N° d'ordre : 11/2010-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHECHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
FACULTE DE MATHEMATIQUES

جامعة هواري بومدين للعلوم والتكنولوجيا
U S T H B

MEMOIRE

Présentée pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : Modélisation et Calcul Scientifique en Systèmes Dynamiques

Par

GASMI BOUBEKER

Sujet

TEST DE PAINLEVE ET SES APPLICATIONS

Soutenu le : 25/02/2010, devant le jury composé de :

Mr	R. BEBBOUCHI, Professeur	Président
Mr	A. KESSI, Professeur	Directeur de Thèse
Mr	BETINA, Professeur	Examinateur
Mr	KEBLI, Maître de conférences	Examinateur

Je remercie le Bon Dieu de m’avoir donné le courage d’accomplir ce travail.

Je suis extrêmement reconnaissant à Monsieur le Professeur Kessi A. d’avoir travaillé avec lui et appris beaucoup de choses. J’espère à son tour qu'il reçoit la satisfaction de m’avoir aidé à réaliser ce travail et de me préparer pour devenir un bon chercheur.

Je tiens infiniment à remercier mes parents qui n’ont pas cessé de demander l’aide du Bon Dieu pour moi, sans oublier ma femme qui m’a soutenu au cours de ces années d’étude et qui m’a supporté durant ces dernières années. Particulièrement cette année-ci, j'ai négligé et fait subir à ma petite famille beaucoup de désagréments, je m'en excuse auprès de tous et les remercie pour toute leur patience, sans oublier mes enfants Merièm, Djafer, Sara et mon ami, le jeune Docteur Tewfik Kernane, qui m’a vraiment poussé et encouragé pour préparer la thèse de Magister et qui ma vraiment aidé à la rédiger et qui n’a pas cessé de m’encourager et de proposer son aide. Tout cela restera gravé dans ma mémoire.

Mes remerciement vont aussi a mon frère Omar qui était toujours prêt à n’importe quoi pour m’aider. Sans oublier Mr. Khaled M’hamed-Messaoud pour son encouragement.

Je remercie le Professeur Rachid Bebbouchi de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma thèse.

Ma gratitude va également aux examinateurs. Je suis honoré par la présence dans mon jury du Professeur Betina et du Maître de conférence Kebli.

Je remercie aussi tous les amis et collègues de la faculté de Mathématiques de l'USTHB. Nombre d'entre eux m'ont soutenu, soit par leurs actes, soit par leurs encouragements. Je leur exprime ici toute ma reconnaissance.

Contents

Introduction

Pendant les deux dernières décennies, une classe d'équations d'évolutions non linéaires, connue sous le nom d'équations d'évolution, est devenue d'intérêt croissant pour les physiciens théoriciens ([18, 17]). Elles sont largement répandues comme modèles pour décrire des phénomènes physiques complexes dans divers domaines des sciences. De telles équations ont une solution particulière, qui prend une forme localement perturbée, connue sous le nom de soliton. Les solitons ont des applications dans des secteurs divers de la physique comprenant la dynamique des fluides, le ferromagnétisme, la quantum optique, et les dislocations en cristal. La solution des équations d'évolution est importante pour modéliser le comportement de soliton. Employant fréquemment la méthode "inverse scattering transform", l'application de cette méthode (IST) sur des équations difficiles, n'est pas trivial en analyse. La propriété de Painlevé, est un indicateur puissant pour dire si une équation est résoluble par cette méthode.

Dans l'histoire de l'analyse de Painlevé il y a eu deux grandes écoles principales. L'école de Painlevé ([16].[15]), Fuchs, Poincaré, Chazy ([14]) et Bureau ([13]) intéressée à définir des nouvelles classes de fonctions transcendantes uniformes, solutions générales des EDO dans le plan complexe. Le problème est posé ainsi ([12], p.59) :

"Déterminer toutes les équations différentielles algébriques du premier ordre, puis du second ordre, puis du troisième ordre, etc, dont l'intégrale générale est uniforme."

D'autre part, l'école de Hoyer ([11]) et Kowalevskaya ([10],[9]), était intéressée par le rapport entre l'intégrabilité complète des systèmes mécaniques classiques (dans le sens de Liouville) et les solutions méromorphes.

