification proposée	28
2.3.1 modèle avec amortissement visqueux en domaine temporel	28
2.3.1.1 identification du coefficient de l'amortissement c (1 ddl)	28
2.3.1.2 généralisation de la méthode d'identification proposée	30
2.3.1.3 identification des paramètres modaux	32
2.3.1.4 applications de la méthode d'identification dans le domaine	

temporel à un exemple analytique	33
2.3.1.4.1 système à un seul degré de liberté	33
a) identification du coefficient de l'amortissement dans l'espace des temps	34
b) identification du coefficient de l'amortissement dans l'espace des fréquences	37
c) identification de la pulsation propre dans le domaine temporel	39
d) identification de la pulsation propre dans le domaine des fréquences	40
2.4 système à plusieurs degrés de liberté	41
2.4.1 identification de la matrice de l'amortissement dans l'espace temporel	41
2.4.2 système à quatre degrés de liberté	42
2.4.3 identification de la matrice de l'amortissement	42
a) utilisation des réponses sans perturbations	42
b) utilisation des réponses avec perturbations	46
2.4.4 identification des modes de déformation et des fréquences de résonance	49
2.4.5 modèle avec amortissement visqueux dans le domaine des fréquences	52
2.4.5.1 identification de la matrice de l'amortissement dans l'espace des fréquences	53
2.4.5.1.1 système à un seul degré de liberté.	53
2.4.5.1.2 système à plusieurs degrés de liberté.	53
2.4.6 identification des paramètres modaux dans le domaine des fréquences.	56
2.4.6.1 application à un système analytique à deux degrés de liberté dans le domaine des fréquences	58
2.5 économie des mesures utilisées par la méthode d'identification proposée.	61

2.5.1 évaluation de la matrice dynamique.	62
2.5.2 identification de la matrice de masses	64
2.5.3 identification de réponses non mesurées	67
2.5.3.1 identification de la matrice des masses et des réponses non mesurées en utilisant les réponses non polluées.	68
2.5.3.2 identification de la matrice de masses et des réponses non mesurées en utilisant les réponses polluées	76
3 DISCUSSION	84
3.1 ordre du modèle du système dynamique	84
3.2 nombre de réponses à utiliser	84
3.3 identification dans le domaine des fréquences	85
3.4 fréquences de résonance rapprochées	85
4. CONCLUSION GENERALE	86
5. REFERENCES	88
6.ANNEXES	92
6.1 systèmes analytiques	92
6.1.1 système à un seul degré de liberté	92
6.1.2 système à deux degrés de liberté	98
6.2. méthode de génération du bruit à ajouter aux réponses analytiques	107
6.3 identification de la matrice de l'amortissement dans le domaine temporel	108
6.3.1 système à un seul degré de liberté	108
6.3.2 système à plusieurs degrés de liberté	110

6.4 fonction de transfert	111
6.4.1 système à un seul degré de liberté	111
6.4.2 système à plusieurs de degrés de liberté	112
6.4.3 identification de la matrice de l'amortissement d'un système à plusieurs degrés de liberté	113
6.4.3.1 matrice des réponses impulsionnelles et fonction de transfert	115
6.4.3.2 théorème de PARSEVAL pour un système à plusieurs de degrés de liberté	117
6.5 signal de force d'un impact, fonction de DIRAC	118
6.6 récurrence de M. GAYLARD	120
6.7 système à quatre degrés de liberté	121
6.8 organigramme du programme informatique	129
6.9 publication de notre travail de recherche	130

NOMENCLATURE

$[M]$: matrice de masse

$[C]$: matrice de l'amortissement

$[K]$: matrice de rigidité

N : nombre de degré de liberté

$\{X\}$: vecteur déplacement

$\{\dot{X}\}$: vecteur de vitesse

$\{\ddot{X}\}$: vecteur accélération

a_1, a_2 : constantes

ω_{nr} : pulsation naturelle du mode r

$\{U\}$: vecteur propre

$\{U_r\}$: vecteur propre du mode r

$\{q\}$: vecteur déplacement

$\{q_r\}$: vecteur de déplacement du mode r

$\{\dot{q}_r\}$: vecteur de vitesse du mode r

$\{\ddot{q}_r\}$: vecteur accélération du mode r

$[I]$: matrice unité

m_r : coefficient de masse associé au mode r

c_r : coefficient de l'amortissement associé au mode r

k_r : coefficient de rigidité associé au mode r

ξ_r : amortissement réduit associé au mode r

$q_{dr}(t)$: réponse de déplacement associé au mode r

$q_{vr}(t)$: réponse de vitesse associée au mode r

$[U]$: matrice modale

$[Q_d(t)]$: matrice des réponses de déplacements

$[Q_v(t)]$: matrice des réponses de vitesses
 $q_{ij}^d(t)$: élément de la matrice des réponses de déplacements
 $q_{ij}^v(t)$: élément de la matrice des réponses de vitesses
 $q_{dr}(\omega)$: transformée de FOURIER de la réponse de déplacement
 $q_{vr}(\omega)$: transformée de FOURIER de la réponse de vitesse
 ω : pulsation
 $f_r(\omega)$: transformée de FOURIER de l'excitation $f_r(t)$
 $q_r(\omega)$: transformée de FOURIER du déplacement $q_r(t)$
 $H_r(\omega)$: fonction de transfert
 $\delta(t)$: fonction de DIRAC
 $H_{dr}(\omega)$: flexibilité dynamique associé au mode r
 $H_{vr}(\omega)$: mobilité associé au mode r
 E_v : énergie de la réponse de vitesse
 p : scalaire
 Δt : intervalle d'échantillonnage
 $[E_v]$: matrice de l'énergie des réponses de vitesses
 dt : intervalle d'intégration
 $[U]^T$: transposé de la matrice modale
 y : nombre de points mesurés
 $[E_d]$: matrice de l'énergie des réponses de déplacements
 $[A]$: matrice dynamique
 Δt_0 : intervalle d'échantillonnage maximal
 $\Delta \omega$: intervalle d'échantillonnage en domaine fréquentiel
 $\Delta \omega_0$: intervalle d'échantillonnage
 $\Delta \omega_0$: intervalle d'échantillonnage maximal en domaine fréquentiel
 $[e_r]$: matrice des erreurs (rapport de la valeur identifié à la valeur réelle)

 rp : rapport de $\frac{\Delta t_0}{\Delta t}$

BS : rapport bruit signal
 λ : valeur propre de la matrice dynamique
 $|H(\omega)|$: module de la fonction de transfert
 $P_{vr}(\omega)$: densité de puissance spectrale de la réponse des vitesses
 $P_{dr}(\omega)$: densité de puissance spectrale de la réponse des déplacements
 $[P_{vr}(\omega)]$: matrice densité de puissance spectrale de la réponse des vitesses
 $[P_{dr}(\omega)]$: matrice densité de puissance spectrale de la réponse des déplacements
 $[A_q]$: matrice dynamique de la récurrence de M GAYLARD
 r : scalaire
 q : scalaire
 R : nombre de points de mesure des réponses
 $T.I.M$: time intégral method
 $M.I.T$: méthode d'intégration temporelle
 $h(t)$: réponse impulsionnelle
 $d.d.l$: degré de liberté

LISTE DES FIGURES ET TABLEAUX

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1 : valeurs du coefficient de l'amortissement identifié en domaine temporel, système à un degré de liberté.

Tableau 2 : valeurs du coefficient de l'amortissement identifié en domaine fréquentiel, système à un degré de liberté.

Tableau 2 : comparaison des valeurs identifiées en domaine temporel et fréquentiel, système à un degré de liberté.

Tableau 4 : valeurs des réponses impulsionnelles de vitesses, système à quatre degrés de liberté.

Tableau 5 : valeurs des réponses impulsionnelles de vitesses, système à quatre degrés, de liberté suite.

Tableau 6 : valeurs identifiées des réponses impulsionnelles de vitesses, système à quatre degrés de liberté.

Tableau 7 : valeurs identifiées des réponses impulsionnelles de vitesses, système à quatre degrés de liberté suite.

Tableau 8 : valeurs polluées des réponses impulsionnelles de vitesses, système à quatre degrés de liberté.

Tableau 9 : valeurs polluées des réponses impulsionnelles de vitesses, système à quatre degrés de liberté suite.

Tableau 10 : valeurs polluées, identifiées des réponses impulsionnelles de vitesses, système à quatre degrés de liberté.

Tableau 11 : valeurs polluées, identifiées des réponses impulsionnelles de vitesses, système à quatre degrés de liberté suite.

Tableau 12 : valeurs des composantes réelles et imaginaires de la fonction de transfert, système à un seul degré de liberté.

Tableau 13 : valeurs des composantes réelles et imaginaires de la fonction de transfert $H_{11}(w)$, système à deux degrés de liberté.

Tableau 14 : valeurs des composantes réelles et imaginaires de la fonction de transfert $H_{12}(w)$, système à un seul degré de liberté.

LISTE DES FIGURES

Figure 1 : système à un seul degré de liberté.

Figure 2 : système à un seul degré de liberté.

Figure 3 : réponse de vitesse, système à un seul degré de liberté.

Figure 4 : réponse de déplacement, système à un seul degré de liberté.

Figure 5 : composante réelle de la réponse en fréquence de vitesse, système à un seul degré de liberté.

Figure 6 : composante imaginaire de la réponse en fréquence de vitesse, système à un seul degré de liberté.

Figure 6a : mobilité (phase et module de la réponse en fréquence)

Figure 7 : système à deux degrés de liberté.

Figure 8 : réponse de vitesse $q_{11}^v(t)$, système à deux degrés de liberté.

Figure 9 : réponse de vitesse $q_{12}^v(t)$, système à deux degrés de liberté.

Figure 10 : composante réelle de la fonction de transfert $H_{11}^v(w)$, système à deux degrés de liberté.

Figure 11 : composante imaginaire de la fonction de transfert $H_{11}^v(w)$, système à deux degrés de liberté.

Figure 12 : composante réelle de la fonction de transfert $H_{12}^v(w)$, système à deux degrés de liberté.

Figure 13 : composante imaginaire de la fonction de transfert $H_{12}^v(w)$, système à deux degrés de liberté.

Figure 14 : représentation d'un système linéaire, système à un degré de liberté.

Figure 15 : représentation d'un système linéaire, système à plusieurs degrés de liberté.

Figure 16 : fonction de DIRAC.

Figure 17 : forme d'une excitation par impact.

Figure 18 : bâtiment de portiques à quatre étages.

Figure 19 : réponse impulsionnelle de vitesse $q_{11}(t)$, système à quatre degrés de liberté.

Figure 20 : composante réelle de la fonction de transfert $H_{11}(w)$, système à quatre degrés de liberté.

Figure 21 : composante imaginaire de la fonction de transfert $H_{11}(w)$, système à quatre degrés de liberté.

Figure 22 : réponse impulsionnelle de vitesse $q_{14}(t)$, système à quatre degrés de liberté.

Figure 23 : composante réelle de la fonction de transfert $H_{14}(w)$, système à quatre degrés de liberté.

Figure 24 : composante imaginaire de la fonction de transfert $H_{14}(w)$, système à quatre degrés de liberté.

RESUME

Cette étude propose le développement d'une méthode d'identification de la matrice de l'amortissement $[C]$ à partir de la matrice $[Q_v(t)]$ des réponses causales d'un système dynamique linéaire. La matrice $[Q_v(t)]$ représente les enregistrements des réponses de vitesses à une impulsion. La méthode proposée permet d'identifier les paramètres modaux (fréquences de résonance et modes de déformation) à partir de l'analyse dynamique d'une structure connaissant la matrice des réponses de vitesses $[Q_v(t)]$ et celle des réponses de déplacements $[Q_d(t)]$. La technique d'identification nécessite la connaissance de la matrice de masses, la matrice des réponses de vitesses $[Q_v(t)]$ et la matrice des réponses de déplacements $[Q_d(t)]$ lorsque la force d'excitation est une impulsion. La méthode que nous proposons est applicable dans le domaine temporel et fréquentiel.

L'identification de la matrice de l'amortissement du type visqueux et des paramètres modaux en appliquant cette méthode, appelée la Méthode Intégrale Temporelle, est illustrée à travers des exemples numériques. La première application concerne un exemple analytique (réponses sans bruit). Nous considérons ensuite des réponses auxquelles nous ajoutons un bruit pour simuler des réponses réelles.

L'économie relative au nombre de réponses impulsionnelles à mesurer dans le cas pratique est prise en compte en identifiant les réponses non observées.

Les limites de l'application de la présente méthode sont considérées en variant les paramètres relatifs à la sommation numérique et le temps d'observation des réponses impulsionnelles.

1.INTRODUCTION

Le but de cette étude est le développement d'une méthode d'identification de la matrice de l'amortissement, des fréquences de résonance et des formes modales dans les domaines temporel et fréquentiel.

La principale originalité de ce travail est de présenter une technique permettant d'identifier directement la matrice de l'amortissement, à partir des réponses transitoires de vitesses, sans la construire connaissant les coefficients de l'amortissement réduit et la matrice modale.

L'application de la méthode d'identification proposée à des structures réelles permet de connaître la distribution de l'amortissement dans les structures. Cette application ne sera abordée dans notre étude.

Nous rappellerons que les caractéristiques dynamiques des structures à identifier sont les fréquences de résonance, les formes modales, l'amortissement réduit et les paramètres physiques (matrices de masses, de rigidités et de l'amortissement /26,14,18,28,10,32,4,20,25,23/. Ces caractéristiques servent à prévoir le comportement des structures lorsqu'elles sont soumises à des actions dynamiques ou l'amortissement réduit est généralement considéré /27,12/. En fait, l'identification et la vérification propriétés dynamiques les structures existantes entre dans le cadre de leur surveillance de routine. Nous signalons à ce sujet les travaux menés par **H. AFRA** /2/ et **C. GENATIOS** /16/.

Cependant, l'application de certaines méthodes de calcul des réponses des structures nécessite la connaissance de la matrice de l'amortissement complète, d'où l'intérêt de son identification /7,32,30/.

Nous n'avons pas abordé le problème d'identification de la matrice de l'amortissement dans le cas de l'amortissement général ou hystérétique et nous n'avons pas comparé les résultats obtenus par application de notre méthode d'identification avec ceux obtenus par une autre méthode. Le développement de la méthode d'identification proprement dite et son application à des exemples analytiques simples sont prioritaires.

1.1 REVUE DES METHODES D'IDENTIFICATION DES PROPRIETES DYNAMIQUES DES STRUCTURES.

L'identification des paramètres modaux et physiques caractérisant les structures a fait l'objet de plusieurs études analytiques et expérimentales. Les méthodes d'extraction de ces paramètres sont classées suivant le domaine ou les réponses sont disponibles.

1.1.1 identification des paramètres modaux

Les fréquences de résonance, les coefficients d'amortissement réduits et les formes modales peuvent être déterminées à partir des réponses après un lâcher /10,34/. La méthode d'Ibrahim /20/ considère des réponses du type libre à l'instant t_i et ceux décalées à l'instant $t_i + \Delta t$, ensuite la matrice [A] appelée matrice dynamique est construite à partir de ces réponses décalées. La connaissance des valeurs propres et vecteurs propres de cette matrice permet l'identification des paramètres modaux Cette méthode sera introduite à la troisième partie au deuxième chapitre.

L'identification des paramètres modaux dans le domaine des fréquences considère que les réponses en fréquences sont sous la somme de fractions rationnelles /10,25/. La connaissance des pôles et des résidus de ces fractions conduit à l'identification des paramètres modaux.

Les méthodes énumérées ci-dessus ont été utilisées de manière courante pour l'identification expérimentale des structures dynamiques /10,4,21/.

1.1.2 identification des paramètres physiques

Les méthodes d'identification des paramètres physiques, que sont les matrices de masse et de rigidité, ont été développées par beaucoup de chercheurs, cependant les méthodes pour l'identification de la matrice de l'amortissement sont peu courantes /14,28/. Dans le présent travail nous nous intéresserons à l'identification de la matrice de l'amortissement.

En fait pour certaines applications la connaissance de l'amortissement réduit associé à chaque mode de vibration permet de construire la matrice de l'amortissement en projetant celle-ci sur la base des modes propres de vibration de la structure/36,24,21/.

Des méthodes d'identification directe de la matrice de l'amortissement ont été

développées aussi /18,36,6,3/

En effet P. CARAVANI /6/ utilise une méthode itérative basée sur la solution de l'équation différentielle du mouvement. La nature itérative de l'algorithme impose des estimations initiales des coefficients de l'amortissement pour construire la matrice [C]. Cette approche nécessite aussi la connaissance des matrices de masse [M] et de rigidité [K].

T.K.HASSELMAN /18/ propose l'identification de la matrice [C] à partir de tests par sous structuration. Pour chacune des sous structures, une sous matrice de l'amortissement est identifiée, ensuite un assemblage de ces sous matrices est effectué pour obtenir une matrice [C] diagonale dont la projection sur les modes propres conduit à la matrice de l'amortissement de la structure.

R.POTTER /28/ présente une méthode basée sur la connaissance de la fonction de transfert et son inverse dans le domaine des fréquences. La matrice de l'amortissement est déduite de la valeur de la dérivée de la fonction de transfert au pôle égale à zéro. Les matrices de masse et de rigidité sont déterminées par le même procédé.

Plus tard, J.G BELLIVEAU et Y SOUCY / 3/ ont décrit une procédure d'identification basée sur la technique de sous structuration. Cette méthode est une extension de celle de HASSELMAN /18/ et utilise la transposé complexe conjuguée et la matrice des formes modales. Du fait que les valeurs et les vecteurs propres associés au problème $[[M]^{-1}[K] - \omega^2[I]]\{U\} = \{0\}$ sont complexes conjuguées, pour des structures sous amorties, les efforts de calcul sont réduits de moitié.

Les méthodes citées ci dessus ont été appliquées à des structures réelles. Cependant, E.L.WILSON et J.PENZIEN /36/ ont présenté une méthode analytique de construction de la matrice de l'amortissement. Cette matrice peut être évaluée en premier lieu en utilisant la série de CAUGHEY /7/.ou en considérant que [C] est la somme d'une série

de matrices où chacune d'elle provient de l'amortissement d'un mode seulement de la structure.

Il apparaît clairement qu'un nombre de degrés de liberté important est un handicap pour la méthode de WILSON et qu'il est pratiquement impossible de considérer l'amortissement pour un mode de vibration tout en éliminant la contribution des autres modes.

Notre méthode quant à elle utilise les opérations sur les matrices des réponses dans les domaines temporel et fréquentiel. Les résultats obtenus ,pour l'identification de la matrice de l'amortissement proportionnel du type visqueux, les fréquences de résonance et la matrice modale ,sont satisfaisants dans les deux domaines. Cependant, la précision sur les éléments de la matrice de l'amortissement est liée à l'accroissement temporel d'intégration et au nombre de points utilisés par la sommation numérique.

La méthode d'identification que nous proposons est basée sur la connaissance des matrices complètes des réponses de vitesses, de déplacements et de masses dans le domaine temporel ou fréquentiel. Leur multiplication suivant un ordre précis permet d'identifier les matrices de l'amortissement, les fréquences de résonance et les formes modales.

Son application dans le domaine fréquentiel est rendue possible par application de la transformée de FOURIER et du fait que les réponses temporelles ou fréquentielles contiennent les mêmes informations relatives aux caractéristiques dynamiques de la structure étudiée.

Nous montrons aussi comment l'identification de la matrice des masses, non connue à priori, et les réponses non calculées sont identifiées connaissant une colonne de la matrice des réponses de vitesses ou de déplacements.

Cette technique est basée sur le travail de GAYLARD /15/ et IBRAHIM /20/.

En conséquence, notre travail consiste principalement en :

-
- La formulation de la méthode d'identification de la matrice de l'amortissement, les fréquences de résonance et les modes de vibration des structures dans le domaine temporel et fréquentiel.
 - L'application de la méthode à des exemples analytiques et un système réel simulé en ajoutant un bruit du type GAUSSIEN aux réponses analytiques.
 - L'évaluation de l'efficacité de la méthode proposée en variant les paramètres intervenant dans l'évaluation de la sommation numérique. Le cas où les fréquences de résonance sont très rapprochées est aussi considéré.

Pour ce faire, ce mémoire comporte quatre chapitres.

Le premier chapitre traite des différentes méthodes d'identification de la matrice de l'amortissement et des paramètres modaux.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons notre méthode. Dans un premier temps, nous introduisons la théorie générale de l'analyse des systèmes dynamiques dans le domaine temporel et fréquentiel.

Dans un deuxième temps, nous développons notre méthode d'identification avec application aux exemples analytiques.

Enfin, nous introduisons le moyen de considérer en premier lieu un nombre réduit de réponses, donc à mesurer si des essais expérimentaux doivent être menés. Ce moyen consiste à identifier les réponses non connues à partir d'une colonne de la matrice des réponses.

Le troisième chapitre traite de l'application de la méthode proposée et des résultats obtenus.

Le quatrième chapitre concerne la conclusion générale et les perspectives de la méthode.

Après cette introduction, nous abordons le deuxième chapitre où la théorie nécessaire est introduite et notre méthode d'identification développée.

2 THEORIE GENERALE, FORMULATION ET APPLICATION DE LA METHODE D'IDENTIFICATION PROPOSEE.

2.1 FORMULATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT : MODELE AVEC AMORTISSEMENT VISQUEUX EN DOMAINE TEMPOREL.

Nous ne traiterons pas en détail les développements mathématiques qui ne nous pas propres, En revanche nous introduirons avec soins les développements que nous avons nous même obtenu.

Nous considérerons le modèle de système linéaire avec amortissement visqueux pour lequel les forces d'amortissement sont proportionnelles à la vitesse.

Dans ce chapitre nous introduirons la théorie relative aux équations du mouvement d'une structure dynamique dans le domaine des temps et des fréquences en considérant l'amortissement proportionnel.

On s'intéressera particulièrement aux réponses du système dynamique lorsqu'il est soumis à une force impulsionnelle à partir de sa position de repos.

L'équation du mouvement d'une structure discrétisée à N degrés de liberté (d.d.l) représentée par un système linéaire en vibration libre est :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{0\} \quad 2.1$$

$[M]$, $[C]$ et $[K]$ désignent respectivement les matrices, d'ordre N, de masse,

d'amortissement visqueux et de rigidité.

L'équation (2.1) représente un système de N équations couplées. Ce système peut être découplé en supposant un amortissement proportionnel. La condition nécessaire pour que les modes de vibration soient découplés est donnée par CAUGHEY et O'KELLY /7/.

Cependant il est difficile de donner une interprétation physique à la condition de CAUGHEY. Une autre forme de l'amortissement qui permet le découplage de l'équation (2.1) est celle proposée par RAYLEIGH /24/. Dans ce cas la matrice de l'amortissement est une combinaison linéaire de la matrice de masse et de rigidité.

$$[C] = a_1[M] + a_2[K] \quad 2.2$$

les constantes a_1 et a_2 sont à déterminer.

D'autre part la solution du problème aux valeurs propres :

$$[[M]^{-1}[K] - \omega_{ni}^2[I]]\{U_r\} = \{0\} \quad 2.3$$

$r=1, \dots, N$, permet la formulation du problème en projetant le vecteur déplacement

$\{X\}$ sur l'ensemble des modes propres de vibration $\{U\}$:

$$\{X\} = \sum_{r=1}^N \{U_r\} q_r = [U]\{q\} \quad 2.4$$

ou $[U]$ est la matrice modale d'ordre N et $\{q\}$ est le vecteur des déplacements modaux

/30,12,22/.

En tenant compte de l'équation (2.4) et en remplaçant les vecteurs accélérations, vitesses et déplacements, après projection sur la base formée par les modes propres, par leurs expressions dans l'équation (2.1) et en multipliant aussi par le $r^{\text{ième}}$ vecteur

propre transposé $\{U_r\}^T$, on obtient :

$$\{U_r\}^T [M][U]\{\ddot{q}_r\} + \{U_r\}^T [C][U]\{\dot{q}_r\} + \{U_r\}^T [K][U]\{q_r\} = \{0\} \quad 2.5$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes propres par rapport aux matrices de masse et de rigidité et compte tenu de l'hypothèse de l'amortissement proportionnel, pour le $r^{\text{ième}}$ mode l'équation (2.5) s'écrit :

$$m_r \ddot{q}_r + c_r \dot{q}_r + k_r q_r = 0 \quad 2.6$$

ou m_r, c_r et k_r sont respectivement la masse, l'amortissement et la rigidité associé au mode r .

Si on considère que la structure est composée de N éléments (stations de mesure des réponses ou des excitations), la composante X_i du vecteur déplacement réel $\{X\}$ à la

station i est :

$$X_i = u_{1i}q_1 + u_{2i}q_2 + \dots + u_{ni}q_n = \sum_{r=1}^N u_{ri}q_r \quad 2.7$$

En revenant à une représentation physique, l'équation (2.5) peut s'écrire :

$$\ddot{x}_{ri} + 2\xi_r \omega_{nr} \dot{x}_{ri} + \omega_{nr}^2 x_{ri} = 0 \quad 2.8$$

avec
$$\omega_{nr}^2 = \frac{k_r}{m_r}, \quad 2\xi_r \omega_{nr} = \frac{c_r}{m_r} \quad 2.9$$

ω_{nr} et ξ_r sont appelés respectivement pulsation naturelle et amortissement réduit associés au mode de vibration r et x_{ri} représente le déplacement du mode r au point de mesure i .

Ainsi le système couplé (équation 2.5) a été découplé en un système à N équations indépendantes dont les inconnues sont les composantes des modes propres de

vibration. Chacune de ces équations est une équation différentielle du second ordre représentant l'équilibre modal en chaque point de la structure.

Reprenons l'équation (2.5) et considérant le cas où l'excitation est une impulsion caractérisée par la fonction de DIRAC $\delta(t)$. Dans ce cas la solution de l'équation en terme de déplacement pour un système dynamique sous amorti est /24,25/ :

$$q_{dr}(t) = \frac{1}{m_r \omega_{nr} \sqrt{1 - \xi_r^2}} (\exp(-\xi_r \omega_{nr} t)) \sin((\omega_{nr} \sqrt{1 - \xi_r^2}) t) \quad 2.10$$

$q_{dr}(t)$ représente aussi la réponse transitoire de déplacement d'un système suivant le modèle d'un seul degré de liberté.

Cependant dans notre cas, l'identification de la matrice de l'amortissement $[C]$ nécessite la connaissance de la réponse de vitesse. En conséquence, par simple dérivation de l'équation 2.10 nous avons :

$$q_{vr}(t) = \frac{1}{m_r} \exp(-\xi_r \omega_{nr} t) \left\{ \frac{-\xi_r}{\sqrt{1 - \xi_r^2}} \sin((\omega_{nr} \sqrt{1 - \xi_r^2}) t) + \cos((\omega_{nr} \sqrt{1 - \xi_r^2}) t) \right\} \quad 2.11$$

les indices d, v et r représentent respectivement le déplacement, la vitesse relatifs au mode r.

2.1.1 Matrice des réponses

La méthode d'identification proposée est basée sur la connaissance de la matrice des réponses de vitesses et des déplacements.

