N° d'ordre : 22/2005-M/MT

République algérienne démocratique et populaire

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté de Mathématiques

Mémoire présenté Pour l'obtention du diplôme de Magister
EN MATHEMATIQUES

Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres

Par : Melle : FERNANE ZAHIA

SUJET :

Solutions Générales Rationnelles Des Equations Différentielles Ordinaires

Soutenue publiquement le : 14 /12/2005, devant le jury composé de :

Mr M.Zitouni, professeur à l'USTHB président de jury
Mr K. BETINA, professeur à l'USTHB président de thèse
Mr A.Kessi, professeur à l'USTHB examinateur.
Mr D.Bahloul, examinateur.

Solutions Générales Rationnelles Des Equations Différentielles Ordinaires

SOMMAIRE

-Introduction :

INTRODUCTION :

L’étude des équations différentielles utilise la théorie des groupes algébriques linéaires et des corps différentiels

Cette étude portera sur le cas non linéaire, elle s’inspire des travaux de Ritt [6], qui choisit l’approche de l’algèbre différentiel, de même Kolchin [5], qui fait le lien avec les groupes algébriques. Cette étude consistera à trouver la solution générale de type rationnelle pour des équations différentielles ordinaires, par exemple, la solution générale de $\frac{dy}{dx}+y^2=0$ est

$y=\frac{1}{x+c}$, où c est une constante arbitraire.

Deux résultats importants sont présentés dans cette étude. Premièrement, une condition nécessaire et suffisante pour qu’une équation différentielle ordinaire possède une solution générale rationnelle et aussi prouvé que la définition de solution générale d’une équation différentielle ordinaire due à Ritt est équivalente à la définition au sens usuel, si les solutions générales sont de types rationnelles.

Deuxièmement, un algorithme pour trouver une solution générale rationnelle d’une équation différentielle du premier ordre est présenté. Il est prouvé que dans ce cas trouver une solution générale rationnelle revient à trouver une solution particulière.

L’algorithme est basé sur la paramétrisation des courbes algébriques planes. L’idée de base est de considérer la variable et ses dérivées comme des variables indépendantes, alors l’équation différentielle ordinaire d’ordre 1 définit une courbe algébrique plane.

Cette étude est organisée comme suit :

Dans le chapitre1, plusieurs concepts de bases et notations sur les ensembles caractéristiques sont introduits. Chapitre2 : définitions, notations et résultats de l’algèbre différentiel.

Chapitre3 : Critère d’existence d’une solution générale rationnelle.

Chapitre4 : Algorithme pour trouver la solution générale rationnelle pour une équation différentielle ordinaire d’ordre1 à cœfficients constants. Exemple.

Chapitre1 : Conceptions de bases et ensembles caractéristiques :

Dans [18] Xiao-Shan Gao sur la base des travaux de J.F.Ritt [6] et Wu Wen Tsun [15], … donne une méthode d'élimination pour décomposer des systèmes arbitraires de polynômes à plusieurs variables en systèmes triangulaires en fournissant les décompositions des ensembles des zéros associés.

Introduisons pour cela quelques concepts de bases et notations sur les ensembles caractéristiques. Pour plus de détails se conférer à [4, 6, 15]

Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro et $z_{1,} z_{2,\ldots,} z_n$ n_ indéterminées .

K [$z_{1,} z_{2,\ldots,} z_n$] : l'anneau des polynômes à n- indéterminées . Supposons un ordre fixé sur l'ensemble des indéterminées. En considérant l'ordre comme suit : $z_1 \langle\ z_2 \langle \ldots \langle\ z_n.$

Considérons P un polynôme de K [$z_{1,} z_{2,\ldots,} z_n$] , P s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{P=\sum a_{\alpha 1\ldots\alpha k}\ z_1^{\alpha 1}.z_2^{\alpha 2}\ldots z_k^{\alpha k}\ \ldots (1)}$$

Où les $a_{\alpha 1\ldots\alpha k} \neq 0$ sont dans le corps K et il existe un $\alpha_k \neq 0$.

Définition1:

Le degré d'un polynôme P par rapport à une indéterminée z_i apparaissant effectivement dans le polynômeP est la plus grande puissance de l'indéterminée z_i dans P, et est noté deg(P, z_i) et

$\sum_{i=1}^{n} \deg(P, z_i)$ *représente le degré total du polynôme P et noté tdeg(P).*

la classe et la classe degré notés respectivement cls(P) et cdeg(P) d'un polynôme

$P \in K\ [z_1,z_2,\ldots,z_n]$ par rapport à un ordre donné est définit comme suit :

1. Si aucune indéterminée n'apparaît dans le polynôme P ($P \in K$) alors par convention cls(P)=0 et cdeg(P)=0 .

2. Si l'indéterminée z_i apparaît dans le polynôme P et aucune indéterminée $z_j \rangle z_i$ n'apparaît dans le polynôme P alors cls(P)=i et cdeg(P)=deg(P, z_i) .

Ainsi n'importe quel polynôme $P \in K[z_1, z_2, \ldots, z_n]$, on peut lui associé une paire d'entiers de la manière suivante :

$$\text{Type} : K[z_1, z_2, \ldots, z_n] \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$P \longrightarrow \text{type}(P) = (\text{cls}(P), \text{cdeg}(P)).$$

Donc un polynôme P de classe j et de cdeg(P)=d s'écrit :

$$P = I_d(z_1, z_2, \ldots, z_{j-1}) z_j^d + I_{d-1}(z_1, z_2, \ldots, z_{j-1}) z_j^{d-1} + \ldots + I_0(z_1, z_2, \ldots, z_{j-1}). \qquad (2)$$

Où : $I_t(z_1, z_2, \ldots, z_{j-1}) \in K[z_1, z_2, \ldots, z_{j-1}]$ pour t=0,..,d .

-Soit P un polynôme de classe j et de classe degré d, son polynôme initial noté In (P) est le polynôme $I_d(z_1, z_2, \ldots, z_{j-1})$ de l'équation (2) et $S = \dfrac{\partial P}{\partial z_j}$ est appelé le séparant de P.

Soit Q un autre polynôme de classe q, P est dit réduit par rapport à Q si q>0 et deg $(P, z_q) < \deg(Q, z_q)$.

Lemme 1 *:*

Considérons deux polynômes P et $Q \in K[z_1, z_2, \ldots, z_n]$,avec cls(P)=j , alors il existe deux polynômes B et R , et un entier positif s tel que :

$$\boldsymbol{In(P)^s Q = qP + R \qquad (3).}$$

Si s est le plus petit entier possible qui vérifie l'équation (3) , alors B et R sont uniques et dans ce cas le polynôme R est appelé le pseudo-rèste de Q par rapport à P , et on note
Prem. (P, Q).
Soit maintenant Ą un ensemble fini de polynômes de l'anneau K [$z_1, z_2, \ldots, z_n$] .

***Définition 2** :*
Un ensemble de polynômes Ą est une chaîne ascendante si ses polynômes ne sont pas tous nuls et peuvent être arrangés dans la suite d'éléments suivante :

$$Ą : A_1, A_2, \ldots, A_r. \qquad (4)$$

Satisfaisant les conditions suivantes :

1. $0 < cls\ (A_1) < cls\ (A_2) < \ldots < cls\ (A_r) < n.$

2. *A_j est réduit par rapport à A_i, pour tout $i<j$.*

Chaque sous ensemble ascendant est fini et a au plus n- éléments.

- Pour un polynôme A de l'anneau K [$z_1, z_2, \ldots, z_n$] , A est réduit par rapport à une chaîne ascendante Ą si A est réduit par rapport à tout polynôme en Ą.
Une chaîne ascendante est irréductible si pour n'importe quels polynômes A_1, A_2 réduit par rapport à Ą, alors prem (Ą, A_1, A_2)$\neq$0.
Ainsi un ensemble triangulaire est obtenu à partir de chaînes ascendantes Ą.

Problème :
Etant donné un système d'équations, nous cherchons à obtenir des renseignements sur ses solutions.
Calculons pour cela une famille d'ensembles particuliers (appelés ensembles caractéristiques) dont la réunion des solutions coïncide avec les solutions du système initial.
D'abords la définition suivante :
- Soit $\sum$ un système de polynômes dans K [$z_1, z_2, \ldots, z_n$] .

***Définition 3** :*

$\sum$ est un idéal polynomial de K $[z_1,z_2,\dots,z_n]$ si, pour chaque sous ensemble fini $A_1, A_2,\dots, A_r$ de $\sum$ et tout $C_1,C_2,\dots,C_r$ dans K $[z_1,z_2,\dots,z_n]$, le polynôme $C_1A_1+C_2A_2+\dots+C_rA_r$ est contenu dans $\sum$.

- Soit alors I un idéal de l'anneau K $[z_1, z_2,\dots,z_n]$, considérons la famille de tous les ensembles ascendants , où chacune de ses composantes est dans I .

$$\mathbf{S_I \doteq \{A : A_1, A_2,\dots,A_r \text{ (chaîne ascendante) } / A_i \in I, 1\leq i\leq r \}.}$$

L'élément minimal de S_I (par rapport à l'ordre $\langle$sur les ensembles ascendants) est dit un ensemble caractéristique.

