

N d'ordre: 15/2001-M/PH

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

U.S.T.H.B

FACULTE DES SCIENCES (PHYSIQUE)

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE THEORIQUE

THESE

PRESENTEE PAR: **DJAMA TOUFIK**

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE MAGISTER EN PHYSIQUE

OPTION: PHYSIQUE THEORIQUE

INTITULE

**CONTRIBUTION A LA RECHERCHE DES
EQUATIONS DE MOUVEMENT EN MECANIQUE QUANTIQUE
ET A UNE INTERPRETATION DETERMINISTE**

Soutenue le 10 octobre 2001, Devant le jury:

M. M. FELLAH	PROF.	PRESIDENT	USTHB (Alger)
M. A. BOUDA	M.C.	DTEUR DE THSE	UAM (Bejaïa)
M. A. ABADA	M.C.	EXAMINATEUR	ENS (Alger)
Mlle. N. H. .ALLAL	PROF.	EXAMINATEUR	USTHB (Alger)
M. A. CHOUCHAOUI	M.C.	EXAMINATEUR	USTHB (Alger)

Dedicace

A mes parents.

A la mémoire de mes grands-parents.

A mes frères et soeurs,

et spécialement à mon petit frère Mohamed.

Remerciements

Cette thèse est le fruit d'un travail effectué au département de physique de la faculté des sciences de l'université de Bejaïa sous la direction de Monsieur A. Bouda.

Je remercie mon directeur de thèse pour son soutien lors de la réalisation de ce travail.

J'ai le plaisir de remercier aussi tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en y participant,

-Mr. le professeur M. Fellah de l'USTHB a bien voulu présider ce jury,

-Mrs. le Dr. A. Abada de l'ENS et le Dr. A. Chouchaoui de l'USTHB et Mlle. le Dr. N. H. Allal de l'USTHB ont bien voulu examiner mon travail.

Je tiens à remercier également M. le Dr. K. Adel de l'université de Béjaïa pour son soutien moral et son assistance en matière informatique.

“...Einstein en particulier a maintes fois affirmé qu’à ses yeux la théorie actuelle, tout en étant parfaitement exacte dans ses prévisions, n’est pas une théorie complète: elle ne serait que l’aspect statistique d’une représentation plus profonde qui rétablirait l’existence d’une réalité objective.”

L. de Broglie

Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1. Equation d'Hamilton-Jacobi quantique	10
1. Théorie de Bohm.....	10
2. Le modèle de la représentation des trajectoires.....	13
2.1. L'équation de Hamilton-Jacobi quantique	13
2.2. Le problème stationnaire et l'EHJQS.....	14
2.3. Approche numérique et micro-états.....	15
2.4. Equation de mouvement paramétrisée par le potentiel modifié	16
2.5. Solution de l'EHJQS	17
2.6. Les états liés et la quantification de l'énergie.....	18
2.7. Les micro-états dans l'EHJQS.....	20
2.8. Etude du cas de la particule libre.....	22
3. Le postulat d'équivalence en mécanique quantique.....	24
3.1. Enoncé du postulat d'équivalence.....	24
3.2. EHJQS et principe d'équivalence.....	26
3.3. La résolution de l'EHJQS.....	28
3.4. Déformation de la géométrie et coordonnée quantique	30
3.5. L'équation du mouvement quantique.....	31
Chapitre 2. La loi de Newton quantique	33
1. Le formalisme de la mécanique quantique.....	33
1.1. Le formalisme analytique de la mécanique classique.....	34
1.2. Le Lagrangien du système quantique.....	36
1.3. Le Hamiltonien quantique.....	38
1.4. Détermination de la fonction $f(x, \Gamma)$	39
1.5. Equation de dispersion.....	41
2. Equation intégrale première de la loi de Newton quantique.....	42
2.1. Etablissement de l'équation IPLNQ.....	42
2.2. Etude du cas de la particule libre.....	45

2.3. Comparaison avec les résultats de Floyd.....	47
3. Coordonnée quantique et version quantique du théorème de Jacobi.....	48
3.1. Lagrangien et Hamiltonien du système quantique	49
3.2. Transformations canoniques et théorème de Jacobi	53
3.3. Comparaison avec le théorème de Jacobi introduit par Floyd.....	54
4. Conclusion.....	55

Chapitre 3. Généralisation de l’EHJQS à trois dimensions dans le cas d’un potentiel à symétrie sphérique.....

1. L’EHJQS à trois dimensions.....	58
1.1. Equation de Schrödinger pour un potentiel à symétrie sphérique.....	59
1.2. L’EHJQS radiale.....	61
1.3. L’EHJQS angulaire suivant ϑ	62
1.4. L’EHJQS angulaire suivant φ	62
2. Résolution des EHJQS à trois dimensions.....	63
2.1. La forme de l’action réduite radiale.....	63
2.1. La forme de l’action réduite angulaire suivant ϑ	64
2.1. La forme de l’action réduite angulaire suivant φ	66
3. L’EHJQS écrite pour l’action réduite totale	67
Conclusion.....	69
Références.....	71

INTRODUCTION

Dans l'étude et l'interprétation des phénomènes de la nature, la physique théorique — jusqu'à l'apparition de la mécanique ondulatoire en 1923 — basculait entre deux sortes d'images très opposées. La première est celle du "grain", qui consistait à imaginer de petits objets se déplaçant dans l'espace et obéissant dans leur mouvement à des lois dynamiques. La deuxième image, dite des "champs", présentait les grandeurs physiques comme étant répandues continûment dans l'espace et variant au cours du temps. L'image du grain était la triomphante dans la dynamique du point et du système des points matériels, les représentations atomiques et moléculaires, et dans la conception de l'électron. Par contre l'image des champs s'affirmait dans la dynamique des milieux continus, en hydrodynamique, dans la théorie ondulatoire de la lumière et dans la théorie électromagnétique. Cependant, dans plusieurs domaines, une coexistence entre les deux images était nécessaire. Pour expliquer l'interaction des points matériels, la mécanique avait dû admettre que ces points sont les foyers de champs de forces, tel que le champ de gravitation et le champ électrostatique. Et, Lorentz avait introduit la discontinuité en électricité en avançant l'hypothèse de l'électron dans la théorie électromagnétique de Maxwell qui est une théorie de champs. Toutefois, cette coexistence entre les deux images ne reflétait aucune synthèse apparente, c'était seulement la nature du problème physique lui-même qui imposait le choix de l'une plutôt que l'autre. D'ailleurs, en mécanique classique, Hamilton puis Jacobi ont remarqué une curieuse analogie entre une certaine manière de grouper les mouvements d'un point matériel dans un champs de forces, et la propagation de la lumière dans un milieu réfringent à l'approximation de l'optique géométrique [1,2]. Mais, cette analogie n'était que formelle dans le cadre de la mécanique classique.

En optique, l'opposition entre grain et champ était présente depuis le 18ème siècle. En effet, Newton pensait déjà que les faisceaux lumineux se composaient de corpuscules. En parallèle, Huyghens optait pour une réalité ondulatoire de la lumière, comme le montraient

— depuis le 17^{ème} siècle déjà — les expériences de diffraction [3]. Au début du 19^{ème} siècle, Young réalisa sa célèbre expérience des fentes [3] par laquelle il remarqua le phénomène des interférences. En se basant sur les travaux de Huyghens, Fresnel expliqua ce phénomène à l'aide d'un artifice mathématique [3] qui trancha — du moins jusqu'au début du 20^{ème} siècle — pour la nature ondulatoire de la lumière.

Après moins d'un siècle des travaux de Fresnel, la physique théorique se heurtait à de nouveaux problèmes d'explications de quelques phénomènes. Parmi ces phénomènes, on trouve le spectre du rayonnement noir, l'effet photoélectrique,... En 1900, Max Planck avança son hypothèse des quanta [4]. Cette hypothèse consistait dans le fait que les corpuscules et notamment les électrons, ne pouvaient avoir n'importe lequel des mouvements que la dynamique classique leur prévoyait. Seuls étaient permis certains de ces mouvements satisfaisant à des conditions de quanta d'énergie. L'hypothèse de Planck permit d'expliquer le spectre du rayonnement noir et de retrouver les lois empiriques connues dans la thermodynamique de ce rayonnement. Par la suite, en se basant sur l'hypothèse de Planck, Einstein avança en 1905 sa théorie des "quanta de lumière" [4] qui donne un aspect corpusculaire (grains) au rayonnement lumineux. Cette nouvelle théorie donna une explication de l'effet photoélectrique qui était un phénomène assez étrange pour les physiciens de l'époque. En effet, en recevant de la radiation, une plaque métallique libère des électrons. Elle ne libère ces électrons que pour des fréquences supérieures à une limite ν_0 ; et quelle que soit l'intensité du rayonnement, cette plaque ne libère aucun électron si la fréquence des rayons est inférieure à la fréquence critique. En fait, en amplifiant l'intensité, nous augmentons seulement le nombre d'électrons libérés, mais leurs énergies individuelles ne s'accroissent qu'en augmentant la fréquence. La théorie des quanta de lumière suppose que l'échange d'énergie entre la lumière et l'électron ne se fait que par des quanta d'énergie appelés photons, égaux à $h\nu$, où

$$h = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ Joule} \times \text{seconde}$$

est la constante de Planck. Après quelques années, l'effet Compton renforça cette hypothèse en mettant en évidence la nécessité d'attribution au photon d'une impulsion dont la direction coïncide avec celle de la propagation de la lumière. Désormais, la physique va prendre une nouvelle voie qui sera triomphante mais pleine de difficultés.

Par ailleurs, on savait depuis 1910, d'après les expériences de Rutherford, que l'atome est composé d'un noyau central chargé positivement et d'électrons négatifs qui lui gravitent

autour [5]. D'après la théorie électrodynamique, les électrons devraient rayonner des ondes électromagnétiques, verraient leur énergie diminuer progressivement et tomberaient ainsi sur le noyau, ce qui contredirait la constatation de M. Rutherford. Donc, l'approche classique est incapable d'expliquer la structure planétaire de l'atome. D'un autre côté, les spectres discontinus d'absorption et d'émission des atomes de l'hydrogène et du sodium n'étaient pas interprétables dans le cadre d'une théorie classique [5]. Tout ceci amena Bohr à énoncer, en 1913, son postulat de la quantification du moment cinétique de l'électron dans le noyau [5]. En fait, Bohr donna au moment cinétique des valeurs discrètes égales à $n\hbar$, où n est un nombre entier, et \hbar est le rapport entre la constante de Planck et 2π . Avec ce postulat, Bohr réussit à reproduire les valeurs quantifiées de l'énergie de l'électron dans l'atome d'hydrogène, et à expliquer ainsi la structure planétaire de l'atome. Dès lors, la quantification et les nombres entiers devenaient indispensables pour approfondir notre connaissance de la nature. Comme il est difficile, dans un point de vue grain et en utilisant uniquement la dynamique du point matériel, de comprendre comment des nombres entiers s'introduisent pour décrire un phénomène tel que la quantification de l'énergie de l'électron, la physique se trouvait astreinte à doubler l'aspect corpusculaire du grain d'un aspect ondulatoire où les nombres entiers interviendraient naturellement, comme c'est le cas pour les phénomènes d'interférences et de résonance. Ainsi, naîtra une véritable synthèse entre grain et champ.

Effectivement, l'ensemble des physiciens du début du 20ème siècle venait d'amorcer une nouvelle théorie, c'est celle de la mécanique ondulatoire. Dès 1923, Louis de Broglie associa à tout corpuscule de quantité de mouvement P une onde dont la longueur est $\lambda = h/P$ [2,6]. Schrödinger, en 1926, en reprenant les idées de de Broglie, écrit le premier pour l'électron, mais seulement dans le cas non relativiste et sans tenir compte du spin, l'équation de propagation d'une onde pour laquelle il associa la fonction d'onde ψ [6]. Il est ainsi arrivé à reproduire exactement les états quantifiés d'un système atomique, déjà connus depuis les travaux de Bohr. On notera aussi que des expériences réalisées sur les électrons mettaient en évidence leur diffraction (Geiger et Davisson 1927, M. Börsch 1940 ...) [7], ainsi l'aspect ondulatoire des corpuscules est bel et bien confirmé.

Schrödinger et de Broglie tous deux, pensaient que l'onde ψ était une onde physique. De Broglie considérait, dans sa théorie de l'onde pilote [8], que la particule était localisée d'une manière permanente et que son mouvement était guidé par l'onde. Quant à Schrödinger, il pensait qu'il n'y avait plus de corpuscules localisés, et que la particule était

une onde [9]. Peu après, en représentant l'état d'un corpuscule par une onde ψ , MM. Bohr et Heisenberg se sont aperçus, dès 1927, d'une impossibilité de connaître simultanément la position et l'état de mouvement d'un corpuscule, ce qui amena Heisenberg à établir les relations d'incertitudes qui portent son nom [6,10]

$$\Delta X \Delta P_x \geq \hbar,$$

$$\Delta Y \Delta P_y \geq \hbar,$$

$$\Delta Z \Delta P_z \geq \hbar.$$

En fait, les physiciens de l'époque essayaient de résoudre le problème de la non localisation de la particule par une approximation analogue à celle de l'optique géométrique qui consiste à considérer le corpuscule, dans son mouvement, comme parcourant l'un des rayons de ψ [2,6]. Même dans cette approximation, les choses sont déjà compliquées, car il y a une infinité de rayons, ce qui implique une infinité de mouvements possibles. C'est de ce fait qu'intervient la notion de groupe d'onde pour expliquer le mouvement du corpuscule. Cependant, dans le cas des ondes non planes, cette approximation n'est plus valable, et c'est le cas dans la plupart des problèmes de mécanique quantique. Ainsi, la notion de trajectoire s'est vue peu à peu délaissée, et la nouvelle théorie a été amenée à prendre une forme probabiliste. C'est ainsi que Born introduit (1927) la normalisation de la fonction d'onde ψ , et avança le concept d'onde de probabilité qui le mena à considérer que le carré du module de la fonction d'onde $|\psi|^2$ représente la densité de probabilité pour que la particule soit présente dans un point de l'espace [6]. Cette approche différente et tout à fait originale conduit à un très grand nombre de prévisions exactes, mais ne fournit aucune présentation compréhensible de la coexistence des ondes et des corpuscules. Plus encore, en niant la notion de trajectoire et en affirmant que les valeurs des grandeurs physiques ne préexistaient pas avant la mesure, la nouvelle approche contredit tout sens humain d'une réalité objective de la nature. De ce fait, la mesure en mécanique quantique crée la valeur des grandeurs physiques, et même elle crée un nouvel état pour le système. Cette mesure n'était dans la théorie classique qu'un moyen pour l'homme de déterminer les valeurs des grandeurs physiques et n'affectait en rien l'état de ces grandeurs et leurs valeurs futures. La mesure donnait seulement un moyen d'approfondir notre connaissance du monde physique.

Cette conception de la nature, malgré son succès, affrontait de sérieuses difficultés et elle suscitait une forte contestation auprès d'un grand nombre de physiciens, dont les pères

fondateurs “ Einstein, de Broglie et Schrödinger ” constituent l’élite [11]. Einstein lui-même affirmait que la théorie actuelle, tout en étant parfaitement exacte dans ses prévisions, n’est pas une théorie complète, elle ne serait que l’aspect statistique d’une représentation plus profonde qui rétablirait l’existence d’une réalité objective.

De là, naîtra par la suite le débat entre déterministes (Einstein, de Broglie, Schrödinger, Bohm, Rosen, Podolsky...) — qui croyaient en une réalité objective indépendante de notre observation — et probabilistes, représentés par les adhérents de l’école de Copenhague (Bohr, Born, Heisenberg, et la plupart des jeunes physiciens de l’époque) — qui croyaient en une réalité probabiliste de la nature pour laquelle notre observation joue le rôle primordiale en créant la valeur de la mesure. Ce débat continue de nos jours, et aucune théorie nouvelle n’a pu offrir un substitut à la mécanique quantique. Tout de même, les arguments des partisans du déterminisme sont toujours présents, et parmi lesquels l’argument suivant [9]: “ Soit une source qui émet une onde sphérique transportant une particule. Un instant après, la particule manifeste sa présence dans un point de l’onde par un fait localisé sur un détecteur. Il est évidemment certain que l’émission de la particule par la source est la “cause” de son arrivée sur le détecteur. Or le lien causal entre les deux phénomènes ne peut être établi que par l’existence d’une trajectoire, et nier celle-ci c’est renoncer à la causalité, c’est se condamner à ne pas comprendre”. Déjà, cette objection est suffisante pour soulever le doute dans l’interprétation probabiliste, et le paradoxe E.P.R [11] reste l’argument le plus fort pour les déterministes. Effectivement, si on effectue des mesures sur un système de deux particules (1) et (2) qui ont interagi dans le passé, on montre que la mesure sur la particule (1) et celle sur la particule (2) sont corrélées. Ceci veut dire que si on mesure une grandeur A_1 de (1) on pourrait connaître la valeur précise A_2 de (2) sans l’avoir mesurée. Cela contredit, comme l’a fait remarquer Einstein [11], les postulats de la mécanique quantique. Car, pour celle-ci, la valeur de la grandeur A_2 ne pourrait pas préexister avant la mesure sur (2). En effet, d’après l’interprétation probabiliste, si on associe à la grandeur A d’un système quantique un ensemble de valeurs possibles dont chacune a une probabilité non nulle, alors il n’est en aucun cas possible de savoir à l’avance, et sans effectuer une mesure directe, laquelle de ces valeurs va prendre A . Si on admet, dans le cas des deux systèmes corrélés, que la mesure sur (2) ne change pas l’état de (1) mais seulement notre connaissance de (1), alors la décomposition spectrale de ψ suivant les valeurs propres de A_1 ne représentera que notre ignorance de la valeur exacte de A_1 [11]. Dans ce cas, les probabilités en mécanique quantique ne seraient qu’un

moyen d'approche qui remédierait à cette ignorance. De là, Einstein s'est fait une fine conviction que la théorie actuelle n'est pas complète et qu'une nouvelle théorie basée sur des variables cachées est indispensable pour donner un aspect objectif aux phénomènes quantiques. En ce sens de Broglie développa une théorie hydrodynamique dite "de l'onde pilote" [8] qui considère un fluide fictif qui se conserve pour lequel les lignes de courant coïncident avec les trajectoires des particules du fluide. Dans cette théorie la quantité $|\psi|^2$ représente la densité du fluide. Dans ce cas, si on associe à ψ un grand nombre de corpuscules, les trajectoires des particules du fluide coïncident avec celles des corpuscules et $|\psi|^2$ représentera la densité de corpuscules. Et lorsqu'on associe un train d'onde ψ pour un seul corpuscule, on pourra définir une infinité de trajectoires hydrodynamiques mais une seule sera effectivement décrite. Dans ce cas $|\psi|^2 d\tau$ représente la probabilité de trouver le corpuscule dans le volume $d\tau$. Cette interprétation reste classique parce qu'elle donne à la particule une trajectoire quoi qu'on ne connaisse pas cette trajectoire. Toutefois, la théorie de l'onde pilote présente des difficultés insurmontables qui ont poussé de Broglie à l'abandonner [8]. Un quart de siècle plus tard (en 1951), un jeune physicien nommé David Bohm [12] relança le débat en reprenant la théorie de l'onde pilote. Il posa tout d'abord

$$\psi = A \exp(iS/\hbar) , \quad (1)$$

où S et A sont des fonctions réelles. En remplaçant l'expression de ψ dans l'équation de Schrödinger, il écrit une équation qu'il appela équation d'Hamilton-Jacobi quantique dans laquelle S joue le rôle de l'action du système. Cette équation ne diffère de l'équation d'Hamilton-Jacobi classique que par un certain terme dit potentiel quantique. Pour étudier le mouvement du corpuscule Bohm reprenait l'hypothèse de de Broglie selon laquelle la vitesse \vec{v} est donnée par la relation $m\vec{v} = \vec{\nabla}S_0$. Avec Vigier [12], il postula par la suite l'existence d'un milieu subquantique dans lequel se propagerait l'onde ψ à laquelle il attribua une réalité physique, contrairement à l'interprétation probabiliste.

