

N° d'ordre : 27/2010-M/MT

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté des Mathématiques

Département de Recherche Opérationnelle



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Option : Mathématiques Discrètes et Optimisation

Par : **BENMEZIANE Dadi**

Sujet

**Problèmes et propriétés métriques
dans les graphes**

Soutenu publiquement le : 22/06/2010 Devant le jury :

Mme I. Bouchemakh	Professeur	à l'USTHB	Présidente
Mr M. Aïder	Professeur	à l'USTHB	Encadreur
Mr A. Semri	Maître de Conférences classe A	à l'USTHB	Examineur
Mme K. Meslem	Maître de Conférences classe B	à l'USTHB	Invitée

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance à mon directeur de thèse, le professeur Aïder Méziane, pour m'avoir initiée à la recherche et accueillie en thèse par la suite; son soutien, ses suggestions, ses précieux conseils et encouragements m'ont permis de mener cette thèse à bon terme. Je le remercie également pour la patience et la générosité avec lesquelles il a su guider mes recherches. Je le remercie pour toute la confiance qu'il m'a accordée durant la réalisation de ce travail. Je rends hommage à sa compétence et à sa grande gentillesse.

Mes remerciements vont ensuite aux membres de jury :

- Je remercie le professeur Bouchemakh Isma pour l'honneur qu'elle me fait en présidant le jury. Je la remercie également pour sa sympathie et l'intérêt qu'elle a porté à mon travail.*
- je remercie Mr Semri Ahmed, Maître de Conférences classe A, d'avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie de ce jury.*
- Je remercie Melle Meslem Kahina, Maître de Conférences classe B, d'avoir accepté de participer au jury.*

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

- *A mon époux pour toute la patience qu'il a eu, son amour, son affection mais surtout son soutien.*
- *A mes parents à qui je dois tout.*
- *A mes frères Taher et Sofiane.*
- *A mon petit frère Yahia, sa femme Ibtissam et la petite Saliha.*
- *A mes beaux parents pour leurs soutien.*
- *A mes beaux frères Khaled, Mourad, Karim, Tarek et leurs femmes Hadjira, Mina, Hannane et Manel.*
- *A mon beau frère Sofiane.*
- *A ma belle soeur Nora, son mari El Hadi et leurs enfants Oussama et Sarah.*
- *A mes petits cousins Hocine, Doudou, Koukou, Mohand et Chiraz.*
- *Aux petits Asma, Akram et Malak.*
- *A tous mes amis et à tous les Benmeziane, Bahmane et Ferrah.*

Table des matières

<i>Introduction Générale</i>	9
1 Définitions et notations	13
1.1 Définitions générales	14
1.1.1 Adjacence, voisinage et degré d'un sommet	14
1.1.2 Les sous-graphes	15
1.1.3 Cheminement dans les graphes	16
1.1.4 Graphes particuliers	16
1.2 Opérations sur les graphes	17
1.2.1 Joint de deux graphes	17
1.2.2 Produit cartésien	17
1.3 Morphismes de graphes	18
1.4 Aspects métriques	19
1.4.1 Distance	19
1.4.2 Diamètre, excentricité	20
1.4.3 Décomposition en niveaux	20
1.5 Intervalle et convexité	21
1.5.1 Intervalle	21
1.5.2 Convexité	22
2 Quelques classes de graphes et leurs propriétés métriques	24
2.1 Graphe hypercube	25
2.1.1 Propriété	25
2.2 Graphe de Hamming	25
2.2.1 Propriété	26

2.3	<i>Graphe de Laborde-Mulder</i>	26
2.3.1	<i>Propriété</i>	26
2.4	<i>Graphe sphérique et hyper-sphérique</i>	27
2.5	<i>Graphe diamétral et intervalle-diamétral</i>	28
2.6	<i>Graphe intervalle-régulier</i>	30
2.7	<i>Graphe médian</i>	30
2.8	<i>Graphe intervalle monotone</i>	31
3	<i>Intervalle Distance Monotonie</i>	33
3.1	<i>Graphes distance monotone</i>	34
3.2	<i>Graphes intervalle distance monotone</i>	36
3.2.1	<i>Opérations sur les graphes intervalle distance monotone</i>	40
4	<i>Sous-classes de graphes intervalle distance monotone</i>	43
4.1	<i>Graphes géodésiques</i>	44
4.1.1	<i>Caractérisation des graphes géodésiques</i>	44
4.1.2	<i>Graphes k-géodésiques</i>	46
4.2	<i>Graphes intervalle hypercube</i>	47
4.2.1	<i>L'hypercube</i>	48
4.2.2	<i>Graphes de Hamming</i>	49
4.2.3	<i>Graphes de Laborde-Mulder</i>	52
4.2.4	<i>Caractérisation des graphes intervalle hypercube</i>	53
4.3	<i>Opérations sur l'hypercube et le graphe de Hamming</i>	54
4.3.1	<i>Opération sur l'hypercube</i>	54
4.3.2	<i>Opération sur les graphes de Hamming</i>	56
4.4	<i>Sous-classes de graphes intervalle distance monotone</i>	58
4.4.1	<i>Graphes IC</i>	58
4.4.2	<i>Graphe ICC</i>	58
4.4.3	<i>Graphes ICQ</i>	60
	<i>Conclusion et Perspectives</i>	61
	<i>Bibliographie</i>	63

Table des figures

1	<i>Les sept ponts de Königsberg</i>	10
1.1	$K_2 + P_3$	18
1.2	$Q_3 = K_2 \square Q_2$	18
1.3	<i>Graphes homomorphes</i>	19
1.4	<i>Décomposition en niveaux</i>	21
1.5	<i>Intervalle non convexe</i>	23
2.1	Q_1, Q_2 et Q_3	25
2.2	$H_{3,3}$	26
2.3	E_3	27
2.4	<i>Graphe sphérique</i>	27
2.5	<i>Sous-graphe hyper-sphérique non convexe</i>	28
2.6	C_{2k+1}	29
2.7	$K_{1,1,2}$	30
2.8	<i>Graphe médian</i>	31
2.9	<i>Arbre</i>	31
2.10	<i>Sous-graphe interdit</i>	32
3.1	C_4 et H sous-graphe non convexe	35
3.2	$P_2 \square P_3$	36
3.3	<i>Sous-graphe de Q_3</i>	38
3.4	$K_2 \square K_{1,3}$	40
3.5	$S_1(K_4)$ et $Sub(K_4)$	41
3.6	$Sub(Q_3)$	42
3.7	$I_{Q_3}(u, v)$	42

4.1	$K_4, C_7, \text{Arbre}, P_5$	44
4.2	$P_2 \square P_3$	47
4.3	Q_3, Q_3^*	55
4.4	<i>Graphe non intervalle distance monotone</i>	57
4.5	<i>Graphe IC</i>	59
4.6	<i>Graphe ICC</i>	59
4.7	<i>Graphe ICQ</i>	60

Introduction générale

Le recours à la théorie des graphes remonte aussi loin que l'homme a eu besoin de modéliser des problèmes auxquels il s'est trouvé confronter, puisque celui ci, face à une situation pratique, a toujours essayé de représenter cette situation le plus simplement possible afin d'en simplifier la compréhension et peut être, entrevoir une solution.

La notion de graphe apparaît donc de manière naturelle dès que des problèmes faisant appel à des relations entre objets, que nous représentons par des points, nécessitent une représentation de ces relations, idéalisées par différentes notions, selon le contexte, par des arêtes, des arcs orientés ou toute autre représentation manipulable mathématiquement.

Cette formulation montre que la notion de graphe est présente dans de nombreux domaines et depuis longtemps, puisque cette même représentation suggère de définir un graphe, un couple formé d'une part de l'ensemble des points qui représentent les objets et un autre ensemble qui représente les relations entre ces objets.

La théorie des graphes est née en 1736 avec les travaux d'Euler qui donna une solution au premier problème historique en la matière à savoir les ponts de Königsberg. La ville de Königsberg est traversée par la rivière Pregel et possède sept ponts partageant la ville en quatre régions. Un piéton peut-il en se promenant, traverser une et une seule fois chaque pont ?

Personne n'arrivait à faire un tel parcours et les jeunes gens de la ville en avaient fait un jeu qui aurait pu durer éternellement si ce n'est Euler qui énonça et démontra l'impossibilité de réaliser un tel parcours car le graphe représentant une

telle situation n'est pas "eulérien".

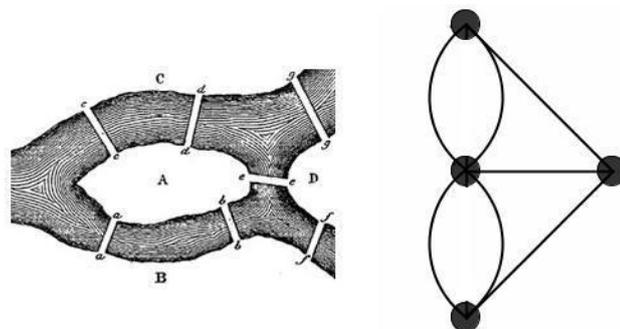


FIG. 1 – Les sept ponts de Königsberg

La théorie des graphes n'a cessé de susciter l'intérêt des mathématiciens, philosophes et autres hommes de science. Avec le temps, elle s'est développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales, pour devenir durant le vingtième siècle, une des branches les plus florissantes à laquelle nous faisons appel dans la plupart des problèmes de nature combinatoire.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure et les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments. Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser de grands problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs (arêtes).

Parmi les travaux récents en théorie des graphes, une bonne partie est effectuée par des informaticiens pour l'importance de l'aspect algorithmique.

Dans cette thèse nous traitons principalement des classes de graphes définies par des propriétés métriques. Dans ce cadre, la notion d'intervalle, introduite en 1980 par Mulder [25] joue un rôle essentiel.

Un intervalle dans un graphe peut être vu comme l'analogue de l'intervalle sur la droite réelle dans le sens suivant :

L'intervalle $[a, b]$ est constitué de tous les réels qui sont entre a et b . Un sommet w d'un graphe G est dit être entre deux sommets u et v de G si w appartient à une

plus courte chaîne de G reliant u et v et l'intervalle entre u et v est l'ensemble de tous les sommets de G qui sont entre u et v .

Mulder [25] a utilisé la notion d'intervalle pour introduire la notion de convexité, qui a conduit à la définition de la classe de graphes intervalle monotone qui sont par définition les graphes dans lesquels tout intervalle est convexe et a utilisé cette même notion pour définir les graphes intervalle régulier. Les graphes distance monotone sont également définis dans le même esprit. En effet, en 1987 la notion d'intervalle fermé a été introduite par Havel et Laborde [19].

L'intervalle fermé dans un graphe peut être vu comme l'analogue de l'intervalle fermé (borné) sur la droite réelle.

Cette notion a permis de donner des caractérisations simples de l'hypercube comme l'unique graphe qui soit simultanément intervalle monotone et distance monotone, ou encore comme le seul à être distance monotone ayant un sommet de degré égal au diamètre du graphe.

Essentiellement dû à son utilisation pratique et diversifiée pour modéliser des problèmes (réseaux, architecture parallèles,.....) et à l'intérêt de sa structure, l'hypercube constitue un sujet particulièrement intéressant pour définir des classes de graphes en se basant sur ses propriétés.

L'une des particularités de l'hypercube, des graphes de Hamming (généralisation de l'hypercube) et des graphes de Laborde-Mulder est que chacun de leurs intervalles est isomorphe à l'hypercube. Ainsi, la structure de l'hypercube est retrouvée dans chacun de leurs intervalles avec une dimension inférieure. De ce fait, nous retrouvons également la propriété de distance monotonie dans ces intervalles.

En utilisant cette propriété Aïder et Aouchiche [1] ont introduit la notion de graphe intervalle distance monotone, graphe dans lequel tout intervalle induit un sous-graphe distance monotone.