La matrice des réponses de vitesses est construite de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \cdots q_{1j}^{vr}(t) \cdots \\ \cdots q_{2j}^{vr}(t) \cdots \\ \cdots \cdots \cdots \\ \cdots q_{ij}^{vr}(t) \cdots \\ \cdots \cdots \cdots \\ \cdots q_{Nj}^{vr}(t) \cdots \end{bmatrix} = [U][diag(q_{vr}(t))]\{U_j\}^T \quad 2.12$$

$q_{ij}^{vr}(t)$ est le i, j élément de la matrice des réponses $[U] = [\{U_1\}, \{U_2\}, \dots, \{U_j\}, \dots, \{U_N\}]$

est la matrice modale et $\{U_j\}^T$ est la $j^{\text{ième}}$ colonne de $[U]^T$.

pour toutes les combinaisons de i et j ($1, \dots, N$) les matrices de réponses de déplacement et de vitesses obtenues sont :

$$[Q_d(t)] = [U][diag(q_{dr}(t))][U]^T \quad 2.13$$

$$[Q_v(t)] = [U][diag(q_{vr}(t))][U]^T \quad 2.14$$

Chaque fonction élément i, j des matrices $[Q_d(t)]$ et $[Q_v(t)]$ peut être évaluée comme suit pour les réponses de déplacement et de vitesse.

$$q_{ij}^d(t) = \sum_{r=1}^N u_{ir} u_{jr} (\exp(-\xi_r \omega_{nr} t)) \sin((\omega_{nr} \sqrt{1 - \xi_r^2}) t) \quad 2.15$$

$$q_{ij}^v(t) = \sum_{r=1}^N u_{ir} u_{jr} (\exp(-\xi_r \omega_{nr} t)) \left\{ \frac{-\xi_r}{\sqrt{1 - \xi_r^2}} \sin((\omega_{nr} \sqrt{1 - \xi_r^2}) t) + \cos((\omega_{nr} \sqrt{1 - \xi_r^2}) t) \right\} \quad 2.16$$

2.2 modèle avec amortissement visqueux dans le domaine des fréquences

il est clair que l'analyse expérimentale des structures dans le domaine des temps nécessite la connaissance des réponses sans troncature si tous les modes de vibration doivent être pris en compte.

Par contre, le procédé de vibration dans l'espace des fréquences permet de prendre en considération l'influence des modes hors de la fenêtre de mesure des réponses en fréquence./10,34/.

Les réponses en fréquence sont obtenues par analyse fréquentielle directe ou par application de la transformée de FOURIER des réponses obtenues dans le domaine des temps/10,24,25,34,29,31 /.

2.2.1 réponse en fréquence et fonction de transfert

Considérons l'équation (2.10) représentant la réponse de déplacement du système dynamique en fonction du temps, la réponse en fonction de la fréquence est obtenue par application de la transformée de FOURIER /4,24,25,21,22/ :

$$q_{dr}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} q_{dr}(t) \exp(-i\omega t).dt \quad 2.17$$

et inversement

$$q_{dr}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_{dr}(\omega) \exp(i\omega t).d\omega \quad 2.18$$

nous pouvons obtenir les transformées de FOURIER des réponses de vitesses et d'accélération après multiplication de l'équation 2.17 par $i\omega$ / 24,21,31/

$$q_{vr}(\omega) = i\omega.q_{dr}(\omega) \quad 2.19$$

$$q_{ar}(\omega) = i\omega.q_{vr}(\omega) \quad 2.20$$

repreons l'équation 2.5 et considérons que la force d'excitation $f_r(t)$ est non nulle et que sa transformée de FOURIER est $f_r(\omega)$. En utilisant les expressions 2.19 et 2.20, nous avons :

$$-\omega^2 m_r q_r(\omega) + i\omega c_r q_r(\omega) + k_r q_r(\omega) = f_r(\omega) \quad 2.21$$

le rapport $\frac{q_r(\omega)}{f_r(\omega)} = H_r(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 m_r + i\omega c_r + k_r}$ 2.22

est appelé la fonction de transfert complexe du système dynamique en supposant qu'il est au repos avant et après excitation.

En considérant les déplacements, la fonction de transfert (appelée flexibilité dynamique) peut se mettre sous la forme suivante à partir de l'équation (2.22)

$$H_{dr}(\omega) = \frac{1}{m_r \omega_{nr}^2 \left[-\frac{\omega^2}{\omega_{nr}^2} + i2\xi_r \frac{\omega}{\omega_{nr}} + 1 \right]} \quad 2.23$$

le retard du déplacement $q_{dr}(t)$ par rapport à la force d'excitation est :

$$\tan(\theta) = \frac{2\xi_r \frac{\omega}{\omega_{nr}}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nr}^2}} \quad 2.24$$

Lorsqu'on considère Les réponses de vitesses La fonction de transfert appelée mobilité est :

$$H_{vr}(\omega) = i\omega H_{dr}(\omega) \quad 2.25$$

Dans notre cas la force excitatrice $f_r(t)$ est une impulsion caractérisée par la fonction de DIRAC $\delta(t)$ nous avons alors $f_r(\omega) = 1$ /24,27,12,29/. De ce fait, à partir de la relation 2.22 nous pouvons écrire :

$$q_{dr}(\omega) = H_{dr}(\omega) \quad 2.26$$

$$q_{vr}(\omega) = H_{vr}(\omega) \quad 2.27$$

ce qui traduit que les fonctions de transfert ne sont autres que Les réponses en fréquences.

2.2.2 matrices des fonctions de transfert (ou réponses en fréquence)

Les résultats de la section 2.2.1 sont généralisés en superposant les contributions modales et en tenant compte des propriétés de linéarité de le transformée de FOURIER /10,17,29/.

Les matrices des fonctions de transfert et des réponses en fréquence dans notre cas particulier sont :

$$[H_d(\omega)] = [U][diag(H_{dr}(\omega))][U]^T \quad 2.28$$

Pour les réponses de déplacements

$$\text{Et} \quad [H_v(\omega)] = [U][diag(H_{vr}(\omega))][U]^T \quad 2.29$$

Pour les réponses de vitesses.

Chaque réponse (élément i, j) de ces matrices relatives au point d'excitation i et au point de réponse j s'écrit :

$$H_{ij}^d(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{u_{ir}u_{jr}}{m_r \omega_{nr}^2 \left[-\frac{\omega^2}{\omega_{nr}^2} + i2\xi_r \frac{\omega}{\omega_{nr}} + 1 \right]} \quad 2.30$$

$$H_{ij}^v(\omega) = \sum_{r=1}^N i\omega.H_{ij}^d(\omega) \quad 2.31$$

toute les matrices considérées sont d'ordre N et l'indice r représente le nombre de modes de vibration.

2.3 METHODE D'IDENTIFICATION PROPOSEE

2.3.1 modèle avec amortissement visqueux en domaine temporel

2.3.1.1 identification du coefficient de l'amortissement c : 1 d.d.I

L'équation 2.11 représente la réponse transitoire en terme de vitesse $q_{vr}(t)$ d'un système dynamique à un seul degré de liberté ou associé au mode de vibration r .

L'énergie E_r de cette réponse transitoire est évaluée de la manière dans le domaine des temps /19,25/ :

$$E_r = \int_{-\infty}^{+\infty} (q_{vr}(t))^2 dt \quad 2.32$$

En remplaçant $q_{vr}(t)$ par son expression, nous obtenons :

$$E_r = \frac{1}{m_r^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\exp(-2\xi_r \omega_{nr} t)) \left(1 + \frac{\xi_r^2}{1 - \xi_r^2}\right) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp(-2\xi_r \omega_{nr} t)) \cos((2\omega_{nr} \sqrt{1 - \xi_r^2})t) \left(1 - \frac{\xi_r^2}{1 - \xi_r^2}\right) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp(-2\xi_r \omega_{nr} t)) (\sin((2\omega_{nr} \sqrt{1 - \xi_r^2})t)) \left(\frac{\xi_r}{\sqrt{1 - \xi_r^2}}\right) dt \right] \quad 2.33$$

En évaluant cette intégrale, nous obtenons (voir annexe 6.3) :

$$E_r = \int_{-\infty}^{+\infty} (q_{vr}(t))^2 dt = \frac{1}{2m_r \cdot 2m_r \xi_r \omega_{nr}} \quad 2.34$$

En remarquant que le coefficient de l'amortissement du $r^{\text{ième}}$ mode $c_r = 2m_r \xi_r \omega_{nr}$, nous avons :

$$\frac{1}{c_r} = 2 \int_0^{+\infty} q_{vr}(t) \cdot m_r \cdot q_{vr}(t) \cdot dt \quad 2.35$$

L'utilisation pratique de l'équation (2.35) est basée sur des réponses mesurées en un certain nombre de points. De ce fait l'intégrale infinie (2.35) est remplacé par une sommation numérique sur l'intervalle de mesure contenant y points.

Nous avons donc :

$$c_r = \left[\sum_{p=0}^y 2(q_{vr}(p\Delta t)) \cdot ((q_{vr}(0))^{-1} \cdot (q_{vr}(p\Delta t))) \Delta t \right]^{-1} \quad \text{lorsque } y \rightarrow +\infty \quad 2.36$$

Dans l'équation (2.36) le coefficient de masse m_r est identifié comme l'inverse de la valeur de la réponse au temps $p\Delta t = 0$, Δt représente l'accroissement temporel pour chaque point de mesure. , celui ci doit être choisi de façon qu'aucune information ne soit perdue en mesurant les réponses discrètes.

Le résultat de l'équation 2.36 représente la base de notre méthode d'identification appliquée à un système à un seul degré de liberté. Elle est ensuite généralisée pour un système à plusieurs degrés de liberté.

2.3.1.2 généralisation de la méthode d'identification proposée

En reprenant les équations (2.11) et (2.14), la matrice des réponses transitoires est :

$$[Q_v(t)] = [U] \left[\text{diag} \left[\begin{array}{c} (\exp(-2\omega_{nr}\xi_r t)) \left(\frac{1}{\sqrt{1-\xi_r^2}} \sin((\omega_{nr}\sqrt{1-\xi_r^2}) \cdot t) + \right. \\ \left. \cos((\omega_{nr}\sqrt{1-\xi_r^2}) \cdot t) \right) \end{array} \right] [U]^T \right] \quad 2.37$$

En analysant l'équation (2.36) la position du scalaire m_r est sans importance. Cependant pour un système à N degrés de liberté la position de la matrice de masse doit être précisée dans l'identification de la matrice de l'amortissement.

Rappelant l'équation (2.36) et évaluant la matrice d'intégrales suivante :

$$[E_v] = \int_{-\infty}^{+\infty} [Q_v(t)] \cdot [M] \cdot [Q_v(t)] \cdot [M] \cdot dt \quad 2.38$$

en remplaçant la matrice $[Q_v(t)]$ par son expression (équation 2.14), nous avons :

$$[E_r] = \int_{-\infty}^{+\infty} [U] \cdot [\text{diag}(q_{vr}(t))] \cdot [U]^T \cdot [M] \cdot [U] \cdot [\text{diag}(q_{vr}(t))] \cdot [U]^T \cdot [M] \cdot dt \quad 2.39$$

La matrice modale $[U]$ est en général normalisée tel que $[U]^T [M] [U] = [I]$ ou $[I]$ est la matrice unité. /25/ et en utilisant les propriétés du calcul matriciel /11/, nous obtenons :

$$[E_v] = \frac{1}{2} [U] \cdot [\text{diag}(2\xi_r \omega_{nr})]^{-1} \cdot [U]^T \cdot [M] \quad 2.40$$

nous avons aussi

$$[U]^T \cdot [C] \cdot [U] = [\text{diag}(2\xi_r \omega_{nr})] \quad 2.41$$

et après inversion des deux membres de l'équation (2.41), nous avons :

$$[U]^{-1} [C]^{-1} [U^T]^{-1} = [\text{diag}(2\xi_r \omega_{nr})]^{-1} \quad 2.42$$

à partir des équations (2.41) et (2.42) nous pouvons écrire :

$$[E_v] = \frac{1}{2}[U][U]^{-1}[C]^{-1}[U^T]^{-1}[U]^T[M] = \frac{1}{2}[C]^{-1}[M] \quad 2.43$$

donc l'équation (2.40) devient :

$$[E_v] = \int_{-\infty}^{+\infty} [Q_v(t)][M][Q_v(t)][M]dt = \frac{1}{2}[C]^{-1}[M] \quad 2.44$$

en multipliant par la droite les deux membres de l'équation (2.44) par $[M]^{-1}$, donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [Q_v(t)][M][Q_v(t)]dt = \frac{1}{2}[C]^{-1} \quad 2.45$$

comme pour l'équation (2.35) et (2.36), les réponses sont obtenues en des points

discrets allant de 0 à une valeur y , de ce fait, en inversant l'équation (2.45), nous avons :

$$[C] = \left[2 \sum_{p=0}^y [Q_v(p\Delta t)][Q_v(0)]^{-1}[Q_v(p\Delta t)]\Delta t \right]^{-1} \quad \text{avec } y \rightarrow \infty \quad 2.46$$

Dans l'équation (2.46) la matrice $[M]$ de masse est évaluée comme $[Q_v(0)]^{-1}$ et sa position n'est pas arbitraire. Cependant la méthode d'identification de la matrice de masses à partir de réponses de vitesses sera introduite à la section [2.3].

La borne inférieure d'intégration est remplacée par 0 car pour $p\Delta t < 0$ il n'y a aucune réponse.

2.3.1.3 identification des paramètres modaux

l'identification des fréquences de résonance, et des formes modales, nécessitent la connaissance de l'intégrale sous forme de matrice $[E_v]$ (équation 2.38) et une autre intégrale $[E_d]$ calculée à partir de la connaissance de la matrice des déplacements.

,c'est à dire :

$$[E_d] = \int_{-\infty}^{+\infty} [Q_d(t)][M][Q_d(t)][M]dt \quad 2.47$$

en remplaçant la matrice $[Q_d(t)]$ par son expression (équation 2.13) nous obtenons :

$$[E_d] = \int_{-\infty}^{+\infty} [U][diag(q_{dr}(t))][U]^T [M][U][diag(q_{dr}(t))][U]^T [U]dt \quad 2.48$$

en utilisant l'équation (2.10) et la même démarche pour l'évaluation de $[E_v]$,nous obtenons :

$$[E_d] = \frac{1}{2} [U][diag(\omega_{nr}^2)]^{-1} [U]^T [M][U][diag(2\xi_r \omega_{nr})]^{-1} [U]^T [M] \quad 2.49$$

en utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes de vibration, l'équation (2.49) devient :

$$[E_d] = \frac{1}{2} [U][U]^{-1} [K]^{-1} [U^T]^{-1} [U]^T [M][U][U]^{-1} [C]^{-1} [U^T]^{-1} [U]^T [M] \quad 2.50$$

après simplification nous obtenons :

$$[E_d][M]^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} [Q_d(t)][M][Q_d(t)]dt = \frac{1}{2} [K]^{-1} [M][C]^{-1} \quad 2.51$$

des équations (2.45) et (2.51) la matrice à partir de laquelle les paramètres modaux sont identifiés est obtenue comme suit :

$$[A] = [E_v][E_d]^{-1} = \frac{1}{2}[C]^{-1}[M][M]^{-1}2[C][M]^{-1}[K] = [M]^{-1}[K] \quad 2.52$$

la matrice $[A]$ ainsi obtenue est la matrice dynamique du système dynamique. Les valeurs et les vecteurs propres de cette matrice donnent les paramètres modaux recherchés.

2.3.1.4 application de la présente méthode d'identification dans le domaine temporel à un exemple analytique.

La présente méthode d'identification est appliquée à trois exemples analytiques simulés par un système à un degré, deux degrés et quatre degrés de liberté.

2.3.1.4.1 Système à un seul degré de liberté

Cet exemple consiste en un système masse ressort et un amortisseur visqueux du type dashpot comme illustré par la figure ci dessous :

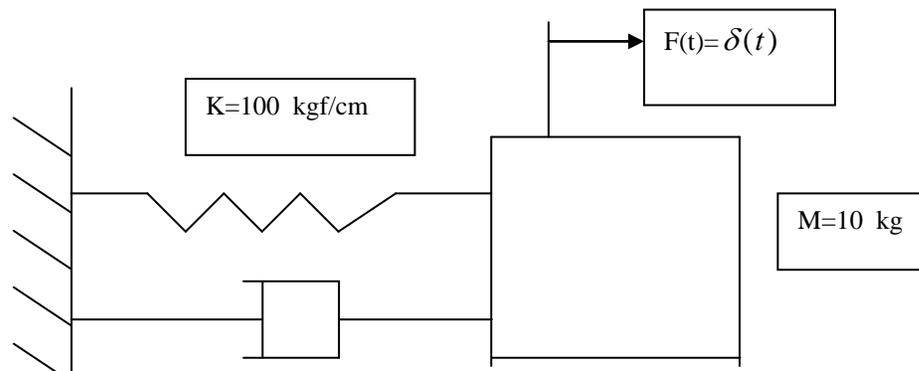




Figure 1 : système à un seul degré de liberté

La pulsation propre est $w_n = 31.622 \text{ rd / s}$ ($f=5 \text{ hz}$) et l'amortissement réduit $\xi_n = 0.05$

a) identification du coefficient de l'amortissement C dans l'espace des temps

L'application de la présente méthode (équation 2.46) pour l'identification du coefficient de l'amortissement C donne une valeur C_{id} satisfaisante (voir tableau 1). La précision

de la valeur du coefficient de l'amortissement est fonction du temps d'observation de la réponse de vitesse $q_v(t)$ et de l'intervalle d'intégration Δt

La valeur maximale de Δt est donnée par le théorème de SHANNON /13,14/ pour

l'échantillonnage des fonctions ou la période d'échantillonnage T doit être tel que :

$$T_{éch} \leq \frac{1}{2f_H}$$

ou f_H est la plus haute fréquence présente dans le signal, ce qui se traduit par :

$$\Delta t_0 = \pi / \omega_H$$

ou ω_H représente la plus grande valeur des pulsations contenues dans le signal enregistré.

Le tableau 1 illustre l'effet de l'intervalle d'intégration Δt et le nombre de points y à considérer pour l'identification du coefficient de l'amortissement C .

Nombre de points utilisés					
Valeurs de rp Pour $\Delta t_0 = 0.0993$ Seconde	64	128	256	512	1024
	valeurs du coefficient de l'amortissement $C_{id} \times 10^{-3}$				
Mémoire de Magister	Laboratoire Bâti dans l'Environnement			USTHB	- 35 -

1	11.2910	12.3204	12.9089	13.2248	13.3886
5	30.2219	29.7083	29.7055	29.7091	29.7109
10	34.9980	31.2197	30.6564	30.6451	30.6460
20	47.6116	35.6455	31.7167	31.1377	31.1219
30	61.3268	41.4719	33.5696	31.4360	31.2917
40	78.5739	48.0176	35.9757	31.9707	31.3829
50	82.4098	56.3857	38.9592	32.6606	31.4712

Tableau 1 : Valeurs du coefficient de l'amortissement C_{id} en domaine temporel

Les valeurs du tableau 1 représentent le coefficient de l'amortissement C_{id} pour un coefficient théorique $C_{th}=0.0317$ kgf.s/cm

D'après le tableau 1, nous remarquons que pour un nombre de points tel que les valeurs du temps d'observation sont égales au temps de dissipation (pris dans ce cas égal à $\frac{3}{\xi \cdot \omega_n} = 1.8974$ secondes) de la réponse $q_v(t)$, les valeurs de l'amortissement identifié C_{id} sont satisfaisantes. Cependant la valeur de Δt joue aussi un rôle important pour l'identification de l'amortissement.

b) Identification de l'amortissement dans le domaine des fréquences.

Nous avons appliqué la méthode d'identification au système ci dessus en domaine fréquentiel comme l'indique le tableau 2.

		Nombre de points utilisés				
Valeurs de r_p Pour $\Delta\omega_0 = 3.3098$ rd/s		64	128	256	512	1024
		valeurs du coefficients de l'amortissement $C_{id} \times 10^{-3}$				
1		11.2910	12.3204	12.9089	13.2248	13.3886
Mémoire de Magister	Laboratoire	Bâti dans l'Environnement			USTHB	

5	30.2219	29.7083	29.7055	29.7091	29.7109
10	34.9980	31.2197	30.6564	30.6451	30.6460
20	47.6116	35.6455	31.7167	31.1377	31.1219
30	61.3268	41.4719	33.5696	31.4360	31.2917
40	78.5739	48.0176	35.9757	31.9707	31.3829
50	82.4098	56.3857	38.9592	32.6606	31.4712

Tableau 2 : valeurs du coefficient de l'amortissement C_{id} en domaine fréquentiel

Le tableau 2 montrent clairement que les valeurs du coefficient de l'amortissement C_{id} sont aussi satisfaisantes que celle identifiées dans le domaine temporel.

Cependant les tableaux 1 et 2 indiquent que pour une bonne précision si Δt et $\Delta \omega$ sont faibles le nombre de points des réponses doit être assez important.

Ce qui est intéressant de noter aussi c'est que l'application de la présente méthode dans le domaine fréquentiel offre plus d'intérêt car nous pouvons obtenir la même précision en utilisant une intégration dans l'intervalle des fréquences ou la réponse est dominante. ,c'est à dire autour des fréquences de résonance.

Afin d'illustrer cela, nous avons choisi sans préférence $\frac{\Delta \omega_0}{\Delta \omega} = 5$ et obtenu les résultats intéressant comme le montre le tableau 3 ci dessous.

Nombre de points Utilisés	64	128	256	512	1024
Valeurs de C_{id} En utilisant la totalité Des points kgf.s/ cm	0.0302	0.0297	0.0297	0.0297	0.0297

nombre de points utilisés autour de la fréquence de résonance		18	36	72	144	288
C_{id} kgf.s/cm		0.0321	0.0313	0.0313	0.0314	0.0316

Tableau 3 : comparaison des valeurs de C_{id} identifié avec la totalité des points et un nombre de points réduit (autour de la fréquence de résonance).

Il est évident de part les résultats obtenus au tableau 3 que l'identification du coefficient de l'amortissement dans le domaine fréquentiel est plus avantageuse, surtout lorsqu'il s'agit des systèmes dynamiques à plusieurs degrés de liberté comme nous le verrons plus loin.

c) Identification de la pulsation propre ω_n dans le domaine temporel

L'identification de la pulsation propre ω_n se fera en appliquant l'équation (2.52) en considérant la réponse de vitesse $q_v(t)$ et celle du déplacement $q_d(t)$.

En effet, par application de l'équation 2.52 nous avons :

$$E_v = \sum_{p=0}^y q_v(p\Delta t) \cdot q_v(p\Delta t) \cdot \Delta t = \frac{1}{2 \cdot m \cdot C} \quad \text{et}$$

$$E_d = \sum_{p=0}^y q_d(p\Delta t) \cdot q_d(p\Delta t) \cdot \Delta t = \frac{1}{2 \cdot k \cdot C}$$

donc $[E_v] \cdot [E_d]^{-1} = \omega_n^2$

dans le but d'identifier ω_n nous avons choisi à titre d'exemple dans le tableau 1 les valeurs de $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{20}$ et le nombre de points $y=256$. Ce qui correspond à :

$$\frac{1}{E_v} = 634.45 \quad \text{et} \quad [E_d]^{-1} = 632835.55$$

ce qui donne $\omega_n^2 = 997.56 \left(\frac{rd}{s}\right)^2$

d'où la pulsation propre identifiée $\omega_{nid} = 31.583 \frac{rd}{s}$, ce qui correspond à une erreur inférieure à 1%. par rapport à $\omega_{nth} = 31.622 \frac{rd}{s}$

d) identification de la pulsation propre ω_n dans le domaine des fréquences

L'identification dans ce cas se fera en appliquant l'équation (2.52) en considérant les réponses en fréquence de vitesse $H_v(\omega)$ et de déplacement $H_d(\omega)$: en effet par application de l'équation (2.52) nous avons :

$$E_v = \sum_{p=0}^y |H_v(p\omega)|^2 \Delta\omega = \frac{\pi}{m.C} \quad \text{et}$$

$$E_d = \sum_{p=0}^y |H_d(p\omega)|^2 \Delta\omega = \frac{\pi}{k.C}$$

donc $[E_v].[E_d]^{-1} = \frac{k}{m} = \omega_n^2$.

Nous avons choisi dans ce cas les valeurs du tableau 2 pour $\frac{\Delta\omega_0}{\Delta\omega} = 20$ et un nombre de points $y=256$, ce qui correspond à :

$$\frac{1}{E_v} = 201.9153 \quad \text{et}$$

$$\frac{1}{E_d} = 201400.6100$$

ce qui donne $\omega_n^2 = 997.4509 \left(\frac{rd}{s} \right)^2$

d'où la pulsation propre $\omega_{nid} = 31.583 \frac{rd}{s}$. ce qui correspond à une erreur de 1% par rapport à ω_{nh} .

Il faut noter que la valeur de la pulsation propre identifiée dans le domaine temporel et fréquentiel est quasiment la même.

En conclusion, nous venons de montrer que l'identification du coefficient de l'amortissement C et de la pulsation propre ω_n d'un système dynamique par la méthode proposée est possible. Cependant, son application à un système à plusieurs degrés de liberté montrera les capacités réelles de la présente méthode.

2.4 système à plusieurs degrés de liberté

2.4.1 identification de la matrice de l'amortissement dans le domaine temporel.

Nous appliquerons la méthode d'identification à un système dynamique à quatre degrés de liberté (annexe 6.7) avec une valeur de l'amortissement modérée ($\xi = 0.05$), ensuite nous considérerons un système à deux degrés de liberté pour lequel nous déterminerons quels seront les effets sur la méthode d'identification proposée lorsque nous avons des valeurs de l'amortissement assez élevées et des fréquences de résonance rapprochées.

2.4.2 système à quatre degrés de liberté

Le premier exemple est un modèle de bâtiment composé de portiques, ayant un comportement de cisaillement. Il s'agit d'un bâtiment de quatre étages et un seul degré de liberté par étage.

2.4.3 Identification de la matrice de l'amortissement $[C]$

La matrice de l'amortissement proportionnel est construite en considérant un amortissement critique $\xi = 0.05$ pour les quatre modes. , donc nous obtenons :

$$[C_{th}] = \begin{bmatrix} 320.273 & -89.847 & -14.570 & -5.119 \\ & 278.995 & -85.105 & -15.007 \\ & & sym & 228.354 & -67.778 \\ & & & & 136.011 \end{bmatrix} \quad (kgf.s / cm).$$

a) utilisation des réponses sans perturbations

La méthode d'identification est appliquée en considérant des réponses sans perturbations pour différentes valeurs de l'intervalle d'intégration Δt et le temps d'observation t_r . Les valeurs du rapport $rp = \frac{\Delta t_0}{\Delta t}$ varient de 1 à 50 avec un pourcentage de points variant de 25 à 100% par pas de 25.

Nous considérerons des valeurs de rp identiques à celle utilisées pour le système à un seul degré de liberté.

$$1) \quad \Delta t = 0.0377 \text{ sec} \quad rp = 1$$

$$\text{nombre de points utilisés (25\%)} \quad y = 25$$

$$[C_{id}] = \begin{bmatrix} 190.2653 & 2.0751 & -34.5400 & 0.3297 \\ & 164.0914 & -28.9432 & -14.8021 \\ & & sym & 179.3715 & -42.3370 \\ & & & & 131.1832 \end{bmatrix} \quad [e_r] = \begin{bmatrix} 0.60 & -0.03 & 2.37 & -0.06 \\ & 0.59 & 0.34 & 0.98 \\ & & 0.78 & 0.62 \\ & & & 0.96 \end{bmatrix}$$

ou $[e_r]$ est la matrice des erreurs sur les éléments de la matrice de l'amortissement exprimée sous forme de rapport $\frac{C_{id}}{C_{th}}$.

