

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENE  
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



# MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Magister**

En : **Mathématiques**

SPÉCIALITÉ : **ANALYSE**  
Équations aux dérivées partielles

Par : **GASMI Nardjes**

Thème

**ÉTUDE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE D'UN PROBLÈME DE  
CONTRÔLABILITÉ FRONTIÈRE DE L'ÉQUATION  
DE CONVECTION DIFFUSION**

Soutenu publiquement, le 16/05/ 2011, devant le jury composé de :

|        |            |                      |           |                      |
|--------|------------|----------------------|-----------|----------------------|
| Mr. D. | TENIOU,    | Professeur           | à L'USTHB | Président            |
| Mr. T. | ALI ZIANE, | Maître de conférence | à l'USTHB | Directeur de Mémoire |
| Mr. A. | HEMINNA,   | Professeur           | à l'USTHB | Examineur            |
| Mm. O. | ZAIR,      | Maître de conférence | à l'USTHB | Examineur            |
| Mm. D. | HAMROUN,   | Professeur           | à l'USTHB | Examineur            |

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduction</b>   | <b>1</b>  |
| <b>1 Rappels de quelques résultats fondamentaux</b>                                 | <b>4</b>  |
| 1.1 Espaces fonctionels . . . . .   | 4         |
| 1.1.1 Espace des distributions . . . . .  | 4         |
| 1.1.2 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ . . . . .                                   | 5         |
| 1.1.3 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ . . . . .                                | 5         |
| 1.1.3.1 Théorèmes de traces . . . . .   | 6         |
| 1.1.4 Les espaces $H^s(\Omega)$ , $s$ non nécessairement entier . . . . .           | 7         |
| 1.1.5 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles . . . . .                         | 8         |
| 1.1.5.1 L'espace $W(0, T; V, V')$ . . . . .   | 9         |
| 1.2 Approximation de Galerkin dans un espace de Hilbert . . . . .                   | 10        |
| 1.3 Rappel de calcul différentiel et d'optimisation . . . . .                       | 10        |
| 1.4 Rappel de quelques inégalités et théorèmes fondamentaux . . . . .               | 11        |
| 1.4.1 Lemme de Gronwall . . . . .   | 11        |
| 1.4.2 Inégalité de Young . . . . .  | 12        |
| 1.4.3 Inégalité de Cauchy Schwarz . . . . .   | 12        |
| 1.4.4 Théorème du point fixe de Banach . . . . .                                    | 13        |
| 1.4.5 Théorème de l'application ouverte . . . . .                                   | 13        |
| 1.4.6 Théorème de Lax Milgram . . . . .   | 13        |
| <b>2 Existence et unicité de la solution du problème de convection diffusion</b>    |           |
| <b>semi linéaire</b>  | <b>14</b> |
| 2.1 Position du problème . . . . .  | 14        |
| 2.1.1 Formulation faible . . . . .  | 15        |
| 2.2 Existence et unicité de la solution du problème linéaire . . . . .              | 18        |
| 2.2.1 Unicité . . . . .   | 19        |
| 2.2.2 Existence . . . . .   | 20        |
| 2.3 Existence et unicité de la solution du problème semi linéaire . . . . .         | 28        |
| <b>3 Etude de la stabilité du problème de convection diffusion semi linéaire</b>    | <b>33</b> |
| 3.1 Position du problème . . . . .  | 33        |
| 3.2 Etude de la stabilité du problème de convection diffusion semi linéaire . . .   | 33        |
| 3.3 Linéarisation du problème de convection diffusion semi linéaire autour de $u_e$ | 36        |

---

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 3.4      | Etude de la stabilité du problème de convection diffusion linéarisé . . . . .                                    | 37        |
| <b>4</b> | <b>Contrôlabilité du problème de convection diffusion linéarisé</b>  | <b>39</b> |
| 4.1      | Formulation du problème . . . . .  | 39        |
| 4.2      | Existence et unicité du contrôle optimal . . . . .   | 41        |
| 4.3      | Caractérisation du contrôle optimal . . . . .  | 42        |
| 4.3.1    | Conditions d'optimalités . . . . .   | 43        |
| 4.3.2    | Etude du problème adjoint . . . . .  | 46        |
| 4.3.2.1  | Existence et unicité de solution faible . . . . .  | 47        |
| 4.3.3    | Equation fonctionnelle . . . . .   | 48        |
| 4.3.4    | Formulation faible . . . . .   | 51        |
| <b>5</b> | <b>Approximation numérique par éléments finis et par le gradient conjugué</b>                                    | <b>52</b> |
| 5.1      | Approximation par éléments finis de la solution faible du problème convec-<br>tion diffusion linéarisé . . . . . | 52        |
| 5.1.1    | Semi discrétisation . . . . .  | 53        |
| 5.1.2    | Discrétisation totale . . . . .  | 54        |
| 5.1.2.1  | Erreur de la discrétisation totale . . . . .   | 56        |
| 5.2      | Approximation par éléments finis de la solution faible du problème adjoint                                       | 57        |
| 5.2.1    | Semi discrétisation . . . . .  | 57        |
| 5.2.2    | Discrétisation totale . . . . .  | 58        |
| 5.3      | Algorithme du gradient conjugué . . . . .  | 59        |
| 5.3.1    | Méthode du gradient conjugué dans un Hilbert . . . . .   | 59        |
| 5.3.2    | Application de l'algorithme . . . . .  | 60        |
| 5.3.3    | Discrétisation du problème de contrôle optimal . . . . .   | 63        |
| <b>6</b> | <b>Simulations numériques</b>  | <b>67</b> |
| 6.1      | Présentation des logiciels . . . . .   | 67        |
| 6.2      | Position de problème . . . . .   | 67        |
| 6.3      | Tests numériques . . . . .   | 70        |
| 6.3.1    | Résultat 1 . . . . .   | 70        |
| 6.3.2    | Résultat 2 : Problème avec convection non nulle . . . . .  | 75        |
| 6.3.3    | Résultat 3 . . . . .   | 75        |

# Remerciement

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur T. Ali Ziane, Maître de conférences à l'U.S.T.H.B pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Je voudrais aussi remercier Monsieur D. Teniou, Professeur à l'U.S.T.H.B pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de mon mémoire. Je remercie vivement Monsieur A. Heminna, Professeur à l'U.S.T.H.B et Melle O. Zair, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B , Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B qui ont bien voulu faire partie du jury. Mes remerciements ont aussi à Melle D. Hamroun, Professeur à l'U.S.T.H.B d'avoir accepter d'être membre de ce jury. Ces remarques m'ont aidé à mieux finaliser ce mémoire écrit avec plus de clarté et de rigueur. Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma très chère famille, pour leur soutien et leur compréhension tout au long de mes études.

# Résumé

L'objet de ce mémoire est l'étude mathématique et numérique d'un problème de contrôlabilité frontière de l'équation de convection diffusion dans un domaine borné.

On commence par l'étude de l'existence, l'unicité de la solution du problème initial. Ensuite, on étudie la contrôlabilité frontière du problème linéarisé et on s'intéresse au problème de contrôle optimal et on établit les conditions d'optimalité ainsi l'existence et l'unicité de la solution de l'état adjoint du problème linéarisé. Enfin, on fait des implémentations numériques en utilisant les éléments finis triangulaires de Lagrange pour résoudre le problème linéarisé et son état adjoint, et le gradient conjugué pour calculer le contrôle optimal.

**Mots-clés** : Equations aux dérivées partielles paraboliques, contrôlabilité, équation de convection diffusion semi linéaire, stabilisation.

# Introduction

Notre travail est consacré à l'étude la stabilisation de la solution de l'équation linéarisée de l'équation de convection diffusion semi linéaire suivante :

$$(0.0.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + V \cdot \nabla u = \lambda \exp u - c & \text{dans } Q_T \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ \nu \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma_T \end{cases}$$

Où :  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2, 3$ )

$\Gamma$  est la frontière de  $\Omega$ .

$n$  est le vecteur normal unitaire extérieure à  $\Gamma$ .

$Q_T$  le cylindre  $\Omega \times ]0, T[$  et  $\Sigma_T$  sa frontière latérale

$\lambda, c, T$  et  $\nu$  des constantes strictement positives.

$u$  représente la température d'un fluide incompressible de vitesse  $V$  tel que  $\text{div} = 0$ , dans l'ouvert  $\Omega$ .

R. Glowinski et J. W. He [7] ont montré que (0.0.1) admet un point d'équilibre instable

$$u_e = \log \left( \frac{c}{\lambda} \right)$$

et la linéarisée en (0.0.1) est donnée par :

$$(0.0.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + V \cdot \nabla u - cu = 0 & \text{dans } Q_T \\ u(\cdot, 0) = \delta u_e & \text{dans } \Omega \\ \nu \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma_T \end{cases}$$

Où  $\delta u_e$  est une petite perturbation de  $u_e$ .

Notre but est de stabiliser la solution du problème (0.0.2) en utilisant la théorie du contrôle optimal et en considérant le problème de minimisation suivant :

$$(0.0.3) \quad \inf_{\mathcal{U}} J(v),$$

avec  $\mathcal{U} = L^2(0, T; L^2(\Gamma))$  est l'espace des contrôles admissibles muni de la norme

$$\|v\|_{\mathcal{U}} = \left( \int_0^T \|v(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dans notre travail on considère des contrôles ne dépendent que du temps.

$J$  est la fonction de coût définie par :

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2} \|v\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{k_1}{2} \|u\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \frac{k_2}{2} \|u(x,T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T |v(t)|^2 dt + \frac{k_1}{2} \int_{Q_T} u^2 dx dt + \frac{k_2}{2} \int_{\Omega} u^2(x,T) dx. \end{aligned}$$

$k_1, k_2$  deux constantes positives telles que  $k_1 + k_2 > 0$ .

$u$  est l'état du système

$$(0.0.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + V \cdot \nabla u - cu = 0 & \text{dans } Q_T \\ u(\cdot, 0) = u_0 = \delta u_e & \text{dans } \Omega \\ \nu \frac{\partial u}{\partial n} = v & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases}$$

Nous obtenons les conditions d'optimalités et l'état adjoint de (0.0.4)

$$(0.0.5) \quad \begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial t} - \nu \Delta p - V \cdot \nabla p - cp = k_1 u & \text{dans } Q_T \\ p(\cdot, T) = k_2 u(T) & \text{dans } \Omega \\ \nu \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases}$$

voir [7] et [9].

Dans ce travail, on utilise les éléments finis de Lagrange triangulaires pour résoudre (0.0.4) et (0.0.5) et la méthode du gradient conjugué pour calculer le contrôle optimal. Ces méthodes ont été utilisées par plusieurs auteurs citons, R. Glowinski et J. L. Lions [6], R. Glowinski, H. B. Keller et L. Reinhart [5], T. Slawig [12].

Ce mémoire se compose de six chapitres comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux définitions et rappels de quelques notions de base d'analyse fonctionnelle, de calcul différentiel et d'optimisation.

Dans le second chapitre, on étudie l'existence, l'unicité de la solution de l'équation de convection diffusion linéaire, ensuite on montrera l'existence et l'unicité locale de la solution de l'équation semi linéaire ce chapitre comporte trois sections :

Dans la première section, on présentera le problème à étudier et on donnera sa formulation faible. Dans la deuxième section, on étudiera l'existence, l'unicité, la dépendance par rapport aux données et on utilisera la méthode de Galerkin pour montrer l'existence de la solution faible de cette équation. Dans la troisième section, on montrera l'existence et l'unicité locale de la solution de l'équation de convection diffusion semi linéaire avec des conditions au bord de type Neumann non homogènes.

On abordera ensuite, dans le troisième chapitre l'étude de la stabilité de l'équation de convection diffusion semi linéaire et de sa linéarisée.

Dans le quatrième chapitre, on étudiera la contrôlabilité de l'équation linéarisée, ce chapitre comporte trois sections :

On donnera dans la première section la formulation du problème étudié, puis on montrera l'existence et l'unicité du contrôle optimal, ensuite dans la troisième section, on étudiera les caractéristiques du contrôle optimal.

Le cinquième chapitre est consacré à la présentation des méthodes numériques utilisées dans ce travail, ce chapitre contient trois sections :

Dans la première section, on résoudra l'équation de convection diffusion linéaire avec des conditions aux bords de type Neumann non homogènes par les éléments finis triangulaires de Lagrange. Dans la deuxième section, on fera la même chose pour trouver la solution de l'équation adjointe. Dans la troisième section, on utilisera la méthode du gradient conjugué pour calculer le contrôle optimal.

Dans le sixième chapitre, on affichera les résultats numériques de l'implémentation du contrôle optimal, la solution de l'équation de convection diffusion linéarisée, la solution de l'équation adjointe et on finira par une conclusion.

# Chapitre 1

## Rappels de quelques résultats fondamentaux

Dans ce chapitre, on rappelle quelques définitions et résultats d'analyse fonctionnelle et de calcul différentiel qui seront utilisés dans ce travail.

### 1.1 Espaces fonctionels

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  de frontière  $\Gamma$  assez régulière, on introduit les espaces suivants :

#### 1.1.1 Espace des distributions

$\mathcal{D}(\Omega)$  = espace des fonctions  $\varphi$  indéfiniment différentiables sur  $\Omega$ , à valeurs réelles et à support compact dans  $\Omega$  (le support dépendant de  $\varphi$ ), muni de la topologie limite inductive sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  qui est définie de la façon suivante : une suite  $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$  tend vers zéro si et seulement

- i) les  $\varphi_j$  ont leurs supports dans un compact fixe de  $\Omega$ .
- ii)  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $D^\alpha \varphi_j \rightarrow 0$  quand  $j \rightarrow +\infty$  uniformément sur  $\Omega$ , où l'on a posé :

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

avec  $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{N}^n$  et  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

$\mathcal{D}'(\Omega)$  = espace des distributions sur  $\Omega$  = espace des formes  $\varphi \rightarrow \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}$  linéaires continues sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  (c'est-à-dire,  $\langle f, \varphi_j \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} \rightarrow 0$  si  $\varphi_j \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ )

On dira que  $f_j \rightarrow f$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  si  $\langle f_j, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} \rightarrow \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Si  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  on définit  $D^\alpha f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  (et cela  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ ) par

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

En outre l'application  $f \rightarrow D^\alpha f$  de  $\mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  est continue.

### 1.1.2 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Pour  $1 \leq p \leq \infty$ , on pose :

$L^p(\Omega)$  = espace des fonctions mesurables sur  $\Omega$  et telles que

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{pour } 1 \leq p < \infty$$

$$|f(x)| < c \text{ p.p sur } \Omega \text{ pour } p = \infty$$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{c, |f(x)| < c \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

$L^p$  est un espace de Banach pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ , en particulier  $L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} fg dx.$$

A tout  $f \in L^p(\Omega)$  on associe la distribution

$$\varphi \rightarrow \langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

### 1.1.3 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

On appelle espace de Sobolev d'ordre  $m$  sur  $L^p(\Omega)$  que l'on note  $W^{m,p}(\Omega)$  l'espace défini par :

$$(1.1.1) \quad W^{m,p}(\Omega) = \{v \mid v \in L^p(\Omega), D^\alpha v \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

Muni de la norme

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|v\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

$W^{m,p}(\Omega)$  est un espace de Banach.

Le cas  $p = 2$  est fondamental. Pour simplifier l'écriture, on posera

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega),$$

muni du produit scalaire

$$(1.1.2) \quad (u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

c'est un espace de Hilbert.

On note  $W_0^{m,p}(\Omega)$  la fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W^{m,p}(\Omega)$ , lorsque  $p = 2$ ,  $W_0^{m,p}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ .

## 1.1.3.1 Théorèmes de traces

On prendra garde que, sauf en dimension 1, une fonction  $v$  de  $H^1(\Omega)$  n'est pas nécessairement continue sur  $\Omega$ , ni a fortiori sur  $\overline{\Omega}$ , on peut néanmoins définir les traces de  $v$  sur la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$ . Nous ferons l'hypothèse :

- i)  $\Omega$  est un ouvert borné dont la frontière  $\Gamma$  est une variété de dimension  $(n - 1)$
- ii) de classe  $C^1$ ,  $\Omega$  étant localement d'un seul côté de  $\Gamma$ .

On montre alors (voir par exemple Lions-Magenes [10]) que,  $C^1(\overline{\Omega})$  désignant l'espace des fonctions une fois continûment différentiables dans  $\overline{\Omega}$ ,  $C^1(\overline{\Omega})$  est dense dans  $H^1(\Omega)$ .

Pour  $v \in C^1(\overline{\Omega})$  on posera

$$(1.1.3) \quad \gamma_0 v = v|_{\Gamma} = \text{"trace de } v \text{ sur } \Gamma\text{"} = \text{valeur de } v \text{ sur } \Gamma.$$

On note

$$L^2(\Gamma) = \{f \mid f \text{ mesurable et de carré sommable sur } \Gamma \text{ pour la mesure } d\Gamma\},$$

muni du produit scalaire

$$(f, g)_{\Gamma} = \int_{\Gamma} fg d\Gamma.$$

On a les résultats suivants :

**Théorème 1.1** *Sous l'hypothèse ci-dessus, on peut définir de façon unique la trace  $\gamma_0 v = v|_{\Gamma}$  pour  $v \in H^1(\Omega)$  de façon que  $\gamma_0 v$  coïncide avec la définition usuelle (1.1.3) si  $v \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $\gamma_0 v \in L^2(\Gamma)$  et l'application  $v \longrightarrow \gamma_0 v$  est linéaire continue de  $H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ .*

**Preuve** Voir Lions-Magenes [10] □

**Remarque 1.1** *L'application  $v \longrightarrow D^{\alpha}v$  est linéaire continue de  $H^{|\alpha|+1}(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$ ; on peut donc définir*

$$(1.1.4) \quad \{\gamma_0(D^{\alpha}v); |\alpha| \leq m - 1\} \text{ si } v \in H^m(\Omega).$$

*En fait, puisque la connaissance de  $v$  sur  $\Gamma$  entraîne celle de ses dérivées tangentielles sur  $\Gamma$ , il est préférable de remplacer l'ensemble des dérivées apparaissant dans (1.1.4) par les dérivées normales d'ordre  $\leq m - 1$*

$$\gamma v = \left\{ v, \frac{\partial v}{\partial n}, \dots, \frac{\partial^{m-1} v}{\partial n^{m-1}} \right\} \in (L^2(\Gamma))^m \text{ si } v \in H^m(\Omega).$$

**Théorème 1.2** *Le noyau de l'application  $\gamma$  coïncide avec l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^m(\Omega)$ . On note ce  $H_0^m(\Omega)$  noyau, donc  $H_0^m(\Omega) = \left\{ v \mid v \in H^m(\Omega), v = \frac{\partial v}{\partial n} = \dots = \frac{\partial^{m-1} v}{\partial n^{m-1}} = 0 \right\}$ .*

**Preuve** Voir Lions-Magenes [10] □

Comme  $H_0^m(\Omega)$  est un sous espace fermé de  $H^m(\Omega)$ , alors  $H_0^m(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour la structure induite par celle de  $H^m(\Omega)$ . On désigne par  $H^{-m}(\Omega)$  l'espace dual de  $H_0^m(\Omega)$  en considérant  $L^2(\Omega)$  comme espace pivot.

### 1.1.4 Les espaces $H^s(\Omega)$ , $s$ non nécessairement entier

Dans le cas particulier où  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , on peut définir  $H^m(\mathbb{R}^n)$  par la transformation de Fourier. Si  $v$  est une fonction continue à support compact, sa transformée de Fourier  $\hat{v}$  est définie par

$$\hat{v}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2i\pi x \cdot \xi) v(x) dx, \text{ où } \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \text{ et } x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i.$$

On peut définir  $H^m(\mathbb{R}^n)$  (voir Lions-Magenes [10]) par (1.1.1) ou par

$$(1.1.5) \quad H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ v \mid v \in S'(\mathbb{R}^n), (1 + |\xi|^2)^{m/2} \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}_\xi^n) \right\}$$

où,  $S(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des fonctions  $C^\infty$  à décroissance rapide ainsi que toutes les dérivées ( $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |x|^k |D^\alpha f(x)| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$ ), muni des semi-normes

$$\left\{ f \longmapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|x|^k |D^\alpha f(x)|), k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

$S'(\mathbb{R}^n)$  est l'espace dual de  $S(\mathbb{R}^n)$ , muni de la topologie forte de dual.

Si  $u, v \in H^m(\mathbb{R}^n)$  la forme bilinéaire

$$(1.1.6) \quad ((u, v))_{H^m(\mathbb{R}^n)} = \left( (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u}, (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{v} \right)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

définie un produit scalaire équivalent à celui défini en (??)

Mais sous la forme (1.1.5), le fait que  $m$  soit entier, ou positive, n'intervient pas. On peut donc définir, pour  $s \in \mathbb{R}$  quelconque

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ v \in S'(\mathbb{R}^n) \mid (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}_\xi^n) \right\},$$

qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$((u, v))_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left( (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}, (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{v} \right)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

qui est équivalente à celui correspondant à (1.1.6) lorsque  $s = m$ .

On peut montrer (cf Lions-Magenes [10]) que  $H^s(\mathbb{R}^n)$  est de type local : si  $\varphi \in D(\Omega)$ , l'application  $u \longmapsto \varphi u$  est linéaire continue de  $H^s(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même.

Cela permet de définir (par cartes locales) les espaces  $H^s(\Gamma)$ .

On a donc

$$\begin{aligned} (H^s(\mathbb{R}^n))' &= H^{-s}(\mathbb{R}^n). \\ (H^s(\Gamma))' &= H^{-s}(\Gamma). \\ (H_0^m(\Omega))' &= H^{-m}(\Omega). \end{aligned}$$

### 1.1.5 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Soit  $H$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_H$  et la norme associée  $\|\cdot\|_H$ , on désigne par  $L^p(0, T; H)$  l'espace des (classes de) fonctions  $t \rightarrow f(t)$  mesurables de  $]0, T[ \rightarrow H$  (pour la mesure  $dt$ )

$$\|f(t)\|_{L^p(0, T; H)} = \left( \int_0^T \|f(t)\|_H^p dt \right)^{1/p} < \infty \quad (p \neq \infty),$$

$$\|f(t)\|_{L^\infty(0, T; H)} = \inf \{c; \|f(t)\|_H < c \text{ p.p sur } ]0, T[\}$$

En particulier  $L^2(0, T; H)$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$(f, g)_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T (f(t), g(t))_H dt.$$

On désigne par  $\mathcal{D}'(]0, T[; H)$  l'espace des distributions sur  $]0, T[$  à valeurs dans  $H$ , défini par

$$\mathcal{D}'(]0, T[; H) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(]0, T[); H),$$

l'espace des applications linéaires continues de  $\mathcal{D}(]0, T[)$  à valeurs dans  $H$ .