Cela constitue le sujet principal de notre thèse, que nous basons sur la conjecture due à Aïder et Aouchiche [1] stipulant qu'un graphe G est intervalle distance

monotone si et seulement si tout intervalle est isomorphe à une chaîne, à un cycle ou à un hypercube et qui a été récemment démontrée par Zhang et Wang [31].

Cette thèse est organisée comme suit :

Le chapitre 1 est consacré à quelques rappels et notations. Il comporte les concepts de base nécessaires utilisés dans la suite de ce travail.

Dans le chapitre 2, nous donnons certaines classes de graphes et quelques propriétés générales de ces classes en utilisant des concepts métriques.

Dans le chapitre 3, nous nous intéressons aux graphes intervalle distance monotone. Nous donnons quelques résultats et caractérisations générales sur les graphes distance monotone en utilisant la notion d'intervalle, des propriétés des graphes intervalle distance monotone et énonçons un lemme et un corollaire pour les graphes de diamètre 2. Des opérations sur cette classe de graphes sont données à la fin de ce chapitre.

Le chapitre 4 est consacré à des sous-classes de graphes intervalle distance monotone.

La première partie traite des graphes dont tous les intervalles sont des chaînes plus généralement les graphes géodésiques, graphes dans lesquels entre toute paire de sommets il existe une unique plus courte chaîne. Elle constitue une sous-classe des graphes intervalle distance monotone.

Nous donnons une généralisation et des opérations sur cette classe de graphes.

La deuxième partie est consacrée aux graphes intervalle hypercube, graphes dans lesquels tout intervalle est isomorphe à un hypercube. Les hypercubes, les graphes de Hamming et les graphes de Laborde-Mulder sont des exemples de cette classe de graphes. Ils constituent une sous-classe des graphes intervalle distance monotone.

Dans la troisième partie, en partant du fait que tout intervalle d'un cycle pair est soit une chaîne soit un cycle pair, nous créons de nouvelles classes de graphes en combinant à chaque fois deux types différents d'intervalles. Nous étudions quelques propriétés métriques et quelques opérations fermées pour cette classe de graphes.

Chapitre 1

Définitions et notations

Nous donnons dans ce chapitre les définitions et les résultats de la littérature dont nous aurons besoin le long de ce travail. Il est constitué de définitions de base et est destiné essentiellement aux lecteurs non familiarisés avec la théorie des graphes en général et la notion d'intervalle en particulier. La terminologie adoptée ici est celle de Berge [11] et de Mulder [25].

1.1 Définitions générales

Un graphe G est un couple constitué par un ensemble fini non vide V dit ensemble de sommets et un ensemble E de paires de sommets distincts appelées arêtes. Le nombre de sommets est appelé ordre de G et est noté en général n , le nombre d'arêtes est noté m .

1.1.1 Adjacence, voisinage et degré d'un sommet

Dans un graphe G , pour une arête $\{u, v\}$ reliant le sommet u au sommet v , notée également uv , nous dirons que :

- u est incident à uv .
- u et v sont les extrémités de uv .
- u et v sont adjacents.
- u est un voisin de v .

Une arête de la forme $\{x, x\}$ est dite boucle.

Deux arêtes sont dites adjacentes si elles ont une même extrémité. Elles sont alors également dites incidentes à un même sommet.

Elles sont dites parallèles si elles ont les mêmes extrémités.

Le graphe G est dit simple s'il est sans boucle et sans arêtes parallèles.

Dans la suite nous ne considérerons, sans le spécifier à chaque fois, que les graphes simples.

Le degré d'un sommet v de G , noté $d(v)$ ou $d_G(v)$, est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes. C'est aussi, pour les graphes simples, le nombre de voisins de v , c'est à dire :

$$d_G(v) = |N(v)|$$

où $N(v)$ désigne l'ensemble des voisins de v dans G .

Nous notons $\delta(G)$ (resp $\Delta(G)$) le degré minimum (resp maximum) dans G ie :

- $\delta(G) = \min\{d_G(v), v \in V(G)\}$
- $\Delta(G) = \max\{d_G(v), v \in V(G)\}$

Un graphe G est dit régulier si tous les sommets de G sont de même degré.

Un graphe G est dit (λ, μ) -graphe si toute paire de sommets (u, v) de G a λ ou μ voisins communs.

Lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté nous noterons δ ou Δ simplement.

1.1.2 Les sous-graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit $V' \subset V$ et $E' \subset E$.

Le sous-graphe engendré par V' , noté $G[V']$, est le graphe dont l'ensemble de sommets est V' et dont les arêtes sont celles dont les extrémités sont des sommets de V' . Un sous-graphe engendré par un sous-ensemble de sommets est dit sous-graphe induit.

Le sous-graphe engendré par E' , noté $G[E']$, est le sous-graphe de G dont l'ensemble de sommets est égal à l'ensemble des extrémités des arêtes de E' et l'ensemble des arêtes est E' .

Nous appelons graphe partiel de G , un sous-graphe de G de la forme $G' = (V, E')$ avec $E' \subset E$.

Un sous-graphe isométrique de G est un sous-graphe induit G' de G tel que $d_{G'}(u, v) = d_G(u, v)$ pour toute paire de sommets (u, v) de $V[G']$.

1.1.3 Cheminement dans les graphes

Une chaîne d'un graphe est une suite alternée $P = (x_0, e_0, x_1, \dots, e_{k-1}, x_k)$ de sommets et d'arêtes telle que pour $0 \leq i \leq k-1$, les extrémités de e_i sont x_i et x_{i+1} , et $e_i \neq e_j$ si $i \neq j$. Elle est notée P_k et représente une (x_0, x_k) -chaîne.

Une (u, v) -géodésique est une (u, v) -chaîne de longueur minimum.

Un cycle dans un graphe est une chaîne fermée $P = (x_0, e_0, x_1, \dots, e_{k-1}, x_k, x_0)$. Un cycle pair (resp. impair) est un cycle de longueur paire (resp. impaire). Il est noté C_k .

Une chaîne P est dite élémentaire si tous les sommets de la séquence qui la définit sont deux à deux distincts.

La longueur d'une chaîne (cycle) est le nombre d'arêtes qui la constituent.

Une corde d'une chaîne (cycle) est une arête reliant deux sommets non consécutifs.

Une chaîne élémentaire est dite induite si elle est sans corde, autrement dit aucune arête n'existe entre deux sommets non consécutifs.

1.1.4 Graphes particuliers

Un graphe $G = (V, E)$ est dit connexe si chaque paire de sommets est connectée par une chaîne.

Un graphe $G = (V, E)$ est dit complet si deux sommets quelconques de G sont adjacents. Un graphe complet sur n sommets est noté K_n . Le graphe $K_{1,1,m}$ consiste en une arête uv avec m sommets adjacents à u et à v .

Nous appelons clique de G , un sous-ensemble de sommets de G engendrant un graphe complet.

Le couplage est un sous-graphe partiel, qui correspond à un ensemble d'arêtes disjointes de G (arêtes non incidentes à un même sommet).

Un graphe $G = (V, E)$ est dit biparti, si l'ensemble de ses sommets peut être réparti en deux sous-ensembles disjoints V_1 et V_2 tels que toute arête de G joint un sommet de V_1 et un sommet de V_2 .

Un graphe $G = (V, E)$ est dit biparti complet, si toutes les arêtes possibles entre V_1 et V_2 sont dans G . Nous le notons $K_{p,q}$ où $p = |V_1|$ et $q = |V_2|$.

Un arbre est un graphe connexe sans cycle.

1.2 Opérations sur les graphes

1.2.1 Joint de deux graphes

Le joint de deux graphes G et G' est le graphe $G + G'$ dont l'ensemble de sommets est $V \cup V'$ et dans lequel deux sommets u et v sont adjacents s'ils vérifient l'une des conditions suivantes :

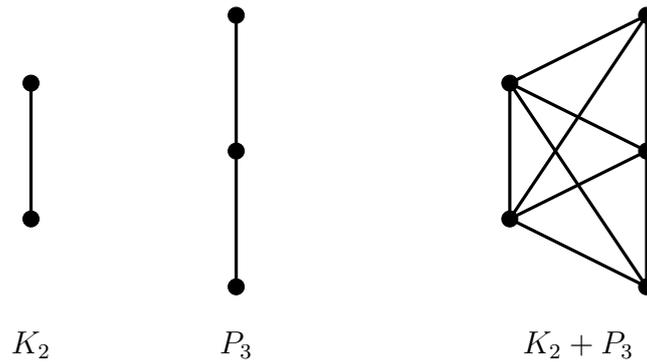
- $uv \in E$.
- $uv \in E'$.
- $u \in V$ et $v \in V'$.

Exemple 1.1. Nous prenons comme exemple K_2 et P_3

1.2.2 Produit cartésien

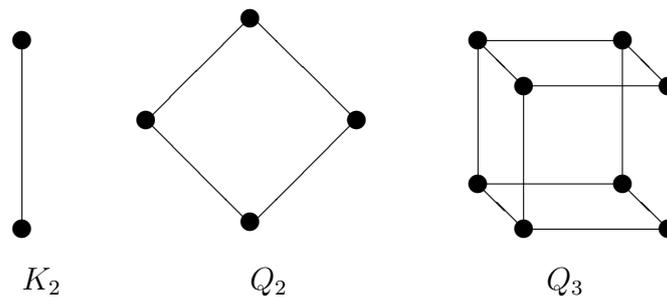
Le produit cartésien de deux graphes $G = (V(G), E(G))$ et $H = (V(H), E(H))$, est le graphe $G \square H$ dont l'ensemble de sommets est le produit cartésien des ensembles $V(G) \times V(H)$ et dans lequel deux sommets (u, x) et (v, y) sont adjacents si et seulement si ils vérifient l'une des deux conditions suivantes :

- $uv \in E(G)$ et $x = y$.

FIG. 1.1 – $K_2 + P_3$

– $xy \in E(H)$ et $u = v$.

Exemple 1.2. Le produit cartésien de K_2 et Q_2 est donné dans la figure suivante.

FIG. 1.2 – $Q_3 = K_2 \square Q_2$

1.3 Morphismes de graphes

Soient $G = (V(G), E(G))$ et $H = (V(H), E(H))$ deux graphes simples et soit :
 $f : V(G) \rightarrow V(H)$ une application.

1. f est dit homomorphisme si pour tout sous-ensemble W de sommets de H tel que $H(W)$ est un sous-graphe induit connexe, $G(f^{-1}(W))$ est un sous-graphe

induit connexe dans G . Dans ce cas, G est dit homomorphe à H .

2. *f est dit isomorphisme si f est une bijection et f et f^{-1} sont des homomorphismes. Dans ce cas, G est dit isomorphe à H et nous le notons $G \cong H$.*

3. *f est dit automorphisme si $G = H$ et f est un isomorphisme.*

4. *f est dit homéomorphisme si f est un homomorphisme tel que $f^{-1}(uv)$ induit une chaîne dans G pour toute arête uv de H . Dans ce cas, G est dit homéomorphe à H .*

Exemple 1.3. *Le graphe G de la figure suivante est homomorphe au graphe H .*

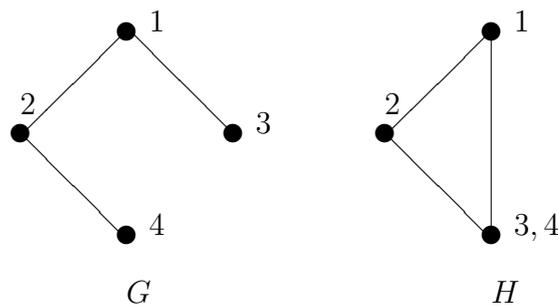


FIG. 1.3 – Graphes homomorphes

Un graphe G est dit sommet transitif si pour toute paire de sommets (u, v) il existe un automorphisme f de G tel que $u = f(v)$. Tous les sommets jouent exactement le même rôle à l'intérieur du graphe.