-Soit $A_1, A_2,\dots,A_r$ une chaîne comme dans (4) , avec A_1 de classe positive et soit $\sum$ un système de polynômes contenant les éléments de la chaîne (4) .

Proposition1 :

La chaîne ascendante (4) est un ensemble caractéristique de $\sum$si, et seulement si, $\sum$ne contient aucun polynôme non nul réduit par rapport aux éléments de la suite (4).

On a alors la méthode suivante pour construire un ensemble caractéristique.

Méthode de construction d'un ensemble caractéristique

Définissons d'abord la notion de rang :

Soient A_1, A_2 deux polynômes de K $[z_1, z_2,\dots,z_n]$.

Supposons que les indéterminées z_i apparaissent effectivement dans A_1, A_2.

Si A_2 est de classe supérieure à A_1, A_2 est dit de rang supérieur à A_1 .Maintenant si A_1et A_2 sont de même classe positive $p>0$, et si A_2 est de degré supérieur à A_1 en z_p, alors A_2 est aussi dit de rang supérieur à A_1.

-Soit $\sum$ un système de polynômes, qui ne sont pas tous nuls.

La méthode suivante pour construire un ensemble caractéristique de$\sum$ peut actuellement être réalisée quand $\sum$ est fini.

Soient A_1, A_2, ….des polynômes non nuls dans$\sum$, et soit A_1 le polynôme de plus petit rang .

Si A_1 est de classe 0, c'est un ensemble caractéristique de $\sum$.

Maintenant si A_1 est de classe positive, si$\sum$ ne contient aucun polynôme non nul réduit par rapport à A_1, alors A_1 est un ensemble caractéristique.

Supposons maintenant que de tels polynômes réduits existent , ils sont tous de classe supérieure à A_1 .Soit A_2 l'un de ceux qui ont le plus petit rang , si $\sum$ n'a aucun polynôme non nul réduit par rapport à A_1 etA_2 , alors la chaîne A_1 ,A_2 est un ensemble caractéristique . Si de tels polynômes réduits existent, soit A_3 l'un d'eux de plus petit rang, en continuant le processus, la Chaîne (4) est un ensemble caractéristique.

corollaire1 :

Le séparant et l'initial de A_i sont notés respectivement S_i et I_i. Comme S et I sont réduits par rapport à (4), alors ils ne peuvent être contenus dans $\sum$.

Définition 4 :

Un idéal $\sum$ est parfait si $A^n \in \sum$ pour $n \in \mathcal{N}^*$ implique A est contenu dans$\sum$.

-L'intersection d'un nombre fini d'idéaux parfait est un idéal parfait.

-Un idéal $\sum$ est premier si, quand un produit AB est contenu dans $\sum$, au moins l'un des deux est contenu dans$\sum$.

-Tout idéal premier est parfait.

Pour une chaîne ascendante Ą.

-Soit l'ensemble **Sat (Ą) = {P$\in$ K [$z_1, z_2,...,z_n$] / $\exists$ J tel que JP $\in$Idéal(Ą) }.**

Où J est un produit d'initiaux de polynômes en Ą.

Ritt [6], prouve que :

Lemme 2 :

L'ensemble Sat (Ą) est un idéal et dim_K (Sat (Ą)) est égale à (n-r) où r est le nombre de polynômes en Ą.

Si de plus Ą est irréductible alors l'ensemble Sat (Ą) est un idéal premier et la chaîne Ą est un ensemble caractéristique de l'ensemble Sat (Ą).

En se basant sur les propriétés des chaînes ascendantes, il existe un algorithme qu'ont peut utiliser pour décomposer l'ensemble des zéros d'un système fini de polynômes en une union d'ensembles de zéros de l'idéal saturé Sat (A).
Nous avons d'abords la définition suivante :

Définition 5 :

Pour un ensemble de polynômes PS, un élèment $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E^n$ est un zéro de PS sur E si $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ annule tout polynôme de PS où E est une extension de K .
L'ensemble des zéros de PS sur toute extension du corps K est l'ensemble Zéro (PS).
Pour deux ensembles de polynômes PS et DS, posons :

$$\text{Zéro } (PS/DS)=\text{Zéro } (PS)-\bigcup_{d\in DS} \text{Zéro } (d)$$

On aura besoin du théorème de décomposition du zéro [6, 15] suivant :

Théorème1 : *(théorème de décomposition de l'ensemble des zéros) :*
Pour un ensemble fini de polynômes PS, il existe des chaînes ascendantes irréductibles A_K tel que :

$$\textbf{Zéro (PS)}=\bigcup_{k} \textbf{Zéro (Sat (}A_K\textbf{)).}$$

Zéro générique :

Soit Σ un idéal premier non trivial de l'anneau K [$z_1, z_2, \ldots, z_n$] et E est une extension du corps K .

***Définition 6** :*

Un zéro $\eta \in E^n$ de Σ est un zéro générique de Σ si, pour n'importe quel polynôme $P\in K [z_1, z_2, \ldots, z_n]$, $P(\eta)=0$ implique $P\in \Sigma$.

Σ est le noyau de l'homomorphisme de substitution K[$z_1, z_2, \ldots, z_n$] $\to$ K [$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$] cela implique que η est un zéro générique de Σ précisément quand il existe un isomorphisme de K-algebre $K[\eta] \approx K [z_1, z_2, \ldots, z_n] / \Sigma$ .d'où la proposition suivante :

Proposition 2 *:*

Tout idéal premier de l'anneau $K[z_1, z_2,...,z_n]$ a un zéro générique et Un idéal $\sum$ est premier si, et seulement si, il a un zéro générique.

Le degré transcendantal :

Définition 7 :

Soit $\eta = (\eta_1, \eta_2,...,\eta_n)$ un zéro générique de $\sum$, le degré transcendantale de $K(\eta_1, \eta_2,...,\eta_n)$ sur K la dimension de η (notée par $\dim_K(\eta)$) qui est égale à $\dim_K(\sum)$.

Chapitre2 : Algèbre différentielle :

Toutes les notions exposées dans ce chapitre se trouvent dans les ouvrages [4, 6, 11, 12].

Définition 1 :

Soit A un anneau commutatif.

-Un anneau différentiel (A,∂) est un anneau A munit d'une dérivation ∂ , qui est une application $\partial : A\rightarrow A$ telle que

$$\forall a,b\in A \qquad \partial(a+b)=\partial a + \partial b$$

et

$$\partial(ab)= a\partial b + b\partial a$$

-L'anneau des constantes de l'anneau A est l'ensemble :

$\mathbf{C_A=\{x\in A\ /\partial x=0\}}$ **,** qui est un sous - anneau de A.

Si A est un corps alors (A,∂) est un corps différentiels et C_A est le corps des constantes de A.

Notons par la suite (K, ∂) le corps différentiel.

Soit (A,∂_1) et (B,∂_2) deux anneaux différentiels .

Un homomorphisme d'anneaux différentiels $f : (A,\partial_1) \rightarrow (B,\partial_2)$ est un homomorphisme au sens algébrique qui commute avec les dérivations ie : $f o\partial_{1=},\partial_2 o f$ ou encore $(f(a')=(f(a)'))$.

(de la même façon sont définis un isomorphisme et un automorphisme d'anneaux différentiels).

Définition 2:

Soit A un anneau différentiel.

Un idéal I de A est un idéal différentiel si $a \in I$ implique $a' \in I$ ou encore $I' \subset$ I.

Définition 3 :

Soient (K,∂_1) et (L,∂_2) deux corps différentiels avec L une extension algébrique de K, alors L est une extension différentielle de K si : $\partial_2/K \equiv \partial_1$.

Notations :

Les symboles y, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ seront utilisés pour construire le polynôme différentiel.

Où y : représente l'indéterminée et y_i : représente la $i^{éme}$ dérivée de y.

On appellera y : l'indéterminée différentielle

Et les y_i : les dérivées de l'indéterminée différentielle y.

Soit donné l'indéterminée différentielle y et ses dérivées $y_1, y_2, \ldots, y_n$, on définit un polynôme différentiel à une indéterminée y à cœfficients dans le corps K comme étant le polynôme en y, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ à cœfficients dans K .

K{y} l'ensemble des polynômes différentielles à cœfficients dans le corps K.

Soit Σ un ensemble de polynômes différentiels sur l'anneau K {y} .

Définition 4 :

Un zéro de Σ est un élément d'une extension du corps K, qui annule tout polynôme différentiel de Σ.

L'ensemble des zéros de Σ sur K est noté Zéro (Σ).

Si Σ a des zéros, l'ensemble de ses zéros, pour toute extension K_1 de K, est une variété de Σ.

Une variété d'un système de polynômes est une variété algébrique.

Soient $\mathscr{M}_1$ et $\mathscr{M}_2$ respectivement les variétés des ensembles de polynômes $\sum_1$ et $\sum_2$.

Si $\mathscr{M}_1$ est contenu dans $\mathscr{M}_2$, on dira que $\sum_2$ vérifie $\sum_1$ ou encore que $\sum_2$ s'annule sur $\mathscr{M}_1$.

Une variété $\mathscr{M}$ est réductible si elle est la réunion de deux variétés pas nécessairement mutuellement exclusifs, qui sont des parties propres de $\mathscr{M}$. Si $\mathscr{M}$ n'est pas réductible, il sera dit irréductible.

