N° D'ORDRE : **18/2005-M/MT**

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVESITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE

جامعة هواري بومدين
للعلوم والتكنولوجيا
U S T H B

FACULTE DES MATHEMATIQUES

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

EN : MATHEMATIQUES

SPECIALITE : ALGEBRE ET THEORIE DES NOMBRES

Par

M^{lle} Ilhem BENZAOUI

<u>Thème</u>

Anneau des Séries de Factorielles et Théorème de Maillet

Soutenu publiquement le : 25/10/2005, devant le Jury suivant:

Abdelouahab AROUCHE	Maître de Conférences, USTHB	Président
Kamel BETINA	Professeur, USTHB	Directeur de thèse
Mohamed ZITOUNI	Professeur, USTHB	Examinateur
Mohamed Salem REZAOUI	Chargé de cours, USTHB	Examinateur

Octobre 2005

Remerciements

Je voudrais d'abord remercier infiniment mon encadreur Professeur K. Betina. Il a été à l'origine de ce travail ainsi que des quatres communications que j'avais présentées dans différents colloques : Congrès de Tizi-ouzou 94, de Annaba 99, Journées d'Algèbre et Théorie des nombres 96, et RAMA 2000. Ce fut un long et riche parcours, qui a necessité beaucoup de patiente de la part de mon encadreur. Qu'il trouve ici, l'expression de ma gratitude.

Mes remerciements vont au Professeur B. Benzaghou, Recteur de l'USTHB et éminent algébriste qui m'a toujours encouragée et de qui je m'inspire dans mes recherches en Théorie Algébrique des Nombres.

Je remercie également le Professeur M. Zitouni qui n'a jamais cessé de nous guider vers le chemin du bon chercheur, durant les cours qu'il nous a fait ainsi que durant les séances du séminaire hebdomadaire dont la tenue est si regulière durant toutes ces années, qu'il peut en être fièr.

Monsieur A. Arrouche est vivement remercié pour m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence de mon jury de soutenance.

Je remercie également Monsieur M.S. Rezaoui pour avoir bien voulu examiner ce travail, ainsi que pour les discussions enrichissantes qu'on a eu autour de ce sujet.

Je remercie également Monsieur S. Medjeber pour ces remarques sur l'écrit qui m'ont bien illuminée durant la rédaction de ce mémoire.

Je remercie aussi Monsieur A. Chabour qui s'est toujours montré disponible à aider tous les postgraduants de la Faculté, surtout les algébristes et les analystes d'entre eux.

Je suis aussi très reconnaissante au Professeur D. Benayatt de l'ENS de Kouba, auprès duquel j'ai trouvé conseils et encouragements.

Messieurs A. Assem de l'USTHB, A. Choutri, I. Djebali et A. Mokrane de l'ENS, sont vivement remercié pour les articles précieux qu'ils m'ont ramené de l'étranger. J'en ai fait bénéficier pas mal d'autres étudiants en m'estimant heureuse de la chance que j'ai eue et que d'autres pourraient ne pas avoir.

Et je n'oublie pas aussi d'exprimer ma reconnaissance à tous les Enseignants de l'USTHB qui ont contribué, directement ou indirectement, à ma formation, et notamment ceux qui n'ont jamais arrêté leurs encouragements et qui attendaient la concrétisation de ce travail.

Mes amis et collègues sont également remerciés pour leurs encouragements.

Mon travail n'aurait pas aboutit sans toutes les démarches administratives dont mon frère Med Lassaâd s'est chargé. Je le remercie vivement en lui souhaitant beaucoup de succès dans sa carrière scientifique.

Et enfin, j'aimerais exprimer mon profond respect et mes vives remerciements aux Professeurs Yasutaka SIBUYA de Minnesota et Donald A. LUTZ de San Diego, qui m'ont fournit avec plaisir des articles très importants à ma recherche.

Dédicaces

Ce travail est dédié à la mémoire de notre Professeur Noureddine Hassani pour tout ce qu'il nous a donné durant sa vie et après sa mort ; ainsi qu'à la mémoire de ma très chère tante SAFIA qui a tant attendu ce jour, mais hélas ...

ILHEM

Citation

De l'Algèbre qui procède toute entière du dynamisme de l'intelligence, Descartes disait qu'elle est "La clé de toute les autres sciences."

L. Brunschvicg, Descartes p. 61

Résumé

Dans ce travail, on s'est intéressé à la version "Séries de Factorielles" du théorème de Maillet comme a été étudié par R. Gérard & D. A. Lutz dans [G-L 2].

Pour cela, il était nécessaire d'introduire les notions de séries de factorielles formelles et convergentes, et donner certaines de leurs propriétés, les plus importantes pour la suite de ce travail. Ceci fait l'objet du premier chapitre.

Dans le second chapitre par contre, on s'occupera des opérateurs agissant sur les séries de factorielles.

Et enfin dans le troisième chapitre, on démontrera deux théorèmes importants qui permettent de reconnaître à priori certains opérateurs qui sont singuliers réguliers. Ces deux théorèmes serait à la base de la démonstration du théorème de Maillet auquel on s'intérèsse.

Mots clés :

séries de factorielles, théorèmes de type Maillet, opérateurs aux différences

Table des matières

Chapitre 1

Séries formelles de factorielles

1.1 Séries formelles de factorielles

Définition 1.1

On appelle Série formelle de factorielles à coefficients dans $\mathbb{C}$*, toute série de la forme :*

$$a_{-1} + \sum_{m \geq 0} a_m \frac{m!}{x(x+1)...(x+m)}$$

où $a_m \in \mathbb{C}$ pour tout $m \geq -1$ et x est une indéterminée.

L'ensemble de telles séries sera noté $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}\,[[x]]$

Pour la simplification de l'écriture, on notera : $(x, n) = x(x+1)...(x+(n-1))$

C'est ce qu'on appelle "factorielle de l'argument x et de rang n ".

Cette factorielle est un polynôme de degré n. En le développant en puissances de x, on trouve

$$(x, n) = \sum_{m=1}^{n} |S_n^m|\, x^m$$

où le signe $|.|$ désigne la valeur absolue ordinaire, et les S_n^m ne sont autres que les nombres de Stirling du premier type (cf [JOR])[1]

[1] En fait Jordan note $(x)_n$ le polynôme

$$(x)_n = x(x-1)...(x-(n-1)) = \sum_{m=1}^{n} S_n^m x^m$$

Mais on retrouve facilement l'égalité : $(-x)_n = (-1)^n (x, n)$

et on peut prouver que le signe de S_n^m est égal à $(-1)^{m-n}$, ce qui donne la formule susdite.

Par calcul direct on trouve, pour tout entier n :

$$|S_n^n| = 1\ ,\ \left|S_n^1\right| = (n-1)!\ ,\ \left|S_n^{n-1}\right| = \frac{n(n-1)}{2}$$

de plus on a une formule de récurrence : $\boxed{S_{n+1}^m = S_n^{m-1} - nS_n^m}$

Les séries de factorielles à coefficients complexes apparaissent naturellement dans la théorie des équations aux différences finies linéaires et non linéaires parce que l'opérateur de base pour ces équations agit très simplement sur telles séries . Cependant, elles n'ont pas été utilisée systématiquement dans cette théorie. Beaucoup d'auteurs préfèrent les séries entières en $1/x$.

Or il existe une correspondance biunivoque entre les séries formelles de factorielles et les séries entières en $1/x$ *, et toute série formelle entière en* $1/x$ *est développable en série formelle de factorielles et inversement.*

En effet :

De l'identité :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+m} = \frac{m}{x(x+m)}$$

on tire :

$$\frac{1}{(x,m)} - \frac{1}{(x+1,m)} = \frac{m}{(x,m+1)}$$

Ainsi si on pose :

$$a(x) = \sum_{m\geq 0} \frac{m!}{(x,m+1)} = \sum_{m\geq 0} \frac{m!}{x(x+1)...(x+m)}$$

on tire :

$$\begin{aligned}
a(x) - a(x+1) &= \sum_{m\geq 0} \frac{m!}{(x,m+1)} - \sum_{m\geq 0} \frac{m!}{(x+1,m+1)} \\
&= \sum_{m\geq 1} \frac{(m-1)!}{(x,m)} - \sum_{m\geq 1} \frac{(m-1)!}{(x+1,m)} \\
&= \sum_{m\geq 1} (m-1)! \left(\frac{m}{(x,m+1)} \right) \\
&= \sum_{m\geq 1} \frac{m!}{(x,m+1)} \\
&= a(x) - \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{a(x+1) = \frac{1}{x}}$

i.e :

$$\frac{1}{x} = \sum_{m\geq 1} \frac{(m-1)!}{(x+1,m)} = \sum_{m\geq 1} \frac{(m-1)!}{(x+1)(x+2)...(x+m)}$$

En multipliant, formellement, les deux membres de cette égalité, on obtient :

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{m\geq 1} \frac{(m-1)!}{(x,m+1)}$$

Or $(m-1)! = \left|S_m^1\right|$ *, d'où :*

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{m\geq 1} \frac{\left|S_m^1\right|}{(x,m+1)}$$

Plus généralement, en utilisant la transformée de Mellin [2] *(cf* [*NIE*] *ou* [*G-L 1*] *),*

[2] Il a été montré que toute série de factorielles convergente peut être transformée dans une intégrale définie :

$$\int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt = \sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{(x,m+1)}$$

où $\varphi(t)$, la fonction génératrice de cette série de factorielles, admet le développement formel en série entière en $(1-t)$ suivant : $\varphi(t) = \sum_{m\geq 0} a_m (1-t)^m$

on montre que :

$$\frac{1}{x^{p+1}} = \sum_{m \geq p} \frac{|S_m^p|}{(x, m+1)} \qquad \text{pour tout } p \geq 2$$

Et si on considère une fonction développable en série convergente de puissances négatives entières de x :

$$F(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + ... \qquad , \text{ pour } |x| > \omega$$

Les termes de cette série, le premier exclu , peuvent être développés en série de factorielles, absolument convergentes[3] *pourvu que $Re(x) > 0$, ce qui donnera :*

$$F(x) = \frac{a_1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}\,|S_n^n| + a_n\,\left|S_n^{n-1}\right| + ... + a_3\,\left|S_n^2\right| + a_2\,\left|S_n^1\right|}{x(x+1)...(x+n)} \tag{1.1}$$

pourvu que $Re(x) > \max(0, \omega)$

Inversement :

Si on écrit formellement un développement possible de $\dfrac{1}{x(x+1)...(x+m)}$ en série de puissances entières et négatives de x , pour m fixé, on peut trouver les coefficients de ce développement, de proche en proche, en multipliant, à chaque fois, par une puissance convenable de x , et en faisant tendre x vers l'infini (Ce qui est permis puisque la série cherchée est supposée convergente pour x assez grand), puis en soustrayant le nouveau terme connu pour calculer à l'étape suivante le coefficient du terme suivant. Et ainsi de suite.

[3]Pour la convergence, voir page 14

Par exemple pour $m = 1$, on écrit :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + ...$$

Ce qui donne :

$$a_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x(x+1)} = 0$$
$$a_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = 1$$
$$a_3 = \lim_{x\to\infty} x^3 \left[\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x^2}\right] = -1$$

et on trouve :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{x^n}$$

De même pour $m = 2$, si on écrit :

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + \cdots$$

on trouve :

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n b_n}{x^{n+3}} \quad \textit{avec } b_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

ou encore :

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \sum_{n\geq 3} \frac{(-1)^{n-1}\left[2^{n-2} - 1\right]}{x^n}$$

Plus généralement , en utilisant les fonctions génératrices des nombres de Stirling du deuxième type (cf [JOR]), on trouve :

$$\frac{1}{x(x+1)...(x+m)} = \sum_{n\geq m} (-1)^{n-m} \frac{\boldsymbol{\sigma}_n^m}{x^{n+1}}$$

où les σ_n^m sont justement les nombres de Stirling du deuxième type. Ils peuvent être exprimés par la formule :

$$\boldsymbol{\sigma}_n^m = \frac{n!}{m!} \sum_{|r|=n} \frac{1}{r_1! r_2! \cdots r_m!}$$

où la somme s'étend à toutes les valeurs $r_i \geq 0$ (avec répétition et permutation) pourvu que $|r| = r_1 + r_2 + ... + r_m = n$. (On note qu'ici $r = (r_1, \cdots, r_m)$ et $|\,|$ désigne la longueur de r)

De là on peut tirer une formule analogue à la formule (1.1) ci-dessus, qui permet de développer une fonction $G(x)$, dont on a le développement en série de factorielles, de la développer en une série de puissances de $1/x$ comme suit :

$$\begin{aligned} G(x) &= a_{-1} + \sum_{m \geq 0} a_m \frac{m!}{x(x+1)...(x+m)} \\ &= a_{-1} + \frac{a_0}{x} + \sum_{n \geq 1} \frac{\sum_{m=1}^{n} (-1)^{n-m} a_m m! \, \boldsymbol{\sigma}_n^m}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

1.2 Opérations sur les séries formelles de factorielles :

Egalité :

Deux séries formelles de factorielles :

$$a(x) = a_{-1} + \sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{(x,m+1)}$$

et

$$b(x) = b_{-1} + \sum_{m\geq 0} b_m \frac{m!}{(x,m+1)}$$

seront dites égales, si et seulement si :

pour tout $m \geq -1$, $a_m = b_m$

Addition :

La somme des deux séries formelles de factorielles :

$$a(x) = a_{-1} + \sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{(x,m+1)}$$

et

$$b(x) = b_{-1} + \sum_{m\geq 0} b_m \frac{m!}{(x,m+1)}$$

est, par définition , la série :

$$(a+b)(x) = (a_{-1} + b_{-1}) + \sum_{m\geq 0} (a_m + b_m) \frac{m!}{(x,m+1)}$$

Multiplication par un scalaire :

Soient : une série de factorielles $a(x) = a_{-1} + \sum_{m\geq 0} a_m \dfrac{m!}{(x, m+1)}$

et un élément $\lambda \in \mathbb{C}$

Alors, par définition on a :

$$\lambda a(x) = \lambda a_{-1} + \sum_{m\geq 0} \lambda a_m \frac{m!}{(x, m+1)}$$

Produit de deux séries de factorielles :

Le produit de deux séries de factorielles

$$a(x) = a_{-1} + \sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{(x, m+1)} = a_{-1} + a'(x)$$

et

$$b(x) = b_{-1} + \sum_{m\geq 0} b_m \frac{m!}{(x, m+1)} = b_{-1} + b'(x)$$

est, par définition :

$$(a.b)(x) = a_{-1}b_{-1} + a_{-1}b'(x) + b_{-1}a'(x) + \sum_{m\geq 1} c_m \frac{m!}{(x, m+1)}$$

où :

$$m!c_m = \sum_{k=1}^{m} (m-k)!(k-1)!b_{m-k}C_{m-k,k-1}$$

avec

$$C_{m-k,k-1} = \sum_{p=0}^{k-1} \binom{p+m-k}{p} a_{k-1-p}$$

(cf [*CH-G*] *ou* [*NIE*] [4]*)*

[4] Nielsen a exposé la formule donnant le produit de deux séries de factorielles dans [NIE]

Remarque :

Muni de ces opérations, $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}[[x]]$ *acquiert une structure de* $\mathbb{C}$ *-algèbre commutative unitaire.*

La transformation $x \longrightarrow x+s,\ s \in \mathbb{N}$

On a formellement ,

$$\sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{x(x+1)...(x+m)} = \sum_{m\geq 0} b_m \frac{m!}{(x+s)(x+s+1)...(x+s+m)}$$

où :

$$b_m = a_m + \binom{s}{1} a_{m-1} + \binom{s+1}{2} a_{m-2} + ... + \binom{s+m-1}{m} a_0$$

où les termes $\binom{n}{p}$ *désignent les coefficients binomiaux.(cf* $[$*G-L*$]$ *)*

En particulier pour $s=1$

$$\sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{x(x+1)...(x+m)} = \sum_{m\geq 0} m! \frac{a_m + a_{m-1} + ... + a_0}{(x+1)(x+2)...(x+1+m)}$$

Ce qui donne :

$$\sum_{m\geq 0} b_m \frac{m!}{(x+1)(x+2)...(x+1+m)} = \sum_{m\geq 0} (b_m - b_{m-1}) \frac{m!}{x(x+1)...(x+m)} \text{ avec } b_{-1} = 0 \tag{1.2}$$

---

et également dans l'article qui lui est réservé, à savoir :

N. Nielsen, *Sur la multiplication de deux séries de factorielles.*

Rendiconti della R.Acc. dei Lincei (5) , 13 (1904) , pp517-524.

