N° d'ordre : 17 /2007-M / MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE D'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENE »

FACULTE DE MATHEMATIQUES

جامعة هواري بومدين
للعلوم والتكنولوجيا
U S T H B

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : Mathématiques

Spécialité : Analyse Complexe

Par : GUETTAI GHANIA

Sujet

Relations entre le noyau de Szegö et les noyaux de Cauchy-Fantappié

Soutenu le 18 / 07 / 2007, devant le jury composé de:

Mr - A. KESSI, professeur, USTHB.	**Président**
Mr - M.S HACHAICHI, Maître de Conférences, USTHB .	**Directeur de Thèse**
Mr - A. AROUCHE, Maître de Conférences, USTHB.	**Examinateur**
Mr - A. AFFANE, Maître de Conférences, USTHB.	**Examinateur**

Table des matières

Remerciements

Je tiens beaucoup à présenter mes remerciements à mon directeur de thèse M^r HACHAICHI Mohamed Salah d'avoir accepter de diriger mon travail dont j'exprime toutes mes gratitudes et tous mes respects.

Je tiens à remercier également M^r Roos pour ses conseils et collaboration qu'il a bien voulu m'accorder, ainsi mes parents et mon mari M^r NOUAL et mon frère ALLEL pour leurs soutiens morales et leurs sacrifices.

J'exprime mes sincères remerciements à monsieur le président du jury et ses membres pour m'avoir fait l'honneur de juger mon travail.

Que toutes les personnes qui ont contribué de loin ou de près à ce travail et à ma formation voient ici l'expression de mes sincères remerciements.

Introduction

Les deux méthodes principales qui permettent de représenter une fonction holomorphe dans un domaine borné $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ suffisamment régulier en fonction de ses valeurs sur le bord ∂D de D, sont : le noyau de **Szegö** $S(z,\xi)$ et le noyau de **Cauchy-Fantappié** $E(z,\xi)$ associés à D.

La question est de savoir si l'un de ces deux noyaux peut être exprimé en fonction de l'autre : **Stein** & **Kerzmann** ont fourni une réponse positive dans le cas où $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ est un domaine strictement pseudo convexe, lisse à bord de classe $\mathcal{C}^1$.

Il est bien connu que le noyau de **Szegö** fournit la projection orthogonale $\mathbb{S} : L^2(\partial D, d\sigma) \mapsto \mathcal{H}^2(\partial D)$ définie par : $\mathbb{S}u(z) = \displaystyle\int_{\xi\in\partial D} S(z,\xi)u(\xi)d\sigma_\xi,\ \ z \in D$ où $\mathcal{H}^2(\partial D)$ est l'ensemble des fonctions $u \in L^2(\partial D, d\sigma)$ tel qu'il existe une fonction holomorphe U dans D (nécessairement unique) vérifiant : $U(\xi + \epsilon\nu(\xi)) \to u(\xi)$ dans $L^2(\partial D, d\sigma_\xi)$ où $\nu(\xi)$ est la normale intérieure unitaire à D en $\xi \in \partial D$.

Il est bien admis, par ailleurs, que les propriétés non triviales du noyau de **Szegö** $S(z,\xi)$ sont très difficiles à mettre en évidence, tandis que le noyau de **Henkin-Ramirez** $H(z,\xi)$ est très bien connu ; de plus, sa singularité en $z = \xi$ est précisément celle du terme dominant dans le développement asymptotique de $S(z,\xi)$: l'idée naturelle est alors d'essayer d'exprimer S en fonction de H ; toutefois, il n'est pas possible, généralement, de déterminer une fonction de **Leray** pour D telle que $S = H$.

Fefferman [6] et **Boutet de Monvel** & **Sjöstrand** [3] notamment, ont étudié la singularité du terme dominant du noyau de **Szegö** $S(z,\xi)$ en $z = \xi$ en utilisant les estimations de **Kohn** pour le " $\bar{\partial}$ −**Neumann** problem ", ce qui a rendu leur démarche très complexe : les résultats de **Stein** & **Kerzman** [10] fournissent des résultats plus explicites : c'est cette méthode qui constitue le corps de notre travail, organisé de la manière suivante :

Dans un *chapitre* 1, nous rappelons quelques définitions et résultats généraux sur les fonctions holomorphes, les variétés et les formes différentielles.

Dans un *chapitre* 2, nous présentons une synthèse des formules classiques de représentation intégrale des formes différentielles de classe $\mathcal{C}^1$ dans un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Dans un *chapitre* 3, nous rappelons la construction du noyau de **Szegö** pour un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathcal{C}^1$.

Le *chapitre* 4 est consacré à la mise en évidence d'une relation entre le noyau de **Szegö** et le noyau de **Henkin-Ramirez** pour les domaines strictement pseudo-convexes de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathcal{C}^1$.

Chapitre 1

Notations et définitions

On note par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On désigne par $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ les espaces réels et complexes à n dimension.

Les points de l'espace $\mathbb{R}^n$ sont désignés par $(x_1, x_2, ..., x_n)$; les points de l'espace $\mathbb{C}^n$ par $(z_1, ..., z_n)$.

On munit $\mathbb{C}^n$ des coordonnées z_j, $j = 1, ..., n$; on pose $x_j = \mathrm{Re}(z_j)$ et $x_{j+n} = \mathrm{Im}\, g(z_j)$ alors $z_j = x_j + ix_{j+n}$; $(x_j, x_{j+n}) \in \mathbb{R}^2$.

L'isomorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\tau : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ défini par $(z_1, ..., z_n) \rightsquigarrow (x_1, x_{1+n}, ..., x_n, x_{2n})$ permet d'identifier $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$.

Les fonctions coordonnées complexes z_j et leurs imaginaires conjugées $\overline{z}_j$ ont pour différentielle dans $\mathbb{R}^{2n}$

$$\mathrm{d}\, z_j = \mathrm{d}\, x_j + i\, \mathrm{d}\, x_{j+n}$$

$$\mathrm{d}\, \overline{z}_j = \mathrm{d}\, x_j - i\, \mathrm{d}\, x_{j+n}$$

alors

$$\mathrm{d}\, x_j = \frac{1}{2}(\mathrm{d}\, \overline{z_j} + \mathrm{d}\, z_j)$$

$$\mathrm{d}\, x_{j+n} = \frac{i}{2}(\mathrm{d}\, \overline{z_j} - \mathrm{d}\, z_j)$$

- Soit $D \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$, notons par

$$\mathcal{C}^0(D) = \{f : D \subseteq \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C} \text{ continue}\}$$

et par $\mathcal{C}^k(D)$ l'ensemble des fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{C}$, $k - fois$ continûment différentiables ($k \in \mathbb{N}^*$).

- Si $f \in \mathcal{C}^1(D)$ alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\, f &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \mathrm{d}\, x_j + \frac{\partial f}{\partial x_{j+n}} \mathrm{d}\, x_{j+n} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial z_j} \mathrm{d}\, z_j + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} \mathrm{d}\, \overline{z}_j \right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_{k+n}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_{k+n}} \right) \end{aligned}$$

On note

$$\begin{aligned} \partial f &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} \mathrm{d}\, z_j \\ \overline{\partial} f &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} \mathrm{d}\, \overline{z}_j \end{aligned}$$

alors

$$\mathrm{d}\, f = \partial f + \overline{\partial} f \qquad \text{dans } D$$

Définition 1.1 *Une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$ est dite holomorphe dans D si $\overline{\partial} f = 0$ dans D. "La condition" est dite "Equation de Cauchy-Riemann".*

1.1 Applications holomorphes

Définition 1.2 *Soient D, D' deux ouverts de $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^m$ respectivement. Une application $f : D \longrightarrow D'$ est dite holomorphe s'il existe m fonctions holomorphes $f_1, ..., f_m$ sur D telles que :*

$$f(z) = (f_1(z), ..., f_m(z)), \qquad \forall z \in D$$

Définition 1.3 *Soient D et D' deux sous-ensembles ouverts de $\mathbb{C}^n$. Une application $f : D \longrightarrow D'$ est dite biholomorphe sur D si*

a. *elle est bijective de D sur D'.*

b. *f et f^{-1} sont holomorphes sur D et D' respectivement.*

1.2 Variétés

Une variété est un objet sur lequel on doit pouvoire faire les mêmes calculs différentiels que sur $\mathbb{R}^n$. Pour calculer une dérivée par exemple, il suffit de connaître la fonction dans un voisinage du point considéré : donc on va munir une variété d'une structure locale provenant de celle d'un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$.

1.2.1 Définitions

Etant donné un espace topologique M, une carte (ou application de coordonnées locales) est la donnée d'un ouvert $U \subset M$, d'un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ et d'un homéomorphisme $\varphi : U \longrightarrow V$. L'application réciproque s'appelle une paramétrisation de U. Un atlas est une collection de cartes (U_i, φ_i) qui recouvrent M. La régularité de l'atlas est donnée par la régularité des applications de recollement (ou de changements de cartes). Formellement :

Définition 1.4 *Un atlas de classe $\mathcal{C}^p$ de M est un recouvrement de M par des ouverts U_i sur lesquels sont définies des cartes φ_i telles que :*

- *$M \subset \bigcup\limits_i U_i$ (les U_i recouvrent M) ;*
- *$\varphi_i : U_i \to V_i$ est un homéomorphisme de U_i sur un ouvert V_i de $\mathbb{R}^n$;*
- *$U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \varnothing$, alors $\varphi_{ij} = (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) \mid_{\varphi_i(U_{ij})}$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\varphi_j(U_{ij})$ (ce qui a bien un sens car φ_{ij} est définie d'un ouvert V_i de $\mathbb{R}^n$ dans un autre ouvert V_j de $\mathbb{R}^n$).*

Deux atlas sont équivalents si leur concaténation produit un nouvel atlas de même classe, ce qui revient à demander que les changements de cartes d'une carte d'un atlas vers une carte de l'autre atlas aient la bonne régularité.

Définition 1.5 *Une variété ($\mathcal{C}^\infty$) de dimension n est la donnée d'un espace topologique séparé M, et d'une classe d'équivalence d'atlas (de classe $\mathcal{C}^\infty$).*

1.2.2 Variété analytique complexe

Une variété analytique complexe M de dimension n sur $\mathbb{C}^n(\simeq \mathbb{R}^{2n})$ est une variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension réelle $2n$ munie d'un Atlas $\{(U_j,\varphi_j)\}_{j\in I}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

a. $\forall i \in I$, U_i est un ouvert de M et $\bigcup\limits_{i\in I} U_i = M$.

b. $\forall j \in I, \varphi_j : U_j \subset M \longrightarrow V_j \subset \mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ est un difféomorphisme de U_j sur un ouvert noté V_j de $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$.

c. $\forall i \in I$, et $\forall j \in I$

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^n$$

est une application biholomorphe.

- (V,ψ) est un système de coordonnées holomorphes dans U_j si la famille $\{(U_j,\varphi_j)\}_{j\in I} \cup (V,\psi)$ satisfait aux conditions $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ précédentes.
- Une famille $(V_i,\psi_i)\,, i \in I$ est appelée atlas holomorphe de M, si chaque couple (V_i,ψ_i) est un système de coordonnées hololmorphes et $M = \bigcup\limits_{i\in I} V_i$.

1.3 Formes différentielles

1.3.1 Algébre tensorielle

E désigne un espace vectoriel sur un corps K, l'espace dual E^* est l'espace vectoriel des applications $K-$*linéaires* de E dans K, appelées aussi formes linéaires.

Définition 1.6 *On appelle forme $k-$linéaire sur E toute application*

$$L : \overbrace{E \times E \times \cdots \times E}^{k \text{ fois}} \to K$$

telle que les applications partielles

$$x_r \to L(x_1, \cdots, x_k)$$

soient des formes linéaires sur E.

Définition 1.7 *Le produit tensoriel d'une forme $k-$linéaire f et d'une forme $l-$linéaire g est la forme $k+l-$linéaire donnée par*

$$(f \otimes g)(v_1, \cdots, v_{k+l}) = f(v_1, \cdots, v_k)\, g(v_{k+1}, \cdots, v_{k+l})$$

Définition 1.8 *On appelle algèbre tensorielle de E^*, et l'on désigne par $T(E^*)$, la somme directe*

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigotimes^{k} E^*$$

munie du produit obtenu en prolongeant $\otimes$ par linéarité.

Définition 1.9 *Une forme $k-$linéaire f sera dite alternée si pour toute permutation σ de $1, \cdots, k$ on a*

$$f(x_1, \cdots, x_k) = \epsilon(\sigma)\, f\left(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(k)}\right),$$

où l'on a désigné par $\epsilon(\sigma)$ la signature de σ. L'entier k est le degré de f.

On désigne par $\bigwedge^k E^*$ l'espace vectoriel des formes $k-$*linéaires* alternées .

Définition 1.10 *L'antisymétrisée d'une forme $k-$linéaire f, notée* $\mathrm{Alt}\, f$, *est donnée par*

$$(\mathrm{Alt}\, f)(x_1, \cdots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \epsilon(\sigma) f\left(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(k)}\right),$$

où l'on a désigné par $\mathcal{S}_k$ le groupe des permutations de $\{1, 2, \cdots, k\}$, et par $\epsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ.

Définition 1.11 *Le produit extérieur de* $f \in \bigwedge^k E^*$ *et* $g \in \bigwedge^l E^*$, *noté* $f \wedge g$, *est la* $(k+l)-$ *forme*

$$f \wedge g = \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Alt}(f \otimes g).$$

Propriétés

1. Anticommutativité : $g \wedge f = (-1)^{kl} f \wedge g \quad$ si $f \in \bigwedge^k E^*$ et $g \in \bigwedge^l E^*$.
2. Associativité : $f \wedge (g \wedge h) = (f \wedge g) \wedge h \quad$ si $f \in \bigwedge^k E^*$ et $g \in \bigwedge^l E^*$, $h \in \bigwedge^m E^*$.
3. $(f_1 \wedge \cdots \wedge f_k)(x_1, \cdots, x_k) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_k(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(x_k) & \cdots & f_k(x_k) \end{vmatrix}$

Définition 1.12 *L'algèbre extérieure de* E^* *est l'espace vectoriel*

$$\bigwedge E^* = \bigoplus_{k=0}^{n} \bigwedge^k E^*,$$

muni du produit obtenu en prologeant $\wedge$ *par linéarité.*

Définition 1.13 *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels, et* $f : E \to F$ *une application linéaire. La transposée de* f, *notée* ${}^t f$, *est l'application de* F^* *dans* E^* *donnée par*

$${}^t f(L) = L \circ f.$$

La définition s'étend immédiatement au cas où L est une application multilinéaire, en posant de même

$$\left({}^t f(L)\right)(x_1, \cdots, x_k) = L\left(f(x_1), \cdots, f(x_k)\right)$$

Il est bien connu que :

$${}^t f(S \otimes T) = {}^t f(S) \otimes {}^t f(T),$$

et que ${}^t f(S)$ est alternée dès que S l'est. On a aussi

$${}^t f(S \wedge T) = {}^t f(S) \wedge {}^t f(T)$$

1.3.2 Formes différentielles sur un ouvert d'un espace vectoriel

Définition 1.14 *Une forme différentielle de degré* 1 *sur un ouvert* U *d'un espace vectoriel est une application de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *de* U *dans* E^*.

On notera $\Omega^1(U)$ l'ensemble de ces formes. Une forme α s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mathrm{d}\, x_i,$$

$\alpha_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ pour tout i et dx_i la base de E^*.

Définition 1.15 *Une forme différentielle de degré* p *sur un ouvert* U *d'un espace vectoriel* E *est une application de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *de* U *dans* $\bigwedge^p E^*$. *Une forme* α *s'écrit*

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} \alpha_{i_1, \cdots, i_p} \, \mathrm{d}\, x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, x_{i_p}$$

L'espace vectoriel des formes de degré p sur U est noté $\Omega^p(U)$. On pose $\Omega(U) = \bigoplus_{k=0}^{\dim(U)} \Omega^k(U)$ Une forme qui appartient à une composante de cette somme directe est dite homogène.

Définition 1.16 *Soient* U *et* V *des ouverts d'espaces vectoriels, et* $f \in \mathcal{C}^\infty(U,V)$. *L'image réciproque par* f *de* $\alpha \in \Omega(V)$, *notée* $f^*\alpha$, *est la forme sur* U *définie par*

$$(f^*\alpha)_x =^t (T_x f) \cdot \alpha f(x)$$

Proposition 1.1

1. *Si* $f \in \mathcal{C}^\infty(U,V)$ *et si* $\alpha, \beta \in \Omega(V)$, *alors*

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta).$$

2. *Si* $f \in \mathcal{C}^\infty(U,V)$ *et si* $g \in \mathcal{C}^\infty(V,W)$, *alors*

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

1.3.3 Différentielle des formes

La définition de l'image réciproque s'applique parfaitement aux tenseurs covariants, c'est-à-dire aux applications $\mathcal{C}^\infty$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $T(\mathbb{R}^{n*})$. Par contre, une propriété spécifique des formes différentielles est la possibilité de leur étendre la différentielle des fonctions.

Théorème 1.2 *Il existe une application linéaire* $\mathrm{d} : \Omega(U) \to \Omega(U)$ *et une seule ayant les propriétés suivantes :*

1. $\deg(\mathrm{d}\,\alpha) = p+1$ *si* $\deg\alpha = p$.
2. *Sur* $\Omega^0(U)$, d *est la différentielle des fonctions.*
3. *Si* α *est homogène,* $\mathrm{d}\,(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\,\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg\alpha}\,\alpha \wedge \mathrm{d}\,\beta$
4. $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$.

Définition 1.17 *L'opérateur* d *s'appelle la différentielle extérieure, ou plus brièvement la différentielle.*

Si α est une forme différentielle de degré p, s'écrivant

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \alpha_{i_1,\cdots,i_p}\,\mathrm{d}\,x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x_{i_p}$$

alors

$$\mathrm{d}\,\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \mathrm{d}\,\alpha_{i_1,\cdots,i_p} \wedge \mathrm{d}\,x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x_{i_p}$$

Proposition 1.3 *La différentielle et l'image réciproque commutent. Autrement dit, si* U *et* V *sont des ouverts d'espaces vectoriels et si* $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(U, V)$, *on a*

$$\varphi^*(\mathrm{d}\,\alpha) = \mathrm{d}\,(\varphi^*\alpha) \qquad \forall \alpha \in \Omega(V)$$

Définition 1.18 *Une forme différentielle de degré* p *sur un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *est dite fermée si* $\mathrm{d}\,\alpha = 0$ *; on dira qu'elle est exacte s'il existe une forme* β *de degré* $p-1$ *telle que* $\mathrm{d}\,\beta = \alpha$ *: on dira alors que* β *est une primitive de* α.

1.3.4 Formes différentielles sur une variété

Si M est une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^n$, et $\alpha \in \Omega(\mathbb{R}^n)$, on peut définir naturellement la restriction de α à M : pour chaque $x \in M$, la restriction à T_xM de la forme $p-$ *linéaire* alternée α_x est encore p-linéaire alternée. On peut définir les formes différentielles sur une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ en s'inspirant de cette remarque : on se donne pour tout $x \in M$ une forme $p-$ *linéaire* alternée sur T_xM. Pour une variété M de classe $\mathcal{C}^\infty$, on désigne par $\bigwedge^p T^*M$ la réunion disjointe

$$\coprod_{x \in M} \bigwedge^p T_x^* M$$

Définitions

1. On appelle $\bigwedge^p T^*M$ le fibré des formes alternées sur M ; pour $p = 1$, le fibré obtenu, noté T^*M, s'appelle le fibré cotangent.
2. Une forme différentielle de degré p sur une variété M est une section de π, c'est-à-dire une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ $\alpha : M \to \bigwedge^p T^*M$ telle que pour tout x, $\alpha(x) \in \bigwedge^p T_x^*M$.

Comme dans le cas des ouverts de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des formes différentielles de degré p sur M se note $\Omega^p(M)$, et l'on pose de même

$$\Omega(M) = \bigoplus_{p=0}^{\dim M} \Omega^p(M)$$

Le produit extérieur de deux formes α et β de degrés respectifs p et q est la forme de degré $p+q$ définie par

$$(\alpha \wedge \beta)_x = \alpha_x \wedge \beta_x$$

Proposition 1.4 *Si α est une forme différentielle de degré p sur M et $(U, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ une carte, il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ $a_{i_1,\cdots,i_p}$ (avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$) sur U, déterminées de manière unique, telles que*

$$\forall x \in U, \alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} a_{i_1,\cdots,i_p}(x) \,\mathrm{d}\,\varphi_{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,\varphi_{i_n}(x)$$

Théorème 1.5 *Si M est une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$, il existe une application linéaire* $\mathrm{d} : \Omega(M) \to \Omega(M)$ *et une seule ayant les propriétés suivantes :*

1. $\deg \mathrm{d}\,\alpha = p + 1$ *si* $\deg \alpha = p$.
2. *Sur* $\Omega^0(M)$, d *est la différentielle des fonctions.*
3. *Si α est homogène,* $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\,\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge \mathrm{d}\,\beta$
4. $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$.

Théorème 1.6 *Si M est une variété de $\mathcal{C}^\infty$, tout point $x \in M$ est contenu dans un ouvert U ayant la propriété suivante : si $\alpha \in \Omega^p(U)$ est fermée, il existe une forme $\beta \in \Omega^{p-1}(U)$ telle que $\mathrm{d}\,\beta = \alpha$.*

L'orientation de $\mathbb{C}^n$

L'orientation de $\mathbb{C}^n$ est définie par la forme différentielle

$$\mathrm{d}\,x_1 \wedge \mathrm{d}\,x_2 \wedge ... \wedge \mathrm{d}\,x_{2n}$$

où $x_1, ..., x_{2n}$ sont les coordonnées réelles et $z_j = x_j + ix_{j+n}$ les coordonnées complexes.

Intégration partielle des formes différentielles

Soient M et $M^{'}$ deux variétés différentielles de classe $\mathcal{C}^{\infty}$de dimension n, m respectivement et f une $p-forme$ différentielle définie sur le produit $M \times M^{'}$. Si $y_1, y_2, ..., y_n$ sont les coordonnées locales sur M alors la forme différentielle f s'écrit de façon unique :

$$f(x,y) = \sum_{|I| \leq \deg f}' f_I(x,y) \wedge \mathrm{d}\, y^I$$

où

$$\mathrm{d}\, y^I = \mathrm{d}\, y_{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}\, y_{i_p}; I = (i_1, ..., i_p); |I| = p$$

et $f_I(x,y)$ la forme différentielle de degré $\deg f - |I|$ sur M dépend de $y \in M^{'}$.
Si M est orientée et si l'intégrale $\displaystyle\int_M f_I(x,y)$ existe pour chaque $y \in M^{'}$ et pour tout $|I| = \deg f - \dim_{\mathbb{R}} M$
On définit

$$\int_M f(x,y) \;=\; \sum_{|I| = \deg f - \deg_R M}' \int_M f_I(x,y))\, \mathrm{d}\, y^I$$

Valeur absolue d'une forme différentielle

Soit M une variété différentielle orientée de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ de dimension n, et soit α une forme différentielle de degré maximal n sur M qui s'écrit

$$\alpha = a_{1,\cdots,n}\, \mathrm{d}\, x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}\, x_n$$

où $a_{1,\cdots,n}$ est une fonction à valeurs complexes et $x_1, ..., x_n$ sont les coordonnées locales sur M tels que $\mathrm{d}\, x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}\, x_n$ définie l'orientation de $\mathbb{C}^n$. La valeur absolue de f est définie par :

$$|\alpha| = |a_{1,\cdots,n}|\, \mathrm{d}\, x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}\, x_n$$

si α est intégrable, alors

$$\left| \int_M \alpha \right| \leq \int_M |\alpha|$$

Formes différentielles sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$

Soient $(z_1, ..., z_n)$ les coordonnées complexes de $\mathbb{C}^n$. Alors toute $n-forme$ différentielle sur un ouvert D de $\mathbb{C}^n$ (où de type (p,q)) s'écrit d'une façon unique :

$$f = \sum_{\substack{|I|=p,|J|=q \\ p+q=n}}' f_{I,J} \; \mathrm{d}\, z^I \wedge \mathrm{d}\, \overline{z}^J$$

où $I = (i_1, ..., i_p)$, $J = (j_1, ..., j_q)$ sont des multi-indices avec $|I| \leq n$ et $|J| \leq n$ et $0 \leq p, q \leq n$ où

$$\mathrm{d}\, z^I = \mathrm{d}\, z_{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}\, z_{i_p} \;,\; d\; \overline{z}^J = \mathrm{d}\, \overline{z}_{j_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}\, \overline{z}_{j_q} \text{ et} f_{I,J} \text{ sont des fonctions sur } D$$

Changement de variable

Soit $h = (h_1, ..., h_m) : D \longrightarrow \mathbb{C}^m$ une application holomorphe et soit $D' \subseteq \mathbb{C}^m$ un ensemble ouvert tel que $h(D) \subseteq D'$.

Si f est une forme différentielle sur D', on note par $h^* f$ le changement de variable de f défini par :

$$h^* f \;=\; \sum_{|I|=p,|J|=q}' (f_{IJ} \circ h)\, \mathrm{d}\, h_{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}\, h_{i_p} \wedge \overline{\mathrm{d}\, h}_{j_1} \wedge ... \wedge \overline{\mathrm{d}\, h}_{j_q}$$

Proposition 1.7 *Pour chaque $(p, q)-$forme f continue dans D, on a :*

1. *$h^* f$ est une $(p, q) - forme$ dans D'.*
2. *$\partial h^* f = h^* \partial f \qquad$ et $\quad \overline{\partial} h^* f = h^* \overline{\partial} f$*

1.4 Pseudo-convexité

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière régulière. Plus précisément, on suppose que

$$\Omega = \{z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n \;\;|\;\; \varrho\,(z) < 0\}$$

où ϱ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie dans un voisinage de $\overline{\Omega}$ telle que d ϱ ne s'annule pas sur

$$\partial\Omega = \{z = (z_1 \;, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n \;\;|\;\; \varrho\,(z) = 0\}\,.$$

Une telle fonction ϱ est appelée fonction définissante pour le domaine Ω.