La théorie de Bohm est hydrodynamique tout comme la théorie de l'onde pilote, c'est pour cette raison qu'elles durent affronter les mêmes difficultés. De plus, l'approche de Bohm n'est plus valable lors d'une étude portant sur des fonctions d'onde réelles, car dans ce cas la vitesse du système sera nulle.

Après ces tentatives non aboutissantes, d'autres théories ont été avancées sans qu'elles soient de vrais substituts à la mécanique quantique [13,14]. En 1964, sur la base des idées

d'Einstein et de l'expérience de pensée E.P.R.B*, Bell avança une nouvelle approche par laquelle il prétend résoudre le paradoxe E.P.R [16,17]. Il se basa sur le fait que les valeurs des grandeurs physiques préexistaient avant la mesure, et postula que la fonction d'onde contenait des paramètres cachés qui prédétermineraient ces valeurs. Ainsi, il put établir un ensemble d'inégalités qui seraient violées par la mécanique quantique. Ces inégalités présentaient le privilège d'une possibilité d'être mises à l'épreuve par l'expérience et on se verra ainsi capable de trancher pour l'une des théories. Effectivement, un groupe de physiciens dirigé par Aspect a effectué une série d'expériences entre 1981 et 1984 [15] par lesquelles on trancha en faveur de la mécanique quantique actuelle. Mais, ces expériences ont été contestées par certains physiciens [15,17]. Il reste que la théorie de Bell et ses modèles à paramètres cachés ont été abandonnés. Ceci ne constitue en aucun cas une mise à l'écart d'un modèle à paramètres cachés établi suivant une manière différente de celle des modèles de Bell.

A partir de la fin des années 70, Floyd [18,19] reprit le modèle de Bohm et tenta une meilleure approche du problème. Il reprit l'équation de Hamilton-Jacobi quantique (EHJQ) à une dimension, et étudia le problème avec la théorie de Jacobi qu'il adapta au cas stationnaire (EHJQS), et par laquelle il montra que la vitesse de la particule ne coïncide pas avec celle du fluide ($m\dot{x} \neq \partial S_0/\partial x$). Floyd, pour traiter le cas des fonctions d'ondes réelles, utilisa une forme trigonométrique pour la relation entre ψ et S_0 qui diffère de celle donnée par l'Eq. (1). Par la suite, il parla de fonction de Hamilton principale, d'action réduite et de fonction de Hamilton caractéristique [18,20,21,22]. Il donna alors une solution à l'EHJQS [18,21] à une dimension et put obtenir une équation de trajectoire pour une particule libre [18,23]. Il montra aussi l'existence de micro-états contenus dans l'EHJQS que la fonction de Schrödinger ne détecte pas. Floyd arriva à la conclusion suivante [18,22]: " La fonction de Schrödinger n'est pas exhaustive et l'EHJQS est plus fondamentale que l'équation de Schrödinger".

Malgré ces résultats théoriques importants, Floyd n'a pu justifier l'utilisation du théorème de Jacobi ($t-t_0 = \partial S_0/\partial E$), puisque ce dernier est utilisé en mécanique classique pour une équation du premier ordre alors que l'EHJQS est du troisième ordre. De plus, le fait de distinguer le cas des fonctions d'ondes réelles de celui des fonctions d'ondes

* En croyant résoudre le paradoxe E.P.R, Bohm avança son expérience de pensée E.P.R.B [15]. Elle consiste à faire des mesures sur un système de deux photons corrélés.

complexes laissait sa représentation incomplète.

Avec les mêmes concepts, mais en utilisant la géométrie différentielle, Faraggi et Matone ont essayé de reprendre et de corriger la théorie de Bohm. Ils aboutirent à énoncer un principe d'équivalence qui stipule que tous les systèmes quantiques sont connectés par des transformations de coordonnées [24,25]. Ils arrivèrent à partir de ce principe à établir l'EHJQS sans passer par la méthode de Bohm [24,26]. De même ils réussirent à éluder le problème de la nullité du moment conjugué en donnant une forme unifiée de la relation entre ψ et S qui se substituerait aux formes données par l'Eq. (1), et trigonométrique que propose Floyd pour les fonctions d'onde réelles. De plus, sans faire appel à l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde, ils ont montré que l'effet tunnel et la quantification de l'énergie sont des conséquences du principe d'équivalence [27]. Après, avec Bertoldi, Faraggi et Matone ont généralisé l'EHJQS à N dimensions [28]. Ces résultats ont été obtenus par A. Bouda [29] sans faire appel à la géométrie différentielle. Ce qui permettait de mieux voir les réalités qui se cachaient derrière les équations. Il a avancé une nouvelle forme de la solution de l'EHJQS dans laquelle les constantes d'intégration sont clairement identifiées. Il arriva ainsi à confirmer l'existence de micro-états dans l'EHJQS.

Tout en étant en progrès, la représentation des trajectoires (trajectory representation) avancée par Floyd, reste toujours une théorie non achevée. La difficulté majeure de ce formalisme est l'utilisation du théorème de Jacobi par sa version classique* [19,23,24], comme il est déjà mentionné plus haut.

Dans ce travail, nous introduirons de nouvelles idées et exposerons une approche assez originale de la représentation des trajectoires. D'abord, dans le premier chapitre nous allons exposer les principaux développements qu'a connue la mécanique quantique depuis le débat entre Einstein et Bohr. Nous présenterons la théorie de Bohm, les travaux de Floyd, ainsi que ceux de Faraggi et Matone portant sur le principe d'équivalence. Ensuite dans le deuxième chapitre, on exposera un nouveau formalisme dans le cadre de la représentation des trajectoires, tout en avançant une justification de nos choix, et une interprétation de nos résultats. On introduira le Lagrangien d'un système quantique à une dimension duquel, on tirera les équations de mouvement du corpuscule, entre autres l'équation intégrale première de la loi de Newton quantique (IPLNQ). On fera ensuite un trait sur le formalisme

* En fait, on parle de version classique du théorème de Jacobi parce qu'on introduit -dans ce travail- une version quantique pour ce théorème, qui constituerait la base de la mécanique quantique.

Hamiltonien correspondant à notre Lagrangien. Toujours dans ce chapitre, en s'appuyant sur le principe d'équivalence et sur une version quantique du théorème de Jacobi, on reproduira par une nouvelle manière les équations du mouvement dont l'IPLNQ. Enfin, nous ferons une comparaison entre nos résultats et ceux de Floyd.

Dans le troisième chapitre, nous allons exposer une tentative de généralisation de l'EHJQS à trois dimensions dans le cas d'un potentiel à symétrie sphérique. Enfin, nous exposerons une conclusion dans laquelle nous essayerons d'interpréter physiquement nos résultats et leurs implications. Nous discuterons aussi, le fondement de notre approche, et la coexistence ondes et corpuscules.

A présent, nous laisserons le lecteur découvrir lui-même, une hardie tentative de parvenir à une théorie déterministe fondée sur un formalisme bel et bien conçu.

CHAPITRE 1

EQUATION D'HAMILTON JACOBI QUANTIQUE

Dans ce chapitre, nous exposerons la théorie liée à l'établissement de l'équation de Hamilton Jacobi quantique. Nous développerons les grands axes de cette théorie, depuis son apparition dans l'approche de Bohm jusqu'à son état d'avancement actuel. Ceci sera fait en discutant de ses points faibles et des efforts fournis par des physiciens contemporains tel que Floyd, Faraggi et Matone, pour construire une théorie cohérente.

1. THEORIE DE BOHM

En reprenant les idées de de Broglie, David Bohm développa dès 1951 un intéressant modèle basé sur une approche hydrodynamique de la mécanique quantique. En particulier, Bohm généralisa l'équation de Hamilton-Jacobi à la mécanique quantique, et cela pour une description du mouvement des particules dans le cadre d'une interprétation causale [12]. L'équation obtenue est appelée équation de Hamilton-Jacobi quantique (EHJQ). Bohm prit comme point de départ l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (1.1)$$

et écrit la fonction d'onde ψ sous la forme suivante [12]:

$$\psi(x, y, z, t) = A(x, y, z, t) \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(x, y, z, t)\right), \quad (1.2)$$

où $A(x,y,z,t)$ et $S(x,y,z,t)$ sont des fonctions réelles. En remplaçant l'Eq. (1.2) dans l'Eq. (1.1) et en séparant la partie imaginaire de la partie réelle, Bohm aboutit à

$$\frac{1}{2m}(\vec{\nabla}S)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta A}{A} + V = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad (1.3.a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(A^2 \frac{\vec{\nabla}S}{m} \right) = -\frac{\partial A^2}{\partial t}. \quad (1.3.b)$$

Le terme proportionnel à \hbar^2 dans l'Eq. (1.3.a), noté

$$V_B = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta A}{A}, \quad (1.4)$$

est appelé potentiel quantique de Bohm.

Remarquons tout d'abord que, si on pose $\hbar = 0$, le potentiel quantique s'annule et alors l'Eq. (1.3.a) se réduit à l'équation de Hamilton-Jacobi classique (EHJC) décrivant le mouvement d'une particule classique. Dans ce cas, S est identifiée à l'action et V_B est alors considéré comme décrivant les effets quantiques. La relation (1.3.b), comme le fait remarquer Bohm [12], représente l'équation de conservation du courant de probabilité. Effectivement, si on injecte l'expression donnée par l'Eq. (1.2) de ψ dans l'expression connue en mécanique quantique du courant de probabilité [30]

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\psi^*), \quad (1.5)$$

on trouve que

$$\vec{j} = A^2 \frac{\vec{\nabla}S}{m}, \quad (1.6)$$

\vec{j} étant le courant de probabilité. Ainsi, l'Eq. (1.3.b) s'écrit sous la forme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial A^2}{\partial t} = 0. \quad (1.7)$$

Cette relation est bel et bien l'équation de conservation du courant de probabilité, étant donné que l'Eq. (1.2) indique que la densité de présence est

$$\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2 = A^2(x,t). \quad (1.8)$$

Ce résultat a été avancé dans les travaux de de Broglie [8] et de Madelung [13]. En fait, Bohm et ses prédécesseurs ont remarqué dans l'Eq. (1.7) une forte analogie avec

l'équation de conservation d'un fluide. Ceci les incita à associer à l'onde ψ un fluide fictif de densité $\rho(x, t)$ et de flux \vec{j} , et les mena à définir un champ de vitesse \vec{v} représentant en chaque point la vitesse de l'élément fluide définie par

$$\vec{v} = \vec{j} / \rho . \quad (1.9)$$

D'après les Eqs. (1.6), (1.8) et (1.9), on a

$$\vec{v} = \frac{\vec{\nabla} S}{m} . \quad (1.10)$$

Cette très importante relation était le point d'appui de l'interprétation de Bohm du fluide quantique.

Pour aborder l'interprétation que proposa Bohm dans son approche, essayons d'exposer le point de vue de la théorie de l'onde pilote avancée par de Broglie [8]. La théorie de l'onde pilote et le modèle de Madelung identifient la vitesse de l'élément fluide, donnée par l'Eq. (1.10), à la vitesse de la particule (tel qu'un électron). Dans ce cas, on peut supposer qu'à l'onde ψ est associé un grand nombre de particules qui décrivent les trajectoires des éléments fluides. Mais dans une telle approche, on affronte deux difficultés apparentes. La première consiste dans le fait que pour une fonction d'onde réelle, le champ de vitesse du fluide est nul, ainsi la vitesse des particules quantiques devrait s'annuler, ce qui est évidemment insensé. La deuxième difficulté est que dans ce modèle, on identifie un fluide continu (champ) à un ensemble de particules (grains) qui, quel que soit leur grand nombre, ne peuvent décrire exactement le comportement d'un milieu continu. D'un autre côté, lors de l'étude d'un fluide, on ne peut pas décrire exactement une vraie localisation $r(\vec{t})$ de la particule — du fait que le fluide est un milieu continu dont le comportement est celui d'un champ et non de grain —, ce qui rend impossible une interprétation causale de la théorie quantique.

Pour compléter ce modèle hydrodynamique, Bohm postula l'existence de particules au sein du fluide. Ces particules seraient des non-homogénéités extrêmement localisées (highly localized inhomogeneity) dans le fluide, qui se déplaceraient à la vitesse de l'élément fluide $\vec{v}(x, t)$. La nature exacte de ces non-homogénéités n'est pas facile à prévoir. Bohm avança qu'elles pourraient être des objets étrangers de densité qui s'approcherait de celle du fluide, et qui serait entraînés par le milieu continu. D'une autre façon, ces non-homogénéités peuvent être interprétées par des structures dynamiques stables existant

au sein du fluide, par exemple un vortex. De telles structures seraient dues à des non-linéarités dans les équations qui gouvernent le mouvement de ce fluide [12]. De plus, le comportement du fluide réel n'est pas entièrement décrit par des équations théoriques. Il subsisterait continûment des fluctuations désordonnées qui ont diverse origines. Ces fluctuations laisseraient les non-homogénéités présentes de manière permanente. Ainsi, la densité ρ et les vitesses des particules $\vec{v}(x,t)$ ne seraient que des valeurs moyennes. Alors, dans le cas des fonctions d'ondes réelles, ce n'est que la vitesse moyenne qui s'annule, et pas la vitesse de la particule. Malgré cette tentative de remédier aux problèmes qu'elle affronte, la théorie de Bohm ne réussit pas à étudier le mouvement d'une particule sous l'action d'un potentiel tel que la barrière semi-infinie [31], l'oscillateur harmonique...

2. LE MODÈLE DE LA REPRÉSENTATION DES TRAJECTOIRES

Comme il est déjà présenté à l'introduction, Floyd reprit les travaux de Bohm et tenta, à son tour, une approche du problème en essayant en premier lieu de surmonter les difficultés décrites au paragraphe précédent. Tout d'abord, précisons que la grande partie des travaux de Floyd est faite à une dimension et dans le cas stationnaire. Dans son approche, il se basa sur une description dynamique du mouvement des particules. A chacune de ces dernières il affecta une trajectoire individuelle.

La tentative de Floyd va être d'un apport considérable, et aboutira à l'élaboration d'une nouvelle théorie dite — bien qu'elle ne soit pas encore achevée — la représentation des trajectoires (trajectory representation). Cette théorie fera l'objet d'étude de cette section.

2.1. Équation de Hamilton-Jacobi quantique

En partant de l'équation de Schrödinger à une dimension

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (2.1)$$

et en écrivant la fonction d'onde de la forme [19]

$$\psi(x, t) = A(x, t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(x, t)\right), \quad (2.2)$$

on aboutit à

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{(\partial^2 A / \partial x^2)}{A} + V(x) = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{2m} \left[A (\partial^2 S / \partial x^2) + 2 \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} \right] = - \frac{\partial A}{\partial t} , \quad (2.4)$$

$A(x)$ et $S(x)$ étant des fonctions réelles. Les Eqs. (2.3) et (2.4) représentent respectivement l'EHJQ et l'équation de continuité. La quantité

$$V_B = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{(\partial^2 A / \partial x^2)}{A} , \quad (2.5)$$

est le potentiel quantique de Bohm. Comme il est dit plus haut, il est responsable des effets quantiques liés au comportement dynamique de la particule. Vu la ressemblance avec l'EHJC, Floyd appela la quantité S qui apparaît dans l'EHJQ "la fonction de Hamilton principale", ou encore "action".

2.2. Problèmes stationnaires et équation de Hamilton-Jacobi quantique stationnaire

En physique la plupart des problèmes non-stationnaires se ramènent à des problèmes stationnaires. Les phénomènes stationnaires sont permanents, alors que les phénomènes non stationnaires sont transitoires.

Dans le cas stationnaire, la densité de probabilité $|\psi|^2$ n'est fonction que de la coordonnée x . Ainsi,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0 , \quad (2.6)$$

$$S(x, t) = S_0(x, E) - Et . \quad (2.7)$$

E représentant l'énergie de la particule. S_0 est dite la fonction de Hamilton caractéristique, c'est l'action réduite. Dans cette situation, les relations (2.3) et (2.4) s'écrivent:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{(\partial^2 A / \partial x^2)}{A} + V(x) = E , \quad (2.8)$$

$$A \left(\frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial S_0}{\partial x} = 0 . \quad (2.9)$$

De l'Eq. (2.9), on déduit [20,21,22]

$$A = K \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^{-1/2} . \quad (2.10)$$

K est une constante réelle. En substituant cette dernière dans l'Eq. (2.8), on aboutit à

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{4m} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^{-2} \left(\frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^3 S_0}{\partial x^3} \right) \right] + V(x) = E , \quad (2.11)$$

L'Eq. (2.11) est l'équation de Hamilton-Jacobi Quantique Stationnaire (EHJQS). En injectant l'Eq. (2.10) dans l'Eq. (2.2), on obtient

$$\psi(x) = K \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^{-1/2} \exp \left[\frac{iS_0(x)}{\hbar} \right]. \quad (2.12)$$

On remarque que le cas où $S_0 = \text{cte}$ est à exclure cause d'indétermination dans les Eqs. (2.10) et (2.11). Dans ce cas, en reprenant l'Eq. (2.8), on peut écrire

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{(\partial^2 A / \partial x^2)}{A} + V(x) = E, \quad (2.13)$$

ce qui est identique à l'équation de Schrödinger, $A(x)$ correspond à $\psi(x)$ à un facteur de phase près. On peut voir que pour les états liés qui sont décrits par des fonctions d'ondes réelles, le moment conjugué généralisé défini par

$$P = \frac{\partial S_0}{\partial x}, \quad (2.14)$$

s'annule. Dans ce cas, une approche dynamique s'avère impossible à faire. Pour remédier à cela, Floyd propose d'écrire la fonction d'onde sous une nouvelle forme [19] différente de celle donnée par Bohm (Eq. (2.2))

$$\psi(x) = A(x) \left[\sigma \cos \left(\frac{S_0(x)}{\hbar} \right) + \beta \sin \left(\frac{S_0(x)}{\hbar} \right) \right], \quad (2.15)$$

où σ et β sont des coefficients réels. Avec cette nouvelle forme de ψ , on peut s'assurer que S_0 n'est jamais constant dans le cas des états liés. Il est facile de vérifier que la forme (2.15) de la fonction d'onde ψ nous mène aux relations (2.10) et (2.11) (voir Ref. [29]). Finalement, pour l'étude du comportement dynamique des objets quantiques dans le cas des problèmes stationnaires, Floyd propose de reprendre l'EHJQS donnée par l'Eq. (2.11), et cela en tenant compte de l'Eq. (2.10) et en liant la fonction d'onde à l'action réduite par la relation (2.2) dans le cas des fonctions d'ondes complexes, ou par la relation (2.15) dans le cas des fonctions d'ondes réelles.

2.3. Approche numérique et micro-états:

Contrairement à Bohm qui a proposé une approche hydrodynamique, le raisonnement de Floyd consiste à considérer un comportement dynamique des particules. Il considéra alors, que l'EHJQS est plus fondamentale que l'équation de Schrödinger. Ceci était

inévitables du fait que cette dernière ne contient aucun aspect dynamique. En fait l'équation de Schrödinger est une équation d'une onde. Cette assertion poussa Floyd à étudier l'EHJQ donnée par l'Eq. (2.8) en introduisant le potentiel modifié

$$U(x, E) = V(x) + V_B , \quad (2.16)$$

où V_B est le potentiel quantique de Bohm défini par (2.5). Il écrit l'Eq. (2.8) sous la forme

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + U(x, E) = E . \quad (2.17)$$

En écrivant cette dernière équation comme

$$\frac{\partial S_0}{\partial x} = [2m(E - U(x, E))]^{\frac{1}{2}} , \quad (2.18)$$

et en l'injectant dans l'Eq. (2.11), on arrive à

$$U(x, E) + \frac{\hbar^2}{8m} \left[\frac{(\partial^2 U / \partial x^2)}{E - U} \right] + \frac{5\hbar^2}{32m} \left[\frac{\partial U / \partial x}{E - U} \right]^2 = V(x) . \quad (2.19)$$

Cette équation différentielle en U est du second ordre par rapport à x . En la résolvant, on trouve la forme du potentiel modifié $U(x)$ qui nous donne une description du comportement de la particule. A l'aide d'une approche numérique, Floyd démontra en appliquant l'Eq. (2.19) à l'oscillateur harmonique la possibilité d'existence d'états de mouvement appelés micro-états, que la fonction d'onde de Schrödinger ne détectait pas.