1.4 Aspects métriques

1.4.1 Distance

Soit $G = (V, E)$ un graphe, la distance entre deux sommets u et v de G , notée $d_G(u, v)$, est la longueur d'une plus courte (u, v) -chaîne de G .

Remarque 1.1. *L'application définie par :*

$$d_G : V \times V \longrightarrow R$$

$$(u, v) \longmapsto d_G(u, v)$$

est bien une distance sur G .

La distance d_G vérifie les trois axiomes (au sens topologique) :

- $(d_1) : d_G(u, v) \geq 0$ et $d_G(u, v) = 0$ si et seulement si $u = v$.
- $(d_2) : d_G(u, v) = d_G(v, u) \quad \forall u, v \in V$.
- $(d_3) : d_G(u, v) \leq d_G(u, w) + d_G(w, v) \quad \forall u, v, w \in V$.

1.4.2 Diamètre, excentricité

- *Le diamètre d'un graphe $G = (V, E)$, noté $\text{Diam}(G)$, est la plus grande distance entre les sommets de G pris deux à deux.*

$$\text{Diam}(G) = \text{Max}\{d_G(u, v), u, v \in V\}$$

- *L'excentricité d'un sommet u , notée $\text{ext}(u)$, est la plus grande des distances $d(u, v)$ où $v \in V(G)$*

$$\text{ext}(u) = \text{Max}\{d_G(u, v), v \in V\}$$

1.4.3 Décomposition en niveaux

Soient un graphe $G = (V, E)$ et un sommet u , $N_i(u)$ est l'ensemble des sommets à distance i de u . L'ensemble des voisins de u est désigné par $N(u)$ ou par $N_1(u)$.

Une décomposition en niveaux relative au sommet u est une partition de $V(G)$ en N_0, N_1, \dots, N_p où $p = \text{ext}(u)$ et $N_i = N_i(u)$, $i = 0, \dots, p$ avec $N_0(u) = \{u\}$.

$$N_i = \{w \in V(G), d_G(u, w) = i, i = 0, 1, \dots, p\}$$

L'ensemble N_i est appelé le i ème niveau de u dans G .

Nous donnons pour le graphe G une décomposition en niveaux G' relative au sommet 3 de FIG.1.4.

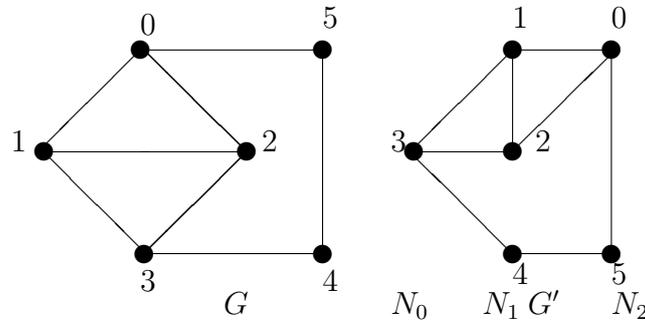


FIG. 1.4 – Décomposition en niveaux

1.5 Intervalle et convexité

1.5.1 Intervalle

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Soient u et v deux sommets de G . L'intervalle entre u et v , noté $I_G(u, v)$, est l'ensemble de sommets w de G tels qu'il existe une plus courte (u, v) -chaîne de G contenant w .

L'intervalle $I_G(u, v)$ peut être caractérisé comme suit :

$$I_G(u, v) = \{w \in V / d_G(u, v) = d_G(u, w) + d_G(w, v)\}$$

Ainsi, I_G est une application appelée fonction intervalle de $V \times V$ dans $\varphi(V)$, qui à toute paire de sommets de G nous associons l'ensemble des sommets de G appartenant à une (u, v) -géodésique.

Le nombre d'arêtes qui constitue un intervalle est appelé longueur d'intervalle.

Proposition 1.1. [25] Soit $G = (V, E)$ un graphe de fonction intervalle I_G . Alors :

1. Pour toute paire de sommets u et v de G , nous avons :
 - $u, v \in I_G(u, v)$.
 - $I_G(u, v) = I_G(v, u)$.
 - Si $x \in I_G(u, v)$, alors $I_G(u, x) \subseteq I_G(u, v)$.
 - Si $x \in I_G(u, v)$, alors $I_G(u, x) \cap I_G(x, v) = \{x\}$.
 - Si $x \in I_G(u, v)$ et $y \in I_G(u, x)$, alors $x \in I_G(y, v)$.
2. Pour tout triplet de sommets u, v et w de G , il existe un sommet z dans $I_G(u, v) \cap I_G(u, w)$ tel que :

$$z \in I_G(u, v) \Rightarrow I_G(v, z) \cap I_G(w, z) = \{z\}$$

3. Soient u, v, w et z quatre sommets de G . z est l'unique sommet de $I_G(u, w) \cap I_G(u, v)$ tel que $I_G(z, w) \cap I_G(z, v) = \{z\}$ si et seulement si

$$I_G(u, w) \cap I_G(u, v) = I_G(u, z)$$

1.5.2 Convexité

Soit $G = (V, E)$ un graphe de fonction intervalle I_G . Un sous-ensemble de sommets W est dit convexe si pour toute paire de sommets $\{u, v\}$ de W l'intervalle $I_G(u, v)$ est contenu dans W .

$$I_G(u, v) \subseteq W, \forall u, v \in W$$

Remarque 1.2. Si H est un sous-graphe induit convexe d'un graphe simple G , alors la suppression d'une arête de H détruit la convexité.

Un intervalle n'est pas nécessairement convexe. L'intervalle $I_G(u, v)$ de FIG.1.5 n'est pas convexe car :

$$x, y \in I_G(u, v) \text{ et } I_G(x, y) = \{x, y, u, v, z\} \not\subseteq I_G(u, v) = \{u, x, v, y\}$$

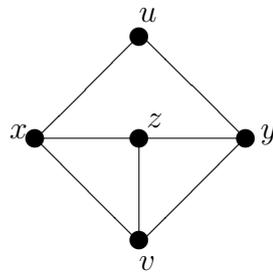


FIG. 1.5 – Intervalle non convexe

Chapitre 2

Quelques classes de graphes et leurs propriétés métriques

Introduction

Dans ce chapitre, nous utilisons la notion d'intervalle pour décrire quelques classes de graphes. En effet, l'intervalle dans les graphes joue un rôle essentiel dans l'étude des propriétés métriques.

La notion d'intervalle dans les graphes a été introduite par Mulder [25] qui l'a en particulier utilisée pour adapter la notion de convexité aux graphes et définir la classe des graphes intervalle monotone, graphes dans lesquels tout intervalle est convexe.

Mulder [25] a également introduit d'autres classes de graphes définies selon les propriétés vérifiées par leurs intervalles (graphes intervalle-régulier, graphes intervalle-diamétral, ...).

2.1 Graphe hypercube

L'hypercube de dimension n , noté Q_n , est le graphe dont l'ensemble de sommets représente les n -uples de $\{0, 1\}^n$ et deux sommets u et v sont adjacents si et seulement si ils diffèrent exactement d'une seule composante.

Notons que : $Q_0 = K_1$, $Q_1 = K_2$ et de manière récurrente $Q_{n+1} = Q_n \square K_2$.

De ce fait, Q_n peut être vu comme le produit cartésien de n copies de K_2 .

2.1.1 Propriété

Tout intervalle d'un hypercube est un hypercube dont la dimension est égale à la longueur de l'intervalle. [25]

Exemple 2.1. Q_1 , Q_2 et Q_3 sont représentés dans la figure suivante.

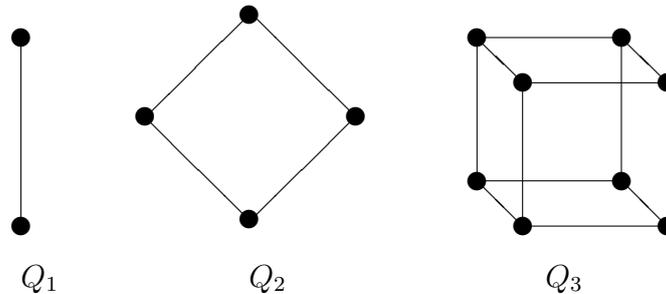


FIG. 2.1 – Q_1 , Q_2 et Q_3

2.2 Graphe de Hamming

Soient a_1, a_2, \dots, a_n n entiers positifs, le graphe de Hamming H_{a_1, a_2, \dots, a_n} , est le graphe dont l'ensemble de sommets est constitué des n -uples de $\prod_{i=1}^n (0, 1, \dots, a_i - 1)$ et dans lequel deux sommets sont adjacents si leurs vecteurs correspondants diffèrent d'une seule composante.

Nous pouvons également le définir, comme la produit cartésien de n graphes complets.

$$H_{a_1, a_2, \dots, a_n} = K_{a_1} \square K_{a_2} \square \dots \square K_{a_n}$$

Lorsque $a_i = 2$, $i = 1..n$, alors nous retrouvons l'hypercube Q_n de dimension n , en effet :

$$Q_n = K_2 \square K_2 \square \dots \square K_2$$

2.2.1 Propriété

Tout intervalle d'un graphe de Hamming est un hypercube.[25]

Exemple 2.2. Pour $a_1 = 3$ et $a_2 = 3$ nous obtenons le graphe $H_{3,3}$.

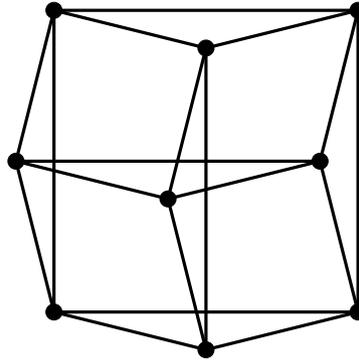


FIG. 2.2 – $H_{3,3}$

2.3 Graphe de Laborde-Mulder

Soit $k \geq 2$, un graphe de Laborde-Mulder (graphe impair étendu), noté E_k , est le graphe $E_k = (V, E)$ défini par :

$$V = \{A \subseteq \{1, 2, \dots, 2k-1\} : |A| \leq k\}$$

$$E = \{AB, A, B \in V : |A \Delta B| = 1 \text{ ou } |A \Delta B| = 2k-1\}$$

2.3.1 Propriété

Ces graphes ont été introduits par Mulder [25] comme étant des graphes dans lesquels tout intervalle est un hypercube mais qui ne sont pas des graphes de Hamming.[25]

Exemple 2.3. *Le graphe de Laborde-Mulder E_3 est donné dans la figure suivante.*

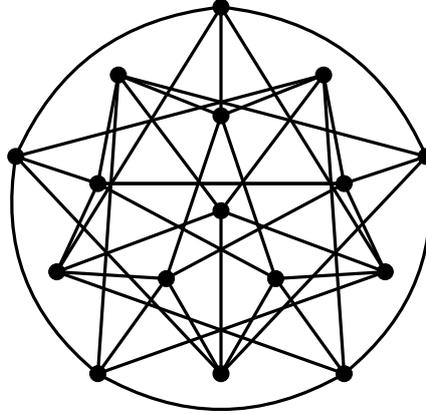


FIG. 2.3 – E_3

2.4 Graphe sphérique et hyper-sphérique

Définition 2.1. *Un intervalle $I_G(u, v)$ est dit sphérique si :*

$$\forall w \in I_G(u, v), \exists! z \in I_G(u, v) \text{ tel que } : d_G(u, v) = d_G(w, z)$$

Un graphe G est dit sphérique si tous ses intervalles sont sphériques.