Définition 1.19 *Soit $D \subset \mathbb{C}^n$ et soit r une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur D.On dit que r est plurisousharmonique dans D si*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z)\, \xi_j \overline{\xi}_k \geq 0 \qquad\qquad z \in D,\ \xi \in \mathbb{C}^n.$$

On dit que r est strictement plurisousharmonique dans D si l'inégalité est stricte.

La forme hermitienne

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z)\, \xi_j \overline{\xi}_k$$

est appelée Hessien complexe de r en z. La matrice corespondante est appelée matrice hessienne complexe.

Définition 1.20 *Un domaine Ω dans $\mathbb{C}^n$ est dit pseudo-convexe si la fonction*

$$z \longmapsto -\ln \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$$

est plurisousharmonique.

Remarque 1 *Il y a identité entre les domaines pseudo-convexes et les domaines d'holomorphies. Lorsque la frontière de Ω est régulière, la pseudo-convexité s'exprime en termes du Hessien de la fonction définissante.*

Proposition 1.8 *On suppose Ω défini a l'aide de la fonction définissante ϱ. Alors Ω est pseudo-convexe si est seulement si*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z_j\ \partial \overline{z}_k}(z)\, \xi_j \overline{\xi}_k \geq 0 \qquad\qquad z \in\ \partial\Omega,\ \xi \in \mathbb{C}^n$$

lorsque

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varrho}{\partial z_j}(z)\, \xi_j = 0 \quad .$$

Le sous-espace vectoriel de dimension $(n-1)$ formé des $\xi \in \mathbb{C}^n$ tels que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varrho}{\partial z_j}(z)\, \xi_j = 0$$

est appelé espace tangent complexe à $\partial\Omega$ en z.

La restriction du Hessien complexe à l'espace tangent complexe est apellée forme de Levi, donc la pseudo-convexité de Ω est équivalente à la positivité de la forme de Levi.

Définition 1.21 *Lorsque la forme de Levi est définie positive, on dit que le domaine Ω est strictement pseudo-convexe.*

On peut démontrer alors le résultat suivant : [8]

Proposition 1.9 *Un domaine strictement pseudo-convexe possède une fonction définissante strictement plurisousharmonique.*

Lorsque Ω est pseudo-convexe sans être strictement pseudo-convexe, on dit que Ω est faiblement pseudo-convexe. Il n'est plus vrai qu'un domaine faiblement pseudo-convexe ait une fonction définissante plurisousharmonique.

Chapitre 2

Représentations Intégrales

Cette partie est consacrée à la démonstration des formules intégrales classiques : la formule de *Bochner-Martinelli*, formule de *Koppelman*, *formule de Leray* et la formule de *Cauchy-Fantappié* (*Koppelman-Leray*)

2.1 Préliminaires

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et f une forme différentielle sur D de type (p,q), p et $q \in \mathbb{N}$

$$f = \sum_{|\alpha|=p, |\beta|=q} f_{\alpha,\beta} \, \mathrm{d}\, z^\alpha \wedge \mathrm{d}\, \overline{z}^\beta$$

où $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ sont des multi-indices, avec $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq n$, $|\beta| \leq n$, $0 \leq p, q \leq n$, et $f_{\alpha,\beta}$ sont des fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{C}$; on définit la différentielle de f par la relation

$$\mathrm{d}\, f = \partial f + \overline{\partial} f$$

avec

$$\partial f = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\alpha|=p, |\beta|=q} \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial z_j} \mathrm{d}\, z_j \wedge \mathrm{d}\, z^\alpha \wedge \mathrm{d}\, \overline{z}^\beta$$

$$\overline{\partial} f = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\alpha|=p, |\beta|=q} \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}_j} \mathrm{d}\, \overline{z}_j \wedge \mathrm{d}\, z^\alpha \wedge \mathrm{d}\, \overline{z}^\beta$$

et pour $j = 1, ..., n$

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_{j+n}} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_{j+n}} \right)$$

où $(x_1, ..., x_{2n})$ les éléments de $\mathbb{R}^{2n}$ tels que $z_j = x_j + ix_{j+n}$.
∂f est une $(p+1, q)$ forme et $\overline{\partial} f$ est de type $(p, q+1)$.
– La forme volume dans $\mathbb{C}^n$ est définie par :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\, v(z) &= \mathrm{d}\, \overline{z}_1 \wedge \mathrm{d}\, \overline{z}_2 \wedge ... \wedge \mathrm{d}\, \overline{z}_n \wedge \mathrm{d}\, z_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}\, z_n \\ &= (2i)^n \,\mathrm{d}\, x_1 \wedge \mathrm{d}\, x_2 \wedge ... \wedge \mathrm{d}\, x_{2n} \end{aligned}$$

et $\mathrm{d}\, x_1 \wedge \mathrm{d}\, x_2 \wedge ... \wedge \mathrm{d}\, x_{2n}$ est la forme volume dans $\mathbb{R}^{2n}$.

Définition 2.1 (Ouvert à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) *Soit $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$: le bord ∂D de D est dit de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux s'il existe un nombre fini de fonctions à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^1$, $\rho_1, \cdots, \rho_k$ définies sur $\mathbb{C}^n$ telles que*

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n, \rho_j(z) < 0 \;, j = 1, ..., k\}$$

et

$$d\rho_{j_1}(z) \wedge ... \wedge d\rho_{j_s}(z) \neq 0$$

pour tout multi-indices $1 \leq j_1 < \cdots < j_s \leq k$ et pour tout $z \in \partial D$ vérifiant

$$\rho_{j_1}(z) = \cdots = \rho_{j_s}(z) = 0$$

2.2 Les formes différentielles $\omega(u)$ et $\omega'(v)$

Soit M une variété réelle de classe $\mathcal{C}^1$ et soient $u = (u_1, \cdots, u_n) \in M \to \mathbb{C}^n$,
$v = (v_1, \cdots, v_n) \in M \to \mathbb{C}^n$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur M.
On définit alors :

$$\omega(u) = \mathrm{d}\, u_1 \wedge .... \wedge \mathrm{d}\, u_n$$
$$\omega'(v) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} v_j \,\mathrm{d}\, v_1 \wedge ... \wedge \widehat{\mathrm{d}\, v_j} \wedge ... \wedge \mathrm{d}\, v_n$$
$$\omega_x(u) = \mathrm{d}_x\, u_1 \wedge .... \wedge \mathrm{d}_x\, u_n$$
$$\omega'_x(v) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} v_j \,\mathrm{d}_x\, v_1 \wedge ... \wedge \widehat{\mathrm{d}_x\, v_j} \wedge ... \wedge \mathrm{d}_x\, v_n$$

où $\widehat{\mathrm{d}\, v_j}$ signifie que $\mathrm{d}\, v_j$ est omise.
On note

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Les résultats suivants sont utiles pour la suite :

Lemme 2.1 *Pour chaque* $z' \in \mathbb{C}^n$ *et* $\varepsilon > 0$

$$\int_{\partial B(z',\varepsilon)} \omega'(\overline{z}) \wedge \omega(z) = n \int_{B(z',\varepsilon)} \omega(\overline{z}) \wedge \omega(z) = n \int_{B(0,\varepsilon)} \mathrm{d}\, v(z)$$

Preuve.

On va appliquer la formule de Stokes à la forme différentielle

$$\omega'(\overline{z}) \wedge \omega(z)$$

et à la variété à bord $B(z', \varepsilon)$ on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B(z',\varepsilon)} \omega'(\overline{z}) \wedge \omega\,(z) &= \int_{B(z',\varepsilon)} \mathrm{d}\left[\omega'(\overline{z}) \wedge \omega(z)\right] \\
&= n \int_{B(z',\varepsilon)} \omega\,(\overline{z}) \wedge \omega\,(z)
\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{d}\,\omega\,(z) = 0$, alors, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left[\omega'(\overline{z}) \wedge \omega(z)\right] &= \mathrm{d}\,\omega'\,(\overline{z}) \wedge \omega\,(z) + (-1)^{n-1} \omega'\,(\overline{z}) \wedge \mathrm{d}\,\omega\,(z) \\
&= n\omega\,(\overline{z}) \wedge \omega\,(z)
\end{aligned}$$

posons $Z = z - z'$ alors

$$\begin{aligned}
\omega(\overline{Z}) &= \omega(\overline{z} - \overline{z'}) = \mathrm{d}(\overline{z}_1 - \overline{z'}_1) \wedge ... \wedge \mathrm{d}(\overline{z}_n - \overline{z'}_n) \\
&= \mathrm{d}\,\overline{z}_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}\,\overline{z}_n \\
&= \omega(\overline{z})
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_{B(z',\varepsilon)} n\ \omega\,(\overline{z}) \wedge \omega(z) &= \int_{B(0,\varepsilon)} n\ \omega\,(\overline{z}) \wedge \omega(z) \\
&= \int_{B(0,\varepsilon)} n\ \ (2i)^n\, \mathrm{d}\,x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}\,x_{2n} \\
&= n\ \ (2i)^n \int_{B(0,\varepsilon)} \mathrm{d}\,x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}\,x_{2n}
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.2 *Soit* M *une variété réelle de classe* $\mathcal{C}^\infty$, *et soient* $u, v : M \longrightarrow \mathbb{C}^n$ *deux cartes de classe* $\mathcal{C}^1$ *; la forme différentielle*

$$\frac{\omega'(v) \wedge \omega(u)}{\langle u, v\rangle^n}$$

est fermée pour tout $x \in M$, *si* $\langle u(x), v(x)\rangle \neq 0$.

Preuve. Il suffit de montrer que $\mathrm{d}\left[\dfrac{\omega'(v)\wedge\omega(u)}{\langle u,v\rangle^n}\right]=0$. Pour cela, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left[\frac{\omega'(v)\wedge\omega(u)}{\langle u,v\rangle^n}\right] &= \mathrm{d}\left[\langle u,v\rangle^{-n}\omega'(v)\wedge\omega(u)\right]\\ &= \mathrm{d}\langle u,v\rangle^{-n}\wedge\omega'(v)\wedge\omega(u)+\langle u,v\rangle^{-n}\,\mathrm{d}\left[\omega'(v)\wedge\omega(u)\right]\end{aligned}$$

d'une part

$$\mathrm{d}\left[\omega'(v)\wedge\omega(u)\right]=\mathrm{d}\,\omega'(v)\wedge\omega(u)+(-1)^{n-1}\omega'(v)\wedge\mathrm{d}\,\omega(u) \tag{2.1}$$

et comme $\mathrm{d}\,\omega(u)=0$ alors, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left[\omega'(v)\wedge\omega(u)\right] &= \mathrm{d}\left[\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}v_j\,\mathrm{d}\,v_1\wedge\ldots\wedge\widehat{\mathrm{d}\,v_j}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\,v_n\right]\wedge\omega(u)\\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\,\mathrm{d}\,v_j\wedge\mathrm{d}\,v_1\wedge\ldots\wedge\widehat{\mathrm{d}\,v_j}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\,v_n\wedge\omega(u)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\mathrm{d}\,v_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\,v_j\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\,v_n\wedge\omega(u)\\ &= n\ \omega(v)\wedge\omega(u)\end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\langle v,u\rangle^{-n}\wedge\omega'(v)\wedge\omega(u) &= -n\langle v,u\rangle^{-n-1}\,\mathrm{d}\langle v,u\rangle\wedge\omega'(v)\wedge\omega(u)\\ &= -n\langle v,u\rangle^{-n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i\,\mathrm{d}\,v_i+v_i\,\mathrm{d}\,u_i)\wedge\omega'(v)\wedge\omega(u)\\ &= -n\langle v,u\rangle^{-n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}u_i\,\mathrm{d}\,v_i\wedge\omega'(v)\wedge\omega(u)+\sum_{i=1}^{n}v_i\,\mathrm{d}\,u_i\wedge\omega'(v)\wedge\omega(u)\right]\end{aligned} \tag{2.2}$$

puisque $\omega(u)$ contient les facteurs $\mathrm{d}\,u_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\,u_n$, alors on a

$$\sum_{i=1}^{n}v_i\,\mathrm{d}\,u_i\wedge\omega'(v)\wedge\omega(u)=0$$

donc

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\langle v,u\rangle^{-n}\wedge\omega'(v)\wedge\omega(u) &= -n\langle v,u\rangle^{-n-1}\sum_{i=1}^{n}u_i\,\mathrm{d}\,v_i\wedge\omega'(v)\wedge\omega(u)\\ &= -n\langle v,u\rangle^{-n-1}\sum_{i=1}^{n}u_i\,\mathrm{d}\,v_i\wedge\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}v_j\,\mathrm{d}\,v_1\wedge..\wedge\widehat{\mathrm{d}\,v_j}\wedge..\wedge\mathrm{d}\,v_n\wedge\omega(u)\\ &= -n\langle v,u\rangle^{-n-1}\sum_{i=1}^{n}u_iv_i\,\mathrm{d}\,v_1\wedge..\wedge\mathrm{d}\,v_j\wedge..\wedge\mathrm{d}\,v_n\wedge\omega(u)\\ &= -n\langle v,u\rangle^{-n-1}\langle u,v\rangle\omega(v)\wedge\omega(u)\\ &= -n\langle v,u\rangle^{-n}\omega(v)\wedge\omega(u)\end{aligned}$$

finalement, de **2.1** et **2.2** , on déduit

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left[\langle u,v\rangle^{-n}\omega(v)\wedge\omega(u)\right] &= -n\langle v,u\rangle^{-n}\omega(v)\wedge\omega(u)+n\langle v,u\rangle^{-n}\omega(v)\wedge\omega(u)\\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.3 *Soit* $x = x_j(\xi)$, $j = 1, 2, ..., n$ *les coordonnées réelles de* $\xi \in \mathbb{C}^n$ *avec* $\xi_j = x_j(\xi) + ix_{j+n}(\xi)$*. Alors pour tout* $z \in \mathbb{C}^n$

$$\mathrm{d}_\xi\left[\omega'(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)\right] = n(2i)^n\,\mathrm{d}\,x_1\wedge\mathrm{d}\,x_2\wedge...\wedge\mathrm{d}\,x_{2n}$$

Preuve.

$$\mathrm{d}_\xi\left[\omega'(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)\right] = \mathrm{d}_\xi\,\omega'(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)+(-1)^{n-1}\omega'(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\mathrm{d}\,\omega(\xi)$$

comme $\mathrm{d}\ \omega(\xi) = 0$ alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_\xi\left[\omega'(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)\right] &= \mathrm{d}_\xi\ \omega'(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)\\
&= \mathrm{d}_\xi\left[\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}(\overline{\xi}_j-\overline{z}_j)\,\mathrm{d}\ \overline{\xi}_1\wedge...\wedge\widehat{\mathrm{d}\,\overline{\xi}_j}\wedge...\wedge\mathrm{d}\,\overline{\xi}_n\right]\wedge\omega(\xi)\\
&= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\,\mathrm{d}\ \overline{\xi}_j\wedge\mathrm{d}\,\overline{\xi}_1\wedge...\wedge\widehat{\mathrm{d}\ \overline{\xi}_j}\wedge...\wedge\mathrm{d}\,\overline{\xi}_n\wedge\omega(\xi)\\
&= n\omega(\overline{\xi})\wedge\omega(\xi)\\
&= n(2i)^n\,\mathrm{d}\,x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_{2n}
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.4 *Pour chaque fonction* Ψ *sur* M*, on a :*

$$\omega'(\Psi v) = \Psi^n\omega'(v)$$

Preuve. Par définition

$$
\begin{aligned}
\omega'(\Psi\upsilon) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}\, \Psi\upsilon_j \,\mathrm{d}\,(\Psi\upsilon_1) \wedge \cdots \underset{j}{\wedge} \cdots \wedge \mathrm{d}\,(\Psi\upsilon_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}\, \Psi\upsilon_j \,(\mathrm{d}\,\Psi\upsilon_1 + \Psi\,\mathrm{d}\,\upsilon_1) \wedge \cdots \underset{j}{\wedge} \cdots \wedge (\mathrm{d}\,\Psi\upsilon_n + \Psi\,\mathrm{d}\,\upsilon_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}\, \Psi\upsilon_j \,(\Psi\,\mathrm{d}\,\upsilon_1) \wedge \cdots \underset{j}{\wedge} \cdots \wedge (\Psi\,\mathrm{d}\,\upsilon_n) \\
&= \Psi^n \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}\, \upsilon_j \,\mathrm{d}\,\upsilon_1 \wedge \cdots \underset{j}{\wedge} \cdots \wedge \mathrm{d}\,\upsilon_n \\
&= \Psi^n \omega'(\upsilon)
\end{aligned}
$$

■

2.3 Formule de Bochner -Martinelli

2.3.1 Noyau de Bochner-Martinelli

Notons

$$\omega\,(\xi) = \mathrm{d}\,\xi_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}\,\xi_n$$

et

$$\omega'_\xi(\overline{\xi} - \overline{z}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} (\overline{\xi}_j - \overline{z}_j)\,\mathrm{d}\,\overline{\xi}_1 \wedge .. \wedge \widehat{\mathrm{d}\,\overline{\xi}_j} \wedge .. \wedge \mathrm{d}\,\overline{\xi}_n$$

Définition 2.2 *On appelle noyau de Bochner − Martinelli la forme différentielle de type $(n, n-1)$ sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \Delta$ définie pour chaque $z \in \mathbb{C}^n$ (fixé) par*

$$\frac{\omega'_\xi(\overline{\xi} - \overline{z}) \wedge \omega(\xi)}{|\xi - z|^{2n}}$$

où

$$\Delta = \{(z, \xi) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n | z = \xi\}$$

est la diagonale de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

2.3.2 L'opérateur $\mathbb{B}_D$ pour une forme de type $(0,1)$ et $\mathbb{B}_{\partial D}$ pour une fonction

– Si D est un domaine borné dans $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et f est une forme différentielle bornée sur D, on définit l'opérateur $\mathbb{B}_D$ par :

$$(\mathbb{B}_D f)(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\xi\in D} f(\xi)\wedge\frac{\omega'_\xi(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)}{|\xi-z|^{2n}}$$

– Si D est un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et f est une fonction bornée sur ∂D, alors on définit l'opérateur $\mathbb{B}_{\partial D}$ par :

$$(\mathbb{B}_{\partial D} f)(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\xi\in \partial D} f(\xi)\frac{\omega'_\xi(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)}{|\xi-z|^{2n}}$$

On peut établir la formule de représentation intégrale suivante :

2.3.3 La formule de Bochner-Martinelli [8]

Théorème 2.5 *Soient $D\subseteq\mathbb{C}^n$ un domaine borné à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et f une fonction continue sur $\overline{D}$ telle que $\overline{\partial}f$ soit aussi continue sur $\overline{D}$; alors*

$$f(z) = (\mathbb{B}_{\partial D} f)(z) - (\mathbb{B}_D\overline{\partial}f)(z) \qquad \forall z\in D$$

Preuve. Pour $z\in\mathbb{C}^n$ (fixé), on pose

$$\theta(\xi) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\,\frac{\omega'_\xi(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)}{|\xi-z|^{2n}} = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\omega'_\xi(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)}{\left\langle\overline{\xi}-\overline{z},\xi-z\right\rangle^n}$$

et

$$D\varepsilon = D\setminus\overline{B}(z,\varepsilon)$$

avec

$$B(z,\varepsilon) = \{\xi\in D|\,|\xi-z|<\varepsilon\}$$

Pour ε infiniment petit, on applique la formule de Stokes à la forme différentielle

$$\xi\longmapsto f(\xi)\frac{\omega'_\xi(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)}{|\xi-z|^{2n}}$$

et à la variété à bord $D\varepsilon = D\setminus\overline{B}(z,\varepsilon)$, on obtient

$$\int_{\partial D_\varepsilon} f(\xi)\theta(\xi) = \int_{D_\varepsilon} d_\xi\left[f(\xi)\theta(\xi)\right] \tag{2.3}$$

tel que

$$\begin{aligned} d_\xi \left[f(\xi)\theta(\xi) \right] &= \left[\partial_\xi f(\xi) + \overline{\partial}_\xi f\left(\xi\right) \right] \wedge \theta\left(\xi\right) + f(\xi) d\theta\left(\xi\right) \\ &= \partial_\xi f(\xi) \wedge \theta(\xi) + \overline{\partial}_\xi f\left(\xi\right) \wedge \theta\left(\xi\right) \\ &= \overline{\partial}_\xi f\left(\xi\right) \wedge \theta\left(\xi\right) \end{aligned}$$

or que

$$\begin{aligned} \partial_\xi f\left(\xi\right) \wedge \theta\left(\xi\right) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_j} d\xi_j \wedge \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\omega'_\xi(\overline{\xi} - \overline{z})}{|\xi - z|^{2n}} \wedge d\xi_1 \wedge ... \wedge d\xi_n \\ &= 0 \\ d_\xi \left[f(\xi)\theta(\xi) \right] &= \overline{\partial}_\xi f\left(\xi\right) \wedge \theta\left(\xi\right) \end{aligned}$$

2.3 devient

$$\int_{\partial D} f(\xi)\theta(\xi) - \int_{\partial B(z,\varepsilon)} f(\xi)\theta(\xi) = \int_{D_\varepsilon} \overline{\partial}_\xi f\left(\xi\right) \wedge \theta\left(\xi\right) \qquad \textbf{(2.4)}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(z,\varepsilon)} f(\xi)\theta(\xi) &= f(z) - f(z) + \int_{\partial B(z,\varepsilon)} f(\xi)\theta\left(\xi\right) \\ &= f\left(z\right) \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \theta(\xi) - \int_{\partial B(z,\varepsilon)} f(z)\theta\left(\xi\right) + \int_{\partial B(z,\varepsilon)} f(\xi)\theta\left(\xi\right) \\ &= f\left(z\right) \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \theta(\xi) - \int_{\partial B(z,\varepsilon)} (f(z) - f\left(\xi\right))\theta\left(\xi\right) \end{aligned}$$

avec

$$\int_{\partial B(z,\varepsilon)} \theta(\xi) = \int_{|z-\xi|=\varepsilon} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\omega'_\xi(\overline{\xi} - \overline{z}) \wedge \omega(\xi)}{|\xi - z|^{2n}} = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n \varepsilon^{2n}} \int_{|z-\xi|=\varepsilon} \omega'_\xi(\overline{\xi} - \overline{z}) \wedge \omega(\xi)$$

D'après le Lemme 2.1 et la proposition 2.2 on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \theta(\xi) &= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n \, \varepsilon^{2n}} \int_{|z-\xi|<\varepsilon} d_\xi \, \left[\omega'(\overline{\xi} - \overline{z}) \wedge \omega(\xi) \right] \\ &= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n \, \varepsilon^{2n}} \int_{B(0,\varepsilon)} n(2i)^n dx_1 \wedge ... \wedge dx_{2n} \\ &= \frac{(n)!}{(2\pi i)^n \, \varepsilon^{2n}} (2i)^n \int_{B(0,\varepsilon)} dx_1 \wedge ... \wedge dx_{2n} = 1 \\ &= \frac{n!}{\pi^n \, \varepsilon^{2n}} \int_{B(0,\varepsilon)} dx_1 \wedge ... \wedge dx_{2n} = 1 \end{aligned}$$

et

$$\int_{|\xi-z|=\varepsilon}(f(\xi)-f(z))\theta(\xi)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n\varepsilon^{2n-1}}\int_{|\xi-z|=\varepsilon}(f(\xi)-f(z))\frac{\omega'_\xi(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)}{|\varepsilon-z|}$$

Comme $\dfrac{\omega'(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)}{|\xi-z|}$ est borné dans D, il existe une constante $C<\infty$ indépendante de ξ telle que

$$\left|\int_{|\xi-z|=\varepsilon}(f(\xi)-f(z))\theta(\xi)\right|\leq C\;\max\;|(f(\xi)-f(z))|$$

Au total

$$\int_{\partial D}f(\xi)\theta(\xi)-f(z)+\int_{\partial B(z,\varepsilon)}(f(z)-f(\xi))\theta(\xi)=\int_{D\varepsilon}\overline{\partial}f(\xi)\wedge\theta(\xi)$$

Quand $\varepsilon\longrightarrow0$ et $z\longrightarrow\xi$

• $\lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow0}\int_{D_\varepsilon}\overline{\partial}f(\xi)\wedge\theta(\xi)=\int_D\overline{\partial}f(\xi)\wedge\theta(\xi)$

• $\lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow0}\int_{\partial B(z,\varepsilon)}(f(z)-f(\xi))\theta(\xi)=\int_{\partial B(z,\varepsilon)}\lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow0}(f(z)-f(\xi))\theta(\xi)$ (d'après le théorème de Lebesgue car $(f(z)-f(\xi))\theta(\xi)$ est localement intégrable).

Comme f est continue sur $\overline{D}$, $f(z)\longrightarrow f(\xi)$ lorsque $z\longrightarrow\xi$

A la limite **2.4** devient

$$\begin{aligned}\int_{\partial D}f(\xi)\theta(\xi)-f(z)&=\int_D\overline{\partial}f(\xi)\wedge\theta(\xi)\\ f(z)&=\int_{\partial D}f(\xi)\,\theta(\xi)-\int_D\overline{\partial}f(\xi)\wedge\theta(\xi)\\ f(z)&=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D}f(\xi)\frac{\omega'_\xi(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)}{|\xi-z|^{2n}}-\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_D\frac{\overline{\partial}f(\xi)\wedge\omega'_\xi(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)}{|\xi-z|^{2n}}\end{aligned}$$

donc

$$f(z)=\mathbb{B}_{\partial D}f(z)-\mathbb{B}_D\overline{\partial}f(z)$$

■

Remarque 2 *Pour $n=1$*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{\overline{\partial}f(\xi)\wedge d\xi}{\xi-z}$$

c'est la formule de Cauchy-Green dans $\mathbb{C}$.