Différentiation des séries de factorielles :

Soit une série de factorielles

$$a(x) = a_{-1} + \sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{(x, m+1)}$$

On a formellement, (cf [*G-L*] *)*

$$\frac{da}{dx} = -\sum_{m\geq 1} \left(\frac{a_0}{m} + \frac{a_1}{m-1} + ... + \frac{a_{m-1}}{1}\right) \frac{m!}{(x, m+1)} \tag{1.3}$$

1.3 Convergence d'une série formelle de factorielles :

Le champ de convergence absolue d'une série de factorielle $a(x)$ *est toujours un demi-plan de la forme :*$\{x|Re(x) > \omega\}$ *.*

On rappelle les résultats suivants :(pour plus de détail voir [*NIE*] *et* [*NOR*] [5]*)*

1. *Si une série de factorielles converge pour* $x = x_0,$ *elle converge pour tout* x *tel que* $Re(x) > Re(x_0)$
2. *Si une série de factorielles converge pour* $x = x_0,$ *elle converge absolument pour tout* x *tel que* $Re(x) > Re(x_0 + 1)$
3. *Si une série de factorielles converge absolument pour* $x = x_0,$ *elle converge absolument pour tout* x *tel que* $Re(x) > Re(x_0)$
4. *Si une série de factorielles converge pour* $x = x_0,$ *elle converge uniformément pour tout* x *tel que* $Re(x) \geq Re(x_0) + \varepsilon,$ *quelque soit* $\varepsilon > 0$
5. *S'il existe un réel* λ *tel qu'une série de factorielles donnée soit :*

   convergente pour tout x *tel que* $Re(x) > \lambda + \varepsilon$ *pour tout* $\varepsilon > 0$

   et divergente pour tout x *tel que* $Re(x) > \lambda - \varepsilon$ *pour tout* $\varepsilon > 0$

   alors ce réel λ *est appelé "abscisse de convergence " de cette série.*

[5] Nörlund appelle ces séries "Séries de facultés"

On montre, en fait, que ce nombre λ *peut être calculé en utilisant les formules de Landau suivantes :*

Soient :

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \left(Log\left(\left|\sum_{s=0}^{n} a_s\right|\right)/Log\, n \right)$$

$$\beta = \limsup_{n\to\infty} \left(Log\left(\left|\sum_{s=n}^{\infty} a_s\right|\right)/Log\, n \right)$$

Alors l'abscisse de convergence λ *de la série* $\sum_{m\geq 0} a_m \dfrac{m!}{(x,m+1)}$ *vérifie :*

$$\lambda = \begin{cases} \alpha & , \text{ si } \lambda \geq 0 \\ \beta & , \text{ si } \lambda < 0 \end{cases}$$

Dans le cas où $\lambda < 0$ *, il faut exclure du domaine de convergence les entiers négatifs ou nuls.*

Et on a, en particulier : si $x \to +\infty$ *, la série de factorielles converge uniformément vers son terme constant.*

De plus, on peut voir , en utilisant la transformée de Mellin, que : La somme, le produit, et la différentielle de séries de factorielles convergentes <u>est aussi une série convergente de factorielles</u> . Ce qui permet de parler des germes de séries convergentes de factorielles. (cf [*CH-G*] *ou* [*G-L*] *)*

L'ensemble des séries de factorielles convergentes sera noté $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}\{x\}$

1.4 Un théorème des fonctions implicites pour les séries formelles de factorielles :

Théorème 1.1

Soient données deux suites de nombres complexes $(\alpha_j)_{j\geq 1}$ *telles que* $\alpha_1 \neq 0$, *et* $(a_{m,j})$, $m \geq 0$, $j \geq 1$, *pour lesquelles la série*

$$F(x,Y) = \sum_{j\geq 1} \left\{ \alpha_j + \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,j} \frac{m!}{(x,m+1)} \right\} Y^j$$

converge absolument pour tout x *tel que* $Re(x) > \lambda$ *et* $|Y| < r$ *, où* λ *et* r *sont des nombres réels positifs donnés .*

Alors :

Il existe une unique série de factorielles $Y = \varphi(x)$ *convergente pour* $Re(x) > \lambda_0$ *(suffisamment grand) et vérifiant l'équation :* $F(x,Y) = 0$

Pour une preuve de ce théorème, voir [*H-T*]

Remarque 1 :

En d'autres termes, le théorème ci-dessus implique que toute série formelle de factorielles solution de l'équation : $F(x,Y) = 0$ *, est une série convergente .*

Remarque 2 :

Y. Sibuya affirme que le théorème reste vrai dans le cas où F a la forme :

$$F(x, Y) = \sum_{j \geq 1} \alpha_j Y^j + \sum_{m=0}^{+\infty} f_m(Y) \frac{m!}{(x, m+1)}$$

où les $f_m(Y)$ sont toutes analytiques pour $|Y| \leq r$, et F converge absolument pour tout x tel que $Re(x) > \lambda$ et $|Y| < r$.

Chapitre 2

Opérateurs agissant sur les séries formelles de factorielles

2.1 Classe d'opérateurs triangulaires

On notera par : $\mathfrak{M}\,[[x]]$ *l'ensemble des séries formelles de factorielles de la forme :*

$$\sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{(x, m+1)}$$

i.e les séries à termes constants nuls.

On rapelle que $\mathfrak{M}\,[[x]]$ *est l'idéal maximal de l'anneau local noetherien* $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}\,[[x]]$*, et qu'il vérifie* $\bigcap_{p>0}(\mathfrak{M}\,[[x]])^p = \{0\}$ *(ce qui fait de* $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}\,[[x]]$ *un espace de Hausdorff pour la topologie* $\mathfrak{M}\,[[x]]$ *-adique).*

Définition 2.1

Un opérateur linéaire $\varphi\,:\,\mathfrak{M}\,[[x]]\,\rightarrow\,\mathfrak{M}\,[[x]]$ *est dit* triangulaire *s'il est de la forme :*

$$\varphi\left(\sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{(x, m+1)}\right) = \sum_{m\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{m} \varphi_k(m-k)a_{m-k}\right)\frac{m!}{(x, m+1)}$$

où pour tout $k \in \mathbb{N}$ *,* $\varphi_k :\ \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$

On notera par $\mathcal{L}_0$ *l'ensemble de tels opérateurs.*

Ces opérateurs sont dit "triangulaires" parce qu'ils peuvent être représentés par une matrice triangulaire inférieure dans la base canonique de $\mathfrak{M}\,[[x]]$*.*

Définition 2.2

Un opérateur linéaire $\varphi : \mathfrak{M}\,[[x]] \rightarrow \mathfrak{M}\,[[x]]$ *est dit diagonal s'il est de la forme :*

$$\varphi\left(\sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{(x,m+1)}\right) = \sum_{m\geq 0} (\varphi_0(m)a_m)\,\frac{m!}{(x,m+1)}$$

où : $\varphi_0 :\ \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$

Définition 2.3

Soit φ *un opérateur triangulaire défini dans* $\mathfrak{M}\,[[x]]$*.*

On appelle "partie diagonale de φ" *l'opérateur noté* $diag(\varphi),$ *ou* $\varphi_0,$

et défini par :

$$diag(\varphi)(\sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{(x,m+1)}) = \varphi_0(\sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{(x,m+1)}) = \sum_{m\geq 0} \varphi_0(m) a_m \frac{m!}{(x,m+1)}$$

Remarque :

La partie diagonale d'un opérateur diagonale est évidemment égale à cet opérateur lui-même.

Exemples d'opérateurs triangulaires :

1. *L'identité est un opérateur triangulaire et même diagonal.*

   En effet :

$$id\left(\sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{(x,m+1)}\right) = \sum_{m\geq 0} (a_m)\,\frac{m!}{(x,m+1)}$$

   on a donc : $\varphi_k \equiv 0$ *pour tout* $k \neq 0$ *et* $\varphi_0(m) = 1$ *pour tout* m

2. *Tout opérateur diagonale est un opérateur triangulaire.*

   En effet :

   c'est le cas particulier où : $\varphi_k \equiv 0$ *pour tout* $k \neq 0$

3. *La transformation* $x \to x+1$ *définit un opérateur* φ *triangulaire*

   En effet : $\varphi : a(x) \to a(x+1)$

$$\varphi\left(\sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{(x,m+1)}\right) = \sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{(x+1,m+1)} = \sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{(x+1)...(x+m+1)}$$

   Et on a vu précédemment, cf équation (1.2), que :

$$\sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{(x+1)...(x+m+1)} = \sum_{m\geq 0} (a_m - a_{m-1}) \frac{m!}{(x,m+1)} \quad \text{, avec } a_{-1} = 0$$

   Par conséquent, il suffit de prendre pour tout m *:*

   $\varphi_k(m-k) = 0$ *pour* $k \neq 0$ *et* $k \neq 1,$

   $\varphi_0(m) = 1$ *et* $\varphi_1(m-1) = -1$

   On remarque que cet opérateur n'est pas diagonal.

4. *L'opérateur* $\varphi = xd/dx$ *défini dans* $\mathfrak{M}\,[[x]]$ *est un opérateur triangulaire*

   En effet : on a vu que

$$\frac{d}{dx}a(x) = -\sum_{m\geq 1}\left(\frac{a_0}{m} + \frac{a_1}{m-1} + ... + \frac{a_{m-1}}{1}\right)\frac{m!}{(x,m+1)}$$

   (ce qui est aussi triangulaire, prendre $\phi_0(m) = 0\ \forall m \geq 0,$

   et $\phi_k(m-k) = \dfrac{-1}{k}\ \forall m \geq 1$ *)*

De plus :

$$x\frac{d}{dx}a(x) = -\sum_{m\geq 1}\left(\frac{a_0}{m}+\frac{a_1}{m-1}+....+\frac{a_{m-1}}{1}\right)\frac{m!}{(x+1,m)}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} x\frac{d}{dx}a(x) &= -\sum_{m\geq 0}\left(\frac{a_0}{m+1}+\frac{a_1}{m}+....+\frac{a_m}{1}\right)\frac{(m+1)!}{(x+1,m+1)} \\ &= -\sum_{m\geq 0}A_m\frac{m!}{(x+1,m+1)} \end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{m\geq 0}A_m\frac{m!}{(x+1,m+1)} = \sum_{m\geq 0}(A_m-A_{m-1})\frac{m!}{(x,m+1)} \quad , \text{ avec } A_{-1}=0$$

et on a :

$$\begin{aligned} A_m - A_{m-1} &= (m+1)\left(\tfrac{a_0}{m+1}+\tfrac{a_1}{m}+....+\tfrac{a_m}{1}\right)-m\left(\tfrac{a_0}{m}+\tfrac{a_1}{m-1}+....+\tfrac{a_{m-1}}{1}\right) \\ &= (m+1)a_m+\sum_{0\leq k\leq m-1}ka_k\left(\frac{-1}{(m-k)(m-k+1)}\right) \\ &= (m+1)a_m+\sum_{1\leq k\leq m}(m-k)a_{m-k}\left(\frac{-1}{k(k+1)}\right) \end{aligned}$$

D'où :

$$x\frac{d}{dx}a(x) = \sum_{m\geq 0}\left(-(m+1)a_m+\sum_{1\leq k\leq m}\left(\frac{(m-k)}{k(k+1)}\right)a_{m-k}\right)\frac{m!}{(x,m+1)}$$

cela implique que :

$\varphi_k(m-k) = \dfrac{m-k}{k(k+1)}$ *pour tout* $k\neq 0$ *et* $\varphi_0(m) = -(m+1)$

5. *La multiplication par une série de factorielle donnée est un opérateur triangulaire*

En effet : Si on se donne une série de factorielle $b(x) = b_{-1} + \sum\limits_{0\leq m<+\infty} b_m \frac{m!}{(x,m+1)}$ *et on considère l'opérateur* φ *qui n'est autre que le produit par* $b(x)$

i.e

$$\varphi(a(x)) = b(x)a(x) = b_{-1}a(x) + \sum_{m\geq 0} c_m \frac{m!}{(x,m+1)}$$

où :

$$m!c_m = \sum_{k=1}^{m} (m-k)!(k-1)!a_{m-k}C_{m-k,k-1}$$

avec

$$C_{m-k,k-1} = \sum_{p=0}^{k-1} \tbinom{p+m-k}{p} b_{k-1-p}$$

on voit clairement que c'est un opérateur triangulaire pour lequel :

$$\varphi_k(m-k) = \frac{(m-k)!\,(k-1)!}{m!} C_{m-k,k-1} \text{ pour } k \neq 0 \text{ et } \varphi_0(m) = b_{-1}$$

2.2 Dominance entre séries factorielles et entre opérateurs triangulaires

2.2.1 Dominance terme à terme (entre séries de factorielles)

Définition 2.4

Soient deux séries de factorielles

$$a(x) = \sum_{m \geq 0} a_m \frac{m!}{(x, m+1)}$$

et

$$b(x) = \sum_{m \geq 0} b_m \frac{m!}{(x, m+1)} \quad \textit{où } b_m \geq 0 \textit{ pour tout } m$$

On dira que la série $b(x)$ domine terme à terme la série $a(x)$ si on a :

$$\textit{Pour tout } m \geq 0,\ |a_m| \leq b_m$$

Propositon 2.1

Soit : $a(x) = \sum_{m \geq 0} a_m \frac{m!}{(x, m+1)}$ *une série* convergente *de factorielles, d'abscisse de convergence λ.*

Alors :

Il existe une série de factorielles

$$b(x) = \sum_{m \geq 0} b_m \frac{m!}{(x, m+1)} \quad \textit{où } b_m \geq 0 \textit{ pour tout } m$$

convergente , et qui domine terme à terme la série $a(x)$.

Preuve :

Soit $\lambda' = \max(0, \lambda)$

On choisit $\omega = \lambda' + \varepsilon$ *pour un certain* $\varepsilon > 0$

Par hypothèse la série $a(x)$ *converge pour* $x = \omega$

Donc les termes de cette série tendent vers zéro quand $m \to +\infty$

Par conséquent : ils forment une suite bornée, et on peut trouver $M > 0$ *tel que :*

$$|a_m| \frac{m!}{(\omega, m+1)} \leq \frac{M}{\omega} \text{ pour tout } m$$

D'où :

$$|a_m| \leq M \frac{(\omega+1)(\omega+2)...(\omega+m)}{m!} \text{ pour tout } m$$

Soient maintenant : $\widetilde{\omega} = \omega + 1$

$$\text{et } b(x) = \sum_{m \geq 0} b_m \frac{m!}{(x, m+1)}$$

où :

$$b_m = M \frac{\widetilde{\omega}(\widetilde{\omega}+1)...(\widetilde{\omega}+m-1)}{m!}$$

Ces coefficients sont positifs et pour tout m *on a :* $|a_m| \leq b_m$

Par ailleurs on peut montrer que la série $b(x)$ *converge pour tout* x *tel que*

$Re(x) > \widetilde{\omega}$ *et on a :*

$$\frac{M}{x - \widetilde{\omega}} = \sum_{m \geq 0} M \frac{\widetilde{\omega}(\widetilde{\omega}+1)...(\widetilde{\omega}+m-1)}{(x, m+1)}$$

□

Remarque :

Si une série $b(x)$ domine terme à terme une série $a(x)$, les résultats de Landau impliquent que :

$$\boxed{\text{la convergence de } b(x) \text{ entraîne celle de } a(x) \text{ .}}$$

2.2.2 Dominance entre opérateurs :

Définition 2.5

Soient deux opérateurs triangulaires φ et ψ agissant sur les séries de factorielles.

On dira que

1. *$\underline{\varphi \text{ domine } \psi}$ si pour tout $m \geq 0,$ et pour tout $k,\ 0 \leq k \leq m$*

$$|\psi_k\,(m-k)| \leq |\varphi_k\,(m-k)|$$

2. *$\underline{\varphi \text{ domine bien } \psi}$ si ψ est dominé par un opérateur de la forme : $c(x)\,|diag(\varphi)|$*

   où

$$c(x) = 1 + \sum_{m \geq 0} c_m \frac{m!}{(x, m+1)}$$

   est une quelconque série convergente pour $Re(x) \geq \lambda \geq 0$ telle que $c_m \geq 0$, $\forall m$

   Cela veut dire que pour tout $m \geq 0, |\psi_0\,(m)| \leq |\varphi_0\,(m)|$

et pour tout $k,\ 1 \leq k \leq m$ *:*

$$|\psi_k\,(m-k)| \leq \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!}\,|\varphi_0\,(m-k)|\,C_{m-k,k-1} \quad \text{où}$$

$$C_{m-k,k-1} = \sum_{p=0}^{k-1} \tbinom{p+m-k}{p} c_{k-1-p}$$

3. *φ domine strictement ψ si :*

- *φ domine bien ψ*
- *et* $\lim_{m\to\infty} \dfrac{\psi_0(m)}{\varphi_0(m)} = 0$

Pour les opérateurs diagonaux, cette définition prend une forme beaucoup plus simple :

Définition 2.6

Soient deux opérateurs diagonaux φ et ψ agissant sur les séries de factorielles.

On dira que :

1. *ψ est dominé par φ si pour tout* $m \geq 0,$

$$|\psi_0\,(m)| \leq |\varphi_0\,(m)|$$

2. *ψ est bien dominé par φ si pour tout* $m \geq 0,$

$$|\psi_0\,(m)| \leq |\varphi_0\,(m)|$$

(Ainsi ces deux concepts coïncident pour les opérateurs diagonaux.)