À une fonction  $f \in L^p(0, T; H)$  correspond une distribution  $\tilde{f}$  sur  $]0, T[$  à valeurs dans  $H$ , définie par

$$\tilde{f}(\varphi) = \int_0^T f(t) \varphi(t) dt \quad , \quad \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[),$$

(ce qui définit bien une application  $\varphi \rightarrow \tilde{f}(\varphi)$  linéaire continue de  $\mathcal{D}(]0, T[)$  dans  $H$ ). L'application  $f \rightarrow \tilde{f}$  est une injection; on identifiera  $f$  et  $\tilde{f}$ . En outre si  $f \rightarrow 0$  dans  $L^p(0, T; H)$  alors  $\tilde{f} \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{D}'(]0, T[; H)$ , c'est-à-dire  $\tilde{f}(\varphi) \rightarrow 0$ , pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[; H)$ . On a alors

$$L^p(0, T; H) \subset \mathcal{D}'(]0, T[; H).$$

Pour  $f \in \mathcal{D}'(]0, T[; H)$ , on définit  $\frac{d^k f}{dt^k} = f^{(k)}$  par

$$f^{(k)}(\varphi) = (-1)^k f(\varphi^{(k)}) \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[),$$

ce qui définit  $f^{(k)} \in \mathcal{D}'(]0, T[; H)$ . En outre l'application  $f \rightarrow f^{(k)}$  est linéaire continue de  $\mathcal{D}'(]0, T[; H)$  dans lui-même.

### 1.1.5.1 L'espace $W(0, T; V, V')$

Soient  $H$  et  $V$  deux espaces de Hilbert réels, on désigne par  $\|\cdot\|_H$  (respectivement  $\|\cdot\|_V$ ) la norme dans  $H$  (respectivement dans  $V$ ) et par  $(\cdot, \cdot)_H$  (respectivement  $(\cdot, \cdot)_V$ ) les produits scalaires correspondants. On suppose que

- i)  $V \subset H$ , l'injection de  $V$  dans  $H$  est continue.
- ii)  $V$  est dense dans  $H$ .

On identifie  $H$  à son dual. Alors, si  $V'$  désigne le dual de  $V$ ,  $H$  s'identifie à un sous espace de  $V'$  et l'on peut écrire :

$$V \subset H \subset V',$$

chaque espace étant dense dans le suivant avec une injection continue.

On définit l'espace  $W(0, T; V, V')$  par

$$W(0, T; V, V') = \left\{ u, u \in L^2(0, T; V), \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V') \right\} \hookrightarrow C^0([0, T]; H),$$

muni de la norme

$$\|f\|_{W(0, T; V, V')} = \left( \int_0^T \|f(t)\|_V^2 dt + \int_0^T \left\| \frac{df}{dt}(t) \right\|_{V'}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

est un espace de Hilbert.

$C^m([0, T]; V)$  = l'espace des fonctions  $f$ ,  $m$  fois différentiables sur  $[0, T]$  à valeurs dans  $V$  muni de la norme

$$\|f\|_{C^m([0, T]; V)} = \max_{0 \leq l \leq m} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{d^l f}{dt^l}(t) \right\|_V \right),$$

est un espace de Banach.

On a les résultats suivants :

**Théorème 1.3** *Toute fonction  $f \in W(0, T; V, V')$  est égale presque partout à une fonction de  $C^0([0, T]; H)$  et on peut identifier  $W(0, T; V, V')$  à un sous espace de  $C^0([0, T]; H)$  et donc on peut écrire*

$$W(0, T; V, V') \hookrightarrow C^0([0, T]; H)$$

où  $C^0([0, T]; H)$  est l'espace des fonctions continues de  $[0, T]$  à valeurs dans  $H$ .

**Théorème 1.4** *(Formule d'intégration par parties)*

Soient  $u$  et  $v \in W(0, T; V, V')$  alors

$$(1.1.7) \quad \int_0^T \langle u'(t), v(t) \rangle_{V', V} dt + \int_0^T \langle v'(t), u(t) \rangle_{V', V} dt = (u(T), v(T))_H - (v(0), u(0))_H.$$

## 1.2 Approximation de Galerkin dans un espace de Hilbert

Dans ce travail on utilise la méthode de Galerkin pour la construction de la solution faible de l'équation de convection diffusion linéaire. Présentons donc cette méthode

**Définition 1.1** Soit  $V$  un espace de Hilbert séparable et  $\{V_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  une famille d'espaces vectoriels de dimension finie vérifiant :

i)  $\forall m, V_m \subset V, m = \dim V_m$ .

ii)  $V_m \rightarrow V$  quand  $m \rightarrow +\infty$  au sens suivant :

Il existe  $\mathcal{V} = \bigcup_m V_m$  un sous espace dense dans  $V$  tel que pour tout  $v \in \mathcal{V}$  on peut trouver une suite  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  vérifiant :

Pour tout  $m, v_m \in V_m$  et  $v_m \rightarrow v$  dans  $V$  quand  $m \rightarrow +\infty$ .

L'espace  $V_m$  s'appelle une approximation de Galerkin d'ordre  $m$  de  $V$ .

### Schéma de la méthode

Soit  $(P)$  le problème exact pour lequel on cherche à montrer l'existence d'une solution dans  $V$ , on suppose que la solution de  $(P)$  est unique. Après avoir fait un choix d'une approximation de Galerkin de  $V$ , il convient de définir le problème approché  $(P_m)$  dans l'espace  $V_m$  ayant une unique solution  $u_m$ . Le schéma possède 5 étapes :

**Etape 1 :** On définit la solution  $u_m \in V_m$  du problème  $(P_m)$ .

**Etape 2 :** On montre que  $u_m$  est bornée dans  $V$ .

**Etape 3 :** En utilisant les résultats de compacité faible de la boule unité dans un espace de Hilbert, on peut extraire une sous suite  $(u_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  qui converge faiblement vers une limite notée  $u$ .

**Etape 4 :** On montre que  $u$  est solution du problème  $(P)$  donc la solution cherchée d'après l'unicité.

**Etape 5 :** On montre que  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers  $u$  dans  $V$ .

## 1.3 Rappel de calcul différentiel et d'optimisation

Soit  $H$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{R}$  muni de la norme  $\|\cdot\|_H$ .

**Définition 1.2** Soit  $J$  une fonctionnelle définie sur  $H$ ,  $J$  est dite différentiable en  $v \in H$  si et seulement s'il existe une application  $J'(v)$  linéaire continue sur  $H$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $\delta v$  dans  $H$  on a

$$J(v + \delta v) - J(v) = \langle J'(v), \delta v \rangle_{H', H} + R(\|\delta v\|_H) \|\delta v\|_H.$$

où le reste  $R$  tend vers 0 quand  $\|\delta v\|_H$  tend vers 0.

De plus si pour tout  $v \in H$ ,  $J$  est différentiable en  $v$ , on dit que  $J$  est différentiable sur  $H$ .

**Définition 1.3** On dit que  $J$  est convexe si et seulement si

$$\forall v, w \in H, J(\theta v + (1 - \theta)w) \leq \theta J(v) + (1 - \theta)J(w) \quad , \forall \theta \in ]0, 1[.$$

On dit que  $J$  est strictement convexe si et seulement si

$$\forall v, w \in H, v \neq w \quad , J(\theta v + (1 - \theta)w) < \theta J(v) + (1 - \theta)J(w) \quad , \forall \theta \in ]0, 1[.$$

**Définition 1.4**  $J$  est dite semi continue inférieurement (s.c.i) si et seulement si pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  l'ensemble

$$[J \leq \lambda] = \{v \in H, J(v) \leq \lambda\}$$

est fermé.

On montre les résultats suivants, voir H.Brézis [1].

**Théorème 1.5** Soit  $C$  un sous ensemble convexe de  $H$ . Alors  $C$  est faiblement fermé pour la topologie faible  $\sigma(H, H')$  si et seulement s'il est fortement fermé.

**Corollaire 1.1** Soit  $\varphi$  une fonction convexe et s.c.i (pour la topologie forte) sur  $H$  à valeurs dans  $] - \infty, +\infty]$ . Alors  $\varphi$  est s.c.i pour la topologie faible  $\sigma(H, H')$ .

En particulier si  $x_n \rightharpoonup x$  pour la topologie faible  $\sigma(H, H')$ , alors

$$\varphi(x) \leq \liminf \varphi(x_n).$$

## 1.4 Rappel de quelques inégalités et théorèmes fondamentaux

### 1.4.1 Lemme de Gronwall

**Lemme 1.1** [8] Soient  $0 \leq t_0 \leq t_1$ ,  $\psi \in L^1(t_0, t_1)$ ,  $\psi \geq 0$  p.p. et  $\phi \in L^\infty(t_0, t_1)$ ,  $\phi \geq 0$  p.p., telles que

$$(1.4.1) \quad \phi(t) \leq K + L \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds,$$

avec  $K$  et  $L$  des constantes positives. Alors

$$\phi(t) \leq K \exp \left( L \int_{t_0}^t \psi(s)ds \right), \text{ pour } t \in [t_0, t_1].$$

**Preuve** L'inégalité (1.4.1) est équivalente à

$$(1.4.2) \quad \frac{\phi(t)}{K + L \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds} \leq 1,$$

multiplions (1.4.2) par  $L\psi(t)$  et intégrons sur  $[t_0, t_1]$ , on trouve

$$\int_{t_0}^t \frac{L\psi(s)\phi(s)ds}{K + L \int_{t_0}^s \psi(\tau)\phi(\tau)d\tau} ds \leq L \int_{t_0}^t \psi(s)ds,$$

alors,

$$\log \left( K + L \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds \right) - \log K \leq L \int_{t_0}^t \psi(s)ds,$$

et finalement

$$K + L \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds \leq K \exp \left( L \int_{t_0}^t \psi(s)ds \right),$$

en utilisant (1.4.1) dans le membre de gauche de cette inégalité on trouve le résultat.  $\square$

### 1.4.2 Inégalité de Young

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels, alors on a

$$(1.4.3) \quad |ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

### 1.4.3 Inégalité de Cauchy Schwarz

**Théorème 1.6** Soient  $f$  et  $g \in L^2(\Omega)$ , alors  $f.g \in L^1(\Omega)$  et on a

$$(1.4.4) \quad \int_{\Omega} |f.g| dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pour la preuve voir par exemple H.Brézis [1].

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach muni de normes  $\| \cdot \|_X$  et  $\| \cdot \|_Y$  respectivement.

### 1.4.4 Théorème du point fixe de Banach

**Définition 1.5** Soit  $f$  une application définie de  $X$  à valeurs dans  $X$ , on dit que  $f$  est contractante, si et seulement si, il existe une constante  $M$  telle que  $0 < M < 1$  et

$$\|f(x) - f(y)\|_X \leq M \|x - y\|_X, \forall x, y \in X.$$

**Définition 1.6** Soit  $f$  une application définie de  $X$  à valeurs dans  $X$ , on dit que  $x$  est un point fixe de  $f$  si et seulement si

$$f(x) = x$$

**Théorème 1.7** Soit  $f$  une application définie de  $X$  à valeurs dans  $X$ , on suppose que  $f$  soit contractante, alors elle admet un point fixe unique.

**Remarque 1.2** Le résultat reste vrai si  $f$  est définie de  $B$  à valeurs dans  $B$  où  $B$  est un sous ensemble fermé dans  $X$ .

### 1.4.5 Théorème de l'application ouverte

**Théorème 1.8** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application linéaire continue et surjective, alors il existe une constante  $A > 0$  telle que

$$(1.4.5) \quad f(B_X(0, 1)) \supset B_Y(0, A)$$

**Preuve** Voir par exemple H.Brézis [1] □

**Corollaire 1.2** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application linéaire continue et bijective, alors  $f^{-1}$  est continue de  $Y$  dans  $X$ .

**Preuve** Voir par exemple H.Brézis [1]. □

### 1.4.6 Théorème de Lax Milgram

Soient  $H$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_H$ .

**Théorème 1.9** Soient  $a$  une forme bilinéaire, continue sur  $H \times H$  et coercive,  $L$  une forme linéaire continue sur  $H$ , alors le problème

$$a(u, v) = L(v), \forall v \in H,$$

admet une solution unique  $u \in H$ .

De plus, si  $a$  est symétrique, alors  $u$  est caractérisée par la propriété

$$u \in H \text{ et } \frac{1}{2}a(u, u) - L(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \right\}$$

**Preuve** Voir par exemple H.Brézis [1]. □

# Chapitre 2

## Existence et unicité de la solution du problème de convection diffusion semi linéaire

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème de convection diffusion semi linéaire. D'abord, nous montrons que le problème linéaire admet une solution faible unique en utilisant la méthode de Galerkin, ensuite, on donne des résultats sur la continuité par rapport aux données, enfin on montre que le problème semi linéaire admet une solution par un théorème de point fixe.

### 2.1 Position du problème

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2, 3$ ) de frontière régulière  $\Gamma$  et  $T$  fixé. On note  $Q_T$  le cylindre  $\Omega \times ]0, T[$  et  $\Sigma_T = \Gamma \times ]0, T[$  sa frontière latérale. On considère le problème parabolique linéaire suivant

$$(2.1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + V \cdot \nabla u = f & \text{dans } Q_T, \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega, \\ \nu \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases}$$

Où  $n$  est le vecteur normal unitaire extérieur à  $\Gamma$ .

Le problème (2.1.1) modélise par exemple la propagation de la chaleur dans un fluide contenu dans le domaine  $\Omega$ , la grandeur  $u(x, t)$  représente alors la température du fluide au point  $x$  et à l'instant  $t$ ,  $\nu$  sa conductibilité thermique,  $V$  sa vitesse et  $f$  la source de puissance par unité de volume. La diffusion de la chaleur est modélisée par le terme  $-\nu \Delta u$ , alors que la convection l'est par le terme  $V \cdot \nabla u$ .

Dans la suite de ce travail, on suppose que le fluide est incompressible, reste dans le

domaine  $\Omega$  et que sa conductibilité est strictement positive c'est à dire

$$(2.1.2) \quad \begin{aligned} V &\in L^\infty(\Omega), \quad \operatorname{div} V = 0, \\ n \cdot V &= 0, \\ \nu &> 0. \end{aligned}$$

### 2.1.1 Formulation faible

Avant de donner une formulation faible du problème (2.1.1), on commencera par une définition de la notion de solution classique dans le cas où les données sont régulières, puis on cherchera une notion plus générale de solution dite solution faible ou variationnelle dans des espaces plus adéquats

**Définition 2.1** *Si  $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ ,  $f \in C(\overline{\Omega} \times (0, T))$ ,  $V \in C(\overline{\Omega})^d$  et  $g \in C(\Gamma \times (0, T))$ . On dit que  $u$  est une solution classique de (2.1.1) si et seulement si  $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0, T)) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega} \times (0, T)) \cap C(\Omega \times [0, T])$ , et elle vérifie (2.1.1) en tout point de  $\Omega \times (0, T)$ .*

Soit  $u$  une solution classique de (2.1.1), dans toute la suite on notera en gras  $\mathbf{u}(t)$  la fonction  $u(\cdot, t)$ . On multiplie la première équation de (2.1.1) par  $w \in C^1(\overline{\Omega})$  et on intègre par partie par rapport à  $x$  sur  $\Omega$ , on obtient

$$(2.1.3) \quad \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} w + \nu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla w + V \cdot \nabla \mathbf{u} w \right) dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} w dx + \int_{\Gamma} \mathbf{g} w d\Gamma.$$

Posons

$$(2.1.4) \quad a(\mathbf{u}, w) = \int_{\Omega} (\nu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla w + V \cdot \nabla \mathbf{u} w) dx, \quad \forall w \in C^1(\overline{\Omega}),$$

et

$$(2.1.5) \quad L(t, w) = \int_{\Omega} \mathbf{f} w dx + \int_{\Gamma} \mathbf{g} w d\Gamma, \quad \forall w \in C^1(\overline{\Omega}), \quad p.p \ t \in (0, T).$$

$t$  et  $\mathbf{u}$  étant fixés, ces deux formes linéaire sont continues sur  $C^1(\overline{\Omega})$  pour la norme de  $H^1(\Omega)$ , donc elles sont prolongeables par densité à  $H^1(\Omega)$ . Donc,  $\mathbf{u}$  vérifie pour  $p.p \ t \in (0, T)$

$$(2.1.6) \quad \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) w dx + a(\mathbf{u}, w) = L(t, w), \quad \forall w \in H^1(\Omega)$$

Par suite l'application  $w \mapsto \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) w dx$  est une forme linéaire continue sur  $H^1(\Omega)$ , on pourra donc la représenter par le produit de dualité usuel sur  $(H^1(\Omega))'$  et on obtient

$$(2.1.7) \quad \left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}(t), w \right\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} + a(\mathbf{u}, w) = L(t, w), \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

La forme bilinéaire  $a$  définie dans (2.1.4) aura toujours un sens si l'on suppose que  $V \in (L^\infty(\Omega))^d$ . La forme linéaire  $L$  définie dans (2.1.4) aura aussi un sens si l'on suppose que  $f \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$  et  $g \in L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$  et peut être écrite sous la forme générale suivante :

$$L(t, w) = \langle f, w \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} + \langle g, w \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

Dans toute la suite, on supposera que  $u_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $g \in L^2(0, T; L^2(\Gamma))$  et  $V \in L^\infty(\Omega)^d$ . On définit la forme bilinéaire  $a$  de  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$(2.1.8) \quad a(u, w) = \int_{\Omega} (\nu \nabla u \cdot \nabla w + V \cdot \nabla u w) dx, \quad \forall u, w \in H^1(\Omega),$$

et la forme linéaire  $L(t, \cdot)$  de  $H^1(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$  par pour p.p  $t \in (0, T)$

$$(2.1.9) \quad L(t, w) = \int_{\Omega} \mathbf{f} w dx + \int_{\Gamma} \mathbf{g} w d\Gamma, \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

On adopte la définition suivante

**Définition 2.2** Soit  $u_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $g \in L^2(0, T; L^2(\Gamma))$  et  $V \in L^\infty(\Omega)^d$ . On dit que  $u$  est une solution faible (2.1.1) si et seulement si  $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ,  $\frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$ ,  $\mathbf{u}$  vérifie (2.1.7) pour presque tout  $t \in ]0, T[$  et  $u(0) = u_0$ .

**Remarque 2.1** Soit  $\mathbf{u} \in W(0, T; H^1(\Omega), (H^1(\Omega))')$  la solution faible de (2.1.1), d'après le théorème 1.3  $\mathbf{u} \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ , donc, la condition  $u(0)$  est licite. D'où, la solution faible de (2.1.1) est dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ .

**Remarque 2.2** On suppose que  $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ ,  $f \in C(\bar{\Omega} \times (0, T))$ ,  $V \in C(\bar{\Omega})^d$  et  $g \in C(\Gamma \times (0, T))$ . Soit  $u$  la solution faible de (2.1.1), si  $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0, T)) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega} \times (0, T)) \cap C(\Omega \times [0, T])$ , alors pour  $w \in \mathcal{D}(\Omega)$  on obtient par intégration par partie que

$$a(\mathbf{u}, w) = \langle -\nu \Delta \mathbf{u} + V \cdot \nabla \mathbf{u}, w \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}, \quad \forall w \in \mathcal{D}(\Omega),$$

$$L(t, w) = \int_{\Omega} \mathbf{f} w dx, \quad \text{p.p } t \in (0, T).$$

donc

$$\left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}, w \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle \mathbf{f} + \nu \Delta \mathbf{u} - V \cdot \nabla \mathbf{u}, w \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}, \quad w \in \mathcal{D}(\Omega).$$

par suite, on a pour presque tout  $t \in ]0, T]$

$$(2.1.10) \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \nu \Delta \mathbf{u} + V \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{f} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

En fait  $u$  vérifie (2.1.10) en tout point de  $\Omega \times (0, T)$ . Maintenant, soit  $w \in D(\overline{\Omega})$ , on a pour tout  $t \in (0, T)$

$$a(\mathbf{u}, w) = \int_{\Omega} (-\nu \Delta \mathbf{u} w + V \cdot \nabla \mathbf{u} w) dx - \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} w d\Gamma, \quad \forall w \in D(\overline{\Omega}),$$

donc, on obtient

$$\int_{\Gamma} \left( \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} - \mathbf{g} \right) w d\Gamma = 0, \quad \forall w \in D(\overline{\Omega}),$$

par suite

$$\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = \mathbf{g}, \text{ sur } \Gamma \times ]0, T[.$$

donc,  $u$  est une solution classique de (2.1.1).

### Proposition 2.1

*L'application linéaire  $L(t, \cdot)$  est continue sur  $H^1(\Omega)$  p.p  $t \in ]0, T[$ .*

*L'application bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est continue sur  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ , de plus elle vérifie la condition du coercivité suivante :*

$$(2.1.11) \quad \begin{cases} \text{Il existe } \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha > 0 \text{ tels que} \\ a(u, u) + \beta \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

### Preuve

(i) Soit  $w \in H^1(\Omega)$ , on a

$$|L(t, w)| \leq \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{L^2(\Gamma)} \|w\|_{L^2(\Gamma)},$$

d'après le théorème 1.1.2, il existe  $C > 0$  tel que

$$\|w\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|w\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

par conséquent

$$|L(t, w)| \leq C' \|w\|_{H^1(\Omega)},$$

avec  $C'$  dépend seulement de  $t$ .

(ii) Soient  $u, w \in H^1(\Omega)$ , on a

$$|a(u, w)| \leq (\nu + \|V\|_{L^\infty(\Omega^d)}) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)},$$

donc,  $a$  est continue sur  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ .

(iii) Soit  $u \in H^1(\Omega)$ , on a

$$(2.1.12) \quad a(u, u) = \nu \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} V \cdot \nabla u u dx,$$

d'après les inégalités Cauchy-Schwartz et de Young

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} V \cdot \nabla u u dx \right| &\leq \|V\|_{L^\infty(\Omega)^d} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{\nu}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\|V\|_{L^\infty(\Omega)^d}^2}{2\nu} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

d'où

$$(2.1.13) \quad \int_{\Omega} V \cdot \nabla u u dx \geq -\frac{\nu}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\|V\|_{L^\infty(\Omega)^d}^2}{2\nu} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

de (2.1.12) et (2.1.13), on déduit que

$$a(u, u) \geq \frac{\nu}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\|V\|_{L^\infty(\Omega)^d}^2}{2\nu} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

donc

$$a(u, u) + \beta \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

on choisit  $\beta$  et  $\alpha$  tels que

$$\beta = \frac{\|V\|_{L^\infty(\Omega)^d}^2}{\nu},$$

et

$$\alpha = \inf\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\beta}{2}\right).$$

□

## 2.2 Existence et unicité de la solution du problème linéaire

Dans cette section, on montre que le problème (2.1.1) admet une solution faible unique en utilisant la méthode de Galerkin. Comme  $H^1(\Omega)$  est séparable, alors il existe une base dénombrable  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  de  $H^1(\Omega)$  telle que la famille  $(V_m)_{m \geq 0}$  où  $V_m = \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m \rangle$  forme une suite croissante des sous espaces vectoriels de dimension finie  $m + 1$  telle que  $\bigcup_{m \geq 0} V_m$  est dense dans  $H^1(\Omega)$ .

Comme  $H^1(\Omega)$  dense dans  $L^2(\Omega)$ , donc il existe une suite  $(u_{0m})_m$  qui converge vers  $u_0$  dans  $L^2(\Omega)$  telle que  $(u_{0m}) \in V_m, \forall m \in \mathbb{N}$ ,  $u_{0m}$  c'est la projection du  $u_0$  sur  $V_m$ .