Nombre de points utilisés (100%) $y = 100$

$$[C_{id}] = \begin{bmatrix} 188.6711 & -0.2974 & -36.8283 & -1.5642 \\ & 159.9266 & -33.6643 & -18.9756 \\ & & sym & 172.3915 & -49.7546 \\ & & & & 118.5263 \end{bmatrix} \quad [e_r] = \begin{bmatrix} 0.59 & 0.01 & 2.53 & 0.31 \\ & 0.58 & 0.40 & 1.27 \\ & & sym & 0.76 & 0.74 \\ & & & & 0.87 \end{bmatrix}$$

nous remarquons dans ce cas que l'erreur est importante quelquesoit le nombre de points utilisés. Avec une valeur de $rp = 5$ l'erreur diminue jusqu'à une valeur de 10% pour certains éléments hors de la diagonale principale. Pour des valeurs de rp supérieure à 5 (de 10 à 30) l'erreur devient négligeable (inférieure à 3%) .

Avec un nombre de points utilisés par le processus d'identification plus grand, nous améliorons la précision sur les éléments de la matrice de l'amortissement. En effet, avec

2) $\Delta t = 0.0075$ sec $rp = 5$

nombre de points utilisés (25%) $y = 126$

$$[C_{id}] = \begin{bmatrix} 305.5346 & -79.3428 & -11.9587 & -3.1800 \\ & 269.7832 & -73.7572 & -10.6166 \\ & & sym & 226.4144 & -56.2561 \\ & & & & 146.5416 \end{bmatrix} \quad [e_r] = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.91 & 0.97 & 0.90 \\ & 0.95 & 0.92 & 0.93 \\ & & sym & 0.96 & 0.93 \\ & & & & 0.99 \end{bmatrix}$$

nombre de points utilisés (100%) $y = 504$

$$[C_{id}] = \begin{bmatrix} 303.6365 & -82.0786 & -14.5387 & -5.0946 \\ & 264.9665 & -79.0293 & -14.9543 \\ & & sym & 218.6702 & -64.2433 \\ & & & & 132.4110 \end{bmatrix} \quad [e_r] = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.92 & 0.99 & 0.99 \\ & 0.95 & 0.93 & 0.99 \\ & & sym & 0.96 & 0.95 \\ & & & & 0.98 \end{bmatrix}$$

pour une valeur de $rp = 5$, l'erreur sur les éléments de la matrice de l'amortissement hors de la diagonale principale est d'environ 10%. Les éléments diagonaux sont plus précis.

$$3) \quad \Delta t = 0.0037 \text{ sec} \quad rp = 10$$

nombre de points utilisés (25%) $y = 252$

$$[C_{id}] = \begin{bmatrix} 313.7488 & -83.0778 & -11.9405 & -3.1636 \\ & 276.7664 & -76.6388 & -10.5813 \\ & & sym & 231.3363 & -57.8632 \\ & & & & 148.5892 \end{bmatrix} \quad [e_r] = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.93 & 0.82 & 0.62 \\ & 0.99 & 0.90 & 0.70 \\ & & sym & 1.01 & 0.86 \\ & & & & 1.09 \end{bmatrix}$$

nombre de points utilisés (100%) $y = 1008$

$$[C_{id}] = \begin{bmatrix} 311.8046 & -85.8679 & -14.5525 & -5.0892 \\ & 271.8607 & -81.9865 & -14.9514 \\ & & sym & 223.4717 & -65.9351 \\ & & & & 134.2467 \end{bmatrix} \quad [e_r] = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.96 & 0.99 & 0.99 \\ & 0.98 & 0.96 & 0.99 \\ & & sym & 0.98 & 0.98 \\ & & & & 0.99 \end{bmatrix}$$

Nous observons une nette amélioration des valeurs de l'amortissement identifié.

$$4) \quad \Delta t = 0.00251 \text{ sec} \quad rp = 15$$

nombre de points utilisés(25%) $y = 378$

$$[C_{id}] = \begin{bmatrix} 316.5533 & -84.3622 & -11.9303 & -3.1577 \\ & 279.1505 & -77.6261 & -10.5669 \\ & & sym & 233.0106 & -58.4103 \\ & & & & 149.2809 \end{bmatrix} \quad [e_r] = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.94 & 0.82 & 0.62 \\ & 1.00 & 0.92 & 0.71 \\ & & sym & 1.02 & 0.86 \\ & & & & 1.09 \end{bmatrix}$$

nombre de points(100%) $y = 1512$

$$[C_{id}] = \begin{bmatrix} 314.5935 & -87.1706 & -14.5528 & -5.0870 \\ & 274.2151 & -82.9990 & -14.9479 \\ & & sym & 225.1053 & -66.5105 \\ & & & & 134.8673 \end{bmatrix} \quad [e_r] = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.97 & 0.99 & 0.99 \\ & 0.98 & 0.97 & 0.99 \\ & & sym & 0.98 & 0.98 \\ & & & & 0.99 \end{bmatrix}$$

5) $\Delta t = 0.00125$ sec $rp = 30$

nombre de points utilisés(25%) $y = 757$

$$[C_{id}] = \begin{bmatrix} 319.3873 & -85.6746 & -11.9267 & -3.1371 \\ & 281.5500 & -78.6434 & -10.5643 \\ & & sym & 234.6800 & -58.9880 \\ & & & & 149.9319 \end{bmatrix} \quad [e_r] = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.95 & 0.82 & 0.62 \\ & 1.00 & 0.92 & 0.70 \\ & & sym & 1.02 & 0.87 \\ & & & & 1.10 \end{bmatrix}$$

nombre de points (100%) $y = 3028$

$$[C_{id}] = \begin{bmatrix} 317.4169 & -88.4950 & -14.5514 & -5.0847 \\ & 276.5981 & -84.0268 & -14.9434 \\ & & sym & 226.7550 & -67.0631 \\ & & & & 135.4895 \end{bmatrix} \quad [e_r] = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.99 & 0.99 & 0.99 \\ & 0.99 & 0.99 & 0.99 \\ & & sym & 0.99 & 0.99 \\ & & & & 0.99 \end{bmatrix}$$

Conclusion :

Pour des valeurs élevées de rp la matrice de l'amortissement est identifiée avec une erreur faible à condition de prendre un nombre de points assez important ce qui a pour effet d'augmenter la précision des éléments hors de la diagonale principale de la matrice C_{id} . Cependant l'effort de calcul peut devenir assez important pour des systèmes ayant un nombre de degré de liberté élevé.

b) utilisation des réponses avec perturbations

Pour montrer la puissance de la méthode proposée, l'identification de la matrice de l'amortissement doit se faire sur un système réel. Pour cela, nous avons simulé un bruit GAUSSIEN ,que nous avons ajouté aux réponses analytiques de vitesses annexe 6.2) ,de moyenne nulle et d'écart type unité.

Cette perturbation est exprimée sous forme de rapport bruit signal (*BS*) en terme de variance du bruit et celle du signal. Nous avons fait varier ce rapport de 5% à 30%.

Nous avons considéré des rapports *rp* variant de 10 à 30 ensuite pour chaque valeur de *rp* nous avons pris un nombre de points correspondant à 50 et 100% des réponses

perturbées.

$$1) \quad \Delta t = 0.0037 \text{ sec} \quad rp = 10 \quad BS = 5\%$$

nombre de points(50%) $y = 680$

$$[C_{id}] = \begin{bmatrix} 210.1134 & -57.9281 & -9.2806 & -2.9975 \\ & 183.6209 & -54.5924 & -8.992 \\ & sym & 151.4877 & -42.8168 \\ & & & 92.2683 \end{bmatrix} \quad [e_r] = \begin{bmatrix} 0.66 & 0.65 & 0.64 & 0.59 \\ & 0.66 & 0.64 & 0.60 \\ & sym & 0.66 & 0.66 \\ & & & 0.68 \end{bmatrix}$$

nombre de points(100%) $y = 1360$

$$[C_{id}] = \begin{bmatrix} 209.8700 & -58.2500 & -9.6883 & -3.4607 \\ & 183.0586 & -55.3468 & -9.8981 \\ & sym & 150.3806 & -44.2224 \\ & & & 90.2762 \end{bmatrix} \quad [e_r] = \begin{bmatrix} 0.66 & 0.65 & 0.66 & 0.68 \\ & 0.66 & 0.65 & 0.66 \\ & sym & 0.66 & 0.66 \\ & & & 0.66 \end{bmatrix}$$

Nous remarquons que pour un pourcentage de bruit relativement faible (5%) , l'erreur sur les éléments de la matrice de l'amortissement est importante. Nous avons pris ensuite $rp = 15$ et avons fait varier la valeur du BS de 5% à 30%.

2) $\Delta t = 0.00251 \text{ sec}$ $rp = 15$

$BS = 5\%$

nombre de points(50%)

$y = 680$

$$[C_{id}] = \begin{bmatrix} 315.1701 & -86.8922 & -13.9210 & -4.4963 \\ & 275.4314 & -81.8887 & -13.4854 \\ & & sym & 227.2316 & -64.2252 \\ & & & & 138.4025 \end{bmatrix}$$

$$[e_r] = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.97 & 0.96 & 0.88 \\ & 0.98 & 0.96 & 0.90 \\ & & sym & 0.99 & 0.95 \\ & & & & 1.01 \end{bmatrix}$$

nombre de points(100%)

$y = 1360$

$$[C_{id}] = \begin{bmatrix} 314.8050 & -87.3750 & -14.5325 & -5.1911 \\ & 274.5879 & -83.0202 & -14.8472 \\ & & sym & 225.5709 & -66.3336 \\ & & & & 135.4143 \end{bmatrix}$$

$$[e_r] = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.97 & 0.99 & 1.01 \\ & 0.98 & 0.98 & 0.99 \\ & & sym & 0.99 & 0.98 \\ & & & & 0.99 \end{bmatrix}$$

$BS = 10\%$

nombre de points(100%)

$y = 1360$

$$[C_{id}] = \begin{bmatrix} 312.1928 & -87.9905 & -15.2323 & -5.9043 \\ & 272.4084 & -83.6283 & -15.8578 \\ & & sym & 223.1139 & -67.6394 \\ & & & & 132.2463 \end{bmatrix}$$

$$[e] = \begin{bmatrix} 0.97 & 0.97 & 1.04 & 1.15 \\ & 0.97 & 0.98 & 1.05 \\ & & sym & 0.98 & 0.90 \\ & & & & 0.97 \end{bmatrix}$$

$BS = 20\%$

nombre de points(100%)

$y = 1360$

$$[C_{id}] = \begin{bmatrix} 312.8854 & -88.1334 & -16.1515 & -6.2158 \\ & 275.9387 & -82.6487 & -14.9033 \\ & & sym & 228.0844 & -65.4396 \\ & & & & 138.7724 \end{bmatrix} \quad [e_r] = \begin{bmatrix} 0.88 & 0.98 & 1.10 & 1.21 \\ & 0.99 & 0.98 & 0.99 \\ & & sym & 0.99 & 0.96 \\ & & & & 1.02 \end{bmatrix}$$

$$BS = 30\%$$

nombre de points(100%)

$$y = 1360$$

$$[C_{id}] = \begin{bmatrix} 306.7227 & -91.7849 & -17.3136 & -9.0946 \\ & 272.5869 & -84.0483 & -17.2410 \\ & & sym & 224.3992 & -67.8533 \\ & & & & 133.9328 \end{bmatrix} \quad [e_r] = \begin{bmatrix} 0.96 & 1.02 & 1.18 & 1.78 \\ & 0.97 & 0.98 & 1.14 \\ & & sym & 0.98 & 1.00 \\ & & & & 0.98 \end{bmatrix}$$

Nous sommes passé ensuite à une valeur de $rp = 30$ dans le but de considérer l'effet de l'incrément Δt . Cependant, nous avons considéré uniquement la valeur du BS de 5%, car pour des valeurs supérieures la procédure d'identification donne des valeurs où l'erreur est importante.

$$3) \quad \Delta t = 0.00125 \text{ sec} \quad rp = 30 \quad BS = 5\%$$

nombre de points(100%)

$$y = 1360$$

$$[C_{id}] = \begin{bmatrix} 629.6101 & -174.7500 & -29.0650 & -103822 \\ & 549.1759 & -166.0404 & -29.6943 \\ & & sym & 451.1418 & -132.6671 \\ & & & & 270.8285 \end{bmatrix} \quad [e_r] = \begin{bmatrix} 1.96 & 1.94 & 1.99 & 2.02 \\ & 1.96 & 1.95 & 1.97 \\ & & sym & 1.97 & 1.95 \\ & & & & 1.99 \end{bmatrix}$$

Conclusion :

Nous remarquons que pour une valeur de rp faible (inférieur à 10) ou élevée (30 et plus), nous avons une erreur sur les éléments de la matrice de l'amortissement variant entre 40 et 100%. et cela quel que soit le nombre de points utilisés.

La valeur de rp qui convient est celle de $rp = 15$. En effet, pour une valeur du BS de 5% l'erreur est inférieure 5% à condition d'utiliser la totalité de l'enregistrement des réponses (100%).

Cependant, pour des valeurs du BS variant de 10 à 30%, l'erreur sur les éléments non diagonaux de la matrice de l'amortissement varie entre 15 et 80%.

Nous remarquons que les éléments de la diagonale principale sont identifiés avec une bonne précision, à l'inverse des éléments hors de la diagonale principale.

2.4.4 Identification des modes de déformation et des fréquences de résonance

Nous avons utilisé les réponses sans bruit car le but est seulement de montrer la

capacité de la méthode à identifier les paramètres modaux Les modes de déformation et les fréquences de résonance ont été identifiées à partir des résultats obtenus ci dessus. La valeur rp considérée est de 15 car c'est une valeur qui donne le moins d'erreur sur les valeurs de l'amortissement identifié. Nous avons ensuite considéré $rp=40$ mais la précision sur les paramètres identifiés n'augmente que de 2% environ avec cependant plus d'effort de calcul.

La procédure d'identification des paramètres modaux consiste à déterminer les modes propres et les valeurs propres de la matrice $[A] = [E_v].[E_d]^{-1}$. Les valeurs et vecteurs propres de la matrice dynamique sont extraites en utilisant une QR routine /35,25/.

1) Identification de $[U]$ et $\{\lambda\}$ avec $rp = 15$ $\Delta t = 0.00251$ sec et un nombre de points $y=1515$.

$$\text{Matrice } [E_v] = \begin{bmatrix} 0.0037 & 0.0015 & 0.0010 & 0.0008 \\ & 0.0050 & 0.0025 & 0.0018 \\ & \text{sym} & 0.0065 & 0.0035 \\ & & & 0.0094 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matrice } [E_d]^{-1} = \begin{bmatrix} 1696008 & -1036716 & 119076 & 9748 \\ & 1443033 & -696174 & 69156 \\ & \text{sym} & 832219 & -291776 \\ & & & 200566 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matrice } [A] = [E_v] \cdot \|E_d\|^{-1} = \begin{bmatrix} 4783.8091 & -2266.2032 & -4.9166 & -2.9471 \\ & 4023.5590 & -1765.7099 & 2.6894 \\ & \text{sym} & 2770.2322 & -1008.1014 \\ & & & 1001.3112 \end{bmatrix}$$

$$\text{Valeurs propres de } [A] \quad \{\lambda\} = \begin{Bmatrix} 247.0000 \\ 1501.0000 \\ 3783.0000 \\ 7047.000 \end{Bmatrix} \quad \left(\frac{rd}{s}\right)^2$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda_{id} \\ \lambda_{th} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.0141 \\ 1.0221 \\ 1.0199 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Vecteurs propres de } [A] \quad [U] = \begin{bmatrix} 0.18252 & 0.40454 & 0.58835 & 0.67593 \\ 0.36517 & 0.58428 & 0.26149 & -0.67593 \\ 0.54781 & 0.31465 & -0.71909 & 0.28968 \\ 0.73023 & -0.62926 & 0.26149 & -0.04828 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U_{id} \\ U_{th} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00027 & 1.00004 & 0.99999 & 1.00000 \\ 1.00005 & 0.99991 & 1.00000 & 1.00000 \\ 1.00016 & 1.00006 & 1.00000 & 1.00000 \\ 0.99990 & 1.00001 & 1.00000 & 1.00000 \end{bmatrix}$$

2) Identification de $[U]$ et $\{\lambda\}$ avec : $rp = 40$ $\Delta t = 0.000944$ sec et un nombre de points=4040.

$$\text{Matrice } [E_v] = \begin{bmatrix} 0.0037 & 0.0015 & 0.0010 & 0.0008 \\ & 0.0050 & 0.0025 & 0.0018 \\ & & \text{sym} & 0.0065 & 0.0035 \\ & & & & 0.0094 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matrice } [E_d]^{-1} = \begin{bmatrix} 1686542 & -1031328 & 118910 & 9543 \\ & 1435234 & -692222 & 68740 \\ & & \text{sym} & 8227218 & 289967 \\ & & & & 199459 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matrice } [A] = [E_v] \cdot [E_d]^{-1} = \begin{bmatrix} 4705.9493 & -2226.0676 & -5.1301 & 2.1879 \\ & 3959.9122 & -1735.0197 & 1.3297 \\ & & \text{sym} & 2728.0039 & -991.9197 \\ & & & & 989.7808 \end{bmatrix}$$

$$\text{Valeurs propres de } [A] \quad \{\lambda\} = \begin{Bmatrix} 247.0000 \\ 1483.0000 \\ 3724.0000 \\ 6930.0000 \end{Bmatrix} \left(\frac{rd}{s} \right)^2$$

$$\begin{Bmatrix} \lambda_{id} \\ \lambda_{th} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 1.0020 \\ 1.0062 \\ 1.0030 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Vecteurs propres de } [A] \quad [U] = \begin{bmatrix} 0.18251 & 0.40452 & 0.58835 & 0.67593 \\ 0.36511 & 0.58428 & 0.26149 & -0.67593 \\ 0.54779 & 0.31466 & -0.71909 & 0.28968 \\ 0.73028 & -0.62926 & 0.26149 & -0.04828 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{U_{id}}{U_{ih}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.99967 & 1.00000 & 1.00000 & 1.00000 \\ 0.99989 & 0.99994 & 1.00000 & 1.00000 \\ 1.00012 & 1.00009 & 1.00000 & 1.00000 \\ 0.99997 & 1.00001 & 1.00000 & 1.00000 \end{bmatrix}$$

Conclusion :

L'identification de la matrice modale $[U]$ et des pulsations propres ω_n^2 est obtenue avec des erreurs relativement faibles.

Une valeur plus grande de rp améliore cependant la précision sur les valeurs propres.

2.4.5 modèle avec amortissement visqueux dans le domaine des fréquences

La méthode d'identification actuelle peut être appliquée dans le domaine des fréquences en considérant le théorème de PARSEVAL /19/. En effet, pour la réponse $q_r(t)$ d'énergie finie, nous avons / 10,19,24,17/ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (q_r(t))^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{dr}(\omega) H_{dr}(-\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{dr}(\omega)|^2 d\omega \quad 2.53$$

l'équation (2.53) indique que l'énergie dans le domaine temporel est la même si elle est calculée dans le domaine des fréquences (annexe 6.4).

2.4.5.1 identification de la matrice de l'amortissement dans le domaine des fréquences

2.4.5.1.1 système à un seul degré de liberté

Reprenons les équations (2.22) et (2.25), la réponse en fréquence (mobilité) pour le mode r en considérant la réponse de vitesse est :

$$H_{vr}(\omega) = \frac{f_r(\omega)}{q_{vr}(\omega)} = \frac{i\omega}{-\omega^2 m_r + i\omega c_r + k_r} \quad 2.54$$

ou $f_r(\omega)$ et $q_{vr}(\omega)$ sont respectivement les transformées de FOURIER de la réponse et de l'excitation, et calculons l'intégrale suivante :

$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{i\omega}{-m_r\omega^2 + i2\xi_r m_r \omega_{nr} \omega + k_r} \right|^2 d\omega \quad 2.55$$

par application des résultats obtenus par NEWLAND /25/, nous avons :

$$E_v = \left(\frac{\pi}{m_r c_r} \right) \quad 2.56$$

d'où le coefficient de l'amortissement c_r

$$c_r = \frac{2}{\pi} \sum_0^y m_r |H_{vr}(\omega)|^2 \Delta\omega \quad \text{lorsque } y \rightarrow +\infty \quad 2.57$$

2.4.5.1.2 système à plusieurs degrés de liberté

Dans notre cas, nous savons que la matrice des réponses en fréquences est égale à celle des fonctions de transfert (équation 2.27) , car l'excitation est du type impulsionnelle./25,12,22 /

Calculons l'intégrale suivante par analogie avec l'équation 2.38

$$[E_v] = \int_{-\infty}^{+\infty} [H_v(\omega)][M][H_v(-\omega)][M]d\omega \quad 2.58$$

en remplaçant $[H_v(\omega)]$ par son expression (équation 2.29) nous obtenons :

$$[E_v] = \int_{-\infty}^{+\infty} [U][diag(H_{vr}(\omega))][U]^T [M][U][diag(H_{vr}(-\omega))][U]^T [M]d\omega \quad 2.59$$

or $[U]^T [M] [U] = [I]$ donc l'équation 2.59 devient :

$$[E_v] = \int_{-\infty}^{+\infty} [U] \left[\text{diag}(|H_{vr}(\omega)|^2) \right] [U]^T [M] d\omega \quad 2.60$$

en considérant que les modes de vibration sont normalisés tel que $m_r = 1$, nous avons :

$$H_{vr}(\omega) = \frac{i\omega}{-\omega^2 + 2i\xi_r\omega + 1} \quad 2.61$$

en utilisant les résultats obtenus par NEWLAND /25/ pour l'évaluation de l'intégrale

représentée par l'équation (2.60) nous obtenons :

$$[E_v] = \pi [U] \left[\text{diag}(2\xi_r\omega_{nr}) \right]^{-1} [U]^T [M] \quad 2.62$$

or $[U]^T [C] [U] = \left[\text{diag}(2\xi_r\omega_{nr}) \right] \quad 2.63$

et $[U]^{-1} [C]^{-1} [U^T]^{-1} = \left[\text{diag}(2\xi_r\omega_{nr}) \right]^{-1} \quad 2.64$

nous avons aussi pour rappel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (q_{vr}(t))^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{vr}(\omega)|^2 d\omega \quad 2.65$$

en utilisant les équations (2.62),(2.63) et (2.64) , nous avons :

$$[E_v] = \frac{1}{2\pi} \pi [U] [U]^{-1} [C]^{-1} [U^T]^{-1} [U^T] [M] = \frac{1}{2} [C]^{-1} [M] \quad 2.66$$

l'équation (2.65) indique comment l'énergie moyenne (ou puissance) des modes de vibration est distribuée dans le domaine des fréquences. Donc l'équation (2.65) peut s'écrire : en considérant un seul mode de vibration :

$$E_{vr} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{vr}(\omega) d\omega \quad 267$$

ou $P_{vr}(\omega)$ représente la fonction de la densité de puissance spectrale.

Des équations (2.65) et (2.66) nous avons pour un système à plusieurs degrés de liberté en considérant tous les modes de vibration :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [P_v(\omega)] [M] d\omega = \frac{1}{2} [C]^{-1} [M] \quad 2.68$$

en multipliant par la droite les deux membres de l'équation (2.68) par $[M]^{-1}$, nous avons :

$$[C]^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} [P_v(\omega)] d\omega \quad 2.69$$

ou bien
$$[C] = \left[2 \int_0^{+\infty} [P_v(\omega)] d\omega \right]^{-1} \quad 2.70$$

En pratique, les fonctions de la matrice de densité de puissance spectrale sont mesurées en un nombre fini de valeur et pour les fréquences positives seulement, donc l'équation (2.70) s'écrit :

$$[C]^{-1} = 2 \sum_{p=0}^y [P_v(p\Delta\omega)] \Delta\omega \quad p = 0,1,2,3,\dots y \rightarrow +\infty \quad 2.71$$

l'équation (2.71) est utilisée pour évaluer la matrice de l'amortissement dans le domaine des fréquences.

2.4.6 identification des paramètres modaux dans le domaine des fréquences

L'identification des fréquences de résonance et des modes de déformation nécessite la connaissance de la matrice $[E_v]$ (équation 2.66) calculée à partir de la matrice des vitesses et une autre matrice $[E_d]$ calculée à partir de la matrice des déplacements.

Dans le domaine des fréquences nous procéderons de la même manière. La matrice $[E_v]$ étant connue (équation 2.66), la matrice $[E_d]$ est déterminée comme

suit :

$$[E_d] = \int_{-\infty}^{+\infty} [H_d(\omega)] [M] [H_d(\omega)] [M] d\omega \quad 2.72$$

en remplaçant $[H_d(\omega)]$ par son expression (équation 2.28), nous avons :

$$[E_d] = \int_{-\infty}^{+\infty} [U] [diag(H_{dr}(\omega))] [U]^T [M] [U] [diag(H_{dr}(-\omega))] [U]^T [M] d\omega \quad 2.73$$

or si nous considérons que les modes de vibration sont normalisés tel que $[U]^T [M] [U] = [I]$ nous obtenons :

$$[E_d] = \int_{-\infty}^{+\infty} [U] [diag(|H_{dr}(\omega)|^2)] [U]^T [M] d\omega \quad 2.74$$

en reprenons l'équation (2.22) dans laquelle $m_r = 1$ et en utilisant les résultats de la référence / **24,25**/, pour l'évaluation de l'intégrale $[E_v]$ équation (2.74) nous avons :

$$[E_d] = \pi [U] [diag(\omega_{nr}^2)]^{-1} [U]^T [M] [U] [diag(2\xi_r \omega_{nr})]^{-1} [U]^T [M] \quad 2.75$$

et cela après avoir introduit la propriété d'orthogonalité $[U]^T [M][U] = [I]$

l'équation (2.75) devient :

$$[E_d] = \pi [U][U]^{-1} [K]^{-1} [U^T]^{-1} [U^T][M][U][U]^{-1} [C]^{-1} [U^T]^{-1} [U^T][M] \quad 2.76$$

$$\text{d'où} \quad [E_d] = \pi [K]^{-1} [M][C]^{-1} [M] \quad 2.77$$

en reprenant les équations (2.75) et (2.77) et après avoir multiplié par $[M]^{-1}$ à droite nous obtenons :

$$[E_d][M]^{-1} = \frac{1}{2\pi} \pi [K]^{-1} [M][C]^{-1} = \frac{1}{2} [K]^{-1} [M][C]^{-1} \quad 2.78$$

la matrice dynamique $[A]$ est obtenue de la même manière que pour l'identification dans le domaine des temps, à partir des équations (2.45) et (278) à savoir :

$$[E_v][M]^{-1} [E_d][M]^{-1} = \frac{1}{2} [C]^{-1} [M][M]^{-1} \cdot \left[\frac{1}{2} [K]^{-1} [M][C]^{-1} \right]^{-1} = [M]^{-1} [K] \quad 2.79$$

En termes plus simples, la matrice dynamique $[A]$ est obtenue en évaluant les aires sous les courbes des densités de puissance spectrales de vitesses et de déplacements, à savoir :

$$[A] = \left[2 \sum_{p=0}^y [P_v(p\Delta\omega)] \Delta\omega \right] \left[2 \sum_{p=0}^y [P_d(p\Delta\omega)] \Delta\omega \right]^{-1} \quad 2.80$$

les valeurs et vecteurs propres de la matrice $[A]$ donnent les fréquences de résonance et les formes modales du système dynamique considéré.

2.4.6.1 application à un système analytique à deux degrés de liberté dans le domaine des fréquences

L'identification de l'amortissement d'un système à un seul degré de liberté a été faite en section [2.3]. Dans cette section on s'intéressera seulement à l'identification de la matrice de l'amortissement car le but est simplement de montrer la capacité de la méthode à identifier l'amortissement dans l'espace des fréquences.

La matrice de l'amortissement théorique est construite à partir de $\xi_1 = 0.0158$

et $\xi_2 = 0.025$, donc nous obtenons :

$$[C_{th}] = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \quad \text{kgf.s/cm}$$

L'identification est faite à partir de la connaissance de la matrice des réponses en fréquence appelée ici mobilités, par application de l'équation (2.71) pour l'identification de la matrice de l'amortissement et de l'équation (2.80) pour l'identification des paramètres modaux.