2.4 Équation de mouvement paramétrisée par le potentiel modifié

Bohm, dans ces travaux, fait correspondre la vitesse de l'élément fluide à celle du corpuscule

$$\dot{x} = \frac{(\partial S_0 / \partial x)}{m} , \quad (2.20)$$

d'où l'on tire

$$\ddot{x} = -\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial x} . \quad (2.21)$$

Mais, Floyd suppose que l'on doit dériver l'équation de mouvement à partir du théorème de Jacobi

$$t - t_0 = \frac{\partial S_0}{\partial E} . \quad (2.22)$$

Ainsi, en utilisant la relation (2.18), on peut écrire

$$S_0(x, E) = \int^x \sqrt{2m(E - U(x, E))} dx . \quad (2.23)$$

En remplaçant dans l'Eq. (2.22) et en dérivant par rapport à t , on aboutit à [19]

$$\dot{x} = \frac{\partial S_0 / \partial x}{m(1 - \partial U / \partial E)} . \quad (2.24)$$

Cette dernière équation donne la relation entre le moment conjugué généralisé $\partial S_0 / \partial x$ et la vitesse \dot{x} . Cette relation diffère de celle de Bohm par le facteur $1 - \partial U / \partial E$. Floyd explique ceci par le fait que l'énergie n'est plus une constante séparable du potentiel modifié, puisque U dépend de E . Dans ce cas, il trouve que le moment conjugué $\partial S_0 / \partial x$ n'est pas égal à la quantité de mouvement $m\dot{x}$. Maintenant, en reprenant la relation (2.24) on peut écrire

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U / \partial x}{m(1 - \partial U / \partial E)^2} + \frac{2(E - U)}{m(1 - \partial U / \partial E)^3} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial E} . \quad (2.25)$$

L'équation différentielle (2.19) étant du second ordre, après résolution, le potentiel U dépendra de (x, E) et de deux paramètres supplémentaires (a, b) jouant le rôle de constantes d'intégration. Ainsi, d'après (2.19) il y aurait plusieurs valeurs possibles pour \ddot{x} , et donc différents mouvements seraient autorisés pour la particule. Comme il est déjà mentionné dans le paragraphe 2.3, la présence de micro-états dans l'EHJQS présente plusieurs possibilités pour le mouvement du corpuscule, et ces possibilités sont exprimées par la relation (2.25).

2.5. Solution de l'EHJQS

Maintenant, reprenons l'EHJQS donnée par l'Eq. (2.11). En résolvant cette équation, Floyd écrit le moment conjugué sous la forme [21,22,23]

$$\frac{\partial S_0}{\partial x} = \frac{\sqrt{2m}}{a\phi^2 + b\theta^2 + c\phi\theta} , \quad (2.26)$$

où θ et ϕ sont deux solutions réelles indépendantes de l'équation de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = E\psi ,$$

a, b, c sont des constantes réelles telles que $a, b > 0$ et $ab - c^2/4 > 0$. Les solutions θ et ϕ sont normalisées de façon que leur Wronskien

$$\mathcal{W} = \theta_x \phi - \theta \phi_x .$$

soit

$$\mathcal{W} = \pm \frac{\sqrt{2m}}{\hbar \sqrt{ab - c^2/4}} ,$$

Ce Wronskien est une constante puisque θ et ϕ sont solutions d'une équation différentielle linéaire et homogène du second ordre, dont le coefficient de la première dérivée est nul. Le fait que les constantes a et b sont positives est dû à la réalité de l'action réduite S_0 [21,22,23].

A partir de l'Eq. (2.26) on peut facilement montrer que la forme de l'action réduite est [21]

$$S_0 = \hbar \arctan \left\{ \frac{b(\theta/\phi) + c/2}{\sqrt{ab - c^2/4}} \right\} + K . \quad (2.27)$$

K est une constante additive qu'on peut annuler.

Cette forme de l'action réduite sera d'un apport précieux pour la représentation des trajectoires. Elle dépend de l'énergie E , et des constantes a, b et c . L'EHJQS étant du second ordre par rapport à $(\partial S_0/\partial x)$, sa solution (2.26) ne devrait dépendre que de deux constantes d'intégration. En conséquence, parmi les trois paramètres a, b et c , seulement deux sont indépendants.

2.6. Les états liés et la quantification de l'énergie

Dans cette partie nous allons introduire la variable de l'action. Elle est définie par la quantité [21]

$$\mathcal{J} = \oint P dx . \quad (2.28)$$

En fait, cette quantité ressemble à l'action à laquelle est imposée la condition de quantification Bohr-Sommerfeld. Cependant, dans notre cas \mathcal{J} représente l'intégrale du moment conjugué généralisé $\partial S_0/\partial x$, et non plus l'intégrale de la quantité de mouvement classique $m\dot{x}$. En utilisant la relation (2.26), on peut écrire

$$\mathcal{J} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2m} dx}{a \phi^2 + b \theta^2 + c \phi \theta} .$$

En multipliant et en divisant par le Wronskien dans l'argument de l'intégrale on arrive à

$$\mathcal{J} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2m}}{\mathcal{W}} \frac{\frac{d(\theta/\phi)}{dx} dx}{a + b (\theta/\phi)^2 + c (\theta/\phi)} ,$$

ce qui se ramène à

$$\mathcal{J} = 2\hbar \int_{-\infty}^{\infty} (ab - c^2/4)^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{d(\theta/\phi)}{dx} dx}{a + b (\theta/\phi)^2 + c (\theta/\phi)} . \quad (2.29)$$

Cette relation constitue la définition explicite de la variable de l'action \mathcal{J} dans la représentation des trajectoires. Si on veut calculer l'intégrale de l'Eq. (2.29), alors il faudrait faire un changement de variables de x vers (θ/ϕ) . Choisissons ϕ comme étant la solution physique du problème des états liés, et θ comme étant la solution mathématique associée à ϕ . Notons $N - 1$ le nombre de noeuds pour lesquels la fonction ϕ s'annule [33] (ϕ possède deux autres points, à $\pm\infty$, pour lesquels elle s'annule mais qui ne sont pas des noeuds). Cependant, θ possède N noeuds (à $\pm\infty$, θ est divergente). Considérons d'abord le cas où à la limite $x \rightarrow -\infty$, ϕ et θ sont de signes différents. On a alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\theta/\phi) = -\infty .$$

Comme les nombres des noeuds des fonctions θ et ϕ sont de parités différentes, alors à la limite $x \rightarrow +\infty$, seulement celle dont le nombre de noeuds est impaire changera de signe. De ce fait

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\theta/\phi) = +\infty .$$

De plus, (θ/ϕ) possède des singularités aux $N - 1$ noeuds x_n de la fonction ϕ :

$$\lim_{x \rightarrow x_n^+} (\theta/\phi) = -\infty ,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_n^-} (\theta/\phi) = +\infty ,$$

En conséquence lors du changement de variables de x à (θ/ϕ) , et pour x passant de $-\infty$ à $+\infty$, la quantité (θ/ϕ) passe N fois de $-\infty$ à $+\infty$. Dans ce cas, l'Eq. (2.29) se ramènera à

$$\mathcal{J} = 2N\hbar \int_{-\infty}^{\infty} (ab - c^2/4)^{\frac{1}{2}} \frac{d(\theta/\phi)}{a + b (\theta/\phi)^2 + c (\theta/\phi)} ,$$

ce qui nous donne

$$\mathcal{J} = 2N\hbar \left[\arctan \left\{ \frac{b(\theta/\phi) + c/2}{\sqrt{ab - c^2/4}} \right\} \right]_{\theta/\phi=-\infty}^{\theta/\phi=+\infty},$$

Enfin, on aura

$$\mathcal{J} = 2N\hbar\pi = Nh. \quad (2.30)$$

Donc, dans le cas des états liés, la variable de l'action est quantifiée, et ceci quelles que soient a , b et c . De ce fait, on sait dès lors que la quantification de la variable de l'action nous conduit directement à la quantification de l'énergie donnée par l'équation de Schrödinger. On remarque aussi que cette quantification est différente de celle déduite de la méthode WKB [34] qui donne la valeur $\mathcal{J}_{WKB} = (N + \frac{1}{2})h$. Nous savons en fait, que la méthode WKB n'est qu'une méthode d'approximation.

2.7. Les micro-états dans l'EHJQS

Nous avons considéré dans le paragraphe 2.3 les micro-états détectés par l'approche du potentiel modifié. Maintenant, nous parlerons de micros-états déduits directement de la solution générale de l'EHJQS. Floyd [22] fait remarquer que les micro-états existent pour les états liés et que pour les états non liés il n'y aurait pas de micro-états.

Considérons d'abord le cas des états liés. En portant les Eqs. (2.10), (2.26) et (2.27) dans l'Eq. (2.15), on peut écrire

$$\psi = (a\phi^2 + b\theta^2 + c\theta\phi) \left\{ \sigma \cos \left[\arctan \left(\frac{b(\theta/\phi) + c/2}{\sqrt{ab - c^2/4}} \right) \right] + \beta \sin \left[\arctan \left(\frac{b(\theta/\phi) + c/2}{\sqrt{ab - c^2/4}} \right) \right] \right\}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \psi &= \sigma \sqrt{a - \frac{c^2}{4b}} \phi + \beta \sqrt{b} \theta + \frac{c\beta}{\sqrt{2b}} \phi, \\ &= \left(\sigma \sqrt{a - \frac{c^2}{4b}} + \frac{c\beta}{\sqrt{2b}} \right) \phi + \beta \sqrt{b} \theta. \end{aligned} \quad (2.31)$$

On sait que la solution physique de l'équation de Schrödinger est la combinaison linéaire de deux solutions mathématiques $\psi = \alpha\phi' + \beta\theta'$. Maintenant, en choisissant la

paire des fonctions (ϕ, θ) qui figurent dans l'expression de l'action réduite, de manière que l'une d'elles (par exemple ϕ) correspond à la solution physique ψ , donc $\psi = \phi$, on peut voir que

$$\beta \sqrt{b} = 0 \quad ; \quad \sigma \sqrt{a - \frac{c^2}{4b}} + \frac{c \beta}{\sqrt{2b}} = 1 .$$

La constante b étant strictement positive, alors

$$\beta = 0 \quad ; \quad \sigma \sqrt{a - \frac{c^2}{4b}} = 1 . \quad (2.32)$$

Cette dernière équation ne permet pas de fixer complètement les paramètres a , b , et c . Ainsi, pour une même fonction d'onde ϕ qui décrit un état physique, nous avons une multitude de choix de (a, b, c) et par conséquent, une multitude de trajectoires possibles étant donné que le générateur du mouvement S_0 est une fonction dépendante de ces paramètres (Eq. (2.27)). Ces états de mouvement possibles, correspondant à la même fonction d'onde définissent les micro-états.

Dans le cas des états non liés, la fonction d'onde est complexe, la relation (2.12) représentera alors, la liaison entre ψ et S_0

$$\psi(x) = K \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^{-1/2} \exp \left[\frac{i S_0(x)}{\hbar} \right] .$$

où $K' = K/\sqrt{2m}$ Dans ce cas, on a

$$\psi = K' (a \phi^2 + b \theta^2 + c \theta \phi) \left\{ \cos \left[\arctan \left(\frac{b (\theta/\phi) + c/2}{\sqrt{ab - c^2/4}} \right) \right] + \right. \\ \left. i \sin \left[\arctan \left(\frac{b (\theta/\phi) + c/2}{\sqrt{ab - c^2/4}} \right) \right] \right\} ,$$

Remarquons tout d'abord que le fait que remplacer les constantes a , b et c par les constantes $a' = a/K'$, $b' = b/K'$ et $c' = c/K'$ ne change en rien la nature de la fonction d'onde ψ , ou même de l'action S_0 . Donc, on peut écrire

$$\psi = (a' \phi^2 + b' \theta^2 + c' \theta \phi) \left\{ \cos \left[\arctan \left(\frac{b' (\theta/\phi) + c'/2}{\sqrt{a'b' - c'^2/4}} \right) \right] + \right. \\ \left. i \sin \left[\arctan \left(\frac{b' (\theta/\phi) + c'/2}{\sqrt{a'b' - c'^2/4}} \right) \right] \right\} ,$$

$$= \left(\sqrt{a' - \frac{c'^2}{4b'}} + \frac{i c'}{2\sqrt{b'}} \right) \phi + i\sqrt{b'} \theta, \quad (2.33)$$

Comme la solution physique s'écrit sous la forme de la combinaison linéaire $\psi = \alpha\phi + \beta\theta$ (α et β sont des nombres complexes), alors

$$\alpha = \left(\sqrt{a' - \frac{c'^2}{4b'}} + \frac{i c'}{2\sqrt{b'}} \right) \quad ; \quad \beta = i\sqrt{b'}. \quad (2.34)$$

Du fait que α et β sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales, il est clair que les deux relations de (2.34) déterminent de manière univoque les valeurs des deux constantes indépendantes de l'ensemble (a', b', c') , la troisième étant déterminée à partir du Wronskien. Donc, à la fonction d'onde ψ correspond une seule trajectoire possible et les micro-états n'existent pas pour les états non liés. Tous ces résultats concernant les micro-états ont été retrouvés par la suite par Bouda [29] en utilisant une forme unique pour les fonctions d'onde réelles et complexes

$$\psi_E = \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\alpha \exp\left(\frac{i}{\kappa} S_0\right) + \beta \exp\left(-\frac{i}{\kappa} S_0\right) \right].$$

Cette forme a été déjà introduite par Faraggi et Matone dans leur approche par la géométrie différentielle (voir Sec.3).

2.8. Étude du cas de la particule libre

Floyd proposa dans l'un de ses articles [23] d'étudier la particule libre. Il choisit alors, la paire de solutions indépendantes de l'équation de Schrödinger suivante:

$$\phi = [E(ab - c^2/4)]^{-\frac{1}{2}} \cos \left[(2mE)^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\hbar} \right], \quad (2.35)$$

$$\theta = [E(ab - c^2/4)]^{-\frac{1}{2}} \sin \left[(2mE)^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\hbar} \right]. \quad (2.36)$$

Dans ce cas, l'action réduite (Eq. (2.27)) peut être écrite sous la forme

$$S_0 = \hbar \arctan \left\{ \frac{b \tan[(2mE)^{\frac{1}{2}} x/\hbar] + c/2}{(ab - c^2/4)^{\frac{1}{2}}} \right\}. \quad (2.37)$$

Pour $a = b$ et $c = 0$, on a $S_0 = (2mE)^{\frac{1}{2}} x$. Cette dernière relation coïncide avec l'action réduite classique. Pour étudier le comportement de l'action réduite à la limite classique, dans un cas où $a \neq b$ et $c \neq 0$, Floyd utilisa la règle de l'Hospital

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} S_0 = \frac{2(ab - c^2/4)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2mE} x}{a + b + [(a - b)^2 + c^2]^{\frac{1}{2}} \cos \left\{ 2(2mE)^{\frac{1}{2}} x/\hbar + \cot^{-1}[(b - a)/c] \right\}}. \quad (2.38)$$

On remarque bien que le facteur $(1/\hbar)$ présent dans l'argument du cosinus induit, à la limite classique, une certaine indétermination dans l'expression de l'action réduite [23]. Floyd essaya par la suite d'établir les équations de mouvement. Il écrit tout d'abord l'expression du moment conjugué

$$\frac{\partial S_0}{\partial x} = \frac{2(ab - c^2/4)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2mE} x}{a + b + [(a - b)^2 + c^2]^{\frac{1}{2}} \cos \left\{ 2(2mE)^{\frac{1}{2}} x/\hbar + \cot^{-1}[(b - a)/c] \right\}} . \quad (2.39)$$

De même que pour l'action réduite, lors du passage à la limite classique une indétermination réside dans l'expression du moment conjugué. Pour retrouver les résultats de la mécanique classique, Floyd propose de moyenner la valeur du moment conjugué sur un cycle du cosinus qui apparaît dans l'expression de $\partial S_0/\partial x$, et cela tout en utilisant les tables standard d'intégrales [35]. Il trouve

$$\begin{aligned} \langle \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\partial S_0}{\partial x} \rangle &= \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{(2mE)^{\frac{1}{2}}}{\hbar\pi} \int_{\frac{-\hbar\pi}{(8mE)^{1/2}}}^{\frac{\hbar\pi}{(8mE)^{1/2}}} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right) (E, a, b, c, x + x') dx' \\ &= \frac{2(2mE)^{\frac{1}{2}} (ab - c^2/4)^{\frac{1}{2}}}{(a + b) \left[1 - \frac{(a-b)^2 - c^2}{(a+b)^2} \right]^{\frac{1}{2}}} \\ &= (2mE)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned} \quad (2.40)$$

On voit clairement que la moyenne du moment conjugué correspond au moment classique, et que les micro-états spécifiés par les constantes a , b et c disparaissent. Pour établir l'équation de mouvement, Floyd utilise le theoreme de Jacobi sous sa version classique

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = t - t_0 ,$$

à partir duquel il écrit

$$t - t_0 = \frac{(ab - c^2/4)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2m/E} x}{a + b + [(a - b)^2 + c^2]^{\frac{1}{2}} \cos \left\{ 2(2mE)^{\frac{1}{2}} x/\hbar + \cot^{-1}[(b - a)/c] \right\}} . \quad (2.41)$$

Tout comme pour le moment conjugué, Floyd évalua la moyenne de $t - t_0$ sur un cycle du cosinus et trouva

$$\langle \lim_{\hbar \rightarrow 0} (t - t_0) \rangle_{\text{moy}} = \frac{(2m/E)^{\frac{1}{2}} x (ab - c^2/4)^{\frac{1}{2}}}{(a + b) \left[1 - \frac{(a-b)^2 - c^2}{(a+b)^2} \right]^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{m}{2E} \right)^{\frac{1}{2}} x . \quad (2.42)$$

Ce qui correspond au résultat de la mécanique classique.

Il est clair que le fait de moyenner sur le cycle du cosinus a permis à Floyd de retrouver les résultats de la mécanique classique, bien que l'indétermination résiduelle subsiste toujours. Floyd expliqua cette indétermination par le fait qu'en mécanique classique, on utilise une seule constante d'intégration (E), alors qu'en mécanique quantique on a plus d'une constante d'intégration. De plus, il a fait la remarque que \hbar est une constante qui ne doit pas être traitée comme une variable, donc une approche du type $\hbar \rightarrow 0$ n'est pas justifiée.

Il est à noter que pour la particule libre la relation

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} S_0 = 2E(t - t_0) . \quad (2.43)$$

est vérifiée. Cette relation peut être directement déduite des relations (2.38) et (2.41). De même, on peut écrire la relation suivante

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} S = E(t - t_0) = \int_{t_0}^t L^{classique} dt = S^{classique} . \quad (2.44)$$

3. POSTULAT D'ÉQUIVALENCE EN MÉCANIQUE QUANTIQUE

Dans le cadre de la géométrie différentielle, Faraggi et Matone [24,25,26] ont montré récemment qu'à partir d'un postulat d'équivalence, on peut reproduire la mécanique quantique. En fait, ils ont pu construire l'EHJQS d'un système non relativiste à une dimension. Ils ont montré que cette dernière se ramène à l'équation de Hamilton Jacobi classique en remplaçant la dérivée ∂_x par la dérivée $\partial_{\hat{x}}$, où \hat{x} est la coordonnée résultant de la transformation de x définie par $d\hat{x} = \frac{dx}{\sqrt{1-\mathcal{B}^2}}$, \mathcal{B}^2 étant proportionnel au potentiel quantique.