3. *ψ est strictement dominé par φ si pour tout $m \geq 0,$*

$$|\psi_0\,(m)| \leq |\varphi_0\,(m)|$$
$$\text{et } \lim_{m\to\infty} \frac{\psi_0(m)}{\varphi_0(m)} = 0$$

Définition 2.7

Un opérateur triangulaire φ est dit " bon opérateur" s'il existe une série

$$c(x) = 1 + \sum_{m\geq 0} c_m \frac{m!}{(x, m+1)}$$

convergente pour $Re(x) \geq \lambda > 0$ à coefficients positifs , telle que :

pour tout $m \geq 0,$ et pour tout $k,\ 1 \leq k \leq m$

$$|\varphi_k\,(m-k)| \leq \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!}\,|\varphi_0\,(m-k)|\,C_{m-k,k-1}$$
$$\text{où } C_{m-k,k-1} = \sum_{p=0}^{k-1} \tbinom{p+m-k}{p} c_{k-1-p}$$

Cela veut dire qu'un bon opérateur est un opérateur qui se domine bien.

Remarque :

Tout opérateur diagonal est un bon opérateur.

En effet :

il suffit de prendre $c(x) = 1$ et on a évidemment pour tout $m \geq 0,$ et pour tout $k,\ 1 \leq k \leq m$

$$|\varphi_k(m-k)| = 0 \leq \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!}\,|\varphi_0\,(m-k)|\,C_{m-k,k-1}$$

Propositon 2.2

Tout opérateur triangulaire agissant sur $\mathfrak{M}\,[[x]]$ est strictement dominé par un bon opérateur.

Preuve :

Soit φ un opérateur triangulaire agissant sur les éléments de $\mathfrak{M}\,[[x]]$ à coefficients $\varphi_k(m-k), 0 \leq k \leq m, \; m \geq 0$

On construit une fonction $\psi_0 \; : \; \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout m

$$\psi_0(m) > 0 \text{ et } \psi_0(m) \geq (m+1)\,|\varphi_0(m)|$$

puis, on considère ψ l'opérateur diagonal défini par ψ_0 .

Alors :

1. *ψ est un bon opérateur car il est diagonal.*

2. *ψ domine bien φ*

   En effet : il suffit de considérer la série

$$c(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$$

   qui est convergente pour $Re(x) > 1$ et vérifie :

$$c(x) = 1 + \sum_{m \geq 0} \frac{m!}{(x, m+1)} \;, \text{ i.e } c_m = 1 \geq 0 \text{ pour tout } m$$

   Si l'opérateur $c(x).diag(\psi)$ domine terme à terme l'opérateur φ, on devrait avoir :

$$|\varphi_k(m-k)| \leq \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!}\,|\psi_k(m-k)|\, C_{m-k,k-1} \tag{2.1}$$

   où :

$$C_{m-k,k-1} = \sum_{p=0}^{k-1} \binom{p+m-k}{p}$$

   Or : $$\forall n, i \in \mathbb{N}\,;\, 0 \leq i \leq n \;, \binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$$

D'où :

$$C_{m-k,k-1} = \sum_{p=0}^{k-1} \binom{p+m-k}{p} = \sum_{p=0}^{k-1} \binom{p+m-k}{m-k}$$

$$C_{m-k,k-1} = \sum_{p=0}^{k-1} \binom{p+m-k}{m-k} = \sum_{p'=m-k}^{m-1} \binom{p'}{m-k}$$

Et en utilisant l'identité :

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}, \forall n, i\,; 0 \leq i \leq n$$

pour n *prenant toutes les valeurs* p' *et* $i = m-k,$ *on aboutit à :*

$$C_{m-k,k-1} = \sum_{p'=m-k}^{m-1} \binom{p'}{m-k} = \binom{m}{m-k+1}$$

En reportant ce résultat dans l'inégalité (2.1) *on obtient l'inégalité :*

$$|\varphi_k(m-k)| \leq \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!} |\psi_k(m-k)| \binom{m}{m-k+1} = \frac{1}{m-k+1} |\psi_k(m-k)|$$

Ou encore :

$$|\psi_k(m-k)| \geq (m-k+1) |\varphi_k(m-k)|$$

Or ceci est vérifié par le choix de ψ. *Ce qui prouve l'assertion étudiée.*

3. *Calcul de* $\lim_{m\to\infty} \dfrac{\varphi_0(m)}{\psi_0(m)}$

   Comme

$$\frac{|\varphi_0(m)|}{\psi_0(m)} \leq \frac{1}{m+1}$$

   alors

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|\varphi_0(m)|}{\psi_0(m)} = 0$$

□

USTHB

2.3 Opérateurs analytiques

Définition 2.8

Un opérateur $D : \mathcal{F}_{\mathbb{C}}\,[[x]] \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{C}}\,[[x]]$ *est dit* $\mathfrak{L}_{\circ}$*-analytique s'il existe :*

1. *une fonction* $F(x, Y_{0,}Y_1, ..., Y_n)$ *holomorphe pour* $Re(x) > \lambda$ *et* $\|Y\| < \rho$ *et telle que* $F(\infty, 0, ..., 0) = 0$, *(*λ *et* ρ *étant des réels positifs,* $Y = (Y_{0,}Y_1, ..., Y_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, *et* $\|.\|$ *désignant une norme de* $\mathbb{C}^{n+1}$*).*
2. *une suite finie :* $\theta_0 = id, \theta_1, ..., \theta_n$ *d'éléments de* $\mathfrak{L}_{\circ}$

telles que :

$$Du = F(x, u, \theta_1 u, ..., \theta_n u)$$

Cela veut dire que D *est une combinaison analytique d'éléments de* $\mathfrak{L}_{\circ}$ *à coefficients séries de factorielles.*

Remarque :

Pour étendre la définition des opérateurs triangulaires à tout $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}\,[[x]]$, *on fera l'hypothèse que de tels opérateurs n'agissent sur la constante* a_{-1} *qu'en la multipliant par une constante, qui sera nulle dans la majorité des cas que nous considérons, en particulier c'est le cas pour l'opérateur aux différences* Δ.
En d'autres termes notre hypothèse signifie que a_{-1} *n'intervient pas dans les coefficients non constants de* $\varphi(a(x))$ *si* φ *est triangulaire.*

Une fonction $F(x, Y_{0,} Y_1, ..., Y_n)$ holomorphe pour $Re(x) > \lambda$ et $\|Y\| < \rho$ et telle que $F(\infty, 0, ..., 0) = 0$, peut avoir l'un des développements suivants :

$$F(x, Y) = \sum_{|S|=1}^{+\infty} b_S Y^S + \sum_{m=0}^{+\infty} b_m(Y) \frac{m!}{(x, m+1)}$$

où les $b_m(Y)$ sont holomorphes dans un même polydisque ; ou le développement :

$$F(x, Y) = \sum_{|S|=1}^{+\infty} (b_S + a_S(x)) Y^S$$

où les $a_s(x) \in \mathfrak{M}\{x\}$ et sont toutes convergentes dans un même demi-plan.

On rappelle les notations :

$s = (s_0, s_1, ..., s_n)$, $|s| = s_0 + s_1 + ... + s_n$ *et* $Y^S = Y_0^{S_0} Y_1^{S_1} ... Y_n^{S_n}$

L'ensemble des opérateurs $\mathfrak{L}_{\mathsf{o}}-$analytiques sera noté : $\mathcal{D}(\mathfrak{L}_{\mathsf{o}})$

Remarque : *Chaque opérateur $D \in \mathcal{D}(\mathfrak{L}_{\mathsf{o}})$ peut s'écrire sous la forme :*

$$Du = \sum_{|S|\geq 1} b_S\, u^{S_0} (\theta_1 u)^{S_1} ... (\theta_n u)^{S_n} + \sum_{m+|S|=0}^{+\infty} a_{m,S}\, u^{S_0} (\theta_1 u)^{S_1} ... (\theta_n u)^{S_n} \frac{m!}{(x, m+1)}$$

Définition 2.9

On appellera "partie affine de D" , l'opérateur

$$D_1 u = \sum_{|S|=1} b_S\, u^{S_0} (\theta_1 u)^{S_1} ... (\theta_n u)^{S_n} + a_{0,0} \frac{1}{x}$$

Et on appellera "partie linéaire de D" , l'opérateur

$$D_0 u = \sum_{|S|=1} b_S\, u^{S_0} (\theta_1 u)^{S_1} ... (\theta_n u)^{S_n}$$

Remarque :

La partie linéaire de D est un opérateur linéaire.

2.4 Singularité des opérateurs $\mathfrak{L}_{\circ}$ -analytiques :

Définition 2.10

Un opérateur $\mathfrak{L}_{\circ}-$analytique D est dit "singulier" si :

$$D : \mathfrak{F}_{\mathbb{C}}\,[[x]] \longrightarrow \mathfrak{M}\,[[x]]$$

i.e

$$D\left(\mathfrak{F}_{\mathbb{C}}\,[[x]]\right) \subset \mathfrak{M}\,[[x]]$$

et donc :

$$D_{|_{\mathfrak{F}_{\mathbb{C}}\{x\}}} \;:\; \mathfrak{F}_{\mathbb{C}}\,\{x\} \longrightarrow \mathfrak{M}\,\{x\}$$

où : $\mathfrak{M}\,\{x\}$ *désigne le sous-ensemble de* $\mathfrak{M}\,[[x]]$ *des séries convergentes.*

Exemples :

*****) *L'identité* $id : \mathfrak{F}_{\mathbb{C}}\,[[x]] \longrightarrow \mathfrak{F}_{\mathbb{C}}\,[[x]]$ *n'est pas un opérateur singulier.*

En effet :

$$id\left(a_{-1} + \sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{(x, m+1)}\right) = a_{-1} + \sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{(x, m+1)} \notin \mathfrak{M}\,[[x]]$$

dès que $a_{-1} \neq 0$

*****) *Les opérateurs shift et shift inverse*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathfrak{F}_{\mathbb{C}}\,[[x]] & \longrightarrow & \mathfrak{F}_{\mathbb{C}}\,[[x]] \\ & a(x) & \longrightarrow & a(x+1) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1} : & \mathfrak{F}_{\mathbb{C}}\,[[x]] & \longrightarrow & \mathfrak{F}_{\mathbb{C}}\,[[x]] \\ & a(x) & \longrightarrow & a(x-1) \end{array}$$

ne sont pas des opérateurs singuliers.

En effet :

$$\varphi\left(a_{-1}+\sum_{m\geq 0}a_m\frac{m!}{(x,m+1)}\right)=a_{-1}+\frac{a_0}{x}+\sum_{m\geq 1}\left(a_m-a_{m-1}\right)\frac{m!}{(x,m+1)}\notin\mathfrak{M}[[x]]$$

dès que $a_{-1}\neq 0$

De même

$$\varphi^{-1}\left(a_{-1}+\sum_{m\geq 0}a_m\frac{m!}{(x,m+1)}\right)=a_{-1}+\sum_{m\geq 0}\left(a_0+a_1+\cdots+a_m\right)\frac{m!}{(x,m+1)}\notin\mathfrak{M}[[x]]$$

***)** *L'opérateur* $\varphi=xd/dx$ *, par-contre, est un opérateur singulier.*

En effet :

$$x\frac{d}{dx}:\mathfrak{F}_{\mathbb{C}}\left[[x]\right]\longrightarrow\mathfrak{F}_{\mathbb{C}}\left[[x]\right]$$

vérifie

$$x\frac{d}{dx}\left(a(x)\right)=x\frac{d}{dx}\left(a_{-1}+a'(x)\right)=x\frac{d}{dx}\left(a'(x)\right)$$

où $a'(x)=\sum_{m\geq 0}a_m\frac{m!}{(x,m+1)}$

Or d'après ce qui précède (cf formule de différentiation (1.3) page 13)

on a bien $x\frac{d}{dx}\left(a'(x)\right)\in\mathfrak{M}\left[[x]\right]$

Un exemple bien particulier : L'opérateur aux différences Δ

Par définition on a :

$$\begin{array}{rccc}\Delta: & \mathfrak{F}_{\mathbb{C}}\left[[x]\right] & \longrightarrow & \mathfrak{F}_{\mathbb{C}}\left[[x]\right]\\ & a(x) & \longmapsto & (x-1)[a(x)-a(x-1)]\end{array}$$

La transformation $x \longmapsto x-1$ *étant linéaire, la constante de* $a(x)$ *est donc éliminée par* Δ*, donc il sera pratique de considérer* $a(x) \in \mathfrak{M}\,[[x]]$.

D'autres part, on remarque que :

$$a(x) = a((x-1)+1) = \sum_{m\geq 0}(a_m - a_{m-1})\frac{m!}{(x-1,m+1)} \qquad (\text{où } a_{-1}=0)$$

(cf (1.2) page 12)

D'où :

$$\begin{aligned} a(x)-a(x-1) &= \sum_{m\geq 0}(a_m-a_{m-1})\frac{m!}{(x-1,m+1)} - \sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{(x-1,m+1)} \\ &= -\sum_{m\geq 1} a_{m-1}\frac{m!}{(x-1,m+1)} \\ &= -\sum_{m\geq 1} a_{m-1}\frac{m!}{(x-1)(x)(x+1)\cdots((x-1)+m)} \end{aligned}$$

En multipliant par $(x-1)$ *on a :*

$$\begin{aligned} \Delta a(x) &= -\sum_{m\geq 1} m a_{m-1}\frac{(m-1)!}{x(x+1)\cdots(x+(m-1))} \\ &= -\sum_{m\geq 0}(m+1)a_m\frac{m!}{(x,m+1)} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Δ *est donc un opérateur diagonal :*

$$\Delta_0(m) = -(m+1) \qquad \textit{pour}\; m\geq 0 \;\text{et aussi pour}\; m=-1.$$

En particulier Δ *est un bon opérateur.*

De plus Δ *domine strictement l'identité puisque :*

$$\forall m\geq 0,\ |id_0(m)| = 1 \leq |\Delta_0(m)| = m+1$$

et

$$\frac{id_0(m)}{\Delta_0(m)} = \frac{-1}{m+1} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

De même l'égalité (2.2) nous montre que Δ est un opérateur singulier.

Qu'en est-il des puissances de Δ ?

On a :

$$\Delta^2\, a(x) = \Delta\left(\sum_{m\geq 0}[-(m+1)a_m]\frac{m!}{(x,m+1)}\right) = \sum_{m\geq 0}(m+1)^2 a_m\frac{m!}{(x,m+1)} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^3\, a(x) &= -\sum_{m\geq 0}(m+1)^3 a_m\frac{m!}{(x,m+1)}\\
&\vdots\\
\Delta^k\, a(x) &= (-1)^k\sum_{m\geq 0}(m+1)^k\, a_m\frac{m!}{(x,m+1)}
\end{aligned}$$

Donc :

Pour tout $k \geq 1$, Δ^k est un opérateur diagonal singulier.

De plus Δ^k domine strictement les Δ^j pour $j < k$.

En effet :

$$\Delta_0^k(m) = (-1)^k(m+1)^k \qquad \textit{et} \qquad \Delta_0^j(m) = (-1)^j(m+1)^j$$

D'où :

$$|\Delta_0^j(m)| \leq |\Delta_0^k(m)| \qquad \textit{dès que } j \leq k$$

et on a :

$$\frac{|\Delta_0^j(m)|}{|\Delta_0^k(m)|} = \frac{1}{(m+1)^{k-j}} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

dès que $j < k$

Cet opérateur aux différences Δ est l'analogue de l'opérateur différentiel $x\dfrac{d}{dx}$.

Définition 2.11

Un opérateur singulier D est dit "singulier régulier" si pour toute série convergente $f(x) \in \mathcal{F}_{\mathbb{C}}\{x\}$, toute série formelle de factorielles solution de l'équation : $Du = f(x)$, est convergente.

Définition 2.12

Un opérateur singulier D est dit "singulier irrégulier" s'il existe une série convergente $f(x) \in \mathcal{F}_{\mathbb{C}}\{x\}$, pour laquelle il existe au moins une série de factorielles non convergente u qui vérifie l'équation : $Du = f(x)$.

Le problème principal qu'on se pose, c'est le suivant :

Quand est-ce qu'un opérateur $\mathfrak{L}_o-$analytique D est singulier régulier ?

Chapitre 3

Singularité régulière

et théorème de Maillet

3.1 Singularité régulière : 1er théorème

On se donne :

1. *une fonction* $F(x, X_0, X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_N) = F(x, X, Y)$ *holomorphe pour* $Re(x) > \lambda$, $\|X\| < \rho_n$ *et* $\|Y\| < \rho_N$ *et telle que* $F(\infty, 0, ..., 0) = 0$. λ, ρ_n *et* ρ_N *étant des réels positifs,* $X = (X_0, X_1, ..., X_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, $Y = (Y_1, ..., Y_N) \in \mathbb{C}^N$

2. *et une suite finie :* $\theta_0 = id, \theta_1, ..., \theta_n, \varphi_1, ..., \varphi_N$ *d'opérateurs triangulaires.*

et on se propose d'étudier l'équation :

$$Du = F(x, \theta_0 u, \theta_1 u, ..., \theta_n u, \varphi_1 u, ..., \varphi_N u) = 0$$

Ses solutions, quand elles existent, sont-elles convergentes ?