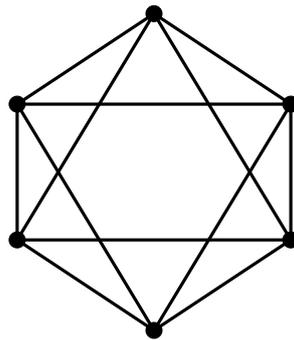


FIG. 2.4 – Graphe sphérique

Définition 2.2. Un intervalle $I_G(u, v)$ est dit hyper-sphérique si :

$$\forall w \in I_G(u, v), \exists z \in I_G(u, v) \text{ tel que } d_G(u, v) = d_G(w, z)$$

Un graphe G est dit hyper-sphérique si tous ses intervalles sont hyper-sphériques.

Proposition 2.1. [5] Soient $G = (V, E)$ un graphe (hyper)-sphérique et $H = (W, F)$ un sous-graphe convexe de G . Alors H est (hyper)-sphérique.

Remarque 2.1. La réciproque de la proposition ci-dessus n'est pas toujours vraie. En effet, dans FIG.2.5, les deux graphes sont hyper-sphériques, mais H est un sous-graphe non convexe de G .

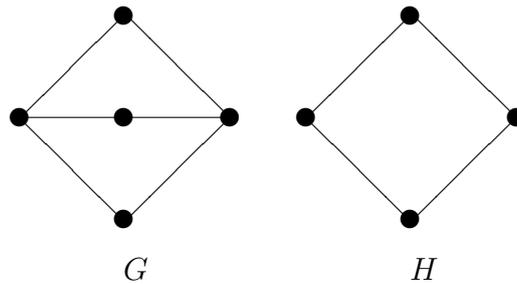


FIG. 2.5 – Sous-graphe hyper-sphérique non convexe

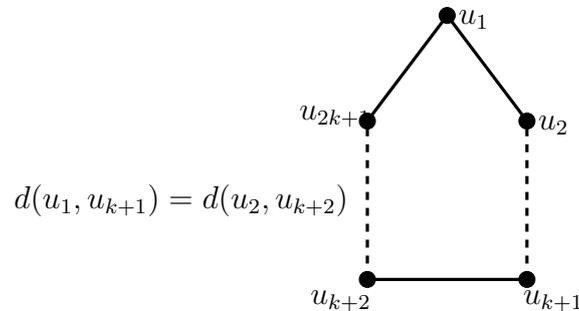
2.5 Graphe diamétral et intervalle-diamétral

Définition 2.3. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors G est dit diamétral si :

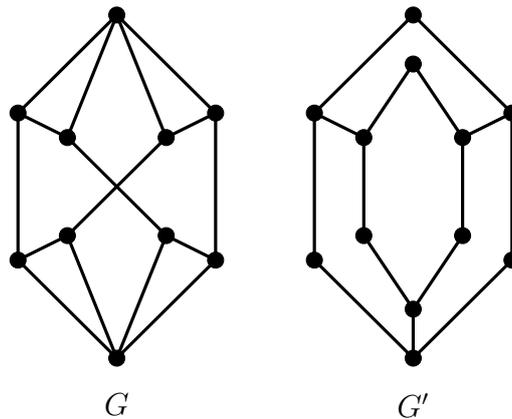
$$\forall u \in V, \exists ! v \in V \text{ tel que } d(u, v) = \text{Diam}(G)$$

Exemple 2.4. Les cycles de longueur $2k$, $k \geq 2$ sont de diamètre k et sont des graphes diamétraux.

Par contre les cycles de longueur impaire $2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, ne sont pas des graphes diamétraux. En effet, $\text{Diam}(G) = k$ et pour chaque sommet il existe deux sommets distincts qui lui sont à distance k .

FIG. 2.6 – C_{2k+1}

Remarques 2.1. [8] Dans FIG.2.7 le graphe G est diamétral et non biparti par contre G' est biparti et non régulier.



Définition 2.4. Un graphe G est intervalle-diamétral si pour toute paire de sommets (u, v) de G , l'intervalle $I_G(u, v)$ induit un sous-graphe diamétral.

Proposition 2.2. [7] Un graphe G intervalle-diamétral est un graphe régulier ne contenant pas $K_{2,3}$ comme sous-graphe induit.

2.6 Graphe intervalle-régulier

Définition 2.5. [25] *Un graphe G est dit intervalle-régulier si*

$$|I_G(u, v) \cap N(u)| = d(u, v) \quad \text{ou} \quad |I_G(u, v) \cap N(v)| = d(u, v)$$

$$\forall u, v \in G$$

Le nombre de voisins de u appartenant à $I_G(u, v)$ est précisément égal à la distance entre u et v .

Remarque 2.2. *Un graphe intervalle-régulier n'est pas forcément régulier. En effet, $K_{1,1,2}$ est un graphe intervalle-régulier mais n'est pas régulier.*

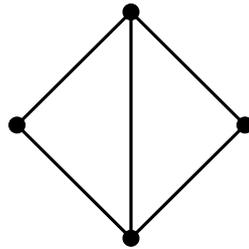


FIG. 2.7 – $K_{1,1,2}$

Proposition 2.3. [8] *Soient G et H deux graphes intervalle-régulier. Alors $G \square H$ est un graphe intervalle-régulier.*

2.7 Graphe médian

Définition 2.6. *Un graphe $G = (V, E)$ de fonction intervalle I_G est un graphe médian si :*

$$|I_G(u, v, w)| = 1, \quad \forall u, v, w \in V$$

où

$$I_G(u, v, w) = I_G(u, v) \cap I_G(v, w) \cap I_G(u, w)$$

Exemple 2.5. *Le graphe de la figure suivante est un graphe médian.*

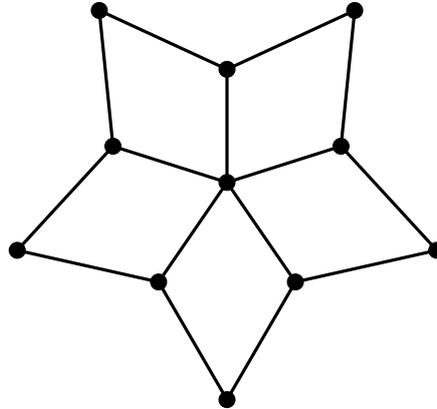


FIG. 2.8 – Graphe médian

2.8 Graphe intervalle monotone

Définition 2.7. *Un graphe G est dit intervalle monotone si pour toute paire de sommets $\{u, v\}$ de G l'intervalle $I_G(u, v)$ est convexe.*

Exemple 2.6. *Les arbres sont des graphes intervalle monotone, puisque l'intervalle entre toute paire de sommets est une chaîne.*

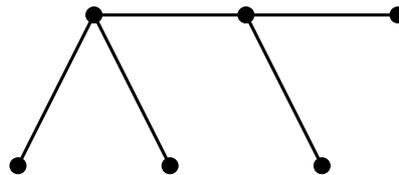


FIG. 2.9 – Arbre

Proposition 2.4. [25] *Si G est un graphe médian, alors G est intervalle monotone.*

Proposition 2.5. [8] *Si G est un graphe sphérique, alors G est un graphe intervalle monotone.*

Proposition 2.6. [25] *Soit $G = (V, E)$ un graphe. Si G ne contient pas de sous-graphe isomorphe à $K_{2,3}$ ou au graphe de FIG.2.11, alors G est un graphe intervalle monotone.*

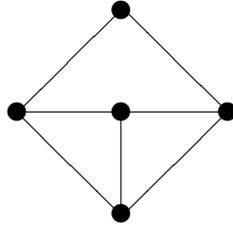


FIG. 2.10 – Sous-graphe interdit

Remarque 2.3. [5] *Si G et H sont des graphes intervalle monotone, alors le graphe $G \square H$ est intervalle monotone.*

Chapitre 3

Intervalle Distance Monotonie

Introduction

Havel et Laborde [18] ont introduit la notion de fermeture d'un intervalle pour définir la classe des graphes distance monotone, graphes dans lesquels tout intervalle est fermé.

La notion de distance monotonie a été utilisée pour définir la classe des graphes intervalle distance monotone, graphes dans lesquels tout intervalle induit un sous-graphe distance monotone. Cette notion a été introduite par Aïder et Aouchiche [1]. Nous rappelons quelques propriétés et caractérisations de ces deux classes de graphes utilisant les aspects métriques.

3.1 Graphes distance monotone

Définition 3.1. Un intervalle $I_G(u, v)$ est dit fermé si :

$$\forall w \in V \setminus I_G(u, v), \exists z \in I_G(u, v) \text{ tel que } : d_G(w, z) > d_G(u, v)$$

Un graphe G est dit distance monotone si tous ses intervalles sont fermés.

Exemple 3.1. Les arbres et les cycles pairs sont des graphes distance monotone.

Remarque 3.1. Nous pouvons caractériser, un graphe distance monotone, en fonction de son degré minimum si ce dernier est inférieur ou égal à trois comme suit :

- Si $\delta(G) = 0$, alors G a un seul sommet.
- Si $\delta(G) = 1$, alors G est une chaîne.
- Si $\delta(G) = 2$, alors G est un cycle de longueur paire.
- Si $\delta(G) = 3$, alors G est l'hypercube de dimension 3.

Théorème 3.1. [13] Soit $G = (V, E)$ un graphe distance monotone. Alors :

- G est biparti.
- Si u, x, y et z sont des sommets distincts de G tels que x, y et z sont adjacents à u , alors il existe un sommet v dans G adjacent à x et à y mais pas à z .
- Si $\delta(G) = 1$, alors G est une chaîne et si $\delta(G) = 2$, alors G est un cycle de longueur paire.
- Si $\Delta(G) \geq 3$, alors G est à la fois intervalle hyper-sphérique et diamétral.
- $V(G) = I_G(u, v)$ pour toute paire de sommets $\{u, v\}$ telle que $d_G(u, v) = \text{Diam}(G)$.

Les deux propositions suivantes, traitent de la stabilité des graphes distance monotone, par passage respectivement au sous-graphe convexe et au sous-graphe induit par un intervalle.

Proposition 3.1. [5] Soient $G = (V, E)$ un graphe distance monotone et $H = (W, F)$ un sous-graphe convexe de G . Alors H est distance monotone.

Remarque 3.2. La réciproque de la proposition précédente n'est pas toujours vraie.

En effet, tout cycle de longueur $2k$, est un graphe distance monotone, dans lequel toute chaîne de longueur k induit un sous-graphe distance monotone non convexe. Par exemple, C_4 est distance monotone, et H est un sous-graphe distance monotone non convexe.

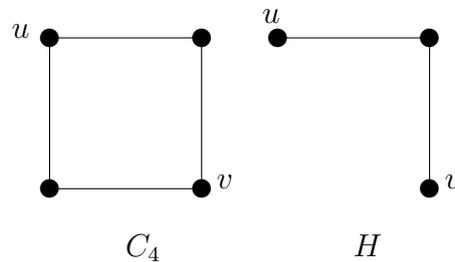


FIG. 3.1 – C_4 et H sous-graphe non convexe

Proposition 3.2. [5] Soit $G = (V, E)$ un graphe distance monotone et soient u, v deux sommets de V . Alors le sous-graphe induit par $I_G(u, v)$ est distance monotone si et seulement si $I_G(u, v)$ est convexe.

La proposition suivante, étudie la stabilité de la notion de distance monotonie par le produit cartésien.

Proposition 3.3. [5] Soient $G_1 = (V_1, H_1)$ et $G_2 = (V_2, H_2)$ deux graphes tels que $G_1 \square G_2$ est distance monotone. Alors G_1 et G_2 sont distance monotone.

Remarque 3.3. La réciproque de Proposition 3.3 n'est pas toujours vraie.

En effet, si nous prenons $G_1 \cong P_2$ et $G_2 \cong P_3$, alors $G_1 \square G_2$ n'est pas distance

monotone puisque l'intervalle $I_G(u, v)$ n'est pas fermé (FIG.3.2).