3.1 Énoncé du postulat d'équivalence

Avant d'arriver à énoncer le postulat d'équivalence, Faraggi et Matone cherchaient à construire certaines classes de transformations canoniques qui permettraient de relier plusieurs systèmes quantiques, et parmi lesquelles il existerait une transformation qui nous mènerait à l'EHJQS [24]. Mais, le fait que les équations canoniques de la mécanique

quantique étaient inconnues rendait difficile la construction de telles transformations. Au cours de leur recherche, Faraggi et Matone ont remarqué qu'en mécanique classique, deux systèmes de particules A et B d'actions $S_0^{cl}(x)$ et $\tilde{S}_0^{cl}(\tilde{x})$ sont équivalents sous une transformation de coordonnées définie par

$$\tilde{S}_0^{cl}(\tilde{x}) = S_0^{cl}(x) .$$

Cette remarque n'est plus valable dans le cas où l'une des particules est au repos (action constante). Donc, en décrivant les systèmes physiques par l'EHJCS, on ne peut pas avoir une équivalence entre deux systèmes lorsque l'un d'eux est au repos. Pour cette raison, les deux physiciens étaient curieux de voir quel type d'équation émanerait lors d'une transformation de $x \rightarrow \tilde{x}$ telle que

$$\tilde{S}_0(\tilde{x}) = S_0[x(\tilde{x})] , \quad (3.1)$$

par laquelle les deux systèmes, décrits suivant x et \tilde{x} , sont équivalents même si l'un d'eux est au repos. Ainsi, une telle transformation réduirait tout système quantique à un système libre d'énergie nulle. Cette question incita les deux physiciens à formuler le postulat d'équivalence suivant [24,25,26]:

pour toute paire W^a, W^b , il existe une transformation de coordonnées

$$x \rightarrow \tilde{x} = \tilde{S}_0^{-1} \circ S_0(x) , \quad (3.2)$$

pour laquelle on a

$$W^a(x) \rightarrow \tilde{W}^a(\tilde{x}) = W^b(\tilde{x}) ,$$

avec $W(x) = V(x) - E$. W^a et W^b constituent deux vecteurs de l'espace \mathcal{H} des formes des quantités $W(x)$.

Le principe précédent peut être interprété comme suit: Si on peut passer d'un système d'action réduite $S_0(x)$ à un autre système d'action réduite $\tilde{S}_0(\tilde{x})$ via une transformation $x \rightarrow \tilde{x}$, telle que $\tilde{S}_0(\tilde{x}) = S_0(x)$, alors les deux systèmes sont dit équivalents s'il existe dans l'espace \mathcal{H} un vecteur W^b qui serait le vecteur transformé de W^a . En fait, si le système S_0 est décrit par une équation caractéristique qui contient W^a et $S_0(x)$, alors, le système

\tilde{S}_0 sera décrit par une équation caractéristique de forme apparentée à celle du système S_0 , mais qui sera écrite pour $\tilde{S}_0(\tilde{x})$ et $W^b(\tilde{x})$.

D'après ce principe, on peut toujours trouver une transformation de coordonnées qui nous fait passer d'un système dont le potentiel et l'énergie sont $V(x)$ et E à un système dont le potentiel et l'énergie sont nuls.

Maintenant, essayons d'appliquer ce principe dans le cas d'un système classique qui est décrit par l'équation de Hamilton-Jacobi classique

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0^{cl}}{\partial x} \right)^2 + W(x) = 0 . \quad (3.3)$$

En appliquant alors la transformation définie par l'Eq. (3.2), on peut écrire

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \tilde{S}_0^{cl}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \tilde{W}(\tilde{x}) = 0 , \quad (3.4)$$

avec

$$\tilde{W}(\tilde{x}) = \left(\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} \right)^2 W(x) . \quad (3.5)$$

D'après cette dernière équation, on voit que, transformer un vecteur $W(x)$ en un vecteur $\tilde{W}(\tilde{x}) = 0$ n'est possible que si le vecteur $W(x)$ est lui-même nul. Ceci contredit le principe d'équivalence pour lequel il serait possible de ramener tout vecteur $W(x)$ vers le vecteur nul de l'espace \mathcal{H} des formes des W . Donc, en mécanique classique le principe d'équivalence n'est pas vérifié. De ce fait, Faraggi et Matone étaient contraints de chercher une équation différente de l'EJCS et pour laquelle le principe d'équivalence est vérifié.

3.2 EHJQS et principe d'équivalence

Dans le but de décrire les systèmes quantiques, Faraggi et Matone dérivèrent l'équation vérifiant le principe d'équivalence tout en respectant les propriétés suivantes [26]:

1)- Lors de la transformation de coordonnées $x \rightarrow \tilde{x}$ tel que $\tilde{S}_0(\tilde{x}) = S_0(x)$, l'équation doit garder la même forme générale par rapport aux nouvelles grandeurs $\tilde{W}_0(\tilde{x})$ et $\tilde{S}_0(\tilde{x})$.

2)- Lors d'un passage à la limite classique, notre équation devrait se ramener à l'équation de Hamilton Jacobi classique.

3)- Tous les états $W \in \mathcal{H}$ sont équivalents sous la transformation $x \rightarrow \tilde{x}$.

La première propriété est liée à l'invariance, lors des transformations de coordonnées, des équations qui décrivent les systèmes physiques. La deuxième est due à l'existence

de la mécanique classique. La troisième propriété sera décisive pour la construction de l'équation différentielle à laquelle obéit S_0 . En ce sens, Faraggi et Matone proposeront de chercher la nouvelle équation sous la forme

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + W(x) + Q(x) = 0 , \quad (3.6)$$

où $Q(x)$ est une fonction qui dépend de x et qui s'annule lors du passage à la limite classique.

Introduisons maintenant, l'identité de base suivante [26,36]

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 = \frac{\kappa^2}{2} \left(\left\{ e^{\frac{2i}{\kappa} S_0}, x \right\} - \{S_0, x\} \right) . \quad (3.7)$$

La quantité $\{T(q), q\}$ définie par

$$\{T, q\} = \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right)^{-2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial q^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial q^3} \right) \right]$$

représente le Schwarzien de la fonction $T(q)$, alors que κ est une constante qui a la dimension d'une action. Cette identité est mathématiquement vérifiée, quelle que soit κ . A partir des Eqs.(3.6) et (3.7), on a

$$W(x) = \frac{\kappa^2}{4m} \left(\{S_0, x\} - \left\{ e^{\frac{2i}{\kappa} S_0}, x \right\} \right) - Q(x) . \quad (3.8)$$

Par la suite, Faraggi et Matone démontrèrent [25] que la quantité

$$Q(x) = \frac{\kappa^2}{4m} \{S_0, x\} , \quad (3.9)$$

constitue l'unique solution pour $Q(x)$. Ainsi, à partir des Eqs. (3.8) et (3.9), on arrive à

$$W(x) = -\frac{\kappa^2}{4m} \left\{ e^{\frac{2i}{\kappa} S_0}, x \right\} . \quad (3.10)$$

Si on remplace l'Eq. (3.9) dans l'Eq. (3.6), on a alors

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + V(x) - E + \frac{\kappa^2}{4m} \{S_0, x\} = 0 . \quad (3.11)$$

Ces deux dernières équations sont équivalentes.

Notons que, puisqu'en mécanique classique on ne trouve pas une constante qui a la dimension d'une action, alors κ représentera le paramètre naturel par lequel on arrive à retrouver la mécanique classique. Effectivement, si $\kappa \rightarrow 0$, l'Eq. (3.11) se réduira à l'EHJCS.

3.3 La résolution de l'EHJQS

Nous allons maintenant donner la solution de l'EHJQS introduite par Faraggi et Matone. Tout d'abord, remarquons que les relations [24,26]

$$\frac{\partial}{\partial x} (h'^{\frac{1}{2}} h'^{-\frac{1}{2}}) = 0, \quad (3.12)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[h'^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (h'^{\frac{1}{2}} h'^{-\frac{1}{2}} h) \right] = 0, \quad (3.13)$$

sont vérifiées quelle que soit la fonction $h(x)$, $h'(x)$ étant la dérivée de h par rapport à x . De plus, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \{h, x\} = h'^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(h'^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (h'^{\frac{1}{2}}) \right). \quad (3.14)$$

À partir des Eqs. (3.12), (3.13) et (3.14) on voit que l'équation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \{h, x\} \psi = 0 \quad (3.15)$$

a une solution de la forme

$$\psi = h'^{-\frac{1}{2}} (ah + b). \quad (3.16)$$

Si on choisit la fonction $h(x)$ telle que

$$h(x) = e^{\frac{2i}{\kappa} S_0}, \quad (3.17)$$

l'Eq. (3.15) correspondra à l'équation de Schrödinger en identifiant κ avec \hbar . Effectivement, puisque $h(x) = e^{\frac{2i}{\kappa} S_0}$, alors

$$\{h(x), x\} = \left\{ e^{\frac{2i}{\kappa} S_0}, x \right\},$$

et d'après l'Eq. (3.10), on a

$$\{h, x\} = -\frac{4m}{\kappa^2} W(x) = -\frac{4m}{\kappa^2} [V(x) - E]. \quad (3.18)$$

En remplaçant la relation (3.18) dans l'Eq. (3.15), on obtient

$$-\frac{\kappa^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi . \quad (3.19)$$

Donc, l'EHJQS, telle qu'elle est donnée par l'Eq. (3.10), génère l'équation de Schrödinger. D'après l'Eq. (3.16), la solution de l'EHJQS est reliée aux deux solutions indépendantes θ et ϕ de l'équation de Schrödinger par

$$\theta = - \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^{-\frac{1}{2}} \kappa^2 e^{-\frac{i}{\kappa} S_0} \left(a e^{2\frac{i}{\kappa} S_0} + b \right) , \quad (3.20.a)$$

$$\phi = - \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^{-\frac{1}{2}} \kappa^2 e^{-\frac{i}{\kappa} S_0} \left(c e^{2\frac{i}{\kappa} S_0} + d \right) . \quad (3.20.b)$$

Ces deux équations nous mènent à la relation suivante

$$e^{2\frac{i}{\kappa} S_0} = \frac{-d\theta + b\phi}{c\theta - a\phi} . \quad (3.21)$$

Enfin, la solution que donnent Faraggi et Matone est

$$S_0 = \frac{\kappa}{2i} \ln \left[\frac{-d\theta + b\phi}{c\theta - a\phi} \right] . \quad (3.22)$$

En fait, cette équation ne devrait contenir que trois constantes d'intégration indépendantes, car l'EHJQS est du troisième ordre. C'est pour cela que Faraggi et Matone écrivent plutôt

$$e^{2\frac{i}{\kappa} S_0} = e^{i\omega} \frac{\theta/\phi + i\bar{\ell}}{\theta/\phi - i\ell} , \quad (3.23)$$

où $\omega \in \Re$ et $\ell \in \Im$ sont les constantes d'intégration. \Re et \Im sont respectivement le corps des nombres réels et celui des nombres complexes. Cette dernière équation est équivalente à celle de Floyd (Eq. (2.27)). L'Eq. (3.23) est équivalente à

$$S_0 = \kappa \arctan \left[\frac{\theta + \mu\phi}{\nu\theta + \phi} \right] , \quad (3.24)$$

qui est donnée par A. Bouda dans la Ref. [29] sans avoir eu recours à la géométrie différentielle. Remarquons aussi que d'après les Eqs. (3.20), la solution générale de l'équation de Schrödinger peut s'écrire sous la forme

$$\psi_E = \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\alpha \exp \left(\frac{i}{\kappa} S_0 \right) + \beta \exp \left(-\frac{i}{\kappa} S_0 \right) \right] , \quad (3.25)$$

où α et β sont des constantes complexes, et S_0 l'action réduite liée à l'EHJQS. Il est tout à fait clair que la forme de la liaison entre ψ_E et S_0 donnée par Faraggi et Matone (Eq. (3.25)) diffère de celle donnée par Bohm (Eq. (2.2)). Donc, l'action réduite définie par Faraggi et Matone diffère de celle de Bohm.

La forme donnée par l'Eq. (3.25) a été obtenue par A. Bouda dans la Ref. [29]. En fait, il a démontré que cette relation est valable aussi bien pour les fonctions d'onde complexes que pour les fonctions d'ondes réelles. Pour traiter le cas des fonctions d'onde réelles, il posa $|\alpha| = |\beta|$. Bouda a pu aussi écrire le courant de probabilité (Eq. (1.6)) sous la forme

$$j = \frac{(|\alpha|^2 - |\beta|^2)}{m} A^2 \frac{\partial S_0}{\partial x} .$$

Donc, pour la fonction d'onde réelle, on a un courant de probabilité nul sans avoir pour autant à annuler le moment conjugué de la particule. Dans ce cas, S_0 ne serait pas constant, et une approche dynamique serait vraisemblablement possible dans le cas des états liés.

3.4 Déformation de la géométrie et coordonnée quantique

Tout comme en relativité générale, le principe d'équivalence en mécanique quantique génère une déformation de la géométrie de l'espace.

En fait, si on veut ramener l'EHJQS à une forme qui correspondrait à l'EHJCS, il suffit d'appliquer une transformation de coordonnées telle que [36]

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \right)^2 = 1 - \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^{-2} \{S_0, x\} . \quad (3.26)$$

Effectivement, si on remplace l'Eq. (3.26) dans l'EHJQS on aboutit à,

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \hat{S}_0}{\partial \hat{x}} \right) + \hat{W}(\hat{x}) = 0 . \quad (3.27)$$

avec

$$\hat{S}_0(\hat{x}) = S_0(x)$$

et

$$\hat{W}(\hat{x}) = W(x(\hat{x})) . \quad (3.28)$$

De ce fait, l'Eq. (3.27) est équivalente à l'EHJQS, mais écrite avec une nouvelle coordonnée \hat{x} définie par (3.26). La coordonnée \hat{x} est dite *coordonnée quantique* et s'écrit comme suit

$$\hat{x} = \int^x \frac{dx}{\sqrt{1 + 2m (\partial S_0 / \partial x)^{-2} V_B}} . \quad (3.29)$$

où V_B est le potentiel quantique défini par

$$V_B = -\frac{\hbar^2}{4m} \{S_0, x\} .$$

En utilisant l'EHJQS, on peut écrire

$$\hat{x} = \int^x \frac{(\partial S_0 / \partial x) dx}{\sqrt{2m[E - V(x)]}} . \quad (3.30)$$

On remarque bien d'après les Eqs. (3.29) et (3.30) que le potentiel quantique joue un rôle dans la déformation de la géométrie de l'espace. Il est de même pour le potentiel classique. Cette nouvelle vue de la mécanique quantique sera exploitée dans le chapitre suivant pour établir les équations de mouvement d'une particule à une dimension.

3.5 Équation du mouvement quantique:

Du fait de l'existence en mécanique quantique d'une équation de Hamilton Jacobi, un raisonnement basé sur la notion de trajectoire devient inévitable. Pour cette raison, on se demandait si l'EHJQS ne dériverait pas d'une équation plus fondamentale qui décrirait le mouvement dynamique de la particule de manière plus explicite.

C'est dans ce sens que Faraggi et Matone ont repris [24] les idées de Floyd (Sec.2) [19,23], en admettant que le théorème de Jacobi écrit sous la forme

$$t - t_0 = \frac{\partial S_0}{\partial E} ,$$

est autant valable pour la mécanique quantique que pour la mécanique classique. Dans cet état d'esprit, ils reprirent la forme du moment conjugué de Floyd donnée par l'Eq. (2.24) de ce chapitre

$$P = \frac{\partial S_0}{\partial x} = m\dot{x} (1 - \partial V_B / \partial E) , \quad (3.31)$$

où P est le moment conjugué.

Maintenant, si on dérive l'EHJQS par rapport à E on arrive à

$$m \frac{\partial V_B}{\partial E} = m - P \frac{\partial P}{\partial E} . \quad (3.32)$$

En injectant cette relation dans l'Eq. (3.31), on écrira l'équation

$$\dot{x} = \frac{1}{\partial_E P} , \quad (3.33)$$

qui est aussi classiquement satisfaite. Particulièrement, pour la particule libre on a

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 (1 - \partial_E V_B) + V_B . \quad (3.34)$$

De la relation (3.34), Faraggi et Matone définirent “le champ de masse quantique” (*the quantum mass field*) par la quantité suivante

$$m_q = m(1 - \partial_E V_B) , \quad (3.35)$$

de telle manière à avoir

$$P = m_q \dot{x} . \quad (3.36)$$

Cette forme du moment conjugué nous permet d'écrire l'EHJQS en fonction de \dot{x} , \ddot{x} et $\dot{\ddot{x}}$. De l'Eq. (3.36), on peut déduire

$$P' = m'_q \dot{x} + m_q \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} ; \quad P'' = m''_q \dot{x} + 2m'_q \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} + m_q \left(\frac{\dot{\ddot{x}}}{\dot{x}^2} - \frac{\ddot{x}^2}{\dot{x}^3} \right) , \quad (3.37)$$

le signe “ ’ ” représente la dérivée par rapport à x . En se rappelant que

$$V_B = -\frac{\hbar^2}{4m} \{S_0, x\} = -\frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{P''}{P} - \frac{3}{2} \frac{P'^2}{P^2} \right) , \quad (3.38)$$

et en remplaçant les relations (3.37) et (3.38) dans l'EHJQS, on peut écrire l'équation dynamique suivante

$$\frac{m_q^2}{2m} \dot{x}^2 + V(x) - E + \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{m''_q}{m_q} - \frac{3}{2} \frac{m_q'^2}{m_q^2} - \frac{m'_q}{m_q} \frac{\ddot{x}}{\dot{x}^2} + \frac{\dot{\ddot{x}}}{\dot{x}^3} - \frac{5}{2} \frac{\ddot{x}^2}{\dot{x}^4} \right) = 0 . \quad (3.39)$$

Pour Faraggi et Matone, l'Eq. (3.39) constitue l'intégrale première de la loi de Newton décrivant le comportement dynamique de la particule [24].

Cette équation, bien qu'elle se ramène à l'équation de conservation d'énergie classique, et malgré que sa solution contient des constantes d'intégration qui jouent le rôle de variables cachées, elle reste non explicite. Effectivement, pour résoudre l'Eq. (3.39), il faut d'abord connaître la quantité m_q , qui à son tour dépend du potentiel quantique, lequel doit être déterminé à partir de l'EHJQS. Tout ceci fait de l'Eq. (3.39) une équation non explicite et lourde à manipuler.

CHAPITRE 2

LA LOI DE NEWTON QUANTIQUE

Le formalisme de la “ représentation des trajectoires ” a été fondé par Floyd en admettant que le mouvement d’une particule est décrit par le théorème de Jacobi [19]

$$t - t_0 = \frac{\partial S_0}{\partial E} .$$

En s’appuyant sur les travaux de Floyd, Faraggi et Matone ont élaboré une équation représentant l’analogie de l’équation de conservation de l’énergie [24]. Bien que ces travaux soient intéressants, l’utilisation du théorème de Jacobi reste non justifiée, puisqu’il est, en mécanique classique, la conséquence d’une transformation canonique particulière avec laquelle le nouvel Hamiltonien s’annule. L’absence d’une procédure analogue en mécanique quantique, menant à l’EHJQS, crée un doute sur la validité de ce théorème tel qu’il est écrit par Floyd. Pour cette raison, nous avons jugé impératif d’approcher le problème par un autre formalisme conçu spécialement pour la mécanique quantique. Ainsi, on établira dans ce chapitre une équation de mouvement qui décrira le comportement dynamique des particules à l’échelle quantique.

1. LE FORMALISME DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Dans cette section, nous introduirons le formalisme analytique que nous avons conçu pour la mécanique quantique. Tout d’abord, rappelons le formalisme analytique de la mécanique classique.

1.1. Formalisme analytique de la mécanique classique

Considérons un système physique à une dimension décrit par la coordonnée x , et plongé dans un potentiel $V(x)$. Le Lagrangien du système est défini par

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V . \quad (1.1)$$

L'action S du système est définie à partir du Lagrangien L comme suit

$$S = \int L dt . \quad (1.2)$$

Pour déduire les équations de mouvement, Hamilton énonça le principe de moindre action suivant:

“ Pour un mouvement réel, le corpuscule décrit un chemin pour lequel l'action du système est stationnaire ($\delta S = 0$) ”.

Ce principe nous conduit à l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 . \quad (1.3)$$

L'invariance du Lagrangien, lors d'une transformation au cours du temps, nous conduit à la conservation de la quantité

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L .$$

Cependant, nous savons que la quantité qui se conserve lors d'une transformation au cours du temps est l'énergie totale du système. Donc, on a

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L . \quad (1.4)$$

L'invariance du Lagrangien, lors d'un déplacement virtuel δx , nous conduit à la conservation de la quantité

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} , \quad (1.5)$$

qui coïncide avec la quantité de mouvement du système. A partir des Eqs. (1.4) et (1.5), on peut définir la fonction de Hamilton (Hamiltonien) par la quantité

$$H = p \dot{x} - L , \quad (1.6)$$

qui correspond à l'énergie E du système dans le cas stationnaire.