L'intérêt courant pour la propriété de Painlevé provient de l'observation d'Ablowitz et Segur ([1]), que les réductions des EDP de type soliton (Une EDP non linéaire est dite de classe IST si n'importe quelle solution non triviale de cette EDP peut être trouvée en résolvant une équation intégrale linéaire de forme Gelfand-Levitan-Marchenko), donnent des EDO dont les singularités mobiles sont seulement des pôles. Ils ont essayé de voir la possibilité d'obtenir certaines équations intégrales linéaires par la méthode IST. Ceci les ramène à leur conjecture célèbre ([2].[3]) (ARS) ([8]) : «Toutes les EDO obtenues à partir d'une EDP complètement intégrable par réduction de symétrie possèdent la propriété de Painlevé "; ils ont signifié par cette conjecture que chaque solution devrait être méromorphe. En suivant la technique de Kowalevskaya, en représentant le pôle sous la forme d'une série de Laurent, ils ont présenté un algorithme (essentiellement équivalent à celui de Kowalevskaya [54.55] et Gambier ([4]-411) connu sous le nom de «test de Painlevé», pour donner des conditions nécessaires pour qu'une ED soit de type Painlevé. Plus tard Weiss, Tabor et Carnevale ([6]) (WTC) ont prolongé cet algorithme pour mani-puler directement les EDP non linéaires. Deux modifications peuvent être employées pour simplifier les calculs laborieux impliqués : la première ([5]), si on est seulement intéressé à examiner l'équation, la seconde ([7]), si on s'intéresse à extraire toutes les informations possibles à partir du test de WTC (procédé y compris de troncation).

Chapitre 1

Rappels et Définitions

1 Rappels et Définitions

1.1 Introduction

Les singularités sont les points qui déterminent la limitation du domaine de la validité des développements de Taylor, ainsi leurs études sont obligatoires. Il y a une différence profonde entre les singularités des solutions des équations différentielles selon que ces équations sont linéaires ou non linéaires. Dans le cas linéaire, la solution générale (SG) n'a aucune autre singularité que celles des coefficients de l'équation (voir [20]), et donc elles ne dépendent pas des conditions initiales. Elles sont appelées, points singuliers fixes. Par contre, dans le cas non linéaire, d'autres singularités peuvent surgir; ces singularités dépendent des constantes d'intégrations, et donc dépendent des conditions initiales. Elles sont appelées point singuliers mobiles.

1.1.1 Point singulier

Définition 1 *Un point z_0 est dit point singulier isolé pour une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$ ou de la sphère de Riemann, s'il existe un disque Δ de centre z_0 tel que la fonction soit analytique dans $\Delta - \{z_0\}$.*

$$\text{Dans ce cas : } \forall\ z \in \Delta - \{z_0\},\ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Remarque 2 *Il existe des points singuliers non isolés.*

Exemple 3 *La fonction $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$, dont le dénominateur s'annulle pour tous les points de l'axe réel d'abscisse $x_n = \frac{1}{n\pi}$, n entier.*

Quand n tend vers l'infini, ces points s'accumulent vers $z_0 = 0$, qui est alors un point singulier non isolé

1.1.2 Fonction uniforme

Si à chaque valeur de z correspond une valeur unique de w, nous dirons que $w = f(z)$ est une fonction uniforme de z, ou que $f(z)$ est uniforme.

Exemple 4 *$w = f(z) = z^2$ est une fonction uniforme de z.*

1.1.3 Fonction Multiforme

Si à chaque valeur de z correspondent plusieurs valeurs de w, nous dirons que $w = f(z)$ est une fonction multiforme de z.

Exemple 5 *$w = f(z) = \sqrt{z-a}$ est une "fonction" multiforme car à chaque valeur de z, correspondent deux valeurs de w.*
En effet, pour $z - a = r \cdot \exp(i\theta)$, on a $w_1 = \sqrt{|r|} \cdot \exp(\frac{i\theta}{2})$, pour $z - a = r \cdot \exp(i(\theta + 2\pi))$ on a $w_2 = -\sqrt{|r|} \cdot \exp(\frac{i\theta}{2}) = -w_1$. Dans ce cas on dit que $w = f(z)$ a deux déterminations ou branchements.

1.1.4 Point critique

Un point critique d'une application de la sphère de Riemann sur elle-même est un point singulier, qui est isolé ou non, autour duquel on a au moins deux déterminations qui se permutent. Ces points critiques sont aussi appelés points de branchements ou points de ramification et se répartissent en deux catégories: algébriques et non algébriques.