Pour cela, on écrira

$$F(x, X, Y) = \sum_{p \geq 1} F_p(x, X, Y)$$

où $F_p(x, X, Y)$ *est de la forme :*

$$F_p(x, X, Y) = \sum_{|\mathtt{r}|+|\mathtt{s}|=p} b_{\mathtt{r},\mathtt{s}} X^{\mathtt{r}} Y^{\mathtt{s}} + \sum_{m+|\mathtt{r}|+|\mathtt{s}|=p-1} a_{m,\mathtt{r},\mathtt{s}} X^{\mathtt{r}} Y^{\mathtt{s}} \frac{m!}{(x, m+1)} \tag{3.1}$$

Ici le degré total de chaque monôme dans la première somme est égal à $|\mathtt{r}| + |\mathtt{s}|$. *Par contre dans la seconde somme, il faut ajouter à cette quantité le degré de la factorielle d'argument* x *, à savoir* $(x, m+1)$*, qui, elle, est de degré* $m+1$.

Définition 3.1

On appellera "polynôme homogène" de degré p en les variables x, X_0 , $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_N$ toute expression de la forme (3.1).

Remarque :

Considéré comme polynôme en (X, Y), F_p est un polynôme à coefficients dans l'anneau des séries de factorielles $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}[[x]]$, de degré au plus p.

Soit q l'entier tel que $F_p \equiv 0$ pour tout $p < q$ et $F_q \not\equiv 0$

On supposera que F_q ne contient pas Y, c'est-à-dire

$$F_q(x, X, Y) = F_q(x, X) = \sum_{|\mathbf{r}|=q} b_{\mathbf{r}} X^{\mathbf{r}} + \sum_{m+|\mathbf{r}|=q-1} a_{m,\mathbf{r}} \frac{m!}{(x, m+1)} X^{\mathbf{r}}$$

Ce qui permet d'écrire $F(x, X, Y)$ sous la forme :

$$F(x, X, Y) = F_q(x, X) - \mathcal{R}_{q+1}(x, X, Y)$$

où : $\mathcal{R}_{q+1}(x, X, Y)$ contient tous les termes de degré supérieur ou égal à $q+1$, c'est-à-dire

$$\mathcal{R}_{q+1}(x, X, Y) = \sum_{|\mathbf{r}|+|\mathbf{s}|>q} b_{\mathbf{r},\mathbf{s}} X^{\mathbf{r}} Y^{\mathbf{s}} + \sum_{m+|\mathbf{r}|+|\mathbf{s}|>q-1} a_{m,\mathbf{r},\mathbf{s}} X^{\mathbf{r}} Y^{\mathbf{s}} \frac{m!}{(x, m+1)}$$

L' équation à étudier est une équation non linéaire.

Si $q = 1$, sa partie linéaire est non nulle.

De $F_q(x,X)$, on tire le polynôme suivant

$$C_q(T)=\sum_{|\mathtt{r}|=q} b_{\mathtt{r}}(T)^{r_0}(\theta_{1,0}(0)T)^{r_1}\dots(\theta_{n,0}(0)T)^{r_n}$$
$$+\sum_{m+|\mathtt{r}|=q-1} a_{m,\mathtt{r}}\{1\}(T)^{r_0}(\theta_{1,0}(0)T)^{r_1}\dots(\theta_{n,0}(0)T)^{r_n}$$

ou encore :

$$C_q(T)=\sum_{|\mathtt{r}|=q} b_{\mathtt{r}}\left(\prod_{0\le i\le n}(\theta_{i,0}(0))^{r_i}\right)T^q$$
$$+\sum_{m+|\mathtt{r}|=q-1} a_{m,\mathtt{r}}\{1\}\left(\prod_{0\le i\le n}(\theta_{i,0}(0))^{r_i}\right)T^{|\mathtt{r}|}$$

c'est-à-dire $C_q(T)$ est obtenu de $F_q(x,X)$ en remplaçant tout X_i par $\theta_{i,0}(0)T$, et tout rapport $\dfrac{m!}{(x,m+1)}$ par 1. Autrement dit :

$$C_q(T)=F_q(\{1\},T,\theta_{1,0}(0)T,\ \dots,\theta_{n,0}(0)T)$$

où le symbole $\{1\}$ signifie qu'on remplace les fractions de factorielles inverses $\dfrac{m!}{(x,m+1)}$ par 1.

De la même manière on construit le polynôme

$$C_{q,\mu}(T)=\frac{\partial F_q(x,X)}{\partial X_\mu}(\{1\},T,\theta_{1,0}(0)T,\ \dots,\theta_{n,0}(0)T)$$

c'est-à-dire :

$$C_{q,\mu}(T)=\sum_{|\mathtt{r}|=q}\mathtt{r}_\mu b_{\mathtt{r}}(\theta_{\mu,0}(0)T)^{r_\mu-1}\prod_{\substack{0\le i\le n\\ i\ne\mu}}(\theta_{i,0}(0)T)^{r_i}$$
$$+\sum_{m+|\mathtt{r}|=q-1}\mathtt{r}_\mu a_{m,\mathtt{r}}\{1\}(\theta_{\mu,0}(0)T)^{r_\mu-1}\prod_{\substack{0\le i\le n\\ i\ne\mu}}(\theta_{i,0}(0)T)^{r_i}$$

ou encore :

$$C_{q,\mu}(T) = \sum_{|\mathtt{r}|=q} \mathtt{r}_\mu b_\mathtt{r} \left(\theta_{\mu,0}(0)\right)^{r_\mu - 1} \prod_{\substack{0\leq i\leq n \\ i\neq\mu}} \left(\theta_{i,0}(0)\right)^{r_i} T^{|\mathtt{r}|-1}$$

$$+ \sum_{m+|\mathtt{r}|=q-1} \mathtt{r}_\mu a_{m,\mathtt{r}} \{1\} \left(\theta_{\mu,0}(0)\right)^{r_\mu - 1} \prod_{\substack{0\leq i\leq n \\ i\neq\mu}} \left(\theta_{i,0}(0)\right)^{r_i} T^{|\mathtt{r}|-1}$$

On utilisera les notations :

$$\theta u = (u, \theta_1 u, ..., \theta_n u)$$

$$\varphi u = (\varphi_1 u, ..., \varphi_N u)$$

Les hypothèses requises seront les suivantes :

***(H**$_1$) Parmi les opérateurs $\{\theta_i\}_{1\leq i\leq n}$, il y en a un, disons θ_μ , qui est un bon opérateur et qui domine strictement tous les autres θ_i, y compris l'identité.*

($\boldsymbol{H}_2$) *Cet opérateur θ_μ domine bien tous les opérateurs $\{\varphi_i\}_{1\leq i\leq N}$*

($\boldsymbol{H}_3$) *Les deux polynômes $C_q(T)$ et $C_{q,\mu}(T)$ n'ont pas de racine commune.*

Remarque :

Quitte à ré-indexer les θ_i, on peut toujours supposer, si nécessaire, que $\mu = n$.

Théorème 3.1

*Sous les hypothèses (**H**$_1$) ,(**H**$_2$) et (**H**$_3$) , toute série formelle de factorielles solution de l'équation*

$$Du = F\left(x, \theta_0 u, \theta_1 u, ..., \theta_n u, \varphi_1 u, ..., \varphi_N u\right) = 0$$

est convergente.

Démonstration :

1)Existence d'une solution formelle.

L'équation $Du = 0$ peut s'écrire sous la forme

$$F_q\left(x, \theta u\right) = \mathcal{R}_{q+1}\left(x, \theta u, \varphi u\right) \tag{3.2}$$

Soit $u = \sum_{m \geq 0} u_m \dfrac{m!}{(x, m+1)}$.

L'action sur u des opérateurs triangulaires $\{\theta_i\}_{0 \leq i \leq n}$ et $\{\varphi_j\}_{1 \leq j \leq N}$ donne :

$$\theta_i u = \sum_{m \geq 0} \Theta_{i,m} \frac{m!}{(x, m+1)} \qquad \text{où} \qquad \Theta_{i,m} = \sum_{k=0}^{m} \theta_{i,k}\left(m-k\right) u_{m-k}$$

et

$$\varphi_j u = \sum_{m \geq 0} \Phi_{j,m} \frac{m!}{(x, m+1)} \qquad \text{où} \qquad \Phi_{j,m} = \sum_{k=0}^{m} \varphi_{j,k}\left(m-k\right) u_{m-k}$$

En portant ces quantités dans l'équation (3.2), et en égalisant les coefficients de $\dfrac{m!}{(x, m+1)}$ *dans les deux membres de cette équation, on obtient :*

*) u_0 *à partir de l'équation égalisant les coefficients de plus bas ordre* q, *à savoir :*

$$\sum_{|\mathtt{r}|=q} b_{\mathtt{r}} \prod_{i=0}^{n} (\Theta_{i,0})^{\mathtt{r}_i} + \sum_{m+|\mathtt{r}|=q-1} a_{m,\mathtt{r}} \prod_{i=0}^{n} (\Theta_{i,0})^{\mathtt{r}_i} = 0$$

et qui donne :

$$\sum_{|\mathtt{r}|=q} b_{\mathtt{r}} \prod_{i=0}^{n} (\theta_{i,0}(0)\, u_0)^{\mathtt{r}_i} + \sum_{m+|\mathtt{r}|=q-1} a_{m,\mathtt{r}} \prod_{i=0}^{n} (\theta_{i,0}(0)\, u_0)^{\mathtt{r}_i} = 0$$

ou encore :

$$\left(\sum_{|\mathtt{r}|=q} b_{\mathtt{r}} \prod_{i=0}^{n} (\theta_{i,0}(0))^{\mathtt{r}_i} \right) (u_0)^q + \sum_{m'+|\mathtt{r}|=q-1} a_{m',\mathtt{r}} \prod_{i=0}^{n} (\theta_{i,0}(0))^{\mathtt{r}_i} (u_0)^{|\mathtt{r}|} = 0$$

qui n'est rien d'autre que l'équation :

$$C_q(u_0) = 0$$

*) *et* u_m *à partir de l'équation égalisant les coefficients d'ordre* $(q+m-1)$ *après développement en séries de factorielles des différents produits* $\frac{k!}{(x,k+1)} \cdot \frac{l!}{(x,l+1)}$ *apparaissant dans l'équation, d'où :*

$$\begin{aligned} &\sum_{|\mathtt{r}|=q} b_{\mathtt{r}} \sum_{i=0}^{n} \mathtt{r}_i \Theta_{i,m} (\Theta_{i,0})^{\mathtt{r}_i - 1} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (\Theta_{j,0})^{\mathtt{r}_j} \\ &\quad + \sum_{m'+|\mathtt{r}|=q-1} a_{m',\mathtt{r}} \sum_{i=0}^{n} \mathtt{r}_i \Theta_{i,m} (\Theta_{i,0})^{\mathtt{r}_i - 1} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (\Theta_{j,0})^{\mathtt{r}_j} \\ &= f_m (\Theta_{0,0}, \Theta_{0,1}, ..., \Theta_{0,m-1}; \Theta_{1,0}, ..., \Theta_{1,m-1}; ...; \Theta_{n,0}, ..., \Theta_{n,m-1}; \\ &\qquad \Phi_{1,0}, \Phi_{1,1}, ..., \Phi_{1,m-1}; \Phi_{2,0}, ..., \Phi_{2,m-1}; ...; \Phi_{N,0}, ..., \Phi_{N,m-1}, (A)) \end{aligned}$$

où f_m *est un polynôme en tous ses arguments, et* (A) *est le reste des arguments de* $\mathcal{R}_{q+1}(x, \theta u, \varphi u)$.

Ce qui donne, en explicitant les $\Theta_{i,m'}$ *et* $\Phi_{j,m'}$

$$\begin{aligned}
& u_m \left\{ \sum_{|\mathtt{r}|=q} b_{\mathtt{r}} \sum_{i=0}^{n} \mathtt{r}_i \theta_{i,0}(m) \left(\theta_{i,0}(0) u_0\right)^{\mathtt{r}_i - 1} \prod_{j \neq i} \left(\theta_{j,0}(0) u_0\right)^{\mathtt{r}_j} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{m' + |\mathtt{r}| = q-1} a_{m',\mathtt{r}} \sum_{i=0}^{n} \mathtt{r}_i \theta_{i,0}(m) \left(\theta_{i,0}(0) u_0\right)^{\mathtt{r}_i - 1} \prod_{j \neq i} \left(\theta_{j,0}(0) u_0\right)^{\mathtt{r}_j} \right\} \\
& + \sum_{|\mathtt{r}|=q} b_{\mathtt{r}} \sum_{i=0}^{n} \mathtt{r}_i \sum_{k=1}^{m} \theta_{i,k}(m-k) u_{m-k} \left(\theta_{i,0}(0) u_0\right)^{\mathtt{r}_i - 1} \prod_{j \neq i} \left(\theta_{j,0}(0) u_0\right)^{\mathtt{r}_j} \\
& + \sum_{m' + |\mathtt{r}| = q-1} a_{m',\mathtt{r}} \sum_{i=0}^{n} \mathtt{r}_i \sum_{k=1}^{m} \theta_{i,k}(m-k) u_{m-k} \left(\theta_{i,0}(0) u_0\right)^{\mathtt{r}_i - 1} \prod_{j \neq i} \left(\theta_{j,0}(0) u_0\right)^{\mathtt{r}_j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = f_m(u_0, u_1, ..., u_{m-1}; \theta_{1,0}(0) u_0, \theta_{1,0}(1) u_1 + \theta_{1,1}(0) u_0, ..., \\
& \quad \sum_{k=0}^{m-1} \theta_{1,k}((m-1)-k) u_{(m-1)-k}; \cdots, \theta_{n,0}(0) u_0, ..., \\
& \quad \sum_{k=0}^{m-1} \theta_{n,k}((m-1)-k) u_{(m-1)-k}; \varphi_{1,0}(0) u_0, \varphi_{1,0}(1) u_1 + \varphi_{1,1}(0) u_0, \cdots, \\
& \quad \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_{j,k}((m-1)-k) u_{(m-1)-k}; \varphi_{2,0}(0) u_0, ..., \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_{2,k}((m-1)-k) u_{(m-1)-k}; \\
& \qquad \cdots; \varphi_{N,0}(0) u_0, \cdots, \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_{N,k}((m-1)-k) u_{(m-1)-k}, (A))
\end{aligned}$$

On note par $F_{q,m}(u_0)$ *l'expression :*

$$\begin{aligned}
F_{q,m}(u_0) = & \left\{ \sum_{|\mathtt{r}|=q} b_{\mathtt{r}} \sum_{i=0}^{n} \mathtt{r}_i \theta_{i,0}(m) \left(\theta_{i,0}(0) u_0\right)^{\mathtt{r}_i - 1} \prod_{j \neq i} \left(\theta_{j,0}(0) u_0\right)^{\mathtt{r}_j} \right. \\
& \left. + \sum_{m' + |\mathtt{r}| = q-1} a_{m',\mathtt{r}} \sum_{i=0}^{n} \mathtt{r}_i \theta_{i,0}(m) \left(\theta_{i,0}(0) u_0\right)^{\mathtt{r}_i - 1} \prod_{j \neq i} \left(\theta_{j,0}(0) u_0\right)^{\mathtt{r}_j} \right\}
\end{aligned}$$

Par conséquent u_m peut être obtenu à partir de l'équation :

$$
\begin{aligned}
F_{q,m}(u_0)\, u_m \;=\;& P_m(u_0, u_1, ..., u_{m-1}, \theta_{1,0}(0)\, u_0, (\theta_{1,0}(1)\, u_1 + \theta_{1,1}(0)\, u_0), . \\
& .., \sum_{k=0}^{m-1} \theta_{1,k}((m-1)-k)\, u_{(m-1)-k}; ..., \theta_{n,0}(0)\, u_0, ..., \\
& \sum_{k=0}^{m-1} \theta_{n,k}((m-1)-k)\, u_{(m-1)-k}; \varphi_{1,0}(0)\, u_0, \left(\varphi_{1,0}(1)\, u_1 + \varphi_{1,1}(0)\, u_0\right), ..., \\
& \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_{j,k}((m-1)-k)\, u_{(m-1)-k}; \varphi_{2,0}(0)\, u_0, ..., \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_{2,k}((m-1)-k)\, u_{(m-1)-k}; \\
& \cdots; \varphi_{N,0}(0)\, u_0, \cdots, \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_{N,k}((m-1)-k)\, u_{(m-1)-k}, (A))
\end{aligned}
$$

où P_m est un polynôme en tous ses arguments.

Ainsi :

Pour toute racine u_0 du polynôme $C_q(T)$ qui vérifie $F_{q,m}(u_0) \neq 0$ pour tout m, l'équation $Du = 0$ admet une solution série formelle de factorielles , dont le premier terme est $u_0 \dfrac{1}{x}$.

Remarque :

L'égalité $F_{q,m}(u_0) = 0$, pour certains m, n'implique pas la non existence d'une solution pour l'équation $Du = 0$. Le but ici étant de montrer la convergence d'une éventuelle solution, cette première section de la démonstration sert seulement à caractériser cette solution. Maintenant, si pour certains m, $F_{q,m}(u_0) = 0$, il est facile de voir que seul un nombre fini de termes d'une série convergente devrait être modifié, ce qui ne changera pas la nature de cette série.