Si f *est holomophe*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

la formule de Cauchy dans $\mathbb{C}$.

2.3.4 Noyau de Bochner-Martinelli-Koppelman

Sur l'ensemble N défini par :

$N = \{(\zeta, \eta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : \langle \zeta, \eta \rangle \neq 0\}$ on considère la forme différentielle μ définie sur N par :

$$\mu(\zeta, \eta) = \frac{\omega'(\zeta) \wedge \omega(\eta)}{\langle \zeta, \eta \rangle^n}$$

L'application $\widehat{h}$ de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \Delta$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ définie par

$$\widehat{h}(\xi, z) = \left(\overline{\xi} - \overline{z}, \xi - z\right)$$

a donc son image dans N. On considère alors la forme différentielle $\widehat{h}^*\mu$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \Delta$ et fermée puisque μ est fermée dans N d'après la *proposition* 2.2.

Définition 2.3 *On appelle noyau de Bochner-Martinelli-Koppelman la forme différentielle sur* $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \Delta$ *définie par*

$$B = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \widehat{h}^* \mu$$

De manière explicite :

$$B(z, \xi) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \left(\overline{\xi}_j - \overline{z}_j\right) \bigwedge_{s \neq j} \left(d\overline{\xi}_s - d\overline{z}_s\right) \wedge \omega(\xi - z)}{|\xi - z|^{2n}}$$

On sait que B *se décompose de manière unique :*

$$B = \sum_{\substack{0 \leq p \leq n \\ 0 \leq q \leq n-1}} B_q^p$$

où B_q^p *est de type* (p, q) *en* z *et* $(n-p, n-q-1)$ *en* ξ. *On pose également* $B_{-1}^p = 0$.

Lemme 2.6 *Pour tout* $(z, \xi) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \Delta$, *on a*

$$\overline{\partial} B(z, \xi) = 0 \quad et \quad \overline{\partial}_z B_q^p(z, \xi) = -\overline{\partial}_\xi B_{q+1}^p(z, \xi) .$$

En particulier $\overline{\partial}_\xi B_0^0(z, \xi) = 0$.

Preuve. Notons $K_{BM}(x) = \dfrac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\mu(\overline{x}, x)$ la forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}^n$ privé de 0, c'est une $(n, n-1) - forme$ et par conséquent $dK_{BM} = \partial K_{BM} + \overline{\partial} K_{BM} = \overline{\partial} K_{BM}$. Remarquons que $B = \tau^* K_{BM}$ où τ est l'application holomorphe de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ définie par $\tau(z, \xi) = \xi - z$, on en déduit donc que $dB = \overline{\partial} B$. Comme $B = \dfrac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\widehat{h}^* \mu$ et $d\mu = 0$ on a donc $\overline{\partial} B = dB = 0$. On obtient la seconde relation en comparant les bidegrés c'est-à-dire $\overline{\partial}_{z,\xi} B(z, \xi) = \overline{\partial}_z B(z, \xi) + \overline{\partial}_\xi B(z, \xi) = 0$ implique que

$$\overline{\partial}_z B(z, \xi) = -\overline{\partial}_\xi B(z, \xi)$$

comme B est de type (p, q) en z et $(n-p, n-q-1)$ en ξ on trouve

$$\overline{\partial}_z B_q^p(z, \xi) = -\overline{\partial}_\xi B_{q+1}^p(z, \xi)$$

■

Proposition 2.7 *Le noyau de Bochner−Martinelli−Koppelman B est une forme différentielle localement intégrable.*

Preuve. Soient l'application $\tau : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $(z, \xi) \longmapsto z - \xi$ et K_{BM} la forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ définie par

$$K_{BM}(x) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} |x|^{-2n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}\, \overline{x}_j \bigwedge_{j \neq s} d\overline{x}_s \wedge \omega(x)$$

Les coefficients de K_{BM} sont localement intégrables dans $\mathbb{C}^n$ car ce sont des $\mathcal{O}\left(|x|^{-2n+1}\right)$ et par conséquent $B = \tau^* K_{BM}$ est localement intégrable sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. ■

Lemme 2.8

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{\partial B(z,\xi)} f(\xi) \wedge B(z, \xi) \wedge \varphi(z) = (-1)^{p+q} \int_{z \in D} f(\xi) \wedge \varphi(z)$$

Preuve. On considère l'automorphisme $T : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, $(z, w) \longmapsto T(z, w) = (z, z+w)$ L'application T transforme $\mathbb{C}^n \times S(0, \epsilon)$ en $\{(z, \xi) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n / \ |z - \xi| = \varepsilon\}$, et par conséquent

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon &= \int_{|z-\xi|=\varepsilon} f(\xi) \wedge B(z, \xi) \wedge \varphi(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}^n \times S(0,\varepsilon)} T^*(f(\xi) \wedge B(z, \xi) \wedge \varphi(z)) \\
&= \int_{\mathbb{C}^n \times S(0,\varepsilon)} T^* f(z, w) \wedge T^* B(z, w) \wedge T^* \varphi(z, w)
\end{aligned}$$

or que

$$f(\xi)=\sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}} f_{IJ}(\xi)\,d\xi_I\wedge d\bar{\xi}_J$$

On remplace ξ par $z+w$ on trouve

- $$T^*f(z,w)=\sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}{}^{'} f_{IJ}(z+w)\,d(z+w)_I\wedge d\left(\overline{z+w}\right)_J$$
- $$\begin{aligned} T^*B(z,w) &= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\omega'(\overline{z+w-z})\wedge\omega(z+w-z)}{|z+w-z|^{2n}}\\ &= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\omega'(\overline{w})\wedge\omega(w)}{|w|^{2n}}\\ &= C_n\,|w|^{-2n}\,\omega'(\overline{w})\wedge\omega(w) \qquad \text{où} \quad C_n=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\end{aligned}$$
- $$T^*\varphi(z,w)=\varphi(z)$$

donc

$$I_\varepsilon=\int_{\mathbb{C}^n\times S(0,\varepsilon)}\sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}{}^{'}\left[f_{IJ}(z+w)\,d(z+w)_I\wedge d\left(\overline{z+w}\right)_J\right]\wedge\left[C_n\,|w|^{-2n}\,\omega'(\overline{w})\wedge\omega(w)\right]\wedge\varphi(z)$$

comme la somme est finie, on peut donc appliquer le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= (-1)^{p+q}\sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}{}^{'}\int_{\mathbb{C}^n}\left[\int_{S(0,\varepsilon)}C_n\ f_{IJ}(z+w)\wedge\frac{\omega'(\overline{w})\wedge\omega(w)}{|w|^{2n}}\right]d(z+w)_I\wedge d\left(\overline{z+w}\right)_J\wedge\varphi(z)\\ &= (-1)^{p+q}\sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}{}^{'}\int_{\mathbb{C}^n}\left[\int_{S(0,\varepsilon)}C_n\ f_{IJ}(z+w)\wedge\frac{\omega'(\overline{w})\wedge\omega(w)}{|w|^{2n}}\right]dz_I\wedge d\overline{z}_J\wedge\varphi(z)\end{aligned}$$

$$\text{on pose}\quad \int_{S(0,\varepsilon)}C_n\ f_{IJ}(z+w)\wedge\frac{\omega'(\overline{w})\wedge\omega(w)}{|w|^{2n}}=J_\varepsilon(z)$$

comme $\dfrac{\omega'(\overline{w})\wedge\omega(w)}{|w|^{2n}}=O(\varepsilon^{1-2n})$ sur $S(0,\varepsilon)$ donc l'intégrale $J_\varepsilon(z)$ est bornée et indépendant de ε et de z.

Le théorème de Lebesgue affirme que

$$\lim_{\epsilon\to 0}I_\varepsilon=(-1)^{p+q}\sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}}{}^{'}\int_{\mathbb{C}^n}\lim_{\varepsilon\to 0}J_\varepsilon(z)\,dz_I\wedge d\overline{z}_J\wedge\varphi(z)$$

Finalement, il reste à montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}J_\varepsilon(z)=f_{IJ}(z)$$

En effet

$$\begin{aligned}
\int_{S(0,\varepsilon)} C_n\ f_{IJ}\left(z+w\right) \frac{\omega'(\overline{w}) \wedge \omega(w)}{|w|^{2n}} &= f_{IJ}\left(z\right) - f_{IJ}\left(z\right) + \int_{S(0,\varepsilon)} C_n\ f_{IJ}\left(z+w\right) \frac{\omega'(\overline{w}) \wedge \omega(w)}{|w|^{2n}} \\
&= f_{IJ}\left(z\right) - f_{IJ}\left(z\right) \int_{S(0,\varepsilon)} C_n\ \frac{\omega'(\overline{w}) \wedge \omega(w)}{|w|^{2n}} \\
&+ \int_{S(0,\varepsilon)} C_n\ f_{IJ}\left(z+w\right) \frac{\omega'(\overline{w}) \wedge \omega(w)}{|w|^{2n}} \\
&= f_{IJ}(z) + C_n \int_{S(0,\varepsilon)} \left[f_{IJ}\left(z+w\right) - f_{IJ}\left(z\right)\right] \frac{\omega'(\overline{w}) \wedge \omega(w)}{|w|^{2n}}
\end{aligned}$$

comme

$$\int_{S(0,\varepsilon)} C_n\ \frac{\omega'(\overline{w}) \wedge \omega(w)}{|w|^{2n}} \quad = 1$$

d'après la formule de Bochner-Martinelli

$$\left| \int_{S(0,\varepsilon)} \left(f_{IJ}\left(z+w\right) - f_{IJ}\left(z\right)\right) \frac{\omega'(\overline{w}) \wedge \omega(w)}{|w|^{2n}} \right| \leq \max\ \left|f_{IJ}\left(w+z\right) - f_{IJ}\left(z\right)\right|$$

puisque f est continue le passage à la limite donne

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{S(0,\varepsilon)} \left(f_{IJ}\left(z+w\right) - f_{IJ}\left(z\right)\right) \frac{\omega'(\overline{w}) \wedge \omega(w)}{|w|^{2n}} = 0$$

Finalement, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} J_\varepsilon\left(z\right) = f_{IJ}\left(z\right)$$

donc

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} I_\varepsilon &= (-1)^{p+q} \sideset{}{'}\sum_{\substack{|I|=p \\ |j|\ =q}} \int_{\mathbb{C}^n} f_{IJ}\left(z\right) dz_I \wedge d\overline{z}_J \wedge \varphi\left(z\right) \\
&= (-1)^{p+q} \int_{\mathbb{C}^n} \sideset{}{'}\sum_{\substack{|I|=p \\ |j|\ =q}} f_{IJ}\left(z\right) dz_I \wedge d\overline{z}_J \wedge \varphi\left(z\right) \\
&= (-1)^{p+q} \int_{\mathbb{D}} f\left(z\right) \wedge \varphi\left(z\right)
\end{aligned}$$

d'ou le lemme. ■

2.3.5 Les opérateurs $\mathfrak{B}_D$ et $\mathfrak{B}_{\partial D}$ pour des formes différentielles de degré arbitraire

Soit B le noyeau de $Bochner - Martinelli - Koppelman$

- Si f est une forme différentielle bornée définie sur D, on pose pour $z \in D$:

$$(\mathfrak{B}_D f)(z) = \int\limits_{\xi \in D} f(\xi) \wedge B(z, \xi) \qquad \textbf{(2.5)}$$

  Puisque B à une singularité intégrable en $\xi = z$, la forme différentielle $\mathfrak{B}_D f$ est bien définie sur D .

- Si f est une forme différentielle bornée sur ∂D, on pose pour $z \in D$:

$$(\mathfrak{B}_{\partial D} f)(z) = \int\limits_{\xi \in \partial D} f(\xi) \wedge B(z, \xi) \qquad \textbf{(2.6)}$$

  La forme différentielle $\mathfrak{B}_{\partial D} f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans D.

Le noyau de Bochner-Martinelli-Koppelman permet de reproduire les formes différentielles définies dans un domaine borné de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux ; de manière precise (Cf [8]).

2.3.6 Formule de Bochner-Martinelli-Koppelman

Nous allons prouver maintenant une formule de représentation intégrale, la formule de Bochner-Martinelli-Koppelman.

Théorème 2.9 *Soient D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et f une $(p,q) - forme$ différentielle continue sur $\overline{D}$ telle que $\overline{\partial} f$ soit aussi continue sur $\overline{D}$ $(0 \leq p \leq n$ et $0 \leq q \leq n)$ alors :*

$$\int\limits_{\xi \in \partial D} f(\xi) \wedge B_q^p(z, \xi) - \int\limits_{\xi \in D} \overline{\partial}_\xi f(\xi) \wedge B_q^p(z, \xi) + \overline{\partial}_z \int\limits_{\xi \in D} f(\xi) \wedge B_{q-1}^p(z, \xi) = (-1)^{p+q} f(z) \text{ sur } D.$$

où $\overline{\partial}_z$ est défini au sens des courants.

Preuve.

Soit φ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ de bidegré $(n-p, n-q)$ à support compact dans D , on a au sens des courants

$$\left\langle \overline{\partial} T, \varphi \right\rangle = (-1)^{p+q} \left\langle T, \overline{\partial} \varphi \right\rangle$$

où T est un courant de bidegré $(p, q-1)$; le théorème est équivalant alors à

$$(-1)^{p+q} \int\limits_D \mathfrak{B}_D f \wedge \overline{\partial}\varphi = (-1)^{p+q} \int\limits_D f \wedge \varphi - \int\limits_D \mathfrak{B}_{\partial D} f \wedge \varphi + \int\limits_D \mathfrak{B}_D \overline{\partial} f \wedge \varphi \qquad \mathbf{(2.7)}$$

Pour que **2.5** ait un sens, il faut que le bidegré de φ soit $(n-p, n-q)$, du fait que $\mathfrak{B}_{\partial D} f$ et $\mathfrak{B}_D \overline{\partial} f$ sont de bidegrés (p, q) et $(p, q-1)$ respectivement.

La formule **2.7** devient

$$\int\limits_{(z,\xi)\in D\times\partial D} f(\xi) \wedge B_q^p(z,\xi) \wedge \varphi(z) - \int\limits_{(z,\xi)\in D\times D} \overline{\partial}_\xi f(\xi) \wedge B_q^p(z,\xi) \wedge \varphi(z)$$
$$+ (-1)^{p+q} \int\limits_{(z,\xi)\in D\times D} f(\xi) \wedge B_{q-1}^p(z,\xi) \wedge \overline{\partial}\varphi(z) = (-1)^{p+q} \int\limits_{z\in D} f(z) \wedge \varphi(z)$$

De plus, par des considérations de bidegrés, on peut remplacer les composantes B_q^p de B par B, $\overline{\partial} f$ par $\mathrm{d}\, f$ et $\overline{\partial}\varphi$ par $\mathrm{d}\,\varphi$. Il faut donc prouver

$$\int\limits_{(z,\xi)\in D\times\partial D} f(\xi) \wedge B(z,\xi) \wedge \varphi(z) - \int\limits_{(z,\xi)\in D\times D} \mathrm{d}\, f(\xi) \wedge B(z,\xi) \wedge \varphi(z)$$
$$+ (-1)^{p+q} \int\limits_{(z,\xi)\in D\times D} f(\xi) \wedge B(z,\xi) \wedge \mathrm{d}\,\varphi(z) = (-1)^{p+q} \int\limits_{z\in D} f(z) \wedge \varphi(z)$$

On considère l'ouvert Δ_ε de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ défini par

$$\Delta_\varepsilon = D \times D \setminus \{(z,\xi) \in D \times D : |z-\xi| \leq \varepsilon\}$$

Son bord $\partial\Delta_\varepsilon$ est la réunion de

$$F_{1,\varepsilon} = \partial\,(D \times D) \setminus \{(z,\xi) \in D \times D : |z-\xi| \leq \varepsilon\}$$

et de

$$F_{2,\varepsilon} = \left\{(z,\xi) \in \overline{D} \times \overline{D} : |z-\xi| = \varepsilon\right\}$$

Comme φ est à support compact dans D, la forme différentielle $f(\xi) \wedge B(z,\xi) \wedge \varphi(z)$ est nulle sur $\partial D \times D$.

Par ailleurs si $\xi \in \partial D$ et $z \in \mathit{supp}\ \ \varphi$ on a

$$|\xi - z| \geq d\,(\mathit{supp}\varphi, \mathbb{C}^n \setminus D)$$

et par conséquent si $\varepsilon < d\,(supp\varphi, \mathbb{C}^n \setminus D)$, l'ensemble $supp \quad \varphi \times \partial D$ est inclus dans $F_{1,\varepsilon}$. On obtient donc

$$\int_{(z,\xi)\in D\times\partial D} f(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z) = \int_{(z,\xi)\in F_{1,\varepsilon}} f(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z)$$

De plus si $z \in supp\varphi$ et $|\xi - z| = \varepsilon$ alors ξ appartient à $\{\zeta \in \mathbb{C}^n : d(\zeta, supp\varphi) \leq \varepsilon\}$ qui est un compact de D si $\varepsilon < d(supp\varphi, \mathbb{C}^n \setminus D)$ donc pour ε assez petit si $z \in supp\varphi$ et $(z,\xi) \in F_{2,\varepsilon}$, alors (z,ξ) varie dans un compact de $D \times D$ et donc

$$\int_{|z-\xi|=\varepsilon} f(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z) = \int_{(z,\xi)\in F_{2,\varepsilon}} f(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z)$$

Finalement pour $\varepsilon < d(supp\varphi, \mathbb{C}^n \setminus D)$, on obtient

$$\int_{(z,\xi)\in D\times\partial D} f(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z) - \int_{|z-\xi|=\varepsilon} f(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z) = \int_{(z,\xi)\in\partial\Delta_\varepsilon} f(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z)$$

La formule de Stokes donne alors

$$\begin{aligned}
&\int_{(z,\xi)\in D\times\partial D} f(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z) - \int_{|z-\xi|=\varepsilon} f(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z)\\
&= \int_{(z,\xi)\in\Delta\varepsilon} d_{z,\xi}\left(f(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z)\right)\\
&= \int_{(z,\xi)\in\Delta\varepsilon} df(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z) + (-1)^{p+q-1}\int_{(z,\xi)\in\Delta\varepsilon} f(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge d\varphi(z)
\end{aligned}$$

car $dB = 0$ sur Δ_ε

On a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(z,\xi)\in\Delta\varepsilon} df(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z) = \int_{(\xi,z)\in D\times D} df(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z) \qquad \mathbf{(2.8)}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(z,\xi)\in\Delta\varepsilon} f(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge d\varphi(z) = \int_{(\xi,z)\in D\times D} df(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge d\varphi(z) \qquad \mathbf{(2.9)}$$

D'après le lemme 2.8 on a

$$lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|z-\xi|=\varepsilon} f(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z) = (-1)^{p+q}\int_{z\in D} f(z)\wedge\varphi(z). \qquad \mathbf{(2.10)}$$

la formule de *Martinelli-Bochner-Koppelman* se déduit de **2.8**, **2.9** et **2.10**. ■

Remarque : La formule de Bochner-Martinelli-Koppelman est une généralisation de la formule de Bochner-Martinelli pour les formes différentielles.

Pour $n \geq 2$, le noyau de $Bochner - Martinelli$ ne dépend pas holomorphiquement en z, l'objet de ce paragraphe est de prouver des nouvelles formules intégrales ($Leray, Cauchy - Fantappié$) que nous déduisons également de la formule de Stokes, les noyaux que nous construisons prendront en compte dans un certain sens la géométrie du bord du domaine.

2.4 Formule de Leray

2.4.1 Section de Leray

Définition 2.4 *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$. Une application*

$$w(z,\xi) = (w_1(z,\xi), \cdots, w_n(z,\xi))$$

de classe $\mathcal{C}^1$, pour $z \in D$ et ξ dans un voisinage $U_{\partial D}$ de ∂D à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ est une section de Leray pour D si :

$$\langle w(z,\xi), \xi - z \rangle \neq 0 \text{ pour tout } (z,\xi) \in D \times \partial D$$

Exemple 2.10 *L'application $w(z,\xi) = \overline{\xi} - \overline{z}$ est une section de Leray pour tout domaine borné D de $\mathbb{C}^n$. En effet*

$$\langle w(z,\xi), \xi - z \rangle = \left\langle \overline{\xi} - \overline{z}, \xi - z \right\rangle = |\xi - z|^2 \neq 0 \text{ si } z \neq \xi$$

Pour D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on définit alors la forme différentielle suivante :

$$\omega'_{\xi,\lambda}(\eta^w(z,\xi,\lambda)) \wedge \omega(\xi) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \eta_j^w(z,\xi,\lambda) d_{\xi,\lambda}(\eta_1^w(z,\xi,\lambda)) \wedge ...$$
$$\wedge \widehat{d_{\xi,\lambda}}(\eta_j^w(z,\xi,\lambda)) \wedge \cdots \wedge d_{\xi,\lambda}(\eta_n^w(z,\xi,\lambda)) \wedge \omega(\xi)$$

qui est continue en ξ et pour tout $\lambda \in [0,1]$

$$\eta^w(z,\xi,\lambda) = (1-\lambda) \frac{w(z,\xi)}{\langle w(z,\xi), \xi - z \rangle} + \lambda \frac{\overline{\xi} - \overline{z}}{|\xi - z|^2}$$

2.4.2 L'opérateur $\mathbb{L}^w_{\partial D}$ pour une fonction et $\mathbb{R}^w_{\partial D}$ pour $(0,1)$ – forme

– Si f est une fonction bornée sur ∂D, on définit l'opérateur $\mathbb{L}^w_{\partial D}$ par la relation

$$(\mathbb{L}^w_{\partial D} f)(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\xi \in \partial D} f(\xi) \frac{\omega'_\xi(w(z,\xi)) \wedge \omega(\xi)}{\langle w(z,\xi), \xi - z\rangle^n}, \qquad z \in D$$

– Si f $(0,1) - forme$ est bornée sur ∂D, on définit l'opérateur $\mathbb{R}^w_{\partial D}$ par :

$$(\mathbb{R}^w_{\partial D} f)(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{(\xi,\lambda) \in \partial D \times [0,1]} f(\xi) \wedge \omega'_{\xi,\lambda}(\eta^w(z,\xi,\lambda)) \wedge \omega(\xi), \qquad z \in D$$

2.4.3 La formule de Leray [8]

C'est une généralisation de la formule de *Bochner-Martinelli*, en remplaçant la section $\overline{\xi} - \overline{z}$ par la section $w(z,\xi)$

Théorème 2.11 *Soient D un domaine borné dans $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et $w(z,\xi)$ une section de* ***Leray*** *sur D ; alors pour toute fonction f continue sur $\overline{D}$ telle que $\overline{\partial} f$ soit aussi continue sur $\overline{D}$ on a*

$$f = \mathbb{L}^w_{\partial D} f - \mathbb{R}^w_{\partial D} \overline{\partial} f - \mathbb{B}_D \overline{\partial} f \ , \qquad z \in D$$

Preuve. D'après la formule de **Bochner-Martinelli**

$$f = \mathbb{B}_{\partial D} f - \mathbb{B}_D \overline{\partial} f$$

le problème devient

$$\mathbb{R}^w_{\partial D} \overline{\partial} f = \mathbb{L}^w_{\partial D} f - \mathbb{B}_{\partial D} f \qquad \text{sur } D$$

En effet, pour $z \in D$ (fixé), $\xi \in U_{\partial D}$ et $\lambda \in [0,1]$

$$\langle \eta^w(z,\xi,\lambda), \xi - z\rangle = 1$$

et la proposition 2.2 donne

$$d_{\xi,\lambda} \left[\omega'_{\xi,\lambda}(\eta^w(z,\xi,\lambda)) \wedge \omega(\xi)\right] = 0$$

Pour $z \in D$ (fixé), on va appliquer la formule de Stokes sur l'ouvert $\partial D \times [0,1]$ à la forme différentielle $f(\xi)(\omega'_{\xi,\lambda}(\eta^w(z,\xi,\lambda)) \wedge \omega(\xi)$

$$\int_{\partial(\partial D \times [0,1])} f(\xi)(\omega'_{\xi,\lambda}(\eta^w(z,\xi,\lambda)) \wedge \omega(\xi) = \int_{\partial D \times [0,1]} d_{\xi,\lambda} \left[f(\xi)(\omega'_{\xi,\lambda}(\eta^w(z,\xi,\lambda)) \wedge \omega(\xi)\right]$$

tel que

$$d_{\xi,\lambda}\left[f(\xi)(\omega'_{\xi,\lambda}(\eta^w(z,\xi,\lambda))\wedge\omega(\xi))\right] = d_{\xi,\lambda}f(\xi)\wedge\left[(\omega'_{\xi,\lambda}(\eta^w(z,\xi,\lambda)))\wedge\omega(\xi)\right]$$
$$+ f(\xi)d_{\xi,\lambda}\left[\omega'_{\xi,\lambda}(\eta^w(z,\xi,\lambda)\wedge\omega(\xi)\right]$$

or que

$$d_{\xi,\lambda}\left[\omega'_{\xi,\lambda}(\eta^w(z,\xi,\lambda))\wedge\omega(\xi)\right] = 0$$

et comme $\omega(\xi)$ contient les facteurs $d\xi_1\wedge ...\wedge d\xi_n$ on a

$$\partial_\xi f(\xi)\wedge\omega(\xi) = 0$$

donc

$$d_{\xi,\lambda}\left[f(\xi)(\omega'_{\xi,\lambda}(\eta^w(z,\xi,\lambda))\wedge\omega(\xi)\right] = \overline{\partial}_\xi f(\xi)\wedge\omega'_{\xi,\lambda}(\eta^w(z,\xi,\lambda))\wedge\omega(\xi)$$

et l'intégrale devient

$$\int_{\partial D\times\{0\}\cup\partial D\times\{1\}} f(\xi)(\omega'_{\xi,\lambda}(\eta^w(z,\xi,\lambda))\wedge\omega(\xi) = \int_{\partial D\times[0,1]}\overline{\partial}_\xi f(\xi)\wedge\omega'_{\xi,\lambda}(\eta^w(z,\xi,\lambda))\wedge\omega(\xi)$$

Maintenant la rotation donne

$$\int_{(\xi,\lambda)\in\partial D\times\{0\}} f(\xi)(\omega'_{\xi,\lambda}(\eta^w(z,\xi,\lambda))\wedge\omega(\xi) - \int_{(\xi,\lambda)\in\partial D\times\{1\}} f(\xi)(\omega'_{\xi,\lambda}(\eta^w(z,\xi,\lambda))\wedge\omega(\xi) \qquad (1)$$
$$= \int_{\partial D\times[0,1]}\overline{\partial}_\xi f(\xi)\wedge\omega'_{\xi,\lambda}(\eta^w(z,\xi,\lambda))\wedge\omega(\xi)$$

pour $\lambda = 0$, et d'après la proposition 2.4

$$\omega'_{\xi,\lambda}(\eta^w(z,\xi,\lambda))\wedge\omega(\xi) = \frac{\omega'_\xi(w(z,\xi))\wedge\omega(\xi)}{\langle w(z,\xi),\xi-z\rangle^n}$$

et pour $\lambda = 1$

$$\omega'_{\xi,\lambda}(\eta^w(z,\xi,\lambda))\wedge\omega(\xi) = \frac{\omega'_\xi(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)}{|\xi-z|^{2n}}$$

donc (1) devient :

$$\int_{\xi\in\partial D} f(\xi)\frac{\omega'_\xi(w(z,\xi))\wedge\omega(\xi)}{\langle w(z,\xi),\xi-z\rangle^n} - \int_{\xi\in\partial D} f(\xi)\frac{\omega'_\xi(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)}{|\xi-z|^{2n}}$$
$$= \int_{(\xi,\lambda)\in\partial D\times[0,1]}\overline{\partial}_\xi f(\xi)\wedge\omega'_{\xi,\lambda}(\eta^w(z,\xi,\lambda))\wedge\omega(\xi)$$

or que

$$\int_{(\xi,\lambda)\in\partial D\times[0,1]} \overline{\partial}_\xi f(\xi)\wedge\omega'_{\xi,\lambda}(\eta^w(z,\xi,\lambda))\wedge\omega(\xi)=\mathbb{R}^w_{\partial D}\overline{\partial}f$$

et

$$\int_{\xi\in\partial D} f(\xi)\frac{\omega'_\xi(w(z,\xi))\wedge\omega(\xi)}{\langle w(z,\xi),\xi-z\rangle^n}=\mathbb{L}^w_{\partial D}f$$

$$\int_{\xi\in\partial D} f(\xi)\frac{\omega'_\xi(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)}{|\xi-z|^{2n}}=\mathbb{B}_{\partial D}f$$

d'ou le théorème. ■

Corollaire 2.1 *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathcal{C}^1$, et $w(z,\xi)$ une section de Leray pour D. Alors pour toute fonction f continue sur $\overline{D}$ et holomorphe dans D*

$$f=\mathbb{L}^w_{\partial D}f \quad \textit{sur } D$$

Remarque 3 *Si $w(z,\xi)=\overline{\xi}-\overline{z}$ alors*

$$\mathbb{L}^w_{\partial D}=\mathbb{B}_{\partial D} \quad \textit{et} \qquad \mathbb{R}^w_{\partial D}=0$$

et la formule devient, la formule de Bochner-Martinelli.