Les matrices de la densité de puissance spectrale des réponses de vitesses et de déplacements ont été déterminés en utilisant les résultats de l'annexe 6.4.

Le temps d'observation des réponses de 214.466 secondes correspondant à 1024 points et un intervalle d'échantillonnage $\Delta t = 0.2094$ seconde.

Le nombre de points considéré par la méthode d'identification est de 81 points seulement correspondant à l'intervalle $[0, 80]$. Le résultat est le suivant :

matrice inverse de la matrice de l'amortissement :

$$[C]^{-1} = \begin{bmatrix} 5.3385 & 1.3488 \\ 1.3488 & 3.3431 \end{bmatrix} \quad \text{cm/kgf.s}$$

matrice de l'amortissement identifié :

$$[C_{id}] = \begin{bmatrix} 0.208 & -0.0842 \\ -0.0842 & 0.3331 \end{bmatrix} \text{ kgf} \cdot \text{s} / \text{cm} \quad [e_r] = \begin{bmatrix} 1.04 & 0.84 \\ 0.84 & 1.11 \end{bmatrix}$$

nous remarquons que si les valeurs de l'amortissement sont faibles, l'erreur commise lors de son identification peut être relativement élevée. Dans notre cas l'erreur varie entre 4 et 16 % .

Le résultat obtenu ci-dessus montre que la méthode d'identification de l'amortissement peut être appliquée dans l'espace des temps et des fréquences et que les résultats obtenus sont satisfaisants.

L'identification des paramètres modaux a donné aussi les résultats suivants.

$$[E_v][M]^{-1} = \left[2 \sum_0^{80} [P_v(\Delta\omega)\Delta\omega] \right] = \begin{bmatrix} 5.3385 & 1.3488 \\ 1.3488 & 3.3431 \end{bmatrix}$$

$$\left[[E_d][M]^{-1} \right]^{-1} = \left[2 \sum_0^{80} [P_d(\Delta\omega)\Delta\omega] \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.182 & -0.1323 \\ -0.1323 & 0.2317 \end{bmatrix}$$

la matrice dynamique identifiée est :

$$[A]_{id} = [E_v][M]^{-1} \cdot \left[[E_d][M]^{-1} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7932 & -0.3934 \\ -0.1968 & 0.5962 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec} \quad [A]_{th} = \begin{bmatrix} 0.8000 & -0.4000 \\ -0.2000 & 0.6000 \end{bmatrix}$$

les valeurs et vecteurs propres de la matrice $[A]$ identifiée sont :

$$\begin{aligned} \omega_{1n}^2 &= 0.3995 \\ \omega_{2n}^2 &= 0.9898 \end{aligned} \quad (rd / s)^2 \quad \text{et } [U] = \begin{bmatrix} 0.7450 & 0.8944 \\ 0.7455 & -0.4470 \end{bmatrix}$$

avec des valeurs et vecteurs propres théoriques suivants :

$$\begin{aligned} \omega_{1n}^2 &= 0.4 \\ \omega_{2n}^2 &= 1.0 \end{aligned} \quad (rd / s)^2 \quad [U] = \begin{bmatrix} 0.7453 & 0.8944 \\ 0.7453 & -0.4472 \end{bmatrix}$$

$$\{er\} = \begin{Bmatrix} 1.0012 \\ 1.0103 \end{Bmatrix} \quad [er] = \begin{bmatrix} 1.0004 & 1.0000 \\ 0.9997 & 1.0004 \end{bmatrix}$$

De part les résultats obtenus pour l'identification de la matrice de l'amortissement et des paramètres modaux dans l'espace temporel et fréquentiel l'utilisation de la méthode d'identification proposée paraît prometteuse. Cependant la méthode serait plus attractive si le nombre de réponses à utiliser est réduit, c'est pour cela que nous introduisons le moyen de réduire le nombre des réponses observées et l'identification des autres réponses non mesurées.

2.5 ECONOMIE SUR LE NOMBRE DES REPONSES A MESURER.

L'application de la méthode d'identification proposée serait l'utilisation des équations (2.46), (2.52) dans le domaine temporel et les équations (2.71), (2.80) dans le domaine des fréquences.

Cette identification dépend de l'observation de toutes les réponses, soit N^2 . Pratiquement il serait impossible de mesurer toute la matrice des réponses. De ce fait, il serait intéressant d'acquérir un nombre limité de réponses comme pour l'analyse modale expérimentale ou seulement N réponses sont suffisantes pour l'identification des paramètres modaux /3,10,34,25,5/

La méthode d'IBRAHIM /20/ considère quant à elle un nombre plus faible de réponses car la méthode d'identification utilise des données décalées dans le temps pour former la matrice dynamique à partir de laquelle les paramètres modaux sont identifiés.

La méthode d'identification des paramètres modaux proposée par M.GAYLARD /15/ utilise N réponses comme pour l'analyse modale, cela découle du caractère de récurrence de la méthode comme nous le verrons plus loin car c'est à partir de cette méthode que nous allons proposer comment nous pouvons construire la matrice complète des réponses à partir de la connaissance d'une colonne ou une rangé de la matrice des réponses.

Nous n'introduisons que l'essentiel de la méthode de M.GAYLARD /15/. En effet, cette méthode est basée sur la détermination de la matrice $[A_q]$ d'ordre $2N \times 2N$ comme suit :

$$[A_q] \begin{Bmatrix} q_v(r\Delta t) \\ q_v((r+p)\Delta t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_v((r+q)\Delta t) \\ q_v((r+p+q)\Delta t) \end{Bmatrix} \quad 2.81$$

l'ordre des matrices ci dessus est respectivement $2N \times 2N, 2N \times 1, 2N \times 1$. Les scalaires $r\Delta t, (r+p)\Delta t, (r+q)\Delta t$ et $(r+p+q)\Delta t$ sont les accroissements ou décalages dans le temps des réponses mesurées $q_v(t)$.

Les valeurs de p et q sont discutées en détails par GAYLARD /15/ et IBRAHIM /20/.

Dans l'équation (2.81), $q_v(t)$ est une colonne de la matrice des réponses.

En posant $\{Q_v(r\Delta t)\} = \begin{Bmatrix} q_v(r\Delta t) \\ q_v((r+p)\Delta t) \end{Bmatrix}$, $\{Q_v((r+q)\Delta t)\} = \begin{Bmatrix} q_v((r+q)\Delta t) \\ q_v((r+p+q)\Delta t) \end{Bmatrix}$ et en

appliquant la récurrence représentée par l'équation (2.82) R fois et en les groupant nous obtenons la récurrence sous forme de matrice :

$$[A_q][Q_v(r\Delta t)] = [Q_v((r+q)\Delta t)] \quad 2.82$$

l'ordre de ces matrices est respectivement : $2N \times 2N$, $2N \times R$, $2N \times R$, avec $r=0, \dots, R$, (R représentant le nombre de colonnes des matrices $[Q_v(r\Delta t)]$ et $[Q_v((r+q)\Delta t)]$) et $q=0, \dots, y$, (q est le décalage dans le temps des réponses d'une même colonne et y le nombre de points des réponses observés).

2.5.1 évaluation de la matrice dynamique $[A_q]$

L'implémentation de la méthode de GAYLARD se fait comme suit :

- 1) choisir N réponses de vitesses représentant une colonne ou une rangée de la matrice des réponses
- 2) choisir $p = 1$ comme le propose GAYLARD
- 3) pour $q = 0, \dots, y$
pour $r = 0, \dots, R$ construire les matrices $[Q_v(r\Delta t)]$ et $[Q_v((r+q)\Delta t)]$ de la manière suivante :

$$[Q_v(r\Delta t)] = \begin{bmatrix} q_{1j}^v(0) & q_{1j}^v(\Delta t) & \dots & \dots & \dots & q_{1j}^v(R\Delta t) \\ q_{2j}^v(0) & q_{2j}^v(\Delta t) & \dots & \dots & \dots & q_{2j}^v(R\Delta t) \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ q_{Nj}^v(0) & q_{Nj}^v(\Delta t) & \dots & \dots & \dots & q_{Nj}^v(R\Delta t) \\ q_{1j}^v(\Delta t) & q_{1j}^v(2\Delta t) & \dots & \dots & \dots & q_{1j}^v((1+R)\Delta t) \\ q_{2j}^v(\Delta t) & q_{2j}^v(2\Delta t) & \dots & \dots & \dots & q_{2j}^v((1+R)\Delta t) \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ q_{Nj}^v(\Delta t) & q_{Nj}^v(2\Delta t) & \dots & \dots & \dots & q_{Nj}^v((1+R)\Delta t) \end{bmatrix} \quad 2.83$$

$2N \times R$

$$\begin{aligned}
[Q_v((r+q)\Delta t)] = & \begin{bmatrix} q_{1j}^v(q\Delta t) & q_{1j}^v((1+q)\Delta t) & \dots & \dots & q_{1j}^v((R+q)\Delta t) \\ q_{2j}^v(q\Delta t) & q_{2j}^v((1+q)\Delta t) & \dots & \dots & q_{2j}^v((R+q)\Delta t) \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ q_{Nj}^v(q\Delta t) & q_{Nj}^v((1+q)\Delta t) & \dots & \dots & q_{Nj}^v((R+q)\Delta t) \\ q_{1j}^v((1+q)\Delta t) & q_{1j}^v((2+q)\Delta t) & \dots & \dots & q_{1j}^v((1+R+q)\Delta t) \\ q_{2j}^v((1+q)\Delta t) & q_{2j}^v((2+q)\Delta t) & \dots & \dots & q_{2j}^v((1+R+q)\Delta t) \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ q_{Nj}^v((1+q)\Delta t) & q_{Nj}^v((2+q)\Delta t) & \dots & \dots & q_{Nj}^v((1+R+q)\Delta t) \end{bmatrix} & 2.84 \\
& 2N \times R
\end{aligned}$$

Le nombre de points d'observation des réponses doit être supérieur à $1 + R + q$. Il faut noter aussi que les matrices ci dessus sont rectangulaires et que la valeur de $R=25$ (25 colonnes) était suffisante pour évaluer les matrices $[A_q]$.

La matrice $[A_q]$ est ensuite évaluée par la technique de la pseudo-inverse / **13,14,35**/,

c'est à dire :

$$[A_q] = [Q_v((r+q)\Delta t)][Q_v(r\Delta t)]^T \left[[Q_v(r\Delta t)][Q_v(r\Delta t)]^T \right]^{-1} \quad 2.85$$

et cela pour la valeur désirée de q qui dépend en général du nombre de points d'observation des réponses.

2.5.2 identification de la matrice de masses

L'identification de la matrice des masses se fait avec ce que nous avons appelé la récurrence inverse par application de la méthode de M GAYLARD /**15**/.

Cependant, il est important de noter que la récurrence de l'équation (2.82) s'applique quelle que soit la colonne où la rangée de la matrice des réponses impulsionnelles considérée.

En effet, la récurrence de l'équation (2.82) s'écrit en utilisant les éléments $q_{ij}^v(t)$ de la première colonne des réponses de vitesses.

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c} A_q^1 \\ \bullet \bullet \\ A_q^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} q_{11}^v(r\Delta t) \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{N1}^v(r\Delta t) \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \\ q_{11}^v((r+p)\Delta t) \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{N1}^v((r+p)\Delta t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} q_{11}^v((r+q)\Delta t) \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{N1}^v((r+q)\Delta t) \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ q_{11}^v((r+p+q)\Delta t) \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{N1}^v((r+p+q)\Delta t) \end{array} \right\} \quad 2.86 \\
 2N \times 2N \quad 2N \times 1 \qquad \qquad \qquad 2N \times 1
 \end{array}$$

La valeur de p est fixée ($p=1$) dans notre cas, seul les valeurs de r et q varient. Il en est de même pour toutes les autres colonnes (pour différentes valeurs de r).

Il est important de noter que les matrices dynamiques $[A_q]$ obtenues sont similaires quelle que soit la colonne où la rangée choisie pour construire les matrices $[Q_v(r\Delta t)]$ et $[Q_v((r+q)\Delta t)]$. Cela découle du fait que les paramètres modaux sont identifiés à partir des matrices dynamiques $[A_q]$ et que la récurrence ci dessus s'applique en considérant une colonne où rangée des réponses décalées ou théoriquement toutes les colonnes de la matrice des réponses impulsionnelles.

En effet, regroupant les récurrences de l'équation (2.86) en considérant toutes les colonnes de la matrice des réponses, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix}
 A_q^1 \\
 A_q^2
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 q_{11}^v(r\Delta t) & q_{12}^v(r\Delta t) & q_{13}^v(r\Delta t) & \dots & q_{1j}^v(r\Delta t) & \dots & q_{1N}^v(r\Delta t) \\
 q_{21}^v(r\Delta t) & q_{22}^v(r\Delta t) & q_{23}^v(r\Delta t) & \dots & q_{2j}^v(r\Delta t) & \dots & q_{2N}^v(r\Delta t) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 q_{N1}^v(r\Delta t) & q_{N2}^v(r\Delta t) & q_{N3}^v(r\Delta t) & \dots & q_{Nj}^v(r\Delta t) & \dots & q_{NN}^v(r\Delta t) \\
 \bullet \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet & \dots & \bullet \bullet \bullet \bullet & \dots & \bullet \bullet \bullet \bullet \\
 q_{11}^v((r+p)\Delta t) & q_{12}^v((r+p)\Delta t) & q_{13}^v((r+p)\Delta t) & \dots & q_{1j}^v((r+p)\Delta t) & \dots & q_{1N}^v((r+p)\Delta t) \\
 q_{21}^v((r+p)\Delta t) & q_{22}^v((r+p)\Delta t) & q_{23}^v((r+p)\Delta t) & \dots & q_{2j}^v((r+p)\Delta t) & \dots & q_{2N}^v((r+p)\Delta t) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 q_{N1}^v((r+p)\Delta t) & q_{N2}^v((r+p)\Delta t) & q_{N3}^v((r+p)\Delta t) & \dots & q_{Nj}^v((r+p)\Delta t) & \dots & q_{NN}^v((r+p)\Delta t)
 \end{bmatrix} =$$

$$2N \times 2N \quad , 2N \times N$$

$$= \begin{bmatrix}
 q_{11}^v((r+q)\Delta t) & q_{12}^v((r+q)\Delta t) & q_{13}^v((r+q)\Delta t) & \dots & q_{1j}^v((r+q)\Delta t) & \dots & q_{1N}^v((r+q)\Delta t) \\
 q_{21}^v((r+q)\Delta t) & q_{22}^v((r+q)\Delta t) & q_{23}^v((r+q)\Delta t) & \dots & q_{2j}^v((r+q)\Delta t) & \dots & q_{2N}^v((r+q)\Delta t) \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \bullet \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet & \dots & \bullet \bullet \bullet \bullet & \dots & \bullet \bullet \bullet \bullet \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 q_{N1}^v((r+q)\Delta t) & q_{N2}^v((r+q)\Delta t) & q_{N3}^v((r+q)\Delta t) & \dots & q_{Nj}^v((r+q)\Delta t) & \dots & q_{NN}^v((r+q)\Delta t)
 \end{bmatrix}$$

$2N \times N$ 2.87

La différence entre les équations (2.83) et (2.87) est le nombre de colonne du second membre qui est respectivement R et N (minimum à considérer).

La récurrence ci dessus (équation 2.87) est ensuite appliquée en fixant la valeur de $r = 0$ et $p = 1$,mais en considérant la $j^{\text{ième}}$ ligne de la matrice $[A_q]$ correspondant à la $j^{\text{ième}}$ colonne et cela pour une valeur de q (décalage i par exemple) fixée.

En effet, en prenant la première colonne (ou rangée) de la matrice des réponses nous pouvons écrire :

$$\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ A_i^1(1,1) & \cdot & \cdot & A_i^1(1,2N) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11}^v(0) & \cdot & q_{1N}^v(0) \\ q_{N1}^v(0) & \cdot & q_{NN}^v(0) \\ \bullet \bullet \bullet & \cdot & \bullet \bullet \bullet \\ q_{11}^v(\Delta t) & \cdot & q_{1N}^v(\Delta t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{N1}^v(\Delta t) & \cdot & q_{NN}^v(\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ q_{11}^v(i\Delta t) & \cdot & q_{1N}^v(i\Delta t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{matrix} q = i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \quad 2.87a$$

en faisant varier $q = 0, \dots, i, \dots, y$ (ou y est une valeur fonction du nombre de points d'observation des réponses disponibles) et en regroupant les récurrences obtenues de la manière décrite ci-dessus, nous avons :

$$\begin{matrix} q = 0 \\ q = 1 \\ q = 2 \\ \cdot \\ q = i \\ \cdot \\ q = y \end{matrix} \begin{bmatrix} A_0^1(1,1) & \cdot & \cdot & A_0^1(1,2N) \\ A_1^1(1,1) & \cdot & \cdot & A_1^1(1,2N) \\ A_2^1(1,1) & \cdot & \cdot & A_2^1(1,2N) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_i^1(1,1) & \cdot & \cdot & A_i^1(1,2N) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_y^1(1,1) & \cdot & \cdot & A_y^1(1,2N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11}^v(0) & \cdot & q_{1N}^v(0) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{N1}^v(0) & \cdot & q_{NN}^v(0) \\ \bullet \bullet \bullet & \cdot & \bullet \bullet \bullet \\ q_{11}^v(\Delta t) & \cdot & q_{1N}^v(\Delta t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{N1}^v(\Delta t) & \cdot & q_{NN}^v(\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11}^v(0) & \cdot & q_{1N}^v(0) \\ q_{11}^v(\Delta t) & \cdot & q_{1N}^v(\Delta t) \\ q_{11}^v(2\Delta t) & \cdot & q_{1N}^v(2\Delta t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{11}^v(i\Delta t) & \cdot & q_{1N}^v(i\Delta t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{11}^v(y\Delta t) & \cdot & q_{1N}^v(y\Delta t) \end{bmatrix} \begin{matrix} q = 0 \\ q = 1 \\ q = 2 \\ \cdot \\ q = i \\ \cdot \\ q = y \end{matrix} \quad 2.88$$

$$\begin{matrix} [Z_1] & \begin{bmatrix} Z_2^1 \\ Z_2^2 \end{bmatrix} & = & [Z_3] \\ y \times 2N & 2N \times N & & y \times N \end{matrix}$$

à partir de l'équation (2.88) nous pouvons calculer la matrice $[Z_2] = \begin{bmatrix} Z_2^1 \\ Z_2^2 \end{bmatrix}$ en utilisant la technique de la pseudo-inverse /35/

$$\begin{bmatrix} Z_2^1 \\ Z_2^2 \end{bmatrix} = \left[[Z_1]^T [Z_1] \right]^{-1} [Z_1]^T [Z_3] \quad 2.89$$

à partir de l'équation (2.88) nous remarquons que la sous matrice $[Z_2^1]$ n'est autre que la matrice des réponses de vitesses au temps $t = 0$ et elle est égale à l'inverse de la matrice des masses $[M]^{-1}$. Par simple inversion de la matrice identifiée en (2.89) nous obtenons la matrice de masses $[M] = [Z_2^1]^{-1}$.

2.5.3. identification des réponses non mesurées

l'identification des réponses non mesurées à partir de l'équation (2.89) comme suit : si la $j^{\text{ème}}$ colonne non mesurée est à identifier nous posons l'équation (récurrence) suivante :

$$\begin{array}{c}
 q = 0 \\
 q = 1 \\
 q = 2 \\
 \cdot \\
 q = i \\
 \cdot \\
 q = y
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 A_0^1(j,1) & \cdot & A_0^1(j,2N) \\
 A_1^1(j,1) & \cdot & A_1^1(j,2N) \\
 A_2^1(j,1) & \cdot & A_2^1(j,2N) \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 A_i^1(j,1) & \cdot & A_i^1(j,2N) \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 A_y^1(j,1) & \cdot & A_y^1(j,2N)
 \end{bmatrix}
 \begin{matrix}
 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\
 \end{matrix}
 [Z_2] =
 \begin{bmatrix}
 q_{j1}^v(0) & \cdot & q_{jN}^v(0) \\
 q_{j1}^v(\Delta t) & \cdot & q_{jN}^v(\Delta t) \\
 q_{j1}^v(2\Delta t) & \cdot & q_{jN}^v(2\Delta t) \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 q_{j1}^v(i\Delta t) & \cdot & q_{jN}^v(i\Delta t) \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 q_{j1}^v(y\Delta t) & \cdot & q_{jN}^v(y\Delta t)
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{c}
 q = 0 \\
 q = 1 \\
 q = 2 \\
 \cdot \\
 q = i \\
 \cdot \\
 q = y
 \end{array}
 \quad 2.90$$

$y \times 2N \qquad 2N \times N \qquad y \times N$

par simple multiplication de matrices, nous obtenons la $j^{\text{ème}}$ colonne (ou ligne du fait de la symétrie de la matrice des réponses).

En variant $j = 1, \dots, N$ et en appliquant l'équation (2.90) N fois, nous identifions les N colonnes de la matrice des réponses.

Il est important de noter que le procédé appliqué pour l'identification de la matrice de masses et les réponses non mesurées a été développé en tenant compte des propriétés de la récurrence de GAYLARD /15/ et de IBRAHIM /20/.

La méthode décrite ci-dessus pour l'identification de la matrice de masses et des réponses non mesurées a été appliquée à un exemple analytique avec succès. Nous

avons ensuite ajouter un bruit de distribution GAUSSIENNE d'écart type unité et de moyenne nulle pour simuler un exemple d'identification de réponses d'un système dynamique réel, les résultats obtenus dans ce cas ne sont pas précis.

2.5.3.1 identification de la matrice de masses et des réponses non mesurées. en utilisant les réponses non polluées.

Les réponses choisies sont ceux des vitesses de la première colonne de la matrice des réponses pour $\Delta t = 0.00251$ sec et $\frac{\Delta t_0}{\Delta t} = 15$. Ces réponses sont calculées en utilisant l'équation (2.15) de la section [2.1].

Pour permettre la comparaison entres les réponses calculées et ceux identifiées nous donnons ci dessous les réponses calculées :

Eléments $q_{ij}^v(p\Delta t)$ (réponses temporelles) de la matrice des réponses de vitesses
(ces valeurs sont multipliées par 48.634)

q_{11}^v	q_{12}^v	q_{13}^v	q_{14}^v	q_{21}^v	q_{22}^v	q_{23}^v	q_{24}^v
------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------	------------

1.000	- .000	- .000	.000	- .000	1.000	.000	.000
.969	.011	.001	.000	.011	.973	.010	.001
.910	.036	.002	.001	.036	.923	.030	.002
.826	.071	.003	.001	.071	.852	.059	.003
.720	.116	.005	.001	.116	.763	.095	.004
.597	.166	.009	.001	.166	.659	.138	.006
.460	.219	.014	.002	.219	.544	.184	.009
.316	.273	.021	.002	.273	.424	.232	.014
.169	.322	.032	.003	.322	.301	.280	.019
.024	.365	.045	.004	.365	.180	.325	.026
- .114	.399	.061	.005	.399	.066	.366	.036
- .241	.420	.080	.007	.420	- .039	.401	.047
- .353	.428	.103	.009	.428	- .130	.428	.060
- .446	.421	.128	.011	.421	- .207	.446	.076
- .519	.399	.155	.015	.399	- .266	.454	.093
- .571	.361	.183	.019	.361	- .308	.452	.113
- .599	.309	.212	.025	.309	- .331	.440	.135
- .606	.244	.240	.031	.244	- .338	.417	.158
- .591	.168	.266	.039	.168	- .328	.384	.183
- .557	.084	.289	.048	.084	- .305	.344	.209

Tableau 4 : valeurs de $q_{ij}^v(p\Delta t)$ pour $p = 0$ à 19

Éléments $q_{ij}^v(p\Delta t)$ (réponses temporelles) de la matrice des réponses de vitesses

(ces valeurs sont multipliées par 48.634)

	q_{31}^v	q_{32}^v	q_{33}^v	q_{34}^v	q_{14}^v	q_{42}^v	q_{43}^v	q_{44}^v

-.000	.000	1.000	-.000	.000	.000	-.000	1.000
.001	.010	.980	.007	.000	.001	.007	.990
.002	.030	.943	.019	.001	.002	.019	.974
.003	.059	.892	.037	.001	.003	.037	.952
.005	.095	.826	.060	.001	.004	.060	.924
.009	.138	.750	.088	.001	.006	.088	.892
.014	.184	.663	.119	.002	.009	.119	.855
.021	.232	.570	.153	.002	.014	.153	.813
.032	.280	.471	.189	.003	.019	.189	.768
.045	.325	.370	.226	.004	.026	.226	.720
.061	.366	.269	.264	.005	.036	.264	.669
.080	.401	.171	.301	.007	.047	.301	.616
.103	.428	.078	.337	.009	.060	.337	.562
.128	.446	-.009	.370	.011	.076	.370	.506
.155	.454	-.087	.401	.015	.093	.401	.451
.183	.452	-.155	.428	.019	.113	.428	.395
.212	.440	-.212	.451	.025	.135	.451	.341
.240	.417	-.258	.470	.031	.158	.470	.287
.266	.384	-.290	.484	.039	.183	.484	.235
.289	.344	-.311	.492	.048	.209	.492	.185

Tableau 5 : valeurs de $q_{ij}^y(p\Delta t)$ pour $p = 0$ à 19

matrice $[A_q]$ pour $q = 0$

$[A_0] =$	<table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1.0000-</td><td>.0000-</td><td>.0000</td><td>.0000</td><td>.0000-</td><td>.0000</td><td>.0000</td><td>.0000</td></tr> <tr><td>.0000</td><td>1.0000-</td><td>.0000-</td><td>.0000</td><td>.0000-</td><td>.0000</td><td>.0000</td><td>.0000</td></tr> <tr><td>.0000-</td><td>.0000</td><td>1.0000</td><td>.0000</td><td>.0000-</td><td>.0000-</td><td>.0000-</td><td>.0000</td></tr> <tr><td>.0000</td><td>.0000-</td><td>.0000</td><td>1.0000</td><td>.0000-</td><td>.0000</td><td>.0000</td><td>.0000</td></tr> </table>	1.0000-	.0000-	.0000	.0000	.0000-	.0000	.0000	.0000	.0000	1.0000-	.0000-	.0000	.0000-	.0000	.0000	.0000	.0000-	.0000	1.0000	.0000	.0000-	.0000-	.0000-	.0000	.0000	.0000-	.0000	1.0000	.0000-	.0000	.0000	.0000
1.0000-	.0000-	.0000	.0000	.0000-	.0000	.0000	.0000																										
.0000	1.0000-	.0000-	.0000	.0000-	.0000	.0000	.0000																										
.0000-	.0000	1.0000	.0000	.0000-	.0000-	.0000-	.0000																										
.0000	.0000-	.0000	1.0000	.0000-	.0000	.0000	.0000																										

.0000 .0000- .0000 .0000 1.0000 .0000- .0000 .0000
 .0000- .0000- .0000 .0000 .0000 1.0000 .0000 .0000
 .0000- .0000- .0000 .0000 .0000 .0000 1.0000 .0000
 .0000 .0000 .0000 .0000 .0000- .0000 .0000 1.0000

matrice $[A_q]$ pour $q = 1$

$$[A_1] = \begin{bmatrix} .0000 & .0000- & .0000 & .0000 & 1.0000 & .0000- & .0000 & .0000 \\ .0000- & .0000- & .0000 & .0000 & .0000 & 1.0000 & .0000 & .0000 \\ .0000- & .0000- & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & 1.0000 & .0000 \\ .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000- & .0000 & .0000 & 1.0000 \\ - .9836- & .0046- & .0008- & .0003 & 1.9542 & .0185 & .0008 & .0003 \\ - .0046- & .9857- & .0044- & .0008 & .0185 & 1.9609 & .0152 & .0008 \\ - .0007- & .0044- & .9883- & .0035 & .0008 & .0152 & 1.9712 & .0098 \\ - .0003- & .0007- & .0034- & .9929 & .0003 & .0007 & .0096 & 1.9866 \end{bmatrix}$$

Matrice inverse de la matrice des masses

$$[Z_2^1] = [M]^{-1} = \begin{bmatrix} .0205- & .0000 & .0000 & .0000 \\ - .0000 & .0205- & .0000- & .0000 \\ - .0000- & .0000 & .0205 & .0000 \\ - .0000- & .0000- & .0000 & .0205 \end{bmatrix}$$

matrice identifiée de masses

$$[M] = \begin{bmatrix} 48.6335 & .0024 & - .0034 & - .0056 \\ .0003 & 48.6314 & .0033 & .0066 \\ .0001 & .0008 & 48.6317 & - .0029 \\ .0004 & .0005 & .0003 & 48.6343 \end{bmatrix}$$

Nous remarquons que la matrice de masses est identifiée correctement sauf Les éléments hors de la diagonale principale qui doivent être nuls.