2) Convergence d'une solution formelle.

D'après l'hypothèse ($\mathbf{H}_1$), θ_μ est un bon opérateur qui domine strictement tous les autres θ_i , 0$\leq i \leq n.$ Par conséquent il domine bien $\theta_0 = id.$

Cela entraîne l'existence d'une constante $c_{0,0}$ telle que pour tout $m = 0, 1, ...$

$$1 \leq c_{0,0} \left|\theta_{\mu,0}(m)\right|$$

De là, on remarque que $c_{0,0} \neq 0$, et quitte à normaliser θ_μ , on peut supposer que $c_{0,0} = 1.$

Par conséquent :

$$1 \leq \left|\theta_{\mu,0}(m)\right| \ , \ \ \forall m \geq 0$$

D'où, en particulier, $\theta_{\mu,0}(m) \neq 0$, $\forall m \geq 0$

D'autres part, comme θ_μ domine strictement tous les θ_i , pour $i = 0, 1, ..., n,\ i \neq \mu$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\theta_{i,0}(m)}{\theta_{\mu,0}(m)} = 0 \ , \ \ \forall i \neq \mu$$

D'où :

$$\lim_{m\to\infty} \frac{F_{q,m}(u_0)}{\theta_{\mu,0}(m)} = \sum_{|\mathtt{r}|=q} b_{\mathtt{r}} \mathtt{r}_\mu \left(\theta_{\mu,0}(0)\, u_0\right)^{\mathtt{r}_\mu - 1} \prod_{j\neq\mu} \left(\theta_{j,0}(0)\, u_0\right)^{\mathtt{r}_j}$$
$$+ \sum_{m'+|\mathtt{r}|=q-1} a_{m',\mathtt{r}} \mathtt{r}_\mu \left(\theta_{\mu,0}(0)\, u_0\right)^{\mathtt{r}_\mu - 1} \prod_{j\neq\mu} \left(\theta_{j,0}(0)\, u_0\right)^{\mathtt{r}_j}$$

$$= C_{q,\mu}(u_0) \neq 0$$

puisque u_0 est un zéro du polynôme $C_q(T)$.

Par conséquent :

il existe un réel $\sigma > 0$ *, et il existe* $\tilde{m}$ *tel que pour tout* $m \geq \tilde{m}$

$$\left| \frac{F_{q,m}(u_0)}{\theta_{\mu,0}(m)} \right| \geq \sigma ,$$

d'où :

$$|F_{q,m}(u_0)| \geq \sigma |\theta_{\mu,0}(m)| \ , \ \ \forall m \geq \tilde{m}$$

Pour les $m < \tilde{m}$ *, si* $F_{q,m}(u_0)$ *est toujours non nul , alors il existe un* $\sigma' > 0$ *(non nécessairement égal à* σ *) tel que*

$$|F_{q,m}(u_0)| \geq \sigma' |\theta_{\mu,0}(m)| \ , \ \ \forall m < \tilde{m}$$

On notera de la même façon σ *et le minimum entre* σ *et* σ'*, ce qui donne*

$$|F_{q,m}(u_0)| \geq \sigma |\theta_{\mu,0}(m)| \ , \ \ \forall m \geq 0 \tag{3.3}$$

et donc :

$$\begin{aligned} |u_m| \leq \frac{1}{|F_{q,m}(u_0)|} \Bigg| \quad & P_m(u_0, u_1, ..., u_{m-1}, \theta_{1,0}(0)\, u_0, (\theta_{1,0}(1)\, u_1 + \theta_{1,1}(0)\, u_0), \\ & ..., \sum_{k=0}^{m-1} \theta_{1,k}((m-1)-k)\, u_{(m-1)-k}; ..., \theta_{n,0}(0)\, u_0, ..., \\ & \sum_{k=0}^{m-1} \theta_{n,k}((m-1)-k)\, u_{(m-1)-k}; \varphi_{1,0}(0)\, u_0, \left(\varphi_{1,0}(1)\, u_1 + \varphi_{1,1}(0)\, u_0\right), ..., \\ & \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_{j,k}((m-1)-k)\, u_{(m-1)-k}; \varphi_{2,0}(0)\, u_0, ..., \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_{2,k}((m-1)-k)\, u_{(m-1)-k}; \\ & \cdots; \varphi_{N,0}(0)\, u_0, \cdots, \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_{N,k}((m-1)-k)\, u_{(m-1)-k}, (A)) \Bigg| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\sigma\left|\theta_{\mu,0}(m)\right|}\left| \quad P_m(u_0,u_1,...,u_{m-1},\theta_{1,0}\left(0\right)u_0,\left(\theta_{1,0}\left(1\right)u_1+\theta_{1,1}\left(0\right)u_0\right),\right.$$

$$...,\sum_{k=0}^{m-1}\theta_{1,k}\left((m-1)-k\right)u_{(m-1)-k};...,\theta_{n,0}\left(0\right)u_0,...,$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}\theta_{n,k}\left((m-1)-k\right)u_{(m-1)-k};\varphi_{1,0}\left(0\right)u_0,\left(\varphi_{1,0}\left(1\right)u_1+\varphi_{1,1}\left(0\right)u_0\right),...,$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}\varphi_{j,k}\left((m-1)-k\right)u_{(m-1)-k};\varphi_{2,0}\left(0\right)u_0,...,$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}\varphi_{2,k}\left((m-1)-k\right)u_{(m-1)-k};\cdots;$$

$$\left.\varphi_{N,0}\left(0\right)u_0,\cdots,\sum_{k=0}^{m-1}\varphi_{N,k}\left((m-1)-k\right)u_{(m-1)-k},(A))\right|$$

Remarque :

Si pour certains $m<\tilde{m}$, $F_{q,m}\left(u_0\right)=0$, alors on peut voir que le reste de la démonstration marche bien puisque seul un nombre fini de termes de la série u pourrait changer, ce qui n'altère pas sa nature.

D'autre part, comme θ_μ domine bien tous les opérateurs intervenant dans F,

– *il existe des séries de factorielles*

$$C_i(x)=1+\sum_{m\geq 0}c_m^i\frac{m!}{(x,m+1)}$$

convergentes telles que $C_i|diag\theta_\mu|$ domine θ_i

i.e pour tout $m\geq 0, \left|\theta_{i,0}\left(m\right)\right|\leq\left|\theta_{\mu,0}\left(m\right)\right|$

et pour tout $k,\ 1\leq k\leq m$:

$$\left|\theta_{i,k}\left(m-k\right)\right|\leq\frac{(m-k)!(k-1)!}{m!}\left|\theta_{\mu,0}\left(m-k\right)\right|C_{m-k,k-1}^i \quad \text{où}$$

$$C_{m-k,k-1}^i=\sum_{p=0}^{k-1}\binom{p+m-k}{p}c_{k-1-p}^i$$

– *il existe des séries de factorielles*

$$D_j(x) = 1 + \sum_{m\geq 0} d_m^j \frac{m!}{(x, m+1)}$$

convergentes telles que $D_j|diag\theta_\mu|$ *domine* φ_j

i.e pour tout $m \geq 0, |\varphi_{j,0}(m)| \leq |\theta_{\mu,0}(m)|$

et pour tout $k,\ 1 \leq k \leq m$ *:*

$$|\varphi_{j,k}(m-k)| \leq \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!} |\theta_{\mu,0}(m-k)|\, D^j_{m-k,k-1} \quad \text{où}$$

$$D^j_{m-k,k-1} = \sum_{p=0}^{k-1} \binom{p+m-k}{p} d^i_{k-1-p}$$

et ce, pour tout $i,\ 0 \leq i \leq n$*, et pour tout* $j,\ 1 \leq j \leq N$

Les séries $C_i(x)$ *et* $D_j(x)$ *sont toutes convergentes. Comme elles sont en nombre fini, on peut trouver un réel* $\lambda' > 0$ *telles que toutes ces séries convergent pour* $Re(x) > \lambda'$*.*

Le reste de la démonstration consiste en la construction d'une série majorante pour $u(x)$*, soit :*

$$V(x) = \sum_{m\geq 0} V_m \frac{m!}{(x, m+1)}$$

dont la convergence entrainera celle de $u(x)$*.*

Pour cela, on considère l'équation analytique :

$$\begin{aligned}\sigma_1 \frac{1}{(x, q-1)} V = \mu_1 \frac{1}{(x, q)} \ &+ \sum_{|\mathtt{r}|=q} |b_{\mathtt{r}}| \prod_{i=0}^{n} (C_i(x)V)^{\mathtt{r}_i} \\ &+ \sum_{m+|\mathtt{r}|=q-1} |a_{m,\mathtt{r}}| \frac{m!}{(x, m+1)} \prod_{i=0}^{n} (C_i(x)V)^{\mathtt{r}_i} \\ &+ |\mathcal{R}_{q+1}| (x, V, C_1(x)V, \cdots, C_n(x)V, D_1(x)V, \cdots, D_N(x)V)\end{aligned} \tag{3.4}$$

où σ_1 et μ_1 sont des nombres réels à déterminer, et $|\mathcal{R}_{q+1}|$ est une série convergente majorante pour $\mathcal{R}_{q+1}$, i.e qui la domine terme à terme. Rappelons que la Proposition 2.1, et le fait que F soit holomorphe, affirment l'existence de $|\mathcal{R}_{q+1}|$. Cette équation est obtenue à partir de (3.2) en prenant des séries majorantes et en remplaçant les X_i par $C_i(x)V$ et les Y_j par $D_j(x)V$. Un terme d'ordre q est ajouté pour le besoin des calculs. En appliquant à l'équation (3.4) le changement de variable $V = \frac{1}{x}W$, on peut montrer que l'équation ainsi obtenue satisfait aux conditions du Théorème des fonctions implicites pour les séries de factorielles (cf §1.4), ce qui permettra de conclure l'existence d'une unique solution W convergente. D'où la convergence et l'unicité de la solution V de (3.4).

Remarque :

Si $q = 1$ on remplacera le terme en σ_1 par : $\sigma_1 V$ qui est d'ordre 1.

Le but maintenant est de montrer que pour un choix approprié des paramètres σ_1 et μ_1, la série convergente V devient une série majorante pour toute solution u de l'équation $Du = 0$, ce qui entrainera la convergence de celle-ci.

Pour cela, on remarque que les coefficients de V sont obtenus à partir de (3.4) comme suit :

**) V_0 à partir de l'équation :*

$$\sigma_1 V_0 = \mu_1 + \sum_{|\mathbf{r}|=q} |b_{\mathbf{r}}| \prod_{0\le i\le n} (V_0)^{\mathbf{r}_i} + \sum_{m'+|\mathbf{r}|=q-1} \left|a_{m',\mathbf{r}}\right| \prod_{0\le i\le n} (V_0)^{\mathbf{r}_i}$$

*) V_m *à partir de l'équation :*

$$\left\{ \sigma_1 - \sum_{|\mathtt{r}|=q} |b_{\mathtt{r}}| \sum_{0\le i\le n} \mathtt{r}_i \left(V_0\right)^{\mathtt{r}_i-1} \prod_{j\neq i} \left(V_0\right)^{\mathtt{r}_j} \right.$$
$$\left. - \sum_{m'+|\mathtt{r}|=q-1} \left|a_{m',\mathtt{r}}\right| \sum_{0\le i\le n} \mathtt{r}_i \left(V_0\right)^{\mathtt{r}_i-1} \prod_{j\neq i} \left(V_0\right)^{\mathtt{r}_j} \right\} V_m =$$

$$\sum_{|\mathtt{r}|=q} |b_{\mathtt{r}}|\, G_{\mathtt{r}}\left(V_0, V_1, \cdots, V_{m-1}\right) + \sum_{m'+|\mathtt{r}|=q-1} \left|a_{m',\mathtt{r}}\right| H_{m',\mathtt{r}}\left(V_0, V_1, \cdots, V_{m-1}\right)$$
$$+ P_m^{\star}\left(x, V_0, V_1, \cdots, V_{m-1}; \left\{ \sum_{q\le k\le m} \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!} V_{m-k} C^0_{m-k,k-1} \right\}_{m\ge q}; \right.$$
$$\cdots; \left\{ \sum_{q\le k\le m} \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!} V_{m-k} C^n_{m-k,k-1} \right\}_{m\ge q}; \cdots;$$
$$+ \left\{ \sum_{q\le k\le m} \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!} V_{m-k} D^0_{m-k,k-1} \right\}_{m\ge q}; \cdots;$$
$$\left. + \left\{ \sum_{q\le k\le m} \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!} V_{m-k} D^N_{m-k,k-1} \right\}_{m\ge q}; (|A|) \right)$$

où $G_{\mathtt{r}}\left(V_0, V_1, \cdots, V_{m-1}\right)$ *(respectivement* $H_{m',\mathtt{r}}\left(V_0, V_1, \cdots, V_{m-1}\right)$*), est le coefficient de la factorielle* $\dfrac{(m+q-1)!}{(x, m+q)}$ *provenant du produit* $\prod_{0\le i\le n} \left((C_i(x)-1)V\right)^{\mathtt{r}_i}$ *(respectivement du produit* $\dfrac{(m')!}{(x, m'+1)} \prod_{0\le i\le n} \left((C_i(x)-1)V\right)^{\mathtt{r}_i}$*, et où* $P_m^{\star}$ *est obtenu à partir de* P_m *en prenant les valeurs absolues des coefficients et en remplaçant les coefficients de la famille* A *par les majorants notés* $|A|$*.*

On peut maintenant faire notre choix des paramètres σ_1 et μ_1 de la façon suivante :

1. *On choisit d'abord V_0 tel que : $|u_0| \leq |\theta_{\mu,0}(0)||u_0| \leq V_0$,*

2. *puis σ_1 tel que :*

$$0 < \left\{ \sigma_1 - \sum_{|\mathtt{r}|=q} |b_{\mathtt{r}}| \sum_{0 \leq i \leq n} \mathtt{r}_i (V_0)^{\mathtt{r}_i - 1} \prod_{j \neq i} (V_0)^{\mathtt{r}_j} \right.$$
$$\left. - \sum_{m'+|\mathtt{r}|=q-1} \left|a_{m',\mathtt{r}}\right| \sum_{0 \leq i \leq n} \mathtt{r}_i (V_0)^{\mathtt{r}_i - 1} \prod_{j \neq i} (V_0)^{\mathtt{r}_j} \right\} < \sigma$$

D'où :

$$0 < \frac{1}{\sigma} \left\{ \sigma_1 - \sum_{|\mathtt{r}|=q} |b_{\mathtt{r}}| \sum_{0 \leq i \leq n} \mathtt{r}_i (V_0)^{\mathtt{r}_i - 1} \prod_{j \neq i} (V_0)^{\mathtt{r}_j} \right.$$
$$\left. - \sum_{m'+|\mathtt{r}|=q-1} \left|a_{m',\mathtt{r}}\right| \sum_{0 \leq i \leq n} \mathtt{r}_i (V_0)^{\mathtt{r}_i - 1} \prod_{j \neq i} (V_0)^{\mathtt{r}_j} \right\} < 1$$

3. *et enfin μ_1 tel que V_0 soit solution de l'équation polynômiale :*

$$\sigma_1 V_0 = \mu_1 + \sum_{|\mathtt{r}|=q} |b_{\mathtt{r}}| \prod_{0 \leq i \leq n} (V_0)^{\mathtt{r}_i} + \sum_{m'+|\mathtt{r}|=q-1} \left|a_{m',\mathtt{r}}\right| \prod_{0 \leq i \leq n} (V_0)^{\mathtt{r}_i}$$

On montrera par récurrence sur m que :

$$|u_m| \leq |\theta_{\mu,0}(m)|\,|u_m| \leq V_m \ , \ \ \forall m \geq 0$$

C'est déjà vrai pour $m = 0$, suivant le choix qu'on a fait de V_0.