Théorème 1 :

Une variété $\mathscr{M}$ d'un système de polynômes $\sum$ est irréductible si, et seulement si, quand un produit AB s'annule sur $\mathscr{M}$, au moins l'un des deux s'annule sur $\mathscr{M}$.

Notations :

Soit le polynôme $P(y) \in K\{y\}$.

L'ordre du polynôme différentiel P(y) est la plus grande dérivée de y apparaissant effectivement dans le polynôme différentiel P, noté ord (P(y))

En prenant ord(P(y)) = k , le polynôme différentiel P(y) pourra toujours être regarder comme un polynôme algébrique en y, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ à cœfficients dans K , alors l'initial , séparant , deg(P(y) , y_i) et tdeg(P(y)) sont définis comme dans le cas algébrique .

La $t^{\text{éme}}$ dérivée de P est noté par $P^{(t)}$, et on a :

$$\mathbf{P^{(t)} = S y_{t+k} - R_t,}$$

Où R_t est d'ordre plus petit que t+k.

La définition de zéro générique est toujours la même que dans le cas algébrique.

Pour un polynôme différentiel P(y) d'ordre k, un polynôme différentiel Q est réduit par rapport à P(y) si ord (Q(y)) < k ou si ord (Q(y)) = k et deg (Q, y_k) < deg (P, y_k)).

Pour deux polynômes différentiels P(y) et Q(y) soit R = prem (P(y), Q(y)) le pseudo- reste de P(y) par rapport à Q(y) .On a la formule du reste suivante :

$$\mathbf{J(y)\, P(y) = \textstyle\sum_i B_i(y)\, Q^i(y) + R(y).} \qquad \mathbf{(5).}$$

Où j(y) est un produit de certaines puissances de l'initiale et du séparant de Q(y).

$Q^i(y)$ est la $i^{éme}$ dérivée de Q(y) et les $B_i(y)$ sont des polynômes différentiels.

Le polynôme différentiel P(y) est irréductible, si il est algébriquement irréductible, c'est-à-dire il ne peut s'écrire comme produit de deux polynômes différentiels de classes positives.

Définition 5 :

Soit $\sum$ un système de polynômes différentiels sur l'anneau $K\{y\}$.

$\sum$ est un idéal différentiel de polynômes différentiels si $\sum$ satisfait les deux conditions suivantes :

(a) - Si $A_1, A_2, \ldots, A_r$ est un sous - ensemble fini de polynômes différentiels dans $\sum$, alors $C_1A_1 + \ldots + C_rA_r$ est contenu dans $\sum$ où les C_i sont des polynômes différentiels quelconques de $K\{y\}$.

(b) - La dérivée de n'importe quel polynôme différentiel dans $\sum$ est contenue dans $\sum$.

Corollaire :

Les définitions d'idéaux premiers et d'idéaux parfaits sont les même que dans le cas algébrique [6].

L'idéal est non trivial, s'il est différent de l'idéal zéro et de l'idéal $K\{y\}$ appelé l'idéal unité.

Lemme 1 *:*

Si Σ est un idéal parfait, et si AB est contenu dans $\sum$, alors chaque $A^{(i)} B^{(j)}$ est contenu dans Σ.

Définition 6:

Soit Λ un system de polynômes différentiels dans $K\{y\}$.

L'intersection de tous les idéaux contenant Λ est l'idéal engendré par Λ et noté $[\Lambda]$.

Proposition 1 :

Un polynôme différentiel A est contenu dans [Λ] si, et seulement si, A est une combinaison linéaire de polynômes différentiels dans Λ et de leurs dérivées.

L'intersection de tous les idéaux parfaits contenant Λ est appelé l'idéal déterminé par Λ et est noté {Λ}.

Et {Λ} ⊃[Λ].

La notation (Λ) représente la totalité des combinaisons linéaires de polynômes différentiels dans Λ et, pour exprimer le fait qu'une différence A-B est dans (Λ) ,on pourra écrire : $A \equiv B, (\Lambda)$.

Les formules $A\equiv B, [\Lambda]$; $A\equiv B, \{\Lambda\}$, signifieront respectivement que A-B est contenu dans [Λ] ou dans {Λ}.

Il est prouvé dans [6] qu'un élément de [Λ] est une puissance d'un élément de {Λ}.

Théorème 2 :

Tout idéal parfait de polynômes différentiels de K{y} a une représentation comme intersection d'un nombre fini d'idéaux premiers.

$$\Sigma=\Sigma_1\cap\Sigma_2\cap\ldots\cap\Sigma_p \qquad (*).$$

-Si l'idéal Σ_2 contient l'idéal Σ_1, Σ_2 sera dit diviseur de Σ_1.

-Maintenant supposons que la relation (*) soit vérifiée, si Σ_1 est un diviseur d'un Σ_i, on peut alors supprimer Σ_1 de (*).Sous cette hypothèse supposons que la relation (*) et qu'aucun Σ_j ne divise un Σ_i pour $j\neq i$.

Soit Σ' un diviseur premier de Σ, on pourra montrer que Σ' est un diviseur de quelques Σ_i dans (*).

Un diviseur premier de Σ qui n'est pas un diviseur d'un autre diviseur premier de Σ sera dit diviseur essentiel premier de Σ. Les seuls diviseurs premiers essentiels de Σ sont les Σ_i dans (*), d'où le théorème suivant :

Théorème 3 :

Chaque idéal parfait a un nombre fini de diviseurs premiers essentiels, et il est l'intersection de ses diviseurs.

On aura besoin du théorème suivant :

Théorème 4 :

Si Σ est un idéal parfait distinct de l'idéal unité, Σ possède des zéros et chaque polynôme différentiel qui vérifie Σ est contenu dans Σ.

Preuve :

Du théorème précédant, Σ est l'intersection d'un nombre fini de diviseurs premiers essentiels Σ_i, $i=1,\ldots,p$, aucun Σ_i n'est l'idéal unité. Pour chaque Σ_i, on considère un zéro générique, chacun de ces p – zéros est un zéro de Σ .

Maintenant soit G un polynôme différentiel qui vérifie Σ, comme G est annulé par chacun des zéros génériques ; G est dans chaque Σ_i et donc dans Σ. □

CHAPITRE 3 : Solutions générales rationnelles des équations différentielles ordinaires:

III.1 – Définition de solutions générales rationnelles :

Dans ce qui suit K= Q(x) le corps différentiel des fonctions rationnelles en x muni de l'opérateur différentiel $\frac{d}{dx}$ et y l'indéterminé sur le corps K.

Soit P $\in$ K{y} un polynôme différentiel irréductible et

$$\boldsymbol{\sum_p = \{A \in K\{y\} / SA \equiv 0 \bmod, \{P(y)\}\}} \qquad \textbf{(6).}$$

Où {P(y)} est l'idéal différentiel engendré par P(y) et S le séparant de P.

Corollaire :

Le théorème 3 implique que A est dans $\sum_p$ si A s'annule pour chaque zéro de P qui n'annule pas S.

Ritt [6], prouve que

Lemme 1 :

$\sum_p$ est un idéal différentiel premier de l'anneau K{y} et un polynôme différentiel Q appartient à $\sum_p$ si, et seulement si le pseudo reste de P par rapport à Q est égale à zéro (prem (P, Q)=0).

Preuve :

Montrons d'abords que $\sum_p$ est un idéal.

(a) .Il est immédiat que la somme de deux polynômes différentiels dans $\sum_p$ est contenu dans $\sum_p$, en effet si A, B $\in \sum_p$ ceci implique que SA $\equiv$0 {P} et SB $\equiv$0 {P} et comme S (A+B) =SA+SB$\equiv$0 {P} on a le résultat.

Et pour le produit d'un polynôme différentiel dans$\sum_p$ par un polynôme quelconque de $K\{y\}$, le produit est encore dans $\sum_p$, en effet, si $C \in K\{y\}$ et $A \in \sum_p$ on a :
$SA \equiv 0 \{P\}$ de plus : $S(CA)=CSA\equiv 0 \{P\}$.