Eléments $q_{ij}^v(p\Delta t)$ (réponses temporelles) identifiées à partir de la première colonne de la matrice des réponses : (ces valeurs sont multipliées par 48.634)

q_{11}^v	q_{12}^v	q_{13}^v	q_{14}^v	q_{21}^v	q_{22}^v	q_{23}^v	q_{24}^v
1.000-	.000	.000-	.000-	.000	1.000-	.000	.000
.969	.011	.001	.000	.011	.973	.010	.001

	.910	.036	.002	.001	.036	.923	.030	.002
	.826	.071	.003	.001	.071	.852	.059	.003
	.720	.116	.005	.001	.116	.763	.095	.004
	.597	.166	.009	.001	.166	.659	.138	.006
	.460	.219	.014	.002	.219	.545	.184	.009
	.316	.272	.021	.002	.273	.424	.232	.014
	.169	.322	.032	.003	.322	.301	.280	.019
	.024	.365	.045	.004	.365	.180	.325	.026
-	.114	.399	.061	.005	.399	.066	.366	.036
-	.241	.420	.080	.007	.420	.039	.401	.047
-	.353	.428	.103	.009	.428	.130	.428	.060
-	.446	.421	.127	.011	.421	.207	.446	.076
-	.519	.399	.155	.015	.399	.266	.454	.093
-	.571	.361	.183	.019	.361	.308	.452	.113
-	.599	.309	.212	.025	.309	.332	.440	.135
-	.606	.244	.240	.031	.244	.338	.417	.158
-	.591	.168	.266	.039	.168	.328	.384	.183
-	.557	.084	.289	.048	.084	.305	.344	.209

Tableau 6 : valeurs $q_{ij}^v(p\Delta t)$ identifiées pour $p = 0$ à 19

Eléments $q_{ij}^v(p\Delta t)$ (réponses temporelles) identifiées à partir de la première colonne de la matrice des réponses : (ces valeurs sont multipliées par 48.634)

	q_{31}^v	q_{32}^v	q_{33}^v	q_{34}^v	q_{41}^v	q_{42}^v	q_{43}^v	q_{44}^v
-	.000	.000	1.000	.000	.000	.000	.000	1.000
	.001	.010	.980	.007	.000	.001	.007	.990

.002	.030	.943	.019	.001	.002	.019	.974
.003	.059	.892	.037	.001	.003	.037	.952
.005	.095	.826	.060	.001	.004	.060	.924
.009	.138	.750	.088	.001	.006	.088	.892
.014	.184	.663	.119	.002	.009	.119	.855
.021	.232	.569	.153	.002	.014	.153	.813
.032	.280	.471	.189	.003	.019	.189	.768
.045	.325	.370	.226	.004	.026	.226	.720
.061	.366	.270	.264	.005	.036	.264	.669
.080	.401	.171	.301	.007	.047	.301	.616
.103	.428	.078	.336	.009	.060	.337	.562
.128	.446-	.009	.370	.011	.076	.370	.506
.155	.454-	.087	.401	.015	.093	.401	.451
.183	.452-	.155	.428	.019	.113	.428	.395
.212	.440-	.212	.451	.025	.135	.451	.341
.240	.417-	.258	.470	.031	.158	.470	.287
.266	.384-	.291	.484	.039	.183	.484	.235
.289	.344-	.311	.492	.048	.209	.492	.185

Tableau 7 : réponses $q_{ij}^v(p\Delta t)$ identifiées pour $p = 0$ à 19

inverse de la matrice de l'amortissement

$$[C_{id}]^{-1} = \begin{bmatrix} .0036 & .00150 & .00100 & .0008 \\ .0015 & .00490 & .00240 & .0017 \\ .0010 & .00240 & .00630 & .0033 \\ .0008 & .00170 & .00330 & .0091 \end{bmatrix}$$

matrice identifiée de l'amortissement pour $\Delta t = 0.00251$ sec et $rp = 15$

$$[C_{id}] = \begin{bmatrix} 314.7245 & -86.9376 & -14.2222 & -4.6930 \\ -86.9144 & 274.6616 & -82.3431 & -14.1455 \\ -14.2366 & -82.3399 & 226.0682 & -65.2688 \\ -4.7073 & -14.1264 & -65.2784 & 136.6011 \end{bmatrix}$$

$$[er] = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.96 & 0.97 & 0.92 \\ 0.96 & 0.98 & 0.96 & 0.94 \\ 0.97 & 0.96 & 0.98 & 0.96 \\ 0.92 & 0.94 & 0.96 & 0.98 \end{bmatrix}$$

conclusion :

L'identification de la matrice de l'amortissement à partir d'une seule colonne ou ligne de la matrice des réponses non polluées dans le domaine temporel, en utilisant la technique d'économie de mesure des réponses, donne des résultats satisfaisants (erreur entre 0 et 8%)

Cependant on note une légère différence entre la matrice de l'amortissement identifiée en utilisant la matrice des réponses calculées et celle identifiée en utilisant les réponses identifiées.

2.5.3.2 identification de la matrice de masses et des réponses non mesurées en utilisant des réponses polluées.

Le rapport bruit signal (BS) utilisé est de 5% car, nous avons remarqué que les réponses identifiées à partir des réponses polluées même avec ce pourcentage faible de bruit ne sont pas très précises. Donc il était inutile de considérer des valeurs du BS plus grandes.

Eléments $q_{ij}^v(p\Delta t)$ (réponses temporelles à une impulse) calculées pour un BS de 5% (ces valeurs sont multipliées par 48.634).

q_{11}^v	q_{12}^v	q_{13}^v	q_{14}^v	q_{21}^v	q_{22}^v	q_{23}^v	q_{24}^v
1.003	.002	.002	.002	.002	1.003	.002	.003
.962	.006	-.005	-.004	.006	.966	.004	-.007
.916	.041	.007	.005	.041	.930	.035	.009

.826	.071	.003	.001	.071	.852	.058	.003
.722	.117	.007	.003	.117	.765	.097	.007
.590	.160	.003	-.003	.160	.652	.132	-.001
.467	.225	.020	.007	.225	.552	.190	.017
.314	.271	.020	.001	.271	.421	.230	.011
.167	.320	.030	.002	.320	.299	.278	.017
.018	.360	.040	-.000	.360	.173	.320	.019
-.118	.396	.058	.003	.396	.062	.364	.032
-.234	.426	.086	.012	.426	-.031	.407	.055
-.359	.423	.098	.004	.423	-.137	.423	.053
-.445	.423	.129	.013	.423	-.205	.448	.078
-.524	.395	.151	.011	.395	-.272	.450	.088
-.575	.358	.179	.016	.358	-.312	.448	.108
-.597	.311	.213	.026	.311	-.329	.441	.137
-.600	.249	.244	.035	.249	-.332	.421	.165
-.598	.162	.260	.034	.162	-.336	.378	.175
-.551	.090	.294	.053	.090	-.297	.349	.216

Tableau 8 : valeurs $q_{ij}^v(p\Delta t)$ pour $p = 0$ à 19

Eléments $q_{ij}^v(p\Delta t)$ (réponses temporelles à une impulse) calculées pour un BS de 5% (ces valeurs sont multipliées par 48.634)

q_{31}^v	q_{32}^v	q_{33}^v	q_{34}^v	q_{41}^v	q_{42}^v	q_{43}^v	q_{44}^v
.002	.002	1.003	.004	.002	.003	.004	1.005
-.005	.004	.971	-.003	-.004	-.007	-.003	.977
.007	.035	.951	.027	.005	.009	.027	.985

.003	.058	.891	.037	.001	.003	.037	.951
.007	.097	.829	.063	.003	.007	.063	.928
.003	.132	.741	.078	-.003	-.001	.078	.879
.020	.190	.672	.128	.007	.017	.128	.868
.020	.230	.567	.150	.001	.011	.150	.809
.030	.278	.468	.186	.002	.017	.186	.764
.040	.320	.362	.218	-.000	.019	.218	.708
.058	.364	.265	.260	.003	.032	.260	.663
.086	.407	.181	.311	.012	.055	.311	.630
.098	.423	.070	.328	.004	.053	.328	.550
.129	.448	-.006	.373	.013	.078	.373	.510
.151	.450	-.094	.394	.011	.088	.394	.441
.179	.448	-.161	.422	.016	.108	.422	.387
.213	.441	-.210	.454	.026	.137	.454	.345
.244	.421	-.250	.477	.035	.165	.477	.298
.260	.378	-.300	.474	.034	.175	.474	.221
.294	.349	-.302	.501	.053	.216	.501	.198

Tableau 9 : valeurs $q_{ij}^v(p\Delta t)$ pour $p = 0$ à 19

Matrice $[A_q]$ pour $q=0$

1.0000-	.0000-	.0000-	.0000-	.0000	.0000-	.0000-	.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000-	.0000	.0000-	.0000-	.0000
.0000	.0000	1.0000-	.0000	.0000-	.0000	.0000-	.0000
.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.0000	.0000	.0000	.0000	1.0000-	.0000-	.0000-	.0000
.0000-	.0000	.0000	.0000-	.0000	1.0000-	.0000-	.0000
.0000	.0000	.0000	.0000-	.0000-	.0000	1.0000-	.0000

.0000 .0000 .0000 .0000- .0000 .0000 .0000 1.0000

Matrice $[A_q]$ pour $q=1$

$$\begin{bmatrix} .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & 1.0000 & - .0000 & - .0000 & - .0000 \\ .0000 & - .0000 & .0000 & .0000 & - .0000 & 1.0000 & - .0000 & - .0000 \\ .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & - .0000 & - .0000 & 1.0000 & - .0000 \\ .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & - .0000 & .0000 & .0000 & 1.0000 \\ -11.4699 & - 7.3485 & 4.3233 & 5.3346 & 13.9912 & 5.6192 & - 4.7682 & - 5.3644 \\ -16.8554 & -12.7730 & 6.9406 & 8.5667 & 19.3594 & 10.9483 & - 7.6439 & - 8.6145 \\ -20.4699 & -14.3090 & 7.4447 & 10.3985 & 23.4934 & 10.9197 & - 7.3284 & -10.4503 \\ -28.4155 & -19.8709 & 11.7063 & 13.4518 & 32.6140 & 15.1499 & -12.9039 & -12.5386 \end{bmatrix}$$

Inverse de la matrice des masses identifiées pour un BS de 5%

(ces valeurs sont multipliées par 46.634)

$$[M]^{-1} = [Z_2^1] = \begin{bmatrix} - .0046 & .0320 & .0616 & .0025 \\ .1161 & .1699 & .1381 & .0043 \\ .3395 & .6582 & .7484 & .0054 \\ - .0949 & .1113 & .1172 & 1.0069 \end{bmatrix}$$

matrice identifiée de masses

$$[M] = \begin{bmatrix} -37463.9895 & 17390.2733 & - 6305.8960 & 53.8448 \\ 41149.4837 & -18111.8066 & 6744.1968 & - 62.4224 \\ -19221.9256 & 8050.9161 & - 3009.9751 & 30.1626 \\ 3255.9585 & - 1300.4634 & 501.6540 & 42.9618 \end{bmatrix}$$

la matrice de masses n'est pas identifiée correctement en présence de bruit même faible.

Eléments $q_{ij}^v(p\Delta t)$ (réponses temporelles à une impulsion) identifiées pour un BS de 5% (ces valeurs sont multipliées par 48.634).

q_{11}^v	q_{12}^v	q_{13}^v	q_{14}^v	q_{21}^v	q_{22}^v	q_{23}^v	q_{24}^v
1.015	.023	.029	.040-	.015	.976-	.029-	.041
.983	.033	.027	.037-	.003	.951-	.018-	.037
2.200 -	1.683-	.213	.147	2.075-	1.888-	.376	.152
3.085 -	1.416-	.214	.179	3.676-	1.590-	.341	.219
1.975 -	.937-	.066	.113	2.127 -	.987-	.060	.133

1.532	- .778	.099	.086	1.683	- .923	.062	.111
- .333	- .042	.268	.018	- 1.016	.046	.577	.032
- .074	- .116	.063	.008	- .295	- .291	.299	.010
.683	- .536	.070	.041	1.225	- 1.181	.129	.114
1.699	- .670	.154	.094	3.149	- 1.601	.031	.225
- .707	.186	.171	.039	- .436	- .412	.576	.037
- 1.032	.501	.326	.058	- .717	- .063	.836	.029
- 1.470	.283	.073	.075	- 1.221	- .534	.427	.023
- .289	- .130	.010	.000	.822	- 1.277	.275	.160
- .110	.141	.040	.004	1.206	- .879	.191	.181
- .936	.154	.010	.026	- .075	- .853	.190	.143
- .900	.716	.268	.028	- .032	.097	.571	.146
- .801	.275	.263	.002	.061	- .519	.487	.191
- .376	- .229	.019	.038	.627	- 1.201	.013	.254
- 2.350	.479	.481	.058	- 2.695	.092	.666	.095

Tableau 10 : valeurs $q_{ij}^v(p\Delta t)$ identifiées pour $p = 0$ à 19

Eléments $q_{ij}^v(p\Delta t)$ (réponses temporelles à une impulsion) identifiées pour un BS de 5% (ces valeurs sont multipliées par 48.634).

q_{31}^v	q_{32}^v	q_{33}^v	q_{34}^v	q_{41}^v	q_{42}^v	q_{43}^v	q_{44}^v
.007	.012	1.014	.020	.001	.002	.002	.997
.008	.021	.993	.025	.001	.001	.004	.987
2.498	3.350	.492	.258	3.458	4.706	.627	1.280
4.401	2.891	.440	.347	6.097	4.095	.605	1.360
2.476	2.037	.662	.252	3.412	2.941	.178	1.174

1.887-	1.820	.520	.239	2.580-	2.674 -	.236	1.090
- 1.436 -	.491	1.141	.082-	2.055-	.865	.784	.795
- .610 -	.739	.639	.149 -	.927-	1.247	.257	.804
1.192-	1.659	.266	.293	1.556-	2.558 -	.084	.913
3.496-	2.013 -	.020	.446	4.731-	3.079 -	.298	1.029
- .863 -	.430	.481	.235 -	1.360-	.900	.580	.636
- 1.202	.119	.648	.241 -	1.863-	.148	.990	.544
- 1.791 -	.347	.019	.248 -	2.717-	.798	.285	.452
.728-	1.167-	.278	.427	.749-	1.930	.029	.599
1.254 -	.631-	.471	.462	1.444-	1.165 -	.098	.550
- .220 -	.573-	.539	.421 -	.639-	1.051 -	.070	.398
- .074	.579-	.117	.426 -	.465	.593	.618	.318
.145 -	.192-	.232	.477 -	.186 -	.427	.537	.308
.946 -	1.066-	.795	.546	.910 -	1.581-	.188	.329
- 2.963	.433	.031	.340 -	4.532	.571	.999 -	.022

Tableau 11 : valeurs $q_{ij}^v(p\Delta t)$ identifiées pour $p = 0$ à 19

inverse de la matrice de l'amortissement identifiée pour un $BS = 5\%$

$$[C_{id}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1.539 & 2.238 & 2.679 & 3.697 \\ - .296- & .365 - & .620 - & .910 \\ - .104- & .154 - & .032 - & .303 \\ .062 & .082 & .124 & .388 \end{bmatrix}$$

matrice identifiée de l'amortissement pour un $BS = 5\%$

	- 243.144	-1367.497	-1306.502	-1910.963
Mémoire de Magister	Laboratoire Bâti dans l'Environnement			USTHB

168.202	868.504	513.792	835.498
23.486	24.541	331.688	92.995
- 4.467	25.730	- 7.511	222.320

conclusion :

il est clair que l'identification de la matrice de masses et des réponses non mesurées ne donne pas des résultats précis en présence de bruit. Nous remarquons aussi que même la première colonne n'est pas identifiée correctement.

La technique serait alors d'entreprendre l'identification de la première colonne suivant un critère choisi en minimisant l'erreur entre les réponses réelles de la première colonne et ceux que nous voulons obtenir (lissage des réponses identifiées mais de façon qu'aucune information concernant le système dynamique ne soit perdue) et ensuite appliquer le même critère pour l'identification des autres réponses.

3. DISCUSSION

A partir des résultats obtenus concernant la matrice de l'amortissement des modes de vibration et des pulsations propres de vibration, nous pouvons dire que la validité de la méthode d'identification proposée est claire. Seulement nous allons éclaircir et discuter certains points relatifs aux paramètres utilisés par la présente méthode.

3.1 ordre du modèle du système dynamique

la méthode d'identification **(T.I.M)** s'applique aux systèmes dynamiques à plusieurs degrés de liberté. Il est clair que l'ordre N du modèle choisi doit être connu avant

l'application de la technique proposée. L'importance de ce paramètre a été longuement discutée par GAYLARD /15/ et IBRAHIM /20/.

L'ordre du modèle N peut être déterminé à partir de mobilités enregistrées au niveau du même point d'excitation. Cependant il est important de noter que la valeur à considérer pour ce paramètre est fonction du système dynamique lui-même, du but de l'essai entrepris ainsi que de l'instrumentation disponible.

3.2 Nombre de réponses impulsionnelles à utiliser

L'application de la **T.I.M** nécessite un important volume de données comme nous l'avons constaté lors de son application sans économie sur les réponses du système dynamique. De ce fait, son application à un système réel peut être confrontée à un sérieux problème.

Cependant nous avons montré clairement que l'identification est applicable avec un minimum requis de réponses comme pour les méthodes d'identification existantes.

Lorsque les réponses sont polluées (présence de bruit) l'identification des réponses non mesurées peut présenter des erreurs sur les paramètres à identifier.

Néanmoins, pour les systèmes linéaires la matrice des réponses de déplacements et de vitesses est symétrique. De ce fait, nous devons mesurer $N * N / 2$ réponses.

3.3 Identification dans le domaine des fréquences

La méthode d'identification est applicable dans le domaine des fréquences comme nous l'avons montré car théoriquement les réponses à une impulsion dans le domaine temporel sont équivalentes aux réponses en fréquences par utilisation de la transformée de FOURIER.

L'avantage de l'application de la méthode d'identification dans le domaine des fréquences est l'utilisation des réponses autour des fréquences de résonance car en général les réponses sont négligeables ailleurs. De ce fait, le nombre de points à utiliser pour l'identification de la matrice de l'amortissement est très réduit comparé à l'application de la méthode dans le domaine temporel.

3.4 Fréquences de résonance rapprochées

A travers l'exemple du système à deux degrés de liberté, nous avons montré que même avec des fréquences de résonance rapprochées l'identification de la matrice de l'amortissement et des paramètres modaux est correcte. Néanmoins, pour une meilleure précision l'intervalle d'intégration Δt doit être très faible et le temps d'enregistrement des réponses doit être assez long.

Cependant, pour un amortissement relativement faible, la valeur de Δt peut être prise large et le nombre de points d'environ 75% du temps d'observation.

4.CONCLUSION GENERALE

Dans notre travail, nous avons procédé à la formulation et à l'évaluation d'une méthode d'identification pour déterminer des propriétés dynamiques des structures.

Nous avons à cet effet, considéré des systèmes à 1 degré de liberté puis des systèmes à plusieurs degrés de liberté. Nous avons appliqué la méthode d'identification dans le domaine temporel et fréquentiel. Ensuite pour chacun des domaines, nous avons déterminé les paramètres qui conditionnent les résultats obtenus par application de la méthode d'identification proposée.

L'application de la méthode dans l'espace des temps nous a permis de montrer que les propriétés dynamiques des modes de vibration aux fréquences basses, en présence des modes de vibration aux fréquences élevées, nécessite des temps d'observation relativement élevés.

Afin de faciliter l'identification de la matrice de l'amortissement des formes modales et des pulsations propres, les résultats obtenus montrent que :

- La séparation entre fréquences, fonction de la typologie structurale, n'est pas handicapante pour la détermination des propriétés dynamiques.
- Du fait de l'utilisation des réponses de vitesses la contribution des modes supérieurs nous imposent des enregistrements de réponses relativement longs.
- L'intervalle d'intégration et le nombre de points à utiliser jouent un rôle déterminant sur la précision des propriétés dynamiques identifiées.

Nous avons ensuite, appliqué la méthode d'identification en utilisant des réponses de vibration libre dans l'espace des fréquences par l'utilisation de la transformé de FOURIER.

L'effort de calcul est minimisé du fait que la méthode d'identification utilise les réponses autour des fréquences de résonance sans que la précision sur les valeurs des propriétés dynamiques ne soit altérée.

Pour un amortissement faible, l'effort de calcul est important, et la méthode T.I.M devient difficile à appliquer du fait de l'intégration utilisé par la méthode d'identification.

Néanmoins, l'avantage de la présente méthode est l'identification de la matrice de l'amortissement sans avoir à la construire à partir des paramètres modaux et physiques.

L'extension de l'application de la méthode aux systèmes dynamiques avec un amortissement général est souhaitable.

L'identification de l'amortissement local d'un système dynamique par application de la M.I.T serait importante à considérer.

5 REFERENCES

/1/ ABRAMOWITZ M. et I.A STEGUN. Handbook of mathematical functions. Dover publications, inc. , New York .1970

/2/ AFRA H. . Thèse doctorale : Identification du comportement sismique de bâtiments à partir de leurs réponses accélérométriques. ENPC septembre 1991.

/3/ BELLIVEAU J.G., VIGNERON F.R., SOUCY Y. AND DRAISY S. : Modal parameter estimation from base excitation : Journal of sound and vibration 103 (3) PP 435-449.: 1986

/4/ BISHOP R. E.D. AND J. W. PENDERED : Note on resonance testing : Journal of Mechanical Engineering Science : vol.5 No 4 1963.

/5/ BISHOP R. E. D AND G. L. M. GLADWELL. An investigation into the theory of resonance testing. Phil .Trans., 225, (No 1055), pp. 241 A1963.

/6/ CARAVANI P. AND W.T. THOMSON : Identification of damping coefficients in multi-dimensional linear systems : Journal of applied mechanics : PP 379-382.June 1974

/7/ CAUGHEY ET O'KELLY Classical normal modes in damped linear dynamics systems.journal of applied mechanics (ASME) pp.586-588.1965

/8/ DAVIES P. : A recursive approach to PRONY parameters estimation : Journal of sound and vibration 89 (4) 1983.

/9/ / DJAKAB E. et D. BENOUAR : Identification of the damping matrix coefficients of linear systems with proportionnal damping.Journal of European Association For Earthquake Engineering, 3,2000.

/10/ EWINS D. J : Modal testing theory and practice : Cichester Wiley 1984.

/11/ FERRAR W.L. : Finite matrices : Oxford University press : 1951.

/12/ FERTIS DEMETER G.. Mechanical and structural vibrations.John Wiley & sons 1995.

/13/ GAYLARD M. E. : Measurements associated with smoothed frequency responses Part 1 : Orthogonal polynomial characterisation of dynamical structures : Journal of sound and vibration 113 (2) 1987.

/14/ GAYLARD M. E. : Measurements associated with smoothed frequency responses
Part 2 : Identification of stiffnesses and masses in a dynamic system : Journal of sound
and vibration 113 (2) 1987.

/15/ GAYLARD M. E...Relation between the IBRAHIM's method and the
smoothed frequency response. Unpublished paper.

/16/ GENATIOS CARLOS: Thèse Doctorale : Contribution à l'évaluation des procédés
expérimentaux pour la détermination des propriétés dynamiques des structures.
Application à deux cas de structures de génie civil. INSA de TOULOUSE, 1991

/17/ GOPAL M. et I.J. NAGRATH.Control systems engineering, second edition,.John
Willey eastern limited1982.

/18/ HASSELMAN T. K. : Damping synthesis from structure tests : A.I.A.A Journal
vol. 10 and 14 : pp. 1409-1418 October 1976.

/19/ HUTCHINGS H.J. : Linear systems and random inputs, Electronics and wireless
world, No. 94, pp. 356-360, 1988.

/20/ IBRAHIM S. R. AND E. C. MIKULCIK. For the direct identification of vibration
parameters from the free response. Shock and vibration bulletin No 47, part 4 , , pp
183-198 september 1977.

/21/ KENNEDY C.C. ET C.D.P. PANCU. Use of vecteurs in vibration measurement and
analysis. j. aerospace . Science. 14 (11).1947.

/22/ KENNETH G McCONNELL... Vibrations testing, theory and practice..John Wiley &
sons 1995.

/23/ LAZAN B. .Damping of materials and members in structural mechanics..pergamon press 1968.

/24/ NEWLAND D. E...A introduction to random vibrations and spectral analysis, second edition,. Longman scientific and technical, UK 1984.

/25/ NEWLAND D. E. : Mechanical vibration analysis and computation, ,Longman scientific and technical, U.K 1989.

/26/ PAPA R. S. and IBRAHIM S. R. : A parametric study of the Ibrahim time domain identification algorithm. Shock and vibration bulletin 51 (3) 1981.

/27/ PETYT M. Introduction to finite element vibration analysis ..Cambridge University Press 1990.

/28/ POTTER R. AND RICHARDSON M. : Mass, stiffness and damping matrices form measured model parameters : I.S.A. ac reprint : Advances in instrumentation 1974.

/29/ PREUMONT ANDRE. Vibrations aléatoires et analyses spectrales..Presses Polytechnique et Universitaire Romande. 1990

/30/ RAO S.S. The finite element method in engineering, second edition. ,pergamon press 1989.

/31/ ROBERTS J.B. and P.D SPANOS.Random vibrations and statistical linearization..John Wiley & sons 1990 .

/32/ ROGERS L. . Damping as design parameter. Air force Wright Aeronautics Laboratories ,Dayton OHIO.Review of mechanical engineering . January 1986.

/33/ RONALD G. ROSS JR : Synthesis of stiffness and mass matrices from experimental vibration modes : California Institute of technology. Paper No 710787 September 1971.

/34/ SNOEYS R., P. SAS, W. HEYLEN AND H. VAN DER AUWERAER.

Trends in experimental modal analysis .Mechanical Systems and Signal Processing 1 (1) , 5-27 ;1987.