On supposera donc que

$$|u_p| \leq |\theta_{\mu,0}(p)|\,|u_p| \leq V_p \ , \ \ \forall p, 0 \leq p < m$$

et on montrera que ceci est encore vrai pour $p = m$*.*

Comme pour tout $k,\ 1 \leq k \leq m$*, et pour tout* i, j *on a :*

$$\left|\theta_{i,k}\left(m-k\right)\right| \leq \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!}\left|\theta_{\mu,0}\left(m-k\right)\right| C^{i}_{m-k,k-1}$$

et

$$\left|\varphi_{j,k}\left(m-k\right)\right| \leq \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!}\left|\theta_{\mu,0}\left(m-k\right)\right| D^{j}_{m-k,k-1}$$

alors :

$$\begin{aligned}\left|\theta_{i,k}\left(m-k\right)\right|\left|u_{m-k}\right| &\leq \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!}\left|\theta_{\mu,0}\left(m-k\right)\right|\left|u_{m-k}\right| C^{i}_{m-k,k-1} \\ &\leq \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!} V_{m-k} C^{i}_{m-k,k-1}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left|\varphi_{j,k}\left(m-k\right)\right|\left|u_{m-k}\right| &\leq \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!}\left|\theta_{\mu,0}\left(m-k\right)\right|\left|u_{m-k}\right| D^{j}_{m-k,k-1} \\ &\leq \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!} V_{m-k} D^{j}_{m-k,k-1}\end{aligned}$$

En revenant maintenant à la formule majorant $|u_m|$, on obtient ainsi :

$$|u_m| \leq \frac{1}{(\sigma|\theta_{\mu,0}(m)|)} \left\{ \sum_{|\mathtt{r}|=q} |b_{\mathtt{r}}|\, G_{\mathtt{r}}\left(V_0, V_1, \cdots, V_{m-1}\right) \right.$$

$$+ \sum_{m'+|\mathtt{r}|=q-1} \left|a_{m',\mathtt{r}}\right| H_{m',\mathtt{r}}\left(V_0, V_1, \cdots, V_{m-1}\right)$$

$$+ P_m^{\star}\left(x, V_0, V_1, \cdots, V_{m-1}; \left\{ \sum_{q\leq k\leq m} \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!} V_{m-k} C^0_{m-k,k-1} \right\}_{m\geq q};\right.$$

$$\cdots; \left\{ \sum_{q\leq k\leq m} \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!} V_{m-k} C^n_{m-k,k-1} \right\}_{m\geq q}; \cdots;$$

$$+ \left\{ \sum_{q\leq k\leq m} \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!} V_{m-k} D^0_{m-k,k-1} \right\}_{m\geq q}; \cdots;$$

$$\left. \left. + \left\{ \sum_{q\leq k\leq m} \frac{(m-k)!(k-1)!}{m!} V_{m-k} D^N_{m-k,k-1} \right\}_{m\geq q}; (|A|) \right) \right\}$$

D'où :

$$|u_m| \leq \frac{1}{(\sigma|\theta_{\mu,0}(m)|)} \left\{ \sigma_1 - \sum_{|\mathtt{r}|=q} |b_{\mathtt{r}}| \sum_{0\leq i\leq n} \mathtt{r}_i \left(V_0\right)^{\mathtt{r}_i-1} \prod_{j\neq i} \left(V_0\right)^{\mathtt{r}_j} \right.$$

$$\left. - \sum_{m'+|\mathtt{r}|=q-1} \left|a_{m',\mathtt{r}}\right| \sum_{0\leq i\leq n} \mathtt{r}_i \left(V_0\right)^{\mathtt{r}_i-1} \prod_{j\neq i} \left(V_0\right)^{\mathtt{r}_j} \right\} V_m$$

et donc :

$$|\theta_{\mu,0}(m)||u_m| \leq \frac{1}{\sigma} \left\{ \sigma_1 - \sum_{|\mathtt{r}|=q} |b_{\mathtt{r}}| \sum_{0\leq i\leq n} \mathtt{r}_i \left(V_0\right)^{\mathtt{r}_i-1} \prod_{j\neq i} \left(V_0\right)^{\mathtt{r}_j} \right.$$

$$\left. - \sum_{m'+|\mathtt{r}|=q-1} \left|a_{m',\mathtt{r}}\right| \sum_{0\leq i\leq n} \mathtt{r}_i \left(V_0\right)^{\mathtt{r}_i-1} \prod_{j\neq i} \left(V_0\right)^{\mathtt{r}_j} \right\} V_m \ \leq V_m$$

Mais on sait que $1 \leq |\theta_{\mu,0}(m)|$ *pour tout* m*, d'où :*

$$|u_m| \leq |\theta_{\mu,0}(m)|\,|u_m| \leq V_m$$

Ce qui prouve que :

$$\forall m \geq 0\ ,\ \ |u_m| \leq |\theta_{\mu,0}(m)|\,|u_m| \leq V_m$$

Par conséquent,

la série $V(x) = \sum_{m\geq 0} V_m \dfrac{m!}{(x, m+1)}$ *domine la série* $u(x) = \sum_{m\geq 0} u_m \dfrac{m!}{(x, m+1)}$*.*

Comme $V(x)$ *converge, alors* $u(x)$ *converge aussi.*

$\square$

3.2 Singularité régulière : 2ème théorème

Dans ce qui suit, on considère une équation quasi-algébrique :

$$Du = F\left(x, \theta_0 u, \theta_1 u, ..., \theta_{_N} u\right) = \sum_{p \geq q} F_{p,M}\left(x, \theta_0 u, \theta_1 u, ..., \theta_{_N} u\right) = 0$$

où :

1. $F(x, X_0, X_1, ..., X_N) = F(x, X)$ *est holomorphe dans un certain domaine* $Re(x) > \lambda$, $\|X\| < \rho$ *et vérifiant* $F(\infty, 0, ..., 0) = 0$. λ *et* ρ *étant des réels positifs, et* $X = (X_0, X_1, ..., X_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$. *Et les* $F_{p,M}$ *sont les polynômes homogènes formant* F, *mais où on ne prend que les termes de degré total en* X *inférieur à* M, *où* M *est un entier fixé.*
2. $\theta_0, \theta_1, ..., \theta_N$ *sont tous des opérateurs diagonaux.*

On écrira l'équation ci-dessus sous la forme :

$$F_q\left(x, \theta_0 u, \theta_1 u, ..., \theta_n u\right) = \mathcal{R}_{q+1,M}\left(x, \theta_0 u, \theta_1 u, ..., \theta_N u\right) \tag{3.5}$$

où : q, F_q *sont définis comme dans (§3.1). Comme on supposera* M *assez grand,* $F_{q,M} = F_q$. *Et on rappelle qu'on ne garde dans* F_q *que les* n *composantes* $\theta_0 u, \theta_1 u, ..., \theta_n u$ *qui interviennent explicitement, en supposant de plus* $\underline{n < N}$.

Comme précédemment, on construit les polynômes :

$$C_q\left(T\right) = F_q\left(\{1\}, T, \theta_{1,0}(0)T, \; ... \;, \theta_{n,0}(0)T\right)$$

et

$$C_{q,n}(T) = \frac{\partial F_q\left(x, X\right)}{\partial X_n}\left(\{1\}, T, \theta_{1,0}(0)T, \; ... \;, \theta_{n,0}(0)T\right)$$

(voir page (41) et on supposera que :

($\mathbf{H}_1'$) θ_n domine strictement tous les θ_i tels que $i < n$, et domine bien l'identité.

($\mathbf{H}_2'$) Les deux polynômes $C_q\,(T)$ et $C_{q,n}(T)$ n'ont pas de racine commune.

Ces deux hypothèses correspondent aux hypothèses ($\mathbf{H}_1$) et ($\mathbf{H}_3$) du théorème précédent. Par contre l'hypothèse ($\mathbf{H}_2$) sera remplacée par une hypothèse plus faible qui nous sera suffisante.
Il s'agit de l'hypothèse ($\mathbf{H}_3'$) ci-dessous.

On définit d'abord l'ensemble des $G(m)$ pour $m \geq 1$ tels que :
Pour tout p $(q \leq p \leq M)$, pour tout $N+2$-tuples $(r,\ s_0,\ s_1, \cdots,\ s_N)$, tels que $r + |s| = p$, et pour toutes suites d'entiers naturels :

$$\{m_0^1,\ m_0^2,\ \cdots,\ m_0^{s_0}\ ;\ m_1^1,\ m_1^2,\ \cdots,\ m_1^{s_1}\ ;\ \cdots\ \ ; m_{_N}^1,\ m_{_N}^2,\ \cdots,\ m_{_N}^{s_N}\ \}$$

satisfaisant :

$$r\ +\ m_0 + m_1 +\ \cdots\ + m_{_N} = m + q - 1$$

où : $m_0 = m_0^1 +\ m_0^2 +\ \cdots\ + m_0^{s_0}$, $m_1 = m_1^1 +\ m_1^2 +\ \cdots\ + m_1^{s_1}$, ... ,
$m_{_N} = m_{_N}^1 +\ m_{_N}^2 +\ \cdots\ + m_{_N}^{s_N}$.

$$G(m) = \frac{1}{|\theta_{n,0}(m)|}\left\{\prod_{1\leq k\leq S_0}|\theta_{0,0}(m_0^k)|\ \times \prod_{1\leq k\leq S_1}|\theta_{1,0}(m_1^k)|\ \times\ \cdots \prod_{1\leq k\leq S_{_N}}|\theta_{N,0}(m_{_N}^k)|\right\}$$

Remarque :

Par convention, on omettra du produit définissant $G(m)$ *les* $\theta_{j,0}(m_j^k)$ *correspondant aux* (m_j^k) *nuls. i.e on supposera que si* (m_j^k) *est nul, alors* $\theta_{j,0}(m_j^k)$ *n'intervient pas dans le produit de* $G(m)$.

On peut maintenant formuler l'hypothèse ($\mathbf{H}_3'$) *comme suit :*

($\mathbf{H}_3'$) *L'ensemble de ces* $G(m)$ *est uniformément borné.*

Remarque :

Dans ce cas on peut supposer $|G(m)| \leq 1$ *pour tout* $m \geq 1$, *quitte à renormaliser* θ_n.

Théorème 3.2

Sous les hypothèses ***(H***$_1'$***)*** ,($\mathbf{H}_2'$) *et* ($\mathbf{H}_3'$), *toute série formelle de factorielles, solution de l'équation*

$$Du = F\left(x, \theta_0 u, \theta_1 u, ..., \theta_N u\right) = 0$$

est convergente.

Démonstration :

1)<u>Existence d'une solution formelle</u>.

On procède de la même façon que pour le théorème précédent.

Soit $u = \sum_{m \geq 0} u_m \frac{m!}{(x, m+1)}$ *une solution formelle de l'équation (3.5), si elle existe.*

Comme les θ_i *sont tous diagonaux,*

$$\theta_i u = \sum_{m \geq 0} \theta_{i,0}(m) u_m \frac{m!}{(x, m+1)}$$

Ce qui simplifie l'écriture du système et permet d'obtenir :

*) u_0 *à partir de l'équation égalisant les coefficients de plus bas ordre* q*, à savoir :*

$$\left(\sum_{|\mathsf{s}|=q} b_{\mathsf{s}} \prod_{i=0}^{n} \left(\theta_{i,0}\left(0\right)\right)^{\mathsf{s}_i} \right) (u_0)^q + \sum_{r+|\mathsf{s}|=q-1} a_{r,\mathsf{s}} \prod_{i=0}^{n} \left(\theta_{i,0}\left(0\right)\right)^{\mathsf{s}_i} (u_0)^{|S|} = 0$$

qui n'est rien d'autre que l'équation :

$$C_q\left(u_0\right) = 0$$

*) *et* u_m*, pour* $m \geq 1$*, à partir de l'équation égalisant les coefficients d'ordre* $(q + m - 1)$*, à savoir,*

$$\begin{aligned} F_{q,m}\left(u_0\right) u_m \; &= P_m(u_0, u_1, ..., u_{m-1}, \theta_{1,0}(0)u_0, \theta_{1,0}(1)u_1, \ldots, \theta_{1,0}(m-1)u_{m-1}; \\ &\ldots; \theta_{n,0}(0)u_0, \theta_{n,0}(1)u_1, \ldots, \theta_{n,0}(m-1)u_{m-1}; \ldots; \\ &\theta_{N,0}(0)u_0, \theta_{N,0}(1)u_1, \ldots, \theta_{N,0}(m-1)u_{m-1}; \ldots; (A)) \end{aligned} \tag{3.6}$$

où P_m est polynômial en tous ses arguments, et (A) est le reste des arguments de $\mathcal{R}_{q+1,M}(x, \theta_0 u, \ldots, \theta_N u)$, et où :

$$F_{q,m}(u_0) = \sum_{|\mathtt{s}|=q} b_{\mathtt{s}} \sum_{i=0}^{n} \mathtt{s}_i \theta_{i,0}(m) (\theta_{i,0}(0) u_0)^{\mathtt{s}_i - 1} \prod_{j \neq i} (\theta_{j,0}(0) u_0)^{\mathtt{s}_j}$$
$$+ \sum_{r+|\mathtt{s}|=q-1} a_{r,\mathtt{s}} \sum_{i=0}^{n} \mathtt{s}_i \theta_{i,0}(m) (\theta_{i,0}(0) u_0)^{\mathtt{s}_i - 1} \prod_{j \neq i} (\theta_{j,0}(0) u_0)^{\mathtt{s}_j}$$

Ainsi pour toute racine u_0 du polynôme $C_q(T)$ qui vérifie $F_{q,m}(u_0) \neq 0$ pour tout m, l'équation $Du = 0$ admet une solution série formelle de factorielles , dont le premier terme est $u_0 \dfrac{1}{x}$.

Cependant la condition $F_{q,m}(u_0) = 0$, pour certains m, n'exclut pas l'existence d'une solution formelle pour l'équation $Du = 0$. (cf page 47)

Pour le besoin des calculs suivants, on explicite l'équation (3.6) en introduisant les notations suivantes :

$$C_j(m_j,\ s_j) = C_{s_j}(m_j^1,\ m_j^2,\ \cdots,\ m_j^{s_j}) \quad 0 \leq j \leq n$$

qui sont les constantes universelles provenant de la formule du produit des séries de factorielles intervenant dans l'équation.

Ce qui permet d'écrire l'équation ci-dessus comme suit :

$$
\begin{aligned}
&F_{q,m}(u_0)\, u_m = \\
&-\Bigg\{\sum_{r+|s|=q-1} a_{r,\,s} \sum_{r+m_0+\cdots+m_N=m+q-1} \prod_{\substack{1\le k\le s_0\\ m_0^k\neq m}} C_0(m_0,s_0)\theta_{0,0}(m_0^k)u_{m_0^k} \\
&\qquad \times \prod_{\substack{1\le k\le s_1\\ m_1^k\neq m}} C_1(m_1,s_1)\theta_{1,0}(m_1^k)u_{m_1^k} \\
&\qquad \times\cdots\times \prod_{\substack{1\le k\le s_n\\ m_n^k\neq m}} C_n(m_n,s_n)\theta_{n,0}(m_n^k)u_{m_n^k}\Bigg\} \\
&-\Bigg\{\sum_{|s|=q} b_s \sum_{m_0+\cdots+m_N=m+q} \prod_{\substack{1\le k\le s_0\\ m_0^k\neq m}} C_0(m_0,s_0)\theta_{0,0}(m_0^k)u_{m_0^k} \\
&\qquad \times \prod_{\substack{1\le k\le s_1\\ m_1^k\neq m}} C_1(m_1,s_1)\theta_{1,0}(m_1^k)u_{m_1^k} \\
&\qquad \times\cdots\times \prod_{\substack{1\le k\le s_n\\ m_n^k\neq m}} C_n(m_n,s_n)\theta_{n,0}(m_n^k)u_{m_n^k}\Bigg\} \\
&+\Bigg\{\sum_{q<p\le M} \sum_{r+|s|=p,\,|s|\le m} a_{r,\,s} \sum_{r+m_0+\cdots+m_N=m+q-1} \prod_{\substack{1\le k\le s_0\\ m_0^k\neq m}} C_0(m_0,s_0)\theta_{0,0}(m_0^k)u_{m_0^k} \\
&\qquad \times \prod_{\substack{1\le k\le s_1\\ m_1^k\neq m}} C_1(m_1,s_1)\theta_{1,0}(m_1^k)u_{m_1^k} \\
&\qquad \times\cdots\times \prod_{\substack{1\le k\le s_N\\ m_N^k\neq m}} C_N(m_N,s_N)\theta_{N,0}(m_N^k)u_{m_N^k}\Bigg\} \\
&+\Bigg\{\sum_{q<|s|\le M} |b_s| \sum_{m_0+\cdots+m_N=m+q} \prod_{\substack{1\le k\le s_0\\ m_0^k\neq m}} C_0(m_0,s_0)\theta_{0,0}(m_0^k)u_{m_0^k} \\
&\qquad \times \prod_{\substack{1\le k\le s_1\\ m_1^k\neq m}} C_1(m_1,s_1)\theta_{1,0}(m_1^k)u_{m_1^k} \\
&\qquad \times\cdots\times \prod_{\substack{1\le k\le s_N\\ m_N^k\neq m}} C_N(m_N,\ s_N)\theta_{N,0}(m_N^k)u_{m_N^k}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

2) Convergence d'une solution formelle.