En particulier, il existe  $\alpha_{00}, \alpha_{01}, \dots, \alpha_{0m}$  uniques tels que

$$(2.2.1) \quad u_{0m} = \sum_{i=0}^m \alpha_{0,i} \varphi_i, \forall m \in \mathbb{N}$$

Et il existe une constante  $C_1$  indépendante de  $m$  telle que

$$(2.2.2) \quad \|u_{0m}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \|u_0\|_{L^2(\Omega)},$$

On énonce le résultat principal de cette section

**Théorème 2.1** *Si  $u_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $\mathbf{g} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma))$  et  $V \in L^\infty(\Omega)^d$ . Alors le problème (2.1.1) admet une unique solution faible  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$  de plus il existe une constante  $C(T) > 0$  telle que*

$$(2.2.3) \quad \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}\|_{C(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq C(T) \left( \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;(H^1(\Omega))')}^2 + \|\mathbf{g}\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))}^2 + \|u_0\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right)$$

La démonstration se fait en plusieurs étapes, tout d'abord on démontre l'unicité de la solution faible, puis on construit la solution en utilisant la méthode de Galerkin.

**Remarque 2.3** *En générale les fonctions de base  $\varphi_i$  sont choisies comme fonctions propres de  $-\Delta$ , dans ce travail, on utilise des fonctions de base quelconque ce qui nous facilitera la tâche lorsqu'on utilisera la méthode des éléments finis pour discrétiser notre problème.*

### 2.2.1 Unicité

**Lemme 2.1** *Le problème (2.1.1) admet au plus une solution*

**Preuve** On suppose que (2.1.1) admet deux solution faibles  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ , en posant

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2,$$

alors  $v$  vérifie

$$(2.2.4) \quad \begin{cases} \left\langle \frac{d\mathbf{v}}{dt}, w \right\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} + a(\mathbf{v}, w) = 0 & \text{p.p } t \in ]0, T[ \\ \mathbf{v}(0) = 0 \end{cases}$$

On montre que  $\mathbf{v} \equiv 0$  p.p sur  $]0, T[$  en particulier

$$\left\langle \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \mathbf{v} \right\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} + a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0,$$

d'après le théorème 1.4, on a

$$\left\langle \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \mathbf{v} \right\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

d'où

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = -a(\mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t)),$$

en utilisant (2.1.11), on obtient

$$(2.2.5) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq -\alpha \|\mathbf{v}(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \beta \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \beta \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

en intégrant (2.2.5) entre 0 et  $t$ , on trouve

$$\|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2\beta \int_0^t \|\mathbf{v}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

On applique le lemme de Gronwall (1.1) pour  $\phi(t) = \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ ,  $K = 0$ ,  $L = 2\beta$  et  $\psi(t) = 1$ , on obtient

$$\|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0,$$

par suite  $\mathbf{v} \equiv 0$  sur  $\Omega \times [0, T]$ . □

### 2.2.2 Existence

Dans cette partie on construit une solution faible en utilisant la méthode de Galerkin. On a les résultats suivants

**Lemme 2.2** *Le problème*

$$(2.2.6) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{v}_m(x, t) = \sum_{i=0}^m c_i(t) \varphi_i(x), & \text{telle que} \\ \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{v}_m}{dt}(t) \varphi_j dx + a(\mathbf{v}_m(t), \varphi_j) = L(t, \varphi_j), & \text{pour } 0 \leq j \leq m, t \in (0, T) \\ \mathbf{v}_m(x, 0) = \sum_{i=0}^m c_i(0) \varphi_i(x). \end{cases}$$

Où  $u_{0m}$  est définie par, admet une solution unique vérifiant  $\mathbf{v}_m \in C([0, T]; V_m)$  et  $\frac{d\mathbf{v}_m}{dt} \in L^2([0, T]; V_m)$ .

**Preuve** On considère le système différentiel suivant qui dérive formellement de (2.2.6) :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^m c'_i(t) \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx + \sum_{i=0}^m c_i(t) a(\varphi_i, \varphi_j) = L(t, \varphi_j), & 0 \leq j \leq m, \\ \mathbf{v}_m(x, 0) = \sum_{i=0}^m c_i(0) \varphi_i(x), \quad \mathbf{c}_i(0) = \alpha_{0,i}, \quad \forall 0 \leq i \leq m. \end{cases}$$

On l'écrit dans  $\mathbb{R}^{m+1}$ , sous la forme matricielle suivante

$$(2.2.7) \quad \begin{cases} M_m \frac{dC_m}{dt}(t) + A_m C_m(t) = F_m(t), \quad t \in (0, T) \\ C_m(0) = c_{m0}. \end{cases}$$

Avec

$$\begin{aligned}
(C_m(t))_j &= c_j(t) \\
(M_m)_{ij} &= \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx, & 0 \leq i, j \leq m, \\
(A_m)_{ij} &= b(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{\Omega} (\nu \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j + V \cdot \nabla \varphi_i \varphi_j) dx, & 0 \leq i, j \leq m, \\
(F_m(t))_j &= L(t, \varphi_j) = \int_{\Omega} f \varphi_j dx + \int_{\Gamma} g \varphi_j d\Gamma, & 0 \leq j \leq m, \\
(c_{m0})_j &= \alpha_{0,j}, & 0 \leq j \leq m.
\end{aligned}$$

La matrice  $M_m$  est symétrique définie positive, en effet soit  $z \in \mathbb{R}^{m+1}$ , on a

$$\begin{aligned}
M_m z \cdot z &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m z_i z_j \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx \\
&= \int_{\Omega} \left( \sum_{i=0}^m z_i \varphi_i \right) \left( \sum_{j=0}^m z_j \varphi_j \right) dx \\
&= \left\| \sum_{i=0}^m z_i \varphi_i \right\|_{L^2(\Omega)}^2 > 0, \text{ si } z \neq 0.
\end{aligned}$$

Donc,  $M_m$  est inversible et on a

$$(2.2.8) \quad \begin{cases} \frac{dC_m}{dt} = M_m^{-1} F_m - M_m^{-1} A_m C_m, \\ C_m(0) = c_{m0}. \end{cases}$$

(2.2.8) admet une solution unique donnée par :

$$C_m(t) = \exp(-tM_m^{-1}A_m)C_{m0} + \int_0^t \exp(-(t-s)M_m^{-1}A_m)M_m^{-1}F_m(s)ds$$

et donc  $C_m(t) \in (H^1(0, T))^{m+1} \subset (C([0, T]))^{m+1}$ , par suite en posant  $\mathbf{v}_m(x, t) = \sum_{i=0}^m c_i(t)\varphi_i(x)$ ,  $\mathbf{v}_m \in C([0, T]; \mathbf{V}_m)$ ,  $\frac{d\mathbf{v}_m}{dt} \in L^2(0, T; V_m)$  et  $\mathbf{v}_m$  est solution de (2.2.6).  $\square$

**Lemme 2.3** Soit  $\mathbf{v}_m$  solution du (2.2.6), alors il existe deux constantes  $C_2$  et  $C_3$  indépendantes de  $m$  telles que

$$(2.2.9) \quad \max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{v}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_2 \left( \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} + \|\mathbf{g}\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma))}^2 \right),$$

et

$$(2.2.10) \quad \|\mathbf{v}_m\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 \leq C_3 \left( \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} + \|\mathbf{g}\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma))}^2 \right).$$

**Preuve** On multiplie (2.2.6) par  $c_j(t)$  et l'on somme de 0 à  $m$ , on trouve

$$\int_{\Omega} \frac{d\mathbf{v}_m}{dt}(t) \mathbf{v}_m(t) dx + a(\mathbf{v}_m(t), \mathbf{v}_m(t)) = L(t, \mathbf{v}_m(t)),$$

d'où

$$(2.2.11) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(\mathbf{v}_m(t), \mathbf{v}_m(t)) = L(t, \mathbf{v}_m(t)),$$

en utilisant l'inégalité (2.1.11), on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|\mathbf{v}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \beta \|\mathbf{v}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + L(t, \mathbf{v}_m(t)),$$

de plus, la continuité de  $L$  donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|\mathbf{v}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \beta \|\mathbf{v}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_m(t)\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + C \|\mathbf{g}(t)\|_{L^2(\Gamma)} \|\mathbf{v}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{v}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \beta \|\mathbf{v}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C^2}{\alpha} \|\mathbf{g}(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Par suite

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( e^{-2\beta t} \|\mathbf{v}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \frac{\alpha}{2} e^{-2\beta t} \|\mathbf{v}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \left( \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C^2}{\alpha} \|\mathbf{g}(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) e^{-2\beta t}.$$

Donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( e^{-2\beta t} \|\mathbf{v}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \frac{\alpha}{2} e^{-2\beta t} \|\mathbf{v}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C^2}{\alpha} \|\mathbf{g}(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

En intégrant par rapport au temps entre 0 et  $t$  on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{-2\beta t} \|\mathbf{v}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t e^{-2\beta s} \|\mathbf{v}_m(s)\|_{H^1(\Omega)}^2 ds &\leq \frac{1}{2} \|u_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\quad + \frac{C^2}{\alpha} \int_0^t \|\mathbf{g}(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt. \end{aligned}$$

On utilise 2.2.2, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{-2\beta t} \|\mathbf{v}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t e^{-2\beta s} \|\mathbf{v}_m(s)\|_{H^1(\Omega)}^2 ds &\leq \frac{C_1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\quad + \frac{C^2}{\alpha} \int_0^t \|\mathbf{g}(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt. \end{aligned}$$

D'où

$$\|\mathbf{v}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sqrt{2}e^{\beta T} \left( \frac{C_1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{C^2}{\alpha} \int_0^T \|\mathbf{g}(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$\int_0^T e^{-2\beta s} \|\mathbf{v}_m(s)\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \leq \frac{2}{\alpha} \left( \frac{C_1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{C^2}{\alpha} \int_0^T \|\mathbf{g}(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \right).$$

d'autre part

$$\|\mathbf{v}_m\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 \leq e^{2\beta T} \int_0^T e^{-2\beta s} \|\mathbf{v}_m(s)\|_{H^1(\Omega)}^2 ds$$

d'où

$$\|\mathbf{v}_m\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 \leq \sqrt{\frac{2}{\alpha}} e^{\beta T} \left( \frac{C_1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^T \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{C^2}{\alpha} \int_0^T \|\mathbf{g}(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

et le résultat s'en suit.  $\square$

**Lemme 2.4** *On peut extraire une sous suite  $(\mathbf{v}_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(\mathbf{v}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  possédant les propriétés suivantes :*

$$(2.2.12) \quad \mathbf{v}_{m_k} \rightharpoonup \mathbf{v} \text{ faible } * \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ quand } k \rightarrow +\infty,$$

et

$$(2.2.13) \quad \mathbf{v}_{m_k} \rightharpoonup \mathbf{v} \text{ faible dans } L^2(0,T;H^1(\Omega)) \text{ quand } k \rightarrow +\infty$$

où  $\mathbf{v} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ .

**Preuve** De l'estimation (2.2.9) on déduit qu'on peut extraire une sous suite  $(\mathbf{v}_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(\mathbf{v}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $\mathbf{v} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$  ce qui veut dire que pour tout  $\mathbf{w} \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$  on a

$$\lim_{m_k \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathbf{v}_{m_k}(t), w(t)) dt = \int_0^T (\mathbf{v}(t), w(t)) dt,$$

ici  $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$  désigne le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$  d'autre part l'estimation (2.2.10) montre que la suite  $(\mathbf{v}_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $L^2(0,T;H^1(\Omega))$  ce qui nous permet d'en extraire une sous suite qu'on notera  $(\mathbf{v}_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge faiblement vers  $\mathbf{v}^* \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$  ce qui veut dire que pour tout  $G \in L^2(0,T;(H^1(\Omega))')$

$$\lim_{m_k \rightarrow \infty} \int_0^T \langle G(t), \mathbf{v}_{m_k}(t) \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = \int_0^T \langle G(t), \mathbf{v}^*(t) \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)},$$

En particulier si  $\mathbf{w} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \subset L^1(0, T; L^2(\Omega))$  l'application  $S$  définie sur  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  par

$$\langle S, \cdot \rangle = \int_0^T (w(t), \cdot)_{L^2(\Omega)} dt,$$

est une forme linéaire sur continue  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  par suite on déduit que

$$\lim_{m_k \rightarrow \infty} \int_0^T (\mathbf{v}_{m_k}(t), \mathbf{w}(t))_{L^2(\Omega)} = \int_0^T (\mathbf{v}^*(t), \mathbf{w}(t))_{L^2(\Omega)},$$

pour tout  $\mathbf{w} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . l'unicité de la limite implique

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

□

**Lemme 2.5** *La limite  $\mathbf{v}$  est la solution faible de (2.1.1) et on a  $\mathbf{v} \in W(0, T; H^1(\Omega))$ ,  $(H^1(\Omega))' \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  de plus il existe une constante  $C(T) > 0$  telle que*

$$(2.2.14) \quad \|\mathbf{v}\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 + \|\mathbf{v}\|_{C(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq C(T) \left( \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \|\mathbf{g}\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma))}^2 \right)$$

**Preuve** Soient  $i \in \mathbb{N}$  et  $\psi \in C^1([0, T])$  vérifiant  $\psi(T) = 0$ . Pour  $m \geq i$ , on multiplie (2.2.6) par  $\psi(t)$  et on intègre par partie en  $t$ , on obtient

$$\int_0^T -(\mathbf{v}_m(t), \psi'(t)\varphi_i)_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T a(\mathbf{v}_m(t), \psi(t)\varphi_i) dt = \int_0^T L(t, \psi(t)\varphi_i) dt + \psi(0) \int_{\Omega} u_{0m}\varphi_i dx,$$

En passant à la limite quand  $m = m_k \rightarrow \infty$ , on obtient en utilisant le lemme 2.4 et en utilisant le fait que  $u_{0m}$  converge fortement dans  $L^2(\Omega)$  vers  $u_0$ , on obtient

$$\int_0^T -(\mathbf{v}(t), \varphi_i)_{L^2(\Omega)} \psi'(t) dt + \int_0^T a(\mathbf{v}(t), \varphi_i) \psi(t) dt = \int_0^T L(t, \varphi_i) \psi(t) dt + \psi(0) \int_{\Omega} u_0 \varphi_i dx,$$

Comme les combinaisons linéaires finies des  $\varphi_i$  sont denses dans  $H^1(\Omega)$ , on a

$$(2.2.15) \quad \int_0^T -(\mathbf{v}(t), w)_{L^2(\Omega)} \psi'(t) dt + \int_0^T a(\mathbf{v}(t), w) \psi(t) dt = \int_0^T L(t, w) \psi(t) dt + \psi(0) \int_{\Omega} u_0 w dx, \quad \forall w \in H^1(\Omega)$$

Maintenant soit  $\psi \in \mathcal{D}(]0, T[)$ , alors l'égalité (2.2.15) devient

$$(2.2.16) \quad \int_0^T -(\mathbf{v}(t), w)_{L^2(\Omega)} \psi'(t) dt + \int_0^T a(\mathbf{v}(t), w) \psi(t) dt = \int_0^T L(t, w) \psi(t) dt, \quad \forall w \in H^1(\Omega)$$

Pour presque tout  $t \in (0, T)$ , on note  $S(t)$  la distribution vectorielle à valeurs dans  $(H^1(\Omega))'$  définie par

$$\langle S(t), w \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = L(t, w) - a(\mathbf{v}(t), w), \quad \forall w \in H^1(\Omega)$$

La continuité de  $a$  et  $L$  entraînent pour presque tout  $t \in (0, T)$

$$\|S(t)\|_{(H^1(\Omega))'} \leq \left( (\nu + \|V\|_{L^\infty(\Omega)}) \|\mathbf{v}(t)\|_{H^1(\Omega)} + \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{g}(t)\|_{L^2(\Gamma)} \right)$$

Par suite  $S \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$  et (2.2.16) devient,  $\forall w \in H^1(\Omega)$ ,

$$\int_0^T -(\mathbf{v}(t), w)_{L^2(\Omega)} \psi'(t) dt = \int_0^T -\langle \mathbf{v}(t), w \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} \psi'(t) dt = \int_0^T \langle S(t), w \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} \psi(t) dt, \\ \forall \psi \in \mathcal{D}(]0, T[) \text{ et donc } \forall w \in H^1(\Omega), \\ (2.2.17)$$

$$-\left\langle \int_0^T \mathbf{v}(t) \psi'(t) dt, w \right\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = \left\langle \int_0^T S(t) \psi(t) dt, w \right\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)}, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(]0, T[)$$

d'où pour tout  $\psi \in \mathcal{D}(]0, T[)$

$$\int_0^T \mathbf{v}(t) \psi'(t) dt = - \int_0^T S(t) \psi(t) dt \text{ dans } (H^1(\Omega))', \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(]0, T[).$$

Finalement

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = S \text{ dans } \mathcal{D}'(]0, T[; (H^1(\Omega))')$$

d'où  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$  et de (2.2.16) et (2.2.17) on obtient

$$\left\langle \frac{d\mathbf{v}}{dt}, w \right\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} + a(\mathbf{v}(t), w) = L(t, w), \quad \forall w \in H^1(\Omega), \text{ p.p } t \in (0, T).$$

Maintenant, montrons que

$$\mathbf{v}(0) = u_0$$

La relation (2.2.15) devient pour  $\psi \in C^1([0, T])$  vérifiant  $\psi(0) = 1$ ,  $\psi(T) = 0$  et  $\forall w \in H^1(\Omega)$ ,

$$\int_0^T -(\mathbf{v}(t), w)_{L^2(\Omega)} \psi'(t) dt + \int_0^T a(\mathbf{v}(t), w) \psi(t) dt = \int_0^T L(t, w) \psi(t) dt + \int_{\Omega} u_0 w dx, \quad \forall w \in H^1(\Omega)$$

En utilisant la formule d'intégration par partie donnée dans le théorème 1.4 et la relation 2.2.15 on déduit

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}(0) w dx = \int_{\Omega} u_0 w dx, \quad \forall w \in H^1(\Omega)$$

Par passage à la limite dans , on obtient

□

**Remarque 2.4** Grâce à l'unicité de la solution faible de (2.1.1), la suite  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  vérifie

$$\begin{aligned} v_m &\rightharpoonup v \text{ faible } * \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ quand } m \rightarrow +\infty, \\ v_m &\rightharpoonup v \text{ faible dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)) \text{ quand } m \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

**Lemme 2.6** La suite  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  converge vers  $v$  dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  fortement.

**Preuve** On pose

$$\begin{aligned} X_m(T) &= \frac{1}{2} e^{-2\beta T} \|\mathbf{v}_m(T) - \mathbf{v}(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T e^{-2\beta t} a(\mathbf{v}_m(t) - \mathbf{v}(t), \mathbf{v}_m(t) - \mathbf{v}(t)) dt \\ &\quad + \beta \int_0^T e^{-2\beta t} \|\mathbf{v}_m(t) - \mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt, \end{aligned}$$

d'après (2.2.9) ,  $v_m(T)$  reste bornée dans  $L^2(\Omega)$ , donc on peut extraire une sous suite de  $(\mathbf{v}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  notée  $(\mathbf{v}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  tel que

$$\mathbf{v}_m(T) \rightharpoonup \chi \text{ faible dans } L^2(\Omega).$$

Soit  $\psi \in C^1([0, T])$  telle que  $\psi(0) = 0$  et  $\psi(T) = 1$ , par raisonnement analogue à celui fait pour montrer  $\mathbf{v}(0) = u_0$ , on obtient

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}(T) w dx = \int_{\Omega} \chi(T) w dx, \quad \forall w \in H^1(\Omega),$$

d'où

$$\mathbf{v}(T) = \chi(T)$$

compte tenu de la remarque (2.4), il en résulte

$$(2.2.18) \quad \mathbf{v}_m(T) \rightharpoonup \chi(T) \text{ faible dans } L^2(\Omega).$$

On a

$$X_m(T) = \frac{1}{2} e^{-2\beta T} \|\mathbf{v}_m(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T e^{-2\beta t} a(\mathbf{v}_m(t), \mathbf{v}_m(t)) dt + \beta \int_0^T e^{-2\beta t} \|\mathbf{v}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + Y_m(T),$$

où

$$\begin{aligned}
Y_m(T) &= \frac{1}{2} e^{-2\beta T} \|v(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 - e^{-2\beta T} \int_{\Omega} \mathbf{v}_m(T) \mathbf{v}(T) dx + \int_0^T e^{-2\beta t} a(\mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t)) dt \\
&\quad - \int_0^T e^{-2\beta t} a(\mathbf{v}_m(t), \mathbf{v}(t)) dt - \int_0^T e^{-2\beta t} a(\mathbf{v}(t), \mathbf{v}_m(t)) dt + \beta \int_0^T e^{-2\beta t} \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
&\quad - 2\beta \int_0^T \int_{\Omega} e^{-2\beta t} \mathbf{v}_m(t) \mathbf{v}(t) dx dt,
\end{aligned}$$

en utilisant la remarque (2.4) et (2.2.18), on obtient

(2.2.19)

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} Y_m(T) = -\frac{1}{2} e^{-2\beta T} \|v(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_0^T e^{-2\beta t} a(\mathbf{v}_m(t), \mathbf{v}_m(t)) dt - \beta \int_0^T e^{-2\beta t} \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt,$$

De la relation (2.2.11) on déduit

(2.2.20)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( e^{-2\beta t} \|\mathbf{v}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + e^{-2\beta t} a(\mathbf{v}_m(t), \mathbf{v}_m(t)) + \beta e^{-2\beta t} \|\mathbf{v}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = e^{-2\beta t} L(t, \mathbf{v}_m(t)),$$

en intégrant 2.2.20 entre 0 et  $T$ , on trouve

$$\begin{aligned}
(2.2.21) \quad & \frac{1}{2} e^{-2\beta T} \|v_m(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T e^{-2\beta t} a(\mathbf{v}_m(t), \mathbf{v}_m(t)) dt + \beta \int_0^T e^{-2\beta t} \|\mathbf{v}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
&= \frac{1}{2} \|u_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T e^{-2\beta t} L(t, \mathbf{v}_m(t)) dt,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
& \lim_{m \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} e^{-2\beta T} \|v_m(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T e^{-2\beta t} a(\mathbf{v}_m(t), \mathbf{v}_m(t)) dt + \beta \int_0^T e^{-2\beta t} \|\mathbf{v}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right) (2.2.22) \\
&= \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T e^{-2\beta t} L(t, \mathbf{v}(t)) dt.
\end{aligned}$$

Comme  $\mathbf{v}$  est solution faible de (2.1.1), on a alors

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( e^{-2\beta t} \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + e^{-2\beta t} a(\mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t)) + \beta e^{-2\beta t} \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = e^{-2\beta t} L(t, \mathbf{v}(t)),$$

en intégrant cette relation entre 0 et  $T$ , on trouve

$$(2.2.23) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} e^{-2\beta T} \|\mathbf{v}(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T e^{-2\beta t} a(\mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t)) dt + \beta \int_0^T e^{-2\beta t} \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T e^{-2\beta t} L(t, \mathbf{v}(t)) dt, \end{aligned}$$

de (2.2.19), (2.2.22) et (2.2.23), on déduit

$$(2.2.24) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} X_m(T) = 0.$$

La relation (2.2.11) donne

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha \int_0^T e^{-2\beta t} \|\mathbf{v}_m(t) - v(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq \\ &\int_0^T e^{-2\beta t} a(\mathbf{v}_m(t) - \mathbf{v}(t), \mathbf{v}_m(t) - \mathbf{v}(t)) dt + \\ &\beta \int_0^T e^{-2\beta t} \|\mathbf{v}_m(t) - \mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq X_m(T), \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\int_0^T \|\mathbf{v}_m - \mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq e^{-2\beta T} \int_0^T e^{-2\beta t} \|\mathbf{v}_m(t) - \mathbf{v}(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq \frac{e^{2\beta T}}{\alpha} X_m(T),$$

et grâce à (2.2.24) on obtient

$$\mathbf{v}_m \rightarrow \mathbf{v} \text{ quand } m \rightarrow +\infty \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

□

## 2.3 Existence et unicité de la solution du problème semi linéaire

Dans cette section, on s'intéresse à l'existence et l'unicité de la solution du problème semi linéaire. Pour faciliter la démarche de notre étude on va supposer que si les données du problème linéaire  $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ ,  $V \in C(\overline{\Omega})^d$ ,  $\mathbf{g} \in C(\overline{\Omega} \times [0, T])$  et  $\mathbf{f} \in C(\overline{\Omega} \times [0, T])$  alors la solution faible de 2.1.1 est dans  $C(\overline{\Omega} \times [0, T])$ . Sous ces conditions des résultats de régularité plus fort sont démontrés dans par exemple [8].