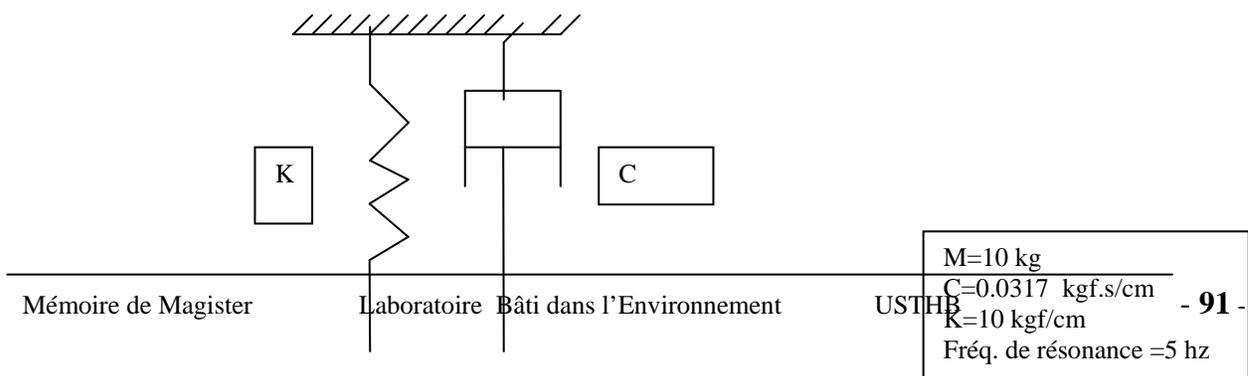
/35/ WILKINSON J. H. : The algebraic eigenvalue problem : Oxford science publications .1965.

/36/ WILSON E. AND N. PENZIEN : Evaluation of orthogonal damping matrices : International journal for numerical methods in engineering : vol. 4 PP 5-10 ;1972.

6 ANNEXES

6.1 systèmes analytiques

6.1.1 Système à un seul degré de liberté



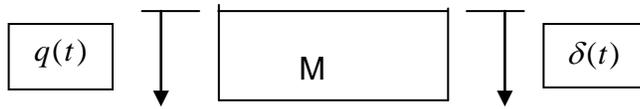


Figure 2 : Vibration libre dans l'espace des temps :

$\Delta t = .00998$ sec $\rho = 0,256$ points

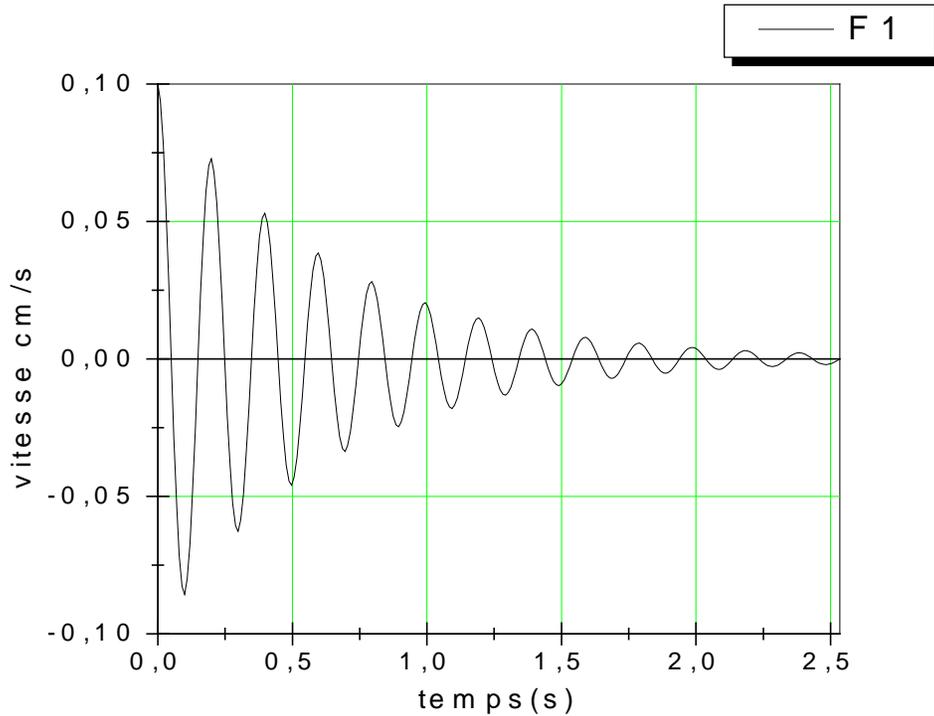
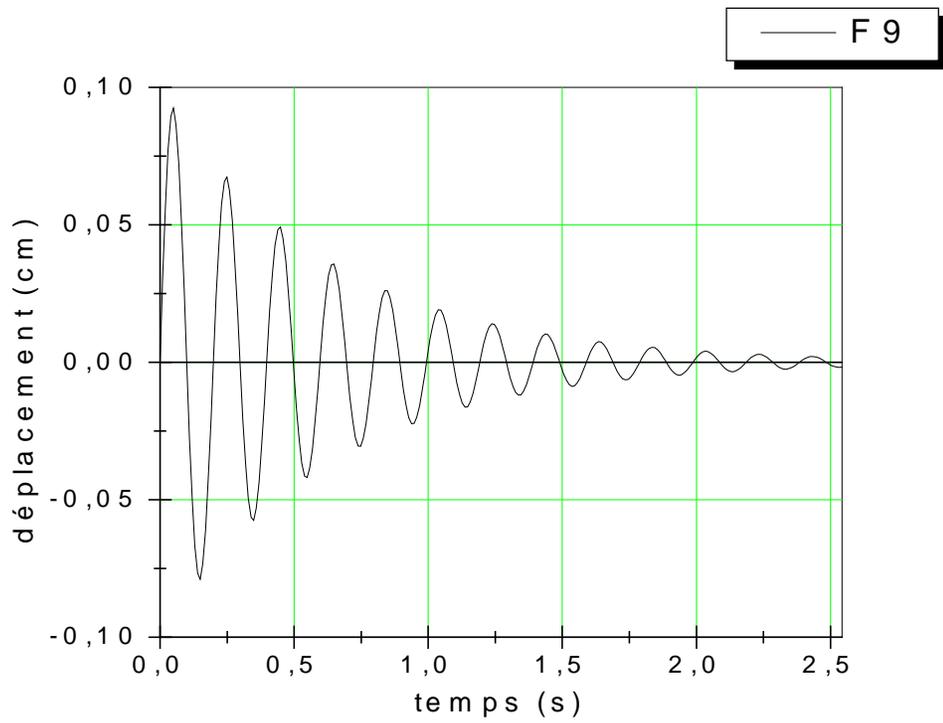


Figure 3 : réponse temporelle de vitesse $q_v(p\Delta t)$

Figure 4 : réponse temporelle de déplacement $q_d(p\Delta t)$



Vibration libre dans l'espace des fréquences : réponses de vitesses

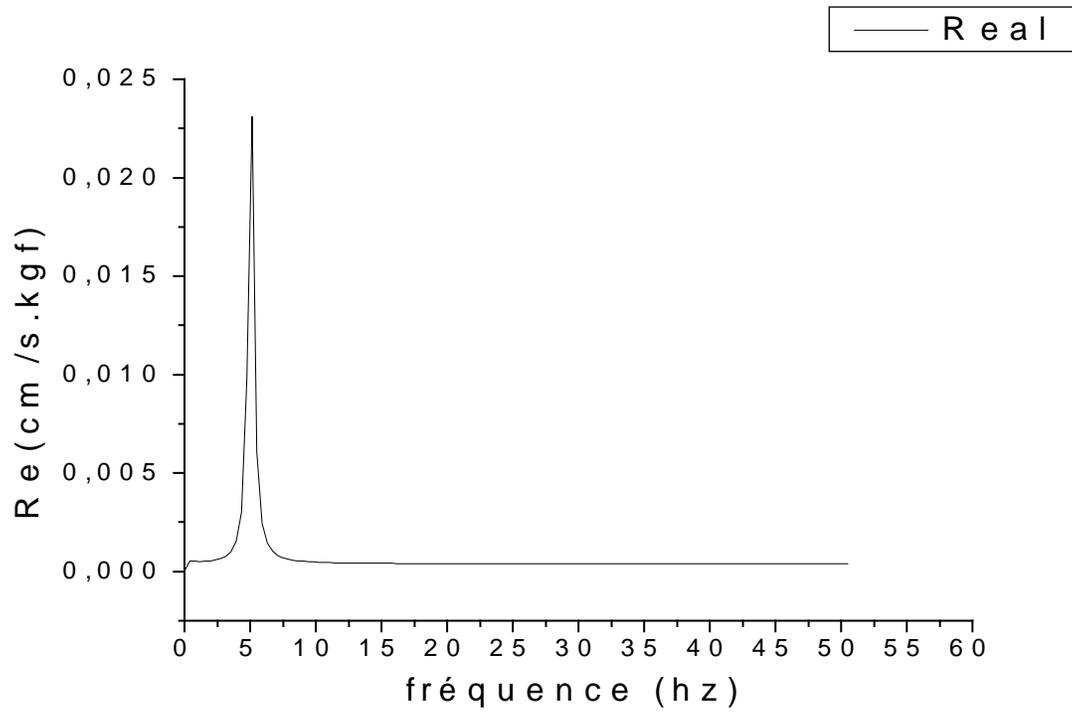


Figure 5 : composante réelle $Re(\omega)$ de la réponse en fréquence

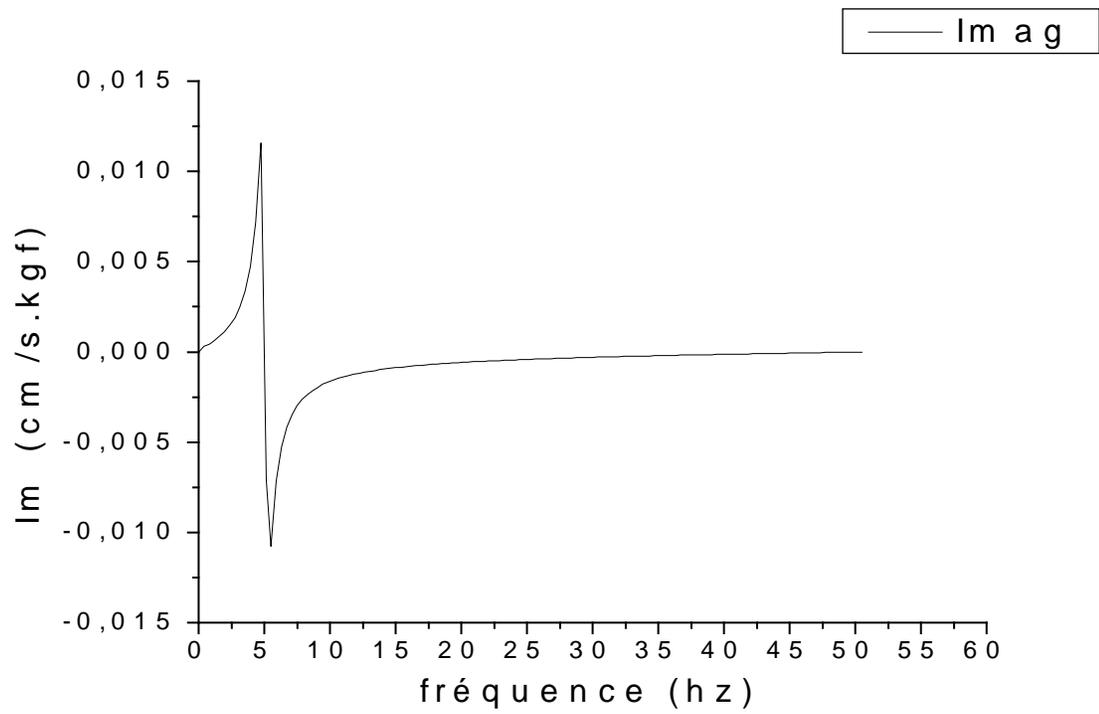


Figure 6 : composante imaginaire $Im(\omega)$ de la réponse en fréquence

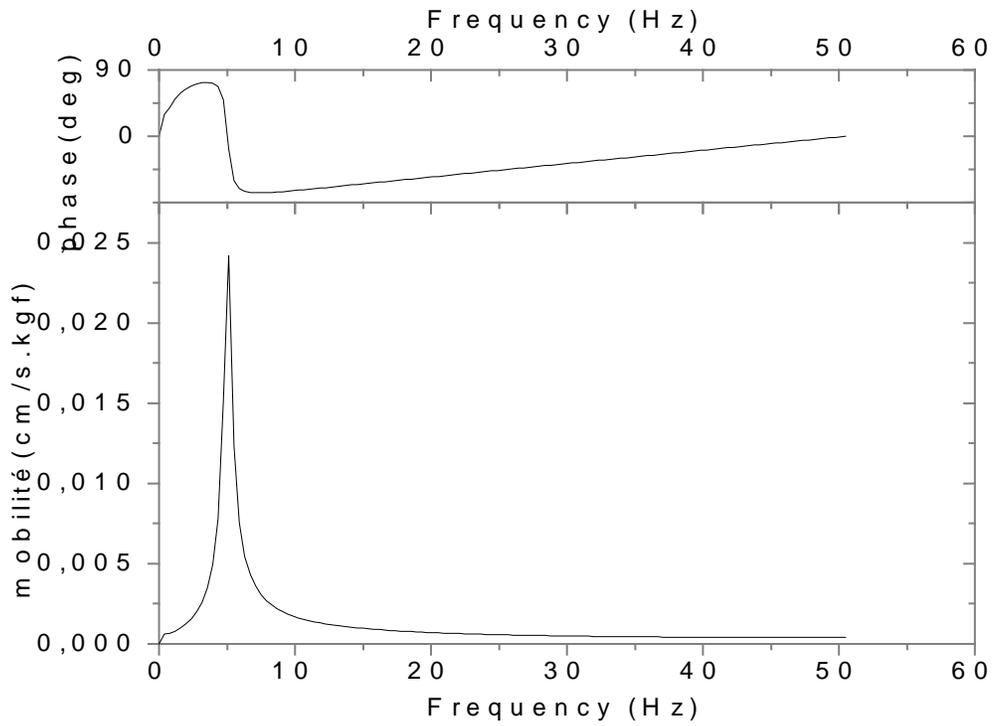
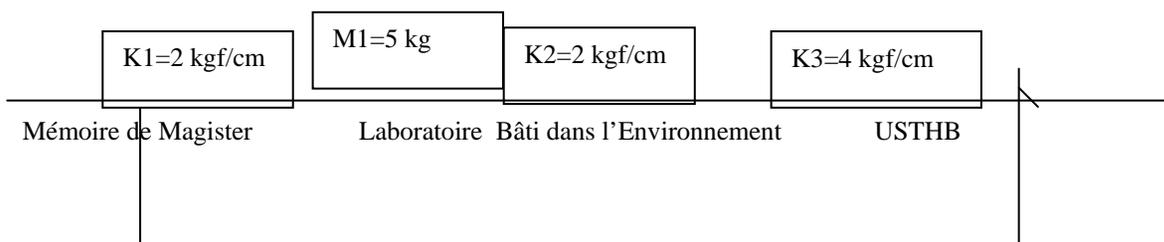


Figure 6a : mobilité (module de la réponse en fréquence)

0	.0000	.1000	.0000	.0000
1	.52703	.0992	.0000	.0003
2	1.0540	.0981	.0000	.0007
3	1.5811	.0673	.0001	.0015
4	2.1081	.0949	.0001	.0016
5	2.6351	.0929	.0002	.0023
6	3.1622	.0905	.0003	.0034
7	3.6892	.0879	.0008	.0051
8	4.2162	.0849	.0024	.0086
9	4.7433	.0817	.0138	.0165
10	5.2703	.0782	.0179	-.0163
11	5.7974	.0745	.0038	-.0103
12	6.3244	.0706	.0016	-.0068
13	6.8514	.0664	.0009	-.0051
14	7.3785	.0620	.0006	-.0041
15	7.9055	.0574	.0004	-.0035
16	8.4325	.0527	.0003	-.0030
17	8.9596	.0478	.0003	-.0026
18	9.4866	.0428	.0002	-.0024
19	10.0137	.0377	.0002	-.0022
20	10.5407	.0324	.0002	-.0020

Tableau 12 : valeurs de $H_v(p\Delta\omega)$ (composantes réelle et imaginaire) et $q_v(p\Delta t)$

6.1.2 Système à 2 degrés de liberté



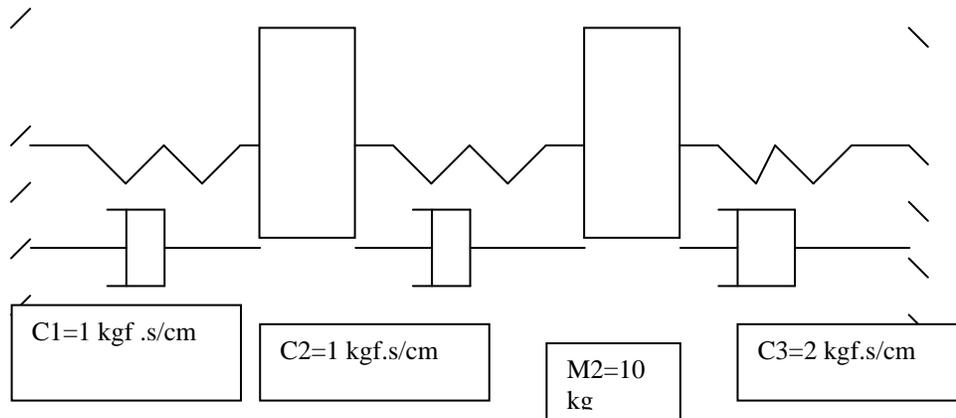


Figure 7 : système à deux degrés de liberté

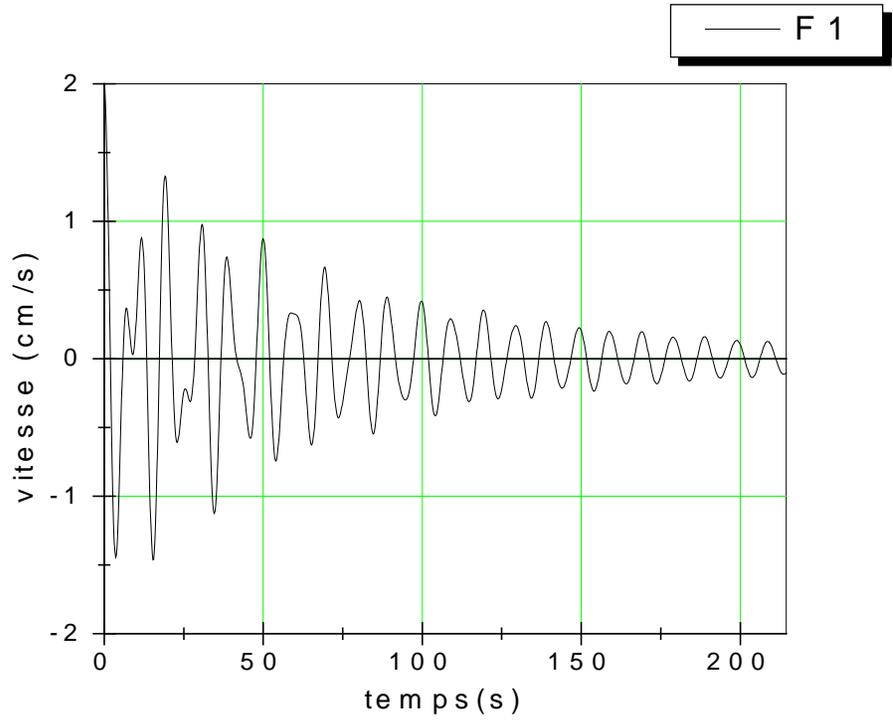
Matrice des masses $[M] = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ matrice des rigidités $[K] = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

Mode de déformation $[U] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$ valeurs propres $\lambda_1 = 0.4$ $\lambda_2 = 1.0$ (rd/s)²

$$f_1 = 0.100 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 0.159 \text{ Hz}$$

Figure 8 : vibration libre de vitesse $q_{11}^v(p\Delta t)$ (réponse en 1 excitation en 1)



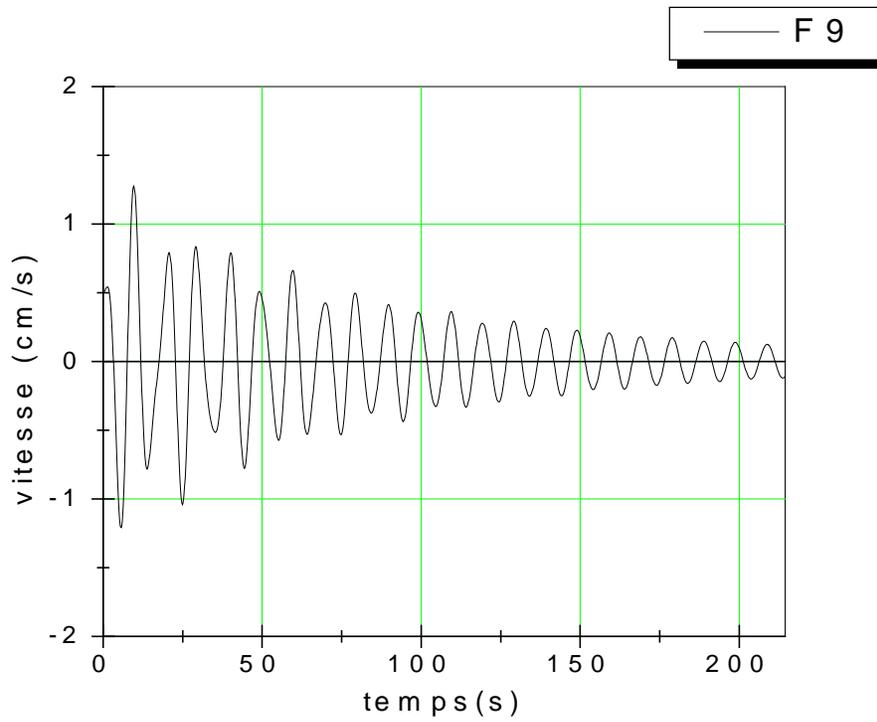


Figure 9 : vibration libre de vitesse $q_{12}^v(p\Delta t)$ (réponse en 1 excitation en 2)