Injectons l'Eq. (1.1) dans l'Eq. (1.5), et remplaçons la relation obtenue dans l'Eq. (1.6). On obtient alors

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) . \quad (1.7)$$

Dans cette dernière équation, H n'est fonction que de p et x . Maintenant, tout en tenant compte des Eqs. (1.3) et (1.5), différencions les deux membres de l'Eq. (1.6). On obtient alors la relation

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{p} \right) dx + \left(\frac{\partial H}{\partial p} - \dot{x} \right) dp = 0 ,$$

qui nous mène aux équations canoniques

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x} , \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} ,$$

lesquelles décrivent le mouvement du corpuscule.

Maintenant, envisageons une transformation de la coordonnée $x \rightarrow Q$, accompagnée de la transformation du moment généralisée $p \rightarrow \Phi$. Ces transformations sont dites canoniques s'il existe une fonction $\mathcal{K}(Q, \Phi)$ telle que les équations canoniques par rapport aux nouvelles variables soient

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \Phi} = \dot{Q} , \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q} = -\dot{\Phi} .$$

\mathcal{K} joue le rôle du nouveau Hamiltonien du système. Pour toute transformation canonique, il existe une fonction génératrice $F(x, \Phi, t)$ qui vérifie les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= p , \\ \frac{\partial F}{\partial \Phi} &= -Q , \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \mathcal{K} - H . \end{aligned} \quad (1.10)$$

Dans la théorie de Jacobi, une transformation particulière nous mène à un système avec un Hamiltonien nul. Dans ce cas, la fonction F correspond à l'action S du système. En remplaçant les relations (1.10) dans l'équation (1.7), on obtient l'EHJC

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + V(x) = -\frac{\partial S}{\partial t} . \quad (1.11)$$

Dans le cas stationnaire, l'action du système s'écrit comme suit

$$S = S_0(x, E) - Et , \quad (1.12)$$

S_0 étant l'action réduite. Ceci revient à écrire l'Eq. (1.11) sous la forme

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + V(x) = E . \quad (1.13)$$

Les équations de mouvement se réduisent à

$$\frac{\partial S_0}{\partial x} = p , \quad (1.14.a)$$

et

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = t - t_0 . \quad (1.14.b)$$

Cette dernière équation constitue le théorème de Jacobi. Ce dernier est valable pour le cas d'une équation de Hamilton-Jacobi de premier ordre. Il ne serait donc pas correct de l'appliquer — du moins par sa version classique — en mécanique quantique, puisque l'EHJQS est du troisième ordre. C'est pour cette raison qu'il est nécessaire de construire un nouveau formalisme pour la mécanique quantique.

1.2. Lagrangien du système quantique et équation de mouvement de première espèce

1.2.1. Motivation:

Par comparaison avec l'action réduite classique, on remarque que l'expression de S_0 (Eq. (2.27) du Chap. 1) en mécanique quantique contient deux constantes supplémentaires μ et ν en plus de la constante E contenue implicitement dans les fonctions d'ondes θ et ϕ . Ceci suggère que la loi fondamentale du mouvement doit être une équation différentielle du quatrième ordre. Ce qui veut dire que le Lagrangien du système doit être une fonction

de x, \dot{x}, \ddot{x} et peut être de \ddot{x} avec une dépendance linéaire. Cependant, il n'est pas facile de construire, à partir d'un tel Lagrangien, un formalisme qui reproduirait l'EHJQS. Pour surmonter cette difficulté, on propose un Lagrangien qui dépend de x, \dot{x} et de l'ensemble des variables cachées Γ qui est lié aux constantes d'intégration.

1.2.2. Hypothèses:

On présentera maintenant un ensemble d'hypothèses qu'on utilisera dans ce chapitre pour établir les équations du mouvement.

a)- On supposera que, comme en mécanique classique, l'action quantique S déduite de l'EHJQS est liée à une quantité L_q , appelée Lagrangien quantique, par la relation

$$S = \int L_q dt , \quad (1.15) .$$

Comme S n'est fonction que de x et de t , alors L_q ne pourra être qu'une fonction de x et \dot{x} .

b)- La deuxième hypothèse est que le Lagrangien quantique, dans le cas stationnaire, s'écrit comme suit [37]

$$L_q(x, \dot{x}, \Gamma) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 f(x, \Gamma) - V(x) , \quad (1.16)$$

où $f(x, \Gamma)$ est une fonction de x et de l'ensemble Γ des variables cachées. Cette fonction doit être continue et dérivable sur \mathfrak{R} , et doit vérifier la relation

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} f(x, \Gamma) = 1 . \quad (1.17)$$

La fonction $f(x, \Gamma)$ sera déterminée ultérieurement.

c)- Les équations de mouvement dérivent d'un principe de moindre action, de la même manière qu'en mécanique classique. Donc,

$$\delta S = 0 . \quad (1.18)$$

Dans le cadre de ces trois hypothèses, nous allons construire une équation dynamique du mouvement.

1.2.3. Équation de mouvement de première espèce

En tenant compte des hypothèses du paragraphe précédent, on arrive à écrire l'équation de Lagrange suivante:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_q}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L_q}{\partial x} = 0 . \quad (1.19)$$

En utilisant l'Eq. (1.16), on peut écrire

$$\frac{\partial L_q}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}f(x, \Gamma) , \quad (1.20)$$

et

$$\frac{\partial L_q}{\partial x} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \frac{df}{dx} - \frac{dV}{dx} . \quad (1.21)$$

En remplaçant ces dernières équations dans l'Eq. (1.19), on arrive à

$$\frac{d}{dt} [m\dot{x}f(x, \Gamma)] - \frac{m\dot{x}^2}{2} \frac{df}{dx} + \frac{dV}{dx} = 0 ,$$

ce qui nous donne [37]

$$mf(x, \Gamma)\ddot{x} + \frac{m\dot{x}^2}{2} \frac{df}{dx} + \frac{dV}{dx} = 0 . \quad (1.22)$$

On appellera l'Eq. (1.22) l'équation dynamique de première espèce. Remarquons que lorsque $\hbar \rightarrow 0$, $f \rightarrow 1$ et l'Eq. (1.22) se ramène à l'équation dynamique classique (équation de Newton).

1.3. Hamiltonien quantique

En mécanique classique, on sait que si le Lagrangien dépend seulement de x et \dot{x} , la quantité qui se conserve lors d'une transformation dans le temps est l'Hamiltonien. Il est de même en mécanique quantique. Donc, on a

$$H_q = \frac{\partial L_q}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L_q(x, \dot{x}, \Gamma) . \quad (1.23)$$

De plus, la quantité qui se conserve lors d'une translation dans l'espace est

$$P = \frac{\partial L_q}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}f(x, \Gamma) , \quad (1.24)$$

ce qui correspond à la quantité de mouvement quantique. L'Eq. (1.24) permet d'écrire l'Eq. (1.23) sous la forme

$$H_q = P\dot{x} - L_q(x, \dot{x}, \Gamma) . \quad (1.25)$$

De même, en utilisant les Eqs. (1.16) et (1.24), l'Eq. (1.23) peut être écrite sous la forme

$$H_q = \frac{m\dot{x}^2}{2} f(x, \Gamma) + V(x) , \quad (1.26)$$

ou encore

$$H_q = \frac{P^2}{2m} \frac{1}{f(x, \Gamma)} + V(x) . \quad (1.27)$$

Pour des problèmes stationnaires, H_q correspond à l'énergie E du système. Ainsi, les équations (1.26) et (1.27) se réduisent à

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 f(x, \Gamma) + V(x) . \quad (1.28.a)$$

$$E = \frac{P^2}{2m} \frac{1}{f(x, \Gamma)} + V(x) \quad (1.28.b)$$

Remarquons qu'en dérivant l'Eq. (1.28.a) par rapport à x , on retrouve exactement l'équation dynamique de première espèce (1.22).

1.4. Détermination de la fonction $f(x, \Gamma)$

Nous savons que l'action quantique s'écrit

$$S = \int L_q dt ,$$

donc, en différenciant on arrive à

$$\begin{aligned} dS &= L_q dt = (P\dot{x} - H_q) dt , \\ &= Pdx - H_q dt . \end{aligned} \quad (1.29)$$

Comme S ne dépend que de x , t et Γ on a

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial t} dt . \quad (1.30)$$

En identifiant l'Eq. (1.29) avec l'Eq. (1.30), on peut écrire

$$P = \frac{\partial S}{\partial x} , \quad (1.31)$$

$$H_q = -\frac{\partial S}{\partial t} . \quad (1.32)$$

En remplaçant les Eqs. (1.31) et (1.32) dans l'Eq. (1.27), on obtient

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{f(x, \Gamma)} + V(x) , \quad (1.33.a)$$

représentant l'EHJQ. Dans le cas stationnaire, on a

$$S = S_0(x, \Gamma) - Et, \quad P = \frac{\partial S_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -E,$$

et l'Eq. (1.33.a) prend la forme

$$E = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{f(x, \Gamma)} + V(x). \quad (1.33.b)$$

L'Eq. (1.33.b) représente l'EHJQS. En l'identifiant avec l'EHJQS construite à partir de l'équation de Schrödinger et donnée par l'Eq. (2.11) du Chap.1, on obtient [37]

$$f(x, \Gamma) = \left[1 - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^{-2} \{S_0, x\} \right]^{-1}, \quad (1.34)$$

S_0 étant donnée par

$$S_0 = \hbar \arctan \left\{ \frac{\theta + \mu\phi}{\nu\theta + \phi} \right\}.$$

En substituant cette expression de S_0 dans l'Eq. (1.34), on voit clairement que f est une fonction de x , des paramètres (μ, ν) et de l'énergie E . Ainsi, l'ensemble des variables cachées Γ correspond à l'ensemble des constantes d'intégration qui apparaissent dans l'expression de S_0 .

$$\Gamma \equiv \{\mu, \nu, E\}$$

En utilisant l'EHJQS, on peut écrire l'Eq. (1.34) sous la forme suivante:

$$f(x, E, \mu, \nu) = \frac{(\partial S_0 / \partial x)^2}{2m(E - V(x))}. \quad (1.35)$$

Remarquons que lorsque $\hbar \rightarrow 0$, la fonction f tend vers 1, l'Eq. (1.35) indique que

$$\frac{\partial S_0}{\partial x} = \sqrt{2m(E - V(x))},$$

ce qui correspond bien au résultat de la mécanique classique. Notons aussi, d'après l'Eq. (1.35), que dans les régions classiquement permises la fonction f est positive. Cependant, dans les régions classiquement interdites la fonction f est de signe négatif, ce qui fait que la partie cinétique de l'énergie de la particule devient négative bien que la vitesse \dot{x} soit toujours réelle. Ceci explique, dans une première approche, l'effet tunnel connu en mécanique quantique.

1.5. Équation de dispersion et équation dynamique de deuxième espèce

En remplaçant l'Eq. (1.35) dans l'Eq. (1.28.a), on peut écrire

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} \frac{(\partial S_0/\partial x)^2}{2m(E - V(x))} + V(x) .$$

Comme il est indiqué par les Eqs. (1.24) et (1.35), la vitesse \dot{x} et le moment conjugué $\partial S_0/\partial x$ sont de même signe dans les régions classiquement permises. Pour cette raison, dans l'équation précédente, on ne tient compte que de la racine qui est en accord avec cette constatation. Ainsi, on peut écrire [37]

$$\dot{x} \frac{\partial S_0}{\partial x} = 2(E - V(x)) . \quad (1.36)$$

On remarque dans l'Eq. (1.36) une sorte de dispersion de l'énergie cinétique de la particule entre la quantité de mouvement classique $m\dot{x}$ et le moment conjugué généralisé $\partial S_0/\partial x$. C'est pour cela qu'on appellera cette équation "la relation de dispersion". On note aussi que le moment conjugué n'est plus égal à la quantité de mouvement $m\dot{x}$.

Maintenant, en remplaçant la relation (1.24) dans l'Eq. (1.22) tout en sachant que $\partial S_0/\partial x = \partial L/\partial \dot{x}$ on peut écrire la relation

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right) + \frac{dV}{dx} = 0 . \quad (1.37)$$

Cette dernière équation est équivalente à l'Eq. (1.22). On l'appellera équation dynamique de deuxième espèce. Remarquons qu'en l'intégrant, on aboutit à l'Eq. (1.36). Effectivement, si on multiplie l'Eq. (1.37) par \dot{x} , on peut écrire

$$\frac{1}{2} \dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \ddot{x} \frac{\partial S_0}{\partial x} + \frac{dV}{dt} = 0 ,$$

ou encore

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial S_0}{\partial x} \right) \right] + \frac{dV}{dt} = 0 .$$

En intégrant cette équation, on obtient

$$\frac{1}{2} \dot{x} \frac{\partial S_0}{\partial x} + V = E .$$

Dans le membre de droite, la constante d'intégration E est identifiée à l'énergie du fait qu'à la limite classique, $\hbar \rightarrow 0$, on doit trouver un résultat classique. L'équation précédente se ramène facilement à la forme (1.36), c'est l'équation de dispersion.

Cette dernière équation est l'équation de dispersion. C'est donc une équation intégrale à partir de laquelle on peut déduire les équations de la trajectoire $x(t)$.

Notons que dans le cas classique, $(\partial S_0^c / \partial x) = m\dot{x}$ et l'Eq. (1.36) se ramène à l'équation de conservation de l'énergie

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) .$$

Ainsi, l'Eq. (1.36) est une généralisation à la mécanique quantique de l'équation de conservation de l'énergie. On verra dans les sections suivantes de ce chapitre l'importance et le rôle que joue la relation de dispersion. En fin de compte, l'Eq. (1.36) nous donnera une description complète du comportement dynamique de la particule.

2. ÉQUATION INTÉGRALE PREMIÈRE DE LA LOI DE NEWTON QUANTIQUE (IPLNQ)

2.1. Établissement de l'équation IPLNQ

2.1.1 Première méthode

Du fait que

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{x}}{dx} &= \frac{d\dot{x}}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} , \\ \frac{d\ddot{x}}{dx} &= \frac{d\ddot{x}}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\dot{\ddot{x}}}{\dot{x}} , \end{aligned}$$

En utilisant l'Eq. (1.36), on peut écrire

$$\frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2} = -\frac{2}{\dot{x}} \frac{dV}{dx} - \frac{2(E-V)\ddot{x}}{\dot{x}^3} , \quad (2.1)$$

et

$$\frac{\partial^3 S_0}{\partial x^3} = -\frac{2}{\dot{x}} \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{4\ddot{x}}{\dot{x}^3} \frac{dV}{dx} + \frac{6(E-V)\dot{\ddot{x}}}{\dot{x}^5} - \frac{2(E-V)\dot{\ddot{x}}}{\dot{x}^4} . \quad (2.2)$$

En injectant les Eqs. (2.1) et (2.2) dans l'EHJQS (Eq. (2.11) du Chap. 1), on obtient [37]

$$\begin{aligned} (E-V)^4 - \frac{m\dot{x}^2}{2}(E-V)^3 + \frac{\hbar^2}{8} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} \right)^2 - \frac{\dot{\ddot{x}}}{\dot{x}} \right] (E-V)^2 \\ - \frac{\hbar^2}{8} \left[\dot{x}^2 \frac{d^2V}{dx^2} + \ddot{x} \frac{dV}{dx} \right] (E-V) - \frac{3\hbar^2}{16} \left[\dot{x} \frac{dV}{dx} \right]^2 = 0 . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Puisqu'elle dépend de la constante d'intégration E , cette dernière équation représente l'équation Intégrale Première de la Loi de Newton Quantique (IPLNQ). Elle est une équation différentielle du troisième ordre en x contenant la première et la deuxième dérivées du potentiel par rapport à x . Il s'en suit que la solution $x(t, E, a, b, c)$ de l'Eq. (2.3) contient quatre constantes d'intégration qui peuvent être déterminées à partir des conditions initiales

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \quad \ddot{x}(t_0) = \ddot{x}_0, \quad \dddot{x}(t_0) = \dddot{x}_0.$$

On peut se passer de l'une de ces conditions lorsque l'énergie E de la particule est connue. Bien sûr, si on pose $\hbar = 0$, l'Eq. (2.3) se réduit à la première intégrale de la loi classique de Newton $E = m\dot{x}^2/2 + V(x)$. Si on résout (2.3) par rapport à $(E - V)$, alors en dérivant les racines obtenues par rapport à x , on obtient la loi de Newton quantique. Cette dernière sera une équation différentielle du quatrième ordre par rapport à x et contiendra la première, la deuxième et la troisième dérivées de V par rapport à x , alors que la loi classique $m\ddot{x} = -dV/dx$ est du deuxième ordre et contient seulement la première dérivée de $V(x)$. Notons aussi qu'en utilisant l'Eq. (1.36) dans l'équation IPLNQ, nous obtenons l'EHJQS.

En comparant l'équation IPLNQ (2.3) avec l'équation dynamique établie par Faraggi et Matone, on trouve qu'elles sont fondamentalement différentes, bien qu'elles sont de même ordre. En effet, pour résoudre l'équation de Faraggi et Matone il faut résoudre en premier lieu l'EHJQS pour obtenir l'action S_0 qui dépend des solutions de l'équation de Schrödinger. Ainsi, elle ne peut pas être résolue indépendamment de l'équation de Schrödinger. Par contre, notre équation peut être résolue comme n'importe quelle équation différentielle indépendamment de l'EHJQS et de l'équation de Schrödinger.

2.1.2 deuxième méthode

Reprenons la forme de l'action réduite donnée par l'Eq. (3.24) du Chap. 1

$$S_0 = \hbar \arctan \left\{ \frac{\theta_1 + \mu\theta_2}{\nu\theta_1 + \theta_2} \right\},$$

θ_1 et θ_2 étant deux solutions réelles indépendantes de l'équation de Schrödinger. En posant [37]

$$\phi_1 = \nu\theta_1 + \theta_2, \quad \phi_2 = \theta_1 + \mu\theta_2, \quad (2.4)$$

on peut écrire

$$S_0 = \hbar \arctan \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right) . \quad (2.5)$$

En dérivant l'Eq. (2.5) par rapport à x , on obtient

$$\frac{\partial S_0}{\partial x} = \hbar \frac{\phi_1 \phi_2' - \phi_1' \phi_2}{\phi_1^2 + \phi_2^2} , \quad (2.6)$$

où ϕ_1' et ϕ_2' sont les premières dérivées de ϕ_1 et ϕ_2 par rapport à x . En remplaçant l'équation (1.36) dans l'Eq. (2.6), on peut écrire

$$\phi_1 \phi_2' - \phi_1' \phi_2 = \frac{2}{\hbar} \frac{E - V}{\dot{x}} (\phi_1^2 + \phi_2^2) . \quad (2.7)$$

Dans le but d'éliminer les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 et leurs dérivées, dérivons l'Eq. (2.7) par rapport à x , tout en tenant compte du fait que le premier membre s'annule puisqu'il représente le Wronskien, constant, des fonctions ϕ_1 et ϕ_2 . Alors, on peut déduire

$$\phi_1 \phi_1' + \phi_2 \phi_2' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E - V} \frac{dV}{dx} + \frac{\ddot{x}}{\dot{x}^2} \right) (\phi_1^2 + \phi_2^2) . \quad (2.8)$$

Dérivons l'Eq. (2.8) par rapport à x et tenons compte du fait que

$$\phi_1'' = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \phi_1 , \quad \phi_2'' = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \phi_2 ,$$

on obtient alors [37]

$$\begin{aligned} & \left(\phi_1'^2 + \phi_2'^2 \right) - \left(\frac{1}{E - V} \frac{dV}{dx} + \frac{\ddot{x}}{\dot{x}^2} \right) (\phi_1 \phi_1' + \phi_2 \phi_2') + \left[-\frac{2m}{\hbar^2} (E - V) - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \frac{1}{(E - V)^2} \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2(E - V)} \frac{d^2V}{dx^2} - \frac{\dot{x}}{2\dot{x}^3} + \frac{\ddot{x}^2}{\dot{x}^4} \right] (\phi_1^2 + \phi_2^2) = 0 . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Maintenant, en résolvant le système constitué par les Eqs. (2.7) et (2.8), on peut déterminer les expressions de ϕ_1' et ϕ_2'

$$\phi_1' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E - V} \frac{dV}{dx} + \frac{\ddot{x}}{\dot{x}^2} \right) \phi_1 - \frac{2}{\hbar} \frac{E - V}{\dot{x}} \phi_2 ,$$

$$\phi_2' = \frac{2}{\hbar} \frac{E - V}{\dot{x}} \phi_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E - V} \frac{dV}{dx} + \frac{\ddot{x}}{\dot{x}^2} \right) \phi_2 .$$

En élevant au carré et en additionnant membre à membre ces deux dernières équations, on aboutit à [37]

$$\begin{aligned} \phi_1'^2 + \phi_2'^2 = & \left[\frac{4}{\hbar^2} \frac{(E - V)^2}{\dot{x}^2} + \frac{1}{4(E - V)^2} \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{\ddot{x}^2}{4\dot{x}^4} + \frac{1}{2(E - V)} \frac{dV}{dx} \frac{\ddot{x}}{\dot{x}^2} \right] (\phi_1^2 + \phi_2^2) . \end{aligned} \quad (2.10)$$

En remplaçant les Eqs. (2.8) et (2.10) dans l'Eq. (2.9), on déduit une équation dans laquelle tous les termes sont proportionnels à $(\phi_1^2 + \phi_2^2)$. En divisant l'équation obtenue par $(\phi_1^2 + \phi_2^2)$, on aboutit exactement à l'équation IPLNQ donnée par l'Eq. (2.3). Donc, avec deux manières différentes on arrive à la même équation IPLNQ, le point de départ étant à chaque fois l'équation de dispersion (1.36).