(b). la formule (6) et lemme 1 du chapitre 2 , impliquent que $SA' \in\{P\}$,où A' la dérivée de A, d'où ($SA' \equiv 0 \{P\} \Rightarrow A'\in\sum_p$), ainsi$\sum_p$ est un idéal de $K\{y\}$.
la preuve que l'idéal $\sum_p$ est premier :
Soit AB dans$\sum_p$ et soit ord (P) = m, le procédé de réduction pour obtenir les formules du reste montrent l'existence des relations :

$$S^aA\equiv R, [P], S^b B\equiv T, [P] \qquad (8).$$

Avec R et T d'ordre au plus m.
la formule (8) implique , $SRT \equiv S^{a+b+1} AB, [P]$, en effet $(S^aA)(S^b B) \equiv RT [P]$ ce qui implique $S^{a+b+1} AB\equiv SRT [P]$ ou encore $SRT\equiv S^{a+b+1} AB, [P]$.
Comme le second membre de cette congruence est dans $\{P\}$, le premier membre l'est aussi.
Soit alors :

$$(SRT)^c =MP+M_1P^{(1)} +\ldots+M_q P^{(q)}.$$

On a : $P^{(q)} = Sy_{m+q} +U$, où U est d'ordre inférieur a m+q.
On remplace y_{m+q} dans $P^{(q)}$ et dans M par $-U/S$, on trouve la relation :

$$S^d(RT)^c =NP+N_1P^{(1)}+\ldots+N_{q-1} P^{(q-1)}.$$

De proche en proche en suivant le processus
$S^e (RT)^c$ est divisible par P, comme P est algébriquement irréductible, et n'est pas un facteur de S, P doit être un facteur d'au moins R ou T.
Supposons que R est divisible par P, par la formule (8) SA est dans $\{P\}$ avec A est dans $\sum_p$ .ainsi $\sum_p$ est un idéal premier.
Prouvons maintenant que pour qu'un polynôme différentiel Q(y) soit dans $\sum_p$, il est nécessaire et suffisant que le reste de Q par rapport à P est 0.
Soit Q un polynôme différentiel appartenant à$\sum_p$, on a la relation :

$$S^aQ \equiv B, [P] \qquad (9).$$

Avec B d'ordre au plus m .Maintenant SB est dans $\{P\}$ avec B est divisible par P, cela signifie que le reste de Q est 0.

Inversement, si le reste est zéro, la formule (9) est satisfaite avec B divisible par P donc Q est dans $\sum_p$. □

En particulier $\sum_p$ ne contient pas S.

En effet, un résultat du Ritt (chapitre 2) montre que $\{P\} = \sum_p \cap \{P, S\}$, où $\sum_p$ est un diviseur premier essentiel de {P} et, dans la représentation de {P} comme intersection de diviseurs premiers, il y a précisément un idéal premier nommé $\sum_p$ qui ne contient pas S.

Définition 2 :

Soit $P(y) \in K\{y\}$ un polynôme différentiel irréductible. Une solution générale de l'équation $P(y) = 0$ est un zéro générique de $\sum_p$.

Une solution générale rationnelle de l'équation $P(y) = 0$ est une solution général de l'équation $P(y)=0$ de la forme suivante :

$$\hat{y} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0} \qquad (10)$$

Où a_i, b_j sont des constantes arbitraires sur l'ensemble Q.

Posons :

$\deg_x(\hat{y}) = \max\{n,m\}$ où $\hat{y}$ est définie comme dans la formule (10) et $a_n \neq 0$.

Soit P un polynôme de classe positive algébriquement irréductible.

Définition 3 :

Un zéro non singulier d'un polynôme différentiel P de l'anneau K{y}, est un zéro qui n'annule aucun séparant du polynôme P.

Chaque zéro non singulier de P est contenu dans la solution générale de P, les autres composantes de la variété de P sont constituées des zéros singuliers.

Si un polynôme G s'annule sur tout zéro non singulier de P, alors G est dans $\sum_p$. C'est une conséquence immédiate du fait qu'un zéro générique de $\sum_p$ est un zéro non singulier de P.

Comme conséquence du lemme 3.1, on a :

Lemme 2 :

Soit F $\in$ K{y} un polynôme différentiel irréductible avec une solution générique η. Alors pour un polynôme différentiel P, P (η) = 0 si, et seulement si, prem (P, F)=0.

Un résultat intéressant dû à Ritt montre que le lemme 2 chapitre 3 est valable même si les fonctions considérées sont les fonctions méromorphes dans C.

Illustration en analyse :

Il est question d'équations différentielles de l'analyse classique.

Et A un domaine dans le plan de la variable complexe x. Notre corps K est le corps des fonctions méromorphes dans A.

Etant donné un système$\sum$, ces zéros sont définis comme suite : soit B un domaine contenu dans A et soit $y_1(x)$, …,$y_n(x)$ des fonctions analytique dans B , qui annulent chaque polynôme différentiel de $\sum$ dans B. l'entité composée des $y_i(x)$ et B est le zéro analytique, ou un zéro de $\sum$.

Définition 4 :

La totalité des zéros analytiques de $\sum$ e appelé la variété restreinte de$\sum$.

Le cas où K consiste en les fonctions méromorphes et, où on utilise la variété restreinte, est appelé le cas analytique.

Théorème 1 :

Soit P(y) un polynôme différentiel irréductible non constant, alors la variété restreinte de$\sum_p$ n'est pas vide et un polynôme différentiel qui s'annule sur la variété restreinte de $\sum_p$ est contenu dans $\sum_p$.

cela vient du fait que le produit de G et du séparant vérifient la variété restreinte de P donc la variété restreinte de $\sum_p$, par le théorème 2.4 le produit est dans $\sum_p$ avec G est dans $\sum_p$.

La définition de solution générale de l'équation P(y) =0 est une famille de solutions avec k paramètres indépendants où k =ord (P(y)).la définition donnée par Ritt est plus précise, par le théorème 3 du chapitre 3 si l'équation P(y)=0 a une solution générale rationnelle, alors cette solution générale rationnelle a k paramètres indépendants.

III .2 Un critère pour l'existence des solutions générales rationnelles :

Soit le polynôme différentielle en y [18] suivant :

$$D_{n,m}(y) := \begin{vmatrix} \binom{n+1}{0} y_{n+1} & \binom{n+1}{1} y_{n} & \cdots & \binom{n+1}{m} y_{n+1-m} \\ \binom{n+2}{0} y_{n+2} & \binom{n+2}{1} y_{n+1} & \cdots & \binom{n+2}{m} y_{n+2-m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+m+1}{0} y_{n+m+1} & \binom{n+m+1}{1} y_{n+m} & \cdots & \binom{n+m+1}{m} y_{n+1} \end{vmatrix}$$

Où $\binom{n}{k}$ sont les cœfficients binomiaux .

Si m=0, Đ (n, 0)=y_{n+1}, dont les solutions sont $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_0$ où les c_i sont des constantes indépendantes (#).

Lemme 3 :

Les solutions $\hat{y}$ de $Đ_{n,\,m}(y) = 0$ ont la forme suivante :

$$\hat{y} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0} \qquad (11)$$

Où les a_i, bj sont des constantes arbitraires.

Preuve :

Raisonnons par récurrence sur m.

Si m=0, alors $Đ_{n,0}(y)= y_{n+1}$ dont les solutions sont bien de la forme (11) d'après (#).

Supposons que pour m <k+1 le théorème est vrai, maintenant montrons le théorème pour m =k+1 .

Si $Đ_{n,k}(\hat{y})=0$, par hypothèse de récurrence on a le résultat. Maintenant on suppose que $Đ_{n,k}(\hat{y}) \neq 0$ comme $Đ_{n,k+1}(\hat{y})=0$, alors il existe $Q_0,Q_1,\ldots,Q_{k+1}$ dans K (non tous nuls) tels que :

$$\begin{pmatrix} \binom{n+1}{0}\hat{y}_{n+1} & \binom{n+1}{1}\hat{y}_{n} & \cdots & \binom{n+1}{k+1}\hat{y}_{n-k} \\ \binom{n+2}{0}\hat{y}_{n+2} & \binom{n+2}{1}\hat{y}_{n+1} & \cdots & \binom{n+2}{k+1}\hat{y}_{n+1-k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \binom{n+k+2}{0}\hat{y}_{n+k+2} & \binom{n+k+2}{1}\hat{y}_{n+k+1} & \cdots & \binom{n+k+2}{k+1}\hat{y}_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_{K+1} \end{pmatrix} = 0$$

Supposons que $Q_{k+1} = 0$ (respectivement 1),alors:

$$\sum_{i=0}^{k+1}\binom{j}{i}\hat{y}_{j-i}Q_i = 0 \quad \text{Pour j =n+1,…, n+k+2.} \qquad (\#)$$

En prenant la différentielle de (#), on a :

$$\left(\sum_{i=0}^{k+1}\binom{j}{i}\hat{y}_{j-i}Q_i\right)' = \sum_{i=0}^{k+1}\binom{j}{i}\hat{y}_{j-i+1}Q_i + \sum_{i=0}^{k+1}\binom{j}{i}\hat{y}_{j-i}Q_i' = 0 \qquad (12).$$

La décomposition des coefficients binomiaux $\binom{j+1}{i} = \binom{j}{i} + \binom{j}{i-1}$,implique:

$$\sum_{i=0}^{k+1} \binom{j+1}{i} \hat{y}_{j-i+1} Q_i = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{j}{i} \hat{y}_{j-i+1} Q_i + \sum_{i=0}^{k} \binom{j}{i} \hat{y}_{j-i} Q_{i+1} = 0 \qquad (13).$$

Alors la différence (12)-(13) implique que

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{j}{i} \hat{y}_{j-i} (Q'_i - Q_{i+1}) + Q'_{k+1} = 0 \text{, pour j=n+1,…,n+k+1.}$$

$Q'_{k+1} = 0$, implique :