D'après l'hypothèse ($\mathbf{H}_1'$ *)* θ_n*, qui est un bon opérateur car il est diagonal, domine strictement tous les* θ_i *tels que* $i < n$*, et domine bien l'identité.*

Par conséquent, il existe une constante $c_{0,0}$ *telle que pour tout* $m = 0, 1, ...$

$$1 \leq c_{0,0} \left|\theta_{n,0}(m)\right|$$

Comme $c_{0,0} \neq 0$ *, et quitte à normaliser* θ_n *, on peut supposer que* $c_{0,0} = 1$.

i.e

$$1 \leq \left|\theta_{\mu,0}\left(m\right)\right| \ , \ \ \forall m \geq 0$$

D'autre part, comme θ_n *domine strictement tous les* θ_i *, pour* $i = 0, 1, ..., n,\ i \neq n$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\theta_{i,0}(m)}{\theta_{n,0}(m)} = 0 \ , \ \ \forall i \neq n$$

D'où :

$$\lim_{m\to\infty} \frac{F_{q,m}\left(u_0\right)}{\theta_{\mu,0}\left(m\right)} = \sum_{|\mathbf{s}|=q} b_{\mathbf{s}} \mathbf{s}_\mu \left(\theta_{\mu,0}\left(0\right) u_0\right)^{\mathbf{s}_\mu - 1} \prod_{j\neq\mu} \left(\theta_{j,0}\left(0\right) u_0\right)^{\mathbf{s}_j}$$
$$+ \sum_{r+|\mathbf{s}|=q-1} a_{r,\mathbf{s}} \mathbf{s}_\mu \left(\theta_{\mu,0}\left(0\right) u_0\right)^{\mathbf{s}_\mu - 1} \prod_{j\neq\mu} \left(\theta_{j,0}\left(0\right) u_0\right)^{\mathbf{s}_j}$$

$$= C_{q,n}(u_0) \neq 0$$

d'après l'hypothèse ($\mathbf{H}_2'$*).*

Par conséquent, il existe $\sigma > 0$ *(cf page 48) tel que :*

$$\left|F_{q,m}\left(u_0\right)\right| \geq \sigma \left|\theta_{n,0}\left(m\right)\right| \ , \ \ \forall m \geq 0$$

D'où :

$$
\begin{aligned}
|u_m| \leq & \left\{\frac{1}{\sigma|\theta_{n,0}(m)|}\right\} \\
& \times \left\{ \sum_{r+|s|=q-1} |a_{r,\,s}| \sum_{r+m_0+\cdots+m_N=m+q-1} \prod_{\substack{1\leq k\leq s_0 \\ m_0^k\neq m}} C_0(m_0,s_0)|\theta_{0,0}(m_0^k)||u_{m_0^k}| \right.\\
& \qquad \times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_1 \\ m_1^k\neq m}} C_1(m_1,s_1)|\theta_{1,0}(m_1^k)||u_{m_1^k}| \\
& \qquad \times \cdots \times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_n \\ m_n^k\neq m}} C_n(m_n,s_n)|\theta_{n,0}(m_n^k)||u_{m_n^k}| \\
& + \left\{ \sum_{|s|=q} |b_s| \sum_{m_0+\cdots+m_N=m+q} \prod_{\substack{1\leq k\leq s_0 \\ m_0^k\neq m}} C_0(m_0,s_0)|\theta_{0,0}(m_0^k)||u_{m_0^k}| \right.\\
& \qquad \times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_1 \\ m_1^k\neq m}} C_1(m_1,s_1)|\theta_{1,0}(m_1^k)||u_{m_1^k}| \\
& \qquad \left. \times \cdots \times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_n \\ m_n^k\neq m}} C_n(m_n,s_n)|\theta_{n,0}(m_n^k)||u_{m_n^k}| \right\} \\
& + \left\{ \sum_{q<p\leq M} \sum_{r+|s|=p,\,|s|\leq m} |a_{r,\,s}| \sum_{r+m_0+\cdots+m_N=m+q-1} \prod_{\substack{1\leq k\leq s_0 \\ m_0^k\neq m}} C_0(m_0,s_0)|\theta_{0,0}(m_0^k)||u_{m_0^k}| \right.\\
& \qquad \times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_1 \\ m_1^k\neq m}} C_1(m_1,s_1)|\theta_{1,0}(m_1^k)||u_{m_1^k}| \\
& \qquad \left. \times \cdots \times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_N \\ m_N^k\neq m}} C_N(m_N,s_N)|\theta_{N,0}(m_N^k)||u_{m_N^k}| \right\} \\
& + \sum_{q<|s|\leq M} |b_s| \sum_{m_0+\cdots+m_N=m+q} \prod_{\substack{1\leq k\leq s_0 \\ m_0^k\neq m}} C_0(m_0,s_0)|\theta_{0,0}(m_0^k)||u_{m_0^k}| \\
& \qquad \times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_1 \\ m_1^k\neq m}} C_1(m_1,s_1)|\theta_{1,0}(m_1^k)||u_{m_1^k}| \\
& \qquad \left. \times \cdots \times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_N \\ m_N^k\neq m}} C_N(m_N,\ s_N)|\theta_{N,0}(m_N^k)||u_{m_N^k}| \right\}
\end{aligned}
$$

En tenant compte de l'hypothèse ($\mathbf{H}_3'$), on déduit :

$$
\begin{aligned}
|u_m| \leq & \left\{\frac{1}{\sigma}\right\} \\
\times & \Bigg\{ \sum_{r+|s|=q-1} |a_{r,\,s}| \sum_{r+m_0+\cdots+m_N=m+q-1} \prod_{\substack{1\leq k\leq s_0 \\ m_0^k\neq m}} C_0(m_0,s_0)|u_{m_0^k}| \times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_1 \\ m_1^k\neq m}} C_1(m_1,s_1)|u_{m_1^k}| \\
& \qquad \times\cdots\times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_n \\ m_n^k\neq m}} C_n(m_n,s_n)|u_{m_n^k}| \\
& + \Bigg\{ \sum_{|s|=q} |b_s| \sum_{m_0+\cdots+m_N=m+q} \prod_{\substack{1\leq k\leq s_0 \\ m_0^k\neq m}} C_0(m_0,s_0)|u_{m_0^k}| \times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_1 \\ m_1^k\neq m}} C_1(m_1,s_1)|u_{m_1^k}| \\
& \qquad \times\cdots\times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_n \\ m_n^k\neq m}} C_n(m_n,s_n)|u_{m_n^k}| \Bigg\} \\
+ & \Bigg\{ \sum_{q<p\leq M} \sum_{r+|s|=p,\,|s|\leq m} |a_{r,\,s}| \sum_{r+m_0+\cdots+m_N=m+q-1} \prod_{\substack{1\leq k\leq s_0 \\ m_0^k\neq m}} C_0(m_0,s_0)|u_{m_0^k}| \times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_1 \\ m_1^k\neq m}} C_1(m_1,s_1)|u_{m_1^k}| \\
& \qquad \times\cdots\times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_N \\ m_N^k\neq m}} C_N(m_N,s_N)|u_{m_N^k}| \Bigg\} \\
+ & \sum_{q<|s|\leq M} |b_s| \sum_{m_0+\cdots+m_N=m+q} \prod_{\substack{1\leq k\leq s_0 \\ m_0^k\neq m}} C_0(m_0,s_0)|u_{m_0^k}| \times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_1 \\ m_1^k\neq m}} C_1(m_1,s_1)|u_{m_1^k}| \\
& \qquad \times\cdots\times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_N \\ m_N^k\neq m}} C_N(m_N,\ s_N)|u_{m_N^k}| \Bigg\}
\end{aligned}
$$

On veut maintenant construire une série majorante pour $u(x)$, soit :

$$V(x) = \sum_{m\geq 0} V_m \frac{m!}{(x, m+1)}$$

dont la convergence entrainera celle de $u(x)$.

Pour cela, on considère l'équation analytique :

$$\sigma_1 \frac{1}{(x,q-1)} V = \mu_1 \frac{1}{(x,q)} + \sum_{|\mathtt{s}|=q} |b_{\mathtt{s}}| \prod_{i=0}^{n} (V)^{\mathtt{s}_i} + \sum_{r+|\mathtt{s}|=q-1} |a_{r,\mathtt{s}}| \frac{r!}{(x,r+1)} \prod_{i=0}^{n} (V)^{\mathtt{s}_i} + |\mathcal{R}_{q+1,M}| \tag{3.7}$$

où σ_1 et μ_1 sont des nombres réels à déterminer, et $|\mathcal{R}_{q+1,M}|$ est une série convergente majorante pour $\mathcal{R}_{q+1,M}$.

En appliquant le changement de variable $V = \frac{1}{x}W$ comme dans le cas du théorème précédent, on peut montrer que l'équation ainsi obtenue satisfait aux conditions du Théorème des fonctions implicites pour les séries de factorielles. Ce qui permettra de conclure la convergence et l'unicité de la solution V de (3.2) pour un choix fixé de V_0.

Le but maintenant est de montrer que pour un choix approprié des paramètres σ_1 et μ_1, la série convergente V devient une série majorante pour toute solution u de l'équation $Du = 0$, ce qui entrainera la convergence de celle-ci.

Pour cela, on note que les coefficients de V sont obtenus comme suit :

*) V_0 *à partir de l'équation :*

$$\sigma_1 V_0 = \mu_1 + \sum_{|\mathtt{s}|=q} |b_{\mathtt{s}}| \prod_{0 \le i \le n} (V_0)^{\mathtt{s}_i} + \sum_{r+|\mathtt{s}|=q-1} |a_{r,\mathtt{s}}| \prod_{0 \le i \le n} (V_0)^{\mathtt{s}_i}$$

*) V_m *à partir de l'équation :*

$$\left\{\sigma_1 - \sum_{|\mathtt{s}|=q} |b_{\mathtt{s}}| \sum_{0\le i\le n} \mathtt{s}_i \left(V_0\right)^{\mathtt{s}_i-1} \prod_{j\neq i} \left(V_0\right)^{\mathtt{s}_j} \right.$$

$$\left. - \sum_{r+|\mathtt{s}|=q-1} |a_{r,\mathtt{s}}| \sum_{0\le i\le n} \mathtt{s}_i \left(V_0\right)^{\mathtt{s}_i-1} \prod_{j\neq i} \left(V_0\right)^{\mathtt{s}_j} \right\} V_m =$$

$$\left\{ \sum_{r+|s|=q-1} |a_{r,\,s}| \sum_{r+m_0+\cdots+m_N=m+q-1} \prod_{\substack{1\le k\le s_0\\ m_0^k\neq m}} C_0(m_0,s_0)V_{m_0^k} \times \prod_{\substack{1\le k\le s_1\\ m_1^k\neq m}} C_1(m_1,s_1)V_{m_1^k} \right.$$

$$\times\cdots\times \prod_{\substack{1\le k\le s_n\\ m_n^k\neq m}} C_n(m_n,s_n)V_{m_n^k}$$

$$+\left\{ \sum_{|s|=q} |b_s| \sum_{m_0+\cdots+m_N=m+q} \prod_{\substack{1\le k\le s_0\\ m_0^k\neq m}} C_0(m_0,s_0)V_{m_0^k} \times \prod_{\substack{1\le k\le s_1\\ m_1^k\neq m}} C_1(m_1,s_1)V_{m_1^k} \right.$$

$$\left. \times\cdots\times \prod_{\substack{1\le k\le s_n\\ m_n^k\neq m}} C_n(m_n,s_n)V_{m_n^k} \right\}$$

$$+\left\{ \sum_{q<p\le M} \sum_{r+|s|=p,\,|s|\le m} |a_{r,\,s}| \sum_{r+m_0+\cdots+m_N=m+q-1} \prod_{\substack{1\le k\le s_0\\ m_0^k\neq m}} C_0(m_0,s_0)V_{m_0^k} \times \prod_{\substack{1\le k\le s_1\\ m_1^k\neq m}} C_1(m_1,s_1)V_{m_1^k} \right.$$

$$\left. \times\cdots\times \prod_{\substack{1\le k\le s_N\\ m_N^k\neq m}} C_N(m_N,s_N)V_{m_N^k} \right\}$$

$$+ \sum_{q<|s|\le M} |b_s| \sum_{m_0+\cdots+m_N=m+q} \prod_{\substack{1\le k\le s_0\\ m_0^k\neq m}} C_0(m_0,s_0)V_{m_0^k} \times \prod_{\substack{1\le k\le s_1\\ m_1^k\neq m}} C_1(m_1,s_1)V_{m_1^k}$$

$$\left. \times\cdots\times \prod_{\substack{1\le k\le s_N\\ m_N^k\neq m}} C_N(m_N,\ s_N)V_{m_N^k} \right\}$$

On peut maintenant choisir les paramètres σ_1 et μ_1 de la façon suivante :

1. *On choisit d'abord V_0 tel que : $|u_0| \leq V_0$,*

2. *puis σ_1 tel que :*

$$0 < \left\{ \sigma_1 - \sum_{|\mathtt{s}|=q} |b_{\mathtt{s}}| \sum_{0\leq i\leq n} \mathtt{s}_i \, (V_0)^{\mathtt{s}_i - 1} \prod_{j\neq i} (V_0)^{\mathtt{s}_j} \right.$$
$$\left. - \sum_{r+|\mathtt{s}|=q-1} |a_{r,\mathtt{s}}| \sum_{0\leq i\leq n} \mathtt{s}_i \, (V_0)^{\mathtt{s}_i - 1} \prod_{j\neq i} (V_0)^{\mathtt{s}_j} \right\} < \sigma$$

3. *et enfin μ_1 tel que V_0 soit solution de l'équation :*

$$\sigma_1 V_0 = \mu_1 + \sum_{|\mathtt{s}|=q} |b_{\mathtt{s}}| \prod_{0\leq i\leq n} (V_0)^{\mathtt{s}_i} + \sum_{r+|\mathtt{s}|=q-1} |a_{r,\mathtt{s}}| \prod_{0\leq i\leq n} (V_0)^{\mathtt{s}_i}$$

Il reste à montrer que :

$$|u_m| \leq V_m \ , \ \ \forall m \geq 0$$

chose qu'on fera par récurrence sur m.

C'est déjà vrai pour $m = 0$, suivant le choix qu'on a fait de V_0.

On supposera donc que

$$|u_p| \leq V_p \ , \ \ \forall p, 0 \leq p < m$$

et on montrera que ceci est encore vrai pour $p = m$.

Mais ceci devient une simple déduction en appliquant l'hypothèse de récurrence à l'équation majorant $|u_m|$. Ce qui donne :

$$|u_m| \leq \frac{1}{\sigma}\left\{\sum_{r+|s|=q-1}|a_{r,\,s}| \sum_{r+m_0+\cdots+m_N=m+q-1} \prod_{\substack{1\leq k\leq s_0\\ m_0^k\neq m}} C_0(m_0,s_0)V_{m_0^k}\right.$$

$$\times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_1\\ m_1^k\neq m}} C_1(m_1,s_1)V_{m_1^k}\times\cdots\times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_n\\ m_n^k\neq m}} C_n(m_n,s_n)V_{m_n^k}$$

$$+\left\{\sum_{|s|=q}|b_s| \sum_{m_0+\cdots+m_N=m+q} \prod_{\substack{1\leq k\leq s_0\\ m_0^k\neq m}} C_0(m_0,s_0)V_{m_0^k}\right.$$

$$\left.\times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_1\\ m_1^k\neq m}} C_1(m_1,s_1)V_{m_1^k}\times\cdots\times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_n\\ m_n^k\neq m}} C_n(m_n,s_n)V_{m_n^k}\right\}$$

$$+\left\{\sum_{q<p\leq M}\ \sum_{r+|s|=p,\,|s|\leq m}|a_{r,\,s}| \sum_{r+m_0+\cdots+m_N=m+q-1} \prod_{\substack{1\leq k\leq s_0\\ m_0^k\neq m}} C_0(m_0,s_0)V_{m_0^k}\right.$$

$$\left.\times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_1\\ m_1^k\neq m}} C_1(m_1,s_1)V_{m_1^k}\times\cdots\times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_N\\ m_N^k\neq m}} C_N(m_N,s_N)V_{m_N^k}\right\}$$

$$+\sum_{q<|s|\leq M}|b_s| \sum_{m_0+\cdots+m_N=m+q} \prod_{\substack{1\leq k\leq s_0\\ m_0^k\neq m}} C_0(m_0,s_0)V_{m_0^k}$$

$$\left.\times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_1\\ m_1^k\neq m}} C_1(m_1,s_1)V_{m_1^k}\times\cdots\times \prod_{\substack{1\leq k\leq s_N\\ m_N^k\neq m}} C_N(m_N,\ s_N)V_{m_N^k}\right\}$$

D'où :

$$|u_m| \leq \frac{1}{\sigma}\left\{\sigma_1 - \sum_{|\mathtt{s}|=q}|b_{\mathtt{s}}| \sum_{0\leq i\leq n} \mathtt{s}_i\,(V_0)^{\mathtt{s}_i-1}\prod_{j\neq i}(V_0)^{\mathtt{s}_j}\right.$$

$$\left.-\sum_{r+|\mathtt{s}|=q-1}|a_{r,\mathtt{s}}| \sum_{0\leq i\leq n} \mathtt{s}_i\,(V_0)^{\mathtt{s}_i-1}\prod_{j\neq i}(V_0)^{\mathtt{s}_j}\right\} V_m \leq V_m$$

et ce pour tout m.

Par conséquent,

la série $V(x) = \sum_{m \geq 0} V_m \frac{m!}{(x, m+1)}$ *est une la série majorante pour la solution*
$u(x) = \sum_{m \geq 0} u_m \frac{m!}{(x, m+1)}$.

Comme $V(x)$ *est convergente, alors* $u(x)$ *est aussi convergente.*

$\square$

3.3 Un théorème de type Maillet pour les séries de factorielles

L' étude des séries formelles de la forme $\sum_{m\geq 0} y_m x^{-m}$ solutions d'une équation différentielle ordinaire linéaire singulière irrégulière montre que de telles séries sont en faite dans une certaine classe Gevrey (c.à.d que les coefficients y_m croissent au plus comme une certaine puissance fixée de $m!$ quand $m \longrightarrow \infty$).