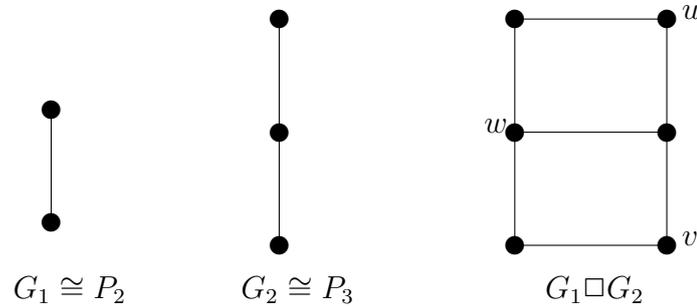


FIG. 3.2 – $P_2 \square P_3$

Néanmoins, si G_1 et G_2 sont distance monotone, avec $\Delta(G_1) \geq 3$ et $\Delta(G_2) \geq 3$, alors la réciproque est vraie.[5]

3.2 Graphes intervalle distance monotone

Définition 3.2. Un graphe simple et connexe est dit intervalle distance monotone si tout intervalle induit un sous-graphe distance monotone.

Exemple 3.2. Les intervalles dans les graphes complets sont réduits à une arête donc ils induisent un sous-graphe distance monotone.

Comme chaque intervalle d'un hypercube, d'un graphe de Hamming et d'un graphes de Laborde-Mulder est un hypercube de dimension inférieure, qui est distance monotone, alors tous ces graphes sont intervalle distance monotone.

Dans ce qui suit, nous rappelons quelques propriétés et résultats relatifs aux graphes intervalle distance monotone en utilisant la notion d'intervalle et des propriétés métriques, particulièrement la notion d'intervalle.

Proposition 3.4. [5] Soit $G = (V, E)$ un graphe intervalle distance monotone. Alors :

1. tout intervalle de G induit un sous-graphe biparti;
2. G ne contient pas de sous-graphe induit isomorphe à $K_{2,3}$ ni à $K_{1,1,2}$;
3. Si $H = (W, F)$ est un sous-graphe complet de G et u un sommet de $V \setminus W$ avec :

$$|N_u \cap W| \geq 2$$

alors, $W \cup \{u\}$ induit un sous-graphe complet de G .

4. $|I_G(u, v)| \leq 4, \forall u, v \in V$ avec $d_G(u, v) = 2$.

Théorème 3.2. [2] G est un graphe intervalle distance monotone de diamètre 2 si et seulement si G ne contient pas de sous-graphe induit isomorphe à $K_{2,3}$ ni à $K_{1,1,2}$.

De ce théorème, nous déduisons le corollaire et le lemme suivants :

Corollaire 3.1. Soit G un graphe intervalle distance monotone de diamètre 2. Alors tous ses intervalles sont isomorphes à K_2 ou à C_4 .

Preuve

Soient u et v deux sommets de G . Puisque $\text{Diam}(G) = 2$ nous avons :

Ou $d_G(u, v) = 1$, dans ce cas, l'intervalle $I_G(u, v)$ est isomorphe à K_2 .

Ou $d_G(u, v) = 2$, dans ce cas, l'intervalle $I_G(u, v)$ est isomorphe à C_4 . □

Lemme 3.1. Soient G un graphe intervalle distance monotone de diamètre 2 et H un sous-graphe de G de diamètre 2. Alors H est un graphe intervalle distance monotone.

Preuve

Soit G un graphe intervalle distance monotone et soit H un sous-graphe de G de diamètre 2. Supposons que H ne soit pas intervalle distance monotone. Alors en

vertu du théorème 3.2, H contient un sous-graphe induit isomorphe à $K_{2,3}$ ou à $K_{1,1,2}$.

Un tel sous-graphe ne peut être contenu dans G . □

Remarque 3.4. Le lemme 3.1 n'est pas vrai si G et H sont de même diamètre supérieur à 2. En effet, si nous prenons l'hypercube Q_3 qui est de diamètre 3, alors le sous-graphe H de la figure suivante qui est de diamètre 3 n'est pas intervalle distance monotone.

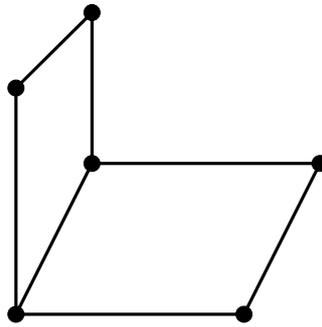


FIG. 3.3 – Sous-graphe de Q_3

Remarque 3.5. Le fait qu'un graphe soit intervalle monotone et intervalle distance monotone ne peut être une condition ni nécessaire ni suffisante pour qu'il soit distance monotone. En effet :

- Les arbres de degré maximum supérieur ou égal à trois et les graphes géodésiques de degré minimum supérieur ou égal à deux sont des graphes intervalle monotone et intervalle distance monotone sans être distance monotone.
- Les graphes bipartis complets équilibrés diminués d'un couplage parfait $\widetilde{K_{n,n}}$, avec $n \geq 5$, sont distance monotone sans être ni intervalle distance monotone ni intervalle monotone.

Proposition 3.5. [1] Un graphe $G = (V, E)$ est :

- un arbre si et seulement si G est biparti et intervalle distance monotone de degré minimum $\delta(G) = 1$;

- un cycle pair si et seulement si G est biparti et intervalle distance monotone de degré minimum $\delta(G) = 2$.

Proposition 3.6. [1] *Soit G un graphe de degré minimum $\delta(G) \geq 3$. Alors G est un hypercube si et seulement si G est biparti et intervalle distance monotone.*

Remarque 3.6. *La bipartition de G est une condition indispensable. En effet, tout graphe complet K_n , $n \geq 4$ est un graphe intervalle distance monotone, de degré minimum $\delta(G) \geq 3$, sans être un hypercube.*

La condition $\delta(G) \geq 3$ est également indispensable. En effet, les arbres et les cycles pairs, sont des graphes intervalle distance monotone et biparti sans être des hypercubes car leurs degrés minimums sont inférieurs ou égaux à deux.

Proposition 3.7. [5] *Soient $G = (V, E)$ un graphe intervalle distance monotone et intervalle hyper-sphérique. Alors G est intervalle monotone.*

Lemme 3.2. [5] *Soient $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ deux graphes et $G_1 \square G_2$ leur produit cartésien. Soient $u, v \in V_1$ et $x, y \in V_2$ et notons H_1 , H_2 et H les sous-graphes de G_1 , G_2 et $G_1 \square G_2$ induits par les intervalles $I_1(u, v)$, $I_2(x, y)$ et $I((u, v), (x, y))$ respectivement. Alors $H = H_1 \square H_2$*

Conjecturée par Aïder et Aouchiche [1], la caractérisation des graphes intervalle distance monotone a été récemment démontrée par Zhang et Wang [31].

Théorème 3.3. [31] *Un graphe est intervalle distance monotone si et seulement si tout intervalle est isomorphe soit à une chaîne, à un cycle de longueur paire ou à un hypercube.*

3.2.1 Opérations sur les graphes intervalle distance monotone

Les deux propositions suivantes, traitent de la stabilité des graphes intervalle distance monotone par le produit cartésien.

Proposition 3.8. [5] Soient $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ deux graphes et $G_1 \square G_2$ leur produit cartésien.

Si $G_1 \square G_2$ est intervalle distance monotone, alors G_1 et G_2 sont intervalle distance monotone.

Remarque 3.7. La réciproque de la proposition précédente n'est pas toujours vraie. En effet, $G_1 = K_2$ et $G_2 = K_{1,3}$ sont intervalle distance monotone mais

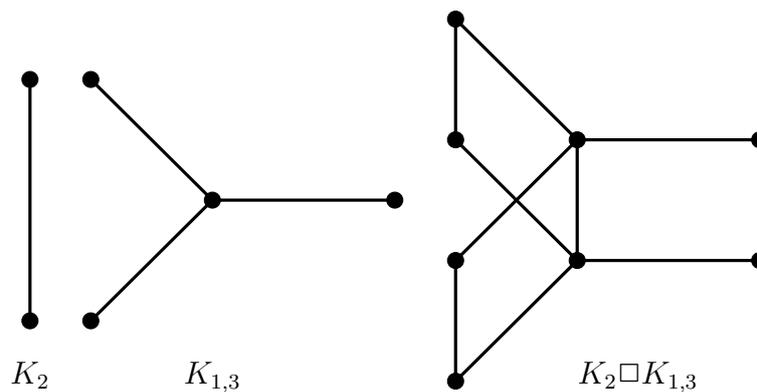


FIG. 3.4 – $K_2 \square K_{1,3}$

leurs produit cartésien n'est pas un graphe intervalle distance monotone.

Cependant, cette condition devient nécessaire dans le cas suivant :

Proposition 3.9. [5] Soient $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ deux graphes, tels que tout intervalle de longueur deux est isomorphe à C_4 . Alors :

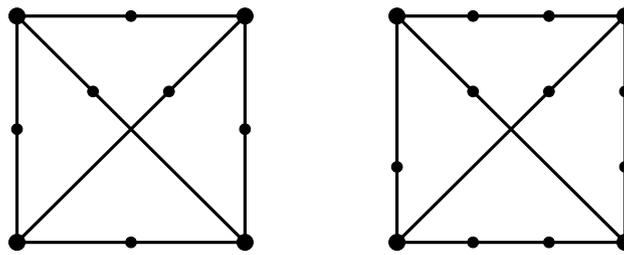
- Tout intervalle de $G_1 \square G_2$ de longueur deux est isomorphe à C_4 .
- $G_1 \square G_2$ est intervalle distance monotone si et seulement si G_1 et G_2 sont intervalle distance monotone.

Maintenant, nous nous intéressons à la notion de subdivision dans un graphe.

Définition 3.3. Nous appelons subdivision d'un graphe G , noté $Sub(G)$, le graphe obtenu en ajoutant des sommets sur les arêtes de G , autrement dit en remplaçant un sous-ensemble d'arêtes de G par des chaînes.

Le graphe noté $S_k(G)$ est la subdivision k -régulière de G , où chaque arête de G contient exactement k sommets ajoutés.

Exemple 3.3. Les graphes de la figure suivante sont $S_1(K_4)$ et $Sub(K_4)$.



$S_1(K_4)$

$Sub(K_4)$

FIG. 3.5 – $S_1(K_4)$ et $Sub(K_4)$

Remarque 3.8. La subdivision n'est pas une opération fermée pour les graphes intervalle distance monotone. En effet, l'hypercube est un graphe intervalle distance monotone, alors que la subdivision dans FIG.3.6 ne l'est pas, puisque l'intervalle $I_{Q_3}(u, v)$ n'est ni une chaîne, ni un cycle, ni un hypercube.

Le graphe $Sub(Q_3)$ de FIG.3.7 n'est pas intervalle distance monotone.

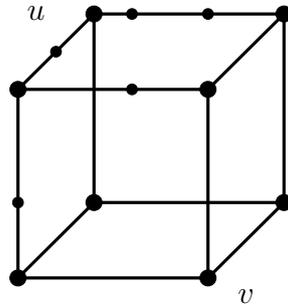


FIG. 3.6 – $Sub(Q_3)$

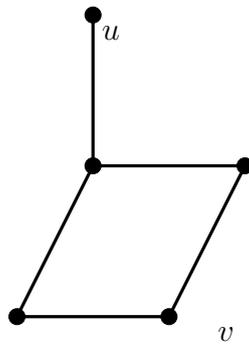


FIG. 3.7 – $I_{Q_3}(u, v)$

Chapitre 4

Sous-classes de graphes intervalle distance monotone

Introduction

Dans ce chapitre, nous utilisons la caractérisation des graphes intervalle distance monotone conjecturée par Aïder et Aouchiche [1] et récemment démontrée par Zhang et Wang [31] stipulant qu'un graphe est intervalle distance monotone si et seulement si tout intervalle est isomorphe à une chaîne, à un cycle ou à un hypercube.