2.2. Étude du cas de la particule libre

Dans le cas de la particule libre, l'équation IPLNQ s'écrit [37]

$$E^2 - \frac{m\dot{x}^2}{2}E + \frac{\hbar^2}{8} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} \right)^2 - \frac{\dot{\ddot{x}}}{\dot{x}} \right] = 0 , \quad (2.11)$$

et l'Eq. (1.36) se ramène à

$$\dot{x} \frac{\partial S_0}{\partial x} = 2E . \quad (2.12)$$

L'Eq. (2.11) représente l'équation dynamique qui régit le mouvement de la particule libre. Essayons maintenant d'établir l'équation des trajectoires.

2.2.1 Résolution à partir de l'équation IPLNQ

Reprenons l'Eq. (2.11) et faisons le changement de variables suivant [37]:

$$U = \sqrt{2mE} x , \quad q = \sqrt{\frac{2E}{m}} t , \quad (2.13)$$

où U et q sont des variables qui ont les dimensions, respectivement, d'une action et d'une distance. Avec ces nouvelles variables, l'Eq. (2.11) se ramène à

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dU}{dq} \right)^2 - E = \frac{\hbar^2}{4m} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{dU}{dq} \right)^{-2} \left(\frac{d^2U}{dq^2} \right)^2 - \left(\frac{dU}{dq} \right)^{-1} \left(\frac{d^3U}{dq^3} \right) \right] . \quad (2.14)$$

Cette équation a la même forme que l'EHJQS, écrite pour un potentiel nul. Ceci nous permet d'utiliser la solution de cette dernière pour résoudre l'Eq. (2.14). Cependant, si on pose

$$\theta_3 = \nu\theta_1 + \theta_2$$

dans l'Eq. (3.24) du Chap. 1, S_0 prend la forme

$$S_0 = \hbar \arctan \left[(1 - \mu\nu) \frac{\theta_1}{\theta_3} + \mu \right] . \quad (2.15)$$

Donc, de manière analogue, on peut déduire la forme suivante de la solution U de l'Eq. (2.14)

$$U = \hbar \arctan \left[\sigma \frac{\psi_1}{\psi_2} + \omega \right] + U_0 , \quad (2.16)$$

où σ , ω et U_0 sont des constantes d'intégration réelles, avec $\sigma \neq 0$. Les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont deux solutions réelles indépendantes de l'équation

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dq^2} = E\psi .$$

Choisissons $\psi_1 = \sin \left(\sqrt{2mE} q/\hbar \right)$ et $\psi_2 = \cos \left(\sqrt{2mE} q/\hbar \right)$. Alors, il s'en suit que

$$x(t) = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}} \arctan \left[\sigma \tan \left(\frac{2Et}{\hbar} \right) + \omega \right] + x_0 . \quad (2.17)$$

x dépend des quatre constantes d'intégration E , σ , ω et x_0 . Remarquons que dans le cas où $\sigma = 1$ et $\omega = 0$, on retrouve l'équation horaire classique

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{m}} t + x_0 .$$

2.2.2 Résolution à partir de l'équation de dispersion

L'équation de dispersion (2.12) permet d'écrire

$$\frac{\partial S_0}{\partial x} = \frac{2E}{\dot{x}} ,$$

ce qui donne

$$dS_0 = 2E dt .$$

En intégrant cette dernière, on obtient

$$S_0 = 2E(t - t_0) . \quad (2.18)$$

En utilisant l'Eq. (2.15), on peut écrire l'action réduite de la particule libre comme suit

$$S_0 = \hbar \arctan \left\{ a \tan \left(\frac{\sqrt{2mE}x}{\hbar} \right) + b \right\} . \quad (2.19)$$

En injectant l'Eq. (2.19) dans l'Eq. (2.18), on peut déduire

$$x(t) = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}} \arctan \{ A \tan (2E(t - t_0)/\hbar) + B \} . \quad (2.20)$$

Cette dernière équation représente l'équation horaire du mouvement, les constantes A et B étant l'ensemble des variables cachées. Pour $A = 1$ et $B = 0$, l'Eq. (2.20) se ramène à l'équation horaire classique. Notons qu'on peut montrer que les Eqs. (2.17) et (2.20) sont équivalentes.

2.3. Comparaison avec les résultats de Floyd

Pour comparer nos résultats obtenus pour la particule libre avec ceux de Floyd, utilisons la forme de l'action réduite donnée par l'Eq. (2.37) du Chap. 1.

Dans le cadre de notre formulation, d'après l'Eq. (2.15), on a

$$2E(t - t_0)_d = \hbar \arctan \left\{ \frac{b \tan \left(\frac{\sqrt{2mE}x}{\hbar} \right) + c/2}{\sqrt{ab - c^2/4}} \right\} . \quad (2.21)$$

Cependant, Floyd donna une autre équation des trajectoires, à partir de $\partial S_0/\partial E = t - t_0$, qui est (Eq. (2.41), Chap.1)

$$(t - t_0)_{Fl} = \frac{(ab - c^2/4)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2m/E} x}{a + b + [(a - b)^2 + c^2]^{\frac{1}{2}} \cos \left\{ 2(2mE)^{\frac{1}{2}} x/\hbar + \cot^{-1}[(b - a)/c] \right\}} . \quad (2.22)$$

Remarquons qu'en passant à la limite classique dans l'Eq. (2.21)

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} (t - t_0)_d = \frac{(ab - c^2/4)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2m/E} x}{a + b + [(a - b)^2 + c^2]^{\frac{1}{2}} \cos \left\{ 2(2mE)^{\frac{1}{2}} x/\hbar + \cot^{-1}[(b - a)/c] \right\}} . \quad (2.23)$$

on retrouve exactement le résultat de l'Eq. (2.22). Ainsi, les trajectoires de Floyd se présentent comme une limite classique de nos trajectoires. Effectivement, dans l'approche de Floyd, c'est uniquement à la limite classique qu'on a

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} S_0 = 2E(t - t_0) ,$$

alors que dans notre approche, l'Eq. (2.18) indique clairement que

$$S_0 = 2E(t - t_0)$$

est valable sans passer à la limite classique $\hbar \rightarrow 0$. Ce résultat est en accord avec le fait que, dans notre formulation, l'action réduite est donnée par (Eq. (1.15))

$$S = S_0 - Et = \int_{t_0}^t L_q dt = \int_{t_0}^t E dt = E (t - t_0) , \quad (2.24)$$

à une constante près. Dans ce cas, on pourrait dire que notre formalisme est plus général que celui de Floyd.

3. COORDONNÉE QUANTIQUE ET VERSION QUANTIQUE DU THÉORÈME DE JACOBI

Dans la Sec. 3 du Chap. 1, nous avons vu comment Faraggi et Matone ont introduit la transformation quantique

$$x \rightarrow \hat{x}$$

après laquelle l'EHJQS prend la forme classique. Dans cette section, nous allons reproduire les résultats des Secs. 1 et 2 de ce chapitre en faisant appel à cette transformation.

Reprenons l'EHJQS et écrivons-la sous la forme

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 \left[1 - \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^{-2} \{S_0, x\} \right] + V(x) = E .$$

En définissant

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \right)^2 = \left[1 - \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^{-2} \{S_0, x\} \right] = \frac{2m(E - V)}{(\partial S_0 / \partial x)^2} , \quad (3.1)$$

et en tenant compte de $\hat{V}(\hat{x}) = V(x)$, on peut écrire

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \hat{S}_0}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \hat{V}(\hat{x}) = E . \quad (3.2)$$

Tout d'abord, faisons la remarque que la coordonnée quantique \hat{x} est réelle dans les régions permises et purement imaginaire dans les régions interdites. En comparant l'Eq. (3.1) avec l'Eq. (1.34), on déduit

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \right)^2 = \frac{1}{f(x, E, \mu, \nu)} . \quad (3.3)$$

Comme on l'a déjà remarqué, $f(x, E, \mu, \nu)$ ne dépend que de la variable x et des constantes d'intégration. Il est de même pour $\partial x / \partial \hat{x}$. On a donc

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \right) = \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \right)^{-1} , \quad (3.4)$$

Ce qui permet de réécrire l'Eq. (3.3) sous la forme

$$\left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \right)^2 = f(x, E, \mu, \nu) . \quad (3.5)$$

Avant d'aller plus loin, énonçons les hypothèses suivantes:

1)- Sous la transformation quantique $x \rightarrow \hat{x}$, l'action, le potentiel, le Lagrangien et l'Hamiltonien restent invariants

$$\hat{L}_q(\hat{x}) = L_q(x) , \quad (3.6.a)$$

$$\hat{H}_q(\hat{x}) = H_q(x) \quad (3.6.b)$$

$$\hat{S}_0(\hat{x}) = S_0(x) , \quad (3.6.c)$$

$$\hat{V}(\hat{x}) = V(x) , \quad (3.6.d)$$

2)- Le comportement dynamique suivant la coordonnée quantique \hat{x} obéit aux lois de la mécanique classique.

3.1. Lagrangien et Hamiltonien du système quantique

Reprenons l'EHJQS écrite suivant \hat{x}

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \hat{S}_0}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \hat{V}(\hat{x}) = E .$$

Comme on l'a dit plus haut, elle a une apparence classique. En utilisant les hypothèses d'invariance des quantités physiques (Eqs. (3.6)), et de la validité du formalisme analytique classique par rapport à \hat{x} , on peut définir une quantité de mouvement \hat{P} telle que

$$\hat{P} = \frac{\partial \hat{S}_0}{\partial \hat{x}} , \quad (3.7)$$

et ainsi, définir un Lagrangien et un Hamiltonien quantiques comme suit

$$\hat{L}_q(\hat{x}, \dot{\hat{x}}) = L_q = \frac{m\dot{\hat{x}}^2}{2} - \hat{V}(\hat{x}) , \quad (3.8)$$

$$\hat{H}_q(\hat{x}, \hat{P}) = H_q = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x}) . \quad (3.9)$$

Notons que

$$\dot{\hat{x}} = \frac{d\hat{x}}{dt} = \dot{x} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} , \quad (3.10)$$

$$\hat{P} = \frac{\partial \hat{S}_0}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial S_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} = P \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} . \quad (3.11)$$

En injectant les Eqs. (3.10) et (3.11) dans les Eqs. (3.8) et (3.9) respectivement, et en tenant compte de $\hat{V}(\hat{x}) = V(x)$, on aboutit à [37]

$$\hat{L}_q = L_q = \frac{m\dot{x}^2}{2} \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \right)^2 - V(x) , \quad (3.12)$$

$$\hat{H}_q = H_q = \frac{P^2}{2m} \left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \right)^2 + V(x) . \quad (3.13)$$

Remarquons que \hat{L}_q et \hat{H}_q prennent une apparence classique. Alors, en utilisant le formalisme Lagrangien, on définira l'action du système quantique $\hat{S}(\hat{x})$ comme suit

$$\hat{S}(\hat{x}) = \int \hat{L}_q(\hat{x}, \dot{\hat{x}}) dt . \quad (3.14)$$

Cette définition est équivalente à la définition donnée par l'Eq. (1.15) de ce chapitre . Effectivement, puisque

$$S(x) = \int L_q dt ,$$

et si on tient compte des relations (3.6.a) et (3.6.c), on arrive directement à l'action (3.14).

De la même manière qu'en mécanique classique, le principe de moindre action appliqué à l'Eq. (3.14) nous mène à l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\hat{x}}} \right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{x}} = 0, \quad (3.15)$$

menant, à son tour, à l'équation de mouvement

$$m\ddot{\hat{x}} = -\frac{d\hat{V}}{d\hat{x}}. \quad (3.16)$$

Remarquons que les Eqs. (3.15) et (3.16) sont équivalentes aux Eqs. (1.19) et (1.22). En effet, montrons en premier lieu que les Eqs. (3.15) et (1.19) sont équivalentes. Notons que

$$L(x, \dot{x}, \Gamma) = \hat{L}[\hat{x}(x, \Gamma), \dot{\hat{x}}(x, \dot{x}, \Gamma)].$$

De cette dernière équation, on peut écrire

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\hat{x}}} \frac{\partial \dot{\hat{x}}}{\partial x}, \quad (3.17)$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\hat{x}}} \frac{\partial \dot{\hat{x}}}{\partial \dot{x}}. \quad (3.18)$$

En reprenant l'Eq. (1.19) et en tenant compte des Eqs. (3.17) et (3.18), on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\hat{x}}} \frac{\partial \dot{\hat{x}}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\hat{x}}} \frac{\partial \dot{\hat{x}}}{\partial x} = 0,$$

ce qui se ramène à

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\hat{x}}} \right) \frac{\partial \dot{\hat{x}}}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\hat{x}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{\hat{x}}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\hat{x}}} \frac{\partial \dot{\hat{x}}}{\partial x} = 0. \quad (3.19)$$

En tenant compte de l'Eq. (3.10) et du fait que

$$\frac{\partial \dot{\hat{x}}}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x},$$

l'Eq. (1.19) se ramène à l'Eq. (3.15).

Maintenant, montrons que les Eqs. (3.16) et (1.22) sont équivalentes. Pour cela remplaçons l'Eq. (3.10) dans l'Eq. (3.16). Alors, on peut écrire

$$m \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \right) = - \frac{dV}{dx} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} ,$$

ce qui se ramène à

$$m \ddot{x} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + m \dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \right) + \frac{dV}{dx} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} = 0 .$$

En multipliant par $\partial \hat{x} / \partial x$, on obtient

$$m \ddot{x} \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \right)^2 + \frac{m}{2} \dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \right)^2 + \frac{dV}{dx} = 0 . \quad (3.20)$$

En utilisant la relation (3.5) et le fait que

$$\frac{df}{dt} = \dot{x} \frac{df}{dx} ,$$

on déduit que

$$m f(x, E, \mu, \nu) \ddot{x} + \frac{m \dot{x}^2}{2} \frac{df}{dx} + \frac{dV}{dx} = 0 .$$

On retrouve ainsi l'Eq. (1.22). Donc, les Eqs. (1.22) et (3.16) sont équivalentes. Remarquons qu'en intégrant l'Eq. (3.20) et en utilisant l'Eq. (3.1), on arrive à l'équation de dispersion (1.36). Il est aussi à noter qu'à partir de l'Eq. (3.16), en utilisant l'expression (3.1) de $(\partial \hat{x} / \partial x)^2$ et en tenant compte de l'Eq. (1.36), on aboutit à l'équation IPLNQ.

Tous ces résultats peuvent être reproduits à partir d'un formalisme Hamiltonien correspondant à la coordonnée \hat{x} . Effectivement, comme en mécanique classique, on peut écrire les équations canoniques suivantes:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{P}} = \dot{\hat{x}} , \quad (3.21.a)$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{x}} = -\dot{\hat{P}} . \quad (3.21.b)$$

Remarquons qu'à partir des Eqs. (3.21), on peut reproduire l'Eq. (3.16). En effet, en utilisant l'expression de \hat{H} (Eq. (3.9)) dans les Eqs. (3.21), on trouve

$$\hat{P} = m \dot{\hat{x}} ,$$

et

$$\frac{d\hat{V}}{d\hat{x}} = - \frac{d\hat{P}}{dt} = -m \ddot{\hat{x}} ,$$

ce qui correspond à l'Eq. (3.16) qui reproduit l'équation IPLNQ. Donc, il est évident que les deux formulations Lagrangienne et Hamiltonienne suivant la coordonnée quantique \hat{x} sont équivalentes. De plus, elles sont équivalentes au formalisme introduit dans les Secs. 1 et 2.

3.2. Transformations canoniques et théorème de Jacobi

Maintenant, on peut chercher des transformations

$$(\hat{x}, \hat{P}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{\Phi})$$

qui gardent les équations canoniques invariantes. Ces transformations sont dites canoniques, et sont définies par rapport à (\hat{x}, \hat{P}) exactement comme en mécanique classique. Il est ainsi possible de choisir une transformation pour laquelle le nouveau Hamiltonien du système soit nul. Ceci nous permet de reproduire l'EHJQS par rapport à la coordonnée \hat{x} . De même, on peut énoncer le théorème de Jacobi comme suit :

Pour tout système quantique de coordonnée quantique \hat{x} , les équations du mouvement seront déduites de l'équation [37]

$$\left[\frac{\partial \hat{S}_0}{\partial E} \right]_{\hat{x}=cte} = t - t_0 . \quad (3.22)$$

Maintenant, montrons que ce théorème nous mène directement aux équations du mouvement quantique. Pour cela, reprenons l'Eq. (3.22) puis dérivons par rapport à \hat{x}

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\frac{\partial \hat{S}_0}{\partial E} \right) = \frac{dt}{d\hat{x}} ,$$

ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{\partial \hat{S}_0}{\partial \hat{x}} \right) = \frac{dt}{d\hat{x}} .$$

En utilisant l'Eq. (3.2), on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial E} [2m(E - \hat{V})]^{\frac{1}{2}} = \frac{\partial t}{\partial x} \frac{dx}{d\hat{x}} ,$$

ou encore

$$\frac{1}{2} [2m(E - \hat{V}(\hat{x}))]^{-\frac{1}{2}} = \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{1}{\dot{x}} .$$

En tenant compte du fait que $\hat{V}(\hat{x}) = V(x)$, on peut écrire

$$\frac{1}{2}[2m(E - V(x))]^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} = \frac{1}{\dot{x}} . \quad (3.23)$$

En utilisant l'Eq. (3.1), on aboutit à

$$\dot{x} \frac{\partial S_0}{\partial x} = 2(E - V) ,$$

qui est l'équation de dispersion (1.36), à partir de laquelle on a déduit l'équation IPLNQ. On peut aussi dériver l'Eq. (3.20) à partir de l'Eq. (3.23). Effectivement, en élevant au carré les deux termes de l'Eq. (3.23), on a

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \right)^2 = E - V(x) .$$

En dérivant cette dernière par rapport à t , on aura

$$m \dot{x} \ddot{x} \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \right)^2 + \frac{m}{2} \dot{x}^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \right)^2 + \frac{dV}{dx} \dot{x} = 0 ,$$

ce qui se ramène à l'Eq. (3.20)

$$m \ddot{x} \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \right)^2 + \frac{m}{2} \dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \right)^2 + \frac{dV}{dx} \dot{x} = 0 .$$

3.3 Comparaison avec le théorème de Jacobi introduit par Floyd

En postulant la validité du théorème de Jacobi en mécanique quantique, Floyd utilisa l'équation

$$\left[\frac{\partial S_0}{\partial E} \right]_{x=cte} = t - t_0 . \quad (3.24)$$

qui est une relation classique résultant d'une transformation canonique particulière permettant d'aboutir à l'EHJC qui est du premier ordre. Ainsi, l'Eq. (3.24) n'est pas adéquate à l'EHJQS qui est une équation différentielle du troisième ordre. Dans notre point de vue, le théorème de Jacobi doit être appliqué quand nous utilisons la coordonnée quantique \hat{x} avec laquelle l'EHJQS prend la forme classique [37]. C'est pour cette raison qu'on utilise la version quantique de ce théorème donnée par l'Eq. (3.22). Remarquons qu'en remplaçant $\hat{S}_0(\hat{x})$ par $S_0(x)$ dans l'Eq. (3.22), la dérivation par rapport à E ne laisse pas \hat{x} invariante,

comme il est précisé dans l'Eq. (3.22) puisque \hat{x} est une fonction de E [37]. De ce fait, en substituant $S_0(x)$ par $\hat{S}_0(\hat{x})$ dans l'Eq. (3.24), on a

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \left[\frac{\partial}{\partial E} S_0(x, \mu, \nu, E) \right]_{x=cte} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial E} \hat{S}_0[\hat{x}(x, \mu, \nu, E), E] \right]_{x=cte} \\ &= \frac{\partial \hat{S}_0}{\partial \hat{x}} \left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial E} \right)_{x=cte} + \left(\frac{\partial \hat{S}_0}{\partial E} \right)_{\hat{x}=cte}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Cette dernière équation nous montre clairement que la version quantique du théorème de Jacobi (3.22) telle que nous l'avons utilisée n'est pas compatible avec celle utilisée par Floyd et donnée par l'Eq. (3.24). Ainsi, nos trajectoires diffèrent bien de celles de Floyd. De même, nos moments conjugués sont différents puisque celui de Floyd est obtenu à partir de l'équation (3.24).