On considère le problème de convection diffusion semi-linéaire suivant :

$$(2.3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + V \cdot \nabla u = f(u) & \text{dans } Q_T, \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{dans } \Omega, \\ \nu \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases}$$

On suppose que  $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ ,  $V \in C(\overline{\Omega})^d$ ,  $\mathbf{g} \in C(\Gamma \times [0, T])$  et  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  et localement lipchitzienne. On transforme ce problème en un problème équivalent de la manière suivante : Soit  $w$  la solution du problème linéaire suivant :

$$(2.3.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \nu \Delta w + V \cdot \nabla w = 0 & \text{dans } Q_T, \\ w(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{dans } \Omega, \\ \nu \frac{\partial w}{\partial n} = g & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases}$$

**Remarque 2.5** *D'après le théorème 2.1, la solution faible  $\mathbf{w}$  de (2.3.2) existe et est unique.*

On pose

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{w}.$$

alors l'étude du problème (2.3.1) revient à étudier le problème suivant :

$$(2.3.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + V \cdot \nabla v = F(x, t, v) & \text{dans } Q_T, \\ v(\cdot, 0) = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \nu \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases}$$

où

$$F(x, t, v) = f(w(x, t) + v),$$

Donc montrer que le problème (2.3.1) admet une solution faible  $u$  unique, revient à montrer que (2.3.3) admet une solution faible  $u$  unique. L'approche qu'on va utiliser ici est très naïve et s'inspire de la démonstration du théorème de Cauchy Lipchitz pour les équations différentielles, elle consiste à montrer l'existence d'une solution bornée dans un intervalle très petit, cette solution pourra être prolongée jusqu'à un intervalle maximal.

On a le résultat d'existence et d'unicité locale de la solution faible  $\mathbf{v}$  du problème (2.3.3).

**Théorème 2.2** *Si  $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ ,  $V \in C(\overline{\Omega})^d$ ,  $g \in C(\Gamma \times [0, T])$  et  $f$  est localement lipchitzienne, alors il existe  $0 < T_1 < T$  tel que le problème (2.3.3) admet une solution faible  $u$  unique telle que  $u \in C(\overline{\Omega} \times [0, T_1])$ .*

**Preuve** Soit  $R > 0$  fixé, et  $0 < T_1 < T$  que l'on choisira ci dessous, Soit  $R > 0$  fixé et  $0 \leq T_1 \leq T$  que l'on choisira ci dessous.

On note  $\overline{B}(0, R)$  la boule fermée de  $C(\overline{\Omega})$  et

$$\overline{B}_{R, T_1} = \{u \in C(\overline{\Omega} \times [0, T_1]) \text{ tel que } u(\cdot, t) \in \overline{B}(0, R), \forall t \in [0, T_1]\}$$

est fermé dans  $C((\Omega) \times [0, T_1])$ .

L'application  $\phi$  définie de  $\overline{B}_{R, T_1}$  dans  $\overline{B}_{R, T_1}$  par :

$$\phi(v) = y$$

où  $y$  est la solution du problème :

$$(2.3.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \nu \Delta y + V \cdot \nabla y = \tilde{F}(x, t, v) & \text{dans } Q_T, \\ y(\cdot, 0) = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \nu \frac{\partial y}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases}$$

telle que

$$\tilde{F}(x, t, v) = \begin{cases} F(x, t, v) & \text{si } v \in \overline{B}_{R, T_1} \\ F(x, t, R) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On choisira  $R$  et  $T_1$  de telle façon que  $\overline{B}_{R, T_1}$  soit stable par  $\phi$  et que  $\phi$  soit contractante.

1) Stabilité de  $\overline{B}_{R, T_1}$  : On choisira  $T_1$  tel que  $\phi(\overline{B}_{R, T_1}) \subset \overline{B}_{R, T_1}$ . En effet, soit  $v \in \overline{B}_{R, T_1}$  donc  $\tilde{F}(x, t, v) \in C(\overline{\Omega} \times [0, T])$  et donc uniformément bornée et par le principe du maximum on montre que

$$(2.3.5) \quad \|y(\cdot, t)\|_{\infty, \Omega} \leq t \|\tilde{F}\|_{\infty, Q_T}, \text{ pour } t \leq T_1$$

En effet, on pose  $z = y - t \|\tilde{F}\|_{\infty, Q_T}$  et  $y$  est solution de 2.3.4, alors  $z$  est solution du problème

$$(2.3.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} - \nu \Delta z + V \cdot \nabla z = \tilde{F} - \|\tilde{F}\|_{\infty, Q_T} & \text{dans } Q_T, \\ z(\cdot, 0) = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \nu \frac{\partial z}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases}$$

On multiplie la première équation de (2.3.6) par  $z^+$  et on intègre formellement par partie, on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (z^+)^2 dx + \nu \int_{\Omega} \|\nabla z^+\|^2 dx \leq 0.$$

D'où

$$z^+ = 0$$

Ce qui donne (2.3.5).

Donc, on pourra prendre pour le moment  $T_1 \leq \frac{R}{\|\tilde{F}\|_{\infty, Q_T}}$  pour que  $\phi(v) \in \overline{B}_{R, T_1}$

2) Contraction :

On montre que  $\phi$  est contractante, en effet soient  $v_1, v_2 \in \overline{B}_{R, T_1}$  et  $y_1 = \phi(v_1)$ ,  $y_2 = \phi(v_2)$ . Comme  $f$  est localement lipchitzienne, alors il existe une constante  $K > 0$  qui dépend de  $R$  et  $T$  telle que

$$\left| \tilde{F}(x, t, v_1) - \tilde{F}(x, t, v_2) \right| = |f(w(x, t) + v_1) - f(w(x, t) + v_2)| \leq K \|v_1 - v_2\|_{\infty, Q_{T_1}}.$$

D'autre part en posant  $z = y_1 - y_2 = \phi(v_1) - \phi(v_2)$ , en obtenant  $z$  solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} - \nu \Delta z + V \nabla z = \tilde{F}(x, t, v_1) - \tilde{F}(x, t, v_2) & \text{dans } Q_T \\ z(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nu \frac{\partial z}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma_T \end{cases}$$

et par le principe du maximum 4.3.4, on obtient

$$|y_1(x, t) - y_2(x, t)| \leq T_1 \left\| \tilde{F}(x, t, v_1) - \tilde{F}(x, t, v_2) \right\|_{\infty, Q_{T_1}} \leq T_1 K \|v_1 - v_2\|_{\infty, Q_{T_1}}$$

Donc

$$\|\phi(v_1) - \phi(v_2)\|_{\infty, Q_{T_1}} \leq T_1 K \|v_1 - v_2\|_{\infty, Q_{T_1}}.$$

Il suffit de prendre  $T_1 < \frac{1}{K}$  pour assurer la contractante de  $\phi$ .

Donc, on choisit  $T_1$  telle que

$$(2.3.7) \quad T_1 = \Delta T < \min \left( \frac{R}{\|\tilde{F}\|_{\infty, Q_{T_1}}}, \frac{1}{K} \right)$$

D'après le théorème du point fixe de Banach (1.7),  $\phi$  admet un unique point fixe  $v$ ,  $v \in \overline{B}_{T_1, R} \subset C(0, T_1; L^2(\Omega))$ . Ce point fixe est donc une solution faible du problème (2.3.3).  $\square$

**Remarque 2.6** Dans le raisonnement ci dessus on doit s'assurer que  $\Delta T = \min \left( \frac{R}{\|f\|_{\infty, Q_{T_1}}}, \frac{1}{K} \right) \neq 0$  sinon la formule (4.3.9) n'aura aucun sens.  $\Delta T$  dépend fortement du type de croissance de  $f$ ; par exemple si  $g = 0$  et  $f(u) = u$ ,  $\Delta T = 1$ , si  $f(u) = u^2$ ,  $\Delta T = \frac{1}{2R}$  et donc plus que  $R$  est grand plus  $\Delta T$  est petit. Le meilleur choix de  $R$  repose sur une estimation a priori du point fixe i.e. de la solution du problème de départ.

**Remarque 2.7** Le théorème 2.2 est un résultat d'existence et d'unicité locale sur  $[0, \Delta T[$  avec  $\Delta T = \min \left( \frac{R}{\|f\|_{\infty, Q_{T_1}}}, \frac{1}{K} \right)$ . Cette solution peut être prolongée en construisant de la

même façon une solution du problème (2.3.1) avec comme donnée initiale  $u(T_1, \cdot)$  avec  $T_1 \in [0, \Delta[$ , cette solution sera définie sur l'intervalle  $[T_1, T_1 + \Delta T'[$  telle que  $\Delta T'$  vérifiant une relation de type (4.3.9). Ce processus peut être répété jusqu'à obtention d'une solution maximale sur un intervalle maximale  $[0, T_{max}[$  avec  $T_{max} = \infty$  ou bien  $T_{max} < \infty$  et dans ce cas  $\lim_{t \rightarrow T_{max}} \|u(\cdot, t)\|_{\infty, \Omega} = +\infty$ . L'unicité de la solution maximale s'obtient grâce à l'inégalité de Groll et de la condition Lipchitz locale imposée à  $f$ .

# Chapitre 3

## Etude de la stabilité du problème de convection diffusion semi linéaire

Dans ce chapitre on étudie la stabilité du point d'équilibre trivial du problème convection diffusion semi linéaire ci dessus, puis on linéarise ce problème, enfin on étudie la stabilité du problème linéarisé.

### 3.1 Position du problème

On considère le problème convection diffusion semi linéaire

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + V \cdot \nabla u = \lambda \exp(u) - c, & \text{dans } Q_T, \\ u(\cdot, 0) = u_0, & \text{dans } \Omega, \\ \nu \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases}$$

D'après le théorème 2.2 le problème (3.1.1) admet une solution  $u$  unique locale telle que  $u \in C(\bar{\Omega} \times [0, T_{\max}])$  avec  $T_{\max} = +\infty$  ou  $T_{\max}$  fini et dans ce cas  $\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} = +\infty$ .

### 3.2 Etude de la stabilité du problème de convection diffusion semi linéaire

On écrit le problème (3.1.1) formellement sous forme d'une équation différentielle abstraite :

$$(3.2.1) \quad \frac{du}{dt} = f(u)$$

avec

$$\begin{aligned} f(u) &= \nu \Delta u - V \cdot \nabla u + \lambda \exp(u) - c. \\ D_f &= \left\{ u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap W(0, T; H^1(\Omega), (H^1(\Omega))') \text{ et } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \right\} \end{aligned}$$

**Définition 3.1** Une solution  $u$  de (3.2.1) si elle vérifie

$$f(u) = 0,$$

est dite point d'équilibre.

On pose

$$u_e = \log\left(\frac{c}{\lambda}\right),$$

alors  $u_e$  est un point d'équilibre trivial de (3.2.1). On remarque aussi que  $u_e$  est solution de (3.2.1) avec

$$u_0 = u_e$$

**Définition 3.2** Le point d'équilibre  $u_e$  est dit asymptotiquement stable si et seulement si, il existe  $\delta > 0$  tel que si  $\|u(0) - u_e\|_{L^2(\Omega)} < \delta$ , alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - u_e\|_{L^2(\Omega)} = 0$  où  $u$  est une perturbation de  $u_e$

**Théorème 3.1** Le point d'équilibre  $u_e$  n'est pas asymptotiquement stable.

**Preuve** Soit  $\delta u_e$  une petite perturbation de  $u_e$ , on pose

$$u = u_e + \delta u_e$$

soit  $u$  la solution de (3.2.1) avec comme donnée initiale  $u_0$  ci dessus. On pose

$$\delta u = u - u_e$$

et donc  $u$  vérifie l'équation

telle que  $\delta u_e$  une petite perturbation de  $u_e$  qui est constante par rapport à  $x$ , a alors la solution  $u$  de (3.2.1) correspondant à cette donnée initiale est constante par rapport à  $x$  et est solution de l'équation différentielle ordinaire suivante

$$(3.2.2) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = \lambda \exp(u) - c \\ u(0) = u_e + \delta u_e \end{cases}$$

La solution de l'équation différentielle homogène est donnée par

$$u(t) = -\log(-\lambda t - A),$$

la variation de la constante donne

$$(3.2.3) \quad A'(t) = c\lambda t + cA(t),$$

la solution de (3.2.3) est donnée par

$$A(t) = -\lambda t - \frac{\lambda}{c} + \gamma \exp(ct), \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

donc,

$$u(t) = -\log\left(\frac{\lambda}{c} - \gamma \exp(ct)\right),$$

et

$$\gamma = \frac{\lambda}{c} - \exp(-u_0),$$

d'où

$$\begin{aligned} u(t) &= -\log\left(\frac{\lambda}{c} - \left(\frac{\lambda}{c} - \exp(-u_0)\right) \exp(ct)\right) \\ &= -ct - \log\left(\frac{\lambda}{c} \exp(-ct) + \exp(-u_0) - \frac{\lambda}{c}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\frac{\lambda}{c} = \exp(-u_e),$$

d'où

$$u(t) = -ct - \log(\exp(-u_e - ct) + \exp(-u_0) - \exp(-u_e))$$

ou plus simplement

$$u(t) = u_e - ct - \log(\exp(-ct) + \exp(u_e - u_0) - 1).$$

On distingue deux cas pour que  $u$  soit bien définie :

1. Si  $u_e < u_0$ , alors  $u$  est définie sur  $[0, t_*[$ , avec

$$t_* = \frac{1}{c} \log\left(\frac{1}{1 - \exp(u_e - u_0)}\right).$$

et

$$\lim_{t \rightarrow t_*^-} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} = +\infty,$$

et on a un phénomène d'explosion à temps fini et donc, on a une instabilité en temps fini.

2. Si  $u_e > u_0$ , alors  $u$  est définie sur  $[0, +\infty[$ . Dans ce cas, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - u_e\|_{L^2(\Omega)} = -\infty,$$

d'où, on a une instabilité au temps infini.

□

### 3.3 Linéarisation du problème de convection diffusion semi linéaire autour de $u_e$

Dans cette section, on linéarise le problème (3.1.1) autour de  $u_e$ .

**Proposition 3.1** *Le problème linéarisé de (3.1.1) est donné par*

$$(3.3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + V \cdot \nabla u - cu = 0, & \text{dans } Q_T, \\ u(\cdot, 0) = u_0, & \text{dans } \Omega, \\ \nu \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases}$$

**Preuve**  $\delta u_e$  une petite perturbation de  $u_e$ , on pose

$$u = u_e + \delta u_e$$

soit  $u$  la solution de (3.1.1) avec comme donnée initiale  $u_0$  ci dessus. On pose

$$\delta u = u - u_e$$

et donc  $u$  vérifie l'équation

$$(3.3.2) \quad \frac{du}{dt} = f(u_e + \delta u)$$

Le développement de Taylor à l'ordre 1 de  $f$ , est donné par

$$f(u_e + \delta u) = f(u_e) + Df(u_e) \cdot \delta u + o(\|\delta u\|),$$

telle que  $Df(u_e)$  est la différentielle de  $f$  en  $u_e$ . On a

$$Df(u_e) \cdot \delta u = \nu \Delta \delta u - V \cdot \nabla \delta u + c \delta u,$$

d'où

$$f(u_e + \delta u) = \nu \Delta \delta u - V \cdot \nabla \delta u + c \delta u + o(\|\delta u\|),$$

on remplace  $f(u_e + \delta u)$  par  $\nu \Delta(\delta u) - V \cdot \nabla(\delta u) + c \delta u$  (ceci est vrai lorsque  $\delta u$  est très petite), on trouve

$$\frac{d}{dt}(\delta u) = \nu \Delta(\delta u) - V \cdot \nabla(\delta u) + c \delta u,$$

et

$$\delta u(0) = \delta u_e,$$

donc, le problème convection diffusion linéarisé est donné par

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\delta u) - \nu \Delta(\delta u) + V \cdot \nabla(\delta u) - c \delta u = 0, & \text{dans } Q_T \\ \delta u(\cdot, 0) = \delta u_e, & \text{dans } \Omega \\ \nu \frac{\partial}{\partial n}(\delta u) = 0, & \text{sur } \Sigma_T \end{cases}$$

□

### 3.4 Etude de la stabilité du problème de convection diffusion linéarisé

On montre dans cette section que le problème (3.3.1) admet un point d'équilibre instable. On écrit (3.3.1) sous forme le système dynamique suivant :

$$(3.4.1) \quad \frac{du}{dt} = h(u)$$

avec

$$\begin{aligned} h(u) &= \nu \Delta u - V \cdot \nabla u + cu. \\ D_h &= \left\{ u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap W(0, T; H^1(\Omega), (H^1(\Omega))') \text{ et } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \right\} \end{aligned}$$

On pose

$$u_e = 0,$$

alors  $u_e$  est un point d'équilibre de (3.4.1) avec  $u_0 = 0$ .

**Théorème 3.2** *Le point d'équilibre  $u_e$  n'est pas asymptotiquement stable.*

**Preuve** Soit  $\delta u_e$  une petite perturbation de  $u_e$  qui est constante par rapport à  $x$ , on pose

$$u = u_e + \delta u_e$$

en concluant que  $u$  solution de l'équation différentielle ordinaire

$$(3.4.2) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = cu \\ u(0) = u_0 = u_e + \delta u_e \end{cases}$$

la solution de (3.4.2) est donnée par

$$u(t) = (u_e + \delta u_e)e^{ct},$$

on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u(t) - u_e) = +\infty$$

donc, on a une instabilité au temps infini. □

On peut se poser la question suivante : Peut on contrôler la solution du problème linéarisé (3.3.1) pour la ramèner à l'état d'équilibre 0 en temps fini en agissant sur une partie du bord de  $\Omega$ . Cette question sera abordée dans le chapitre suivant.

#### Cas où la perturbation n'est pas constante

L'étude de la stabilité des points d'équilibres de (3.4.1) se fait par l'intermédiaire des valeurs propres de l'opérateur  $-\Delta$ , dans ce qui suit nous tenterons de donner les grandes lignes de cette technique dans le cas où  $V = 0$ . Soit  $\delta u_e$  une petite perturbation du point d'équilibre trivial  $u_e = 0$  qui n'est pas nécessairement constante par rapport à  $x$ , on pose

$$u_0 = u_e + \delta u_e,$$

alors pour tout  $\delta u_e \in L^2(\Omega)$ , la solution de (3.1.1) peut être donnée par la série de Fourier

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \sum_{n \geq 0} y_n(t) \phi_{\lambda_n}.$$

Avec  $\lambda_n$  et  $\phi_n$  sont respectivement les valeurs propres et les fonctions propres associées à l'opérateur  $-\Delta$  avec la condition de Neumann homogène, rappelons que dans ce cas  $\lambda_0 = 0$ .

Alors les harmoniques  $y_n(t)$  vérifient

$$(3.4.3) \quad \begin{cases} \frac{dy_n}{dt} = (c - \lambda_n)y_n \\ y_n(0) = (\delta u_e)_n \end{cases}$$

$(\delta u_e)_n$  étant la coordonnées de  $\delta u_e$  suivant la direction  $\phi_{\lambda_n}$ . La solution de (3.4.3) est donnée par

$$y_n(t) = (\delta u_e)_n \exp((c - \lambda_n)t)$$

Par suite on a si  $(\delta u_e)_0 \neq 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = \infty.$$

Ce mode est donc instable. Les autres modes sont tous stables sauf ceux qui vérifient  $(c - \lambda_n) > 0$  qui sont en nombre fini puisque la suite des valeurs propres est strictement croissante et de limite infini.

# Chapitre 4

## Contrôlabilité du problème de convection diffusion linéarisé

Dans ce chapitre on étudie la contrôlabilité de l'équation de convection diffusion linéarisée, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité du contrôle optimal et on donne ses caractérisations.

### 4.1 Formulation du problème

On considère le problème convection diffusion linéarisé suivant

$$(4.1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + V \cdot \nabla u - cu = 0, & \text{dans } Q_T \\ u(0) = u_0, & \text{dans } \Omega \\ \nu \frac{\partial u}{\partial n} = v, & \text{sur } \Sigma_1 \\ \nu \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Sigma_2 \end{cases}$$

Où  $\Sigma_1 = \gamma \times ]0, T[$ ,  $\gamma = \bigcup_{m=1}^M \gamma_m$  (partie contrôlée). Les  $\gamma_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  sont des parties de la frontière  $\Gamma$  qui vérifient

$$\int_{\gamma_m} d\Gamma > 0.$$

$\Sigma_2 = \Sigma \setminus \Sigma_1$  (partie non contrôlée).  $v = (v_m)_{m=1, \dots, M}$ .

Le problème étudié est le suivant : Soit  $T > 0$  donné, peut on pour tout  $u_0$  donné dans  $L^2(\Omega)$  trouver un contrôle  $v$  qui ramène le problème (4.1.1) à l'état d'équilibre 0, si cela est possible on dit alors que le problème est contrôlable à l'instant  $T$ . De point de vue numérique, l'état 0 n'est jamais exactement atteint à cause des erreurs d'arrondies et d'approximations, pour cela la vraie question est de trouver un contrôle  $v$  tel que  $u(T)$  soit aussi proche que possible de l'état d'équilibre 0. En réalité on ne s'intéresse qu'

à la contrôlabilité approché de l'état 0 qui peut être donnée directement via la théorie du contrôle optimal. La solution  $u$  est l'état du problème (4.1.1) à contrôlé, dépend du contrôle  $v$ , on la note par  $u(v)$ .