La première classe que nous caractérisons est la classe de graphes dont les intervalles sont isomorphes à une chaîne, cette classe regroupe tous les graphes géodésiques. Plusieurs auteurs comme, Parthasarathy et Srinivasan [26], Scapellato [27] et Watkins [28] se sont intéressés à ces graphes et ont donné quelques caractérisations en utilisant la notion de diamètre et certaines techniques pour la construction de blocs géodésiques.

La deuxième classe est celle des graphes intervalle hypercube, graphes dans lesquels tout intervalle induit un hypercube.

La troisième classe de graphes est celle des graphes dont les intervalles contiennent deux parmi les trois types d'intervalles : chaîne, cycle ou hypercube.

4.1 Graphes géodésiques

Définition 4.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe de fonction intervalle I_G et de distance d_G . Alors G est géodésique si :

$$\forall u, v \in V, |I_G(u, v)| = d_G(u, v) + 1$$

ie : toute paire de sommets est reliée par une et une seule plus courte chaîne.

Exemple 4.1. Les graphes complets, les cycles impairs et les arbres sont des graphes géodésiques.

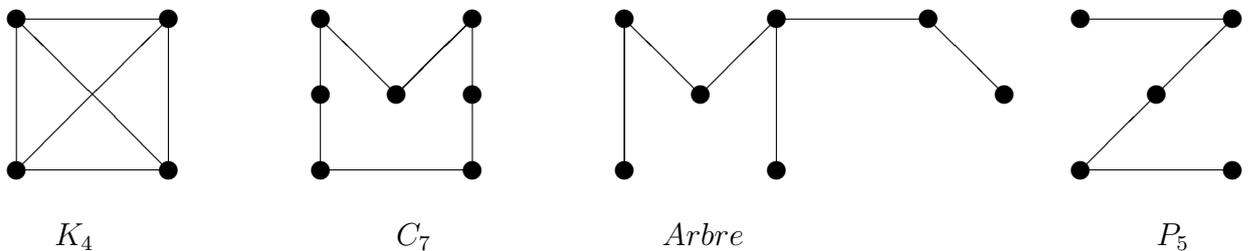


FIG. 4.1 – K_4 , C_7 , Arbres, P_5

4.1.1 Caractérisation des graphes géodésiques

Nous rappelons dans ce qui suit, quelques caractérisations de ces graphes utilisant la notion de diamètre ainsi que certaines techniques pour construire des graphes géodésiques à partir de blocs géodésiques.

Définition 4.2. Un point d'articulation d'un graphe est un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes. Un isthme est une arête dont la suppression a le même effet. Un graphe n'ayant pas de points d'articulations est 2-connexe et un graphe n'ayant pas d'isthme est dit 2-arêtes connexe.

Dans un graphe G , nous appelons bloc un ensemble A de sommets qui engendre un sous-graphe $G[A]$ connexe sans points d'articulations et maximal pour cette propriété. Le sous-graphe $G[A]$ est alors soit 2-connexe (si $|A| > 2$), soit un isthme de G (si $|A| = 2$), soit un point isolé de G (si $|A| = 1$).

Théorème 4.1. [13] *Un graphe G est géodésique si et seulement si pour tout sommet v , chaque sommet de $N_k(v)$ est adjacent à un sommet unique de $N_{k-1}(v)$ pour*

$$2 \leq k \leq \text{ext}(v)$$

.

Théorème 4.2. [30] *Un graphe G est géodésique si et seulement si chacun de ses blocs est géodésique.*

Théorème 4.3. [13] *Un graphe G planaire est un graphe géodésique si et seulement si chacun de ses blocs est soit K_2 , un cycle impair ou un graphe géodésique homomorphe à K_4 .*

Théorème 4.4. [28] *Soit G un bloc géodésique de diamètre d qui n'est ni K_2 ni un cycle impair. Alors G a au moins 4 sommets d'excentricité t vérifiant :*

$$\lfloor (d+2)/2 \rfloor \leq t \leq d$$

.

Théorème 4.5. [4] *Soit G un bloc géodésique tel que $G \neq C_{2d+1}$ et $d(G) \geq 2$. Alors, G contient $K_{1,3}$ comme sous-graphe induit.*

Dans ce qui suit, nous utilisons la notion de graphe fortement géodésique qui a été introduite par Bosák, Kotzig et Znárn [13] pour définir les graphes géodésiques.

Définition 4.3. *Un graphe G est dit fortement géodésique si entre toute paire de sommets $\{u, v\}$ de G il existe au plus une chaîne de longueur inférieure ou égale au diamètre de G .*

Théorème 4.6. [13] *Soit G un graphe fortement géodésique. Alors G est géodésique.*

Théorème 4.7. [14] *Si G est fortement géodésique, alors G est une forêt ou un graphe connexe régulier.*

Les chaînes sont caractérisées comme étant les seuls graphes géodésiques et distance monotone.

Théorème 4.8. [4] *Soit $G = (V, E)$ un graphe sur n sommets. Alors G est un graphe géodésique et distance monotone si et seulement si $G \cong P_n$.*

4.1.2 Graphes k -géodésiques

Définition 4.4. *La connectivité d'un graphe G , notée $\kappa_v(G)$, est le nombre minimum de sommets dont la suppression déconnecte le graphe ou le réduit à un sommet isolé.*

De manière similaire, l'arête-connectivité de G , notée $\kappa_e(G)$, est le nombre minimum d'arêtes dont la suppression déconnecte le graphe.

Définition 4.5. *Un graphe G est dit k -géodésique connexe (k -géodésique arête connexe) pour $k > 0$, si G est connexe et l'élimination d'au moins k sommets (k arêtes) augmente nécessairement la distance entre au moins une paire de sommets, ou bien réduit le graphe à un sommet unique.*

Le plus grand nombre k pour lequel le graphe est k -géodésique connexe (k -géodésique arête connexe) est appelé connectivité géodésique (connectivité arête géodésique).

Théorème 4.9. [17] Soit G un graphe. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- G est k -géodésique connexe ;
- Chaque paire de sommets non adjacents est reliée par au moins k chaînes élémentaires géodésiques deux à deux disjointes ;
- Chaque paire de sommets non adjacents est reliée par au moins k chaînes simples géodésiques deux à deux disjointes ;
- G est k -géodésique arête connexe ;
- Chaque paire de sommets $\{u, v\}$ de G , telle que $d(u, v) = 2$ satisfait :

$$|N(u) \cap N(v)| \geq k$$

Remarque 4.1. L'opération produit cartésien \square n'est pas fermée pour la classe de graphes géodésiques. En effet, les graphes $G_1 = K_2$ et $G_2 = P_3$ sont géodésiques, alors que, comme le montre FIG.4.2, $K_2 \square P_3$ ne l'est pas.

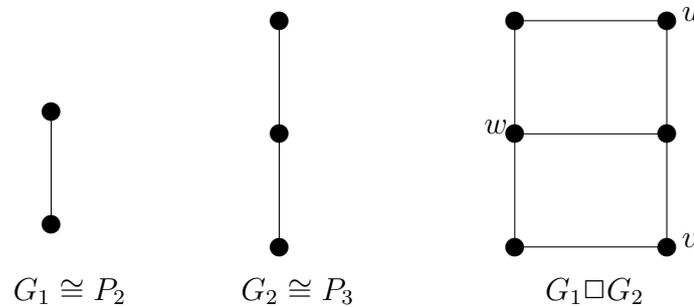


FIG. 4.2 - $P_2 \square P_3$

4.2 Graphes intervalle hypercube

Définition 4.6. Un graphe $G = (V, E)$ est un graphe intervalle hypercube si tout intervalle $I(u, v)$ de G induit un hypercube.

Dans ce qui suit, nous donnons quelques classes de graphes vérifiant cette propriété ainsi que certaines de leurs caractérisations.

4.2.1 L'hypercube

Dans ce paragraphe, nous rappelons des caractérisations de l'hypercube utilisant la fonction intervalle et la notion de distance monotone.

Théorème 4.10. [20] *Soit G un graphe biparti connexe. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- G est un hypercube ;
- Tout intervalle dans G engendre un hypercube ;
- Tout intervalle dans G engendre un $(0, 2)$ -graphe ;
- Tout intervalle $I_G(u, v)$ dans G contient exactement $2^{d(u,v)}$ sommets ;
- Tout intervalle $I_G(u, v)$ dans G engendre un graphe avec exactement $d(u, v) * 2^{d(u,v)-1}$ arêtes.

Lemme 4.1. [18] *Soit Q_n un hypercube de dimension n . Alors :*

1. Q_n est connexe, biparti, n -régulier et de diamètre n .
2. $V(Q_n) = 2^n$ et $E(Q_n) = n2^{n-1}$.

Proposition 4.1. [23] *Soit G un $(0, 2)$ -graphe de degré n . Alors :*

1. G est régulier ;
2. $|V(G)| \leq 2^n$;
3. $|V(G)| = 2^n$ si et seulement si G est isomorphe à Q_n .

Théorème 4.11. [16] *Soit $G = (V, E)$ un graphe de degré minimum $\delta(G) \geq 3$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

- G est un hypercube ;

– G est distance monotone et intervalle monotone.

Proposition 4.2. [1] *Soit $G = (V, E)$ un graphe de degré minimum $\delta(G) \geq 3$. Alors G est distance monotone et intervalle distance monotone.*

Théorème 4.12. [16] *L'hypercube est l'unique graphe distance monotone ayant un sommet de degré égal au diamètre du graphe même.*

Théorème 4.13. [16] *Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors G est un hypercube si et seulement si G est sphérique et biparti.*

4.2.2 Graphes de Hamming

Dans ce paragraphe, nous traitons une autre généralisation de l'hypercube, le graphe de Hamming (produit cartésien de graphes complets). Nous rappelons des caractérisations de ces graphes utilisant la fonction intervalle et la notion de distance monotonie.

Définition 4.7. *Soit $G = (V, E)$ un graphe de distance d_G , u un sommet et W un sous-ensemble de sommets de G . Nous appelons projection de u sur W , le sous-ensemble $P(u, W)$ défini par :*

$$P(u, W) = \{w \in W : d_G(u, w) = \text{Min} [d_G(u, x), x \in W]\}$$

Sous ces conditions, nous appelons distance de u à W le nombre :

$$d_G(u, W) = \text{Min}\{d_G(u, x), x \in W\}$$

Proposition 4.3. [5] *Si G est un graphe intervalle distance monotone, alors pour toute clique W et tout sommet u de G , nous avons :*

$$|P(u, W)| \in (1, |W|)$$

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Définissons les propriétés suivantes :

- (Δ) : $I_G(u, v) \cap I_G(v, w) = \{v\} \Rightarrow d_G(u, w) \geq \max[d_G(u, v), d_G(v, w)] \forall u, v, w \in V$.

- (\square) : $N(u, v)$ est constitué de deux sommets non adjacents, $\forall u, v \in V$ avec $d_G(u, v) = 2$

- (Λ) : G ne contient pas $K_{1,2}$ comme sous-graphe convexe.

- (∇) : Si u et v sont deux sommets adjacents et $w \in V$ tels que u et v soient équidistants de w , alors il existe $x \in V$ tel que :

$$x \in I_G(u, w) \cap I_G(v, w) \cap N(u, v).$$

- (\otimes) : Pour toute clique W et tout sommets v de G , W ne peut être entièrement contenu dans $N_i(v)$ où

$$N_i(v) = \{w \in V : d_G(v, w) = i\}.$$

- (\perp) : Pour toute clique W et tout sommet v de G :

$$|P(u, W)| = 1.$$

- (\diamond) : $I_G(u, v, w)$ n'est pas vide pour tout u, v, w dans V avec :

– v et w ne sont pas adjacents dans G ;

– $v, w \in N(x) \cap I_G(u, x)$;

– $d_G(u, x) \geq 3$.

où $N(y, z) = N(y) \cap N(z)$, $N(y)$ désigne l'ensemble des voisins de y dans G

et $I_G(u, v, w) = I_G(u, v) \cap I_G(v, w) \cap I_G(u, w)$.