2.5 Formule de Cauchy-Fantappié

Dans toute la suite : D désignera un domaine borné à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de $\mathbb{C}^n$, et $w(z,\xi)$ une section de *Leray* pour D. On pose pour $\lambda\in[0,1]$

$$\begin{aligned}\overline{\omega}'_{z,\xi,\lambda}\left(\eta^w\left(z,\xi,\lambda\right)\right)=\sum_{j=1}^n\left(-1\right)^{j-1}\eta^w_j\left(z,\xi,\lambda\right)\left(\overline{\partial}_{z,\xi}+d_\lambda\right)\eta^w_1\left(z,\xi,\lambda\right)\wedge\\ \cdots\wedge\widehat{\left(\overline{\partial}_{z,\xi}+d_\lambda\right)\eta^w_j}\left(z,\xi,\lambda\right)\wedge\cdots\wedge\left(\overline{\partial}_{z,\xi}+d_\lambda\right)\eta^w_n\left(z,\xi,\lambda\right)\end{aligned}$$

pour $z\in D$ et

$$K^{\eta^w}\left(z,\xi,\lambda\right)=\frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\overline{\omega}'_{z,\xi,\lambda}\left(\eta^w\left(z,\xi,\lambda\right)\right)\wedge\omega(\xi-z)$$

pour $z\in D,\xi\in U_{\partial D}$ satisfaisant $\langle w(z,\xi),\xi-z\rangle\neq 0$. On note également

$$\begin{aligned}\overline{\omega}'_{z,\xi}\left(w\left(z,\xi\right)\right)=\sum_{j=1}^n\left(-1\right)^{j-1}w_j\left(z,\xi\right)\overline{\partial}_{z,\xi}w_1(z,\xi)\wedge\\ \cdots\wedge\widehat{\overline{\partial}_{z,\xi}w_j(z,\xi)}\wedge\cdots\wedge\overline{\partial}_{z,\xi}w_n(z,\xi)\end{aligned}$$

$$K^w(z,\xi) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \frac{\overline{\omega}'_{z,\xi}\left(w\left(z,\xi\right)\right) \wedge \omega(z,\xi)}{\langle w(z,\xi), \xi - z\rangle^n} \qquad \textit{pour } z \in D \textit{ et } \xi \in U_{\partial D}$$

tels que $\langle w(z,\xi), \xi - z\rangle \neq 0$.

Remarquons que $K^{\overline{\xi}-\overline{z}}$ est le noyau de $Bochner-Martinelli$ B défini au paragraphe précédent.

Le noyau $K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda)$ est une forme différentielle continue de degré $2n-1$ sur $\{(z,\xi,\lambda) \in D \times U_{\partial D} \times [0,1] : \langle w(z,\xi), \xi - z\rangle \neq 0\}$. Le noyau $K^w(z,\xi)$ est une forme différentielle continue de bidegré $(n, n-1)$ sur l'ensemble $\{(z,\xi) \in D \times U_{\partial D} : \langle w(z,\xi), \xi - z\rangle \neq 0\}$.

Lemme 2.12

i) On a, au sens des distributions

$$(\overline{\partial}_{z,\xi} + d_\lambda) K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda) = 0$$

si $z \in D$ et $\xi \in U_{\partial D}$ et $\lambda \in [0,1]$

ii) $K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda)\,|_{\lambda=0} = K^w(z,\xi)$ *et* $K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda)\,|_{\lambda=1} = B(z,\xi)$

Preuve. Puisque la fonction $\xi - z$ est holomorphe en (z,ξ) et indépendante de λ

$$(\overline{\partial}_{z,\xi} + d_\lambda)\omega(\xi - z) = 0$$

et par conséquent

$$(\overline{\partial}_{z,\xi} + d_\lambda) K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda) = \frac{n!}{(2\pi i)^n} (\overline{\partial}_{z,\xi} + d_\lambda) \bigwedge_{1 \le k \le n} (\overline{\partial}_{z,\xi} + d_\lambda)\eta_k^w(z,\xi,\lambda) \wedge \omega\left(\xi - z\right)$$

mais sur $D \times \partial D \times [0,1]$ on a $\langle \eta^w(z,\xi,\lambda), \xi - z\rangle = 1$, ce qui implique

$$\sum_{j=1}^{n} (\xi_j - z_j)\,(\overline{\partial}_{z,\xi} + d_\lambda)\eta_k^w(z,\xi,\lambda) = 0$$

On en déduit que pour tout $z \in D, \xi \in U_{\partial D}$ et $\lambda \in [0,1]$

$$\bigwedge_{1 \le k \le n} (\overline{\partial}_{z,\xi} + d_\lambda)\eta_k^w(z,\xi,\lambda) = 0$$

ce qui prouve que $(\overline{\partial}_{z,\xi} + d_\lambda) K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda) = 0$

L'assertion $ii.$ se déduit des définitions des formes différentielles K^{η^w}, K^w et du résultat

$$\mu(u,v) = \omega'\left(\frac{u}{\langle u, v\rangle^n}\right) \wedge \omega(v)$$

■

2.5.1 Les opérateurs $\mathfrak{L}^w_{\partial D}$ et $\mathfrak{R}^w_D$ pour des formes de degré arbitraire

◦ Si f est une forme différentielle bornée sur ∂D, on définit l'opérateur $\mathfrak{L}^w_{\partial D}f$ par :

$$(\mathfrak{L}^w_{\partial D}f)(z) = \int\limits_{\xi\in\partial D} f(\xi)\wedge K^w(z,\xi) \qquad z\in D \tag{2.11}$$

◦ Si f est une forme différentielle bornée sur ∂D, on définit l'opérateur $\mathfrak{R}^w_{\partial D}f$ par :

$$(\mathfrak{R}^w_{\partial D}f)(z) = \int\limits_{(\xi,\lambda)\in\partial D\times[0,1]} f(\xi)\wedge K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda) \qquad z\in D \tag{2.12}$$

On obtient alors (CF.[8]) le résultat cité dans la formule suivante :

2.5.2 Formule de Cauchy-Fantappié

Théorème 2.13 *(Formule de Cauchy-Fantappié) Soient D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathcal{C}^1$ et $w(z,\xi)$ une* section *de Leray pour D. On suppose que w est de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à z et que les dérivées partielles de w d'ordre inférieur ou égal à 2 par rapport à z sont continues sur $D\times U_{\partial D}$.*
Alors : si f est une $(p,q)-forme$ différentielle $(p=0,\cdots,n, q=0,\cdots,n)$ continue sur $\overline{D}$ telle que $\overline{\partial}f$ soit aussi continue sur $\overline{D}$, on a :

$$(-1)^{p+q}f = \mathfrak{L}^w_{\partial D}f - (\mathfrak{R}^w_{\partial D}+\mathfrak{B}_D)\overline{\partial}f + \overline{\partial}(\mathfrak{R}^w_{\partial D}+\mathfrak{B}_D)f \qquad \textit{dans } D \tag{2.13}$$

Preuve. Grâce à la formule de *Koppelman*, pour obtenir la formule **2.13**, il suffit de prouver que pour toute forme φ de bidegré $(n-p,n-q)$ à support compact dans D

$$\begin{aligned}(-1)^{p+q}\int_{(z,\xi,\lambda)\in D\times\partial D\times[0,1]} & f(\xi)\wedge K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda)\wedge\overline{\partial}\varphi(z) = \\ & \int_{(z,\xi)\in D\times\partial D} f(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z) - \int_{(z,\xi)\in D\times\partial D} f(\xi)\wedge K^w(z,\xi)\wedge\varphi(z) \\ & + \int_{(z,\xi,\lambda)\in D\times\partial D\times[0,1]} \overline{\partial}f(\xi)\wedge K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda)\wedge\varphi(z)\end{aligned}$$

Appliquons la formule de Stokes sur $D\times\partial D\times[0,1]$ à la forme différentielle

$$f(\xi)\wedge K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda)\wedge\varphi(z)$$

$$\begin{aligned}\int_{(z,\xi,\lambda)\in D\times\partial D\times[0,1]} & (d_z+d_\xi+d_\lambda)\big(f(\xi)\wedge K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda)\wedge\varphi(z)\big) = \\ & \int_{(z,\xi,\lambda)\in\partial(D\times\partial D\times[0,1])} f(\xi)\wedge K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda)\wedge\varphi(z)\end{aligned}$$

Comme φ est à support compact dans D et $\partial\left(D\times\partial D\times[0,1]\right)=\partial D\times\partial D\times[0,1]+D\times(\partial D\times\{0\}-\partial D\times\{1\})$, on déduit du *Lemme* 2.12, *ii* que

$$\int_{(z,\xi,\lambda)\in\partial(D\times\partial D\times[0,1])} f(\xi)\wedge K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda)\wedge\varphi(z)=$$
$$\int_{(z,\xi)\in D\times\partial D} f(\xi)\wedge K^{w}(z,\xi)\wedge\varphi(z)-\int_{(z,\xi)\in D\times\partial D} f(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z)$$

Pour des raisons de bidegré

$$\begin{aligned}(d_z+d_\xi+d_\lambda)\left(f(\xi)\wedge K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda)\wedge\varphi(z)\right) &= \left(\overline{\partial}_{z,\xi}+d_\lambda\right)\left(f(\xi)\wedge K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda)\wedge\varphi(z)\right)\\ &= \overline{\partial}f(\xi)\wedge K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda)\wedge\varphi(z)\\ &\quad+(-1)^{p+q}f(\xi)\wedge\left(\overline{\partial}_{z,\xi}+d_\lambda\right)K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda)\wedge\varphi(z)\\ &\quad+(-1)^{p+q+1}f(\xi)\wedge K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda)\wedge\overline{\partial}\varphi(z)\end{aligned}$$

or d'après le *Lemme* 2.12,*i*

$$(\overline{\partial}_{z,\xi}+d_\lambda)K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda)=0$$

et donc

$$\int_{(z,\xi,\lambda)\in D\times\partial D\times[0,1]}(d_z+d_\xi+d_\lambda)\left(f(\xi)\wedge K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda)\wedge\varphi(z)\right)=$$
$$\int_{(z,\xi,\lambda)\in D\times\partial D\times[0,1]}\overline{\partial}f(\xi)\wedge K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda)\wedge\varphi(z)$$
$$+(-1)^{p+q+1}\int_{(z,\xi,\lambda)\in D\times\partial D\times[0,1]} f(\xi)\wedge K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda)\wedge\overline{\partial}\varphi(z)$$

d'où la formule **2.13** ■

2.6 Construction du noyau de Henkin-Ramirez $H(z,\xi)$

Cette partie consiste à déterminer le noyau de $Henkin - Ramirez$ dans un domaine $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ strictement pseudo-convexe qui va nous permettre d'utiliser la formule de représentation intégrale de $Cauchy - Fantappié$. Nous avons besoin auparavant des notations suivantes :

2.6.1 Notations

Soit D un domaine de $\mathbb{C}^n$. On note par $\mathcal{C}^\infty(D)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs complexes dans D, et $Z^\infty_{(0,1)}$l'ensemble des $(0,1)-$formes de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans D telles que $\overline{\partial} f = 0$. Les résultats qui suivent et dont les démonstrations se trouvent dans [8] , sont utiles pour la suite :

Lemme 2.14 *Soient $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine strictement pseudo-convexe, et $U_{\overline{D}}$ un voisinage de $\overline{D}$; alors il existe un opérateur linéaire $T : Z^\infty_{(0,1)}(U_{\overline{D}}\ ) \to \mathcal{C}^\infty(D)$ tel que :*

$$\overline{\partial} Tf = f \qquad \text{dans } D, \text{ pour tout } f \in Z^\infty_{(0,1)}(U_{\overline{D}})$$

Lemme 2.15 *Soient $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$, et ρ une fonction strictement plurisousharmonique de classe $\mathcal{C}^2$définie dans un voisinage de $\overline{\Omega}$. On pose*

$$\beta = \frac{1}{3} \min_{\xi\in\overline{\Omega}, \xi\in\mathbb{C}^n, |\xi|=1} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho(\xi)}{\partial\xi_j\partial\bar{\xi}_k}\xi_j\overline{\xi_k}.$$

et on considère les fonctions $a_{jk} \in \mathcal{C}^1(U_{\overline{\Omega}})$ définies par [8] vérifient :

$$\max_{\xi\in\overline{\Omega}} \left| a_{jk}(\xi) - \frac{\partial^2\rho(\xi)}{\partial\xi_j\partial\xi_k} \right| < \frac{\beta}{n^2} \qquad j,k = 1,...,n$$

Soit aussi $\varepsilon > 0$ assez petit de telle sorte que :

$$\max_{\xi,z\in\overline{\Omega}, |\xi-z|\leq\varepsilon} \left| \frac{\partial^2\rho(\xi)}{\partial x_j\partial x_k} - \frac{\partial^2\rho(z)}{\partial x_j\partial x_k} \right| < \frac{\beta}{2n^2} \quad \text{pour } j,k = 1,...,2n$$

où $x_j = x_j(\xi)$ sont les coordonnées réelles de $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ avec $\xi_j = x_j(\xi) + ix_{j+n}(\xi)$. Pour $\xi, z \in \overline{\Omega}$ on définit le polynôme $G(z,\xi)$ par :

$$G(z,\xi) = -\left[2\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\rho(\xi)}{\partial\xi_j}(z_j - \xi_j) + \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\xi)(z_j-\xi_j)(z_k-\xi_k) \right]$$

Alors pour tout $\xi, z \in \overline{\Omega}$ vérifiant $|\ \xi - z\ | \leq \varepsilon$, on a (CF.[8]) :

$$\operatorname{Re} G(z,\xi) \geq \rho(\xi) - \rho(z) + \beta\,|\xi - z|^2$$

On peut maintenant énoncer le résultat important suivant :

Théorème 2.16 *Soient $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine strictement pseudo-convexe, et Θ un voisinage de ∂D. Soit ρ une fonction plurisousharmonique de classe $\mathcal{C}^2$ définie dans un voisinage de $\overline{\Theta}$ telle que*

$$D \cap \Theta = \{z \in \Theta : \rho(z) < 0\}$$

Soient ε, β et $G(z, \xi)$ tels que définis dans le lemme 2.15, où ε est choisit assez petit pour que

$$\{z \in \mathbb{C}^n, |\xi - z| \leq 2\varepsilon\} \subseteq \Theta, \text{ pour chaque } \xi \in \partial D$$

Alors il existe une fonction $H(z, \xi)$ de classe $\mathcal{C}^1$définie pour tout ξ dans un voisinage $U_{\partial D} \subset \Theta$ de ∂D et $z \in U_{\overline{D}} = D \cup U_{\partial D}$ telle que :

(i) $H(z, \xi)$ est holomorphe en $z \in U_{\overline{D}}$.

(ii) $H(z, \xi) \neq 0 \; \forall \; z \in U_{\overline{D}}$ et $\xi \in U_{\partial D}$ avec $|\xi - z| \geq \varepsilon$.

(iii) Il existe une fonction $M(z, \xi) \neq 0$ de classe $\mathcal{C}^1$ définie pour tous les points $z \in U_{\overline{D}}, \xi \in U_{\partial D}$ avec $|\xi - z| \leq \varepsilon$, et telle que

$$H(z, \xi) = G(z, \xi) M(z, \xi) \text{ pour } z \in U_{\overline{D}}, \xi \in U_{\partial D} \text{ avec } |\xi - z| \leq \varepsilon$$

2.6.2 La solution de $\langle w(z, \xi), \xi - z\rangle = H(z, \xi)$

La fonction H étant déterminée dans le théorème 2.16, on va déterminer une section de Leray $w(z, \xi)$ pour D vérifiant

$$\langle w(z, \xi), \xi - z\rangle = H(z, \xi);$$

Les résultats intermédiaires suivants établis par Henkin dans [8] sont utiles pour la suite :

Lemme 2.17 *Soient $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine strictement pseudo-convexe, $M_1 = \{z \in \mathbb{C}^n, z = 0\}$, et $U_{\overline{D}}$ un voisinage de $\overline{D}$. Alors pour toute fonction holomorphe f dans $M_1 \cap U_{\overline{D}}$, il existe une fonction holomorphe $\widetilde{f}$ dans D telle que*

$$\widetilde{f} = f \quad \text{dans } M_1 \cap D$$

Lemme 2.18 *Soient $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine strictement pseudo-convexe, $M_k = \{z \in \mathbb{C}^n, z_1 = ... = z_k = 0\}$ $1 \leq k \leq n$, et $U_{\overline{D}}$ un voisinage de $\overline{D}$. Alors, pour toute* *fonction holomorphe f dans $U_{\overline{D}}$ avec $f = 0$ dans $M_k \cap U_{\overline{D}}$, il existe des fonctions holomorphes $f_1, ..., f_k$ dans D telles que*

$$f(z) = \sum_{j=1}^{k} z_j f_j(z) \text{ pour tout } z \in D.$$

Si $U \subset \mathbb{C}^n$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, on notera par $\mathrm{Hol}(U)$ l'espace des fonctions holomorphes dans U, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de U, et par $\mathrm{Hol}_Y(U)$ le sous-espace des fonctions $f \in \mathrm{Hol}(U)$ telles que $f = 0$ dans $Y \cap U$ où $Y \subseteq \mathbb{C}^n$.
On note également $\mathrm{Hol}^k(U) = \mathrm{Hol}(U) \oplus ... \oplus \mathrm{Hol}(U)$ (k fois).

Lemme 2.19 *Avec les même hypothèse du lemme 2.18, il existe un opérateur linéaire continu $T_j : \mathrm{Hol}_{M_k}(U_{\overline{D}}) \mapsto \mathrm{Hol}(D)$ tel que pour tout $f \in \mathrm{Hol}_{M_k}(U_{\overline{D}})$*

$$f(z) = \sum_{j=1}^{k} z_j (T_j f)(z) \text{ pour tout } z \in D$$

Théorème 2.20 *(lemme de Oka-Hefer) Soit $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ un dommaine strictement pseudo-convexe, et soit $U_{\overline{D}}$ un voisinage de $\overline{D}$. Alors il existe une application linéaire continue $T_j : \mathrm{Hol}(U_{\overline{D}}) \mapsto \mathrm{Hol}(D \times D)$ telle que pour tout $f \in \mathrm{Hol}(U_{\overline{D}})$*

$$f(\xi) - f(z) = \sum_{j=1}^{n} (\xi_j - z_j)(T_j f)(z, \xi) \text{ pour tout } z, \xi \in D$$

On peut alors énoncer le résultat essentiel de cette partie :

Théorème 2.21 *Soit $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine strictement pseudo-convexe, et soient $U_{\partial D}, U_{\overline{D}}, H(z, \xi)$ tels que définis dans le théorème 2.16. On suppose que $V_{\partial D}$ est un voisinage de ∂D tel que : $V_{\partial D} \subset\subset U_{\partial D}$ et $V_{\overline{D}} = V_{\partial D} \cup D$ est strictement pseudo-convexe. Alors il existe une application linéaire continue $T_j : \mathrm{Hol}(U_{\overline{D}}) \mapsto \mathrm{Hol}(V_{\overline{D}} \times V_{\overline{D}})$ telle que l'application $w = (w_1, ..., w_n)$ définie par :*

$$w_j(z, \xi) = T_j(H(., \xi))(z, \xi), \qquad \xi \in V_{\partial D}, z \in V_{\overline{D}}$$

possède les propriétés suivantes :

(i) $\langle w(z, \xi), \xi - z \rangle = H(z, \xi)$ *pour tout* $\xi \in V_{\partial D}$, *et* $z \in V_{\overline{D}}$,

(ii) $w(z, \xi)$ *est holomorphe en* $z \in V_{\overline{D}}$,

(iii) $w(z, \xi)$ *est une application de Leray pour* D.

La construction explicite de la fonction de Leray pour l'ouvert strictement pseudo-convexe D permet d'une part, de représenter les fonctions holomorphes dans D connaissant leurs valeurs au bord, et d'autre part de résoudre l'équation $\overline{\partial}u = f$ avec une estimation $L^{\infty}(D)$.
De manière précise :

Théorème 2.22 *Soit $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine strictement pseudo-convexe à bord de classe $\mathcal{C}^2$, si f est holomorphe dans D, alors :*

$$f(z) = \int_{\xi \in \partial D} H(z,\xi) f(\xi)$$

où $H(z,\xi) = \dfrac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \dfrac{\omega'(w(z,\xi)) \wedge \omega(\xi)}{< w(z,\xi), \xi - z >^n}$ et $w(z,\xi)$ la fonction de Leray pour D construite précédemment.

On peut énoncer aussi :

Théorème 2.23 *Soit $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine strictement pseudo-convexe à bord de classe $\mathcal{C}^2$, et soit $w(z,\xi)$ l'application de Leray pour D du théorème précédent. Alors il existe une constante $C > 0$ (finie) telle que :*

(i) pour tout forme différentielle continue $\overline{f}$ dans D

$$\|\mathbb{R}^{w}_{\partial D} f\|_{\frac{1}{2},D} \leq C\, \|f\|_{0,D}$$

(ii) pour tout f $(0,q)$-forme continue dans $\overline{D}$ et $\overline{\partial} f = 0$ dans D on a

$$u = (-1)^q (\mathbb{R}^{w}_{\partial D} f + \mathbb{B}_D f), \qquad q = 1,...,n$$

u est une solution de l'équation $\overline{\partial}u = f$ dans D telle que

$$\|u\|_{\frac{1}{2},D} \leq C\, \|f\|_{0,D} \quad \text{avec } u \in \mathcal{C}^{\alpha}_{(0,q-1)}(D)$$

De plus $u \in \mathcal{C}^{\alpha}_{(0,q-1)}(D)$ pour tout $0 < \alpha < 1$, et si $f \in \mathcal{C}^k$ dans D $(k \in \mathbb{N})$ alors $u \in \mathcal{C}^{k+\alpha}_{(0,q-1)}(D)$ pour tout $0 < \alpha < 1$.