Remarque 6 *Au voisinages des points de branchement, les applications ne peuvent pas être uniformes.*

1.1.5 Point critique algébrique

Définition 7 *z_0 est dit point algébrique de $f(z)$, si f peut se mettre au voisinage de z_0 sous la forme :*

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0)^{1/n} + a_2(z - z_0)^{2/n} + a_3(z - z_0)^{3/n} + ... + a_m(z - z_0)^{m/n} + ...$$

ou bien

$$f(z) = \frac{a_{-l}}{(z - z_0)^{l/n}} + \frac{a_{-l+1}}{(z - z_0)^{(l-1)/n}} + ... + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)^{1/n}} + a_0 + a_1(z - z_0)^{1/n} + ... + a_m(z - z_0)^{m/n} + ...$$

avec $(n, l) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

1.1.6 Point critique non algébrique (logarithmique ou essentiel)

Définition 8 *Un point z_0 est dit point singulier non algébrique de la fonction multiforme $f(z)$, si $f(z)$ ne peut être considérée comme solution d'une équation algébrique. Il y a deux types de points critiques non algébriques : transcendant et essentiel.*

- Point transcendant, si $lim_{z \to z_0} f(z)$ existe (qu'elle soit finie ou non)
- Point essentiel, si $lim_{z \to z_0} f(z)$ n'existe pas.

Exemple 9 *1. $z_0 = c_1$ est un point de branchement logarithmique de la fonction*

$$f(z) = \ln(z - c_1) + c_2.$$

Point de branchement car:

$$\begin{aligned} w(z) &= \ln(z - c_1) + c_2 \\ &= \ln|z - c_1| + i \arg(z - c_1) + c_2, \end{aligned}$$

après avoir contourné c_1, $w(z)$ devient

$$\begin{aligned} w(z) &= \ln|z-c_1| + i[\arg(z-c_1)+2\pi] + c_2 \\ &= \ln|z-c_1| + i\arg(z-c_1) + c_2 + 2\pi i \\ &= \ln(z-c_1) + c_2 + 2\pi i. \end{aligned}$$

Logarithmique car $\lim_{z\longrightarrow c_1} f(z) = \infty$.
2. $f(z) = \ln(z)$
$z_0 = 0$ *est un point de branchement logarithmique car* $\lim_{z\longrightarrow 0} f(z) = \infty$.
3. $f(z) = \exp(1/z)$
$z_0 = 0$ *est un point singulier essentiel car* $\lim_{z\longrightarrow 0} f(z)$ *n'existe pas.*
4. $f(z) = \sin(\log(z-1))$
$z_0 = 1$ *est un point singulier essentiel car* $\lim_{z\longrightarrow 1} f(z)$ *n'existe pas.*
5. $f(z) = \frac{\log(z)}{z}$, $z_0 = 0$ *est un point de branchement logarithmique car,* $\lim_{z\longrightarrow 0} f(z) = 0$

1.1.7 Uniformisation-coupures

Pour une application multiforme donnée $f(z)$, il existe une méthode classique pour l'uniformiser. Le problème vient du fait que, lorsque z décrit une courbe entourant le point de branchement de $f(z)$ la fonction change de valeur. Si nous utilisons le plan complexe privé d'un certain nombre de demi droites ou segments issus des points critiques, nous évitons de contourner ces points donc $f(z)$ reprend la même valeur lorsque z revient au point de départ. Comme ça nous dirons qu'on a uniformisé $f(z)$. Ces demi droites ou segments sont appelées coupures.

1.1.8 Point singulier fixe et point singulier mobile

point singulier fixe

Définition 10 *Un point est dit point singulier fixe d'une équation différentielle, s'il est un point singulier de sa solution, et ne dépend pas des constantes d'intégration.*

Exemple

1. Les points singuliers d'une EDO linéaire, sont fixes, et les zéros de leurs solutions générales dépendent des constantes d'intégration, c'est pour cette raison qu'ils sont appelés des zéros mobiles (voir [19])

2. L'équation différentielle:
$$z \cdot w'(z) + w(z) = 0 \tag{1}$$

dont l'intégrale générale est :
$$w(z) = \frac{c}{z}$$

admet un pôle simple fixe, qui est $z_0 = 0$

Point singulier mobile

Définition 11 *Un point est dit point singulier mobile d'une équation différentielle s'il est un point singulier de sa solution, et dépend des constantes d'intégration (voir [19]), autrement dit s'il change de position chaque fois qu'on change de condition initiale.*

Exemple 12 *L'équation de Riccati:*

$$w\prime(z) + w^2(z) = 0 \tag{2}$$

dont l'intégrale générale est :

$$w(z) = \frac{1}{(z-c)}$$

admet $z_0 = c$ comme pôle simple mobile, car z_0 dépend de la constante d'intégration c.