De plus J. P. Ramis et Y. Sibuya ont montré que toutes les séries formelles d'une classe Gevrey donnée, convergent au sens asymtotique de Poincaré.

Le cas des équations différentielles ordinaires singulières irregulières non linéaires *a été étudié par E.Maillet*[1] *qui a aussi montré que les solutions formelles de telles équations doivent être dans une certaine classe Gevrey.*

Ce résultat est appelé théorème de Maillet *, et tout résultat similaires dans le cas d'autres types d'équations, sera dit* de type Maillet*.*

Par ailleurs E. Maillet a aussi montré que les solutions ci-dessus sont sommables au sens de Borel.

Le théorème de Maillet a été généralisé par R. Gérard (cf [GER 3]) pour des équations différentielles algébriques à coefficients analytiques satisfaisant certaines conditions de non dégénerence.

[1] E. Maillet, *S*ur les séries divergentes et les équations différentielles,

Ann. Ecole Normale (3) 20, pp 487 - 518

Pour prouver son résultat, R. Gérard avait utilisé un argument de séries majorantes*. Ce même argument a été utilisé plutard par R. Gérard et D.A. Lutz (cf [G-L 2]) dans le cas d'équations algébriques aux différences, après qu'ils aient obtenu quelques extensions non linéaires du phénomène singulier régulier pour les séries de factorielles solutions de certaines sortes d'équations algébriques aux différences. (cf §3.1)*

Ils ont ainsi obtenu le théorème de type Maillet dont on va donner la preuve dans la section suivante. Cette preuve, dûe à Gérard et Lutz (cf [G-L 2]) suit la même approche que celle de Gérard dans son article [GER 3].

Il s'agit d'appliquer un changement de variables adéquat pour transformer le problème en un problème , auquel on peut appliquer les théorèmes ci-dessus.

Définition 3.2

Une série formelle de factorielle $\sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{(x,m+1)}$ est dans la classe Gevrey α *(où* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *) si :*

$$|a_m| = O((m!)^\alpha) \text{ quand } m \to +\infty$$

Exemple

Soit $t \in \mathbb{C}^*$*. Les solutions de l'équation aux différences :*

$$\Delta^2 a(x) = t - xa(x) + a(x) \tag{3.8}$$

sont dans la classe Gevrey $\alpha = 1$*.*

En effet :

$$\Delta^2 a(x) = \sum_{m\geq 0}(m+1)^2 a_m \frac{m!}{(x,m+1)}$$

(cf page 36)

Et donc :

$$\begin{aligned}
(3.8) \quad \Leftrightarrow \quad & \sum_{m\geq 0}(m+1)^2 a_m \frac{m!}{(x,m+1)} = t - x\sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{(x,m+1)} + \sum_{m\geq 0} a_m \frac{m!}{(x,m+1)} \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{m\geq 0}((m+1)^2-1) a_m \frac{m!}{(x,m+1)} = t - a_0 - \sum_{m\geq 1} a_m \frac{m!}{(x+1,m+1)} \\
& = (t-a_0) - \sum_{m\geq 0}(m+1)a_{m+1}\frac{m!}{(x+1,m)} \\
& = (t-a_0) - \sum_{m\geq 0}[(m+1)a_{m+1} - m a_m]\frac{m!}{(x,m+1)}
\end{aligned}$$

(cf page 12)

Donc :

$$\begin{aligned}
(3.8) \quad \Leftrightarrow \quad & (a_0 - t) + \sum_{m\geq 0}[((m+1)^2 - 1 - m)a_m + (m+1)a_{m+1}]\frac{m!}{(x,m+1)} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (a_0 - t) + \sum_{m\geq 0}(m+1)[m a_m + a_{m+1}]\frac{m!}{(x,m+1)} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} a_0 = t \\ (m+1)[m a_m + a_{m+1}] = 0 \ \ \forall m \geq 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} a_0 = t \\ a_{m+1} = -m a_m \ \ \forall m \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\forall m \geq 1\,, \ \ a_{m+1} = (-1)^m m! a_1$$

Et donc :

$$\frac{|a_m|}{m!} = \frac{|a_1|}{m} \xrightarrow[m \to 0]{} 0$$

Cet exemple est choisi juste pour sa simplicité afin d'illustrer l'idée de classe Gevrey. Il n'est pas important en lui même puisqu'il donne une solution triviale.

Remarque :

Si une série est dans la classe Gevrey α*, alors elle est dans toute classe Gevrey* $\alpha + \epsilon\,,\ \forall \epsilon > 0$*.*

Le but de ce qui suit est de montrer que les séries formelles de factorielles solutions de certaines équations aux différences quasi-algébriques*, bien qu'elles soient divergentes, sont en fait dans une certaine* classe Gevrey*.*

Les équations qu'on considère sont de la forme :

$$F_q(x, y,\ \Delta y,\ \cdots\ ,\ \Delta^n y) = \mathcal{R}_{q+1,M}(x,\ y,\ \Delta y,\ \cdots\ ,\ \Delta^N y) \tag{3.9}$$

c.à.d des équations de la forme (3.5)(cf page 57) avec les opérateurs particuliers $\theta_j =\ \Delta^j$ *et où :* $0 \leq n < N$*.*

L'hypothèse $(\mathbf{H}\,'_1)$ *est satisfaite. (cf page 74)*

Et on supposera $(\mathbf{H}'_2)$ *satisfaite i.e que les polynômes* $C_q\,(T)$ *et* $C_{q,\,n}\,(T)$ *n'ont pas de racine commune.*

Cela suffit pour conclure l'existence d'une solution série formelle de factorielle :

$$y(x) = \sum_{m \geq 0} y_m \frac{m!}{(x, m+1)}$$

A la différence du cas précédent, le **problème** *ici est que l'hypothèse* ***(H'₃)*** *n'est pas satisfaite, et donc* $y(x)$ *n'est pas convergente.*

Néanmoins, les coefficients de $y(x)$ *croissent d'une manière qu'on peut contrôler.*

Pour prouver ceci, on procède à un changement de variables comme suit :

Pour $\alpha \geq 0$*, on considère l'opérateur diagonal* ϕ *défini par ces éléments diagonaux* $\phi_0(0) = 1\ ,\ \phi_0(m) = [(m-1)!]^{\alpha} \quad \forall m \geq 1$*.*

Alors :

$$y(x) = \phi u(x) = y_0 \frac{1}{x} + \sum_{m \geq 1} [(m-1)!]^{\alpha} \quad u_m \, \frac{m!}{(x, m+1)}$$

On pose pour tout $j \geq 0$

$$\theta_j \ = \ \Delta^j \circ \phi$$

Donc

Toute solution y *de (3.9) correspond à une solution* u *de (3.5) et inversement.*

Et on a : $\theta_0\ (=\ \phi)$ *domine bien l'identité, du moment que*

$1 \leq [(m-1)!]^{\alpha}$, $\forall m \geq 1$ *mais aussi* $\forall \alpha$.

De plus, on peut vérifier facilement que les opérateurs diagonaux θ_j *satisfont **(H′₁)***

($|\theta_{j,0}(m)| = (m+1)^j\,[(m-1)!]^{\alpha} \quad \forall m \geq 1$ *).*

*L'hypothèse **(H′₂)** est aussi satisfaite par les* θ_j *du moment que :* $\theta_{j,0}(0) = \Delta_0^j(0)$, $\forall j$.

Le but maintenant est de vérifier que, pour un bon choix de α*, l'hypothèse **(H′₃)** est aussi satisfaite par les* θ_j*, ce qui prouvera la convergence de* u *et de là on déduit que* y *est dans la classe Gevrey* α *car alors :* $u_m \to 0$

Et donc :

$$\frac{|y_m|}{(m!)^{\alpha}} = \frac{|u_m|}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

Théorème 3.3

Si F_q *est tel que l'hypothèse **(H′₂)** soit satisfaite, alors toute solution formelle de (3.8) est dans une certaine classe Gevrey.*

Démonstration :

Il suffit maintenant de vérifier que les θ_j *définis ci-dessus, satisfont la condition **(H′₃)** pour un choix approprié de* α.

D'après la définition de ces opérateurs, on a :

$$|\theta_{n,0}(m)| = ((m-1)!)^{\alpha}\,(m+1)^n$$

et pour tout $j = 1, \cdots, N$*, et pour tout* $k,\ 1 \leq k \leq s_j$

$$|\theta_{j,0}(m_j^k)| = \left((m_j^k - 1)!\right)^{\alpha} \left(m_j^k + 1\right)^j$$

D'autres part, on peut montrer par recurrence sur l *que pour toute suite finie de* l *entiers* $p_1, p_2, \cdots, p_l$ *:*

$$(p_1)!(p_2)!\cdots(p_l)! \leq (p_1 + p_2 + \cdots + p_l)!$$

En effet,

Il suffit de remarquer que les coefficients binomiaux sont des entiers non nuls.

On a donc :

$$\binom{p_1 + p_2}{p_1} = \frac{(p_1 + p_2)!}{(p_1)!(p_2)!} \in \mathbb{N}^{\star}$$

et donc :

$$\frac{(p_1 + p_2)!}{(p_1)!(p_2)!} \geq 1$$

Ce qui implique bien :

$$(p_1 + p_2)! \geq (p_1)!(p_2)!$$

Le reste découle immédiatement grâce à l'associativité.

En appliquant donc ce résultat on tire :

$$\begin{aligned}
\prod_{1 \leq k \leq s_j} |\theta_{j,0}(m_j^k)| &= \prod_{1 \leq k \leq s_j} \Big((m_j^k - 1)!\Big)^{\alpha} \Big(m_j^k + 1\Big)^{j} \\
&= \left[\prod_{1 \leq k \leq s_j} \Big((m_j^k - 1)!\Big)\right]^{\alpha} \prod_{1 \leq k \leq s_j} \Big(m_j^k + 1\Big)^{j} \\
&\leq \left[\left(\sum_{1 \leq k \leq s_j} (m_j^k - 1)\right)!\right]^{\alpha} \prod_{1 \leq k \leq s_j} \Big(m_j^k + 1\Big)^{j} \\
&\leq [(m_j - s_j)!]^{\alpha} \prod_{1 \leq k \leq s_j} \Big(m_j^k + 1\Big)^{j}
\end{aligned}$$

car $\sum_{1 \leq k \leq s_j} m_j^k = m_j$.

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le k\le s_j} m_j^k = m_j \quad &\Longrightarrow \quad \forall k, \quad m_j^k \le m_j \\
&\Longrightarrow \quad \forall k, \ \left(m_j^k + 1\right)^j \le (m_j+1)^j \\
&\Longrightarrow \quad \prod_{1\le k\le s_j} (m_j^k+1)^j \le (m_j+1)^{js_j}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\prod_{1\le k\le s_j} |\theta_{j,0}(m_j^k)| \le [(m_j-s_j)!]^{\alpha}\,(m_j+1)^{js_j}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
G(m) &= \frac{1}{|\theta_{n,0}(m)|}\prod_{j=0}^{N}\prod_{1\le k\le s_j}|\theta_{j,0}(m_j^k)| \\
&\le \frac{1}{((m-1)!)^{\alpha}\,m^n}\prod_{j=0}^{N}[(m_j-s_j)!]^{\alpha}\prod_{j=0}^{N}(m_j+1)^{js_j} \\
&\le \frac{1}{((m-1)!)^{\alpha}\,m^n}\left[\prod_{j=0}^{N}(m_j-s_j)!\right]^{\alpha}\prod_{j=0}^{N}(m+1)^{js_j} \\
&\le \frac{1}{((m-1)!)^{\alpha}\,m^n}\left[\left(\sum_{j=0}^{N} m_j - s_j\right)!\right]^{\alpha}(m+1)^{\sum_{j=0}^{N} js_j} \\
&\le \frac{1}{((m-1)!)^{\alpha}\,m^n}\,[(m+q-p-1)!]^{\alpha}\,(m+q)^{\sum_{j=0}^{N} js_j} \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que :

$$r+|s|=p,\ r+\sum_{j=0}^{N} m_j = m+q-1,\ q\ge 1$$

Mais puisque $\dfrac{((m-1)-(p-q))!}{(m-1)!} = \dfrac{1}{(m-p+q)(m-p+q+1)\cdots(m-1)}$,

lorsque $m \to +\infty$*, le second membre de l'inégalité (3.3) devient de l'ordre de :*

$$m^{\left(\sum_{j=0}^{N} js_j\right)-n-(p-q)\alpha}$$

Pour assurer donc la borne voulue ($G(m) \leq 1,\ \forall m$*), on doit prendre*

$$\alpha \geq \sup_{q \leq p \leq M} \left\{ \sup_{|s| \leq p} \left\{ \frac{\left(\sum_{j=0}^{N} js_j\right) - n}{p-q} \right\} \right\}$$

Ainsi toutes les hypothèses du théorème précédent sont satisfaite. Ce qui implique la convergence de la série $u(x)$ *et finit la démonstration·*

□

Conclusion

Gérard et Lutz, dans leurs travaux cités en bibliographie, ont étudié la propriété de singularité régulière de certains opérateurs agissant sur les séries de factorielles.

La spécificité de ces séries a fait que le prototype de bon opérateur à considérer n'est plus l'opérateur différentiel $x\dfrac{d}{dx}$*, mais c'est plutôt l'opérateur aux différences* Δ*. Ce qui amène à considérer des équations analytiques aux différences, linéaires et non linéaires.*

Et ce qui surprenant, c'est qu'il était possible d'appliquer les techniques de R. Gérard développées pour les équations différentielles, prèsque verbatim. *Ce qui rend les travaux de celui-ci beaucoup plus intéréssants.*

Ceci leur a permis entre autre de démontrer le théorème de Maillet pour les séries de factorielles. Mais beaucoup reste encore à faire, ce qui rend ce domaine de recherche assez riche.

Un des problèmes ouverts intéressants à étudier, serait l'estimation d'une meilleure borne pour la classe Gevrey α*, et/ou la détermination de valeurs précises possibles pour* α*. Ce qui pourrait très bien faire l'objet d'une thèse d'état.*

Bibliographie

[ACH] ***D. Achour****,*

Sur le Théorème de Maillet, Thèse de Magistèr, USTHB, Juillet (1997)

[CH-G] ***H.Charrière et R.Gérard ,***

The Rings of Formal and Convergent Inverse Factorial Series.

Kumamoto J.Math., Vol 5, pp 1-20 , March (1992)

[DOL] ***P.Dolbeault,***

Analyse Complexe.

Collection Maîtrise de Math. Pures, Ed. Masson, Paris (1990)

[GER 1] ***R.Gérard,***

Opérateurs non Linéaires à Singularité Régulière. Cas d'une Variable

Prépublication de l'IRMA de Strasbourg (1989)

[GER 2] ***R.Gérard,***

Une Classe d'Equations non Linéaires à Singularité Régulière.

Funkcialaj Ekvacioj , Vol 29 pp 55-76 (1986)

[GER 3] ***R.Gérard,***

Sur le Théorème de Maillet

Funkcialaj Ekvacioj , Vol 34 pp 117-125 (1991)

[G-J] ***R.Gérard et W.B.Jurkat ,***

Asymptotic Implicit Function Theorems. Part 1 : The Preparation Theorem and The Division Theorem. Prépublication de l'IRMA de Strasbourg (1991)

[G-L 1] ***R.Gérard et D.A.Lutz ,***

Convergent Factorial Series Solutions of Singular Operator Equations.

Journal Analysis, 10, pp 99-145 (1990)

[G-L 2] ***R.Gérard et D.A.Lutz ,***

Maillet Type Theorems for Algebraic Difference Equations

Kumamoto J.Math., Vol 3, pp 11-26 , March (1990)

[G-T] ***R.Gérard et H. Tahara ,***

Maillet Type Theorems for non-linear singular partial differential equations without linear part. Prépublication de l'IRMA de Strasbourg (1990)

[H-T] ***W.A.Harris et H.L.Turritin ,***

Reciprocal of Inverse Factorial Series.

Funkcialaj Ekvacioj , Vol 6, pp 37-46 (1964)

[HAR] ***W.A.Harris,***

Linear Systems of Difference Equations. Contributions to Differential Equations,Vol 1N^{0}4, pp489-518(reçu en mars1962)

[JOR] ***Ch.Jordan ,***

Calculus of Finite Differences.

Chelsea Publishing Company , NewYork (1965), 3^{rd} *edition.*

[KNO] ***Dr Konrad Knopp**,*

Theory and Application of Infinite Series,

Edition Backie & son, London & Glasgow, 1928 .

[MIL] ***L.M. Milne-Thomson**,*

The Calculus of Finite Differences,

Edition Macmillan, London, 1933

[NIE] ***N.Nielsen,***

Recherches sur les Séries de Factorielles.

Annales de l'Ecole Normale, ***(3)**,XIX , Novembre 1902*

[NOR] ***N.E.Nörlund,***

Mémoire sur le Calcul aux Différences Finies.

Acta Math., 44, pp71-211 (1923)