Preuve. C'est une simple application de la formule (CF.[8]) ∎

Chapitre 3

Le Noyau de Szegö

3.1 Notations

On considère l'espace $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire hermitien

$$(z \mid t) = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{t_j}$$

et de la norme hermitienne

$$\|z\|^2 = \sum |z_j|^2 .$$

Sur $\mathbb{C}^n$, on considère la forme différentielle de type $(1,1)$

$$\gamma(z) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}\,\overline{z_j} \wedge \mathrm{d}\,z_j = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}\,x_j \wedge \mathrm{d}\,x_{j+n}.$$

L'espace $\mathbb{C}^n$ est orienté par la forme différentielle

$$\psi(z) = \gamma^n = \frac{n!}{\pi^n} \prod_{j=1}^{n} \mathrm{d}\,x_j \wedge \mathrm{d}\,x_{j+n}.$$

Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, à bord ∂D de classe $\mathcal{C}^1$. On oriente D par $\psi|_D$; le bord ∂D est alors muni de l'orientation compatible avec la formule de Stokes sur D.

On note $A(D)$ l'espace des fonctions continues dans $\overline{D}$ et holomorphes dans D. Soit $A(\partial D)$ l'espace des restrictions à ∂D des éléments de $A(D)$. L'application de restriction

$$A(D) \to A(\partial D)$$

$$f \mapsto f|_{\partial D}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Si $g \in A(\partial D)$, son extension holomorphe $\widetilde{g}$ à D est donnée par l'intégrale de Bochner-Martinelli

$$\widetilde{g}(z) = \int_{\xi \in \partial D} \Upsilon(z, \xi) g(\xi), \tag{3.1}$$

où $\Upsilon(z,\xi)$ est le noyau de Bochner-Martinelli

$$\Upsilon(z,\xi) = \frac{(n-1)!}{(2\,\mathrm{i}\,\pi)^n} \frac{\mathrm{d}\,\xi_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\,\xi_n \wedge \omega'_\xi\left(\overline{\xi} - \overline{z}\right)}{\|\xi - z\|^{2n}},$$

avec

$$\omega'_\xi(\overline{\xi} - \overline{z}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} (\overline{\xi}_j - \overline{z}_j)\, \mathrm{d}\,\overline{\xi}_1 \wedge .. \wedge \widehat{\mathrm{d}\,\overline{\xi}_j} \wedge .. \wedge \mathrm{d}\,\overline{\xi}_n$$

3.2 Espace $\mathcal{H}^2$ et noyau de Szegö

3.2.1 Espace $\mathcal{H}^2$

Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, à bord ∂D de classe $\mathcal{C}^1$. On note $\nu(\xi) = (\nu_1(\xi), \ldots, \nu_n(\xi))$ la normale extérieure unitaire à ∂D en $\xi \in \partial D$. Le bord ∂D est muni de la forme volume $\mathrm{d}\,\sigma$ (de degré $2n-1$) définie par

$$\mathrm{d}\,\sigma = \nu \rfloor \psi$$

(produit intérieur de la forme ψ et du champ ν).
On désigne par $L^2(\partial D, \mathrm{d}\,\sigma)$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur ∂D par rapport à $\mathrm{d}\,\sigma$ et par $\mathcal{H}^2(\partial D)$ l'adhérence de $A(\partial D)$ dans $L^2(\partial D, \mathrm{d}\,\sigma)$ (espace de Hilbert).
Soit $\mathrm{Hol}(D)$ l'espace des fonctions holomorphes sur D, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de D.

Proposition 3.1 *L'application $g \mapsto \widetilde{g}$ définie par (**3.1**) est une application* continue *de $A(\partial D)$, muni de la topologie induite par celle de l'espace de Hilbert $L^2(\partial D, \mathrm{d}\,\sigma)$, dans l'espace* $\mathrm{Hol}(D)$.

De la proposition 3.1, on déduit que l'application s'étend en une injection continue de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^2(\partial D)$ dans $\mathrm{Hol}(D)$. Soit p cette application et soit $\mathcal{H}^2(D)$ son image. On munit $\mathcal{H}^2(D)$ de la structure d'espace de Hilbert de $\mathcal{H}^2(\partial D)$ transportée par p. Pour $g \in \mathcal{H}^2(\partial D)$, la fonction $pg \in \mathcal{H}^2(D)$ est appelée *extension holomorphe de f à D.*

Proposition 3.2 *Pour tout $f \in \mathcal{H}^2(D)$, l'unique fonction $g \in \mathcal{H}^2(\partial D)$ telle que $pg = f$ est déterminée par*

$$g = \lim_{\varepsilon \to +0} f_\varepsilon, \tag{3.2}$$

où la limite est prise au sens de $L^2(\partial D)$ et f_ε est définie, pour ε suffisamment petit et positif, par

$$f_\varepsilon(\xi) = f(\xi - \varepsilon \nu(\xi)) \qquad (\xi \in \partial D).$$

L'existence d'une telle limite résulte des propriétés du noyau de Poisson.

La fonction $g \in \mathcal{H}^2(\partial D)$ définie par (**3.2**) est appelée *valeur au bord* (au sens L^2) de la fonction holomorphe $f \in \mathcal{H}^2(D)$; elle est notée $f|_{\partial D}$ ou même simplement f.
L'espace de Hilbert $\mathcal{H}^2(D)$ est un espace de Hilbert des fonctions holomorphes, car l'injectioin $\mathcal{H}^2(D) \hookrightarrow Hol(D)$ est continue ; son produit scalaire est défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_{\partial D} f\,|_{\partial D}\,(\xi)\,\overline{g\,|_{\partial D}\,(\xi)}d\sigma\,(\xi)$$

3.2.2 Noyau de Szegö

Soit $z \in D$; la fonction d'évaluation en z

$$\psi_z : \mathcal{H}^2(D) \to \mathbb{C}$$

définie par

$$\psi_z(f) = f(z) \qquad (f \in \mathcal{H}^2(D))$$

est une forme linéaire continue. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe $k_z \in \mathcal{H}^2(D)$ tel que pour tout $f \in \mathcal{H}^2(D)$

$$\psi_z(f) =< f, k_z >,$$

c'est-à-dire

$$f(z) = \int_{\partial D} \overline{k_z(\xi)} f(\xi)\,\mathrm{d}\,\sigma(\xi).$$

Définition 3.1 *Le* noyau de Szegö *est la fonction sur $D \times D$ définie par*

$$S(z, \xi) = \overline{k_z(\xi)}, \qquad (z \in D,\ \xi \in D).$$

Proposition 3.3 *Soit (φ_j) une base hilbertienne (système orthonormé complet) de l'espace $\mathcal{H}^2(D)$. Le noyau de Szegö de D est égal à*

$$S(z, \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(z)\overline{\varphi_j(\xi)}.$$

La série du second membre converge absolument et uniformément sur tout compact de $D \times D$. Pour $z \in D$ fixé, cette série converge dans $\mathcal{H}^2(D)$.

Corollaire 3.1 *Le noyau de Szegö vérifie*

$$S(z, \xi) = \overline{S(\xi, z)}.$$

La fonction $(z, \xi) \mapsto S(z, \overline{\xi})$ est holomorphe sur $D \times D$. Pour $\xi \in D$, la fonction $z \mapsto S(z, \xi)$ est holomorphe et appartient à $\mathcal{H}^2(D)$.

Proposition 3.4 *Soit* $P(z,\xi) = \dfrac{|S(z,\xi)|^2}{S(z,z)}$ $\quad (z \in D, \xi \in \partial D)$.
Pour tout $f \in \mathcal{H}^2(D)$, *on a*

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\xi) P(z,\xi)\, \mathrm{d}\,\sigma(\xi).$$

Preuve. Soit $z \in D$ fixé, et $f \in A(D)$ on pose :

$$U(\xi) = f(\xi)\frac{\overline{S(z,\xi)}}{S(z,z)}, \quad \xi \in \partial D$$

Alors U est un élément de $\mathcal{H}^2(\partial D)$; (car $\xi \in \partial D$). Pour $\xi = z$

$$\begin{aligned} U(z) &= f(z)\frac{\overline{S(z,z)}}{S(z,z)} \\ &= f(z)\frac{S(z,z)}{S(z,z)} \\ &= f(z). \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} f(z) &= U(z) \\ &= \int_{\partial D} P(z,\xi)U(\xi)d\sigma(\xi) \\ &= \int_{\partial D} S(z,\xi)f(\xi)\frac{\overline{S(z,\xi)}}{S(z,z)}d\sigma(\xi) \\ &= \int_{\partial D} f(\xi)\frac{|S(z,\xi)|^2}{S(z,z)}d\sigma(\xi) \\ &= \int_{\partial D} f(\xi)P(z,\xi)d\sigma(\xi) \end{aligned}$$

d'où la proposition. ■

3.3 Noyau de Szegö de la boule

Comme le noyau de Bergman ; le noyau de Szegö ne peut presque jamais être calculé explicitement. Nous pouvons cependant le calculer pour la boule unité ; pour cela on peut prendre les fonctions $\{z^\alpha\}$ comme une base orthogonale dans $\mathcal{H}^2(\partial D)$ (où α est un multi-indice). Posons

$$\gamma_\alpha = \int_{\partial B} |z^\alpha|^2\, \mathrm{d}\,\sigma(z).$$

On obtient la base orthonormale $\left\{ \dfrac{z^\alpha}{\|z^\alpha\|} \right\}$ où $\|z^\alpha\| = \sqrt{\gamma_\alpha}$, donc

$$S(z,\xi) = \sum_\alpha \frac{z^\alpha \overline{\xi}^\alpha}{\gamma_\alpha}.$$

Lemme 3.5

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi|x|^2} = 1.$$

Preuve.

D'après Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi|x|^2} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_1^2} dx_1 ... \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_N^2} dx_N$$

et

$$\begin{aligned}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\right]^2 &= \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi s^2} ds\right] . \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} dt\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi\left(s^2+t^2\right)} dt\end{aligned}$$

on pose

$$s = r\ \cos\theta, \qquad t = r\ \sin\theta$$

$$\theta \in [0, 2\pi]\,, \qquad r \in [0, \infty[$$

donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi\left(s^2+t^2\right)} dsdt &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r\ drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r\ dr\right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{-2\pi} e^{-\pi r^2}\right]_0^{\infty} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\theta = 1\end{aligned}$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$$

Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi|x|^2} = 1 \qquad \text{d'où le Lemme.}$$

■

Soit $\omega_{N-1} = \sigma(S^{N-1}) \equiv \sigma(\partial B_N), \qquad B_N = \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\right\}$

Lemme 3.6

$$\omega_{N-1} = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}$$

où Γ est la fonction d'Euler.

Preuve. D'après le Lemme 3.5

$$1=\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi|x|^2}=\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi|x_1|^2}dx_1...\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi|x_N|^2}dx_N$$

On pose ; $x_i=r\xi_i$; et sur la sphère $\sum_{i=1}^{N} \xi_i^2=1$

donc

$$\begin{aligned}1&=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi|r\xi_1|^2}d(r\xi_1)...\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi|r\xi_N|^2}d(r\xi_N)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi r^2\left[|\xi_1|^2+...+|\xi_N|^2\right]}r^{N-1}d\xi_1...d\xi_N\\&=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi r^2.1}r^{N-1}d\xi_1...d\xi_N\\&=\int_{0}^{+\infty} e^{-\pi r^2.1}r^{N-1}\,\mathrm{d}\,r\int_{S^{N-1}} d\xi_1...d\xi_N\end{aligned}$$

posons $\int_{S^{N-1}} d\xi_1...d\xi_N=\omega_{N-1}$;

donc

$$1=\omega_{N-1}\int_0^{\infty} e^{-\pi r^2}r^{N-1}dr$$

$$\frac{1}{\omega_{N-1}}=\int_0^{\infty} e^{-\pi r^2}r^{N-1}dr$$

posons $r^2=s$ alors : $ds=2rdr$.

$r^N=s^{\frac{N}{2}}$, $\frac{dr}{r}=\frac{ds}{2r^2}=\frac{ds}{2s}$

alors :

$$\frac{1}{\omega_{N-1}}=\int_0^{\infty} e^{-\pi s}s^{\frac{N}{2}}\frac{ds}{2s}$$

$S=\pi s \Rightarrow s=\frac{S}{\pi}$, et $ds=\frac{dS}{\pi}$

donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-S}\left(\frac{S}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}-1}\frac{dS}{\pi}&=\int_0^{\infty} e^{-S}S^{\frac{N}{2}}\frac{dS}{S}\quad \pi^{\frac{-N}{2}}\\&=\left(\int_0^{\infty} e^{-S}S^{\frac{N}{2}-1}dS\right)\times\pi^{\frac{-N}{2}}\\&=\Gamma(\frac{N}{2})\times\pi^{\frac{-N}{2}}\end{aligned}$$

donc

$$\omega_{N-1}=\frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}$$

■

Pour $B \subset \mathbb{C}^n$, soient

$$\eta(k) = \int_{\partial B} |z_1|^{2k}\, d\sigma(z); \qquad N(k) = \int_B |z_1|^{2k}\, dV(z), \quad k \in \mathbb{N}$$

où $d\sigma$ la mesure de Lebesgue, dV volume de la boule unité

Lemme 3.7

$$\eta(k) = \pi^n \frac{2(k!)}{(k+n-1)!}; \qquad N(k) = \pi^n \frac{k!}{(k+n)!}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\int_B |z_1|^{2k}\, dV(z) &= \left(\int_{\partial B} |z_1|^{2k}\, d\sigma(z)\right)\left(\int_0^1 r^{2k} r^{2n-1} dr\right)\\ &= \frac{1}{2(k+n)} \int_{\partial B} |z_1|^{2k}\, d\sigma(z)\end{aligned}$$

Or que $\eta(k) = 2(k+n)N(k)$

Soient $z = (z_1, z')$; $z' = (z_2, ..., z_n)$ alors :

$$N(k) = \int_{|z|<1} |z_1|^{2k}\, dV(z) = \int_{|z'|<1} \left[\int_{|z_1|<\sqrt{1-|z'|^2}} |z_1|^{2k}\, dV(z_1)\right] dV(z')$$

Dans la boule on a : $|z_1|^2 + |z'|^2 \leq 1 \Rightarrow |z_1| \leq \sqrt{1-|z'|^2}$. Donc

$$\begin{aligned}N(k) &= 2\pi \int_{|z'|<1} \left(\int_0^{\sqrt{1-|z'|^2}} r.r^{2k} dr\right) dV(z')\\ &= 2\pi \int_{|z'|<1} \left[\frac{r^{2k+1}}{2k+2}\right]_0^{\sqrt{1-|z'|^2}} dV(z')\\ &= 2\pi \int_{|z'|<1} \left[\frac{(1-|z'|^2)^{k+1}}{2(k+1)}\right] dV(z')\\ &= \frac{\pi}{(k+1)} \int_{|z'|<1} (1-|z'|^2)^{k+1} dV(z')\\ &= \frac{\pi}{k+1} \omega_{2n-3} \int_0^1 (1-r^2)^{k+1} r^{2n-3} dr\\ &= \frac{\pi}{k+1} \omega_{2n-3} \int_0^1 (1-r^2)^{k+1} (r^2)^{n-1} \frac{dr}{r}\\ &= \frac{\pi}{k+1} \omega_{2n-3} \int_0^1 (1-s)^{k+1} s^{n-1} \frac{ds}{2.s}, \qquad (s = r^2)\\ &= \frac{\pi}{2\,(k+1)} \omega_{2n-3} \;\; B(n-1, k+2)\end{aligned}$$

où B est la fonction Beta, définie par :

$$\begin{aligned}B(p,q) &= \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt\\ &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.\end{aligned}$$

Comme $\omega_{2n-3} = \dfrac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)}$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2(k+1)}\omega_{2n-3}\frac{\Gamma(n-1)\Gamma(k+2)}{\Gamma(n+k+1)} &= \frac{\pi}{2(k+1)}\frac{2\pi^{n-1}}{\Gamma(n-1)}\frac{\Gamma(n-1)\Gamma(k+2)}{\Gamma(k+n+1)} \\
&= \frac{\pi}{(k+1)}\pi^{n-1}\frac{\Gamma(k+2)}{\Gamma(k+n+1)}
\end{aligned}$$

or que

$$\frac{\Gamma(k+2)}{\Gamma(k+n+1)} = \frac{(k+1)!}{(k+n)!}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2(k+1)}\omega_{2n-3} &= \frac{\pi^n}{(k+1)}\frac{(k+1)!}{(k+n)!} \\
&= \frac{\pi^n}{(k+1)}\frac{(k+1)k!}{(k+n)!} \\
&= \frac{\pi^n k!}{(k+n)!}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
N(k) &= \frac{\pi}{2(k+1)}\omega_{2n-3} \\
&= \frac{\pi^n k!}{(k+n)!}
\end{aligned}$$

■

Lemme 3.8 *Soit* $\mathbf{1} = (1, 0, ..., 0)$ *; alors*

$$S(z, \mathbf{1}) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n}\frac{1}{(1-z_1)^n}.$$

Preuve. Comme $\left\{\frac{z^\alpha}{\|z^\alpha\|}\right\}$ est une base pour la boule unité alors :

$$\begin{aligned}
S(z,1) &= \sum \frac{z^\alpha}{\|z^\alpha\|_{L^2}}\frac{1^\alpha}{\|1^\alpha\|_{L^2}} \\
&= \sum \frac{z^\alpha 1^\alpha}{\|z_1^\alpha\|_{L^2}^2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_1^k}{\eta(k)} \\
&= \frac{1}{2\pi^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_1^k(k+n-1)!}{k!} \\
&= \frac{(n-1)!}{2\pi^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+n-1)}{(n-1)}z_1^k \\
&= \frac{(n-1)!}{2\pi^n}\frac{1}{(1-z_1)^n}
\end{aligned}$$

■

Lemme 3.9 *Soit* ρ *une rotation unitaire dans* $\mathbb{C}^n$ *; pour* $z \in B$, $\zeta \in \partial B$, *on a*

$$S(\rho z, \rho\zeta) = S(z, \zeta)$$

Preuve. Posons $\rho\zeta = \zeta$ alors $\rho^{-1}\zeta = \zeta$. Soit $f \in \mathcal{H}^2(B)$, alors $f \circ \rho^{-1} \in \mathcal{H}^2(B)$ et

$$\begin{aligned}
\int S(\rho z, \rho\zeta) f(\zeta) dV(\zeta) &= \int S(\rho z, \zeta) f(\rho^{-1}\zeta) \left| J_C \rho^{-1}(\zeta) \right|^2 dV(\zeta) \\
&= \int S(\rho z, \zeta) f(\rho^{-1}\zeta) dV(\zeta) \qquad \text{car } \left| J_C \rho^{-1}(\zeta) \right|^2 = 1 \\
&= f(\rho^{-1}.)/_{\rho z} = f(z)
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.10 *Le noyau de Szegö dans la boule de* $\mathbb{C}^n$ *est*

$$S(z, \zeta) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \frac{1}{(1 - z\overline{\zeta})^n}.$$

Preuve. Soit $z \in B$ un point quelconque. Soit ρ la rotation unitaire telle que $\rho(z) = 1$. Par le Lemme 3.9

$$\begin{aligned}
S(z, \zeta) &= S(\rho^{-1}1, \zeta) \qquad (\rho^{-1} = \rho \quad \text{donc } \rho^{-1}1 = \rho 1 = 1) \\
&= S(1, \rho\zeta) \\
&= \overline{S(\rho\zeta, 1)} \qquad (\text{propriété de } S(z, \zeta)\ ) \\
&= \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \frac{1}{(1 - (\overline{\rho\zeta}) \cdot 1)^n} \\
&= \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \frac{1}{(1 - \overline{\zeta} \cdot (\rho^{-1}1))^n} \\
&= \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \frac{1}{(1 - z\overline{\zeta})^n}
\end{aligned}$$

■

Chapitre 4

Relations entre le noyau de Szegö et les noyaux de Cauchy-Fantappié

Dans ce chapitre on va exprimer le noyau de Szegö S en fonction du noyau de Cauchy-Fantappié E dans un domaine strictement pseudo-convexe $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ de $\mathbb{C}^n$ (Cf.[10]).

4.1 Le noyau $H(z, \xi) = E(z, \xi) + C(z, \xi)$

Cette partie consiste à déterminer un noyau $H(z, \xi)$ pour un domaine $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ strictement pseudo-convexe ; ce noyau se compose de deux parties, $E(z, \xi)$ la partie dominante de $H(z, \xi)$ appelée noyau de Cauchy-Fantappié, et $C(z, \xi)$ une fonction à expliciter. Nous avons besoin auparavant des notations suivantes :

4.1.1 Notations

On suppose ici que $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ est un domaine strictement pseudo-convexe à bord ∂D de classe $\mathcal{C}^\infty$. On note sa fonction définissante $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$, définie par : $\lambda < 0$ dans D, $\lambda = 0$ sur ∂D et $\lambda > 0$ en dehors de $\overline{D}$, vérifiant gradient de $\lambda(\xi) \neq 0$ pour tout $\xi \in \partial D$ et

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \xi_i \partial \bar{\xi}_j}(\xi)\ t_i \overline{t_j} \geq c\,|t|^2, \qquad \xi \in \mathbb{C}^n,\ t \in \mathbb{C}^n \tag{4.1}$$

où $c > 0$ est une constante indépendante de ξ et de t.
La restriction de la formule **4.1** au plan tangent complexe s'appelle forme de Levi associée au domaine strictement pseudo-convexe D.

Si ι et φ sont deux fonctions définies sur $\mathbb{C}^n$, on dira que $\iota \lesssim \varphi$ s'il existe une constante $k > 0$ telle que $|\iota(z)| \leq k\,|\varphi(z)|$ pour tous ces z qui donnent un sens à cette inégalité : on dira que $\iota \approx \varphi$ si $\iota \lesssim \varphi$ et $\varphi \lesssim \iota$. Dans la suite, les α, β, a, et c désignent des constantes positives.

4.1.2 Construction de $E(z, \xi)$

On va construire le noyau de Cauchy-Fantappié $E(z, \xi), z \in D, \xi \in \partial D$ dans un domaine $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ strictement pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$.

Soit $E(z, \xi)d\sigma_\xi$ une forme de *Cauchy-Fantappié* définie par :

$$E(z, \xi) = \frac{N(z, \xi)d\sigma_\xi}{[g(z, \xi)]^n}, z \in D \text{ et } \xi \in \partial D$$

où $d\sigma_\xi$ est la mesure de Lebesgue sur ∂D et

$$N\,(z, \xi)d\sigma_\xi \;= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!(2\pi i)^{-n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}g_j\overline{\partial}_\xi g_1\wedge\ldots\wedge\widehat{\overline{\partial}_\xi g_j}\wedge\ldots\wedge\overline{\partial}_\xi g_n\wedge d\xi_1\wedge\ldots\wedge d\xi_n \tag{4.2}$$

et

$$g(z, \xi) = \sum_{i=1}^{n}(\xi_i - z_i)g_i(z, \xi), \quad \textit{pour } z \in \mathbb{C}^n \textit{ et } \xi \in \partial D \tag{4.3}$$

où les fonctions $g_i(z, \xi)$, pour $i = 1, ..., n$ sont construites de la manière suivante :

Pour $\xi \in \partial D$ (fixé), le polynôme de Levi au point ξ est donné par la relation :

$$\widetilde{g}(z, \xi) = \sum_{i=1}^{n}(\xi_i - z_i)\widetilde{g}_i(z, \xi) \tag{4.4}$$

où

$$\widetilde{g}_i(z, \xi) = 2\frac{\partial\lambda}{\partial\xi_i}(\xi) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi_i\partial\xi_j}(\xi)(z_j - \xi_j), \quad z \in \mathbb{C}^n \tag{4.5}$$

et λ la fonction définissante de D du domaine strictement pseudo-convexe D.

De manière explicite : le polynôme de Levi est donné comme suit :

$$\begin{aligned}\widetilde{g}(z, \xi) &= \sum_{i=1}^{n}(\xi_i - z_i)\left[2\frac{\partial\lambda}{\partial\xi_i}(\xi) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi_i\partial\xi_j}(\xi)(z_j - \xi_j)\right] \\ &= -\left[2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi_i}(\xi)(z_i - \xi_i) + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi_i\partial\xi_j}(\xi)(z_i - \xi_i)(z_j - \xi_j)\right] \quad \text{pour tout } \xi \in \partial D,\ z \in \mathbb{C}^n\end{aligned}$$

Lemme 4.1 *Il existe un nombre réel* $C > 0$ *tel que :* $\operatorname{Re}\widetilde{g}(z,\xi) \geqslant C\,|z-\xi|^2, \xi \in \partial D$ *et* $z \in D_\xi^\alpha = \left\{z \in \mathbb{C}^n, d(z,D) < \alpha\,|z-\xi|^2\right\}$, *avec* $|z-\xi| < a$.

Preuve. D'après la formule de Taylor de la fonction définissante λ au piont ξ on a $(Cf.[10])$:

$$\lambda(z) = \lambda(\xi) - \operatorname{Re}\widetilde{g}(z,\xi) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi_i\partial\overline{\xi}_j}(\xi)\ (z_i-\xi_i)(\overline{z_j}-\overline{\xi_j}) + o\,\|z-\xi\|^2$$

pour $\xi \in \partial D, z \in D_\xi^\alpha$, et $|z-\xi| < a$ où a et α sont des constantes >0 assez petites pour que la formule de Taylor soit valide au voisinage de ξ.