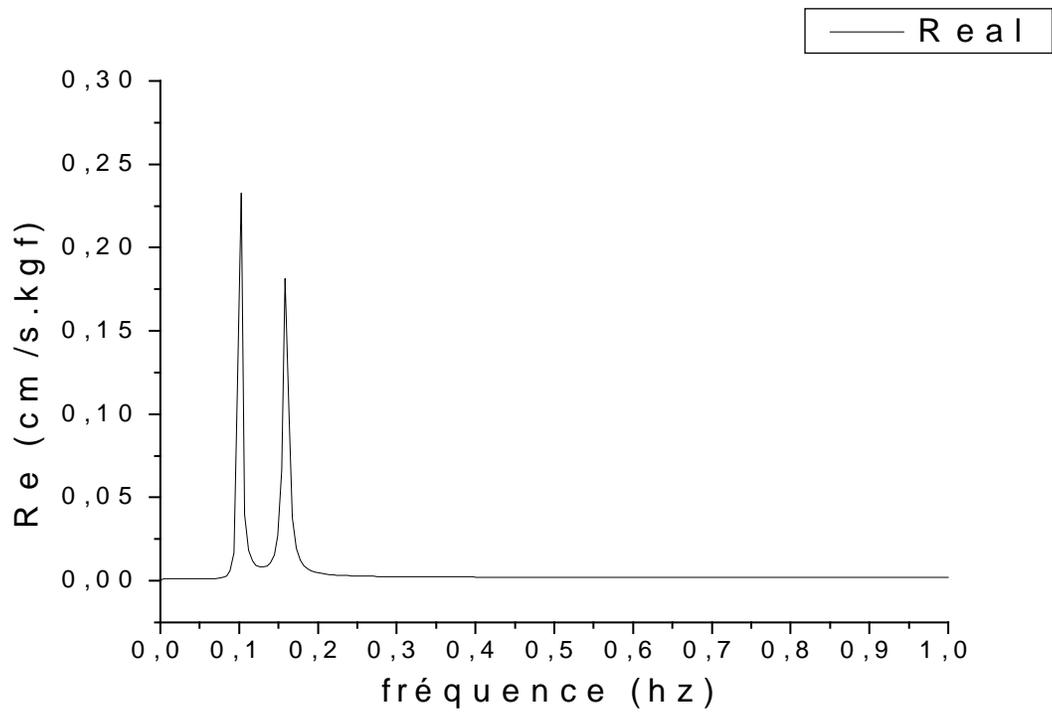


Figure 10 : composante réelle de $H_{11}^v(p\Delta\omega)$

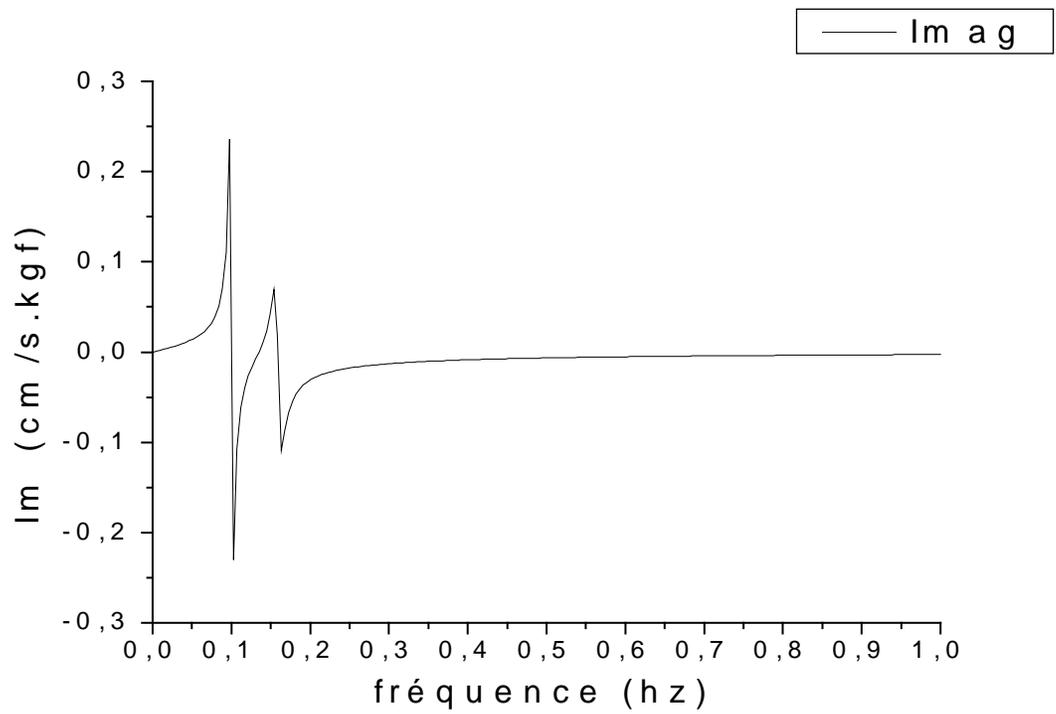


Figure 11 : composante imaginaire de $H_{11}^y(p\Delta\omega)$

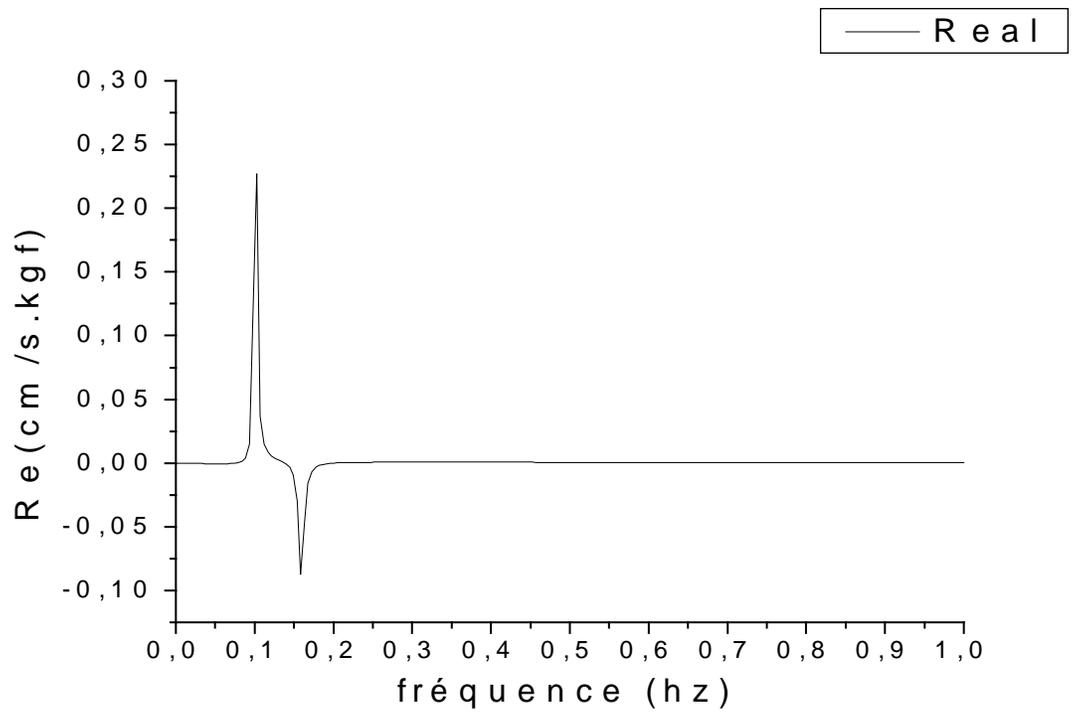


Figure 12 : composante réelle de $H_{12}^v(p\Delta\omega)$

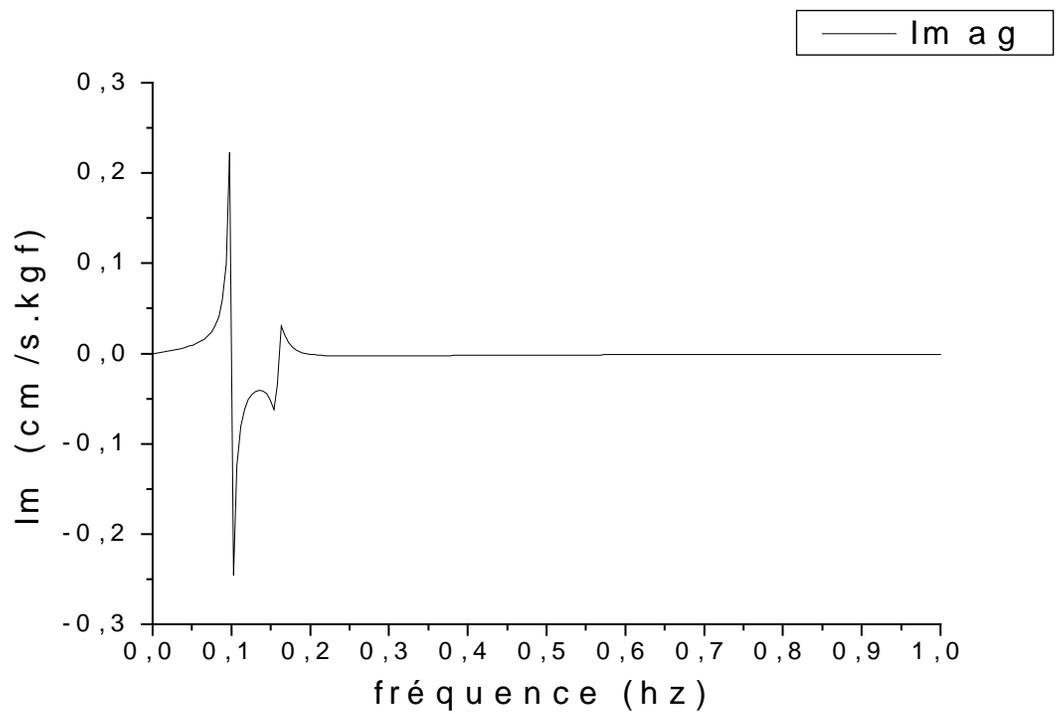


Figure 13 : composante imaginaire de $H_{12}^v(p\Delta\omega)$

Tableau 13 : Valeurs de la fonction de transfert $H_{11}^v(p\Delta\omega)$

Mémoire de Magister	Laboratoire Bâti dans l'Environnement	USTHB	- 104 -
---------------------	---------------------------------------	-------	---------

p	$fré q(Hz)$	$R_e(\omega)$	$Im(\omega)$	$ H_{11}^v(\omega) ^2$
25	.0932	.1418	.7793	.6274
26	.0969	.5164	1.3290	2.0331
27	.1007	3.3360	.0175	11.1298
28	.1044	.5238	-1.0516	1.3803
29	.1081	.1633	-.5292	.3067
30	.1119	.0850	-.3009	.0978
31	.1156	.0581	-.1696	.0321
32	.1193	.0475	-.0779	.0083
33	.1230	.0446	-.0041	.0020
34	.1268	.0466	.0627	.0061
35	.1305	.0532	.1296	.0196
36	.1342	.0656	.2025	.0453
37	.1380	.0871	.2886	.0909
38	.1417	.1249	.3981	.1741
39	.1454	.1969	.5481	.3392
40	.1492	.3526	.7673	.7132
41	.1529	.7574	1.0780	1.7359
42	.1566	1.9131	1.0866	4.8416
43	.1603	2.4334	-.8662	6.6722
44	.1641	1.0626	-1.4080	3.1117
45	.1678	.4839	-1.1237	1.4970

Tableau 14 : valeurs de la fonction de transfert $H_{12}^v(p\Delta\omega)$

p	$fré\ q(Hz)$	$R_e(\omega)$	$Im(\omega)$	$ H_{12}^v(\omega) ^2$
25	.0932	.1338	.6013	.3794
26	.0965	.5070	1.1356	1.5468
27	.1007	3.3249	-.1928	11.0927
28	.1044	.5106	-1.2813	1.9025
29	.1081	.1474	-.7807	.6313
30	.1119	.0658	-.5776	.3379
31	.1156	.0345	-.4755	.2273
32	.1193	.0183	-.4182	.1752
33	.1230	.0079	-.3854	.1486
34	.1268	-.0004	-.3685	.1358
35	.1305	-.0086	-.3640	.1325
36	.1342	-.0182	-.3707	.1377
37	.1380	-.0314	-.3898	.1529
38	.1417	-.0522	-.4248	.1832
39	.1454	-.0896	-.4833	.2411
40	.1492	-.1686	-.5788	.3635
41	.1529	-.3719	-.7220	.6597
42	.1566	-.9503	-.7159	1.4157
43	.1603	-1.2110	.2696	1.5397
44	.1641	-.5263	.5486	.5780
45	.1678	-.2375	.4139	.2277

6.2 méthode de génération du bruit à ajouter aux réponses analytiques

Le bruit ajouté aux réponses calculées est de distribution GAUSSIENNE de moyenne nulle et de variance unité.

Cependant le bruit généré par la fonction RND n'est pas normalisé. La procédure pour normaliser ce bruit est la suivante :

1) Générer un bruit appelé bruit ancien (ba)

$$ba = \text{RND}$$

Calculer sa moyenne

$$\text{averba} = \frac{\sum ba}{y} \quad y = \text{nbre de valeurs}$$

Calculer sa variance

$$\text{varba} = \frac{\sum (ba - \text{averba})^2}{y - 1}$$

2) Normaliser ba pour ban (bruit ancien normaliser)

$$\text{ban} = \frac{(ba - \text{averba})}{\text{sqr}(\text{varba})}$$

Calculer la moyenne

$$\text{averban} = \frac{\sum \text{ban}}{y}$$

Calculer la variance

$$\text{varban} = \frac{\sum (\text{ban} - \text{averban})^2}{y - 1}$$

3) calculer la moyenne des réponses

$$\text{averq} = \frac{\sum q}{y}$$

calculer la variance des réponses

$$\text{varq} = \frac{\sum (q - \text{averq})^2}{y - 1}$$

4) choisir un rapport réponses bruit SB

variant de 0 à 100% et calculer la variance du bruit à ajouter aux réponses.

$$\text{verb} = \text{var } q (10^{(SB / 20)})$$

5) calculer le bruit bn à ajouter aux réponses

$$\text{bn} = \text{ban} * \text{sqr}\left(\frac{\text{var } b}{\text{var } \text{bn}}\right)$$

6.3 identification de la matrice de l'amortissement dans le domaine temporel

6.3.1 Système à un seul degré de liberté

L'identification du coefficient de l'amortissement d'un système à un seul degré de liberté, sous amorti ; se fait à partir de la réponse de vitesse $q_v(t)$, en effet, calculant l'intégrale suivante :

$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} q_v(t) \cdot q_v(t) \cdot dt \quad \text{a3.1}$$

en remplaçant $q_v(t)$ par son expression (équation 10), nous avons :

$$E_v = \frac{1}{m^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\exp(-2\xi\omega_n t) (\cos^2(\omega_d t) - 2 \frac{\xi\omega_n}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \cos(\omega_d t) + \frac{\xi^2\omega_n^2}{\omega_d^2} \sin^2(\omega_d t)) \right] dt \quad \text{a3.2}$$

or
$$\sin^2(\omega_d t) = \frac{1 - \cos(2\omega_d t)}{2}$$

$$\cos^2(\omega_d t) = \frac{1 + \cos(2\omega_d t)}{2}$$

$$\sin(2\omega_d t) = 2 \sin(\omega_d t) \cos(\omega_d t)$$

en remplaçant dans l'équation (a3.2) et en séparant l'intégrale en trois parties, nous avons :

$$E_{v1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\exp(-2\xi\omega_n t) \left(1 + \frac{\xi^2\omega_n^2}{\omega_d^2} \right) \right] dt$$

$$E_{v2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\exp(-2\xi\omega_n t) \cos(2\omega_d t) \left(1 - \frac{\xi^2\omega_n^2}{\omega_d^2} \right) \right] dt$$

$$E_{v3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{-\xi\omega_n}{\omega_d} \exp(-2\xi\omega_n t) \sin(2\omega_d t) \right] dt$$

en évaluant les intégrales ci dessus d'après ABRAMOWITCH /26/ à savoir

$$\int_0^{+\infty} \exp(-at) \sin(bt) = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

une intégrale du type

, avec $a > 0$

$$\int_0^{+\infty} \exp(-at) \cos(bt) = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

, nous obtenons donc :

$$E_{v1} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\xi \omega_n} \left(1 + \frac{\xi^2 \omega_n^2}{\omega_d^2} \right) \right]$$

$$E_{v2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2\xi \omega_n}{4\xi^2 \omega_n^2 + 4\omega_d^2} \right) \cdot \left(1 - \frac{\xi^2 \omega_n^2}{\omega_d^2} \right) \right]$$

$$E_{v3} = \frac{-\xi \omega_n}{\omega_d} \left(\frac{2\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{4\xi^2 \omega_n^2 + 4\omega_n^2(1 - \xi^2)} \right)$$

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ représente la pulsation propre amortie

$$E_v = E_{v1} + E_{v2} + E_{v3}$$

$$E_v = \frac{1}{4\xi \omega_n} \left[\frac{\omega_n^2(1 - \xi^2) + \xi^2 \omega_n^2}{\omega_n^2(1 - \xi^2)} \right] + \frac{1}{4\xi} \left[\left(\frac{\omega_n^2(1 - \xi^2) - \xi^2 \omega_n^2}{\omega_n^2(1 - \xi^2)} \right) \left(\frac{\xi \omega_n}{\xi^2 \omega_n^2 + \omega_n^2(1 - \xi^2)} \right) \right] + \quad \text{a3.3}$$

$$\left[\frac{-\xi \omega_n}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \left(\frac{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{2(\xi^2 \omega_n^2 + \omega_n^2(1 - \xi^2))} \right) \right]$$

après simplification nous obtenons :

$$E_v = \frac{1}{4\xi\omega_n} \left[\frac{1}{1-\xi^2} + \frac{\xi^2(1-2\xi^2)}{1-\xi^2} - 2\xi^2 \right] \quad \text{a3.4}$$

en multipliant par $\frac{1}{m^2}$ $E_v = \frac{1}{m^2} \frac{1}{4\xi\omega_n}$ a3.5

finalement, $E_v = 2 \int_0^{+\infty} q_v(t) \cdot q_v(t) \cdot dt = \frac{1}{m \cdot c}$ a3.6

l'équation (a3.6) est le résultat recherché permettant de déterminer le coefficient de l'amortissement.

$$c = \left[2m \int_0^{+\infty} q_v(t) \cdot q_v(t) \cdot dt \right]^{-1} \quad \text{a3.7}$$

La même démarche s'applique dans le cas où la réponse de déplacement serait considérée et nous avons :

$$q_d(t) = \frac{1}{m\omega_d} \exp(-\xi\omega_n t) \sin(\omega_d t) \quad \text{a3.8}$$

$$E_d = 2 \int_0^{+\infty} q_d(t) \cdot q_d(t) \cdot dt = \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{1}{4m^2\xi\omega_n} = \frac{1}{2kc} \quad \text{a3.9}$$

6.3.2 système à plusieurs degrés de liberté

Le développement de la détermination de la matrice $[C]$ de l'amortissement est présenté directement dans les sections 2 et 3.

On considère que chaque mode de vibration est assimilable à un degré de liberté sans interaction avec les autres modes, de ce fait la matrice des réponses est diagonale. (équation 11).

L'identification de la matrice $[C]$ de l'amortissement, est donné par l'équation (2.46).

6.4 Fonction de transfert

6.4.1 système à un seul degré de liberté

Le modèle général d'un système linéaire soumis à une excitation est représenté par la figure 15.

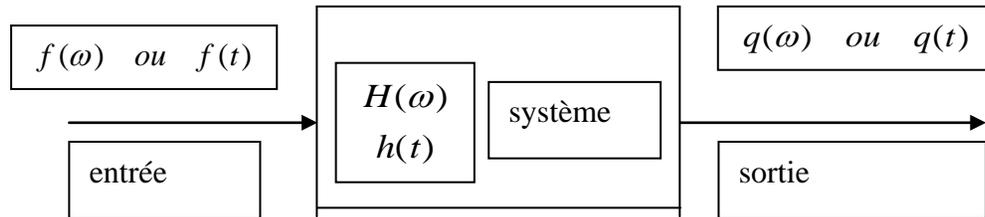


Figure 14 : Schéma d'un système linéaire

Généralement, les techniques expérimentales utilisées pour l'identification des caractéristiques dynamiques d'une structure, consistent à exciter la structure en des points précis et d'en mesurer les fonctions de transfert en d'autres points. La fonction de transfert dans laquelle sont cachées les caractéristiques dynamiques de la structure, est devenue la méthode la plus répandue pour extraire les paramètres modaux à l'aide d'un processus appelé "analyse modale".

Par définition, la fonction de transfert est égale au rapport entre le signal d'entrée et le signal de sortie, exprimée dans l'espace des fréquences.

$$H(\omega) = \frac{q(\omega)}{f(\omega)} \quad \text{a4.1}$$

$$q(t) = f(t) \oplus h(t) \quad \text{a4.2}$$

le signe \oplus désigne la convolution entre $f(t)$ et $h(t)$

$H(\omega)$: la fonction de transfert

$q(\omega)$: transformé de FOURIER du signal de sortie

$f(\omega)$: transformée de FOURIER du signal d'entrée

ω :variable désignant la pulsation et liée à la fréquence

$f(t)$:force d'excitation dans l'espace temporel

$q(t)$:réponse dans l'espace temporel

$h(t)$:réponse temporelle à la fonction de DIRAC $\delta(t)$

6.4.2 système à plusieurs degrés de liberté

La figure 15 caractérise un système à une seule entrée (excitation) $f(t)$ et une seule sortie (réponse) $q(t)$. Un tel système est appelé " SISO system " (single input single output system).

Dans le cas d'un système à plusieurs degrés de liberté nous avons en général plusieurs entrées et plusieurs sorties, un tel système est appelé " MIMO system " (multiple input multiple outputs system). La figure 16 représente un système " MIMO ".

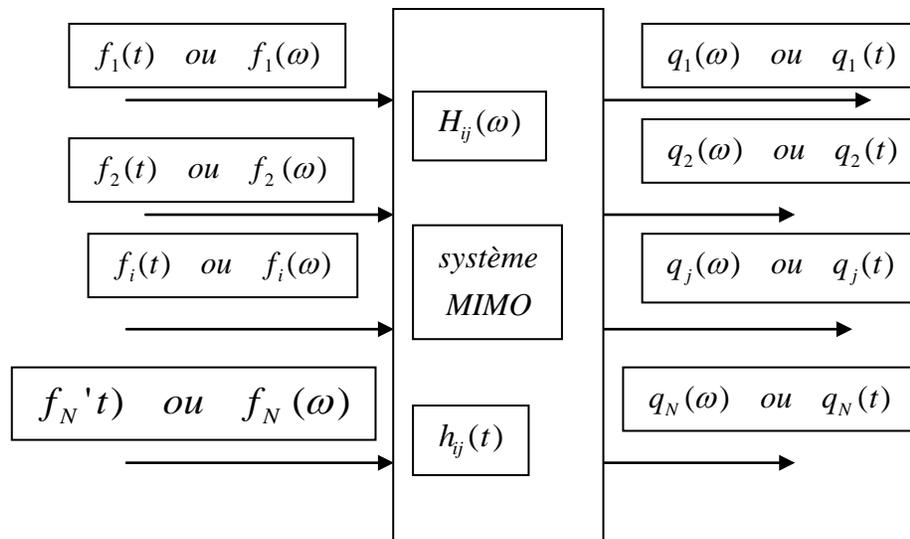


Figure 15 : système MIMO

$f_i(t)$:force d'excitation au point i

$q_j(t)$:réponse au point j

$H_{ij}(\omega)$:fonction de transfert correspondant à la réponse $j=1, \dots, N$ au point d'excitation $i=1, \dots, N$

$h_{ij}(t)$:réponse impulsionnelle correspondant à la réponse au point $j = 1, \dots, N$ au point d'excitation $i = 1, \dots, N$

N est le nombre de degrés de liberté. Pour toutes les combinaisons de i et j , nous pouvons former les matrices des fonctions de transfert $[H_{ij}(\omega)]$ et des réponses impulsionnelles $[h_{ij}(t)]$ ou $[q_{ij}(t)]$

6.4.3 identification de la matrice de l'amortissement d'un système à plusieurs degrés de liberté

L'identification du coefficient de l'amortissement C est possible grâce au théorème de PARSEVAL qui stipule que l'énergie contenue dans un signal (réponse) représenté dans l'espace des temps est distribuée de la même manière dans l'espace des fréquences. ,

En effet, évaluons l'intégrale suivante en considérant les réponses de vitesses, nous avons :

$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} q_v(t) \cdot q_v(t) \cdot dt \quad \text{a4.3}$$

Des transformés de FOURIER, nous avons :

$$H_v(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_v(t) \exp(-i\omega t) dt$$

et a4.4

$$q_v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_v(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

où i est un complexe tel que $\sqrt{i^2} = -1$

En reprenant l'équation (a4.3) , nous avons :

$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} q_v(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \right] dt \quad \text{a4.5}$$

en changeant l'ordre d'intégration l'équation (a4.5) devient :

$$E_v = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_v(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} q_v(t) \exp(i\omega t) dt \right] d\omega \quad \text{a4.6}$$

or d'après la transformé de FOURIER nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q_v(t) \exp(i\omega t) dt = H_v(-\omega) = \overline{H_v(\omega)} \quad \text{a4.7}$$

où $\overline{H_v(\omega)}$ est le complexe conjugué de $H_v(\omega)$, de ce fait nous obtenons :

$$E_v = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_v(\omega)|^2 d\omega \quad \text{a4.8}$$

Dans l'équation (a4.7), $H_v(\omega) = \frac{i\omega}{-\omega^2 m + i\omega c + k}$ représente la fonction de transfert (mobilité) qui n'est autre que la transformé de FOURIER de la réponse de vitesse $q_v(t)$, vu que nous avons une excitation impulsionnelle du type fonction de DIRAC $\delta(t)$ (annexe 6.5).

L'équation (a4.6) peut être évaluée par la méthode des résidus ou par les résultats donnés par NEWLAND /24/, à savoir :

$$2\pi E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_v(\omega)|^2 d\omega = \frac{\pi}{mc} \quad \text{a4.8}$$

Le coefficient de l'amortissement est évalué à partir de l'équation (a4.8) :

$$c = \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} |H_v(\omega)|^2 d\omega \right]^{-1} \quad \text{a4.9}$$

le résultat de l'équation (a4.9) est le résultat recherché pour un système à un seul degré de liberté.

6.4.3.1 Matrices des réponses impulsionnelles et fonction de transfert

L'identification de la matrice de l'amortissement d'un système à plusieurs degrés de liberté dans l'espace des fréquences a été développée en sections 2 et 3 en considérant un système de réponses découplé. En effet, la réponse mesurée au point j est la somme des contributions des réponses des différents modes de vibrations dues à l'excitation au niveau du point d'excitation i .

En appliquant le théorème de superposition et le théorème de convolution /19/ pour le système de la figure 15, nous avons la relation entre les réponses et les excitations.

Dans l'espace des temps nous avons :

$$q_1(t) = f_1(t) \oplus h_{11}(t) + f_2(t) \oplus h_{12}(t) + \dots + f_i(t) \oplus h_{1i}(t) + \dots + f_N(t) \oplus h_{1N}(t)$$

$$q_2(t) = f_1(t) \oplus h_{21}(t) + f_2(t) \oplus h_{22}(t) + \dots + f_i(t) \oplus h_{2i}(t) + \dots + f_N(t) \oplus h_{2N}(t)$$

.....

$$q_N(t) = f_1(t) \oplus h_{N1}(t) + f_2(t) \oplus h_{N2}(t) + \dots + f_i(t) \oplus h_{Ni}(t) + \dots + f_N(t) \oplus h_{NN}(t)$$

a4.10

En prenons les transformés de FOURIER de $q_1(t)$ $q_2(t)$,..., $q_N(t)$ (équation a4.10), nous avons :

$$q_1(\omega) = f_1(\omega).H_{11}(\omega) + f_2(\omega).H_{12}(\omega)+\dots+f_i(\omega).H_{1i}(\omega)+\dots+f_N(\omega).H_{1N}(\omega)$$

$$q_2(\omega) = f_1(\omega).H_{21}(\omega) + f_2(\omega).H_{22}(\omega)+\dots+f_i(\omega).H_{2i}(\omega)+\dots+f_N(\omega).H_{2N}(\omega)$$

.....

$$q_N(\omega) = f_1(\omega).H_{N1}(\omega) + f_2(\omega).H_{N2}(\omega)+\dots+f_i(\omega).H_{Ni}(\omega)+\dots+f_N(\omega).H_{NN}(\omega)$$

a4.11

sous forme matricielle les équations (a4.10) et (a4.11) s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ \cdot \\ q_i(t) \\ \cdot \\ q_N(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & \cdot & h_{1i}(t) & \cdot & h_{1N}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{21}(t) & \cdot & h_{2i}(t) & \cdot & h_{2N}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{N1}(t) & \cdot & h_{Ni}(t) & \cdot & h_{NN}(t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ \cdot \\ f_i(t) \\ \cdot \\ f_N(t) \end{Bmatrix} \quad \text{a4.12}$$

$$\begin{Bmatrix} q_1(\omega) \\ \cdot \\ q_i(\omega) \\ \cdot \\ q_N(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & \cdot & H_{1i}(\omega) & \cdot & H_{1N}(\omega) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{21}(\omega) & \cdot & H_{2i}(\omega) & \cdot & H_{2N}(\omega) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{N1}(\omega) & \cdot & H_{Ni}(\omega) & \cdot & H_{NN}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1(\omega) \\ \cdot \\ f_i(\omega) \\ \cdot \\ f_N(\omega) \end{Bmatrix} \quad \text{a4.13}$$

Des équations (a4.12) et (a4.13) nous tirons les matrices des réponses impulsionnelles $[h_{ij}(t)]$ et des fonctions de transfert $[H_{ij}(\omega)]$.

6.4.3.2 Théorème de PARSEVAL pour un système à plusieurs degrés de liberté

considérons l'équation (2.42) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
& [U][diag(q_{vr}(t))][diag(q_{vr}(t))][U]^T[M] = \\
& = [U][diag(q_{vr}(t))]\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[diag(H_{vr}(\omega))]\exp(-i\omega t)d\omega\right\}[U]^T[M]
\end{aligned} \tag{a4.14}$$

si nous intégrons à droite et à gauche sur l'intervalle $-\infty, +\infty$ et en changeant l'ordre d'intégration l'équation (a4.14) s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty}[U][diag(q_{vr}(t))][diag(q_{vr}(t))][U]^T[M]dt = \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty}[U][diag(H_{vr}(\omega))]\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[diag(q_{vr}(t))]\exp(i\omega t)dt\right\}d\omega[U]^T[M]
\end{aligned} \tag{a4.15}$$

par analogie avec les équations (a4.6) et (a4.7) , nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[U][diag(q_{vr}(t))][diag(q_{vr}(t))][U]^T[M]dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[U][diag(H_{vr}(\omega))][diag(H_{vr}(-\omega))]d\omega[U]^T[M] \tag{a4.16}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[U][diag(q_{vr}(t))][diag(q_{vr}(t))][U]^T[M]dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[U][diag(|H_{vr}(\omega)|^2)]d\omega[U]^T[M] \tag{a4.17}$$

Le résultat de l'équation (a4.17) est utilisé pour évaluer la matrice de l'amortissement dans le domaine des fréquences.

La même technique est utilisée si les réponses de déplacements sont considérées.

6.5 Signal de force d'un impact, fonction de DIRAC.

Théoriquement, on réfère l'impact à la fonction de DIRAC, définie par la relation a5.1 et dont le spectre, donné par la figure 12., possède une amplitude unité s'étendant sur une fréquence infinie est :

$$\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \text{pour } t = t_0 + \tau \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{a5.1}$$

En pratique, on obtient un impact de durée t_i non nulle et dont le spectre est limité à la fréquence maximale f_M (figure 13). La fréquence dépend des caractéristiques du marteau utilisé pour produire l'excitation.

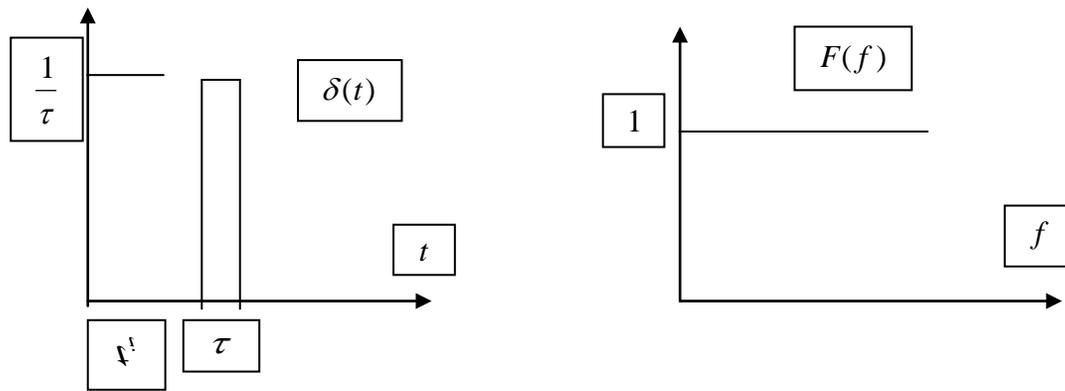


Figure 16 : Fonction de DIRAC et son spectre

L'aire sous la courbe $\delta(t)$ tend vers 1 quand $\tau \rightarrow 0$

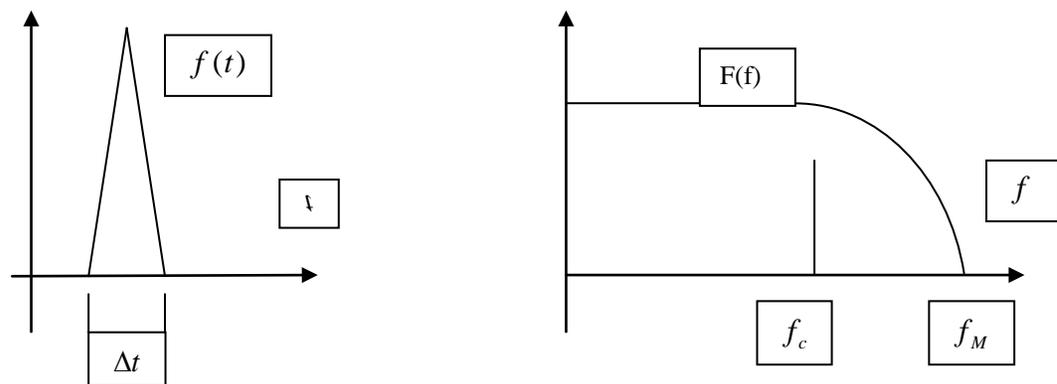


Figure 17 : Forme typique d'une excitation par impact et son spectre

f_c représente la fréquence à partir de laquelle l'amplitude commence à diminuer (fréquence de coupure).