Dans notre travail, on cherche un contrôle solution du problème de minimisation suivant

$$(4.1.2) \quad \inf_{\mathcal{U}} J(v),$$

avec  $\mathcal{U} = L^2(0, T; \mathbb{R}^M)$  est l'espace des contrôles admissibles muni de la norme

$$\|v\|_{\mathcal{U}} = \left( \int_0^T |v(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$J$  est la fonction de coût définie par :

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2} \|v\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{k_1}{2} \|u(v)\|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))}^2 + \frac{k_2}{2} \|u(T, v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T |v(t)|^2 dt + \frac{k_1}{2} \int_{Q_T} u(v)^2 dx dt + \frac{k_2}{2} \int_{\Omega} (u(T, v))^2 dx. \end{aligned}$$

avec  $k_1 \geq 0$ ,  $k_2 \geq 0$  et  $k_1 + k_2 > 0$ .

$$|v|^2 = (v, v)_{\mathbb{R}^M} = \sum_{m=1}^M v_m(t)^2.$$

**Lemme 4.1** *La fonction de coût  $J$  est strictement convexe, coercive et semi continue inférieurement.*

**Preuve**

1.  $J$  est strictement convexe :

Soient  $v, w \in \mathcal{U}$  tels que  $v \neq w$ ,  $u(v)$  et  $u(w)$  les solutions de (4.1.1) correspondantes.

On a

$$\begin{aligned} J(\theta v + (1 - \theta)w) &= \frac{1}{2} \|\theta v + (1 - \theta)w\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{k_1}{2} \|u(\theta v + (1 - \theta)w)\|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))}^2 \\ &\quad + \frac{k_2}{2} \|u(T, \theta v + (1 - \theta)w)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$u(\theta v + (1 - \theta)w) = \theta u(v) + (1 - \theta)u(w) \text{ et } u(T, \theta v + (1 - \theta)w) = \theta u(T, v) + (1 - \theta)u(T, w).$$

D'où

$$\begin{aligned} J(\theta v + (1 - \theta)w) &= \frac{1}{2} \|\theta v + (1 - \theta)w\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{k_1}{2} \|\theta u(v) + (1 - \theta)u(w)\|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))}^2 \\ &\quad + \frac{k_2}{2} \|\theta u(T, v) + (1 - \theta)u(T, w)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Young (1.4.3), on obtient

$$\begin{aligned} J(\theta v + (1 - \theta)w) &\leq \frac{1}{2}\theta^2\|v\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{k_1}{2}\theta^2\|u(v)\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \frac{k_2}{2}\theta^2\|u(T,v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1 - \theta)^2\|w\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{k_1}{2}(1 - \theta)^2\|u(w)\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \\ &\quad + \frac{k_2}{2}(1 - \theta)^2\|u(T,w)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Comme  $\theta \in ]0, 1[$ , alors

$$\begin{aligned} J(\theta v + (1 - \theta)w) &< \frac{1}{2}\theta\|v\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{k_1}{2}\theta\|u(v)\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \frac{k_2}{2}\theta\|u(T,v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1 - \theta)\|w\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{k_1}{2}(1 - \theta)\|u(w)\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \\ &\quad + \frac{k_2}{2}(1 - \theta)\|u(T,w)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Donc

$$J(\theta v + (1 - \theta)w) < \theta J(v) + (1 - \theta)J(w).$$

2. Coercivité :

Soit  $v \in \mathcal{U}$ , on a

$$J(v) \geq \frac{1}{2}\|v\|_{\mathcal{U}}^2$$

3.  $J$  est semi continue inférieurement :

D'après le théorème 2.1 l'application  $v \mapsto u$  est continue de  $\mathcal{U}$  dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , donc  $J$  est continue pour la topologie forte de  $\mathcal{U}$ . D'où  $J$  est semi continue inférieurement.

□

**Définition 4.1** *Un contrôle  $v$  est solution de problème de minimisation (4.1.2) s'appelle contrôle optimal.*

## 4.2 Existence et unicité du contrôle optimal

Dans cette partie on montre l'existence et l'unicité du contrôle optimal, on a le résultat suivant

**Théorème 4.1** *Le problème (4.1.2) admet une solution unique.*

**Preuve**

**Existence :** Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathcal{U}$  telle que

$$J(v_n) \rightarrow \inf_{\mathcal{U}} J(v) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

On a  $J$  est coercive, c'est à dire il existe  $C = \frac{1}{2}$  telle que

$$(4.2.1) \quad J(v) \geq C\|v\|_{\mathcal{U}}^2, \quad \forall v \in \mathcal{U}$$

de (4.2.1), on déduit que la suite  $(v_n)$  est bornée, d'où on peut extraire une sous suite  $(v_{n_k})$  de  $(v_n)$  telle que

$$v_{n_k} \rightharpoonup w \text{ faiblement dans } \mathcal{U},$$

donc, on a

$$(4.2.2) \quad J(w) \geq \inf_{\mathcal{U}} J(v).$$

D'après le lemme 4.1 et le corollaire 1.1, on déduit

$$(4.2.3) \quad \liminf_{k \rightarrow +\infty} J(v_{n_k}) \geq J(w),$$

de (4.2.2) et (4.2.3) on obtient

$$\inf_{\mathcal{U}} J(v) = J(w).$$

**Unicité :** On suppose que  $\inf_{\mathcal{U}} J(v)$  est atteint en  $w_1$  et en  $w_2$  tels que  $w_1 \neq w_2$ . On a

$$(4.2.4) \quad J\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right) \geq \inf_{\mathcal{U}} J(v).$$

D'autre part, d'après le lemme (4.1)  $J$  est strictement convexe, donc

$$(4.2.5) \quad J\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right) < \inf_{\mathcal{U}} J(v),$$

de (4.2.4) et (4.2.5), on déduit que

$$w_1 = w_2.$$

□

### 4.3 Caractérisation du contrôle optimal

Dans cette section, on donne quelques caractérisations du contrôle optimal.

### 4.3.1 Conditions d'optimalités

Dans cette partie on montre que la fonctionnelle  $J$  est différentiable sur  $\mathcal{U}$  et on calcule  $J'$  et on donne les conditions d'optimalités.

**Proposition 4.1**  $J$  est différentiable sur  $\mathcal{U}$  et on a

$$\langle J'(v), w \rangle_{\mathcal{U}', \mathcal{U}} = \int_0^T (v(t), w(t)) dt + k_1 \int_{Q_T} u(v) z(w) dx dt + k_2 \int_{\Omega} u(T, v) z(T, w) dx, \quad \forall w, \forall v \in \mathcal{U}$$

où  $z(w)$  est l'état du problème convection diffusion linéarisé associé à le contrôle  $w$

$$(4.3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} - \nu \Delta z + V \cdot \nabla z - cz = 0, & \text{dans } Q_T \\ z(\cdot, 0) = 0, & \text{dans } \Omega \\ \nu \frac{\partial z}{\partial n} = w, & \text{sur } \Sigma_1 \\ \nu \frac{\partial z}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Sigma_2 \end{cases}$$

**Preuve** Soient  $v, \delta v \in \mathcal{U}$ ,  $u(v)$  la solution de problème (4.1.1) et  $y(v + \delta v)$  la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - \nu \Delta y + V \cdot \nabla y - cy = 0, & \text{dans } Q_T \\ y(\cdot, 0) = u_0, & \text{dans } \Omega \\ \nu \frac{\partial y}{\partial n} = v + \delta v & \text{sur } \Sigma_1 \\ \nu \frac{\partial y}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Sigma_2 \end{cases}$$

on a

$$(4.3.2) \quad J(v + \delta v) - J(v) = \int_0^T (v, \delta v)_{\mathbb{R}^M} dt + \frac{k_1}{2} \int_{Q_T} (y + u)(y - u) dx dt$$

$$(4.3.3) \quad + \frac{k_2}{2} \int_{\Omega} (y(T) - u(T))(y(T) + u(T)) dx + \frac{1}{2} \int_0^T |\delta v|^2 dt$$

On pose

$$\delta u = y - u,$$

donc,  $\delta u$  est la solution du problème

$$(4.3.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\delta u) - \nu \Delta(\delta u) + V \cdot \nabla(\delta u) - c\delta u = 0, & \text{dans } Q_T \\ \delta u(0) = 0, & \text{dans } \Omega \\ \nu \frac{\partial}{\partial n}(\delta u) = \delta v, & \text{sur } \Sigma_1 \\ \nu \frac{\partial}{\partial n}(\delta u) = 0, & \text{sur } \Sigma_2 \end{cases}$$

On remplace  $(y - u)$  par  $\delta u$  et  $y$  par  $(\delta u + u)$  dans (4.3.2), on obtient

$$\begin{aligned} J(v + \delta v) - J(v) &= \int_0^T (v, \delta v)_{\mathbb{R}^M} dt + k_1 \int_{Q_T} u(v) \delta u(\delta v) dx dt + k_2 \int_{\Omega} u(T, v) \delta u(T, \delta v) dx \\ &\quad + \frac{k_1}{2} \int_{Q_T} (\delta u(\delta v))^2 dx dt + \frac{k_2}{2} \int_{\Omega} (\delta u(T, \delta v))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^T |\delta v|^2 dt \end{aligned}$$

d'après le théorème (2.1), l'application

$$\delta v \rightarrow \int_0^T (v, \delta v)_{\mathbb{R}^M} dt + k_1 \int_{Q_T} u(v) \delta u(\delta v) dx dt + k_2 \int_{\Omega} u(T, v) \delta u(T, \delta v) dx$$

est linéaire continue de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathbb{R}$ .

On pose

$$A(\delta v) = \frac{k_1}{2} \int_{Q_T} (\delta u)^2 dx dt + \frac{k_2}{2} \int_{\Omega} (\delta u(T))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^T |\delta v|^2 dt.$$

De la dépendance continue par rapport aux données, il existe une constante  $B > 0$  telle que

$$|A(\delta v)| \leq \left( \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2} + \frac{1}{2} \right) \|\delta v\|_{\mathcal{U}}^2.$$

Donc

$$\lim_{\|\delta v\|_{\mathcal{U}} \rightarrow 0} \frac{|A(\delta v)|}{\|\delta v\|_{\mathcal{U}}} = 0$$

d'où,  $J$  est différentiable en  $v$  pour tout  $v \in \mathcal{U}$  et on a

$$\langle J'(v), w \rangle_{\mathcal{U}' \times \mathcal{U}} = \int_0^T (v(t), w(t))_{\mathbb{R}^M} dt + k_1 \int_{Q_T} u(v) z(w) dx dt + k_2 \int_{\Omega} u(T, v) z(T, w) dx, \quad \forall w \in \mathcal{U}$$

où  $z(w)$  est la solution de (4.3.4). □

**Théorème 4.2** Soit  $\bar{v}$  le contrôle optimal, alors on a

$$(4.3.5) \quad \bar{v}_m = - \int_{\gamma_m} p d\Gamma, \quad \forall m = 1, \dots, M$$

où  $p$  est l'état du problème

$$(4.3.6) \quad \begin{cases} -\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{p} - V \cdot \nabla \mathbf{p} - c\mathbf{p} = k_1 \mathbf{u}(\bar{v}), & \text{dans } Q_T \\ \mathbf{p}(\cdot, T) = k_2 \mathbf{p}(\cdot, T), & \text{dans } \Omega \\ \nu \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Sigma_T \end{cases}$$

et  $\mathbf{u}(\bar{v})$  l'état de problème (4.1.1)

**Preuve** Soient  $\bar{v}$  et  $v$  deux contrôles,  $\mathbf{u}(\bar{v})$  est l'état de problème (4.1.1) associé à  $\bar{v}$  et  $\mathbf{z}(v)$  est l'état de problème (4.3.1).

Donc  $\mathbf{p}$  vérifie pour  $p.p.$   $t \in (0, T)$

$$\int_0^T \left\langle -\frac{d\mathbf{p}}{dt}, \mathbf{w} \right\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} dt + \int_0^T a_2(\mathbf{p}, \mathbf{w}) dt = k_1 \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u}(\bar{v}) \mathbf{w} dx dt, \forall \mathbf{w} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)),$$

avec

$$(4.3.7) \quad a_2(\mathbf{p}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} (\nu \nabla \mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{w} + V \cdot \nabla \mathbf{w} \mathbf{p} - c\mathbf{p} \mathbf{w}) dx, \forall \mathbf{w}, \mathbf{p} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)),$$

en particulier pour  $\mathbf{w} = \mathbf{z}(\mathbf{v})$ .

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle -\frac{d\mathbf{p}}{dt}, \mathbf{z} \right\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} dt &= \int_0^T \left\langle \frac{d\mathbf{z}}{dt}, \mathbf{p} \right\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} dt - k_2 \mathbf{u}(\mathbf{T}) \mathbf{z}(\mathbf{T}) \\ \int_0^T \left\langle \frac{d\mathbf{z}}{dt}, \mathbf{p} \right\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} dt &= - \int_0^T a(\mathbf{z}, \mathbf{p}) dt + \int_0^T \sum_{m=1}^M \left( \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{p} d\Gamma \right) v_m dt, \end{aligned}$$

où

$$a(\mathbf{z}, \mathbf{p}) = \int_{\Omega} (\nu \nabla \mathbf{z} \cdot \nabla \mathbf{p} + V \cdot \nabla \mathbf{z} \mathbf{p} - c\mathbf{z} \mathbf{p}) dx, \forall \mathbf{z}, \mathbf{p} \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

Donc, on obtient

$$- \int_0^T a(\mathbf{z}, \mathbf{p}) dt + \int_0^T \sum_{m=1}^M \left( \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{p} d\Gamma \right) v_m dt + \int_0^T a_2(\mathbf{p}, \mathbf{z}) dt - k_2 \mathbf{u}(\mathbf{T}) \mathbf{z}(\mathbf{T}) k_1 = \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u}(\bar{v}) \mathbf{z} dx dt,$$

Donc

$$(4.3.8) \quad k_2 \int_{\Omega} \mathbf{u}(T) \mathbf{z}(T) dx + k_1 \int_{Q_T} \mathbf{u}(\bar{v}) \mathbf{z}(v) dx dt = \int_0^T \sum_{m=1}^M \left( \int_{\mathcal{V}_m} \mathbf{p} d\Gamma \right) v_m dt,$$

d'après la proposition (4.1),  $J$  est différentiable en  $\bar{v}$  et on a

$$(4.3.9) \quad \langle J'(\bar{v}), v \rangle_{\mathcal{U}', \mathcal{U}} = \int_0^T \bar{v}(t)v(t)dt + k_1 \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u}z dx dt + k_2 \int_{\Omega} \mathbf{u}(T)\mathbf{z}(T)dx$$

de (4.3.9) et, on conclut que

$$\langle J'(\bar{v}), v \rangle_{\mathcal{U}', \mathcal{U}} = \int_0^T \sum_{m=1}^M \left( \bar{v}_m + \int_{\gamma_m} \mathbf{p} d\Gamma \right) v_m.$$

Donc

$$J'(\bar{v}) = \left\{ \bar{v}_m + \int_{\gamma_m} \mathbf{p} d\Gamma \right\}_{m=1}^M.$$

La condition nécessaire pour que  $\bar{v}$  soit le contrôle optimal est

$$J'(\bar{v}) = 0,$$

d'où

$$\bar{v}_m = - \int_{\gamma_m} \mathbf{p} d\Gamma \quad , m = 1, \dots, M$$

où  $p$  est la solution de (4.3.6) et  $u(\bar{v})$  est l'état du problème (4.1.1).  $\square$

**Définition 4.2** *La solution  $\mathbf{p}$  du problème (4.3.6) est dite état adjoint de l'état  $\mathbf{u}(\bar{v})$  du problème (4.1.1) associée au contrôle optimal  $\bar{v}$ .*

### 4.3.2 Etude du problème adjoint

Dans cette partie, on étudie l'existence, l'unicité, dépendance par rapport aux données, et la régularité de la solution de problème (4.3.6). La formulation faible du problème (4.3.6) est donnée par

$$(4.3.10) \quad \begin{cases} \left\langle -\frac{dp}{dt}, w \right\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} + a_2(p, w) = k_1 \int_{\Omega} u w dx \quad , \forall w \in H^1(\Omega), \text{ p.p } t \in (0, T) \\ p(T) = k_2 u(T) \end{cases}$$

avec  $a_2$  est définie par (4.3.7) est bilinéaire, continue sur  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  et vérifie la condition de coercivité suivante :

$$\begin{cases} \text{il existe } \lambda_2 \in \mathbb{R}, \alpha_2 > 0 \text{ tel que} \\ a_2(w, w) + \lambda_2 \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \alpha_2 \|w\|_{H^1(\Omega)}^2, \forall w \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

L'application  $w \rightarrow k_1 \int_{\Omega} \mathbf{u} w dx$  est linéaire, continue sur  $H^1(\Omega)$ .

**Remarque 4.1** D'après la remarque (2.1) du chapitre 2, on déduit

$$\mathbf{p} \in C(0, T; L^2(\Omega)),$$

donc,  $\mathbf{p}(T)$  a un sens.

#### 4.3.2.1 Existence et unicité de solution faible

**Théorème 4.3** Le problème (4.3.6) admet une solution faible unique  $\mathbf{p} \in W(0, T; H^1(\Omega), (H^1(\Omega))') \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  de plus on a

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{p}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(T) \left[ k_2^2 \|\mathbf{u}(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + k_1^2 \|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 \right]$$

et

$$\|\mathbf{p}\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 \leq C(T) \left[ k_2^2 \|\mathbf{u}(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + k_1^2 \|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 \right]$$

**Preuve** On pose

$$q(t) = p(T - t), \quad \forall t \in [0, T]$$

donc  $q$  est solution du problème suivant

$$(4.3.11) \quad \begin{cases} \left\langle \frac{d\mathbf{q}}{dt}, w \right\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} + a_2(\mathbf{q}, w) = k_1 \int_{\Omega} \mathbf{u}(T - t) w dx, \quad \forall w \in H^1(\Omega) \\ \mathbf{q}(0) = k_2 \mathbf{u}(T) \end{cases}$$

d'après le théorème (2.1), le problème (4.3.11) admet une solution faible unique  $q$  vérifie

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{q}\|_{L^2(\Omega)} \leq C(T) \left[ k_2^2 \|\mathbf{u}(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + k_1^2 \int_0^T \|\mathbf{u}(T - t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\mathbf{q}\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} \leq C(T) \left[ k_2^2 \|\mathbf{u}(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + k_1^2 \int_0^T \|\mathbf{u}(T - t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{p}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(T) \left[ k_2^2 \|\mathbf{u}(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + k_1^2 \|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 \right]$$

et

$$\|\mathbf{p}\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 \leq C(T) \left[ k_2^2 \|\mathbf{u}(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + k_1^2 \|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 \right]$$

□

### 4.3.3 Equation fonctionnelle

Dans cette partie, on donne une autre caractérisation du contrôle optimal, on introduit l'opérateur  $\mathcal{A}$  défini sur  $\mathcal{U}$  dans  $\mathcal{U}$  par

$$\mathcal{A}v = \left\{ v_m + \int_{\gamma_m} \mathbf{p} d\Gamma \right\}_{m=1}^M$$

où  $\mathbf{p}$  est l'état adjoint de l'état  $\mathbf{z}(v)$  solution de problème (4.3.1).

**Proposition 4.2** *L'opérateur  $\mathcal{A}$  est symétrique, fortement elliptique, de plus  $\mathcal{A}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathcal{U}$*

**Preuve**

i)  $\mathcal{A}$  est symétrique :

Soient  $v_1$  et  $v_2$  deux contrôles,  $\mathbf{p}_i$  ( $i = 1, 2$ ) l'état adjoint de l'état  $\mathbf{z}_i(v_i)$  solution de (4.3.1). On a

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}v_1, v_2)_{\mathcal{U}} &= \int_0^T (\mathcal{A}v_1) v_2 dt \\ &= \int_0^T v_1 \cdot v_2 dt + \int_0^T \sum_{m=1}^M \int_{\gamma_m} \mathbf{p}_1 v_{2m} d\Gamma dt \end{aligned}$$

On a

$$(4.3.12) \quad \int_0^T \left\langle \frac{d\mathbf{z}_2}{dt}, \mathbf{p}_1 \right\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} dt + \int_0^T a(\mathbf{z}_2, \mathbf{p}_1) dt = \int_0^T \sum_{m=1}^M \int_{\gamma_m} p_1 v_{2m} d\Gamma dt.$$

D'autre part, on a

$$(4.3.13) \quad \int_0^T \left\langle \frac{d\mathbf{z}_2}{dt}, \mathbf{p}_1 \right\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} dt = - \int_0^T \left\langle \frac{d\mathbf{p}_1}{dt}, \mathbf{z}_2 \right\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} dt + k_2 \mathbf{z}_2(T) \mathbf{p}_1(T),$$

et

$$(4.3.14) \quad - \int_0^T \left\langle \frac{d\mathbf{p}_1}{dt}, \mathbf{z}_2 \right\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} dt = - \int_0^T a_2(\mathbf{z}_2, \mathbf{p}_1) dt + k_1 \int_{Q_T} \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 dx dt.$$

De (4.3.12), (4.3.13) et (4.3.14), on obtient

$$(4.3.15) \quad (\mathcal{A}v_1, v_2)_{\mathcal{U}} = \int_0^T v_1 \cdot v_2 dt + k_1 \int_{Q_T} \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 dx dt + k_2 \int_{\Omega} \mathbf{z}_1(T) \mathbf{z}_2(T) dx.$$

D'où  $\mathcal{A}$  est symétrique.

ii)  $\mathcal{A}$  est fortement elliptique :

Soit  $v$  un contrôle non nul, d'après (4.3.15) on a

$$(4.3.16) \quad (\mathcal{A}v, v)_{\mathcal{U}} \geq \|v\|_{\mathcal{U}}^2,$$

donc,  $\mathcal{A}$  est fortement elliptique.

iii)  $\mathcal{A}$  est un isomorphisme

D'après le théorème (2.1) et le théorème (4.3), on déduit que l'opérateur  $\mathcal{A}$  est continu sur  $\mathcal{U}$ . Comme  $\mathcal{A}$  est fortement elliptique, alors il est injectif, en effet soit  $v \in \mathcal{U}$  tel que  $\mathcal{A}v = 0$ , on utilise (4.3.16), on obtient

$$v = 0$$

donc

$$\ker \mathcal{A} = \{0\}.$$

On montre que  $\mathcal{A}$  est surjectif.

D'abord, on montre que  $\mathcal{A}$  est d'image fermé, en effet soit  $(w_n)$  une suite de  $\text{Im} \mathcal{A}$  qui converge vers  $w$  dans  $\mathcal{U}$ , donc il existe une suite  $(v_n)$  de  $\mathcal{U}$ , telle que

$$\mathcal{A}v_n = w_n.$$

D'autre part

$$(w_n, v_n)_{\mathcal{U}} = (\mathcal{A}v_n, v_n)_{\mathcal{U}} \geq \frac{1}{2} \|v_n\|_{\mathcal{U}}^2,$$

et d'après l'inégalité de Young (1.4.3), on trouve

$$(w_n, v_n)_{\mathcal{U}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \|w_n\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|v_n\|_{\mathcal{U}}^2,$$

donc

$$(4.3.17) \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\varepsilon}\right) \|v_n\|_{\mathcal{U}}^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \|w_n\|_{\mathcal{U}}^2,$$

on choisit  $\varepsilon = 2$ , on obtient

$$(4.3.18) \quad \|v_n\|_{\mathcal{U}}^2 \leq 4 \|w_n\|_{\mathcal{U}}^2,$$

de (4.3.18), on conclut

$$\|v_n - v_m\|_{\mathcal{U}}^2 \leq 4 \|w_n - w_m\|_{\mathcal{U}}^2, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

comme  $(w_n)$  est une suite de Cauchy, alors  $(v_n)$  est une suite de Cauchy, donc elle converge vers une limite notée  $v$  dans  $\mathcal{U}$ . De la continuité de  $\mathcal{A}$  on déduit que

$$w = \mathcal{A}v$$

d'où  $w \in \text{Im} \mathcal{A}$ .