Par définition $\lambda(\xi) = 0$, pour tout $\xi \in \partial D$

d'ou

$$\lambda(z) = -\operatorname{Re}\widetilde{g}(z,\xi) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi_i\partial\overline{\xi}_j}(\xi)\ (z_i-\xi_i)(\overline{z_j}-\overline{\xi_j}) + o\,\|z-\xi\|^2, \quad \xi \in \partial D, z \in D_\xi^\alpha,\ |z-\xi| < a$$

par suite,

$$\operatorname{Re}\widetilde{g}(z,\xi) = -\lambda(z) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi_i\partial\overline{\xi}_j}(\xi)\ (z_i-\xi_i)(\overline{z_j}-\overline{\xi_j}) + o\,\|z-\xi\|^2, \quad \xi \in \partial D, z \in D_\xi^\alpha,\ |z-\xi| < a$$

d'autre part

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi_i\partial\overline{\xi}_j}(\xi)\ (z_i-\xi_i)(\overline{z_j}-\overline{\xi_j}) \geqslant C\,|z-\xi|^2 \qquad \xi \in \mathbb{C}^n,\ z-\xi \in \mathbb{C}^n$$

et comme $\lambda(z) < 0$ dans D on a

$$\operatorname{Re}\widetilde{g}(z,\xi) \geq C\ \ |z-\xi|^2,\ \xi \in \partial D, z \in D_\xi^\alpha, |z-\xi| < a \tag{4.6}$$

Donc

$$\operatorname{Re}\widetilde{g}(z,\xi) \neq 0, \forall\xi \in \partial D \text{ et } z \in D_\xi^\alpha\ , |z-\xi| < a \tag{4.7}$$

d'ou le lemme. ■

On définit alors les $g_i(z,\xi)$ pour $i = 1,...,n$ par l'homotopie des fonctions :

$$g_i(z,\xi) = \phi(z,\xi)\ \ \widetilde{g}_i(z,\xi) + [1-\phi(z,\xi)\ ]\,(\overline{\xi}_i - \overline{z}_i) \tag{4.8}$$

où $\phi(z,\xi) = \psi(|z-\xi|)$ est une fonction d'une variable réelle ayant les propriétés suivantes :

a. $\psi \in \mathcal{C}^\infty(D)$

b. $0 \leq \psi \leq 1$

c. $\psi(s) = \begin{cases} 1 \text{ si } \; s \leq \left(\dfrac{1}{2}\right) s_0 \\ 0 \text{ si } s \geq s_0, \end{cases}$

avec $s_0 = \left(\dfrac{1}{2}\right) a$, et a une constante indépendante de $\xi \in \partial D$.

Les fonctions $g_i(z,\xi)$ pour $i = 1, ..., n$, $z \in D, \xi \in \partial D$ s'appellent *sections de Leray* pour D et vérifient les propriétés suivantes :

Lemme 4.2 *On a*

a. $g(z,\xi) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - z_i) g_i(z,\xi)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\partial D \times \mathbb{C}^n$.

b. $g(z,\xi) \neq 0, \forall\, \xi \in \partial D$, et $z \in D_\xi^\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C}^n,\ d(z,D) < \alpha \left| z - \xi \right|^2 \right\}$; où α est une constante positive (indépendante de ξ) .

Preuve.

1. L'assertion a) est immédiate d'après la construction même des g_i et en tenant compte du fait que la fonction déffinissante λ de D est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. En effet ; **4.4** et **4.8** génèrent :

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - z_i) g_i(z,\xi) = \phi(z,\xi) \ \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - z_i)\ \widetilde{g}_i(z,\xi) + [1 - \phi(z,\xi)\ ] \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - z_i)(\overline{\xi}_i - \overline{z}_i) \text{ pour } i = 1, ..., n$$

4.9 est déduite des définitions de $g(z,\xi)$ et $\widetilde{g}(z,\xi)$

$$g(z,\xi) = \phi(z,\xi)\widetilde{g}(z,\xi) + [1 - \phi(z,\xi)] \left| \xi - z \right|^2, \text{ pour } \xi \in \partial D, \text{ et } z \in \mathbb{C}^n \qquad \mathbf{(4.9)}$$

On va montrer que $\operatorname{Re} g(z,\xi) \neq 0, \forall\, \xi \in \partial D$, et $z \in D_\xi^\alpha$.

d'après **4.9** on a

$$\operatorname{Re} g(z,\xi) = \operatorname{Re} \widetilde{g}(z,\xi) \neq 0, \text{ pour tout } \xi \in \partial D, z \in D_\xi^\alpha, \text{ et } \left| z - \xi \right| < a \qquad \mathbf{(4.10)}$$

c'est-à-dire $g(z,\xi) \neq 0$, pour tout $\xi \in \partial D$, et $z \in D_\xi^\alpha$. ■

D'où la construction de $E(z,\xi) = \dfrac{N(z,\xi)}{[g(z,\xi)]^n}$ au point $\xi \in \partial D$, et $z \in D_z^\alpha$.

Notons que

Le noyau $E(z,\xi)$ et les fonctions $g_i(z,\xi)$ sont holomorphes en z si $|z - \xi| < \frac{1}{4} s_0, z \in D_\xi^\alpha$, car dans ce cas $\phi(z,\xi) = 1$, et $g_i(z,\xi) = \widetilde{g}_i(z,\xi)$.

4.1.3 Construction de $C(z,\xi)$

Soit $W_\delta = \{z \in \mathbb{C}^n, d(z,D) < \delta\}$ un domaine pseudo-convexe, où $\delta > 0$ et soit $F(z,\xi)$ une $(0,1) - forme$ en $z \in W_\delta$ définie par :

$$F(z,\xi) = \begin{cases} \overline{\partial_z} E(z,\xi) & z \in W_\delta \cap D_\xi^\alpha \\ 0 & z \in W_\delta - D_\xi^\alpha \end{cases} \qquad \textbf{(4.11)}$$

(car $\overline{\partial_z} E(z,\xi) = 0$, pour z dans un voisinage de ξ).

Remarque 4 *$F(z,\xi)$ est une $(0,1)$ forme $\overline{\partial} - fermée$ en z et $(n, n-1)$ forme en ξ i.e* $\overline{\partial}_z F(z,\xi) = 0$.

La solution de l'équation

$$\overline{\partial}_z C(z,\xi) = -F(z,\xi) \text{ dans } z \in W_\delta$$

est donnée par :

$$C(z,\xi) = -P_z F(z,\xi), \text{ pour } \xi \in \partial D, z \in W_\delta$$

où P_z est un opérateur linéaire continu. L'existence d'une telle solution est assurée par le résultat bien connu suivant etabli par L.O. Hörmander [9] :

Théorème 4.3 *Si W_δ un domaine pseudo-convexe, $f \in L^2_{(p,q)}(W_\delta), q > 0$ et f satisfait la condition $\overline{\partial} f = 0$, il existe une forme $u \in L^2_{(p,q-1)}(W_\delta)$ telle que :*

$$\overline{\partial} u = f$$

Choisissons maintenant $\widetilde{W} \subset \mathbb{C}^n$ de telle sorte que :
$D \subset\subset \widetilde{W} \subset\subset W_\delta$ et restreignons les valeurs prises par $E(z,\xi)$ pour $z \in D_\xi^B$ où D_ξ^B est un domaine défini par $B < \alpha$ de telle sorte que $D_\xi^B \subset\subset \widetilde{W}$, $\forall\, \xi \in \partial D$. Ce qui achève la construction de $C(z,\xi)$.

Les résultats qui suivent sont utiles pour la suite :

Théorème 4.4 *(**Uniformité des noyaux par des petites perturbations de** D) Soit ℓ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty(\partial D)$ et $D(\epsilon)$ un domaine borné dans $\mathbb{C}^n$ à bord*

$$\partial D(\epsilon) = \{\xi(\epsilon) \in \mathbb{C}^n, \xi(\epsilon) = \xi + \epsilon \ell v(\xi) \;\; avec \;\; \xi \in \partial D\}$$

où $v(\xi)$ est le vecteur normal extérieur à ∂D au point ξ et $|\epsilon| < \epsilon_0$. Alors, les noyaux E_ε et C_ε sont construits pour $D(\epsilon)$ avec $H_\epsilon(z,\xi(\epsilon)) \longrightarrow H(z,\xi)$ uniformément en $\xi \in \partial D, z \in Q \subset\subset D$ quand $\epsilon \to 0$ pour tout compact Q de D.

Preuve. Il suffit de choisir un domaine $W_\delta = \{z \in \mathbb{C}^n, d(z, D) < \delta\}$ où δ est un nombre positif, tel que W_δ soit pseudo-convexe, commun à tous les domaines $D(\epsilon) \subset \mathbb{C}^n$ dont le bord est donné par $\partial D(\epsilon) = \{\xi(\epsilon) \in \mathbb{C}^n, \xi(\epsilon) = \xi + \epsilon\ell v(\xi) \text{ avec } \xi \in \partial D\}$. Alors P opère sur les formes dans W_δ et est le même pour $\forall\ \epsilon, |\epsilon| < \epsilon_0$, ce qui démontre le théorème 4.2. ■

Lemme 4.5 *Pour n'importe quelle forme de $Cauchy - Fantappié$ $E(z, \xi)$ sur D strictement pseudo-convexe, on a le résultat suivant :*

$$\overline{\partial}_z E(z, \xi) = \overline{\partial}_\xi \widehat{E}(z, \xi) \qquad z \in D \textit{ et } \xi \in \partial D \tag{\textbf{4.12}}$$

où $\widehat{E}(z, \xi)$ est calculé en fonction de $g_i(z, \xi)$, $i = 1, ..., n$ et

$$\widehat{E}(z, \xi) = 0 \textit{ pour tout } (z, \xi) \in D \times \partial D \quad \textit{tel que } \ \overline{\partial}_z g_i(z, \xi) = 0\ , \quad i = 1, ..., n \tag{\textbf{4.13}}$$

Preuve. En effet,
si $E(z, \xi)$ la forme de $Cauchy-Fantappi\acute{e}$ de type $(n, n-1)$ en ξ définie par : $g_1(z, \xi), ..., g_n(z, \xi)$, et $B(z, \xi)$ la forme de $Bochner - Martinelli$ est donnée par : $\gamma_1 = (\overline{\xi_1} - \overline{z_1}), ..., \gamma_n = (\overline{\xi_n} - \overline{z_n})$ alors :

$$E(z, \xi) - B(z, \xi) = \overline{\partial}_\xi A(z, \xi)$$

(car $E - B$ est $\overline{\partial}$-*fermé* et D est strictement pseudo-convexe)
où A s'écrit en fonction de g_i et de γ_i, $i = 1, ..., n$ (Cf. [8]).
Notons

$$\widehat{E}(z, \xi) = \overline{\partial}'_z A(z, \xi) \tag{\textbf{4.14}}$$

où $\overline{\partial}'_z$ signifie que les $\gamma_i(z, \xi)$ (pas les g_i) sont considérées constantes en z. Comme $\overline{\partial}'_z B(z, \xi) = 0$, et $\overline{\partial}'_z E(z, \xi) = \overline{\partial}_z E(z, \xi)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_z E(z, \xi) &= \overline{\partial}'_z \left[E(z, \xi) - B(z, \xi)\right] \\
&= \overline{\partial}'_z \overline{\partial}_\xi A(z, \xi) \\
&= \overline{\partial}_\xi \overline{\partial}'_z A(z, \xi) \\
&= \overline{\partial}_\xi \widehat{E}(z, \xi) \qquad \text{(d'après } \textbf{4.14}\text{)}
\end{aligned}$$

donc

$$\overline{\partial}_z E(z, \xi) = \overline{\partial}_\xi \widehat{E}(z, \xi)$$

d'ou le lemme. ■

Lemme 4.6 *Pour toute fonction u holomorphe dans D et continue sur $\overline{D}$ on a :*

$$\phi(z) = \int_{\xi \in \partial D} F(z,\xi)u(\xi)d\sigma_\xi = 0, \quad z \in W_\delta \tag{4.15}$$

Preuve. $\phi(z)$ est une $(0,1)$ forme de classe $\mathcal{C}^{\infty}(W_\delta)$ telle que $\phi(z) = 0$ *si* $z \in D$.

– En effet, $F(z,\xi) = \overline{\partial}_z E(z,\xi)$ pour tout $\xi \in \partial D$ selon le premier cas de la formule **4.11**.

On a

$$\begin{aligned}
\phi(z) &= \int_{\xi \in \partial D} F(z,\xi)u(\xi)d\sigma_\xi \\
&= \int_{\xi \in \partial D} \overline{\partial}_z E(z,\xi)u(\xi)d\sigma_\xi \\
&= \overline{\partial}_z \int_{\xi \in \partial D} E(z,\xi)u(\xi)d\sigma_\xi \\
&= \overline{\partial}_z u(z) = 0 \quad \text{(car } E \text{ est reproduisant, et } u \text{ est holomorphe)}
\end{aligned}$$

de plus $\phi(z) = 0$, pour tout $z \in \overline{D}$ (d'après le théorème 4.4)

– On considère maintenant, $z \in W_\delta - \overline{D}$.

Soit δ tel que défini dans le domaine W_δ, où δ est choisit assez petit pour que, pour tout $z \in W_\delta - \overline{D}$.

i) $z \in D_\xi^\alpha$ si $|\xi - z| \geq \frac{1}{8}s_0, \xi \in \partial D$.

ii) l'intersection de la boule $B(z) = \left\{\xi \in \mathbb{C}^n, |\xi - z| < \frac{1}{8}s_0\right\}$ et ∂D c'est l'ensemble $R(z)$, et notons $\partial R(z)$ son bord.

De là, si $\xi \in R(z)$, alors $F(z,\xi) = 0$ (car E est holomorphe en z), donc on peut appliquer les deux cas de **4.11**, et si $\xi \in \partial D - R(z)$ alors :

d'une part $F(z,\xi) = \overline{\partial}_z E(z,\xi)$, et

$$\phi(z) = \int_{\xi \in \partial D - R(z)} \overline{\partial}_z E(z,\xi)u(\xi)d\sigma_\xi \qquad z \in W_\delta - \overline{D}. \tag{4.16}$$

et d'autre part pour n'importe quelle forme de $Cauchy - Fantappi\acute{e}$ $E(z,\xi)$, on a le résultat suivant (d'après le Lemme 4.5)

$$\overline{\partial}_z E(z,\xi) = \overline{\partial}_\xi \widehat{E}(z,\xi) \tag{4.17}$$

Par application du théorème de Stokes sur le domaine $\partial D - R(z)$ à la forme $\widehat{E}(z,\xi)u(\xi)$, pour $\xi \in \partial D$ et $z \in W_\delta - \overline{D}$, on a

$$\int_{\xi \in \partial D - R(z)} d\left[\widehat{E}(z,\xi)u(\xi)\right] = \int_{\xi \in \partial[\partial D - R(z)]} \widehat{E}(z,\xi)u(\xi)$$

or que

$$d\left[\widehat{E}(z,\xi)u(\xi)\right] = \overline{\partial}\widehat{E}(z,\xi)\wedge u(z) - \widehat{E}(z,\xi)\wedge\overline{\partial}u(\xi)$$

donc

$$\int_{\xi\in\partial D-R(z)} \overline{\partial}\widehat{E}(z,\xi)\wedge u(z) = \int_{\xi\in\partial D-R(z)} \widehat{E}(z,\xi)\wedge\overline{\partial}u(\xi) + \int_{\xi\in\partial R(z)} \widehat{E}(z,\xi)u(\xi)$$

d'après **4.12** on a

$$\phi(z) = -\int_{\xi\in\partial D-R(z)} \overline{\partial}u(\xi)\wedge\widehat{E(z,\xi)} + \int_{\xi\in\partial R(z)} \widehat{E}(z,\xi)u(\xi)$$

comme u est holomorphe, on a

$$\int_{\xi\in\partial D-R(z)} \overline{\partial}u(\xi)\wedge\widehat{E(z,\xi)} = 0$$

et d'après **4.13**

$$\int_{\xi\in\partial R(z)} \widehat{E}(z,\xi)u(\xi) = 0$$

Donc le lemme est prouvé. ■

Théorème 4.7 *Il existe un voisinage $\widetilde{W}\supset\overline{D}$, un nombre $B>0$ et des fonctions $g(z,\xi)$, $N(z,\xi)$, et $C(z,\xi)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, pour chaque $z\in\widetilde{W}$ et $\xi\in\partial D$ tels que*

$$g(z,\xi)\neq 0, \qquad \xi\in\partial D,\ z\in D_\xi^B$$

avec

$$D_\xi^B = \left\{z\in\mathbb{C}^n,\ d(z,D) < B\left|\xi - z\right|^2\right\}$$

Notons

$$E(z,\xi) = \frac{N(z,\xi)}{[g(z,\xi)]^n} \qquad \xi\in\partial D, z\in D_\xi^B$$

et

$$H(z,\xi) = E(z,\xi) + C(z,\xi) \qquad \xi\in\partial D, z\in D_\xi^B$$

Alors

a. si u est une fonction continue sur $\overline{D}$ et holomorphe dans D, on a la formule suivante :

$$u(z) = \int_{\xi\ \in\partial D} H(z,\xi)u(\xi)d\sigma_\xi\ , \qquad z\in D \tag{4.18}$$

où $d\sigma$ désigne la mesure de Lebesgue sur ∂D.

b. $H(z,\xi)$ *est holomorphe en* $z \in D_\xi^B$ *pour tout* $\xi \in \partial D$.

c. pour $\xi \in \partial D, z \in \widetilde{W}$ *on a :*

$$N(z,\xi) = \frac{(n-1)!}{\pi^n} 2^{n-2} \left|\nabla\lambda(\xi)\right| L(\xi) + e(z,\xi) \tag{4.19}$$

où $L(\xi)$ *est le produit de* $(n-1)$ *valeurs propres de la forme de Levi* ***4.1*** *sur l'espace tangent complexe de* ∂D *à* ξ*, et* $|\nabla\lambda(\xi)|$ *est*

$$|\nabla\lambda(\xi)|^2 = \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial\lambda}{\partial x_j})^2 + (\frac{\partial\lambda}{\partial y_j})^2 , \qquad \xi_j = x_j + i\ y_j.$$

le terme correctif est

$$|e(z,\xi)| \lesssim |z-\xi| \ , \quad z \in \widetilde{W} \ , \quad \xi \in \partial D \tag{4.20}$$

d. si ξ *et* $z \in \partial D$ *alors*

$$|g(z,\xi) - \overline{g}(\xi,z)| \lesssim |z-\xi|^3 \tag{4.21}$$

Preuve. D'après la construction de E, les fonctions $g(z,\xi), N(z,\xi)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour $z \in \widetilde{W}$, et $\xi \in \partial D$, avec $g(z,\xi) \neq 0$, pour tout $z \in D_\xi^\alpha$.

La continuité de $C(z,\xi)$

La forme $F(z,\xi)$ est de type $(0,1)$ en z.

Soit D_z l'opérateur différentielle sur ∂D. Alors la fonction $C(z,\xi)$ est différentiable par rapport à z et on a

$$D_z C(z,\xi) = D_z(-P_z F(z,\xi)) \ \ z \in W_\delta, \xi \in \partial D,$$

et comme l'opérateur P est linéaire alors, on a

$$D_z(-P_z F(z,\xi)) = -P_z(D_z F(z,\xi)) \ \ z \in W_\delta, \xi \in \partial D$$

donc

$$D_z C(z,\xi) = -P_z(D_z F(z,\xi)) \ , \qquad z \in W_\delta, \ \xi \in \partial D \tag{4.22}$$

De plus la convergence au sens L^2 sur W_δ implique la convergence uniforme sur tout compact de $\widetilde{W}$ par le résultat suivant :

Lemme 4.8 *Si* $\nu(z)$ *est une fonction lisse dans une boule* $B = \{z \in \mathbb{C}^n, |z| < r\}$ *alors*

$$|\nu(0)| \leq C_r \left\{ \sup_B \left|\overline{\partial}\nu\right| + \|\nu\|_{L^2(B)} \right\}$$

où C_r *une constante indépendante de* ν.

Donc $C(z,\xi) \in \mathcal{C}^\infty(\widetilde{W} \times \partial D)$.

Preuve de la propriété reproduisante de H

Supposons u holomorphe sur D, et d'après le théorème 4.4 u holomorphe dans $\overline{D}$.

On a $H = E + C$ avec E le noyau de $Cauchy - Fanappié$, par une intégration on aura :

$$\begin{aligned}\int_{\xi\in\partial D} H(z,\xi)u(\xi)d\sigma_\xi &= \int_{\xi\in\partial D} E(z,\xi)u(\xi)d\sigma_\xi + \int_{\xi\in\partial D} C(z,\xi)u(\xi)d\sigma_\xi,\\ &= u(z) + \int_{\xi\in\partial D} C(z,\xi)u(\xi)d\sigma_z, \quad z \in D\\ &= u(z) - P\int_{\xi\in\partial D} F(z,\xi)u(\xi)d\sigma_\xi \quad z \in D\end{aligned}$$

d'après le lemme 4.6

$$\int_{\xi\in\partial D} F(z,\xi)u(\xi)d\sigma_\xi = 0, \text{ pour tout } \quad z \in W_\delta$$

donc

$$\int_{\xi\in\partial D} H(z,\xi)u(\xi)d\sigma_\xi = u(z)$$

preuve de (c)

On va considérer $\xi \in \partial D$, et z dans un voisinage de ξ.

D'après **4.2**

$$N(z,\xi)d\sigma_\xi = C_n \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} g_j \overline{\partial} g_1 \wedge ... \wedge \widehat{\overline{\partial} g_j} \wedge ... \wedge \overline{\partial} g_n \wedge d\xi_1 \wedge ... \wedge d\xi_n$$

où

$$C_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!(2\pi i)^{-n}$$

donc on peut écrire **4.2** comme suit :

$$N(z,\xi)d\sigma_\xi = \frac{1}{(2\pi i)^n} G \bigwedge_{k=1}^{n-1} (\overline{\partial} G) \tag{4.23}$$

avec

$$G = \sum_{j=1}^{n} g_j(z,\xi)d\xi_j$$

et comme z et ξ dans le même voisinage, on a $g_i(z,\xi) = \widetilde{g}_i(z,\xi)$

c'est-à-dire

$$g_i(z,\xi) = 2\frac{\partial\lambda}{\partial\xi_i}(\xi) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi_i\partial\xi_j}(\xi)(z_j - \xi_j)$$

donc **4.23** devient

$$N(z,\xi)d\sigma_\xi = \frac{1}{(2\pi i)^n}2^n\overline{\partial}\lambda \bigwedge_{k=1}^{n-1}(\overline{\partial}\partial\lambda)(\xi) + e(z,\xi) \tag{4.24}$$

où $|e(z,\xi)| \lesssim |z-\xi|$.

Un calcul direct donne **4.19** .

Finalement, la formule de Taylor prouve **4.21**

En effet,

$$g(z,\xi) = \sum_{i=1}^{n}(\xi_i - z_i)g_i(z,\xi)$$

d'après **4.5**

$$\begin{aligned} g(z,\xi) &= \sum_{i=1}^{n}(\xi_i - z_i)\left[2\frac{\partial\lambda}{\partial\xi_i}(\xi) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi_i\partial\xi_j}(\xi)(z_j-\xi_j)\right] \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi_i}(\xi)(\xi_i - z_i) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi_i\partial\xi_j}(\xi)(\xi_i-z_i)(z_j-\xi_j) \end{aligned}$$

posons

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\xi_i} = \lambda_i, \text{ et } \frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi_i\partial\xi_j} = \lambda_{ij}$$

donc

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}g(z,\xi) &= \sum_{j,i=1}^{n}\lambda_i(\xi)(z_i-\xi_i) + \frac{1}{2}\lambda_{ij}(\xi)(z_i-\xi_i)(z_j-\xi_j) \\ &= \sum_{j,i=1}^{n}\left[\lambda_i(z) + \lambda_{ij}(z)(\xi_j - z_j) + \lambda_{ij}(z)(\overline{\xi}_j - \overline{z}_j)\right](z_i-\xi_i) + \\ &\qquad \frac{1}{2}\lambda_{ij}(\xi)(z_i-\xi_i)(z_j-\xi_j) + R \end{aligned}$$

où

$$R = O\left\|z-\xi\right\|^3$$

Par suite

$$\frac{1}{2}\left[g(z,\xi) - \overline{g}(\xi,z)\right] = \lambda(\xi) - \lambda(z) + R$$

et comme $\xi \in \partial D$, et $z \in \partial D$, on a $\lambda(\xi) = \lambda(z) = 0$ et $|g(z,\xi) - \overline{g}(\xi,z)| \lesssim |z-\xi|^3$,

$z \in \partial D$, $\xi \in \partial D$ d'où le théorème 4.7. ■

4.2 Les Noyaux $E(z,\xi)$ et $E(z,\xi)-\overline{E}(\xi,z)$,

Dans cette partie on doit procéder à l'étude de la singularité des noyaux $E(z,\xi)$ et $E(z,\xi)-\overline{E}(\xi,z)$; cette étude s'avère importante pour établir la relation entre le noyau de Henkin-Ramirez H et le noyau de Szegö S.

L'idée principale est d'étudier l'osculation du bord d'un domaine strictement pseudo-convexe $D\subset\subset\mathbb{C}^n$ par la surface de Heisenberg S_{n-1}.

Considérons la variété $(\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{R})$ munie des coordonnées $(\zeta_1,...,\zeta_{n-1,}t)$ et le groupe noté traditionnellement $H_{n-1}\subset\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{R}$ dont la loi est définie par

$$(\zeta,t)\,(\zeta',t')=(\zeta+\zeta',t+t'+2\operatorname{Im}\zeta\zeta')\,,\qquad \zeta\in\mathbb{C}^{n-1},t\in\mathbb{R}$$

où

$$\zeta\zeta'=\sum_{j=1}^{n}\zeta_j\zeta_j'$$

H_{n-1} est appelé "groupe de Heisenberg" par G.B Folland et E.M.Stein dans [7].