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{j}{i} \hat{y}_{j-i} (Q'_i - Q_{i+1}) = 0 \text{ pour j=n+1,…, n+k+1}$$

qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \binom{n+1}{0}\hat{y}_{n+1} & \binom{n+1}{1}\hat{y}_{n} & \cdots & \binom{n+1}{k}\hat{y}_{n-k} \\ \binom{n+2}{0}\hat{y}_{n+2} & \binom{n+2}{1}\hat{y}_{n+1} & \cdots & \binom{n+2}{k}\hat{y}_{n+1-k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \binom{n+k+1}{0}\hat{y}_{n+k+1} & \binom{n+k+1}{1}\hat{y}_{n+k} & \cdots & \binom{n+k+1}{k}\hat{y}_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q'_0 - Q_1 \\ Q'_1 - Q_2 \\ \vdots \\ Q'_k - Q_{k+1} \end{pmatrix} = 0$$

Comme $Đ_{n,k}(\hat{y}) \neq 0$, alors $Q_{i+1} = Q'_i$ pour i=0,…,k , donc

$Q'_0 = Q_1, et Q_0^{(2)} = Q_2, ..., Q_0^{(k+1)} = Q_{k+1} = 0$ ce qui implique $Q_0 = b_{k+1} x^{k+1} + \ldots + b_0$ où les b_i

sont des constantes arbitraires et $b_{k+1} = 0$ ou $\frac{1}{(k+1)!}$ (car $Q_{k+1} = 0$ ou 1) alors,

$$\sum_{i=0}^{k+1}\binom{n+1}{i}\hat{y}_{n-i+1}Q_i = \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\hat{y}_{n-i+1}Q_i = 0\,,$$

ce qui implique $(\hat{y}Q_0)^{(n+1)} = 0$

D'où $$\hat{y} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{Q_0}$$

Où les a_i sont des constants arbitraires. □

Par le lemme 3 du chapitre3, le théorème suivant est prouvé :

Théorème 2 :

Soit F(y) un polynôme différentiel irréductible, alors l'équation F(y)=0 a une solution générale rationnelle ŷ si, et seulement si, il existe des entiers non négatifs n et m tel que prem ($Đ_{n,m}$(y), F(y)) =0.

Preuve :

Soit $\hat{y} = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une solution générale rationnelle de F(y) =0.

Soit n ≥ deg(P(x)) et m ≥ deg($Q(x)$) ,alors par les lemmes 3.2 et 3.3 :

$Đ_{n,m}$ (ŷ) =0 implique que prem ($Đ_{n,m}$(y), F(y)) =0.

par le lemme 1 chapitre 3 , prem($Đ_{n,m}$(y), F(y)) =0 implique que $Đ_{n,m}(y) \in \sum_F$ .si m est le plus petit entier tel que : $Đ_{n,m}(y) \in \sum_F$ alors tous les éléments dans la variété restreinte de$\sum_F$ sont de la forme :

$$\overline{y} = \frac{\overline{a}_n x^n + \overline{a}_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \overline{a}_0}{\overline{b}_m x^m + \overline{b}_{m-1}x^{m-1} + .. + \overline{b}_0}$$

En particulier, le zéro générique de $\sum_F$ a la forme suivante :

$$\hat{y} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}\quad .$$

avec $b_m \neq 0$, sinon l'équation $Đ_{n, m-1}(\hat{y}) = 0$ qui implique que $Đ_{n, m-1}(y) \in \Sigma_F$, qui est une contradiction, comme le zéro générique a la forme (11), la preuve est complète.□

III.3 Le nombre de constantes indépendantes :

Dans ce qui suit, il est prouver que les cœfficients de la solution générale rationnelle de l'équation F(y) =0 dépendent de k = ord (F(y)) paramètres indépendants.

Premièrement, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4 :

L'application Ŧ définie ci -dessous est birationnelle algébrique se conférer à **[18] :**

$$Ŧ : K^{n+m+1} \longrightarrow K^{n+m+1}$$

$$(a_0,\ldots, a_n, b_0,\ldots,b_{m-1}) \longrightarrow (y, y_1,\ldots,y_{n+m}) .$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{P(x)}{Q(x)} \\ y_1=\left(\dfrac{p(x)}{q(x)}\right)' \\ y_2=\left(\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right)'' \\ . \\ . \\ y_{n+m}=\left(\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right)^{(n+m)} \end{cases}$$

Où :

$$p(x)= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$$

$$Q(x)= x^m +b_{m-1}x^{m-1} +\ldots+b_0$$

Dans la transformation ci dessus, premièrement, on regarde a_i et b_j comme des constantes arbitraires, on obtient les dérivées de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, par suit on considère a_i et b_j comme des indéterminées sur K.

Preuve :

Il est immédiat que les y_i sont des fonctions rationnelles en a_i et b_j sur K, prouvons l'inverse maintenant.

La transformation au dessus est équivalente aux relations suivantes :

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}y_{k-i}Q^{(i)} = P^{(k)} \quad \text{Pour k=0, 1,…, n} \qquad (14).$$

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{k}{i}y_{k-i}Q^{(i)} = 0 \quad \text{Pour k= n+1, n+2,…,n+m.} \qquad (15)$$

Où $P^{(i)}$ et $Q^{(j)}$ signifient la i$^{\text{éme}}$ et j$^{\text{éme}}$ dérivée de Pet Q respectivement.

Soit $\overline{Q} = Q - x^m$; Alors la relation (15) devient :

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{k}{i}y_{k-i}Q^{(i)} = \sum_{i=0}^{m-1}\binom{k}{i}y_{k-i}\overline{Q}^{(i)} + \sum_{i=0}^{m}\binom{k}{i}(x^m)_i\, y_{k-i} = 0 \ .$$

Ca implique que:

$$\begin{pmatrix} \binom{n+1}{0}y_{n+1} & \binom{n+1}{1}y_{n} & \cdots & \binom{n+1}{m-1}y_{n+2-m} \\ \binom{n+2}{0}y_{n+2} & \binom{n+2}{1}y_{n+1} & \cdots & \binom{n+2}{m-1}y_{n+3-m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+m}{0}y_{n+m} & \binom{n+m}{1}y_{n+m-1} & \cdots & \binom{n+m}{m-1}y_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{Q} \\ \overline{Q}^{(1)} \\ \vdots \\ \overline{Q}^{(m-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{m}\binom{n+1}{i}(x^m)_i\, y_{n+1-i} \\ \sum_{i=0}^{m}\binom{n+2}{i}(x^m)_i\, y_{n+2-i} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{m}\binom{n+m}{i}(x^m)_i\, y_{n+m-i} \end{pmatrix}$$

Le principe de Cramer, implique que les $\overline{Q}^{(i)}$ sont des fonctions rationnelles en y, $y_1,\ldots,y_{n+m}$

Puisque

$$\overline{Q} = b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} \ldots + b_0$$

$$\overline{Q}^{(1)} = (m-1)\, b_{m-1}x^{m-2} + (m-2)\, b_{m-2}x^{m-3} \ldots + b_1$$

.

.

$$\overline{Q}^{(m-1)} = (m-1)!\, b_{m-1}.$$

Les b_j sont des fonctions rationnelles en y, $y_1,\ldots, y_{n+m}$ sur K.

En remplaçant $Q^{(i)}$ dans la formule (14), on peut voir les a_i comme des fonctions rationnelles en y, $y_1,\ldots, y_{n+m}$ sur K.

Théorème 3 :

Soit F(y) un polynôme différentiel d'ordre k. Si l'équation F(y) =0 a une solution générale rationnelle de la forme (11), alors les a_i et b_j dépendent de k paramètres indépendants.

Preuve :

Soit ŷ un zéro générique de $\sum_F$ de la forme (11).

Soit Y = $(a_0,\ldots, a_n, b_0,\ldots, b_{m-1})$ .Supposons que $\dim_Q$ (Y)=d .Alors on a besoin de montrer que d=k, comme Ŧ (définie comme dans le lemme 3.5) est birationnelle, on a :

d= $\dim_Q$ (Y)= $\dim_K$ (Y)= $\dim_K$ (Ŧ(Y)).

Maintenant , considérons $\dim_K$ (Ŧ(Y)) , soit $F^{(i)}$(y) la i éme dérivée de F(y) pour i=0,…,n+m et S(y) le séparant de F(y) .Considérons $F^{(i)}$(y) et S(y) comme des polynômes algébriques en $K[y,y_1,\ldots,y_{n+m}]$

Qu'on note $F^{(i)}(y, y_1,\ldots, y_{n+m})$ et $S(y, y_1,\ldots,y_{n+m})$ .Alors on a :

$$F^{(i)}(Ŧ(Y)) =0 \text{ et } S(Ŧ(Y)) \neq 0.$$

Soit Ŧ(Y) = $(\eta_0, \eta_1,\ldots, \eta_{n+m})$. Comme les initiaux de $F^{(i)}(y,y_1,\ldots,y_{n+m})$ pour i>0 sont les $S(y,y_1,\ldots,y_{n+m})$ et y_{k+i} est linéaire dans $F^{(i)}(y,y_1,\ldots,y_{n+m})$, on a

$$. \qquad \eta_{k+i} = (F^{(i)} - Sy_{k+i}) (Ŧ(Y)) / S(Ŧ(Y)) \qquad .$$

Donc d≤k.