Maintenant on montre que

$$\text{Im } \mathcal{A} = \mathcal{U}$$

cela découle de la relation

$$\overline{\text{Im } \mathcal{A}} = (\ker \mathcal{A}^*)^\perp$$

et du fait que  $\mathcal{A}$  est symétrique donc auto adjoint, d'où

$$\text{Im } \mathcal{A} = \mathcal{U}$$

et  $\mathcal{A}$  est bijectif.

D'après le corolaire (1.2) du chapitre 1,  $\mathcal{A}^{-1}$  est continu.

□

On a le résultat suivant

**Théorème 4.4** *Soit  $\bar{v}$  le contrôle optimal, alors  $\bar{v}$  est solution de l'équation fonctionnelle*

$$(4.3.19) \quad \mathcal{A}\bar{v} = \beta$$

avec

$$\beta = - \left\{ \int_{\gamma_m} P_0 d\Gamma \right\}_{m=1}^M$$

et  $P_0$  l'état adjoint de l'état  $U_0$  associée au contrôle nul solution de problème (4.1.1).

**Preuve** Soient  $\bar{v}$  le contrôle optimal,  $\mathbf{P}_0$  l'état adjoint de l'état  $\mathbf{U}_0$  solution de problème (4.1.1) associée à  $v = 0$ . On pose

$$(4.3.20) \quad \begin{cases} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{U}_0, \\ \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - \mathbf{P}_0 \end{cases}$$

alors l'état  $\bar{\mathbf{u}}(\bar{v})$  est solution de (4.3.1) et  $\bar{\mathbf{p}}$  son état adjoint. Par suite

$$\mathcal{A}\bar{v} = \left\{ \bar{v}_m + \int_{\gamma_m} \bar{\mathbf{p}} d\Gamma \right\}_{m=1}^M,$$

et de (4.3.5) et (4.3.20), on déduit que

$$\mathcal{A}\bar{v} = - \left\{ \int_{\gamma_m} \mathbf{P}_0 d\Gamma \right\}_{m=1}^M.$$

On pose

$$\beta = - \left\{ \int_{\gamma_m} \mathbf{P}_0 d\Gamma \right\}_{m=1}^M$$

et on obtient le résultat.

□

### 4.3.4 Formulation faible

On a montré dans le paragraphe précédent que le contrôle optimal  $\bar{v}$  est solution de l'équation fonctionnelle (4.3.19). La formulation faible de (4.3.19) est donnée par

$$(4.3.21) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \bar{v} \in \mathcal{U} \\ d(\bar{v}, v) = \mathcal{L}(v), \forall v \in \mathcal{U} \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} d(\bar{v}, v) &= (\mathcal{A}\bar{v}, v)_{\mathcal{U}} \\ &= \int_0^T \bar{v}v dt + k_1 \int_{Q_T} \mathbf{z}(\bar{v})\mathbf{z}(v) dx dt + k_2 \int_{\Omega} \mathbf{z}(\bar{v}, T)\mathbf{z}(v, T) dx \end{aligned}$$

$d$  est évidemment bilinéaire, continue sur  $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ , symétrique et coercive.

$$\mathcal{L}(v) = - \int_0^T \sum_{m=1}^M \int_{\gamma_m} \mathbf{P}_0 v_m d\Gamma dt$$

$\mathcal{L}$  est linéaire continue sur  $\mathcal{U}$ .

**Proposition 4.3** *le problème (4.3.21) admet une solution unique caractérisée par*

$$\frac{1}{2}d(\bar{v}, \bar{v}) - \mathcal{L}(\bar{v}) = \inf_{\mathcal{U}} \left\{ \frac{1}{2}d(v, v) - \mathcal{L}(v) \right\}$$

**Preuve** D'après le théorème de Lax Milgram 1.9, le problème (4.3.21) admet une solution unique  $\bar{v}$ , de plus comme  $d$  est symétrique,  $\bar{v}$  est caractérisée par

$$\frac{1}{2}d(\bar{v}, \bar{v}) - \mathcal{L}(\bar{v}) = \inf_{\mathcal{U}} \left\{ \frac{1}{2}d(v, v) - \mathcal{L}(v) \right\}$$

□

## Chapitre 5

# Approximation numérique par éléments finis et par le gradient conjugué

Dans ce chapitre, on utilise les éléments finis de Lagrange triangulaires de type 1 pour résoudre le problème convection diffusion linéarisé

$$(5.0.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + V \cdot \nabla u - cu = 0, & \text{dans } Q_T \\ u(0) = u_0, & \text{dans } \Omega \\ \nu \frac{\partial u}{\partial n} = v, & \text{sur } \Sigma_1 \\ \nu \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Sigma_2, \end{array} \right.$$

et son problème adjoint

$$(5.0.2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial p}{\partial t} - \nu \Delta p - V \cdot \nabla p - cp = k_1 u(v), & \text{dans } Q_T \\ p(T) = k_2 u(T), & \text{dans } \Omega \\ \nu \frac{\partial p}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Sigma, \end{array} \right.$$

enfin on applique la méthode du gradient conjugué pour résoudre le problème.

$$\inf_u J(v)$$

où  $J(v)$  a été définie dans le chapitre 4. Dans toute la suite nous supposons que  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^2$ .

### 5.1 Approximation par éléments finis de la solution faible du problème convection diffusion linéarisé

Dans cette section, on donne une approximation par éléments finis de Lagrange triangulaires de la solution de (5.0.1).

### 5.1.1 Semi discrétisation

Soient  $\Omega$  un domaine polygonal de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(\tau_h)$  une famille régulière de triangulation de  $\Omega$  et  $(K, \Sigma_K, \mathbb{P}_K)_{K \in \tau_h}$  une famille d'éléments finis de Lagrange triangulaires de type  $1 \leq k \leq 3$ .

On définit l'espace  $V_h$  de dimension finie  $I(h)$  par :

$$V_h = \{v \in C(\bar{\Omega}), \forall K \in \tau_h, v_K \in \mathbb{P}_K\}$$

On suppose qu'on connaît une base  $(\psi_i)_{1 \leq i \leq I(h)}$  de  $V_h$ , bien entendu les fonctions  $\psi_i$ ,  $1 \leq i \leq I(h)$  sont les fonctions de base d'un élément fini  $(K, \Sigma_K, \mathbb{P}_K)$ . On note  $u_h(t)$  la solution approchée de (5.0.1), et on considère le problème semi discrétisé suivant

$$(5.1.1) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u_h(t) \in W(0, T, V_h, V_h) \\ \int_{\Omega} \frac{du_h}{dt}(t) v_h dx + a(u_h(t), v_h) = L(t, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \\ u_h(0) = u_{0h} \end{cases}$$

où  $a$  et  $L$  ont été définis dans le chapitre 2. On peut choisir  $u_{0h}$  égale la projection de  $u_0$  sur  $V_h$  dans  $L^2(\Omega)$ , c'est à dire

$$(5.1.2) \quad \int_{\Omega} u_{0h} v_h dx = \int_{\Omega} u_0 v_h dx, \quad \forall v_h \in V_h .$$

**Théorème 5.1** *Le problème (5.1.1) admet une seule solution.*

**Preuve** La preuve est en tout point analogue à celle du théorème 2.1. On pose

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^{I(h)} c_j(t) \psi_j,$$

et

$$u_{0h} = \sum_{j=1}^{I(h)} c_{0j} \psi_j,$$

avec  $c_{0j} \in \mathbb{R}$  et sont choisis de façon à ce que (5.1.2) soit vérifiée. Donc, on obtient le système différentielle d'ordre 1 dans  $\mathbb{R}^{I(h)}$

$$\begin{cases} M_h \frac{dc}{dt}(t) + R_h c(t) = F_h(t) \\ c(0) = c_0 \end{cases}$$

où  $M_h$  est la matrice de masse définie par

$$(M_h)_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i \psi_j dx, \quad 1 \leq i, j \leq I(h),$$

$R_h$  est la matrice de rigidité définie par

$$(R_h)_{ij} = a(\psi_i, \psi_j), \quad 1 \leq i, j \leq I(h),$$

$$F_h(t) = (F_j(t))_{1 \leq j \leq I(h)}, \quad F_j(t) = L(t, \psi_j),$$

$$c_0 = (c_{0,j}), \quad 1 \leq j \leq I(h),$$

la matrice  $M_h$  est symétrique définie positive, en effet soit  $x \in \mathbb{R}^{I(h)}$ , on a

$$\begin{aligned} M_h x \cdot x &= \sum_{i=1}^{I(h)} \sum_{j=1}^{I(h)} \left( \int_{\Omega} \psi_i \psi_j dx \right) x_i x_j \\ &= \int_{\Omega} \left( \sum_{j=1}^{I(h)} x_j \psi_j \right) \left( \sum_{i=1}^{I(h)} x_i \psi_i \right) dx \\ &= \left\| \sum_{j=1}^{I(h)} x_j \psi_j \right\|_{L^2(\Omega)}^2 > 0 \text{ si } x \neq 0, \end{aligned}$$

par conséquent  $M_h$  est inversible, donc on obtient le problème de Cauchy

$$(5.1.3) \quad \begin{cases} \frac{dc}{dt}(t) = M_h^{-1} F_h(t) - M_h^{-1} R_h c(t) \\ c(0) = c_0 \end{cases}$$

la fonction  $x \rightarrow M_h^{-1} F_h(t) - M_h^{-1} R_h x$  est lipchitzienne, donc (5.1.3) admet une unique solution. Il s'agit de résoudre numériquement (5.1.3).  $\square$

L'estimation de l'erreur est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 5.2** *On suppose que  $(\tau_h)$  une famille régulière de triangulation de  $\Omega$  et  $(K, \Sigma_K, \mathbb{P}_K)_{K \in \tau_h}$  une famille d'éléments finis de Lagrange triangulaires de type  $k$  tel que  $1 \leq k \leq 3$ .*

*Alors il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  telle que si la solution faible de (5.0.1) appartient à  $H^{k+1}(\Omega)$  on a*

$$\| u - u_h \|_{H^1(\Omega)} \leq C h^k | u |_{H^{k+1}(\Omega)}$$

**Preuve** Voir par exemple Raviart Thomas [11].  $\square$

### 5.1.2 Discrétisation totale

Pour résoudre (5.1.3), on utilise le schéma d'Euler semi implicite, et pour cela on partage l'intervalle  $[0, T]$  en  $N$  intervalles de même longueur  $\Delta t = \frac{T}{N}$ .

On pose

$$t_i = i\Delta t, \quad 0 \leq i \leq N.$$



d'où

$$(M_h + \nu \Delta t A_h) x \geq c' \left\| \sum_{j=1}^{I(h)} x_j \psi_j \right\|_{H^1(\Omega)}^2 > 0, \text{ si } x \neq 0,$$

donc (5.1.5) admet une unique solution  $c^n$  à chaque itération  $n$ ,  $1 \leq n \leq N$ . □

**Remarque 5.1** A chaque itération  $n$ ,  $1 \leq n \leq N$  il faut résoudre le système linéaire

$$(5.1.6) \quad (M_h + \nu \Delta t A_h) c^n = \beta$$

où

$$\beta = (M_h - \Delta t E_h + \Delta t c M_h) c^{n-1} + \Delta t F_h^n$$

donc,  $\beta$  est calculé à l'itération  $n-1$ . Comme  $M_h + \nu \Delta t A_h$  est symétrique définie positive, alors on peut utiliser la factorisation de Cholesky pour résoudre le système (5.1.6), de plus la matrice  $M_h + \nu \Delta t A_h$  ne dépend pas de  $n$ , donc il suffit d'effectuer la factorisation de Cholesky une fois pour toute, pour chaque  $n = 1, 2, \dots, N$  et résoudre deux systèmes linéaires triangulaires

**Remarque 5.2** Le schéma d'Euler semi implicite (5.1.4) s'écrit sous forme du schéma d'Euler implicite qui est stable.

### 5.1.2.1 Erreur de la discrétisation totale

Dans cette partie on donne l'estimation de l'erreur commise dans la discrétisation totale. On introduit l'opérateur de projection elliptique  $P_h$  défini par

$$a(P_h u, v_h) = \int_{\Omega} u v_h dx, \forall v_h \in V_h$$

L'élément  $P_h u$  existe et est unique par application du théorème Lax Milgram (1.9), En fait  $P_h u$  est l'approximation par éléments finis de la solution faible  $u$  de (5.0.1). D'après théorème 5.2 si  $u \in H^{k+1}(\Omega)$ , alors

$$\| u - P_h u \|_{H^1(\Omega)} \leq C h^k | u |_{H^{k+1}(\Omega)}$$

**Théorème 5.4** On suppose que la solution faible de (4.3.6) (5.0.1)  $u$  appartient à  $C^1(0, T; H^{k+1}(\Omega))$  alors la solution  $(u^0, u^1, \dots, u^N)$  de la méthode d'Euler semi implicite vérifie :

Il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  et  $\Delta t$  telle que si la solution faible  $u$  de (5.0.1) appartient à  $C^2(0, T; L^2(\Omega))$  on a

$$\| u^n - u_h(t_n) \|_{H^1(\Omega)} \leq C(h^k + \Delta t) \quad , 0 \leq n \leq N$$

**Preuve** Voir par exemple Etienne Chevalier [4]. □

**Remarque 5.3** La méthode d'Euler semi explicite est stable d'ordre 1.

## 5.2 Approximation par éléments finis de la solution faible du problème adjoint

Dans cette section, on donne une approximation par les éléments finis de Lagrange triangulaires de la solution de (5.0.2).

### 5.2.1 Semi discrétisation

On note  $p_h(t)$  la solution approchée de (4.3.10), et on considère le problème semi discrétisé suivant

$$(5.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } p_h(t) \in W(0, T, V_h, V_h) \\ - \int_{\Omega} \frac{dp_h}{dt}(t) v_h dx + a_2(u_h(t), v_h) = k_1 \int_{\Omega} u_h v_h dx \quad , \forall v_h \in V_h \\ p_h(T) = k_2 u_h(T) \end{array} \right.$$

où  $V_h$  est définie dans la section 1.3 et  $u_h$  est la solution de (5.1.1).

**Théorème 5.5** *Le problème (5.2.1) admet une solution unique.*

**Preuve** La preuve est en tout point analogue à celle du théorème 5.1. On pose

$$p_h(t) = \sum_{j=1}^{I(h)} e_j(t) \psi_j$$

où  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{I(h)}$  sont les vecteurs de base de  $V_h$ . Donc, on obtient un système différentielle d'ordre 1 dans  $\mathbb{R}^{I(h)}$  suivant

$$(5.2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} -M_h \frac{de}{dt}(t) + R_h^2 e(t) = k_1 M_h c(t) \\ e(T) = k_2 c(T) \end{array} \right.$$

où,  $M_h$  est la matrice de masse définie dans le paragraphe précédent.  $R_h^2$  est la matrice de rigidité définie par

$$(R_h^2)_{ij} = a_2(\psi_i, \psi_j), \quad 1 \leq i, j \leq I(h),$$

$c(t)$  est solution de (5.1.3). Comme  $M_h$  est inversible, alors le problème de Cauchy

$$(5.2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{de}{dt}(t) = M_h^{-1} R_h^2 e(t) - k_1 c(t) \\ e(T) = k_2 c(T), \end{array} \right.$$

admet une solution  $c$  unique. □

### 5.2.2 Discrétisation totale

On résoud (5.2.3) numériquement, pour cela on subdivise l'intervalle  $[0, T]$  en  $N$  intervalles de longueur  $\Delta t = \frac{T}{N}$ . On pose

$$t_i = i\Delta t, 0 \leq i \leq N$$

Le problème adjoint totalement discrétisé est de calculer des approximations  $p^n$  du  $p_h(t_n)$  la solution du problème semi discrétisé (5.2.1) au moyen le schéma d'Euler suivant

$$(5.2.4) \quad \begin{cases} p^{N+1} = k_2 u^N \\ \int_{\Omega} \frac{p^N - p^{N+1}}{\Delta t} v_h dx + \nu \int_{\Omega} \nabla p^N \nabla v_h dx = k_1 \int_{\Omega} u^N v_h dx, \forall v_h \in V_h \\ \int_{\Omega} \frac{p^n - p^{n+1}}{\Delta t} v_h dx + \nu \int_{\Omega} \nabla p^n \nabla v_h dx = c \int_{\Omega} p^{n+1} v_h dx + k_1 \int_{\Omega} u^n v_h dx + \int_{\Omega} V \cdot \nabla p^{n+1} v_h dx, \\ \text{pour } n = N - 1, \dots, 1 \end{cases}$$

**Théorème 5.6** *Le problème (5.2.4) admet une solution unique  $(p^1, p^2, \dots, p^{N+1}) \in V_h^{N+1}$*

**Preuve** La preuve est en tout point analogue à celle ci de théorème 5.3. On pose

$$p^n = \sum_{j=1}^{I(h)} e_j^n \psi_j, \text{ pour } n = 1, 2, \dots, N + 1$$

où  $e_j^n$  est l'approximation du  $e_j(t_n)$ , et en remplaçant  $v_h$  par  $\psi_j$ , on obtient la forme matriciel de problème (5.2.4)

$$(5.2.5) \quad \begin{cases} e^{N+1} = k_2 c^N \\ M_h \frac{e^N - e^{N+1}}{\Delta t} + \nu A_h e^N = k_1 M_h c^N \\ M_h \frac{e^n - e^{n+1}}{\Delta t} + \nu A_h e^n = c M_h e^{n+1} + k_1 M_h c^n + E_h e^{n+1}, \text{ pour} \\ n = N - 1, \dots, 1. \end{cases}$$

telles que  $A_h$  et  $E_h$  sont définies dans le paragraphe précédent et  $c^n$  solution de (5.1.5). On a (5.2.5) équivaut à

$$(5.2.6) \quad \begin{cases} e^{N+1} = k_2 c^N \\ (M_h + \nu \Delta t A_h) e^N = (k_1 \Delta t + k_2) M_h c^N \\ (M_h + \nu \Delta t A_h) e^n = (M_h + c \Delta t M_h + \Delta t E_h) + k_1 \Delta t M_h c^n, \text{ pour} \\ n = N - 1, \dots, 1. \end{cases}$$

Comme  $M_h + \nu \Delta t A_h$  est inversible, alors (5.2.6) admet une solution unique  $(e^1, e^2, \dots, e^{N+1})$ .

□

## 5.3 Algorithme du gradient conjugué

Dans cette partie, on étudie la méthode de gradient conjugué dans un Hilbert, et on applique cette méthode pour calculer le contrôle optimal.

### 5.3.1 Méthode du gradient conjugué dans un Hilbert

Soient  $V$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_V$  et de la norme  $\|\cdot\|_V$  associée à ce produit scalaire,  $d$  une forme bilinéaire, continue sur  $V \times V$  et coercive,  $\mathcal{L}$  une forme linéaire, continue sur  $V$ , de plus on suppose que  $d$  soit symétrique c'est à dire

$$d(v, w) = d(w, v), \quad \forall u, v \in V.$$

D'après le théorème de Lax Milgram (1.9) le problème

$$(5.3.1) \quad \begin{cases} \text{Trouver } v \in V & \text{telle que} \\ d(v, w) = \mathcal{L}(w) & \forall w \in V \end{cases}$$

admet une solution unique qui vérifie :

$$\frac{1}{2}d(v, v) - \mathcal{L}(v) = \min_V \left[ \frac{1}{2}d(v, w) - \mathcal{L}(w) \right]$$

La méthode du gradient conjugué fait partie des méthodes de descente, qui ont comme principe commun la recherche du minimum  $v$  suivant le procédé itératif

$$v_0 \text{ donné, } v_{k+1} = v_k + \rho_k d_k$$

avec  $d_k$  est la direction de descente et  $\rho_k$  est le pas de descente. L'algorithme du gradient conjugué est le suivant :

**Algorithme 1** *L'algorithme se résume par les étapes suivantes :*

#### Etape 1 : Initialisation

*On donne  $v_0$  et on résout le problème variationnelle*

$$\begin{cases} \text{Trouver } g_0 \in V \\ (g_0, w)_V = d(v_0, w) - \mathcal{L}(w), \forall w \in V \end{cases}$$

*On pose  $d_0 = g_0$*

**Etape 2 :** *Pour  $n \geq 1$ , on suppose que  $v_n, g_n$ , et  $d_n$  sont connus avec  $g_n \neq 0$ , et  $d_n \neq 0$ , on calcule  $v_{n+1}, g_{n+1}$ , et  $d_{n+1}$ .*

*On calcule*

$$\rho_n = \frac{\|g_n\|_V^2}{d(d_n, d_n)},$$

*et*

$$v_{n+1} = v_n - \rho_n d_n,$$

**Etape 3 :** *Tester la convergence et construire une nouvelle direction de descente On résout le problème variationnelle*

$$\begin{cases} \text{Trouver } g_{n+1} \in V \\ (g_{n+1}, v)_V = (g_n, v)_V - \rho_n d(d^n, v), \forall v \in V \end{cases}$$

**Si**  $\frac{\|g_{n+1}\|}{\|g_n\|} \leq \varepsilon$ , on prend  $v = v_{n+1}$ ,

**sinon** on calcule

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{\|g_{n+1}\|_V^2}{\|g_n\|_V^2}, \\ d_{n+1} &= g_{n+1} + \gamma_n d_n. \end{aligned}$$

Faire  $n = n + 1$  et aller à l'étape 2.

On a le résultat suivant sur la convergence de l'algorithme de gradient conjugué et pour la preuve voir par exemple [5].