Enfin, nous pouvons dire qu'en approchant la mécanique quantique par la coordonnée quantique \hat{x} , nous reproduisons toutes les équations de mouvement déjà établies dans les Secs. 1 et 2 de ce chapitre. En fait, \hat{x} constitue une coordonnée pour laquelle le formalisme analytique classique est valable, et reproduit ainsi les équations du mouvement quantique.

Conclusion:

Nous avons établi dans ce chapitre une équation IPLNQ (Eq. (2.3)) à partir d'un formalisme analytique qu'on a conçu d'après nos constatations sur la forme de l'action réduite tirée de l'EHJQS (Eq. (2.11), Chap. 1). En fait, cette forme dépend de deux solutions réelles et indépendantes de l'équation de Schrödinger qui dépendent de l'énergie. Elle dépend aussi de deux constantes d'intégration qui jouent le rôle de paramètres cachés. Ceci indique que l'équation fondamentale doit être une équation différentielle du quatrième ordre. Ainsi, nous avons construit un Lagrangien dont l'expression est donnée par l'Eq. (1.16). A partir de ce Lagrangien, nous avons établi la relation de dispersion (1.36) qui exprime une certaine dispersion de la partie cinétique de l'énergie de la particule entre la quantité de mouvement classique $m\dot{x}$ et le moment conjugué $\partial S_0/\partial x$ le long de la coordonnée x . A l'aide de cette équation nous avons pu établir l'équation IPLNQ. Remarquons que l'équation de dispersion

$$\dot{x} \frac{\partial S_0}{\partial x} = 2(E - V(x))$$

contient les deux solutions de l'équation de Schrödinger qui sont présentes dans l'expression du moment conjugué. De même, en résolvant l'équation IPLNQ pour la particule libre, on remarque dans sa solution la présence des deux fonctions $\sin(\sqrt{2mEx}/\hbar)$ et $\cos(\sqrt{2mEx}/\hbar)$ qui sont les solutions de l'équation de Schrödinger pour la particule libre. Il en serait de même pour les autres cas, puisque l'équation IPLNQ dérive de l'EHJQS (voir Sec. 2.1), laquelle n'est soluble que si l'équation de Schrödinger l'est. Donc, il est évident qu'en résolvant l'équation IPLNQ on doit reproduire les fonctions d'ondes. Pour conclure, en mécanique quantique, l'équation de Schrödinger bien qu'elle permette de connaître l'énergie de la particule, n'est pas fondamentale puisqu'elle ne donne aucune description dynamique du comportement de la particule. Par contre, l'EHJQS et l'équation IPLNQ sont fondamentales. En effet, en utilisant le théorème de Jacobi dans le cadre de sa version quantique, l'EHJQS, tout comme l'équation IPLNQ nous permettent de prévoir les trajectoires de la particule.

Enfin, pour comparer la mécanique quantique, pour laquelle les deux aspects corpusculaire et ondulatoire sont réconciliés, à la mécanique classique, pour laquelle ces deux aspects sont séparés, introduisons le diagramme figurant dans la page suivante.

Mécanique quantique

1)- équation de Schrödinger

$$-(\hbar^2/2m)(\partial^2\psi/\partial x^2) + V(x)\psi = i\hbar(\partial\psi/\partial t)$$

2)- action quantique

$$\psi(x, t) = A(x)\{\alpha \exp[i(Et - S_0(x))/\hbar] \\ + \beta \exp[i(-Et + S_0(x))/\hbar]\}$$

$$S = S_0(x, E, \mu, \nu) - Et$$

$$S_0 = \hbar \arctan\{\sigma(\theta/\phi) + \omega\}$$

3)- EHJQS

$$(1/2m)(\partial S_0/\partial x)^2 - (\hbar^2/4m)\{S_0, x\} \\ + V(x) = E$$

4)- La loi de Newton quantique

voir l'Eq. (2.3) de ce chapitre

$$(1/2)\dot{x}(\partial S_0/\partial x) + V = E$$

Théorie classique

1)- équation d'une onde dans

un milieu isotrope [2]

$$\partial^2\psi/\partial x^2 - \frac{1}{v_0^2}\partial^2\psi/\partial t^2 = F(x)\psi$$

2)- a)- phase de l'onde

$$\psi(x, t) = a(x) \exp[2\pi i(\nu t - \varphi_1(x))]$$

$$\varphi = \nu t - \varphi_1(x, t)$$

b)- action classique

$$S = S_0(x, E) - Et$$

3)- a) équation de l'optique géométrique

$$(\partial\varphi_1/\partial x)^2 = 1/\lambda(x)^2$$

b)- EHJC

$$(1/2m)(\partial S_0/\partial x)^2 + V(x) = E$$

4)- la loi de Newton classique

$$m\ddot{x} = -dV/dx$$

$$E = m\dot{x}^2/2 + V(x)$$

CHAPITRE 3

GENERALISATION DE L'EHJQS A TROIS DIMENSIONS DANS LE CAS D'UN POTENTIEL A SYMÉTRIE SPHÉRIQUE

La construction d'une équation de Hamilton-Jacobi à une dimension, dans le cadre de la mécanique quantique, est un pas très important pour l'élaboration d'une théorie quantique déterministe qui rétablirait la réalité causale des phénomènes quantiques. Néanmoins, une telle équation n'est pas suffisante pour une description convenable de la réalité, car en fait, les phénomènes physiques se réalisent souvent dans un espace réel à trois dimensions. Pour cette raison, une généralisation à trois dimensions de l'EHJQS s'avère indispensable. C'est dans ce sens qu'on introduira dans ce chapitre une tentative de généralisation qui sera sans doute plus ou moins conséquente pour la nouvelle approche que nous avons présentée dans le chapitre précédent. Pour cela, nous allons étudier le cas d'un système quantique plongé dans un potentiel à symétrie sphérique.

1. L'EHJQS A TROIS DIMENSIONS

On commencera tout d'abord dans cette section par l'exposé de l'équation de Schrödinger à trois dimensions pour un potentiel à symétrie sphérique.

1.1. Equation de Schrödinger à trois dimensions pour un potentiel à symétrie sphérique

Écrivons l'équation de Schrödinger en coordonnées sphériques (r, ϑ, φ) [38]

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cot \vartheta}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] \Psi = 0 . \quad (1.1)$$

$\Psi(r, \vartheta, \varphi)$ est la fonction d'onde du système quantique. En séparant les variables dans la fonction Ψ telle que

$$\Psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) T(\vartheta) F(\varphi) , \quad (1.2)$$

l'Eq. (1.1) se sépare aux trois équations [38]

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{2mr^2}{\hbar^2} (E - V(r)) = \lambda , \quad (1.3)$$

$$\frac{d^2 T}{d\vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{dT}{d\vartheta} + \left(\lambda - \frac{m_\ell^2}{\sin^2 \vartheta} \right) T = 0 , \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = -m_\ell^2 . \quad (1.5)$$

λ est une constante telle que

$$\lambda = \ell(\ell + 1) , \quad (1.6)$$

ℓ étant un nombre entier positif ou nul. m_ℓ est un nombre entier qui vérifie

$$-\ell \leq m_\ell \leq \ell . \quad (1.7)$$

$\ell(\ell + 1)$ est la valeur propre du carré de l'opérateur moment cinétique L^2 , et m_ℓ est la valeur propre de l'opérateur projection L_z du moment cinétique suivant la direction z . Les solutions des Eqs. (1.3), (1.4) et (1.5) sont présentées dans la référence [38]. Les solutions de l'Eq. (1.4) peuvent s'exprimer en fonction des polynômes de Legendre, alors que les solutions de l'Eq. (1.5) sont des fonctions périodiques de forme $e^{im_\ell \varphi}$. Pour les fonctions radiales, on distingue deux cas. Le premier cas est celui de la liaison ($E < 0$), pour lequel l'Eq. (1.3) n'a de solutions que pour des valeurs particulières de E . Dans ce cas, des nombres entiers interviennent dans l'expression de la fonction $R(r)$. Par contre, le deuxième cas est celui de la diffusion ($E > 0$), pour lequel l'Eq. (1.3) possède des solutions pour toutes les valeurs réelles de E .

Maintenant, essayons d'écrire les Eqs. (1.3), (1.4) et (1.5) sous la forme de l'équation de Schrödinger à une dimension. Pour cela, commençons d'abord par l'Eq. (1.3) et introduisons la fonction \mathcal{X} définie par

$$R = \frac{\mathcal{X}}{r} . \quad (1.9)$$

En dérivant deux fois successivement l'Eq. (1.9) par rapport à r , on obtient

$$\frac{dR}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d\mathcal{X}}{dr} - \frac{\mathcal{X}}{r^2} , \quad (1.10)$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{1}{r} \frac{d^2\mathcal{X}}{dr^2} - 2 \frac{d\mathcal{X}/dr}{r^2} + 2 \frac{\mathcal{X}}{r^3} . \quad (1.11)$$

En remplaçant ces dernières équations dans l'Eq. (1.3), on peut écrire

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\mathcal{X}}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\lambda\hbar^2}{2mr^2} \right] \mathcal{X} = E\mathcal{X} . \quad (1.12)$$

Cette équation ressemble à l'équation de Schrödinger unidimensionnelle avec un potentiel fictif

$$V'(r) = V(r) + \frac{\lambda\hbar^2}{2mr^2} . \quad (1.13)$$

De même, on peut ramener la forme de l'Eq. (1.4) à celle de l'équation de Schrödinger unidimensionnelle. Effectivement, reprenons l'Eq. (1.4) et introduisons la fonction $\mathcal{T}(\vartheta)$ définie par

$$\mathcal{T}(\vartheta) = \sin^{\frac{1}{2}} \vartheta T(\vartheta) . \quad (1.14)$$

En dérivant deux fois successivement l'Eq. (1.14) par rapport à ϑ , on aboutit à

$$\frac{dT}{d\vartheta} = \frac{1}{\sin^{\frac{1}{2}} \vartheta} \frac{d\mathcal{T}}{d\vartheta} - \frac{1}{2} \frac{\cos \vartheta}{\sin^{\frac{3}{2}} \vartheta} \mathcal{T} , \quad (1.15)$$

$$\frac{d^2T}{d\vartheta^2} = \frac{1}{\sin^{\frac{1}{2}} \vartheta} \frac{d^2\mathcal{T}}{d\vartheta^2} - \frac{\cos \vartheta}{\sin^{\frac{3}{2}} \vartheta} \frac{d\mathcal{T}}{d\vartheta} + \frac{3 \cos^2 \vartheta}{4 \sin^{\frac{3}{2}} \vartheta} + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{T}}{\sin^{\frac{1}{2}} \vartheta} . \quad (1.16)$$

En remplaçant les Eqs. (1.15) et (1.16) dans l'Eq. (1.4), on obtient

$$\frac{d^2\mathcal{T}}{d\vartheta^2} + \left(\lambda + \frac{1}{4} \right) \mathcal{T} + \frac{(1/4 - m_\ell^2)}{\sin^2 \vartheta} \mathcal{T} = 0 . \quad (1.17)$$

On remarque que l'Eq. (1.17) se ramène à l'équation de Schrödinger unidimensionnelle d'un système de potentiel et d'énergie dont les formes sont

$$V(\vartheta) = \frac{(m_\ell^2 - 1/4) \hbar^2}{\sin^2 \vartheta} \frac{1}{2m} , \quad (1.18)$$

et

$$E_{\vartheta} = \left(\lambda + \frac{1}{4}\right) \frac{\hbar^2}{2m} . \quad (1.19)$$

On remarque aussi que l'Eq. (1.5) est de la forme de l'équation de Schrödinger unidimensionnelle d'un système libre d'énergie égale à $m_e^2 \hbar^2 / 2m$.

En fin de compte, les Eqs. (1.3), (1.4) et (1.5) se ramènent toutes à l'équation de Schrödinger unidimensionnelle d'énergie et de potentiel particuliers. Ce fait sera utilisé dans les sections suivantes pour l'établissement et la résolution des EHJQS.

1.2. L'EHJQS radiale

En reprenant l'Eq. (1.12), et en se basant sur l'écriture de la fonction d'onde à une dimension, donnée par l'Eq. (3.25) du Chap.1, écrivons que

$$\mathcal{X}(r) = A(r) \left[\alpha e^{\frac{i}{\hbar} Z(r)} + \beta e^{-\frac{i}{\hbar} Z(r)} \right] . \quad (1.20)$$

De la même manière que dans le cas unidimensionnel [29], en injectant la relation (1.20) dans l'Eq. (1.12), on aboutit aux deux équations suivantes:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dZ}{dr} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{A} \frac{d^2 A}{dr^2} + V(r) + \frac{\lambda \hbar^2}{2m r^2} = E , \quad (1.21)$$

$$\frac{d^2 Z}{dr^2} + \frac{2}{A} \frac{dA}{dr} \frac{dZ}{dr} = 0 . \quad (1.22)$$

En intégrant cette dernière équation, on obtient

$$A(r) = k \left(\frac{dZ}{dr} \right)^{-\frac{1}{2}} , \quad (1.23)$$

k étant une constante d'intégration. En injectant l'Eq. (1.23) dans l'Eq. (1.21), on peut écrire

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dZ}{dr} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{4m} \{Z, r\} + V(r) + \frac{\lambda \hbar^2}{2m r^2} = E , \quad (1.24)$$

où la quantité $\{Z, r\}$ représente le Schwarzien de $Z(r)$ (voir Chap. 1). L'Eq. (1.24) représente l'EHJQS radiale. La fonction $Z(r)$ est l'*action réduite radiale*

1.3. L'EHJQS angulaire suivant ϑ

Maintenant, reprenons l'Eq. (1.17) et écrivons $\mathcal{T}(\vartheta)$ sous la forme

$$\mathcal{T}(\vartheta) = \xi(\vartheta) \left[\gamma e^{\frac{i}{\hbar} L(\vartheta)} + \varepsilon e^{-\frac{i}{\hbar} L(\vartheta)} \right] . \quad (1.25)$$

Après avoir injecté cette dernière équation dans l'Eq. (1.17), de la même manière que dans le cas unidimensionnel [29], on arrive aux équations suivantes:

$$\left(\frac{dL}{d\vartheta} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{\xi} \frac{d^2 \xi}{d\vartheta^2} - \frac{(1/4 - m_\ell^2)}{\sin^2 \vartheta} \hbar^2 = \left(\lambda + \frac{1}{4} \right) \hbar^2 , \quad (1.26)$$

$$2 \frac{d\xi}{d\vartheta} \frac{dL}{d\vartheta} + \xi \frac{d^2 L}{d\vartheta^2} = 0 . \quad (1.27)$$

L'Eq. (1.27) peut se mettre sous la forme

$$\xi(\vartheta) = k' \left(\frac{dL}{d\vartheta} \right)^{-\frac{1}{2}} , \quad (1.28)$$

k' étant une constante d'intégration. En remplaçant cette dernière équation dans l'Eq. (1.26), on aboutit à

$$\left(\frac{dL}{d\vartheta} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2} \{L, \vartheta\} + \frac{(m_\ell^2 - 1/4)}{\sin^2 \vartheta} \hbar^2 = \left(\lambda + \frac{1}{4} \right) \hbar^2 . \quad (1.29)$$

L'Eq. (1.29) représente l'EHJQS angulaire suivant la direction ϑ . La fonction $L(\vartheta)$ sera appelée l'*action réduite angulaire suivant ϑ* .

1.4. L'EHJQS angulaire suivant φ

Reprenons l'Eq. (1.5) et écrivons la fonction $F(\varphi)$ sous la forme

$$F(\varphi) = \eta(\varphi) \left[\sigma e^{\frac{i}{\hbar} M(\varphi)} + \omega e^{-\frac{i}{\hbar} M(\varphi)} \right] . \quad (1.30)$$

En remplaçant cette dernière équation dans l'Eq. (1.5), de la même façon que dans le cas unidimensionnel, on aboutit aux équations

$$\left(\frac{dM}{d\varphi} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{\eta(\varphi)} \frac{d^2 \eta(\varphi)}{d\varphi^2} - m_\ell^2 \hbar^2 = 0 , \quad (1.31)$$

$$\frac{\eta(\varphi)}{2} \frac{d^2 M(\varphi)}{d\varphi^2} + \frac{d\eta(\varphi)}{d\varphi} \left(\frac{dM}{d\varphi} \right) = 0 . \quad (1.32)$$

La solution de cette équation est

$$\eta(\varphi) = k'' \left(\frac{dM}{d\varphi} \right)^{-\frac{1}{2}} , \quad (1.33)$$

k'' étant une constante d'intégration. En injectant la relation (1.33) dans l'Eq. (1.31), on arrive à

$$\left(\frac{dM}{d\varphi} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2} \{M, \varphi\} = m_l^2 \hbar^2 . \quad (1.34)$$

L'Eq. (1.35) représente l'EHJQS suivant la direction angulaire φ . Ainsi, la fonction $M(\varphi)$ représente l'action réduite angulaire suivant φ .

2. RÉOLUTION DES EHJQS A TROIS DIMENSIONS

Dans cette section on va résoudre les Eqs. (1.24), (1.29) et (1.34) pour connaître la forme des fonctions $Z(r)$, $L(\vartheta)$ et $M(\varphi)$ que nous avons introduit dans la Sec.1.