Théorème 4.14. [11] Un graphe est de Hamming si et seulement s'il vérifie (\square) , (∇) et (\diamond) .

Théorème 4.15. [25] *Soit G un graphe de fonction intervalle I_G . Alors G est un graphe de Hamming si et seulement si :*

- G est intervalle-régulier ;
- G ne contient pas $K_{1,1,2}$ comme sous-graphe induit ;
- I vérifie (Δ) .

Théorème 4.16. [5] *Soit G un graphe. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- G est de Hamming ;
- G est un graphe intervalle distance monotone vérifiant (Δ) et l'une des deux propriétés (\square) ou (Λ) ;
- G est un graphe intervalle distance monotone vérifiant l'une des trois propriétés (∇) , (\otimes) ou (\perp) et l'une des deux propriétés (\square) ou (Λ) .

Graphes de Hamming H_λ^d

Définition 4.8. *Le graphe de Hamming, noté H_λ^d , est le produit cartésien de d graphes de complets de même paramètre λ .*

$$H_\lambda^d = K_\lambda \square K_\lambda \square \dots \square K_\lambda$$

Remarque 4.2. *Parfois, nous désignons par graphe de Hamming les graphes H_λ^d et par graphes de Hamming généralisés les graphes H_{a_1, a_2, \dots, a_d} . Mais souvent la distinction (précision) n'est faite que s'il y a nécessité.*

Proposition 4.4. [3] *Le graphe de Hamming H_λ^d est un $(2, \lambda - 2)$ -graphe avec les propriétés suivantes :*

- il est régulier de degré $d(\lambda - 1)$;
- il est de diamètre d ;
- nous pouvons extraire de H_λ^d , λ^d sous-graphes isomorphes à $H_{\lambda-1}^d$.

Nous obtenons les résultats suivants :

Corollaire 4.1. *Considérons le graphe de Hamming H_λ^2 . Alors :*

- il est de degré $2(\lambda - 1)$;
- il est de diamètre 2 ;
- nous pouvons extraire de H_λ^2 , λ^2 sous-graphes isomorphes à $H_{\lambda-1}^2$.

Proposition 4.5. *Considérons un graphe de Hamming H_λ^2 . Alors le graphe obtenu en supprimant $(\lambda - 1)$ sommets est un graphe intervalle distance monotone.*

Pour la démonstration de cette proposition, nous avons besoin de la proposition suivante :

Proposition 4.6. [14] *Soit G un graphe intervalle hypercube n -régulier. Alors $\kappa_v(G) = \kappa_e(G) = n$.*

Preuve

Soit G' le sous-graphe obtenu du graphe G en supprimant $(k - 1)$ sommets. Alors, il est de diamètre inférieur ou égal à 2. En effet, d'après Corollaire 4.1, H_λ^2 est de diamètre 2.

Si $\text{Diam}(G) = 1$, alors la proposition est évidente.

Si $\text{Diam}(G) = 2$, alors nous sommes dans les conditions du lemme 3.1.

Il faut s'assurer de la connexité du graphe G' . D'après la proposition ci-dessus le graphe est $2(\lambda - 1)$ -régulier, il faut donc plus de $2(k - 1)$ sommets pour qu'il se déconnecte. □

4.2.3 Graphes de Laborde-Mulder

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques caractérisations des graphes de Laborde-Mulder en utilisant la fonction intervalle et la notion de distance monotone [22].

Propriétés :

Soit E_k un graphe de Laborde-Mulder. Alors :

1. E_k est $(2k - 1)$ -régulier ;
2. $\text{Diam}(E_k) = k - 1$;
3. $\forall A, B \in V(E_k), \langle I(A, B) \rangle = Q_{d(A, B)}$: tout intervalle induit un hypercube.
4. le plus petit cycle impair de E_k est de longueur $2k - 1$;
5. pour $k \geq 3$, E_k est sans triangle ;
6. E_k est intervalle monotone ;
7. E_k est sphérique.

Théorème 4.17. [6] Soit G un graphe intervalle distance monotone. Alors G est de Laborde-Mulder si et seulement si il est non biparti, sans $K_{1,2}$ comme sous-graphe convexe et de diamètre $\text{Diam}(G) = k - 1$.

Proposition 4.7. [22] Soit G un $(0, 2)$ -graphe de degré $2k + 1$ et d'ordre 2^{2k} . Alors :

- $\text{Diam}(G) \geq k$;
- $\text{Diam}(G) = k$ si et seulement si G est E_{k+1} .

4.2.4 Caractérisation des graphes intervalle hypercube

Dans ce qui suit, nous rappelons des conditions pour qu'un intervalle d'un graphe soit un hypercube.

Théorème 4.18. [8] Un graphe G est un hypercube si et seulement si G est un graphe biparti et intervalle-diamétral.

Théorème 4.19. [8] Pour toute paire de sommets $\{u, v\}$ d'un graphe G intervalle-régulier et sans $K_{1,1,2}$, l'intervalle $I_G(u, v)$ induit un hypercube de dimension $d(u, v)$.

Théorème 4.20. [5] *Soit G un graphe intervalle distance monotone. Si G ne contient pas $K_{1,2}$ comme sous-graphe convexe, alors tout intervalle de G induit un hypercube.*

Théorème 4.21. [2] *Soit G un graphe intervalle distance monotone. Si tout intervalle de G de longueur deux est isomorphe à C_4 , alors tout intervalle de G induit un hypercube.*

Proposition 4.8. [7] *Soit G un graphe sphérique. Alors pour toute paire de sommets $\{u, v\}$ telle que :*

$$|N_1(u, v)| = d(u, v)$$

Le sous-graphe de G induit par $I(u, v)$ est isomorphe à $Q_{d(u,v)}$.

Proposition 4.9. [8] *G est un graphe tel que pour toute paire de sommets u et v à distance 2 le nombre de voisins communs à u et v est exactement 2 si et seulement si G est intervalle hypercube.*

4.3 Opérations sur l'hypercube et le graphe de Hamming

Dans ce paragraphe, à partir de classes connues de graphes intervalle distance monotone à savoir les hypercubes et les graphes de Hamming, nous obtenons deux opérations qui préservent cette notion.

4.3.1 Opération sur l'hypercube

Proposition 4.10. *Soit Q_n un hypercube de dimension n . Soient xy et uv deux arêtes formant un couplage unidirectionnel de Q_n (arêtes joignant deux copies de Q_{n-1}) voir FIG.4.3.*

Notons Q_n^* le graphe obtenu à partir de Q_n , en croisant les arêtes xy et uv . Alors Q_n^* est intervalle distance monotone.

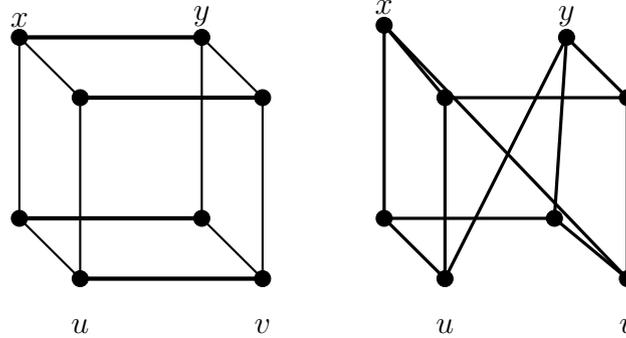


FIG. 4.3 – Q_3, Q_3^*

Preuve

Le but est de montrer que Q_n^* est intervalle distance monotone.

Les arêtes xy et uv forment un couplage unidirectionnel de Q_n , alors :

$$\forall x, y \in Q_n, \quad x, y \notin I_{Q_n}(u, v)$$

$$\forall u, v \in Q_n, \quad u, v \notin I_{Q_n}(x, y)$$

De la construction de Q_n^* , nous avons :

$$\forall x, y \in Q_n^*, \quad x, y \in I_{Q_n^*}(u, v)$$

$$\forall u, v \in Q_n^*, \quad u, v \in I_{Q_n^*}(x, y)$$

Alors, nous obtenons :

$$\forall x, y, \quad I_{Q_n}(x, y) \subseteq I_{Q_n^*}(x, y)$$

$$\forall u, v, \quad I_{Q_n}(u, v) \subseteq I_{Q_n^*}(u, v)$$

D'autre part, nous avons :

$$\forall x, y, \quad d_{Q_n}(x, y) = d_{Q_n^*}(x, y)$$

$$\forall u, v, \quad d_{Q_n}(u, v) = d_{Q_n}(u, v)$$

Car Q_n est un graphe sommet transitif alors la distance entre chaque deux sommets dans Q_n est la même distance entre chaque deux sommets dans Q_n^* .

Nous pouvons alors, conclure que tout intervalle de Q_n^* est un hypercube, par conséquent Q_n^* est intervalle distance monotone. \square

4.3.2 Opération sur les graphes de Hamming

Proposition 4.11. *Soit $G = H \square K_2$ un graphe de Hamming (H est également un graphe de Hamming).*

Notons G^ le graphe obtenu à partir de G , en croisant deux arêtes d'un couplage unidirectionnel. Alors G^* est un graphe intervalle distance monotone.*

Preuve

Soit $G = H \square K_2$ un graphe de Hamming alors nous avons deux cas :

a Si H est un hypercube de dimension n , alors $G = H \square K_2$ est un hypercube de dimension $n+1$, dans ce cas, nous sommes dans les conditions de la proposition 4.10.

b Soit $G = H \square K_2$ un graphe de Hamming.

Soient x, y, u et v des sommets de H tels que les arêtes xy et uv forment un couplage unidirectionnel de K_2 .

De la construction de G^ , nous avons :*

$$\forall x, y \in H, \quad I_G(x, y) \subseteq I_{G^*}(x, y)$$

$$\forall u, v \in H, \quad I_G(u, v) \subseteq I_{G^*}(u, v)$$

D'autre part :

$$\forall x, y, \quad d_G(x, y) = d_{G^*}(x, y)$$

$$\forall u, v, \quad d_G(u, v) = d_{G^*}(u, v)$$

Car G étant de Hamming il est sommet transitif.

Nous pouvons conclure que tout intervalle de G^* est un intervalle de G , et comme l'intervalle I_G est par hypothèse distance monotone, alors I_{G^*} l'est aussi.

Par conséquent, G^* est un graphe intervalle distance monotone. \square

Remarques 4.1. Cette opération nécessite que G soit un graphe de Hamming ayant au moins une composante (dans le produit cartésien) isomorphe à K_2 . En effet, comme le montre le graphe FIG.4.4 l'opération ci-dessus appliquée à un graphe de Hamming quelconque ne préserve pas l'intervalle distance monotone. En effet, l'intervalle $I(x, y)$ n'est ni une chaîne, ni un cycle ni un hypercube par

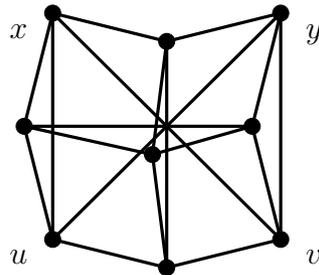


FIG. 4.4 – Graphe non intervalle distance monotone

conséquent d'après Théorème 3.3F il n'est pas intervalle distance monotone.

Remarque 4.3. La classe de graphes intervalle hypercube est fermée par l'opération produit cartésien. En effet, dans un graphe intervalle hypercube tout intervalle de longueur deux est isomorphe à C_4 , par conséquent nous sommes dans les conditions de proposition 3.8.

Si G_1 et G_2 sont deux graphes intervalle hypercube, alors $G_1 \square G_2$ est un graphe intervalle hypercube.