Dans ce qui suit , on prouvera que $\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_{k-1}$ sont algébriquement indépendants sur K, .autrement il existe un polynôme $G(y,y_1,\ldots,y_{k-1})$ dans $K[y,y_1,\ldots,y_{k-1}]$ tel que $G(\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_{k-1})=0$. Si on regarde $G(y,y_1,\ldots,y_{k-1})$ comme polynôme différentiel G(y) , $G(\hat{y}) = G(\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_{k-1})=0$ ce qui implique que $G(y) \in \sum_F$ .Autrement dit prem(G(y) , F(y))=0, d'où une contradiction ,donc d=k . □

Corollaire 2 :

Le théorème 3 chapitre 3 montre que la définition de solutions générales rationnelles donnée par Ritt est équivalente à la définition dans le sens usuel si les solutions générales sont de types rationnelles.

Idéal implicite d'un ensemble d'équations rationnelles paramétriques d'un polynôme P :

Pour plus de détails se conféré à [2, 3]

Soit $z_0,\ldots, z_{n+m}$ des indéterminées sur une extension E de K.

Pour des polynômes non nuls $P_0, P_1,\ldots, P_{n+m}$, $Q_0,Q_1,\ldots,Q_{n+m}$ dans K $[z_0,\ldots, z_{n+m}]$,l'ensemble des équations suivant :

$$a_0 = \frac{P_0}{Q_0}, a_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \ldots, a_{n+m} = \frac{P_{n+m}}{Q_{n+m}} \qquad \ldots (3,1)$$

est l'ensemble des équations rationnelles paramétriques. en supposant que les P_i , Q_i ne sont pas tous dans Q et pgcd(P_i , Q_i) = 1.

L'image de (3.1) dans E^n est

$$IM(P_0,\ldots,P_{n+m},Q_0,\ldots,Q_{n+m}) = \left\{(a_0,a_1,\ldots,a_{n+m}) / \exists t \in E^m : a_i = \frac{P_i}{Q_i}\right\}.$$

Dans [17] il est prouvé que IM(P ,Q) est une quasi variété, ie on peut trouver des ensembles de polynômes PS_i et des polynômes d_i tel que

$$IM(P,Q) = \bigcup_i (zéro(PS_i) - zéro(\{d_i\}))$$

Définition 5 :

Soit V une variété algébrique irréductible de dimension d>0 dans E^n. Les équations paramétriques de la forme (3.1) sont appelées équations paramétriques de V si

(1) IM(P, Q) $\subset$ V

et

(2) V-IM(P, Q) est contenu dans un ensemble algébrique de dimension inférieure à d.

Alors X.S, Gao prouve le théorème suivant [3] :

Théorème :

Les équations de la forme (3.1) sont les équations paramétriques d'une variété irréductible dont la dimension est égale au degré transcendantale de K(P_1/Q_1, P_2/Q_2,…,P_3/Q_3) sur K.

Preuve : (se conférer à [3]).□

En posant

$$\mathbf{ID(Y)}=\{P \in K[z_0, z_1,..., z_{n+m}] / P(Y) = 0\}$$

Où Y est défini comme dans la preuve du théorème 3 chapitre3

V=Zéro (ID(Y)) est une variété irréductible dont les équations paramétriques sont de la forme (3.1).

Proposition 1 :

IĐ(Y) est un idéal premier appelé l'idéal implicite de l'ensemble des équations rationnelles paramétriques.

L'idéal IĐ(Y) est l'idéal dont les zéros sont les coefficients de la solution générale rationnelle de l'équation différentielle P(y)=0

-Soit Ą une chaîne ascendante irréductible de IĐ(Y), alors Ą peut être calculer explicitement avec la méthode des ensembles caractéristiques .Soit $Z=\Sigma_{i=0}^{n+m} z_i x^i$, en remplaçant y par z dans F(y), soit PS l'ensemble des cœfficients des puissances de x dans F (z) qui est un ensemble de polynômes en z_i. Par le théorème 2.1, on obtient la décomposition suivante de l'ensemble des zéros PS :

$$\textbf{Zero (PS)} = \bigcup_i zéro(sat(A_i)).$$

Où les A_i sont des chaînes ascendantes irréductibles et chaque Sat (A_i) n'inclus aucun autre saturé ; alors on a le théorème suivant :

Théorème 4 :

Supposons que l'équation F(y)=0 possède une solution générale rationnelle de la forme (10), alors il existe un unique A_{i0} dans la décomposition ci dessus tel que Sat (A_{i0})= IĐ(Y), de plus tout Sat (A_i) excepté Sat (A_{i0}) satisfai la relation dim_Q (Sat (A_i) <dim_Q(IĐ(Y)).

Preuve :

Soit ord (F(y))=k, alors dim_Q (IĐ(Y))=k.

Premièrement, on montre que pour chaque i, dim_Q (Sat (A_i) $\leq$k.

Soit $Y_i= (\zeta_{i,0},\ldots\zeta_{i,n},\eta_{i,0,\ldots,}\ \eta_{i,m-1})$ un zéro générique de Sat (A_i) et

$$\Xi_i= \zeta_{i,n}\, x^n +\ldots+ \zeta_{i,0}\ /x^m + \eta_{i,m-1}\, x^{m-1} +\ldots+ \eta_{i,0}\,.$$

Soit $\Sigma_i = \{P\in k\{y\}\ /P\ (\Xi_i) =0\}$,alors les Σ_i sont des idéaux premiers différentiels et Ξ_i sont leurs zéro génériques.

A partir du théorème de Ritt p.32 ,on sait qu'il existe des polynômes différentiels $G_i(y)\in K\{y\}$tel que les Σ_i soient des solutions générales de G_i (y) .Posons $\Sigma_i =\Sigma_{Gi}$ (Σ_{Gi} comme dans (1)), le théorème 3 chapitre 3 implique que dim (Sat (A_i)) =ord (G_i (y)) et comme $\Xi_i \in$Zéro (PS),F(Ξ_i)=0, ce qui implique que F(y)$\in \Sigma_i$, d'où ord G_i (y)$\leq$k .De là il vient que, dim_Q (Sat (A_i) $\leq$k ; comme Y$\in$Zéro(PS) ,il existe un A_{i0} tel que Y$\in$Zéro(Sat (A_{i0})).On va prouver que Sat (A_{i0})= IĐ(Y) .Comme Y est un Zéro générique de IĐ(Y), Sat (A_{i0}) $\subset$ IĐ(Y),d'où dim_Q Sat ($A_{i\,0}$) =k, avec Sat ($A_{i\,0}$)= IĐ(Y).S'il existe un autre Sat (A_j) tel que dim Sat (A_j)=k ,alors ord (G_j(y))=ord (G_{i0}(y)=k qui implique que F(y)=θ et $G_k(y)=\lambda G_{i0}(y)$ où $\theta,\lambda\in$K non tous nul d'où $\Sigma_{i0} =\Sigma_j =\Sigma_F$.

Soit P ($z_0,\ldots, z_{n+m}$) $\in$ Sat (A_j), alors :

P ($Ŧ^{-1}$(y, $y_1,\ldots, y_{n+m}$) $\in$ K{y} où Ŧ est définie comme dans le théorème 3 chapitre 3, alors :

$P(Ŧ^{-1}(\Xi_j)) = P(Y_k) = 0$ qui équivaut à $P(Ŧ^{-1}(y, y_1,\ldots,y_{n+m}) \in \Sigma_j = \Sigma_{i0}$

Donc $P(Ŧ^{-1}(\Xi_{i0}) = P(Y_{i0}) = 0$

Et $P(z_0,\ldots, z_n) \in \mathrm{Sat}(A_{i0})$.

D'où Sat (A_k)= Sat (A_{i0}) ; comme Sat(A_i) n'inclus aucun autre saturé , la preuve est complète.□

Les cœfficients de l'équation F(y)=0n dans les sections ci dessus et dans cette section sont dans K et l'ordre de F(y) est arbitraire. Dans la section suivante, on assumera toujours que l'équation F(y) a des cœfficients constants et est d'ordre 1.

Chapitre 4 : Solutions générales rationnelles d'équations différentielles ordinaires du 1er ordre :

Dans ce chapitre, le polynôme différentiel F(y) est un polynôme différentiel non nul irréductible du premier ordre à cœfficients constants dans Q.
une solution $\bar{y}$ de l'équation F(y) =0 est non triviale si $\deg_x(\bar{y})>0$.

***Lemme 1** :*

Soit $\bar{y} = \dfrac{\bar{a}_n x^n + \ldots + \bar{a}_0}{x^m + \ldots + \bar{b}_0}$ *une solution non triviale de l'équation F(y)=0, où* $\bar{a}_i, \bar{b}_j \in Q \; et \; \bar{a}_n \neq 0$.
Alors

$$\hat{y} = \frac{\bar{a}_n (x+c)^n + \ldots + \bar{a}_0}{(x+c)^m + \ldots + \bar{b}_0}$$

est une solution rationnelle de l'équation F(y)=0, où c est une constante arbitraire .

Preuve :

Montrons que $\hat{y}$ est encore un zéro de Σ_F.

Pour un polynôme G(y) $\in$ K{y} satisfaisant G ($\hat{y}$)=0.

soit R(y)= prem(G(y), F(y)),alors R($\hat{y}$)=0.Supposons que R(y)≠ 0, comme F(y) est irréductible et deg(R(y),y_1)**<**deg(F(y), y_1) , alors il existe deux polynômes différentielles P(y), Q(y) $\in$ K{y} tel que :

P(y) F(y) +Q(y) R(y) $\in$ K{y} et P(y) F(y) +Q(y) R(y) $\neq$ 0.
Ainsi (PF + QR) ($\hat{y}$)=0, parce que c est une constante arbitraire qui est transcendante sur K, on a P(y) F(y) +Q(y) R(y)=0 contradiction.