**Théorème 5.7** *On suppose que  $\varepsilon = 0$  dans l'algorithme, alors on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\| = 0, \quad \forall v_0 \in V,$$

avec  $v$  est la solution de problème (5.3.1). De plus, on a

$$\|v_n - v\|_V \leq C \|v_0 - v\|_V \left( \frac{\sqrt{\chi_d} - 1}{\sqrt{\chi_d} + 1} \right)^n$$

où  $\chi_d$  est le conditionnement de  $d$  tel que

$$\chi_d = \frac{\sup_S d(v, v)}{\inf_S d(v, v)}$$

$$S = \{v \in V, \|v\|_V = 1\}$$

### 5.3.2 Application de l'algorithme

On applique l'algorithme précédent pour résoudre le problème

$$(5.3.2) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \bar{v} \in \mathcal{U} \\ d(\bar{v}, v) = L(v), \forall v \in \mathcal{U} \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} d(\bar{v}, v) &= (\mathcal{A}\bar{v}, v)_\mathcal{U} \\ &= \int_0^T \bar{v} v dt + k_1 \int_{Q_T} z(\bar{v}) z(v) dx dt + k_2 \int_{\Omega} z(\bar{v}, T) z(v, T) dx \end{aligned}$$

$d$  est bilinéaire, continue sur  $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ , symétrique et coercive.

$$\mathcal{L}(v) = - \int_0^T \sum_{m=1}^M \left( \int_{\gamma_m} P_0 v_m \right) d\Gamma dt$$

On obtient l'algorithme suivante

**Algorithme 2** *L'algorithme est donné par les étapes suivant :*

**Etape 1 :** Soit  $\bar{v}_0$  donné dans  $\mathcal{U}$ .

**Etape 2 :** Résoudre le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u^0}{\partial t} - \nu \Delta u^0 + V \cdot \nabla u^0 - cu^0 = 0, & \text{dans } Q_T \\ u^0(0) = u_0, & \text{dans } \Omega \\ \nu \frac{\partial u^0}{\partial n} = v_0, & \text{sur } \Sigma_1 \\ \nu \frac{\partial u^0}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Sigma_2 \end{cases}$$

**Etape 3 :** Résoudre le problème adjoint

$$\begin{cases} -\frac{\partial p^0}{\partial t} - \nu \Delta p^0 - V \cdot \nabla p^0 - cp^0 = k_1 u^0(v), & \text{dans } Q_T \\ p^0(T) = k_2 u^0(T), & \text{dans } \Omega \\ \nu \frac{\partial p^0}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

**Etape 4 :** Résoudre

$$\begin{cases} \text{Trouver } g_0 \in \mathcal{U} \\ \int_0^T g_0 v dt = \int_0^T \sum_{m=1}^M \left( \bar{v}_{0m} + \int_{\gamma_m} p^0 d\Gamma \right) v_m dt, \forall v \in \mathcal{U} \end{cases}$$

où  $p^0$  l'état adjoint de l'état  $u^0(v_0)$  solution de (5.0.1).

Poser

$$d_0 = g_0$$

**Etape 5 :** Pour  $n \geq 0$ ,  $\bar{v}_n$ ,  $g^n$  et  $d^n$  sont connus. Résoudre le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial t} - \nu \Delta \bar{u}_n + V \cdot \nabla \bar{u}_n - c\bar{u}_n = 0, & \text{dans } Q_T \\ \bar{u}_n(\cdot, 0) = 0, & \text{dans } \Omega \\ \nu \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial n} = d^n, & \text{sur } \Sigma_1 \\ \nu \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Sigma_2 \end{cases}$$

Ensuite le problème

$$\begin{cases} -\frac{\partial \bar{p}_n}{\partial t} - \nu \Delta \bar{p}_n - V \cdot \nabla \bar{p}_n - c \bar{p}_n = k_1 \bar{u}_n, & \text{dans } Q_T \\ \bar{p}_n(\cdot, T) = k_2 \bar{u}_n(\cdot, T), & \text{dans } \Omega \\ \nu \frac{\partial \bar{p}_n}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

puis le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \bar{g}_n \in \mathcal{U} \\ \int_0^T \bar{g}_n v dt = \int_0^T \sum_{m=1}^M \left( d_{nm} + \int_{\gamma_m} \bar{p}_n d\Gamma \right) v_m dt, \forall v \in \mathcal{U} \end{cases}$$

Calculer

$$\begin{aligned} \rho_n &= \frac{\int_0^T |g_n|^2 dt}{\int_0^T \bar{g}_n d_n dt}, \\ \bar{v}_{n+1} &= \bar{v}_n - \rho_n d_n, \\ g_{n+1} &= g_n - \rho_n \bar{g}_n \end{aligned}$$

**Etape 6 :** Tester la convergence

Si

$$\frac{\int_0^T |g_n|^2 dt}{\int_0^T |g_n|^2 dt} \leq \varepsilon$$

prendre

$$\bar{v} = \bar{v}_{n+1},$$

Sinon calculer

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{\|g_{n+1}\|_{\mathcal{U}}^2}{\|g_n\|_{\mathcal{U}}^2}, \\ d_{n+1} &= g_{n+1} + \gamma_n d_n. \end{aligned}$$

**Etape 7 :** Faire  $n = n + 1$  et aller à l'étape 5.

Dans la pratique, on ne peut pas appliquer l'algorithme 2 directement, on fait des approximations par éléments finis pour calculer  $u_0, p_0, \bar{u}_n, \bar{p}_n$  pour chaque itération. Donc il faut discrétiser le problème (5.3.2).

### 5.3.3 Discrétisation du problème de contrôle optimal

On note  $J^{\Delta t}$  l'approximation de la fonction de coût  $J$  définie sur  $(\mathbb{R}^m)^N$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  par

$$J_h^{\Delta t}(v) = \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=1}^N |v^n|^2 + \frac{k_1}{2} \Delta t \sum_{n=1}^N \int_{\Omega} |u^n|^2 dx + \frac{k_2}{2} \int_{\Omega} |u^N|^2 dx$$

où  $v^n$  est l'approximation de  $v(t_n)$  pour  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $u^n$  est la solution du problème (5.1.4).

On munit  $(\mathbb{R}^m)^N$  du produit scalaire

$$\begin{aligned} (v, w)_{(\mathbb{R}^m)^N} &= \Delta t \sum_{n=1}^N v^n w^n \\ &= \Delta t \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_m^n w_m^n, \end{aligned}$$

et la norme associée

$$|v^n|^2 = \sum_{m=1}^M (v_m^n)^2.$$

Le problème de minimisation approché est le suivant

$$(5.3.3) \quad \min_{(\mathbb{R}^m)^N} J_h^{\Delta t}(v)$$

**Théorème 5.8** *Le problème (5.3.3) admet une solution unique.*

**Preuve** Existence : Soit  $(v_l)_{l \in \mathbb{N}}$  une suite telle que

$$J_h^{\Delta t}(v_l) \rightarrow \min_{(\mathbb{R}^m)^N} J_h^{\Delta t}(v) \text{ lorsque } l \rightarrow +\infty.$$

On a  $J_h^{\Delta t}$  est coercive

$$J_h^{\Delta t}(v_l) \geq \frac{1}{2} \|v_l\|_{(\mathbb{R}^m)^N}^2,$$

donc  $(v_l)_{l \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy, d'où  $(v_l)_{l \in \mathbb{N}}$  converge vers  $w$  dans  $(\mathbb{R}^m)^N$ . Comme  $J_h^{\Delta t}$  est continue sur  $(\mathbb{R}^m)^N$ , alors on a

$$J_h^{\Delta t}(w) = \min_{(\mathbb{R}^m)^N} J_h^{\Delta t}(v)$$

Unicité : De la stricte convexité de  $J_h^{\Delta t}$ , on déduit que  $w$  est unique □

**Proposition 5.1** *La fonctionnelle  $J_h^{\Delta t}$  est différentielle sur  $(\mathbb{R}^m)^N$  et on a*

$$\nabla J_h^{\Delta t}(v) = \left\{ \left\{ v_m^n + \int_{\gamma_m} p^n d\Gamma \right\}_{m=1}^M \right\}_{n=1}^N$$

où  $p^n$  est solution de (5.2.4) et  $u^n$  solution de (5.1.4)

**Preuve** La preuve est analogue en tout point à celle de la proposition (4.1).  $\square$

Donc la condition nécessaire pour que  $\bar{v}$  soit le contrôle optimal est

$$(5.3.4) \quad \bar{v}_m^n = - \int_{\gamma_m} p^n d\Gamma, \text{ pour } m = 1, 2, \dots, M \text{ et } n = 1, 2, \dots, N$$

On introduit l'opérateur  $\mathcal{A}_h^{\Delta t}$  défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h^{\Delta t} (\mathbb{R}^m)^N &\mapsto (\mathbb{R}^m)^N \\ \mathcal{A}_h^{\Delta t} \cdot v &= \left\{ \left\{ v_m^n + \int_{\gamma_m} \bar{p}^n d\Gamma \right\}_{m=1}^M \right\}_{n=1}^N \end{aligned}$$

où  $\bar{p}^n$  est la solution de (5.2.4) et  $\bar{u}^n$  est la solution de (5.1.4) avec  $u^0 = 0$ .

D'après la proposition 4.2,  $\mathcal{A}_h^{\Delta t}$  est symétrique, définie positive, donc inversible.

**Théorème 5.9** Soit  $\bar{v}$  le contrôle optimal, alors  $\bar{v}$  est solution du système linéaire

$$(5.3.5) \quad \mathcal{A}_h^{\Delta t} \cdot \bar{v} = \beta_h^{\Delta t}$$

où

$$\beta_h^{\Delta t} = - \left\{ \left\{ \int_{\gamma_m} P_0^n d\Gamma \right\}_{m=1}^M \right\}_{n=1}^N$$

$P_0^n$  est la solution de (5.2.4) avec  $u^n = U_0^n$  solution de (5.1.4).

**Preuve** Soient  $\bar{v}$  le contrôle optimal,  $p^n$  la solution de problème (5.2.4) et  $u^n$  la solution de problème (5.1.4) associée à  $\bar{v}$ . Soient  $U_0^n$  la solution de problème (5.1.4) pour  $v = 0$  et  $P_0^n$  la solution de problème (5.1.4) pour  $u^n = U_0^n$ . On pose

$$\begin{cases} \bar{u}^n = u^n - U_0^n \\ \bar{p}^n = p^n - P_0^n \end{cases},$$

on obtient,  $\bar{u}^n$  est la solution de problème (5.1.4) pour  $u^0 = 0$  et  $\bar{p}^n$  est la solution de problème (5.1.4) pour  $u^n = \bar{u}^n$ . On déduit que

$$\mathcal{A}_h^{\Delta t} \bar{v} = \left\{ \left\{ \bar{v}_m^n + \int_{\gamma_m} \bar{p}^n d\Gamma \right\}_{m=1}^M \right\}_{n=1}^N,$$

de (5.3.4), on déduit que

$$\mathcal{A}_h^{\Delta t} \bar{v} = - \left\{ \left\{ \int_{\gamma_m} P_0^n d\Gamma \right\}_{m=1}^M \right\}_{n=1}^N,$$



2) Résoudre

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{p}_k^{N+1} = k_2 \bar{u}_k^N \\ \int_{\Omega} \frac{\bar{p}_k^N - \bar{p}_k^{N+1}}{\Delta t} v_h dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \bar{p}_k^N \nabla v_h dx = k_1 \int_{\Omega} \bar{u}_k^N v_h dx, \quad \forall v_h \in V_h \\ \int_{\Omega} \frac{\bar{p}_k^n - \bar{p}_k^{n+1}}{\Delta t} v_h dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \bar{p}_k^n \nabla v_h dx = c \int_{\Omega} \bar{p}_k^{n+1} v_h dx + k_1 \int_{\Omega} \bar{u}_k^n v_h dx + \int_{\Omega} V \cdot \nabla \bar{p}_k^{n+1} v_h dx, \text{ pour} \\ n = N - 1, \dots, 1 \end{array} \right.$$

3) Calculer

$$\bar{g}_k = \left\{ \left\{ d_{km}^n + \int_{\gamma_m} \bar{p}_k^n d\Gamma \right\}_{m=1}^M \right\}_{n=1}^N$$

$$\rho_k = \frac{\sum_{n=1}^N |g_k^n|^2}{\sum_{n=1}^N \bar{g}_k^n d_k^n}$$

$$\bar{v}_{k+1} = \bar{v}_k - \rho_k d_k$$

$$g_{k+1} = g_k - \rho_k \bar{g}_k$$

**Etape 6 :** Tester la convergence

Si

$$\frac{\sum_{n=1}^N |g_{k+1}^n|^2}{\sum_{n=1}^N |g_0^n|^2} \leq \varepsilon,$$

alors prendre

$$\bar{v} = \bar{v}_{k+1}.$$

Sinon calculer

$$\gamma_k = \frac{\sum_{n=1}^N |g_{k+1}^n|^2}{\sum_{n=1}^N |g_k^n|^2}$$

$$d_{k+1} = g_{k+1} + \gamma_k d_k$$

**Etape 7 :** Faire  $k = k + 1$  et aller à l'étape 5.

Dans le chapitre suivant, on utilise l'algorithme (5.2.3) pour calculer le contrôle et stabiliser la solution de l'équation de convection diffusion linéarisé (5.0.1).

# Chapitre 6

## Simulations numériques

Dans ce chapitre on présente les résultats de la simulation numérique correspondante à l'étude mathématique précédente, c'est-à-dire le calcul du contrôle optimal et la stabilisation de problème linéarisé (5.0.1). Notre code a été implémenté en couplant le logiciel Comsol Multiphysiques avec Matlab.

### 6.1 Présentation des logiciels

Matlab est un logiciel de calcul numérique produit par Math Work, c'est un langage simple et très efficace, il contient également une interface graphique puissante et des boites à outils (toolbox) qui sont des ensembles de fonctions supplémentaires profilées pour des applications particulières (optimisation, analyse, statistique, ...).

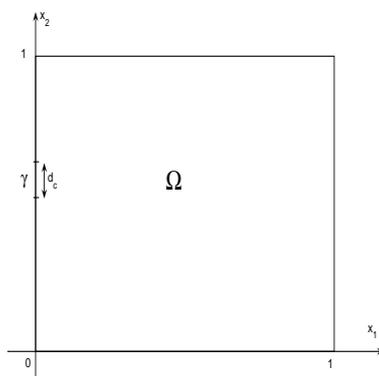
Comsol multiphysiques est un logiciel qui résout les équations aux dérivées partielles par les éléments finis dans 1 à 3 dimension, il nous donne les différents graphes de la solution sans connaître son expression explicite. Pour résoudre une équation aux dérivées partielles avec Comsol multiphysiques, il suffit de définir la géométrie du domaine, les coefficients de l'équation, les conditions aux bords et la condition initiale si l'équation est de type parabolique ou hyperbolique. En particulier, Comsol résout les équations direct et adjointe qui sont importantes dans le calcul du contrôle optimal, il ne fait pas ce calcul directement

Pour cela on a codé des scripts matlab pour mettre en oeuvre notre stratégie globale. Dans notre script on appelle les procédures de calcul des problèmes, les résultats obtenus à partir de Comsol sont utilisés pour calculer la fonction de cout et son gradient qu'on injecte dans l'algorithme du gradient conjugué.

### 6.2 Position de problème

Dans nos calculs, on considère  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  et la partie contrôlée

$$\gamma = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \Omega, x_1 = 0, |x_2 - 0.5| < \frac{\sqrt{3}}{32} \right\}$$

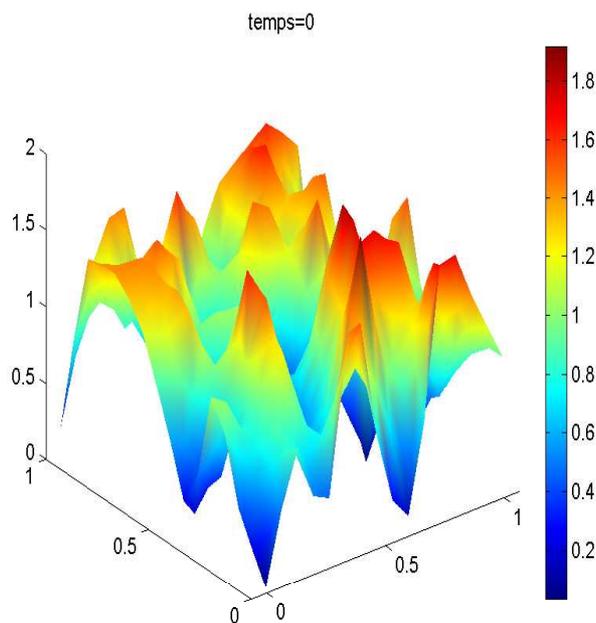


On prend  $\lambda = 1$ ,  $\nu = 1$ ,  $c = 2$  et  $T = 1$ . Avec ces données ci dessus, on veut stabiliser la solution de l'équation de convection diffusion linéarisé suivante :

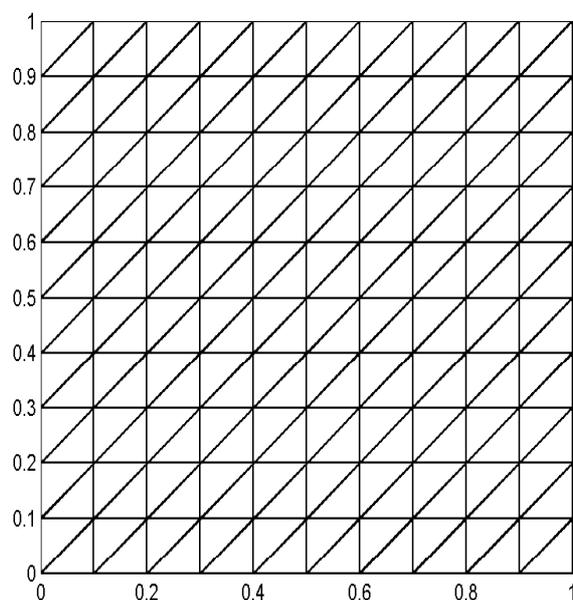
$$(6.2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + V \cdot \nabla u - cu = 0 & \text{dans } Q_T \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = v & \text{sur } \Sigma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma_2 \end{cases}$$

avec  $\Sigma_1 = \gamma \times ]0, 1[$  et  $\Sigma_2 = \Sigma \setminus \Sigma_1$ .

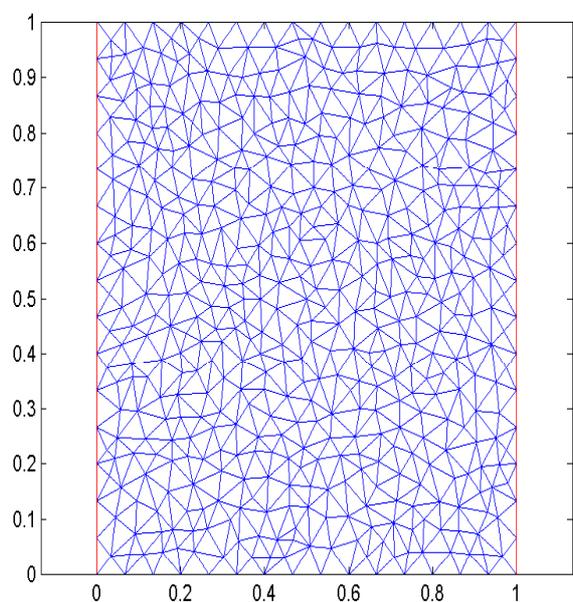
Comme donnée initiale on prend une fonction dont les valeurs sont réparties d'une manière aléatoire équidistribuées dans l'intervalle  $[0, 2]$



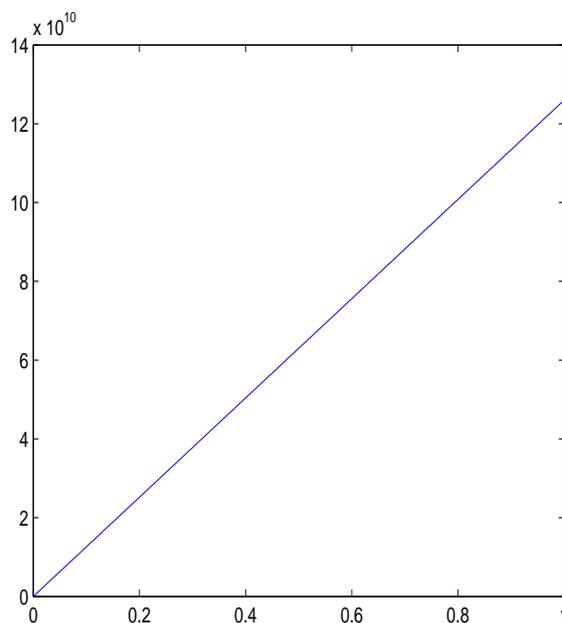
On considère une triangulation régulière de  $\bar{\Omega}$  de pas  $h$  ( $h = \frac{1}{64}$ ,  $h = \frac{1}{256}$ )



**Remarque 6.1** *On peut utiliser d'autre triangulation régulière de  $\overline{\Omega}$ , on a choisit celle dessus pour pouvoir comparer nos résultats avec ceux de R. Glowinski[7]*



On résout le problème linéarisé (6.2.1) avec le contrôle nul (sans contrôle optimal), le graphe de la fonction  $\log(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)})$  en fonction de temps voir la figure



On remarque que la solution du problème (6.2.1) explose en temps fini ce qui veut dire que le point d'équilibre est instable dans ce cas.

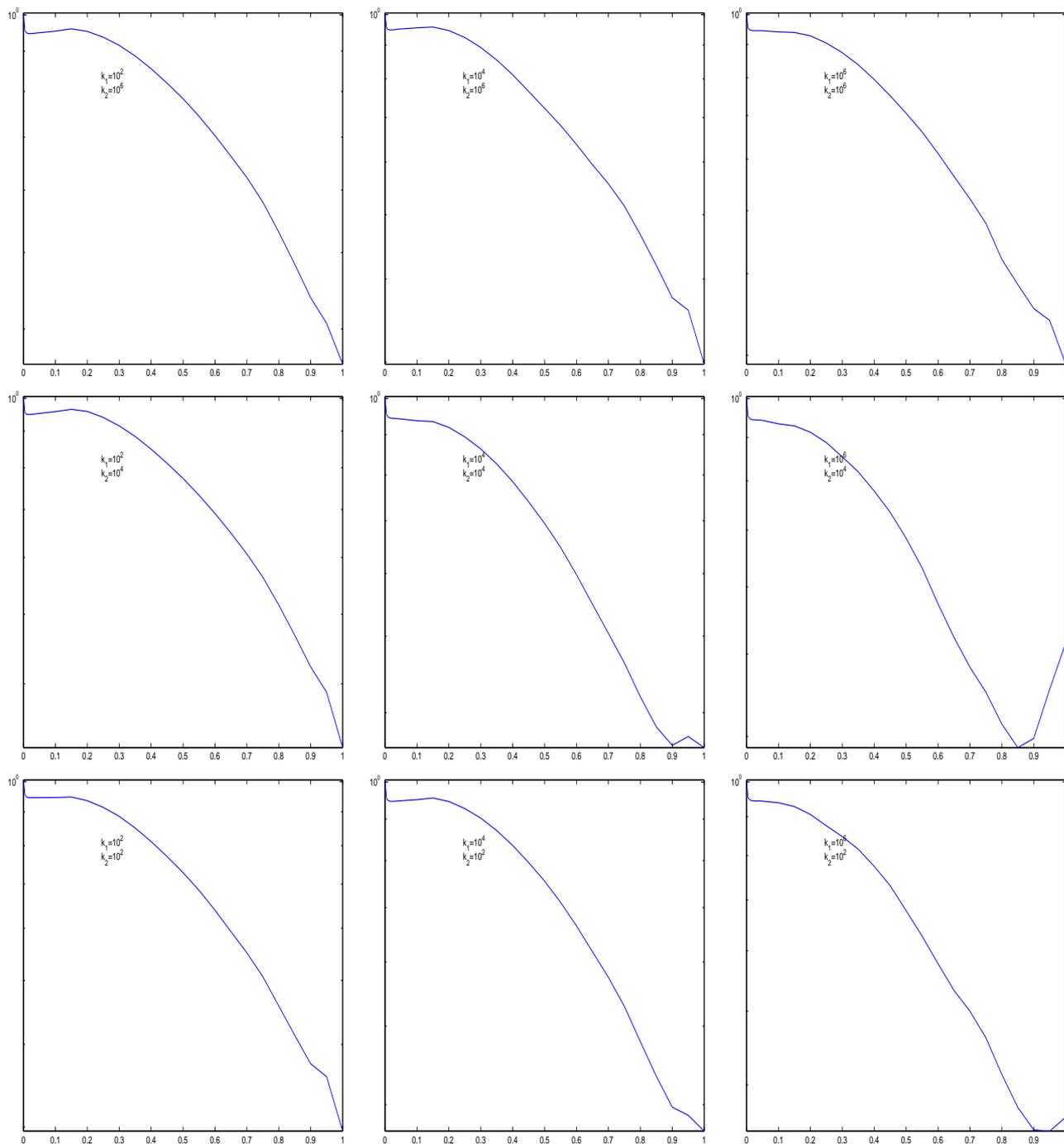
## 6.3 Tests numériques

Dans cette partie on calcule le contrôle optimal dans deux cas le premier est pour  $V = 0$  et le deuxième cas est pour  $V \neq 0$  et dans les deux cas on prend différents valeurs de  $k_1$  et  $k_2$  qui sont définis dans le chapitre 3, puis on résout le problème linéarisé (6.2.1) avec ce contrôle optimal et on regarde si cette solution tend vers zéros à  $T = 1$ .