$F(f) = 1$, est la transformée de FOURIER de la fonction de DIRAC $\delta(t)$.

f_c = fréquence de coupure

f_M = fréquence maximale

f = fréquence

t = temps

La gamme des fréquences excitées dépend de la nature de l'embout constituant le marteau d'impact ainsi que de la masse additionnelle qui a pour effet d'élargir cette gamme.

6.6 Récurrence de M. GAYLARD.

Dans notre travail, la matrice de masses et les réponses non mesurées, nécessaire pour l'application de la méthode proposée, sont identifiées à partir du travail fait par M.GAYLARD /15/ et qui consiste en la récurrence suivante :

$$\cos((r + 2p)\omega t) = 2 \cos(p\omega t) \cos((r + p)\omega t) - \cos(r\omega t) \quad \text{a5.1}$$

Dans le cas où l'amortissement serait négligé, la réponse impulsionnelle est :

$$q_v(r\Delta t) = \frac{1}{m} \cos(r\omega_d \Delta t) \quad , \text{ avec } q_v(0) = m^{-1} \quad \text{a6.2}$$

l'équation (a6.2) a été généralisée sous forme matricielle par GAYLARD /22/ pour donner :

$$\left[2 \cos(p[A]^{1/2} \Delta t) \right] [q_v((r+p)\Delta t)] = [q((r+2p)\Delta t)] + [q_v(r\Delta t)] \quad \text{a6.3}$$

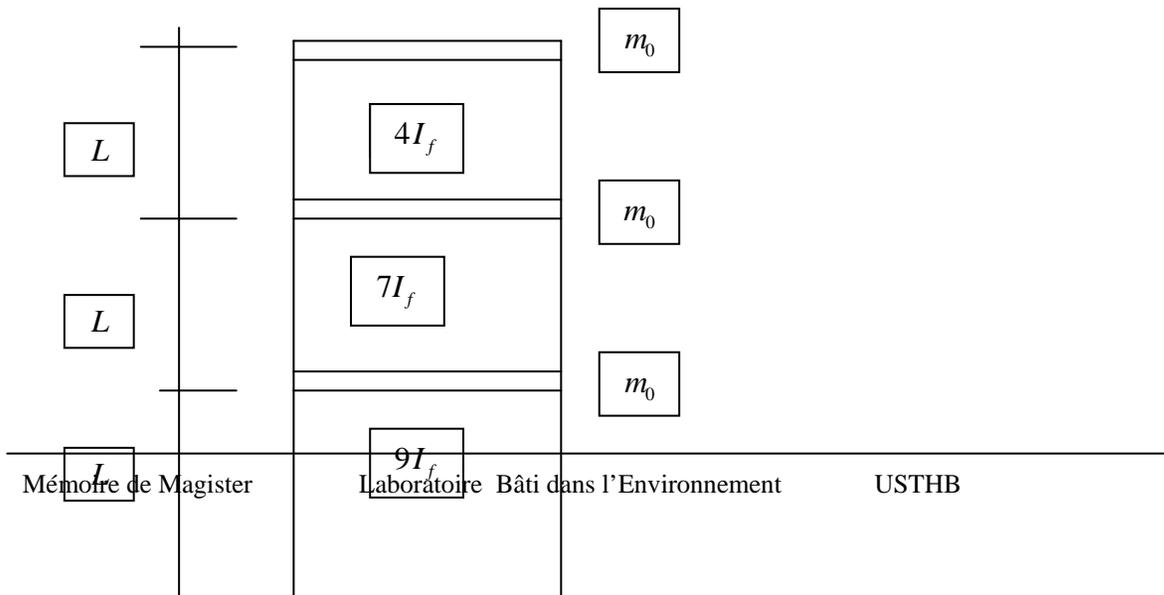
les scalaires r et p représentent les réponses à des temps décalés. (time shifts)
 GAYLARD /22/ a ensuite généralisé l'équation (a6.3) en considérant la présence de l'amortissement et a aboutit à la récurrence suivante :

$$[A_q][q_v(r\Delta t)] = [q_v(r+q)\Delta t] \quad \text{a6.4}$$

et que nous avons utilisé dans la section 2.5.3 pour identifier la matrice de masses et les réponses non mesurées avec ce que nous avons appelé la récurrence inverse.
 Nous avons introduit l'essentiel de la méthode de GAYLARD /15/ ,la signification des scalaires r et q ,et le développement de la récurrence inverse sont donnée en section 2.5.3. L'ordre des matrices de l'équation (a6.4) est amplement discuté aussi par GAYLARD./15/

6.7 Exemple à quatre degrés de liberté

Cet exemple est pris de la référence /16/.Le modèle de bâtiment choisi est celui composé de portiques ayant un comportement de cisaillement. Il s'agit d'un bâtiment à quatre étages et d'un seul degré de liberté par étage. La figure a7.1 montre les caractéristiques du bâtiment.



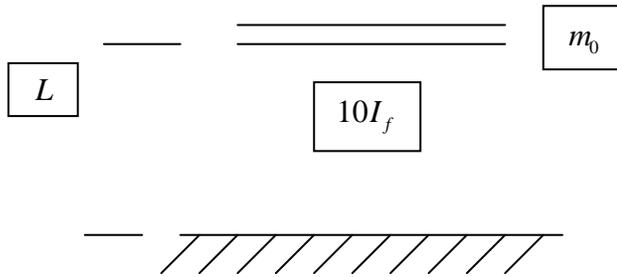


Figure 18 : bâtiment de portique à quatre étages.

La matrice de rigidité $[K] = \frac{24.E.I_f}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 19 & -9 & 0 & 0 \\ & 16 & -7 & 0 \\ & sym & 11 & -4 \\ & & & 4 \end{bmatrix}$

$E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ (module d'YOUNG)

$L = 300 \text{ cm}$ (hauteur d'étage)

$I_f = 67500 \text{ cm}^4$ (inertie)

Pour $\frac{24.E.I_f}{L^3} = 12600 \text{ kgf/cm}$, ce qui donne :

$[K] = 10^3 \begin{bmatrix} 228 & -108 & 0 & 0 \\ & 192 & -84 & 0 \\ & sym & 132 & -48 \\ & & & 48 \end{bmatrix} \text{ kgf/cm}$

La matrice de masse est : $[M] = m_0 [I] = \begin{bmatrix} 48.634 & 0 & 0 & 0 \\ & 48.634 & 0 & 0 \\ & sym & 48.634 & 0 \\ & & & 48.634 \end{bmatrix} \text{ kgf.s}^2/\text{cm}$

La matrice de l'amortissement est déterminée à partir des coefficients de 5% de l'amortissement critique associés à chaque mode de vibration.

La matrice de l'amortissement obtenue est la suivante :

$$[C] = \begin{bmatrix} 320.275 & -89.847 & -14.570 & -5.119 \\ & 278.995 & -85.105 & -15.007 \\ & \text{sym} & 228.357 & -67.778 \\ & & & 136.011 \end{bmatrix} \quad \text{kgf.s/cm}$$

La solution du problème aux valeurs propres $[M^{-1}K - \omega_i^2 I]\{U_i\} = 0$ donne les valeurs propres suivantes : et les vecteurs propres :

$$\begin{array}{ll} \omega_1^2 = 247 & f_1 = 2.50 \\ \omega_2^2 = 1483 & f_2 = 6.13 \\ \omega_3^2 = 3724 & f_3 = 9.72 \\ \omega_4^2 = 6930 & f_4 = 13.25 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(rd/s)}^2: \\ \text{hz} \end{array} \quad [U] = \begin{bmatrix} 0.18251 & 0.40452 & 0.58835 & 0.67593 \\ 0.36511 & 0.58428 & 0.26149 & -0.67593 \\ 0.54779 & 0.31466 & -0.71909 & 0.28968 \\ 0.73028 & -0.62926 & 0.26149 & -0.04828 \end{bmatrix}$$

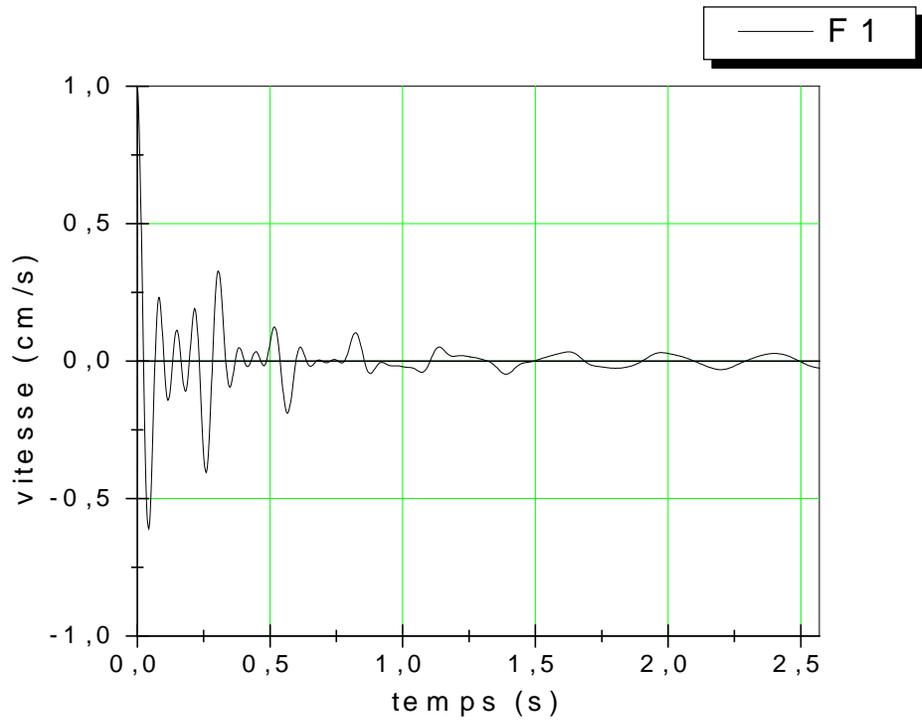


Figure 19 : réponse impulsionnelle $q_{11}^v(p\Delta t)$

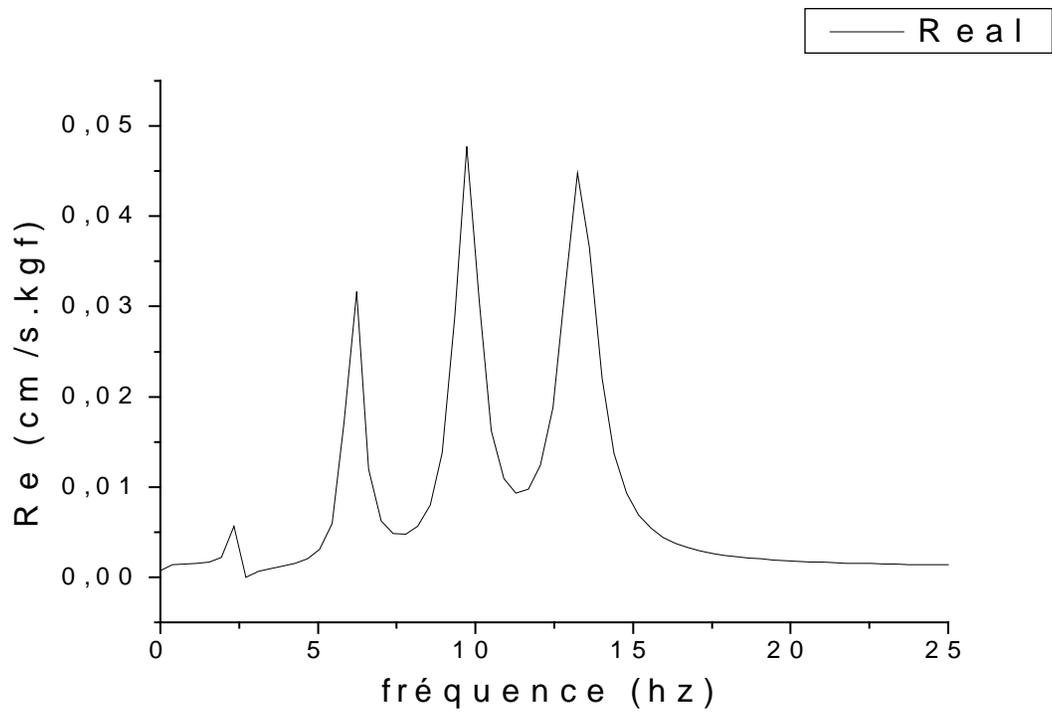


Figure 20 : composante réelle de $H_{11}(p\Delta\omega)$

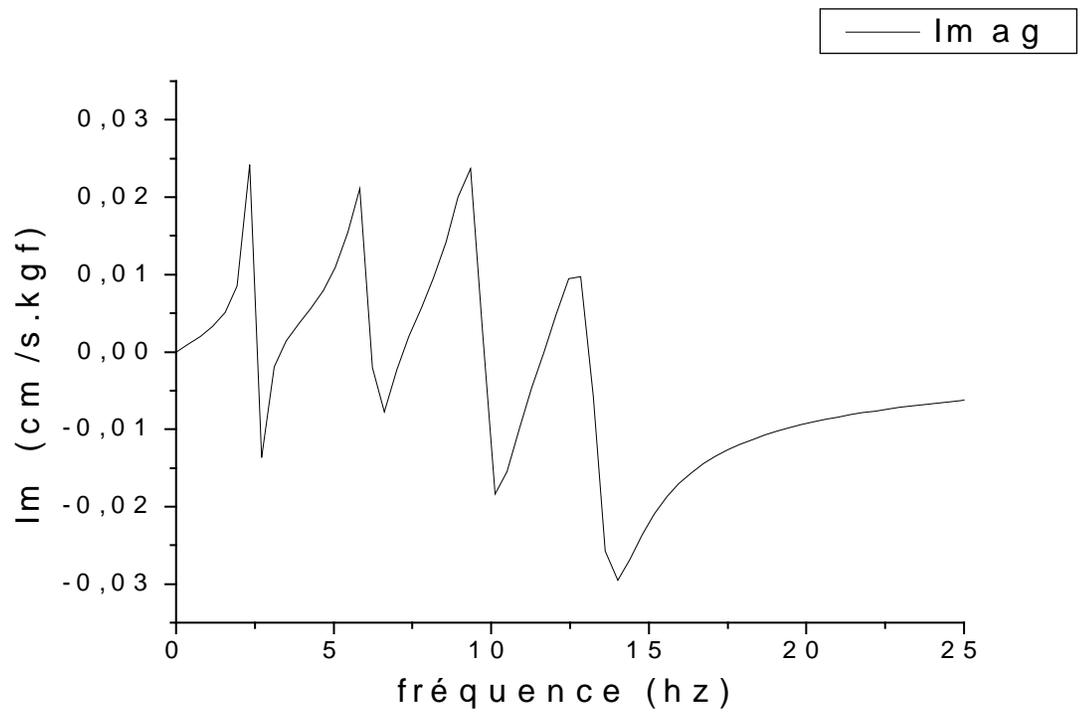


Figure 21 : composante imaginaire de $H_{11}(p\Delta\omega)$

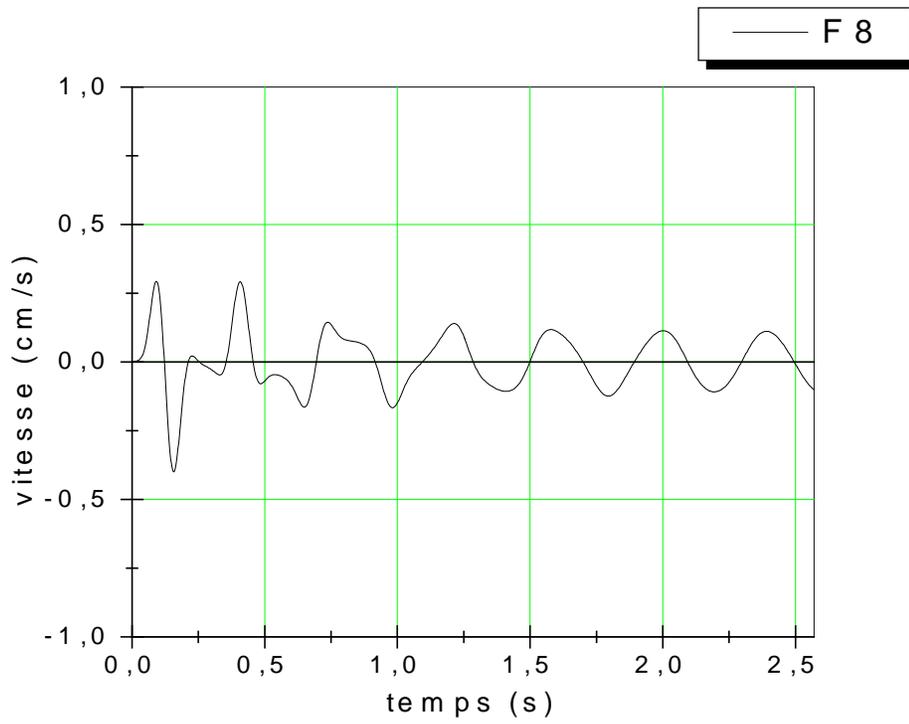


Figure 22 : réponse impulsionnelle $q_{14}^v(p\Delta t)$

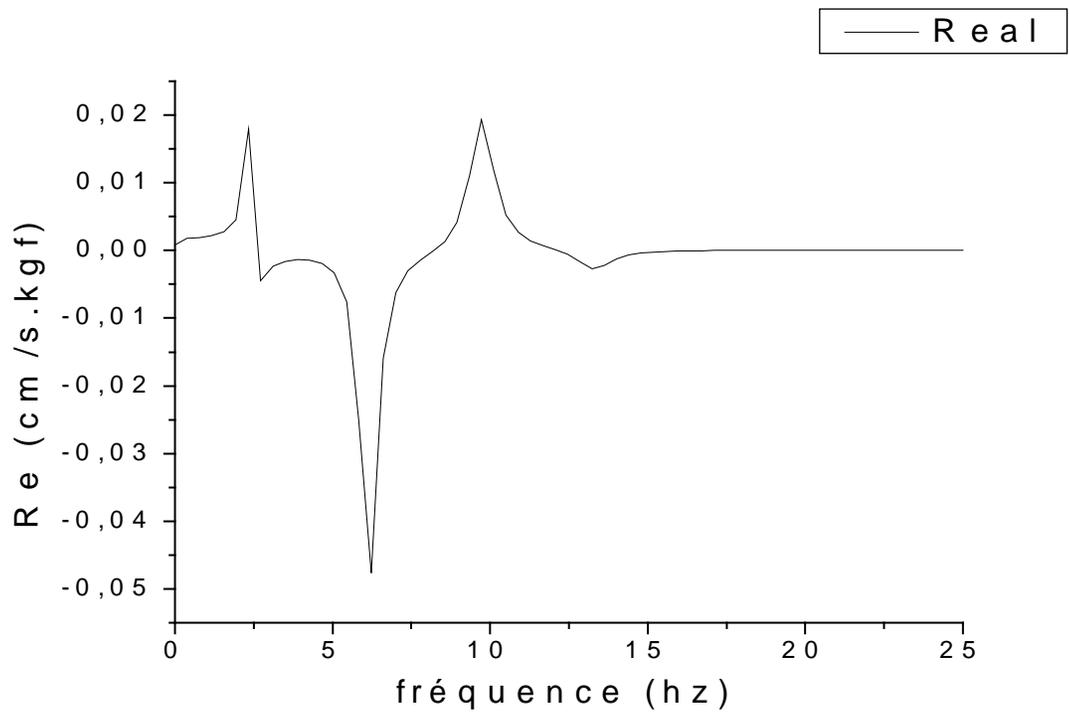


Figure 23 : composante réelle de $H_{14}^v(p\Delta\omega)$

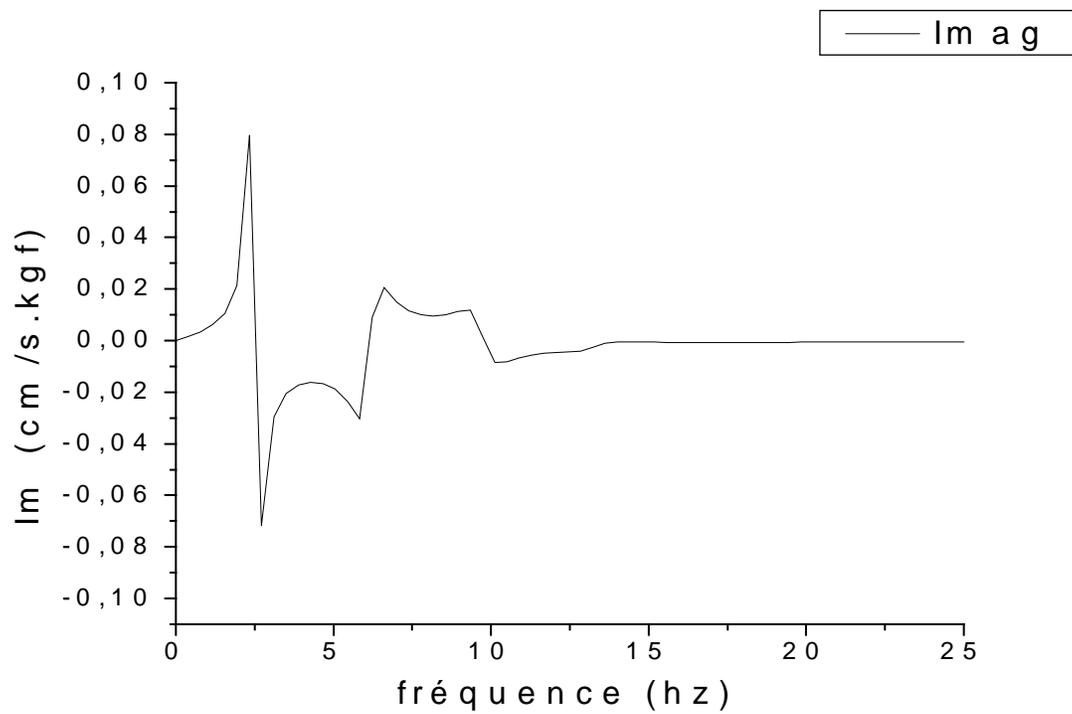
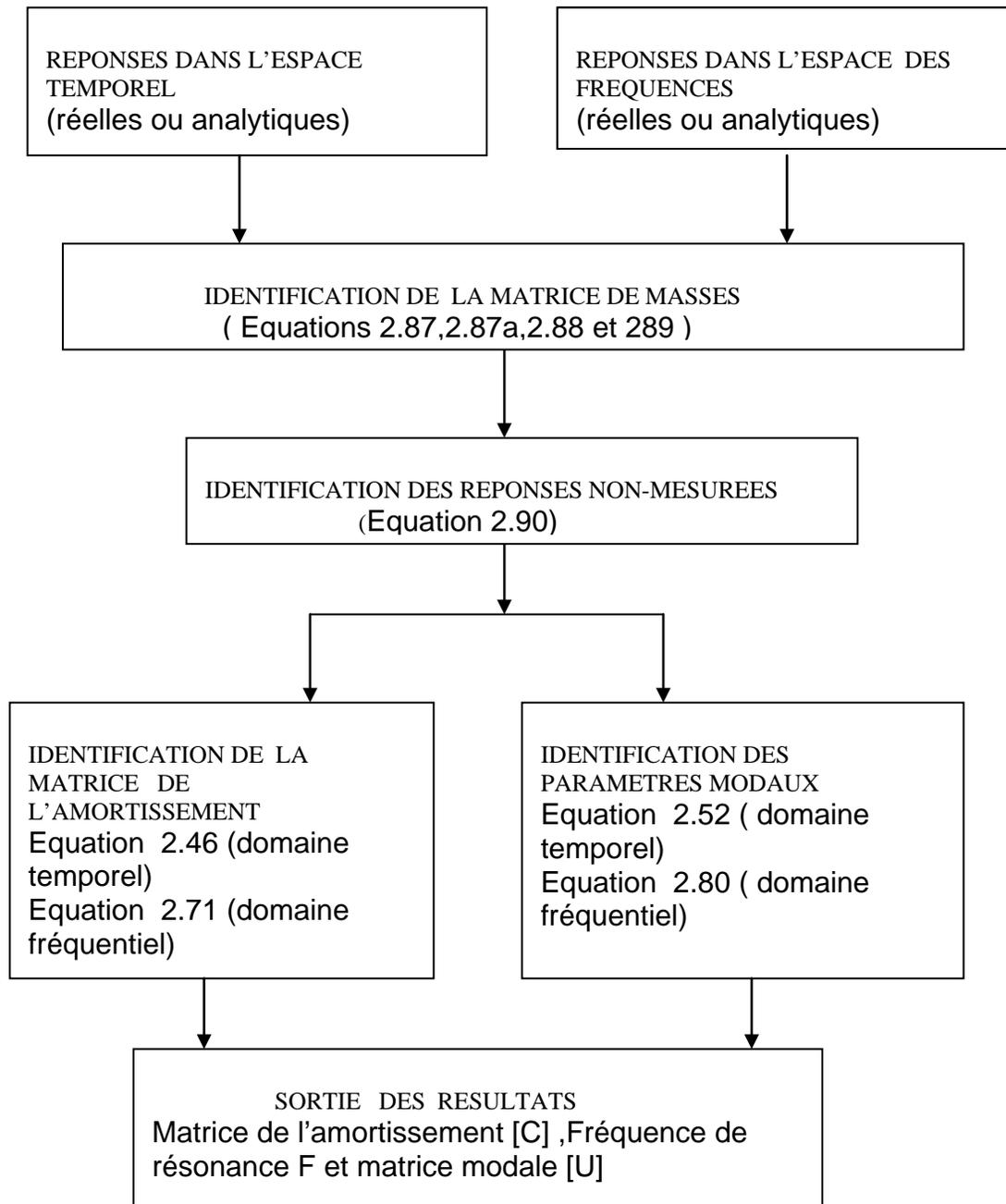


Figure 24 : composante imaginaire de $H_{14}^v(p\Delta\omega)$

6.8 organigramme de l'application de la TIM

Dans cette annexe, nous présentons la structure du programme informatique que nous avons développé, pour l'application de la méthode d'identification proposée. Il est

composé de quatre modules indépendants, qui partagent la base de données créée et stockée. La structure de ce programme est la suivante :



6.9 publication de notre travail de recherche