La surface de Heisenberg est définie alors, et toujours selon G.B.Folland et E.M.Stein, par

$$S_{n-1}=\left\{(\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_{n-1},t+i\ \tau),\ \text{avec}\ \tau=\sum_{j=1}^{n-1}|\zeta_j|^2\right\}$$

G.B.Folland et E.M.Stein affirme que le groupe

$$H_{n-1}=\left\{(\zeta,t),\zeta\in\mathbb{C}^{n-1}\ ,\ t\in\mathbb{R}\right\}$$

paramétrise S_{n-1}

4.2.1 L'osculation du bord ∂D et le groupe de Heisenberg.

Soient $\xi_1,...,\xi_n$ les coordonnées courantes de $\mathbb{C}^n$, $D\subset\mathbb{C}^n$ un ouvert strictement pseudo-convexe de $\mathbb{C}^n$. Considérons un ensemble ouvert "petit" $U\in\partial D$ contenant un point p de ∂D.

On peut déterminer (Cf G.B Folland et E.M Stein [7]) en chaque point $p\in U$, un système de coordonnées locales holomorphes noté Θ_p d'origine p, ayant les propriétés suivantes :

a. Les coordonnées $\theta_0(\xi,p),\theta_1(\xi,p),...,\theta_{n-1}(\xi,p)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ en $\xi,p\in U$, pour $|\xi-p|<\alpha$ et $\alpha>0$ indépendante de $p\in U$. (Il faut choisir α petit pour que $\widetilde{g_i}(\xi,p)=g_i(\xi,p)$ si $|\xi-p|<\alpha$, avec les g_i et les $\widetilde{g_i}$ sont définies dans le théorème 12. Le diamètre de $U<\dfrac{\alpha}{2}$).
θ_0 est donné par :

$$\theta_0(\xi,p)=ig(\xi,p), \qquad \text{avec } p\in U, \text{ et } |\xi-p|<\alpha$$

où g est le dénominateur de $E(z,\xi)$.

b. Soit $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_{n-1})=\zeta(\xi,p)=(\theta_1,...,\theta_{n-1})$. ($\zeta_0$ n'existe pas)

et

$$\theta_0=t+i\,\tau$$

avec

$$\tau(\xi,p)=\operatorname{Re} g(\xi,p)$$

$$t(\xi,p)=-\operatorname{Im} g(\xi,p)$$

Il est bien connu (Cf G.B Folland et E.M Stein [7]) que H_{n-1} est muni d'une norme notée $\rho\,(\zeta,t)$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\rho^4=|\zeta|^4+t^2, \rho\geq 0$$

$$\rho(a\zeta,a^2t)=a\rho(\zeta,t), \qquad \text{pour } a>0$$

On a le résultat important suivant :

Lemme 4.9 *Le bord ∂D à une paramétrisation*

$$\tau=|\zeta|^2+\mathcal{E}(\zeta,t) \tag{4.25}$$

où $\tau=\tau(\xi,p), \zeta=\zeta(\xi,p), \xi\in\partial D, p\in U, |\xi-p|<\alpha$ et le terme correctif $\mathcal{E}(\zeta(\xi,p),t(\xi,p))$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ en ξ,p avec

$$|\mathcal{E}(\zeta,t)|\lesssim\rho^3$$

c. Pour tout $z\in U,\xi\in U\subset\partial D$ l'évaluation donne :(voir [7])

$$\rho^2(z,\xi) \lesssim |z-\xi| \lesssim \rho(z,\xi) \tag{4.26}$$

et

$$|g(z,\xi)| \approx |\overline{g}(\xi,z)| \approx \rho^2(z,\xi) \approx \rho^2(\xi,z)$$

$$||g(z,\xi)| - |\overline{g}(\xi,z)|| \lesssim \rho^3(z,\xi)$$

Il est bien connu par ailleurs que :

$$\int_{\rho\leq 1} [\rho(\zeta,t)]^{-2n+\epsilon}\, dV = \begin{cases} +\infty \text{ si } \epsilon < 0 \\ +\infty \text{ si } \epsilon = 0 \\ \text{fini si } \epsilon > 0 \end{cases}$$

où $dV = dx_1 dy_1 ... dx_{n-1} dy_{n-1} dt$, et $\xi_j = x_j + iy_j$, $j = 1, ..., n-1$.
Maintenant, on va étudier les deux noyaux $E(z,\xi) - \overline{E}(\xi,z)$ et $E(z,\xi)$

Le noyau $E(z,\xi)$

Le noyau de Cauchy-Fantappié $E(z,\xi)$, $z \in \partial D$, et $\xi \in \partial D$ qui a été auparavant défini par :

$$E(z,\xi) = \frac{\phi(\xi)}{[g(z,\xi)]^n} + \frac{e(z,\xi)}{[g(z,\xi)]^n} \tag{\textbf{4.25}}$$

avec $|\xi - z| < \left(\frac{1}{2}\right)\alpha$, et $\phi(\xi)$ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$, possède la propriété suivante :

$$|E(z,\xi)| \approx [\rho(z,\xi)]^{-2n} \tag{\textbf{4.26}}$$

Le résultat d'osculation (lemme 4.9) donne :

$$g(z,\xi) = \tau - it = |\zeta|^2 - it - \mathcal{E}_1(z,\xi) \tag{\textbf{4.27}}$$

où $\xi \in U$, $\zeta = \zeta(z,\xi), t = t(z,\xi)$ et $\mathcal{E}_1(z,\xi)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant :

$$|\mathcal{E}_1(z,\xi)| \lesssim [\rho(z,\xi)]^3$$

d'après le théorème 4.7 et la formule **4.27** on a :

$$\overline{g}(\xi,z) = g(z,\xi) - \mathcal{E}_2 = |\zeta|^2 - it - \mathcal{E}_3(z,\xi) \tag{\textbf{4.28}}$$

avec

$$|\mathcal{E}_3(z,\xi)| \lesssim [\rho(z,\xi)]^3$$

Le terme $|\zeta|^2 - it$ dans les formules **4.27** et **4.28** est appelé le terme dominant de g noté M où

$$M = M(z,\xi) = |\zeta(z,\xi)|^2 - it(z,\xi) \qquad \textbf{(4.29)}$$

Le noyau $K(z,\xi) = E(z,\xi) - \overline{E}(\xi,z)$

Nous allons montrer que le noyau K est de type 1 au sens de G.B Folland et E.M Stein [7]. On rappelle qu'un noyau de type λ est défini comme suit :

Définition 4.1 *Soit λ un nombre réel positif. Une fonction $L\ (z,\xi)$ sur $\partial D \times \partial D$ est dite un noyau de type λ si pour tout entier $m > 0$ on a :*

$$L(z,\xi) = \sum_{j=1}^{N} a_i(z) L_i(z,\xi) b_i(\xi) + E_m(z,\xi) \qquad \textbf{(4.30)}$$

où $N = N(m)$, et le terme d'erreur E_m satisfait :

a. $E_m \in \mathcal{C}^m(\partial D \times \partial D)$

i.e E_m est m fois continûment différentielle.

b. $a_i, b_i \in \mathcal{C}^\infty(\partial D)$, *pour $i = 1, ..., N$.*

c. *L_i est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(\partial D \times \partial D \backslash D)$, à support compact dans $U \cap \{(z,\xi) : \rho(z,\xi) \leq 1\}$, et pour $\rho(z,\xi)$ suffisament petit, la fonction $L_i(z,\xi)$ est représentée dans les coordonnées Θ_p par : $L_i(z,\xi) = l_i(\zeta(z,\xi), t(z,\xi))$; où $l_i(\zeta,t)$ est homogène (au sens $H_{\ n-1}$) de degré λ_i avec $\lambda_i = \lambda - 2n - 2 - \mu_i$ et μ_i un entier positif.*

Dans [10] on établit le résultat suivant :

Théorème 4.10 $K(z,\xi)$ *est un noyau de type 1.*

Preuve. La preuve se fera en deux étapes.

Etape 1 (L'estimation du noyau K)

D'après la formule **4.27** on a :

$$\frac{1}{[g(z,\xi)]^n} = \frac{1}{M^n} \frac{1}{\left[1 - \dfrac{\mathcal{E}_1}{M}\right]^n} = \frac{1}{M^n}\left[1 + \gamma\left(\frac{\mathcal{E}_1}{M}\right)\right]$$

et la relation **4.28** donne

$$\frac{1}{[\overline{g}(\xi,z)]^n} = \frac{1}{M^n}\left[1+\gamma\left(\frac{\mathcal{E}_3}{M}\right)\right]$$

où γ est la fonction d'une variable définie par :

$$\frac{1}{(1-s)^n} = 1+\gamma(s); \qquad |s| < \frac{1}{2}$$

satisfait

$$|\gamma(s)| \lesssim |s| \quad \text{pour} \quad |s| < \frac{1}{2} \tag{4.31}$$

par suite

$$K(z,\xi) = E(z,\xi) - \overline{E}(\xi,z) = \frac{\phi(\xi)-\phi(z)}{[M(z,\xi)]^n} + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \tag{4.32}$$

tel que :

$$T_1 = M^{-n}e(z,\xi)\left[1+\gamma\left(\frac{\mathcal{E}_1}{M}\right)\right]$$
$$T_2 = -M^{-n}\overline{e}(\xi,z)\left[1+\gamma\left(\frac{\mathcal{E}_3}{M}\right)\right]$$
$$T_3 = M^{-n}\phi(\xi)\gamma\left(\frac{\mathcal{E}_1}{M}\right)$$
$$T_4 = -M^{-n}\phi(z)\gamma\left(\frac{\mathcal{E}_3}{M}\right)$$

où nous avons utilisé le fait que $\phi(z) = \overline{\phi}(z)$

Maintenant, en résulte que K est absolument intégrable car :

$$|K(z,\xi)| \quad \lesssim [\rho(z,\xi)]^{-2n+1} \tag{4.33}$$

Etape 2 (analyse de 4.32)

La partition de l'unité et le fait que toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\partial D \times \partial D)$, s'écrit $f = \sum_1^N a_i(z)b_i(\xi) + \mu(z,\xi)$, où a, b et μ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, et μ est nulle pour un ordre supérieur à N sur la diagonale Δ montrent qu'il suffit de vérifier **4.30** pour le noyau $K(z,\xi)a(z)b(\xi)$ où $b \in \mathcal{C}_0^\infty(U), a \in \mathcal{C}^\infty(U)$, et $a(z) = 0$ si $|z-\xi| > \dfrac{\alpha}{2}$ pour chaque $z \in U$.

Les cinq termes dans **4.32** sont traités de la même manière ; alors on traite $T_3 = M^{-n}\phi(\xi)\gamma\left(\dfrac{\mathcal{E}_1}{M}\right)$ à titre d'exemple.

Pour un ordre $J = J(m)$ on développe $\gamma(s)$ au point $s = 0$

$$\gamma\left(\frac{\mathcal{E}}{M}\right) = \sum_{j=1}^{J} C_j\left(\frac{\mathcal{E}}{M}\right)^j + R\left(\frac{\mathcal{E}}{M}\right)$$

où $R(s)$ est nul pour un ordre grand que J au point $s = 0$, avec C_j sont des constantes.

En développant T_3 on obtient :

$$\begin{aligned} T_3 &= M^{-n}\phi(\xi)\left[\sum_{j=1}^{J} C_j\left(\frac{\mathcal{E}}{M}\right)^j + R\left(\frac{\mathcal{E}}{M}\right)\right] \\ &= \phi(\xi)\left[\sum_{j=1}^{J} C_j M^{-n-j}\mathcal{E}^j + M^{-n}R\left(\frac{\mathcal{E}}{M}\right)\right] \end{aligned}$$

Pour J assez grand le terme $M^{-n}R\left(\dfrac{\mathcal{E}}{M}\right) \in \mathcal{C}^\infty(\partial D\times\partial D)$ car $\left|\dfrac{\mathcal{E}}{M}\right| \lesssim \rho$, avec $\mathcal{E}$ et M sont de classe $\mathcal{C}^\infty(\partial D\times\partial D)$; de plus ce terme est inclus dans E_m.

Donc le problème se réduit à l'étude du terme

$$M^{-n-j}\mathcal{E}^j \qquad \text{avec } \ j \text{ fixé} \tag{4.34}$$

par coordonnées normales Θ_z

$$\mathcal{E}^j(z,\xi) = \sum_{i=1}^{I} b_i(\xi)\, p_i(\zeta,t) + R(z,\xi) \tag{4.35}$$

où p_i un polynôme homogène de degré i (au sens de H_{n-1}) et $b_i \in \mathcal{C}^\infty$.

Le reste $R(z,\xi)$ est nul pour un ordre grand (supérieur) au point $z=\xi$, et la formule **4.34** devient

$$M^{-n-j}\mathcal{E}^j(z,\xi) = \sum_{i=1}^{I} M^{-n-j} b_i(\xi)\, p_i(\zeta,t) + M^{-n-j}R(z,\xi)$$

Pour $I = I(m,j)$ assez grand, le terme $M^{-n-j}R(z,\xi)$ est inclus dans l'erreur E_m; les p_i ayant des coefficients b_i non nul pour $i \geq 2j+1$ car $|\mathcal{E}^j \ \ | \lesssim \rho^{3j}$ où p_i cités dans la formule **4.35**.

On doit prendre $i \geq 3j = 2j + j \geq 2j+1$; donc M homogène de degré 2 d'ou il en résulte $M^{-n-j}\ p_i(\zeta,t)$ est homogène de degré $\geq 2n-2j+2j+1 = 2n+1$.

Donc T_3 est de type 1.

■

L'opérateur $\mathbb{K}$ associé au noyau $K(z,\xi)$

On définit l'opérateur $\mathbb{K}$ par la relation

$$\mathbb{K}u(z) = \int_{\xi\in\partial D}\left[E(z,\xi) - \overline{E}(\xi,z)\right] u(\xi)d\sigma_\xi, \quad z\in\partial D$$

On dit que $\mathbb{K}$ est un opérateur de type 1 associé au noyau de type 1 (d'après [7])

L'opérateur $\mathbb{K}$ jouit des propriétés suivantes, et dont les démonstrations se trouvent dans G.B Folland et E.M Stein [7]

Théorème 4.11 $\mathbb{K}$ *est un opérateur borné de* L^p *dans* $L^p, 1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 4.12 $\mathbb{K}$ *est un opérateur borné de* S_k^p *dans* $S_{k+1}^p, k \in \mathbb{N} \quad 1 < p < \infty$ *où* $S_k^p(D) = \{u \in L^p(D) : \forall \alpha, |\alpha| < k, \exists v_\alpha \in L^p(D), v_\alpha = \partial^\alpha u\}$ *l'espace de Sobolev .*

Théorème 4.13 *Si* $\mathbb{K}u = v$ *et* $u \in \Gamma_\beta$, *alors* $v \in \Gamma_{\beta+1}, 0 < \beta < \infty$ *où* Γ_β *désigne l'espace de Lipschitz.*

Si $u \in L^p$, $p > 2n$ alors $v \in \Gamma_\beta, \beta = 1 - 2n/p$.
En particulier, $\mathbb{K}$ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty(\partial D)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\partial D)$.

L'opérateur $\mathbb{E}_\varepsilon$ associé au noyau $E(z,\xi)$

On définit l'opérateur $\mathbb{E}_\varepsilon$ par :

$$\mathbb{E}_\epsilon u(z) = \int_{\xi \in \partial D,\ |g(z,\xi)| > \epsilon} E(z,\xi) u(\xi) d\sigma_\xi, \quad z \in \partial D$$

$\mathbb{E}_\varepsilon$ est un opérateur singulier associé au noyau singulier $E(z,\xi)$ d'après [7]
Les théorèmes qui suivent donnent les propriétés de $\mathbb{E}_\epsilon$.

Théorème 4.14 *Pour tout* p, $1 < p < \infty$ *l'opérateurs* $\mathbb{E}_\epsilon$ *est uniformément borné dans* L^p*et converge fortement dans* L^p *si* $\epsilon \longrightarrow 0$ *(c'est-à-dire* $\mathbb{E}_\epsilon u$ *est de Cauchy dans* L^p *pour tout* $u \in L^p$*). L'opérateur de limite* $\mathbb{E} : L^p \longrightarrow L^p$*est borné.*

Preuve. On considère la fonction $u \in L^p, 1 \leq p \leq \infty$ alors :

$$\mathbb{E}_\epsilon u(z) = \int_{\xi \in \partial D} E_\varepsilon(z,\xi) u(\xi) d\sigma_\xi, \quad z \in \partial D$$

où $E_\varepsilon(z,\xi)$ est défini par le lemme 15.8 [7] comme suit :

$$\begin{cases} E_\varepsilon(z,\xi) = E(z,\xi) \text{ si } \rho(z,\xi) > \epsilon \\ \quad E_\varepsilon(z,\xi) = 0 \qquad\quad \text{si non} \end{cases}$$

donc $E_\varepsilon(z,\xi)$ est une fonction bornée à support compact, et d'après le lemme 15.5 [7] l'opérateur $\mathbb{E}_\epsilon$ est de Cauchy dans $L^p, 1 \leq p \leq \infty$.
Il reste à montrer que l'opérateur $\mathbb{E}_\epsilon$ est borné dans L^p uniformément en ϵ; pour $1 < p < \infty$, pour cela $p = 2$ le lemme 15.6 [7] montre que l'opérateur $\mathbb{E}_\epsilon$ est uniformément borné dans L^2 i.e pour $p = 2$, et les lemmes 15.8 [7] et 15.9 [7] donnent : l'opérateur $\mathbb{E}_\epsilon u$ est borné pour toute fonction $u \in L^p$ si $1 < p \leq 2$.

Maintenant, on considère la fonction adjointe de la fonction E définie par :

$$E^*(z,\xi) = \overline{E}(\xi, z)$$

E^* est un noyau singulier, son opérateur associé

$$\mathbb{E}_\varepsilon^* u(z) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\xi\in\partial D} E^*(z,\xi) u(\xi)\, d\sigma_\xi, \qquad z \in \partial D$$

est borné dans $L^p, 1 \leq p \leq 2$ uniformément en ε

mais

$$\int_{z\in\partial D} (\mathbb{E}_\varepsilon u)(z)\overline{g}(z) d\sigma_z = \int_{z\in\partial D} u(z)\overline{(\mathbb{E}_\varepsilon^* g)(z)} d\sigma_z$$

et d'après l'inégalité de Hölder $\mathbb{E}_\varepsilon$ est un opérateur borné dans L^p, pour $2 \leq p < \infty$, d'où le lemme. ■

Théorème 4.15 $\mathbb{E}$ *est un opérateur borné de S_k^p dans S_k^p et de Γ_β dans Γ_β ,$1 < p < \infty, k \in \mathbb{N}^*$,$0 < \beta < \infty$.*

En particulier, $\mathbb{E}$ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty(\partial D)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\partial D)$.

Lemme 4.16 *La convergence uniforme en $p \in \partial D$ donne*

$$\alpha(p,\epsilon) = \int_{\xi\in\partial D,\ |\overline{g}(\xi,p)|>\epsilon} E(p,\xi) d\sigma_\xi \longrightarrow \frac{1}{2}$$

Preuve. La formule dans le lemme 4.16 devient :

$$B(p,\epsilon) = \lim_{\delta\to 0} \int_{\xi\in\partial D,\ |\overline{g}(\xi,p)|<\epsilon} E(p+\nu\delta,\xi) d\sigma_\xi \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

où $\delta > 0$ et ν la normale intérieure de D au point p telle que : $|\nu| = \dfrac{1}{|\nabla\lambda(p)|}$; et λ la fonction définissante de D.

Soit $z = p + \nu\delta$; d'après le théorème 4.7 (c, (d et le lemme d'osculation on a :

$$g(z,\xi) = \overline{g}(\xi,p) + \delta + \mathcal{E} = \tau + it + \delta + \mathcal{E} = |\zeta|^2 + it + \delta + \mathcal{E}$$

et comme

$$g(z,\xi) = |\zeta|^2 + it + \mathcal{E}$$

alors : on peut remplacer l'ensemble $\{\xi \in \partial D, |g(\xi,p)| < \epsilon\}$ par $\left\{\zeta; \tau = |\zeta|^2, \left||\zeta|^2 + it\right| < \varepsilon\right\}$; donc la fonction définissante λ sera définie dans les nouvelles coordonnées $|\zeta|^2 - \tau$.

et comme le numérateur de E est

$$N(z,\xi) = \frac{(n-1)!}{\pi^n} 2^{n-2} \left|\nabla\lambda(\xi)\right| L\left(\xi\right) + e(z,\xi)$$

on a

$$B(p,\epsilon) = \lim_{\delta\to 0} \frac{(n-1)!}{\pi^n} 2^{n-2} \int_{\left||\zeta|^2+it\right|<\epsilon} \left[|\zeta|^2 + it + \delta\right]^{-n} dV + \mathcal{E}$$

La fonction $(\zeta,t) \to \left(\sqrt{\delta}\zeta, \delta t\right)$ donne :

$$\lim_{\epsilon\to 0} B(p,\epsilon) = \frac{(n-1)!}{\pi^n} 2^{n-2} \lim_{R\to\infty} \int_{\left||\zeta|^2+it\right|<R} \left[|\zeta|^2 + it + 1\right]^{-n} dV$$

et d'après [15] on a :

$$\frac{(n-1)!}{\pi^n} 2^{n-2} \lim_{R\to\infty} \int_{\left||\zeta|^2+it\right|<R} \left[|\zeta|^2 + it + 1\right]^{-n} dV = \frac{1}{2}$$

d'où le lemme. ■

Les lemmes qui suivent sont utiles pour la suite :

Lemme 4.17 *Soient $p \in U \subset \partial D$, et les boules*
$B_1(p,\epsilon) = \{\xi \in \partial D, \rho^2(\xi,p) < \epsilon\}$
$B_2(p,\epsilon) = \{\xi \in \partial D, \rho^2(p,\xi) < \epsilon\}$
$B_3(p,\epsilon) = \{\xi \in \partial D, |g(\xi,p)| < \epsilon\}$
$B_4(p,\epsilon) = \{\xi \in \partial D, |g(p,\xi)| < \epsilon\}$
alors on a, pour tout i,j

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{B_i(p,\epsilon)-B_j(p,\epsilon)} (|E(\xi,p)| + |E(p,\xi)|) d\sigma_\xi \longrightarrow 0 \quad \textit{uniformément en } p \in \partial D \qquad \textbf{(4.36)}$$

Lemme 4.18 *Soient $B_i(\xi,\epsilon)$ les boules du lemme 4.17, $i = 1,2,3,4$, pour tout i,j on a*

$$\mathbb{D}_\epsilon u(z) = \int_{\xi\in B_i(z,\epsilon)-B_j(z,\epsilon)} |E(z,\xi)|\, u(\xi) d\sigma_\xi \qquad z \in \partial D \qquad \textbf{(4.37)}$$

alors $\mathbb{D}_\epsilon$ est borné dans $L^p, 1 \le p \le \infty$ et sa norme $\|\mathbb{D}_\epsilon\|$ est un opérateur de L^p dans L^p tel que $\|D_\epsilon\| \longrightarrow 0$ si $\epsilon \to 0$.

Remarque 5 *On aura le même résultat si on remplace $g(z,\xi)$ par $\overline{g}(\xi,z)$, $\rho(z,\xi)$ ou $\rho(\xi,z)$.*

4.3 Le projecteur de Szegö $\mathbb{S}$ et le projecteur $\mathbb{H}$

Dans cette partie on va écrire la formule du projecteur $\mathbb{H}$ associé au noyau $H = E + C$, et la formule $\mathbb{S}$ associé au noyau S, et on va exprimer S en fonction de H .
On sait que la fonction $C(z,\xi) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{D} \times \partial D)$, et la singularité de $H(z,\xi)$ est exactement la même que celle de $E(z,\xi)$ au point $z = \xi$.

4.3.1 Le projecteur de Szegö $\mathbb{S}$

Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $\mathcal{C}^\infty$. Le projecteur de Szegö est par définition le projecteur orthogonal $\mathbb{S}$ de $L^2(\partial D, d\sigma)$ sur $\mathcal{H}^2(\partial D)$. On cherche ici à montrer que $\mathbb{S}$ est, en un certain sens, associé à un noyau S. Donc

$$\mathbb{S} : \; L^2(\partial D, d\sigma) \longrightarrow \; \mathcal{H}^2(\partial D) \tag{4.38}$$

où $\mathcal{H}^2(\partial D)$ est un sous espace fermé de $L^2(\partial D)$, c'est l'ensemble des fonctions $u \in L^2(\partial D, d\sigma)$ tel qu'il existe une fonction holomorphe U (nécessairement unique) dans D vérifiant :

$$U(\xi + \epsilon\nu(\xi)) \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} u(\xi) \text{ dans } L^2(\partial D, d\sigma_\xi), \quad \xi \in \partial D \tag{4.39}$$

où $\nu(\xi)$ est la normale intérieure unitaire à ∂D au point ξ. Dans la suite

$$\text{Nous identifierons souvent } \upsilon \in \mathcal{H}^2(\partial D) \text{ avec son extension unique } V. \tag{4.40}$$

Le noyau de Szegö $S(z,\xi), z \in D, \, \xi \in \partial D$ est caractérisé par :
– quelque soit $z \in D$

$$\overline{S}(\xi, z) \in \mathcal{H}^2(\partial D) \tag{4.41}$$

– pour tout $u \in L^2(\partial D, \mathrm{d}\,\sigma)$

$$\mathbb{S}u(z) = \int_{\xi \in \partial D} S(z,\xi)u(\xi)d\sigma_\xi \qquad\qquad z \in D \tag{4.42}$$

– de plus $\mathbb{S}$ est orthogonal c'est-à-dire

$$\mathbb{S}^* = \mathbb{S} \tag{4.43}$$

et

$$S(z,\xi) = \overline{S}(\xi, z) \qquad\qquad \xi, z \in D \tag{4.44}$$

4.3.2 Le projecteur $\mathbb{H}$

Pour tout $u \in L^2(\partial D, d\sigma)$ la fonction

$$\mu(z) = \int_{\xi \in \partial D} H(z,\xi) u(\xi) d\sigma_\xi \qquad z \in D \tag{4.45}$$

est holomorphe dans D car $H(z,\xi)$ est holomorphe en z.