2.1. La forme de l'action réduite radiale

En tenant compte de l'Eq. (1.13), l'Eq. (1.24) peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dZ}{dr} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{4m} \{Z, r\} + V'(r) - E = 0 , \quad (2.1)$$

qui a une forme analogue à l'EHJQS unidimensionnelle (Eq. (2.11) du Chap.1). Du fait de cette analogie, on déduit la solution suivante de l'Eq. (2.1)

$$Z(r) = \hbar \arctan \left\{ \frac{\mathcal{X}_1 + \mu \mathcal{X}_2}{\nu \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2} \right\} , \quad (2.2)$$

où \mathcal{X}_1 et \mathcal{X}_2 sont deux solutions réelles et indépendantes de l'Eq. (1.12), et μ et ν sont des constantes d'intégration. La forme de l'action réduite $Z(r)$ ressemble bel et bien à la forme de l'action réduite unidimensionnelle, donnée par l'Eq. (3.24) du Chap.1. Toutefois, les fonctions \mathcal{X}_1 et \mathcal{X}_2 sont différentes de θ et ϕ . \mathcal{X}_1 est donnée par l'Eq. (1.9)

$$\mathcal{X}_1 = r R_1 ,$$

alors que \mathcal{X}_2 peut être calculé à partir du Wronskien \mathcal{W} de \mathcal{X}_1 et \mathcal{X}_2

$$\mathcal{W} = K = \mathcal{X}_1 \frac{d\mathcal{X}_2}{dr} - \frac{d\mathcal{X}_1}{dr} \mathcal{X}_2, \quad (2.3)$$

où K est une constante. De l'Eq. (2.3), on peut écrire

$$\mathcal{X}_2(r) = K \mathcal{X}_1(r) \int \frac{dr}{\mathcal{X}_1^2(r)}. \quad (2.4)$$

En remplaçant cette dernière relation dans l'Eq. (2.2), on obtient

$$Z(r) = \hbar \arctan \left\{ \frac{K \mu \int \frac{dr}{\mathcal{X}_1^2} + 1}{\nu + K \int \frac{dr}{\mathcal{X}_1^2}} \right\}. \quad (2.5)$$

En adoptant les notations de Floyd, donc en utilisant les constantes a , b et c , on aura

$$Z(r) = \hbar \arctan \left\{ \frac{Kb \int \frac{dr}{\mathcal{X}_1^2} + c/2}{\sqrt{ab - c^2/4}} \right\}. \quad (2.6)$$

2.2. La forme de l'action réduite angulaire suivant ϑ

Maintenant, essayons de résoudre l'Eq. (1.29)

$$\left(\frac{dL}{d\vartheta} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2} \{L, \vartheta\} + \frac{(m_\ell^2 - 1/4) \hbar^2}{\sin^2 \vartheta} = \left(\lambda + \frac{1}{4} \right) \hbar^2.$$

Puisque cette dernière équation peut être vue comme une EHJQS unidimensionnelle, avec un potentiel et une énergie donnés par les Eqs. (1.18) et (1.19), sa solution peut être écrite sous la forme

$$L(\vartheta) = \hbar \arctan \left\{ \frac{\mathcal{T}_1(\vartheta) + \delta \mathcal{T}_2(\vartheta)}{\varrho \mathcal{T}_1(\vartheta) + \mathcal{T}_2(\vartheta)} \right\}, \quad (2.7)$$

où ϱ et δ sont des constantes d'intégration. On peut voir aussi que le Wronskien de deux solutions réelles et indépendantes \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 de l'Eq. (1.17) est une constante qu'on notera k . Alors, en explicitant l'expression du Wronskien W et en intégrant, on obtient

$$\mathcal{T}_2 = k \mathcal{T}_1 \int \frac{dx}{\mathcal{T}_1^2}. \quad (2.8)$$

De cette équation et de l'Eq. (1.14), on peut déduire

$$\frac{\mathcal{T}_2}{\mathcal{T}_1} = \frac{T_1}{T_2} = k \int \frac{dx}{\mathcal{T}_1^2}, \quad (2.9)$$

où T_1 et T_2 sont deux solutions réelles et indépendantes de l'Eq. (1.4) correspondant à \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 respectivement. Donc, l'Eq. (2.7) peut se mettre sous la forme

$$L(\vartheta) = \hbar \arctan \left\{ \frac{\mu k \int \frac{dx}{T_1^2} + 1}{\nu + k \int \frac{dx}{T_1^2}} \right\}. \quad (2.10)$$

ou encore

$$L(\vartheta) = \hbar \arctan \left\{ \frac{T_1 + \mu T_2}{\nu T_1 + T_2} \right\}. \quad (2.11)$$

Pour s'assurer que les expressions données dans les Eqs. (2.7), (2.10) et (2.11) sont des solutions de l'Eq. (1.29), écrivons l'Eq. (2.11) à l'aide des notations de Floyd

$$L(\vartheta) = \hbar \arctan \left\{ \frac{b (T_1/T_2) + c/2}{\sqrt{ab - c^2/4}} \right\}$$

En injectant l'Eq. (2.11) dans l'Eq. (1.29), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar^2 \alpha^2 (ab - c^2/4)}{\sin^2 \vartheta (bT_1^2 + aT_2^2 + cT_1T_2)^2} - \hbar^2 \left\{ -\frac{1}{4} \cot^2 \vartheta - \frac{1}{2} + \right. \\ & \frac{(ab - c^2/4)\alpha^2}{\sin^2 \vartheta (bT_1^2 + aT_2^2 + cT_1T_2)^2} + \left(bT_2 + \frac{c}{2} T_1 \right) \frac{[(d^2T_2/d\vartheta^2) + \cot\vartheta (dT_2/d\vartheta)]}{(bT_1^2 + aT_2^2 + cT_1T_2)} + \\ & \left. \left(aT_1 + \frac{c}{2} T_2 \right) \frac{[(d^2T_1/d\vartheta^2) + \cot\vartheta (dT_1/d\vartheta)]}{(bT_1^2 + aT_2^2 + cT_1T_2)} \right\} - \lambda \hbar^2 - \frac{\hbar^2}{4} + \frac{m_\ell^2 \hbar^2}{\sin^2 \vartheta} - \frac{\hbar^2}{4 \sin^2 \vartheta} = 0. \end{aligned}$$

Ceci permet d'écrire l'équation suivante

$$\begin{aligned} & - \left(bT_2 + \frac{c}{2} T_1 \right) \left[\frac{d^2T_2}{d\vartheta^2} + \cot\vartheta \frac{dT_2}{d\vartheta} \right] - \left(aT_1 + \frac{c}{2} T_2 \right) \left[\frac{d^2T_1}{d\vartheta^2} + \cot\vartheta \frac{dT_1}{d\vartheta} \right] + \\ & \left(\frac{m_\ell^2}{\sin^2 \vartheta} - \lambda \right) \hbar^2 (bT_1^2 + aT_2^2 + cT_1T_2) = 0, \end{aligned}$$

ce qui se ramène à

$$\left(bT_2 + \frac{c}{2} T_1 \right) \left[\frac{d^2T_2}{d\vartheta^2} + \cot\vartheta \frac{dT_2}{d\vartheta} + \left(\lambda - \frac{m_\ell^2}{\sin^2 \vartheta} \right) T_2 \right] +$$

$$\left(aT_1 + \frac{c}{2}T_2\right) \left[\frac{d^2T_1}{d\vartheta^2} + \cot\vartheta \frac{dT_1}{d\vartheta} + \left(\lambda - \frac{m_\ell^2}{\sin^2\vartheta}\right)T_1\right] = 0. \quad (2.12)$$

Puisque T_1 et T_2 sont des solutions de l'équation de Schrödinger angulaire suivant ϑ (Eq. (1.4)), alors l'Eq. (2.12) est satisfaite. Donc, les relations (2.7), (2.10) et (2.11) sont bien les solutions de l'EHJQS angulaire suivant ϑ .

2.3. La forme de l'action réduite angulaire suivant φ

Reprenons l'Eq. (1.34)

$$\left(\frac{dM}{d\varphi}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{2} \{M, \varphi\} - m_\ell^2 \hbar^2 = 0.$$

Comme on l'a dit plus haut, cette équation s'identifie avec l'EHJQS à une dimension pour un potentiel nul et une énergie $m_\ell^2 \hbar^2 / 2m$. Donc sa solution doit être de la forme

$$M(\varphi) = \hbar \arctan \left\{ \frac{F_1 + \epsilon F_2}{\tau F_1 + F_2} \right\},$$

où ϵ et τ sont des constantes d'intégration et F_1 et F_2 sont deux solutions réelles et indépendantes de l'Eq. (1.5). En choisissant ces deux solutions de la façon suivante

$$F_1 = \cos(m_\ell \varphi),$$

$$F_2 = \sin(m_\ell \varphi),$$

la solution de l'Eq. (1.34) est

$$M(\varphi) = \hbar \arctan \left\{ \frac{\cos(m_\ell \varphi) + \epsilon \sin(m_\ell \varphi)}{\tau \cos(m_\ell \varphi) + \sin(m_\ell \varphi)} \right\}. \quad (2.13)$$

Cette dernière équation peut être écrite, suivant les notations de Floyd sous la forme

$$M(\varphi) = \hbar \arctan \left\{ \frac{b \tan(m_\ell \varphi) + c/2}{\sqrt{ab - c^2/4}} \right\}. \quad (2.14)$$

Notons que les relations données par (1.24), (1.29) et (1.34) sont de formes générales identiques. Cette forme est celle de l'action réduite dans le cas du problème à une dimension. Tout ceci semble indiquer que les mouvements dans toutes les directions appartiennent à une même classe définie par la forme générale de l'action, bien que les arguments des arcs tangentes sont différents.

Remarque: il est évident que les EHJQS angulaires ainsi que leurs solutions générales ne dépendent pas du potentiel. Par contre, la solution de l'EHJQS radiale est étroitement liée à la forme du potentiel, puisque ce dernier détermine la forme des fonctions \mathcal{X}_1 et \mathcal{X}_2 .

3. L'EHJQS ÉCRITE POUR L'ACTION RÉDUITE TOTALE

Reprenons les trois EHJQS

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left(\frac{dZ}{dr} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{4m} \{Z, r\} + V(r) + \frac{\lambda \hbar^2}{2mr^2} &= E, \\ \left(\frac{dL}{d\vartheta} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2} \{L, \vartheta\} + \frac{(m_\ell^2 - 1/4)}{\sin^2 \vartheta} \hbar^2 &= \left(\lambda + \frac{1}{4} \right) \hbar^2, \\ \left(\frac{dM}{d\varphi} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2} \{M, \varphi\} &= m_\ell^2 \hbar^2. \end{aligned}$$

En tirant la valeur de λ de l'équation radiale et celle de m_ℓ^2 à partir de l'équation suivant φ , et en remplaçant dans l'équation suivant ϑ , on obtient l'équation suivante:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{dZ}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dL}{d\vartheta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left(\frac{dM}{d\varphi} \right)^2 \right] - \frac{\hbar^2}{4m} \left[\{Z, r\} + \frac{1}{r^2} \{L, \vartheta\} + \right. \\ \left. \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \{M, \varphi\} \right] + V(r) - E - \frac{\hbar^2}{8m r^2} - \frac{\hbar^2}{8m r^2 \sin^2 \vartheta} = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Maintenant, définissons l'action réduite totale du système quantique comme étant la somme des actions $Z(r)$, $L(\vartheta)$, $M(\varphi)$

$$S_0(r, \vartheta, \varphi) = Z(r) + L(\vartheta) + M(\varphi). \quad (3.2)$$

En utilisant cette définition, l'Eq. (3.1) peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left(\vec{\nabla}_{r, \vartheta, \varphi} S_0 \right)^2 - \frac{\hbar^2}{4m} \left[\{S_0, r\} + \frac{1}{r^2} \{S_0, \vartheta\} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \{S_0, \varphi\} \right] + \\ V(r) - E - \frac{\hbar^2}{8m r^2} - \frac{\hbar^2}{8m r^2 \sin^2 \vartheta} = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

L'Eq. (3.3) peut être considérée comme une généralisation à trois dimensions de l'EHJQS pour le cas d'un potentiel à symétrie sphérique.

4. CONCLUSION

La généralisation à trois dimensions constitue un objectif très important pour notre nouvelle approche, et l'établissement d'EHJQS à trois dimensions dans le cas d'un potentiel à symétrie sphérique constitue la première étape d'une telle généralisation. En effet, la construction des EHJQS à trois dimensions de même forme que celle de l'EHJQS unidimensionnelle, et le fait d'aboutir à des solutions de formes générales équivalentes indique qu'il est possible de construire une approche dynamique qui devra être une généralisation à trois dimensions de l'approche que nous avons développée au chapitre précédent. Une telle construction à trois dimensions pourrait constituer un argument très puissant en faveur de cette approche.

CONCLUSION

Cette thèse est présentée dans le cadre d'une approche déterministe de la mécanique quantique, qui considère les objets quantiques comme étant des corpuscules localisés dans l'espace de manière permanente, et ayant des trajectoires bien définies. Nous avons ainsi présenté dans ce travail une nouvelle approche basée sur un formalisme analytique qui s'apparente à celui de la mécanique classique. Par la suite, nous avons obtenu de deux manières une équation qui représente l'équivalent en mécanique quantique de la première intégrale de la loi de Newton (IPLNQ, Eq. (2.3) du Chap. 2). La première méthode consiste à introduire la fonction $f(x, E, \mu, \nu)$ dans la partie cinétique du Lagrangien et de l'Hamiltonien du système quantique. Les paramètres μ et ν jouent le rôle de variables cachées. Cette fonction décrit les effets quantiques et tend vers 1 à la limite classique $\hbar \rightarrow 0$. La présence des paramètres μ et ν est dû au fait que l'équation fondamentale qui décrit le mouvement quantique est du quatrième ordre en x . La deuxième méthode est basée sur la coordonnée quantique \hat{x} introduite par Faraggi et Matone [36]. Ainsi, la coordonnée \hat{x} ramène l'EHJQS qui est du troisième ordre à une équation du premier ordre, et nous permet alors d'appliquer correctement le théorème de Jacobi qui nous conduit exactement à l'équation IPLNQ déjà obtenue par la première méthode. De même, par les deux méthodes, on obtient une équation dynamique qui lie le produit de la vitesse \dot{x} et du moment conjugué $\partial S_0/\partial x$ à l'énergie cinétique du système quantique.

L'équation IPLNQ est du troisième ordre en x et contient la première et la deuxième dérivée de V par rapport à x . Les termes contenant les dérivées d'ordres deux et trois de x sont proportionnels à \hbar^2 , et s'annulent donc à la limite classique. Ainsi, à la limite classique l'équation IPLNQ se ramène à l'équation classique de conservation de l'énergie.

Le fait que la loi quantique de Newton est une équation différentielle du quatrième ordre implique l'existence de deux constantes d'intégration non classiques, μ et ν , dans l'expression de $x(t, E, \mu, \nu, x_0)$. Ces constantes sont à l'origine de notre ignorance de

l'état de mouvement de la particule à l'échelle quantique. Pour déterminer cet état de mouvement, on doit connaître quatre conditions initiales, alors qu'en mécanique classique, deux seulement sont suffisantes. Ces constantes sont aussi à l'origine de l'existence de micro-états dans l'EHJQS non détectés par l'équation de Schrödinger.

Ainsi, les équations du mouvement quantique sont très particulières bien qu'elles se ramènent vers les équations classique pour $\hbar \rightarrow 0$. On note aussi que l'énergie cinétique de la particule est dispersée entre deux sortes d'impulsions, la quantité de mouvement classique $m\dot{x}$ et le moment conjugué $\partial S_0/\partial x$. Alors, on ne pourra plus lier l'énergie séparément à ces deux sortes d'impulsions, comme c'est le cas en mécanique classique

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = E - V$$

ou

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 = E - V$$

En fait, la relation de dispersion est propre à la mécanique quantique, et elle est donnée par

$$\dot{x} \frac{\partial S_0^{cla}}{\partial x} = 2(E - V) .$$

Bien que la généralisation à trois dimensions des équations de mouvement , établies au Chap.2, se heurte à d'énormes difficultés, l'établissement de l'actions réduite constitue la première étape pour la construction d'un formalisme basé sur une vue dynamique à trois dimensions de la mécanique quantique.

Notre approche, dans le cadre de sa généralisation à trois dimensions, peut être d'un apport considérable pour la physique. premièrement, elle rétablirait une réalité objective de la nature, ce qui aurait des implication philosophiques importantes. Deuxièmement, elle présente un espoir pour fonder une théorie quantique de la gravitation, objectif indispensable, pour achever l'unification des quatre interactions fondamentales.

REFERENCES

- [1] L. de Broglie, *Sur le parallélisme entre la dynamique du point matériel et l'optique géométrique*, *Journal de physique*, Serie VI, t. VII, n1, 1926, p. 1-6.
- [2] L. de Broglie, *Les incertitudes d'Heisenberg et l'interprétation probabiliste de la mécanique ondulatoire*, (Gauthier-Villars, 1982), Chap. I.
- [3] L. de Broglie, Encyclopédie Française, tome II, La physique, p. 2-26-2 à 2-28-2.
- [4] L. de Broglie, Encyclopédie Française, tome II, La physique, p. 2-60-3 à 2-60-7.
- [5] L. de Broglie, Encyclopédie Française, tome II, La physique, p. 2-48-15 à 2-50-4.
- [6] L. de Broglie, Encyclopédie Française, tome II, La physique, p. 2-50-5 à 2-52-5.
- [7] C. J. Davisson, L. H. Germer, *Phys. Rev.* **30**, 705 (1927).
I. Estermann, O. Stern, *Zeit für Physik.* **61** 95 (1930).
H. Börsch, *Naturwiss.* **28**, 709 (1940).
- [8] L. de Broglie, *Les incertitudes d'Heisenberg et l'interprétation probabiliste de la mécanique ondulatoire*, (Gauthier-Villars, 1982), Chap. XII.
L. de Broglie, *Comp. rend.* **183**, 447 (1926); **184**, 273 (1927); **185**, 380 (1927).
- [9] L. de Broglie, *Les incertitudes d'Heisenberg et l'interprétation probabiliste de la mécanique ondulatoire*, (Gauthier-Villars, 1982), Préface de L. de Broglie.
- [10] L. de Broglie, *Les incertitudes d'Heisenberg et l'interprétation probabiliste de la mécanique ondulatoire*, (Gauthier-Villars, 1982), Chap. II.
- [11] A. Einstein, N. Rosen, and B. Podolsky, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [12] D. Bohm, *Phys. Rev.* **85**, 166 (1952); **85**, 180 (1952); D. Bohm and J. P. Vigier, *Phys. Rev.* **96**, 208 (1954).
- [13] E. Madelung, *Z. Physik* **40**, 332 (1926).
- [14] T. Takabayasi, *Progr. Theoret. Phys.* (Japan) **8**, 143 (1952); **9**, 187 (1953).
Finkelstein, LeLevier, and Ruderman, *Phys. Rev.* **83**, 326 (1951).
- [15] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460 (1982); **49**, 91 (1982).
A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804 (1982).
- [16] J. S. Bell, *Physics*, Vol. **1**, N 3, 195 (1964).
- [17] P. Roussel, *Journal de Physique* **47**, 393 (1986).
- [18] E. R. Floyd, arXiv:quant-ph/0009070.
- [19] E. R. Floyd, *Phys. Rev. D* **26**, 1339 (1982).

- [20] E. R. Floyd, *Phys. Rev.* **D 29**, 1842 (1984).
- [21] E. R. Floyd, *Phys. Rev.* **D 34**, 3246 (1986).
- [22] E. R. Floyd, *Found. Phys. Lett.* **9**, 489 (1996), arXiv:quant-ph/9707051.
- [23] E. R. Floyd, *Int. J. Mod. Phys. A* **15**, 1363 (2000), arXiv:quant-ph/9907092.
- [24] A. E. Faraggi and M. Matone, *Int. J. Mod. Phys. A* **15**, 1869 (2000); arXiv:hep-th/9809127.
- [25] A. E. Faraggi and M. Matone, *Phys. Lett.* **B 437**, 369 (1998), arXiv:hep-th/9711028.
- [26] A. E. Faraggi and M. Matone, *Phys. Lett.* **B 450**, 34 (1999), arXiv:hep-th/9705108
- [27] A. E. Faraggi and M. Matone, *Phys. Lett.* **B 445**, 357 (1998), arXiv:hep-th/9809126.
- [28] G. Bertoldi, A. E. Faraggi and M. Matone, *Class. Quant. Grav.* **17**, 3965 (2000), arXiv:hep-th/9909201.
- [29] A. Bouda, *Found. Phys. Lett.* **14**, 17 (2001), arXiv:quant-ph/0004044.
- [30] E. Chpolski, *Physique Atomique* (Mir, 1978), tome II, p. 74-76.
- [31] E. R. Floyd, *Found. Phys. Lett.* **13**, 235 (2000), arXiv:quant-ph/9708007.
- [32] E. R. Floyd, *Phys. Rev.* **D 25**, 1547 (1982).
- [33] A. Messiah, *Quantum Mechanics* (Wiley, New York, 1961), Vol. I, p. 88.
- [34] E. Chpolski, *Physique Atomique* (Mir, 1978), tome II, p. 168-174.
- [35] H. B. Dwidth, *Table of Integrals and other Mathematical Data* 4th ed. (McMillan, New York, 1961) ¶858.524; *ibid.*, ¶858.534.
- [36] A. E. Faraggi and M. Matone, *Phys. Lett.* **A 249**, 180 (1998), arXiv:hep-th/9801033.
- [37] A. Bouda and T. Djama, *Physics Letters A* **285**, 27 (2001); arXiv:quant-ph/0103071.
- [38] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Laloë, *Mécanique quantique* (Hermann, 1977), tome 1.