D'où l'équation R(y)=0, ce qui signifie que G(y) $\in \Sigma_F$ et $\hat{y}$ est un zéro générique de Σ_F. □

Le lemme ci dessus réduit le problème à trouver une solution générale rationnelle au problème de trouver une solution rationnelle non triviale.

Dans ce qui suit, on montrera comment trouver une solution rationnelle non triviale.

IV.1- paramétrisation rationnelle des courbes algébriques :

Dans cette partie, j'introduirai quelques concepts de bases concernant la paramétrisation d'une courbe algébrique plane.

Soit F(y, z) un polynôme irréductible dans l'anneau Q[y, z].

Définition 1 *:*

(y, z) = (r (t), s (t)) est une paramétrisation rationnelle de l'équation F(y, z) = 0 si

F(r (t), s (t)) =0 où r (t), s (t) ∈Q (t) et non tous dans Q.

Une paramétrisation (r (t), s (t)) est propre si Q (r (t), s (t)) = Q (t).

Le théorème de Luroth (voir la référence [16]) garantie toujours l'existence d'une paramétrisation propre si la paramétrisation existe.

Une paramétrisation propre a les propriétés suivantes [8] :

1. $\deg_t$ (r (t)) = deg (F, z)
2. $\deg_t$ (s (t)) = deg (F, y)
3. Si (p (t), q (t)) est une autre paramétrisation de F(y, z), alors il existe $f(t) = \dfrac{at+b}{ct+d}$

tel que : p (t) = r ($f(t)$) et q(t) = s($f(t)$).

IV.2- Equations différentielles ordinaires du premier ordre à cœfficients constants :

Comme le polynôme F(y) est d'ordre1 et est à cœfficients constants, on peut le considérer comme un polynôme algébrique en y, y_1.

F(y) est considérer comme un polynôme algébrique en y, y_1 qui définit une courbe algébrique.

Si $\bar{y}$ = r(x) est une solution rationnelle non triviale de l'équation F(y) = 0, alors (r(x), r'(x)) est une paramétrisation de l'équation F(y, y_1) = 0. De plus, on montrera que (r(x), r'(x)) est une paramétrisation propre de l'équation F(y, y_1) = 0.

Lemme 2 :

Soit $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} \notin Q$ *une fonction rationnelle en x tel que : p.g.c.d (P(x), Q(x)) = 1.*

Alors :

$$\boldsymbol{Q}\ (f(x)) \neq \boldsymbol{Q}\ (f'(x))$$

Preuve :

Si $f'(x) \in$Q alors le résultat est vrai, sinon comme $f(x), f'(x)$ sont transcendantales sur Q, si Q ($f(x)$) = Q ($f'(x)$) par le théorème de la section (63) du [35], on a :

$$f(x) = \frac{af'(x)+b}{cf'(x)+d} \qquad \text{où a, b, c, d } \in \text{Q}$$

Et alors

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a(p'(x)q(x)-p(x)q'(x))+bq(x)^2}{c(p'(x)q(x)-p(x)q'(x))+dq(x)^2} \quad .$$

Ce qui implique que $q(x)$ divise $cp(x)q'(x)$ car le p.g.c.d ($p(x), q(x)) = 1$. Ainsi c = 0 ou $q'(x)$ =0, ce qui implique que $f(x) = (\frac{a}{d})f'(x) + \frac{b}{d}$ ou $p(x) = c_1 p'(x) + c_2$, avec c_1, $c_2 \in$Q.

Ce qui est impossible, car $f(x)$ est une fonction rationnelle et $p(x)$ est un polynôme non constant si $q(x) \in$Q.□

Théorème 1 :

Soit la fonction rationnelle en x, $f(x)$ ***définie comme dans le lemme 2 chapitre4, alors :***

$$\boldsymbol{Q}(f(x), f'(x)) = \boldsymbol{Q(x)}.$$

Preuve :

Par le théorème de Luroth (voir [16]), il existe $g(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ tel que

$Q(f(x), f'(x)) = Q(g(x))$,où $u(x), v(x) \in Q[x]$, p.g.c.d($u(x), v(x)$) = 1 et deg($u(x), v(x)$=1 et deg(u) > deg(v). Alors on a :

$$f(x)=\frac{p_1(g(x))}{q_1(g(x))}\ ,\ f'(x)=\frac{p_2(g(x))}{q_2(g(x))}=\frac{g'(x)(p'_1 q_1 - p_1 q'_1)}{q_1^{\ 2}}.$$

Ce qui implique que :

$$g'(x) \in Q(g(x)).$$

Si $g'(x) \notin Q$, on a :

$$[Q (x) : Q (g'(x))] = [Q (x) : Q (g(x))]\ \ [Q (g(x)) : Q (g'(x))]$$

Cependant, on a

$$[Q (x) : Q (g(x))] = \deg(x) \text{ et } [Q (x) : Q (g'(x))] \leq 2 \deg(x)-1$$

d'où :

$$[Q (x) : Q (g(x))] = [Q (x) : Q (g'(x))].$$

Il vient donc que Q (g(x)) = Q (g'(x)), qui est une contradiction par le lemme 4.2, d'où : g'(x)∈Q, ce qui implique que g(x) = ax+b, d'où le résultat.□

Lemme 3 :

Soit le polynôme f(x) définie comme dans le lemme1chapitre 4, Alors :

$$\deg_x(f(x))-1 \leq \deg_x(f'(x)) \leq 2\deg_x(f(x)).$$

Preuve :

L'inégalité $\deg_x(f'(x)) \leq 2\deg_x(f(x))$ est satisfaite.

Si q(x) est un polynôme constant sur IQ

alors

$$\deg_x\left(\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)'\right)=\deg_x\left(\frac{p(x)}{q(x)}-1\right).$$

On suppose que q(x) $\notin$ Q.

Soit $q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}...(x-a_r)^{\alpha_r}$. Alors :

$$\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)=\frac{p'q-q'p}{q^2}=\frac{p'\prod_i (x-a_i)-p\left(\sum_{i=1}^{r}\prod_{j\neq i}\alpha_i(x-a_j)\right)}{(x-a_1)^{\alpha_1+1}(x-a_2)^{\alpha_2+1}...(x-a_r)^{\alpha_r+1}}.$$

Les polynômes :

$$p'\prod_i (x-a_i)-p\left(\sum_{i=1}^{r}\prod_{j\neq i}\alpha_i(x-a_j)\right) \quad \text{et} \quad (x-a_1)^{\alpha_1+1}(x-a_2)^{\alpha_2+1}...(x-a_r)^{\alpha_r+1}$$

n'ont aucun diviseur en commun , alors :

$$\deg_x\left(\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)'\right)=\max\{\deg(p)+r-1,\deg(q)+r\}>\deg_x\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)-1. \square$$

Le théorème1chapitre 4 implique que $(\bar{y},\bar{y}_1)$ est une paramétrisation de $F(y, y_1) = 0$ si $\bar{y}$ est une solution rationnelle non triviale de F(y) = 0. Par les propriétés de la paramétrisation propre et du lemme 3 chapitre 4, le théorème suivant est prouvé :

Théorème 2 :

Si l'équation F(y) = 0 possède une solution générale rationnelle $\hat{y}$, alors :

$$\begin{cases}\deg_x(\hat{y})=\deg(F(y),y_1)\\ \deg(F(y),y_1)-1\leq\deg(F(y),y)\leq 2\deg(F(y),y_1).\end{cases}$$

Par le théorème 2 chapitre 3 et le théorème 2 chapitre 4, on peut décider si l'équation F(y) =0 a une solution générale rationnelle comme suit :

Soit $d = \deg(F(y), y_1)$

Alors l'équation F(y) = 0 a une solution générale rationnelle si, et seulement si,

prem $(D_{d,d}$, F(y))= 0.Il est possible de trouver une solution rationnelle de l'équation F(y) = 0 comme suit :

En substituant une fonction rationnelle arbitraire de degré d (appelons la (2)) dans F(y) = 0, on a :

$F(y)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, où P(x) et Q(x) sont des polynômes en x dont les cœfficients sont polynomiaux en a_i, b_j .

Soit PS et DS les ensembles des cœfficients de P(x) et Q(x) respectivement. Alors (2) est une solution rationnelle de F(y) = 0 si, et seulement si, a_i ,b_j sont dans $Zéro(PS/DS)$.

Cette méthode n'est pas efficace pour un d grand et vu qu'elle implique la solution d'un système d'équations algébrique à 2d variables.

On donnera un algorithme plus efficace ci dessous.

Pour la propriété 3 de la paramétrisation propre, on peut construire une solution rationnelle non triviale de F(y) = 0 pour une paramétrisation propre de $F(y, y_1) = 0$.

Théorème 3 :

Soit $y = r(x)$, $y_1 = s(x)$ une paramétrisation rationnelle propre de l'équation $F(y, y_1) = 0$, où $r(x), s(x) \in Q(x)$.