### 6.3.1 Résultat 1

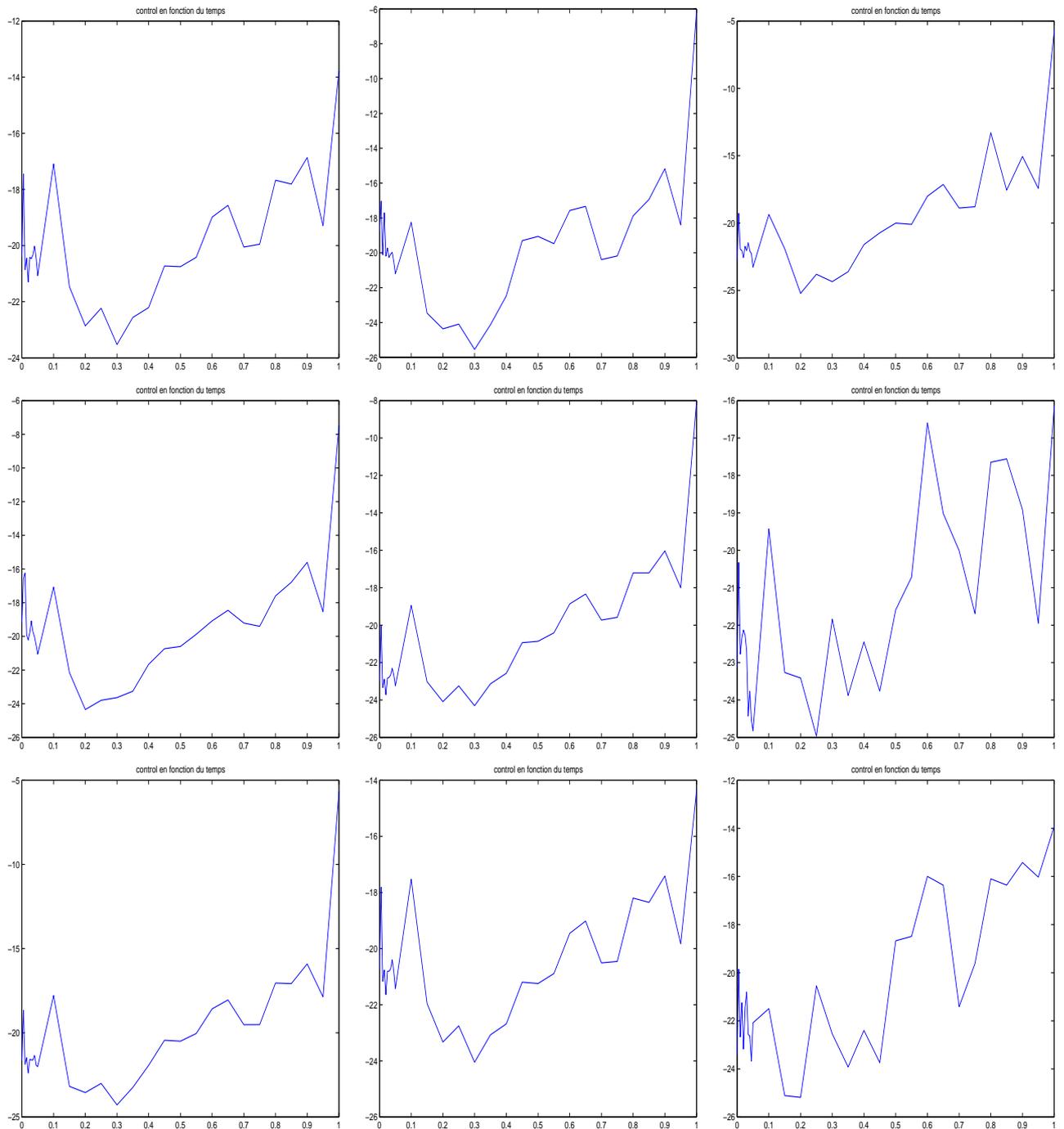
On fait les calculs pour  $k_1 = 10^2, 10^4, 10^6$ ,  $k_2 = 10^2, 10^4, 10^6$  et  $c = 2$ , on obtient les résultats suivants :

Les graphes de  $\log(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)})$  en fonction du temps

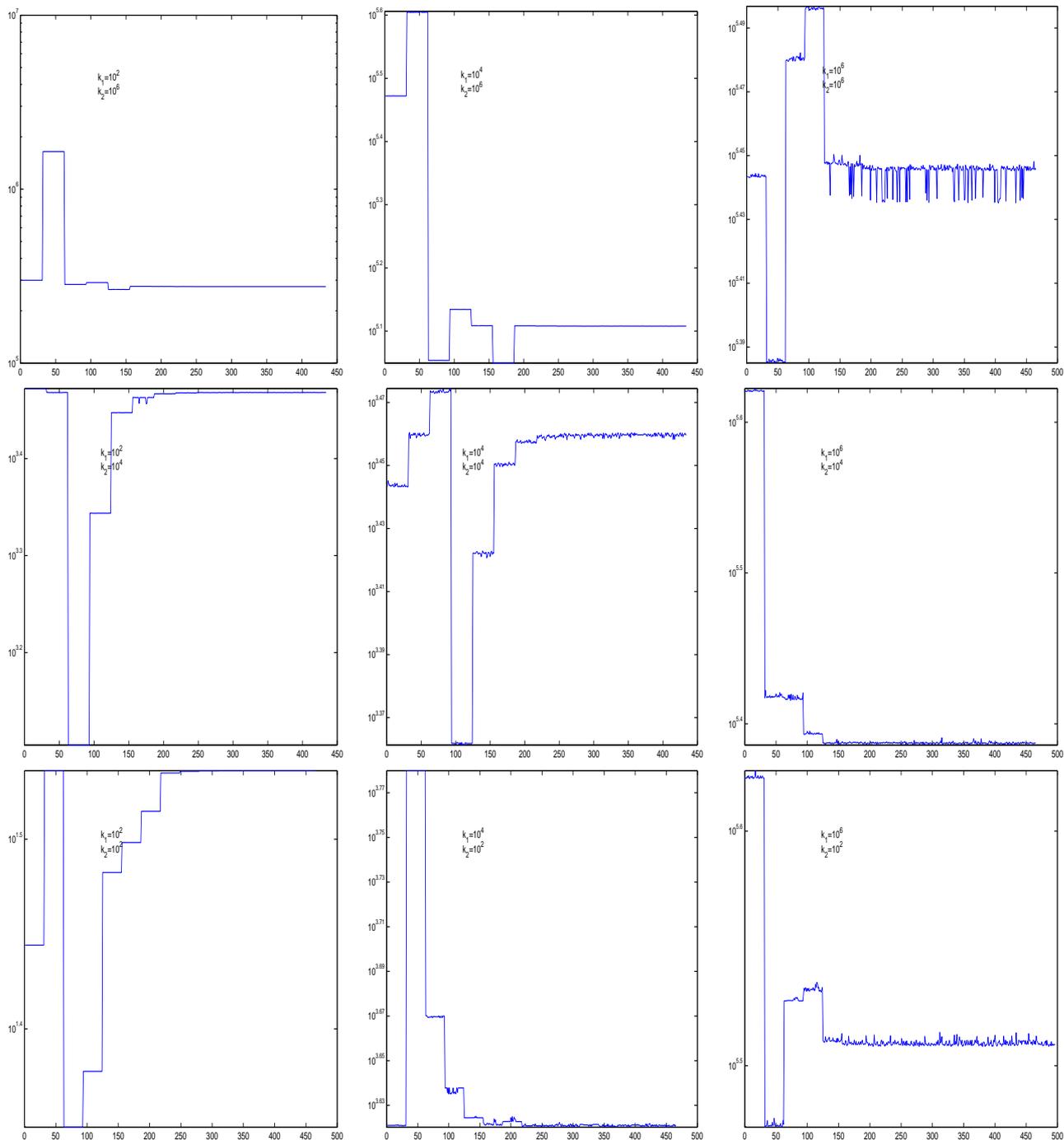


On observe que la solution se stabilise bien et que l'état nul est atteint à  $T = 1$  dans la plus part des cas sauf les cas instable pour  $(k_1, k_2) \in \{(10^6, 10^4), (10^6, 10^2)\}$ , où les contrôles associés arrivent à ramener l'état du système à zéros aux temps  $t = 0.88$  et  $t = 0.9$  puis ils n'arrivent pas à maintenir cet état nul jusqu'à  $t = 1$ ;

Les graphes de la norme du contrôle final en fonction dutemps

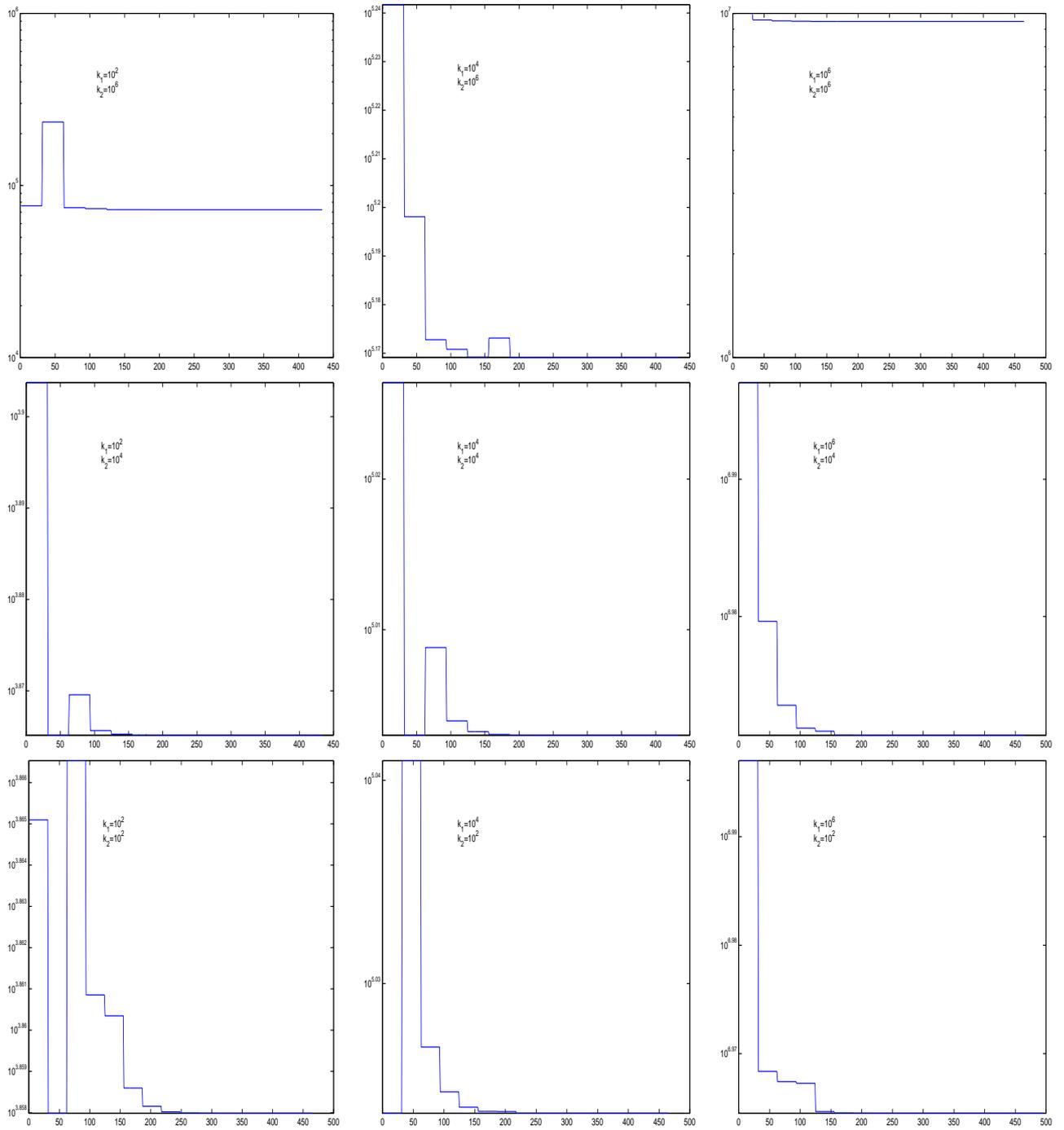


Les graphes des normes du gradient de descente  $\|g_k\|$  en fonction des itérations  $k$



On remarque dans le cas  $k_1 = 10^2, k_2 = 10^6$ , la norme du gradient est constante par rapport au itérations  $k$ . Lorsque  $k_1 = 10^6, k_2 = 10^6$  la méthode du gradient conjugué est instable numériquement.

Les graphes de la fonction coût en fonction des itérations  $k$



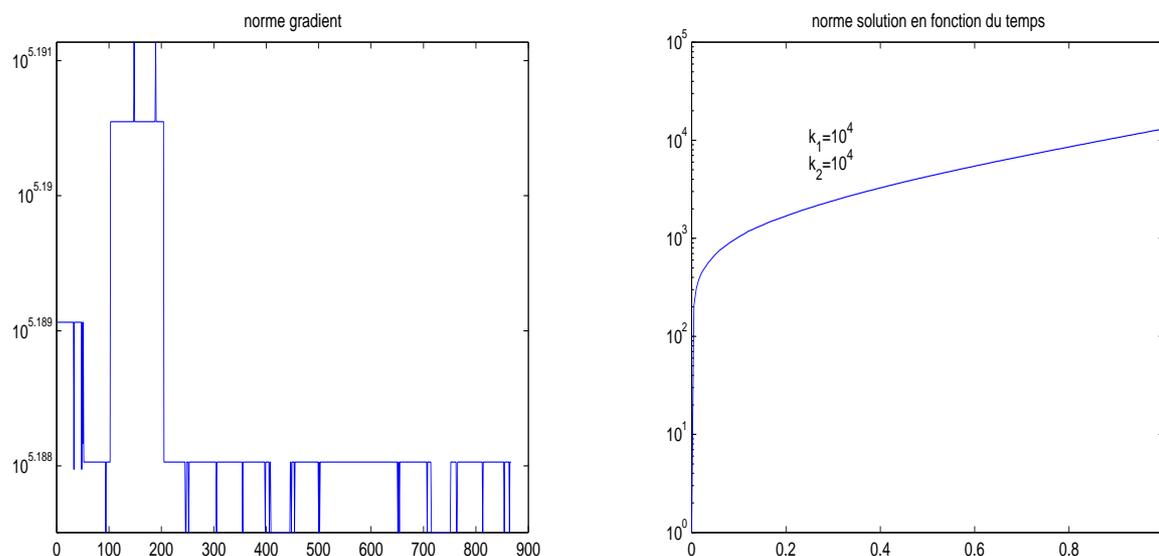
### 6.3.2 Résultat 2 : Problème avec convection non nulle

Dans ce deuxième test, on prend

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2) &= (-4 \sin(4\pi x_1) \cos(4\pi x_2), 4 \cos(4\pi x_1) \sin(4\pi x_2)) \\ k_1 &= 10^4, k_2 = 10^4. \end{aligned}$$

On peut vérifier que  $V$  est à divergence nulle et que  $n.V = 0$  sur  $\Gamma$

On a les résultats les résultats suivants :



On remarque si on compare avec le résultat 1 dans le cas  $k_1 = 10^4, k_2 = 10^4$ , la méthode de gradient conjugué est instable numériquement et la solution  $u$  de (6.2.1) est aussi instable.

Pour régler ce problème on utilise la technique de chatterement [7]. Elle consiste à faire varier la partie à contrôler sous forme sinusoïdale

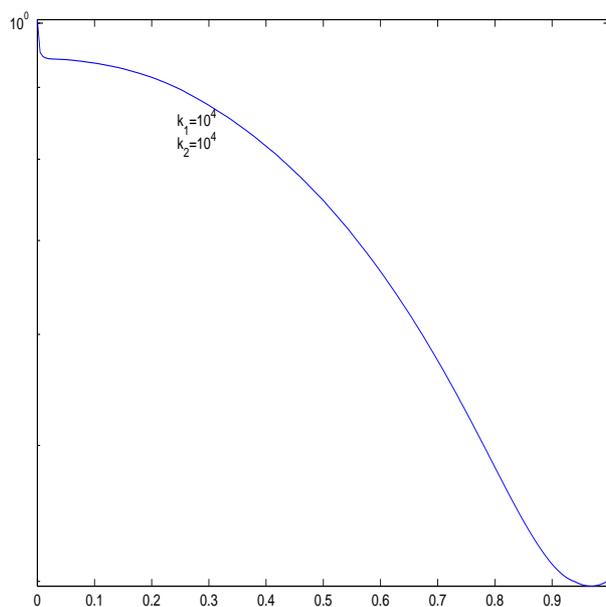
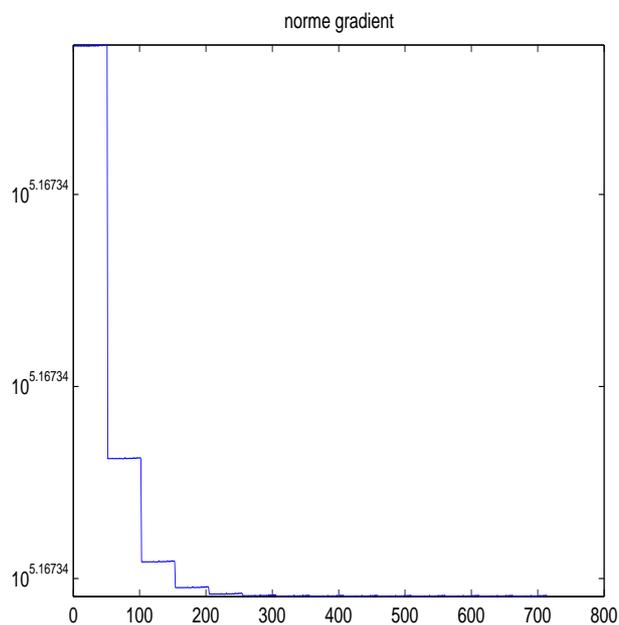
### 6.3.3 Résultat 3

L'idée de la technique de chatterement est de contrôler sur une partie de la frontière qui n'est pas fixée, on prend

$$D(t) = 0.5 + \frac{1}{16} \sin(40\pi t)$$

où  $D(t)$  est la longueur de la partie contrôlée.

On a les résultats suivants :



On remarque si on compare avec le résultat 2 dans le cas  $k_1 = 10^4, k_2 = 10^4$ , la méthode de gradient conjugué est stable numériquement et la solution  $u$  de (6.2.1) est aussi stable jusqu'à  $t = 1$ .

**Remarque 6.2** Nous signalons que pour obtenir nos résultats de simulations, nous avons rencontrés plusieurs problèmes d'ordre techniques, plus précisément le calcul de la fonction cout qu'est basé sur la résolution de deux équations aux dérivées partielles et stoker les solutions et faire des l'interpolations. Ces problèmes ont été résolus par l'utilisation de

*fonctions d'interpolation plus élaborées et utilisation judicieuse de la mémoire physique pour stocker les résultats intermédiaires.*

# Conclusion

Nous avons présenté dans ce mémoire une application concrète de certains aspects de la théorie du contrôle, pour stabiliser la solution de l'équation de convection diffusion linéarisée. Nous avons utilisé la méthode des éléments finis pour résoudre l'équation convection diffusion linéarisée et son équation adjointe et la méthode de gradient conjugué pour calculer le contrôle optimal. Nous avons fait des simulations numériques et nous sommes arrivés à stabiliser la solution de problème étudié. Enfin signalons que nous étions limités dans ce mémoire à l'étude de stabilisation de la solution de l'équation linéaire, donc un travail ultérieur pourrait aborder pour l'étude de stabilisation de la solution de l'équation semi linéaire comme nous l'avons signalé.

# Bibliographie

- [1] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle, théorie et application*, Masson Paris New York Bercelone Milan Mexico Sao Paulo, 1983.
- [2] R. DAUTRAY ET J. L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques*, volume 8 *Problèmes d'évolution : Méthodes Variationnelles*, Masson, 1987.
- [3] P. DOUNATO, *Calcul différentielle pour la licence, cours exercices et problèmes résolus*, Dunod.
- [4] J. ETIENNE ET J. CHEVALIER, *Analyse numérique, deuxième partie, méthode des éléments finis pour les équation elliptiques et paraboliques* Université de Liege, 1998.
- [5] R. GLOWINSKI, H. B. KELLER ET L. REINHART, *Continuation conjugate gradient methods for the least squares solution of nonlinear boundary value problems*, Siam journal on scientific and statistical computing, vol 6, pp 793-832, 1985.
- [6] R. GLOWINSKI ET J. L. LIONS, *Exact and approximate boundary controllability for the heat equation, a numerical approach*, Journal of optimization theory and applications, vol 82, pp 429-484, 1994.
- [7] R. GLOWINSKI ET J. W. HE, *Neumann control of unstable parabolic system, a numerical approach*, Journal of optimization theory and applications, vol 96, pp 1-55, 1998.
- [8] O. A. LADYZENSKAJA, V. A. SOLONNIKOV, AND N. N. URAL'CEVA, *Linear and Quasilinear Equation of Parabolic Type*, volume 23 of *Transl. Math. Monographs*. American Math. Society, Providence, 1968.
- [9] J. L. LIONS ET P. LELONG, *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles* Dunod, 1968.
- [10] J. L. LIONS ET E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et application* Volume 1, Dunod, Paris, 1968.
- [11] P. A. RAVIART ET J. M. THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, MASSON, 1983.
- [12] T. SLAWIG, *Partial differential equations control using Comsol Multiphysics*, control of the Navier Stokes equations, technical report, 2005.