4.4 Sous-classes de graphes intervalle distance monotone

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux graphes intervalle distance monotone dans lesquels les intervalles ne peuvent être que de deux types.

Remarque 4.4. *Les graphes dont les intervalles sont des chaînes ou des hypercubes ont été caractérisés auparavant, comme étant les graphes géodésiques et les graphes intervalles hypercube. Dans ce qui suit nous traitons le cas des graphes dont :*

- *tous les intervalles sont des cycles ;*
- *tous les intervalles sont soit des chaînes soit des cycles ;*
- *tous les intervalles sont soit des chaînes soit des hypercubes.*

4.4.1 Graphes IC

Intéressons nous à présent aux graphes dont tous les intervalles sont des cycles.

Définition 4.9. *Un graphe G est dit IC si tout intervalle de G induit un cycle pair.*

Remarque 4.5. *La classe de graphes dont les intervalles ne sont que des cycles ne peut contenir que des cycles de longueurs 4. En effet, si un intervalle d'un graphe d'une telle classe est isomorphe à un cycle de longueur supérieure à 6, alors tout sous-intervalle contenu strictement dans un tel cycle est une chaîne et le graphe ne serait pas de cette classe.*

Exemple 4.2. *La figure suivante est un graphe IC.*

4.4.2 Graphe ICC

Définition 4.10. *Un graphe G est dit ICC si tout intervalle de G induit soit une chaîne soit un cycle pair.*

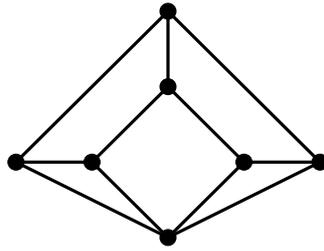


FIG. 4.5 – Graphe IC

En partant du fait que les intervalles dans les cycles pairs sont soit des chaînes soit des cycles, nous donnons quelques exemples de cette classe de graphes.

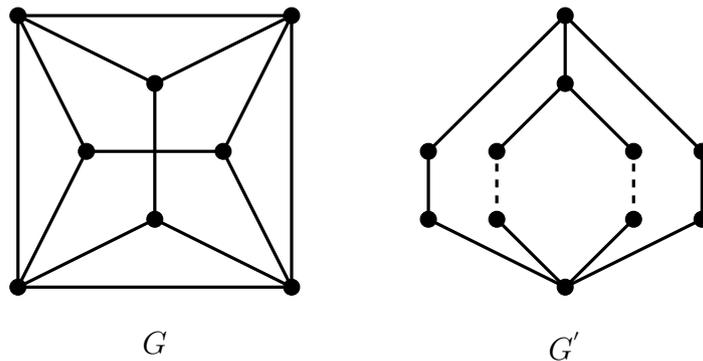


FIG. 4.6 – Graphe ICC

Remarque 4.6. Nous pouvons généraliser le graphe G' de FIG.4.6 en construisant des graphes à partir de cycles pairs. De la manière suivante :

- prendre deux copies d'un cycle C_{2k} de longueur $2k \geq 4$;
- relier par une arête un sommet de l'une des copies à un sommet de l'autre ;
- identifier leurs sommets diamétraux.

Les graphes ainsi obtenus sont tels que tout intervalle est soit une chaîne soit un cycle.

4.4.3 Graphes ICQ

Définition 4.11. *Un graphe G est dit ICQ si tout intervalle de G induit soit une chaîne soit un hypercube.*

Exemple 4.3. *Le graphe de FIG.4.7 a la propriété que tous ses intervalles sont soit des chaînes soit des hypercubes.*

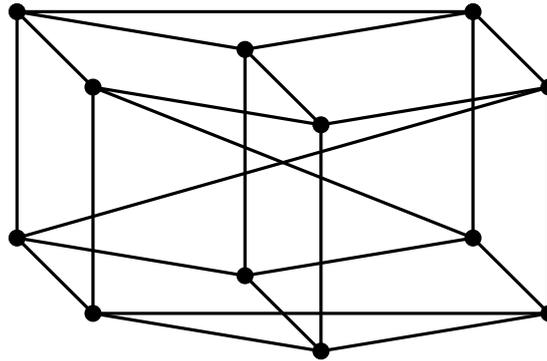


FIG. 4.7 – Graphe ICQ

Remarque 4.7. *Le graphe de FIG.4.7 est le graphe de Hamming $K_2 \square K_2 \square K_3$ auquel nous avons appliqué l'opération définie sur les graphes de Hamming.*

Conclusion et Perspectives

Dans ce memoire, nous avons donné des caractérisations et des propriétés métriques des graphes intervalle distance monotone. Nous nous sommes intéressés à la nature des intervalles qu'ils contiennent, en utilisant la caractérisation stipulant qu'un graphe est intervalle distance monotone si et seulement si tout intervalle est isomorphe à une chaîne, à un cycle ou à un hypercube.

Cela nous a permis d'étudier des sous-classes de cette classe de graphes à savoir :

- *les graphes intervalle chaîne ;*
- *les graphes intervalles chaîne cycle ;*
- *les graphes intervalle chaîne hypercube.*

Nous posons quelques problèmes relatifs à la notion d'intervalle distance monotone.

- *Les graphes géodésiques et les graphes intervalle hypercube étant caractérisés nous pouvons nous intéresser aux questions suivantes :*
 - *Donner des opérations préservant la nature des intervalles.*
 - *Caractériser les sous-classes des graphes intervalle distance monotone.*
- *Nous avons montré qu'un graphe de Hamming $H_{\lambda,\lambda}$ auquel nous supprimons $(\lambda - 1)$ sommets préserve la notion d'intervalle distance monotone. Nous posons alors la question de savoir sous quelles conditions les graphes de Hamming auxquels nous supprimons des sommets reste intervalle distance*

monotone.

- *La subdivision n'étant pas fermée pour les graphes intervalle distance monotone, nous pouvons nous intéresser aux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle le soit.*

Bien entendu, toutes ces questions peuvent également être posées à d'autres classes de graphes dans lesquelles l'intervalle a un rôle essentiel.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] Aïder. M and M. Aouchiche, *Distance monotonicity and a new characterization of hypercube*, *Discrete Math*, 245 (2002) 55-62.
- [2] Aïder. M and M. Aouchiche, *Distance monotonicity and a new characterization of Hamming graphs*, *Information Processing Letters* 96 (2005) 207-213.
- [3] Affif Chaouche. F, *Sur une classe de graphes fortement réguliers*, *Thèse de magister*, Avril 2000.
- [4] Alagar. V. S and N. Srinivasan, *Critically Concepts in Geodetic Blocs*, *J. Math. Phys. Sci* 22 (1988) 241-250.
- [5] Aouchiche. M, *Distance et convexité dans les graphes*, *Thèse de Magister*, U.S.T.H.B, Octobre 1995.
- [6] Atmane. S, *Propriétés métriques dans les graphes*, *Thèse de Magister*, U.S.T.H.B, Janvier 2008.
- [7] Bandelt. H.J, *Characterization of Hamming Graphs*, *Eur.J. Combin* (Preprint).
- [8] Berrachedi. A, *Quelques propriétés métriques de graphes de type Hypercube*, *Thèse de Doctorat d'état*, U.S.T.H.B Octobre 1997.

-
- [9] Berrachedi. A, *A new characterization of Median Graphs*, *Discrete Mathematics* 128 (1994) 385-387, North Holland.
- [10] Berrachedi. A, I. Havel and H.M.Mulder, *Spherical and Clockwise Spherical Graphs*, *Czechoslovak Mathematical Journal*, V 53 N 2 295-309(2004) (Preprint).
- [11] Berge. C, *Graphes et Hypergraphes*, Dunod Ed. Paris, 1973.
- [12] Berge. C, *Graphes*, Gauthier- Villars, Paris, 1983.
- [13] Bosák. J, A. Kotzig, S. Znárn, *Strongly geodetic graphs*, *J. Combin Theory* 5 1968 170-176.
- [14] Boutinzar. H, *Sur quelques problèmes métriques sur l'hypercube*, Thèse de magister, Juin 1998.
- [15] Buckley. F, F. Harary, *Distance in Graphs*, Addison-Wesley Publishing Company.
- [16] Burosch. G, I. Havel and J.M. Laborde, *Distance monotonicity and a new characterization of hypercube*, *Discrete Math*, 110 (1992) 9-16, North Holland.
- [17] Chang. J.M and C.W. Ho, *The Recognition of Geodetically Connected Graphs*, *Information Processing Letters* 65 (1998) 81-88.
- [18] Havel. I and J.M. Laborde, *On distance monotone graphs*, *Colloquia Mathematica Societatis Janos Boyal Combinatorics*, Eger(Haungary) 52 (1987) 557-561.

- [19] Imrich. W and M. Klavzar, *Product Graphs, Structure and Recongnition*, John Wiley et Sons, New York, 2000.
- [20] Kobeissi. M, *Plongement de Graphes dans l'Hypercube*, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Octobre 2001.
- [21] Madani. R.M, *Caracterisation des Graphes de Laborde-Mulder et du Demi-Cube*, Rapport de Recherche RR857.I. Juillet 1991, IMAG, Université J. Fourier Grenoble 1, France.
- [22] Madani. R.M, *Characterization of Laborde-Mulder graphs (extended odd graphs)*, *Discrete Math*, 150 (1996) 9-16.
- [23] Mollard. M, *Quelques problèmes combinatoires sur l'Hypercube et le Graphe de Hamming*, Thèse de doctorat, Essciences (09 mai 1989), Université J.Fourier Grenoble 1, France.
- [24] Mollard. M, *Two Characterization of Generalized Hypercubes*. (Preprint)
- [25] Mulder. H.M, *The Interval Function of a Graph*, MCT 132, Mathematisch Centrum, Amsterdam 1980.
- [26] Mulder. H.M, *Interval Regular Graphs*, *Discrete math* 41 (1982) 253-269, North Holland.
- [27] Mulder. H.M, *Interval Regular Graphs of Diameter Two*, *Discrete math* 50 (1984) 117-134, North Holland.
- [28] Parthasarathy. K.R and N. Srinivasan, *An Extremal Problem in Geodetic graphs*, *Discret Math*, 49 (1984) 151-159.

- [29] Scapellato. R, *Geodetic Graphs of Diameter Two and Some Related Structures*, *J. Combin Theory 44B* (1986) 218-299.
- [30] Watkins. M.E, *On Planar Geodetic Graphs*, *J. Combin Theory 4* (1968) 101-117.
- [31] Zhang. H and G. Wang, *A Characterization for the interval distance monotone graphs*, *Discrete Math*, 307 (2007) 2622-2627.

Résumé

La notion d'intervalle fermé dans un graphe peut être vue comme l'analogie d'un intervalle fermé sur la droite réelle. Un graphe simple et connexe est dit intervalle distance monotone si l'intervalle entre toute paire de sommets induit un sous-graphe distance monotone, graphe dans lequel tout intervalle est fermé. Ces graphes ont été récemment caractérisés comme suit : G est intervalle distance monotone si et seulement si tout intervalle est isomorphe à une chaîne, un cycle ou à un hypercube.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à quelques classes et propriétés métriques de ces graphes, en nous appuyant sur la nature des intervalles qu'ils contiennent.

Mots clés : *Intervalle - Intervalle distance monotone - Propriétés métriques.*

Abstract

The notion of closed interval in a graph can be seen as analogous to a closed interval on the real line. A simple connected graph is said interval distance monotone if the interval between any pair of vertices induces a distance monotone subgraph, graph in which every interval is closed. These graphs have been recently characterized as follows : G is interval distance monotone if and only if every interval is isomorphic to a path, a cycle or a hypercube.

In this dissertation, we are interested in some classes and metric properties of these graphs, with respect of the properties of their intervals.

Keywords : *Interval - Interval distance monotone - Metric properties.*