Alors l'équation F(y) = 0 a une solution générale rationnelle si, et seulement si, les relations suivantes sont satisfaites :

$$ar(x)' = s(x) \quad \textbf{ou} \quad a(x-b)^2 r(x)' = s(x). \quad \textbf{(16)}$$

où a, b $\in Q$ et $a \neq 0$.

Si l'une des relations ci dessus est vraie, alors en remplaçant x par a(x+c) ou b-$\dfrac{1}{a(x+c)}$ dans y = r(x), on obtient la solution générale rationnelle de l'équation F(y) = 0, où c est une constante arbitraire.

Preuve :

Soit $\bar{y} = q(x)$ une solution rationnelle non triviale de l'équation F(y) = 0 . Par le théorème 1 chapitre 4, (q (x) , $q(x)'$) est toujours une paramétrisation propre de $F(y,y_1) = 0$, donc

il existe $f(x) = \dfrac{c_1 x + c_2}{c_3 x + c_4}$, avec $c_1c_4 - c_2c_3 \neq 0$, tel que :

$$q(x) = r(f(x)),\ q(x)' = s(f(x)) = (r(f(x))' = f'(x)r'(f(x)) \qquad \ldots(17)$$

si $c_3 = 0$,alors $f'(x) = \dfrac{c_1}{c_4}$. Par la formule (17) , alors :

$$s(f(x)) = ar'(f(x)), \text{ où } f(x) = ax+c,\ a = \frac{c_1}{c_4}, c = \frac{c_2}{c_4}.$$

Sur le corps des nombres complexes, soit s(x) = $s_0 \prod_{i=1}^{m} (x - x_i)$ et $ar'(x) = t_0 \prod_{i=1}^{m} (x - y_i)$,

où s_0 , $t_0 \in C$. Alors $\qquad s(f(x)) = s_0 \prod_{i=1}^{m} (ax + c - x_i)$

$$= ar'(f(x))$$
$$= t_0 \prod_{i=1}^{m} (ax + c - y_i).$$

Il est clair que s(x) et a$r'(x)$ doivent avoir les même racines, d'où s(x) = a$r'(x)$.

Si $c_3 \neq 0$, $f(x) = \dfrac{c_1}{c_3 + \dfrac{c_2c_3 - c_1c_4}{c_3(c_3x - x_4)}}$.alors

$$f(x) = \frac{(c_1c_4 - c_2c_3)}{(c_3x + c_4)^2} = \frac{c_3^{\,2}(f(x) - \frac{c_1}{c_3})^2}{c_1c_4 - c_2c_3}.$$

Comme conséquence de (17), $a(x-b)^2\ r'(x) = s(x)$

Où : $a = \dfrac{c_3^{\,2}}{c_1c_4 - c_2c_3}$ et $b = \dfrac{c_1}{c_3}$.

Dans les deux cas, on obtient une solution rationnelle de l'équation F(y) = 0 tel que q(x) = r(f(x)) .

Par le lemme1 chapitre4, la solution générale de l'équation F(y) = 0 peut être obtenu en remplaçant x par a(x+c).

L'autre sens du théorème est facile. Si la formule (16) est satisfaite, soit q(x) = r (f(x)). la formule (17) implique $q(x)' = (r(f(x))' = s(f(x))$, qui implique que $F(q(x), q(x)') = 0$.

D'où q(x) est une solution rationnelle de l'équation F(y) = 0. □

IV-3-L'algorithme :

Algorithme : L'entrée est un polynôme différentiel irréductible F(y) du premier ordre a cœfficients constants dans Q. La sortie est une solution générale rationnelle de l'équation F(y)=0 si elle existe.

1. soit d=deg(F(y),y_1) et e = deg(f(y),y). Si e<d-1 ou e>2d, Alors par le théorème 2 chapitre 4, l'algorithme est terminée et l'équation F(y)=0 n'a pas de solutions générales rationnelles.

2. Calculer une parametrisation propre $(\bar{y}(x), \bar{y}_1(x))$ de F(y, y_1) avec les algorithmes dans [1, 3, 7, 8].

3. Soit $A = \frac{\bar{y}_1(x)}{\bar{y}(x)'}$, par le théorème 3 chapitre 4

(a) Si A=a $\in$Q, alors en remplaçant x par a(x+c) dans $\bar{y}$, on obtient une solution générale rationnelle $\hat{y} = \bar{y}(a(x+c))$ pour l'équation F(y)=0.

(b) Si A=a(x-b)^2 pour a, b $\in$Q, alors en remplaçant x par $\frac{ab(x+c)-1}{a(x+c)}$ dans $\bar{y}$, on obtient la solution générale rationnelle $\hat{y} = \bar{y}\left(\frac{ab(x+c)-1}{a(x+c)}\right)$.

(c) Autrement, par le théorème 4 chapitre 4, l'algorithme est terminé et l'équation F(y)=0 n'a pas de solutions générales rationnelles.

Par le théorème 3 chapitre 4, l'algorithme ci dessus est correct. La complexité de l'algorithme au dessus dépend entièrement de la complexité de l'algorithme de parametrisation rationnelle [7, 8].

Exemple :

Soit l'équation

$$F(y) = y_1^3 + 4\, y_1^2 + (27y^2 + 4)y_1 + 27y^4$$

1. en posant d=deg(F(y),y_1) et e = deg(f(y),y) alors d=3, e=4 et la condition du théorème 2 chapitre4 d-1<e<2d est satisfaite.
2. l'équation F(y, y_1)=0 a trois points doubles : (0,-2), $(\frac{2\sqrt{15}i}{9}, \frac{4}{3})$, $(-\frac{2\sqrt{15}i}{9}, \frac{4}{3})$. D'après l'algorithme de paramétrisation rationnelle [7,8] on obtient la parametrisation :

$$\begin{cases} y = 216x^3 + 6x \\ y_1 = -3888x^4 - 36x^2 \end{cases}$$

qui implique $y' = 648x^2 + 6$, alors en posant :

$$A = \frac{y_1}{y'} = -6x^2 \text{ le théorème 3 chapitre 4 .}$$

Implique a= -6, b=0.

D'où

$$\hat{y} = 216\left(\frac{1}{6(x+c)}\right)^3 + 6\left(\frac{1}{6(x+c)}\right) = \frac{(x+c)^2 + 1}{(x+c)^3}$$

est la solution générale rationnelle de l'équation F(y)=0

V- Conclusion :

Il serait intéressant d'étudier la paramétrisation des variétés différentielles algébriques planes et de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe différentielle F(y, z)=0 ait une paramétrisation rationnelle

Références

[1]-Abhyankar, S. S and Bajaj, C. Automatic parametrization of rational curves and Surfaces, III. Algebraic plane curves, Comp. Aided Geo. Design, 5, 309-321, 1988.

[2]-Gao, X. S; Implicitization for differential rational parametric equations, J. of symbolic Computation, 811_824,36(5), 2003.

[3]- Gao, X. S and Chou, On the normal parametrization of Curves and Surfaces, the international Journal of Computational Geometry and applications, 1, 125-136, 1991.

[4]-Kolchin, E.R; Differential Algebra and Algebraic Groups, Academic Press, New York, 1950.

[5]-Kovacic, J.J; An Algorithm for solving Second order Linear Homogeneous Differential Equations, J.of symbolic Computation, 31, 691-719, 2001.

[6]-Ritt, J.F. Differntial Algebra, Amer. Math. Sco. Colloquim, New York, 1950.

[7]-Sendra, J.R. and Winkler, F; Symbolic Parametrization curves, J. of Symbolic Computation, 12, 607-632, 1991.

[8]-Sendra, J.R. and Winkler, F; Tracing Index of Rational Curve Parametrization, CAGD, 18(8), 771-795, 2001.

[9]-Singer, M.F; Ulmer, F; Liouvillian Solutions Of linear Differential Equations With Liouvillian Coeeficients. J.of Symbolic Computation, 11, 251-273, 1991.

[10]-Ulmer, F; Calmet, J; On liouvillian Solutions of Homogeneous Linear Differential Equations, Proc. Issac 1990, 236-243, ACM Press, 1990.

[11]-Irving Kaplansky ; An Introduction to Differential Algebra . Publications de L'institut De Mathématique de L'université De Nancago.V. (University of Chicago).

[12]-Daniel Bertrand; Cours de 3° Cycle, Groupes Algebriques Linéaires et Théorie de Galois Différentielle. Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Premier semestre 1985-1986.

[13]- Rish, R.H ; The Problem of Integration In Finite Terms, Trans. AMS, 139, 167-189, 1969.

[14]-Li, Z.M. And Shwarz, F. Rational Solutions of Riccati – like Partial Differential Equations, J. of Symbolic Computation, 31, 691-719, 2001.
[15]-Wu, W.T; Mathematics Mechanization, Science Press / Kluwer, Beijing, 2000.
[16]-Gao, X.S, Chou, S.C ; Computation With Parameter Equations, Proc. ISSAC 1991, 122-127, ACM Press, 1991.
[17]-Li Ziming, Automatic Implicitization of Parametric objects, MM Research Prepints, No4, Ins. Of Systems Science, Sinica, 1900.
[18]-Xiao-Shan Gao and Ruyong Feng, Rationnal General Solutions Of Ordinary Differential Equations