L'existence du projecteur $\mathbb{H}$ est donné par le théorème suivant :

Théorème 4.19

a) *Il existe une fonction unique* $\mathbb{H}u \in \mathcal{H}^2(\partial D)$ *telle que* $\mu(\xi + \epsilon v(\xi)) \longrightarrow \mathbb{H}u(\xi)$ *dans* $L^2(\partial D, d\sigma)$ *si* $\epsilon \longrightarrow 0$.

b) *L'application* $\mathbb{H} : L^2(\partial D, d\sigma) \longrightarrow \mathcal{H}^2(\partial D)$ *est un opérateur linéaire borné dans la norme* $L^2(\partial D, d\sigma)$, *et* $\mathbb{H}^2 = \mathbb{H}$.

c) *Si* $u \in \mathcal{C}^\infty(\partial D)$ *alors* $\mathbb{H}u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{D})$.

d) $\mathbb{H}$ *a une représentation intégrable singulière*

$$\mathbb{H}u(z) = \frac{1}{2}u(z) + vp. \int_{\xi \in \partial D} H(z,\xi) u(\xi) d\sigma_\xi \tag{4.46}$$

où vp. (la valeur principale de Cauchy) signifie la $\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{H}_\epsilon u$ *au sens de la norme* $L^2(\partial D, d\sigma)$ *et*

$$\mathbb{H}_\epsilon u(z) = \int_{\xi \in \partial D, |\overline{g}(\xi,z)| > \varepsilon} H(z,\xi) u(\xi) d\sigma_\xi \qquad z \in \partial D \tag{4.47}$$

Remarque 6 *L'existence de la limite de* $\mathbb{H}_\epsilon u$ *quand* $\epsilon \to 0$ *est assurée par le théorème 4.14*

Preuve.

Premier cas :

- Supposons que $u \in \mathcal{C}^\infty(\partial D)$, d'après **4.45** on a la fonction holomorphe

$$\mu(z) = \int_{\xi \in \partial D} H(z,\xi) u(\xi) d\sigma_\xi \qquad z \in D$$

donc μ a une extension continue μ à $\overline{D}$ dont la restriction sur le bord ∂D est

$$\mu(z) = u(z) + \int_{\xi \in \partial D} H(z,\xi) \left(u(\xi) - u(z)\right) d\sigma_\xi \qquad z \in \partial D \tag{4.48}$$

qui est déduite de la propriété reproduisante de H, et par application de la formule **4.45** à la variable $z + \delta\nu(z)$ avec δ tend vers zéro. Donc (a) est vérifié en prenant $\mathbb{H}u = \mu$ sur ∂D.

Appliquons le lemme 4.16 sur la formule **4.48**, on obtient :

$$\mathbb{H}u(z) = \mu(z) = \frac{1}{2}u(z) + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\xi \in \partial D, |g(\xi,z)| > \epsilon} H(z,\xi)u(\xi)d\sigma_\xi \ , \qquad z \in \partial D$$

avec la limite uniforme en $\xi \in \partial D$, donc (d) est prouvé si $u \in \mathcal{C}^\infty$.

Par le théorème 4.15 on déduit que la fonction $\mathbb{H}u \in \mathcal{C}^\infty(\partial D)$, de plus $\mathbb{H}u$ est harmonique dans D selon **4.40**, ce qui montre que $\mathbb{H}u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{D})$. Donc (c) est prouvé.

Deuxième cas :

On généralise les résultats du théorème 4.19 pour tout $u \in L^2(\partial D)$, en utilisant le fait que l'espace $\mathcal{C}^\infty(\partial D)$ soit dense dans $L^2(\partial D)$. En effet

• Si $u \in L^2(\partial D, d\sigma)$ et $u_j \in \mathcal{C}^\infty(\partial D)$, alors $u_j \longrightarrow u$ dans $L^2(\partial D, d\sigma)$, où $\mathbb{H}u_j$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\partial D, d\sigma)$; notons $\mathbb{H}u$ sa limite, et d'après le lemme suivant :

Lemme 4.20 *Si h est harmonique dans un domaine lisse D et continue dans $\overline{D}$ alors :*
$\|h\,(\xi + \epsilon v(\xi))\| \leq C\,\|h\|$ où C est une constante indépendante de h et ϵ.

D'où $\|\mu(\xi + \epsilon\nu(\xi))\| \leq \mathrm{C}\,\|u\|$ pour tout $u \in L^2(\partial D)$, sachant que $H(z,\xi) \in \mathcal{C}^\infty(Q \times \partial D)$ et Q un compact de D, et par l'inégalité triangulaire (a) est vérifié.

De la propriété reproduisante de H et, si $v \in \mathcal{H}^2(\partial D)$ et V son extension holomorphe, on a

$$v(z) = V(z) = \int_{\xi \in \partial D} H(z,\xi)v(\xi)d\sigma_\xi \ , \qquad z \in D$$

Le théorème 4.4 donne $\mathbb{H}v = v$ et $\mathbb{H}^2 = \mathbb{H}$, d'où (b) est vérifié.

Finalement (d) est vérifié car dans la formule **4.46**, les opérateurs sont bornés dans $L^2(\partial D, d\sigma)$, car ce sont de classe $\mathcal{C}^\infty(\partial D)$. ■

4.3.3 L'opérateur adjoint $\mathbb{H}^*$

Pour donner la formule reliant le noyau H et le noyau de Szegö S, on doit passer par l'opérateur adjoint $\mathbb{H}^*$ associé au noyau $\overline{H}$.

Notons que :

$$A(z,\xi) = \overline{H}(\xi,z) - H(z,\xi) \qquad \xi, z \in \partial D, \xi \neq z \qquad \textbf{(4.49)}$$

donc

$$\begin{aligned} A(z,\xi) &= \overline{E}(\xi,z) + \overline{C}(\xi,z) - E(z,\xi) - C(z,\xi) \\ &= \overline{E}(\xi,z) - E(z,\xi) + \overline{C}(\xi,z) - C(z,\xi) \\ &= -K(z,\xi) + \overline{C}(\xi,z) - C(z,\xi) \end{aligned}$$

avec

$\overline{E}(\xi,z) - E(z,\xi) = -K(z,\xi)$ et $C(z,\xi) \in \mathcal{C}^\infty(\partial D \times \partial D)$.

Par suite, comme $|K(z,\xi)| \lesssim [\rho(z,\xi)]^{2n+\epsilon}$ on a

$$\int_{\xi\in\partial D} |A(z,\xi)|\, d\sigma_\xi \;\leq \gamma_1 \quad \text{avec } \gamma_1 \text{ constante indépendante de } z \in \partial D \tag{4.50}$$

et

$$\int_{z\in\partial D} |A(z,\xi)|\, d\sigma_z \;\leq \gamma_2 \quad \text{avec } \gamma_2 \text{ constante indépendante de } \xi \in \partial D \tag{4.51}$$

Lemme 4.21 *Pour tout $u \in L^2(\partial D)$, on définit l'opérateur Γ_ϵ par :*

$$\Gamma_\epsilon u(z) = \int_{\xi\in\partial D, |g(z,\xi)|>\epsilon} \overline{H}(\xi,z)u(\xi)d\sigma_\xi \qquad z \in \partial D \tag{4.52}$$

Alors $\Gamma_\epsilon u(z)$ converge dans L^2 vers une fonction Γu , et $\Gamma : u \longrightarrow \Gamma u$ est un opérateur borné dans L^2.

Si $u \in \mathcal{C}^\infty(\partial D)$ alors $\Gamma_\epsilon u$ converge uniformément.

Preuve. D'après le lemme 4.17 et comme $A(z,\xi)$ définit un opérateur borné dans L^2 (cf.[7]), en remplaçant $\overline{H}$ par H dans la formule **4.47**, le lemme sera prouvé. ■

$\mathbb{H}^*$ est l'opérateur adjoint de $\mathbb{H}$ (espace hilbertien) défini par :

$$\langle \mathbb{H}u, v\rangle = \langle u, \mathbb{H}^* v\rangle \text{ pour tout } u, v \in L^2(\partial D, d\sigma)$$

Comme $\mathbb{H}$ est un opérateur borné de $L^2(\partial D, d\sigma) \longrightarrow L^2(\partial D, d\sigma)$ $\mathbb{H}^*$ l'est aussi.

Théorème 4.22 *L'opérateur $\mathbb{H}^*$ est défini dans $L^2(\partial D, d\sigma)$ par :*

$$\mathbb{H}^* = \mathbb{H} + \mathbb{A} \tag{4.53}$$

où

$$\mathbb{A}u(z) = \int_{\xi\in\partial D} A(z,\xi)u(\xi)d\sigma_\xi \qquad z \in \partial D \tag{4.54}$$

et pour tout $u \in L^2(\partial D, d\sigma)$

$$\mathbb{H}^* u(z) = \frac{1}{2}u(z) + vp.\int_{\xi\in\partial D} \overline{H}(z,\xi)u(\xi)d\sigma_\xi \qquad z \in \partial D \tag{4.55}$$

Preuve. Premier cas :

Si $u,\, v \in \mathcal{C}^\infty(\partial D)$ alors

$$\langle \mathbb{H}_\epsilon u, v\rangle = \langle u, \Gamma_\epsilon v\rangle \tag{4.56}$$

avec $\mathbb{H}_\epsilon^* = \Gamma_\epsilon$ par suite,

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{2}u, v\right\rangle + \langle \mathbb{H}_\epsilon u, v\rangle &= \left\langle \frac{1}{2}u, v\right\rangle + \langle u, \Gamma_\epsilon v\rangle \\ &= \left\langle u, \frac{1}{2}v\right\rangle + \langle u, \Gamma_\epsilon v\rangle\end{aligned}$$

On fait tendre ϵ vers zéro, on obtient :

$$\langle \mathbb{H}u, v\rangle = \left\langle u, \frac{1}{2}v\right\rangle + \langle u, \Gamma v\rangle \tag{4.57}$$

et comme $\langle \mathbb{H}u, v\rangle = \langle u, \mathbb{H}^* v\rangle$ on a :

$$\langle u, \mathbb{H}^* v\rangle = \left\langle u, \frac{1}{2}v\right\rangle + \langle u, \Gamma v\rangle$$

d'où **4.55** valable pour $u \in \mathcal{C}^\infty(\partial D)$.

Deuxième cas :

Si $u \in L^2(\partial D, d\sigma)$, les opérateurs $\mathbb{H}^*, \mathbb{H}, \mathbb{A}$ et Γ sont bornés et comme $\overline{\mathcal{C}^\infty(\partial D)} = L^2(\partial D)$ le théorème est prouvé. ∎

Remarque 7 *L'opérateur $\mathbb{H}$ est borné, en effet :*
pour $u \in \mathcal{C}^\infty(\partial D), \mathbb{H}u \in \mathcal{C}^\infty(\partial D)$ (d'après le théorème 4.19).
Et pour tout

$$\begin{aligned}\|\mathbb{H}u\|^2 &= \langle \mathbb{H}u, \mathbb{H}u\rangle \\ &= \langle u, \mathbb{H}^*\mathbb{H}u\rangle \\ &= \langle u, (\mathbb{H}+\mathbb{A})\,\mathbb{H}u\rangle \leq \|u\| \left(\left\|\mathbb{H}^2 u\right\| + \|\mathbb{A}\|\,\|\mathbb{H}u\|\right) = \|u\|\,\|\mathbb{H}u\|\,(\mathbf{1}+\|\mathbb{A}\|)\end{aligned}$$

et par suite $\mathbb{H}$ est un opérateur borné dans L^2, avec la norme $\|\mathbb{H}\| \leq \mathbf{1}+\|\mathbb{A}\|$ et l'espace $\mathcal{C}^\infty(\partial D)$ dense dans $L^2(\partial D)$.

4.3.4 Formule intégrale reliant $\mathbb{S}$ et $\mathbb{H}$

L'idée centrale introduite par N. Kerzman est de pouvoir retrouver le projecteur orthogonal $\mathbb{S}$ à partir du projecteur oblique $\mathbb{H}$ (qui est connu explicitement). Comme $\mathbb{S}$ et $\mathbb{H}$ coïncident avec l'application identique sur $\mathcal{H}^2(\partial D)$, on a en effet

$$\mathbb{SH} = \mathbb{H} \quad (\mathbf{4.58})$$

$$\mathbb{HS} = \mathbb{S} \quad (\mathbf{4.59})$$

Prenons les adjoints dans la première et la seconde égalité. Comme $\mathbb{S}^*= \mathbb{S}$, on trouve

$$\mathbb{H}^*\mathbb{S} = \mathbb{H}^* \quad (\mathbf{4.60})$$

$$\mathbb{SH}^*= \mathbb{S} \quad (\mathbf{4.61})$$

Soustrayons maintenant la première égalité et introduisons l'opérateur $\mathbb{A} = \mathbb{H}^*-\mathbb{H}$
Il vient

$$\mathbb{SA} = \mathbb{SH}^*-\mathbb{SH} =\mathbb{S} - \mathbb{H} \quad (\mathbf{4.62})$$

soit encore

$$\mathbb{S}(\mathbf{1} - \mathbb{A}) = \mathbb{H} \quad (\mathbf{4.63})$$

où $\mathbf{1}$ est l'opérateur identité sur $L^2(\partial D, d\sigma)$.

Lemme 4.23 $\mathbb{A} : L^2(\partial D) \to L^2(\partial D)$ *est un opérateur compact et* $1 - \mathbb{A}$ *est bijectif.*

Preuve. D'après le théorème 4.12 $\mathbb{A}$ est un opérateur borné de $L^2(\partial D)$ dans $S_1^2 \subset L^2_{\frac{1}{2}}$, avec l'inclusion est borné dans l'espace de Sobolev usuel $L^2_{\frac{1}{2}}$ (voir [7]). Le lemme de Rellich montre que $\mathbb{A}$ est un opérateur compact, de plus la décomposition spectrale de l'opérateur compact auto-adjoint $i\mathbb{A}$ montre que $1-\mathbb{A}$ est injectif, et d'après le théorème (Alternative de Fredholm) $1 - \mathbb{A}$ est bijectif, ce qui prouve le lemme. ■
Le lemme montre qu'on peut calculer $\mathbb{S}$ à partir de $\mathbb{H}$ par la formule

$$\mathbb{S} = \mathbb{H}(\mathbf{1} - \mathbb{A})^{-1} \quad (\mathbf{4.64})$$

D'autre part, l'itération de **4.62** donne

$$\mathbb{S} = \mathbb{H} + \mathbb{HA} + \mathbb{HA}^2+...+\mathbb{HA}^k+\mathbb{SA}^{k+1} \quad (\mathbf{4.65})$$

Prenons les adjoints dans l'égalété **4.65**. Comme $\mathbb{H}^*= \mathbb{H}+\mathbb{A}$, $\mathbb{A}^*= -\mathbb{A}$, et $\mathbb{S}^*= \mathbb{S}$, on trouve

$$\mathbb{S} = (\mathbb{H}+\mathbb{A}) - \mathbb{A}(\mathbb{H}+\mathbb{A}) + \mathbb{A}^2(\mathbb{H}+\mathbb{A}) + ... + (-1)^k \mathbb{A}^k(\mathbb{H}+\mathbb{A}) + (-1)^{k+1}\mathbb{A}^{k+1}\mathbb{S} \qquad (\mathbf{4.66})$$

Le reste $\mathbb{R}_{k+1} = \mathbb{S}\mathbb{A}^{k+1}$dans la relation **4.65** est le même que celui dans **4.66** et

$$\mathbb{S} : S_q^2 \longrightarrow S_q^2 \qquad q \in \mathbb{N} \qquad (\mathbf{4.67})$$

est un opérateur borné (on prend $k = p$ et on applique les théorèmes 4.11 et 4.12), et comme $\mathbb{A}$ est un opérateur compact alors, le reste $\mathbb{R}_{k+1} : L^2 \longmapsto S_{k+1}^2$ est un opérateur borné.

Maintenant, on peut résumer la relation entre $\mathbb{S}$ et $\mathbb{H}$ dans le théorème suivant :

Théorème 4.24 *Pour $D \subset \mathbb{C}^n$ un domaine strictement pseudo-convexe, le projecteur de Szegö $\mathbb{S}$ et le projecteur $\mathbb{H}$ associé au noyau $H = E + C$ sont reliés par :*

$$\mathbb{S} = \mathbb{H}(1 - \mathbb{A})^{-1} \qquad (\mathbf{4.68})$$

et

$$\mathbb{S} = \mathbb{H} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{H}\mathbb{A}^j \qquad (\mathbf{4.69})$$

où le reste

$$\mathbb{R}_{k+1} = \mathbb{S} - \mathbb{H} - \sum_{j=1}^{n} \mathbb{H}\mathbb{A}^j$$

est un opérateur borné de $L^2(\partial D, d\sigma)$ dans $\mathcal{C}^{\alpha(k)}(\partial D)$ avec $\alpha(k) \longrightarrow \infty$ si $k \longrightarrow \infty$ et $\mathbb{A}$ est un opérateur compact dans $L^2(\partial D, d\sigma)$ défini par :

$$\mathbb{A}u(z) = \int_{\xi\in\partial D} \left[\overline{H}(\xi, z) - H(z, \xi)\right] u(\xi) d\sigma_\xi \qquad z \in \partial D$$

En fonction des noyaux explicites $E(z, \xi)$ et $K(z, \xi) = E(z, \xi) - \overline{E}(\xi, z)$

$$\mathbb{S} = \mathbb{E} + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}(-\mathbb{K})^j \qquad (\mathbf{4.70})$$

Preuve. On a $\mathbb{R}_{k+1} : L^2 \longrightarrow S_{k+1}^2 \subset$ espace de Sobolev $L^2_{(k+1)/2} \subset \mathcal{C}^{\alpha(k)}$, des opérateurs bornés. En effet, comme $\mathbb{H} = \mathbb{E} + C$ et C un opérateur associé au noyau $C(z, \xi) \in \mathcal{C}^\infty(\partial D \times \partial D)$, (idem pour $\mathbb{A}$ et $-\mathbb{K}$) donc l'expression **4.70** résulte de **4.69**. ∎

4.3.5 Formule reliant les noyaux S et H

On veut obtenir le noyau de Szegö $S(z,\xi)$ à partir de la projection $\mathbb{S}$:

Lemme 4.25 *Soit $p(z,\xi)$, $z \in D$, $\xi \in \partial D$ le noyau de Poisson, pour n'importe quel domaine $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ lisse on a :*

$$S(z,\xi) = \mathbb{S}p(z,\xi) \qquad z \in D \tag{4.71}$$

où S en fonction de ξ, et p est une fonction à valeurs réelles.

Preuve. Si $u \in \mathcal{H}^2(\partial D)$, alors u est harmonique et

$$u(z) = \int_{\xi\in\partial D} p(z,\xi)u(\xi)d\sigma_\xi = \langle u(.), p(z,.)\rangle = \langle u(.), \mathbb{S}p(z,.)\rangle\,, \quad z \in D$$

Mais,

$$u(z) = \int_{\xi\in\partial D} S(z,\xi)u(\xi)d\sigma = \left\langle u(.), \overline{S}(z,.)\right\rangle \quad z \in D$$

Par l'unicité

$$\begin{aligned}\overline{S}(z,.) &= \mathbb{S}p(z,.)\\ &= S(z,.)\end{aligned}$$

■

Corollaire 4.1 *Pour chaque $z \in D$, D un domaine strictement pseudo-convexe, le noyau $S(z,\xi)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en ξ .*

Preuve. Comme

$$\mathbb{S}p = S$$

avec

$$p(z,.) \in \mathcal{C}^\infty(\partial D)$$

et

$$\mathbb{S} : \mathcal{C}^\infty(\partial D) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\partial D)$$

et d'après **4.67**, $S^2_{2q} \subset L^2_q$, le corollaire est prouvé. ■

D'où le résultat essentiel suivant :

Théorème 4.26 *Soient $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domaine strictement pseudo-convexe, $E(z,\xi)$, $z \in D$, $\xi \in \partial D$ le noyau explicite associé à D, et $K(z,\xi) = E(z,\xi) - \overline{E}(\xi,z)$ pour tout $\xi, z \in \partial D$ et $\xi \neq z$, alors : le noyau de Szegö de D au point $a \in \partial D$, $z \in D$ est donné par :*

$$S(z,a) = E(z,a) + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j E_0 K^{(j)}(z,a) + R_{k+1}(z,a)$$

où

$$R_{k+1}(z,a) \in \mathcal{C}^{\alpha(k)}(\overline{D}) \text{ en } z, \text{ pour chaque } a \in \partial D$$
$$\text{et } \alpha(k) \longrightarrow \infty \text{ si } k \longrightarrow \infty$$

et

$$E_0 K^{(j)}(z,a) = \int_{t_1 \in \partial D} ... \int_{t_j \in \partial D} E(z,t_1) K(t_1,t_2) ... K(t_{j-1},t_j) K(t_j,a) d\sigma(t_1) ... d\sigma(t_j)$$

Preuve. K est absolument intégrable d'après **4.50** et **4.51**. Le théorème de Fubini montre que l'intégral en $t_2, ..., t_j$ est une fonction dans L^1 par rapport à t_1, et $E_0 K^{(j)}(z,a)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ en $z \in D$. Soit $\phi_\epsilon(\xi) \in \mathcal{C}^\infty(\partial D)$ une approximation d'une fonction δ sur ∂D au point a, telle que :

$$\int \phi_\epsilon = 1, \phi_\epsilon \geq 0$$

d'après le corollaire 4.1 on a

$$S(z,a) = \lim_{\epsilon \to 0} \int S(z,a) \phi_\epsilon(\xi) d\sigma_\xi = \lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{S}\phi_\epsilon(z) \tag{4.72}$$

et

Lemme 4.27

$$(\mathbb{A}\phi_\epsilon)(\xi) \longrightarrow A(\xi,a) \text{ dans } L^1(\partial D), \text{ si } \epsilon \longrightarrow 0$$

Donc finalement,
si $k = k(\alpha)$ est grand, alors $\mathbb{S}\mathbb{A}^{k+1}\phi_\epsilon$ converge dans $\mathcal{C}^{\alpha+1}(\partial D)$ vers une fonction $R = \mathbb{S}\mathbb{A}^k(A(\xi,a))$ de classe $\mathcal{C}^{\alpha+1}$ (en utilisant la relation **4.67**, le lemme précédent, et les théorèmes 4.11, 4.12, donc R est harmonique dans D (holomorphe), et $R \in \mathcal{C}^\alpha(\overline{D})$, de plus **4.72** , **4.65** donnent

$$S(z,a) = H(z,a) + \sum_{j=1}^{k} H_0 A^{(j)}(z,a) + R(z)$$

En remplaçant $H(z,a)$ par $E(z,a) + C(z,a)$, et $A(t_1,t_2)$ par $-K(t_1,t_2) + \overline{C}(t_1,t_2) - C(t_1,t_2)$ et on vas entrer le terme C dans le reste R. ∎

Preuve du lemme 4.27. On a

$$|(\mathbb{A}\phi_\epsilon)(\xi) - A(\xi, a)| \leq \int |A(\xi, t) - A(\xi, a)| \, \phi_\epsilon(t) d\sigma_t$$

par suite

$$\|(\mathbb{A}\phi_\epsilon)(\xi) - A(\xi, a)\|_{L^1(\partial D)} \leq \int \phi(t)\phi_\epsilon(t) d\sigma_t$$

avec

$$\phi(t) = \int |A(\xi, t) - A(\xi, a)| \, d\sigma_t$$

mais $\phi(t)$ est continue en t et $\phi(a) = 0$, d'ou : $\|(\mathbb{A}\phi_\epsilon)(\xi) - A(\xi, a)\| \leq \int \phi(t)\phi_\epsilon(t) d\sigma_t = 0$ i.e que : $(\mathbb{A}\phi_\epsilon)(\xi) \longmapsto A(\xi, a)$.

Bibliographie

[1] M.Berger, B.Gostiaux , *Géométrie différentielle : Variétés,Courbes et surfaces* , Presses Universitaires de France 1987.

[2] T.Bouche, *Introduction à la géométrie différentielle des variétés analytiques complexes*, Université Joseph Fourier 1996.

[3] Boutet de Monvel and J.Sjöstrand, *Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö*, Soc. Math. de France. Astérisque 34-35(1976), 123-164.

[4] A.Dufresnoy, C.Laurent-Thiébaut , *Ecole de Printemps d'Analyse Complexe - Rabat (Maroc)*, Mai 2000 .

[5] P.Dolbeaut, *Analyse complexe*, Masson 1990.

[6] C.Fefferman,*The Bergman Kernel and biholomorphic mappings of pseudo-convex domains*, Inventiones Math 26(1974), 1-66.

[7] G.B Folland And E.M.Stein, *Estimates for the $\overline{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group*, Comm Pure App.Math Vol. XXVII(1974), 429-522.

[8] G.M.Henkin,J.Leiterer, *Theory of function on complex manifolds*, Brikhauser-Verlag 1984.

[9] L.Hörmander, *An Introduction to complex Analysis in several variables*, Van Nostrand,Princeton 1966

[10] N.Kerzman, M.Stein, *The Szegö kernel in terms of Cauchy-Fantappié Kernels,* Duke Mathematical Journal Vol 45, No 2 June 1978.

[11] S.G.Krantz, *Function Theory of Several complex Variables*, John Wiley & sons, Inc 1982.

[12] J.Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble 1996.

[13] V.S.Vladimirov, *Les fonctions de plusieurs variables complexe et leur application à la théorie quantique des champs*, Dunod Paris 1967.

[14] J.J.Kohn, *Harmonic integrals on strongly pseudoconvex manifolds*, I and II, Ann. of Math.78(1963),112-148 and 79(1964), 450-472.

[15] A.Koranyi & I.Vagi, *singular integrals on homogeneous spaces and some problems of classical analysis*, Ann.Scuola Norm.Superiore Pisa, Sci. fis.mat. III, Ser.25(1971),575-648.