Remarque :

1- Les seuls points algébriques non critiques sont les pôles.

2- L'absence de certains types de singularités (par exemple points de branchements mobiles), est un indicateur fort pour dire si l'équation est complètement intégrable.

Théorème I (**Cauchy**, Picard). On considère une EDO d'ordre N, donnée sous la forme canonique:

$$\frac{du^N}{dx^N} = K[x, u, u^{(1)}, ..., u^{(N-1)}]$$

Soit (x_0, u_0) un point dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$, $u_0 = (u_0^1, u_0^2, ..., u_0^N)$. Si K est holomorphe par rapport à ses variables en $v_1 = (x_0, u_0)$ alors :

• il existe une solution u qui vérifie les conditions initiales:

$$u(x_0) = u_0^1, u'(x_0) = u_0^2, ..., u^{(N-1)}(x_0) = u_0^N$$

• elle est unique,

• elle est holomorphe dans un domaine qui contient x_0.

Lemma 13 *(* ***de Poincaré****, Mécanique céleste [27]). On considère une EDO d'ordre N, qui dépend d'un petit paramètre complexe ε, donnée sous la forme canonique:*

$$\frac{du^N}{dx^N} = K[x, u, u^{(1)}, ..., u^{(N-1)}, \varepsilon],\ x \in \mathbb{C},\ u \in \mathbb{C},\ u^{(1)} \in \mathbb{C}, ..., u^{(N-1)} \in \mathbb{C},\ \varepsilon \in \mathbb{C} \tag{3}$$

soit $(x_0, u_0, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}$, $u_0 = (u_0^1, u_0^2, ..., u_0^N)$. Si K est holomorphe par rapport à ses variables en (x_0, u_0, ε), alors la solution du problème de Cauchy

$$u(x_0) = u_0^1, u'(x_0) = u_0^2, ..., u^{(n-1)}(x_0) = u_0^n,$$

existe. Elle est unique et holomorphe dans un domaine qui contient x_0.

On se donne une équation différentielle :

$$E \equiv E[x, u, \varepsilon] = \frac{du^N}{dx^N} = K[x, \varepsilon, u, u, ..., u^{(N-1)}], x \in C, u \in C, \varepsilon \in C \tag{4}$$

cherchons sa solution sous la forme :

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n u^{(n)} \tag{5}$$

après avoir injecté (5) dans (4) on trouve :

$$E = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n E^{(n)}$$

Théorème II (**Poincaré** 1890) *Avec les mêmes hypothèses que le lemme précédent, si la solution générale de (4) est à valeur uniforme* par rapport à ses variables en (x_0, u_0, ε), *à l'exception peut-être en* $\varepsilon = 0$*, alors :*

- *la solution générale est également à valeur uniforme en* $\varepsilon = 0$
- *chaque* $u^{(n)}$ *est à valeur uniforme.*

Preuve : ([29])

1. *Ce théorème demeure valide si on remplace «à valeur uniforme» (version de Painlevé) par «périodique» (version de Poincaré) ou «qui n'a pas de point critique mobile» (version de Bureau).*

2. *Les deux théorèmes (I,II)s'appliquent seulement aux EDO écrites sous la forme canonique de Cauchy.*

Chapitre 2

Résonance Positive dans le Test de Painlevé

2 Résonance Positive

2.1 INTRODUCTION

Le test de Painlevé est une technique bien connue dans les branches de l'analyse mathématique non linéaire. Cette technique indique une interdépendance profonde entre l'intégrabilité d'EDP par la méthode IST et l'intégrabilité de certaines réductions aux équations ordinaires.

Une ED est dite de type Painlevé si les seules singularités mobiles qui peuvent exister dans les solutions de cette ED, sont des pôles non critiques.

2.2 Présentation du Test de Painlevé

On va décrire un algorithme qui nous permet de dire, si une EDO non linéaire (ou un système d'EDO) admet des points de branchements mobiles. La présentation peut être simplifiée, si on considère les deux suppositions suivantes :

1. Le système d'EDO d'ordre n a la forme :

$$\frac{dw_j}{dz} = F_j(z; w_1, w_2, ..., w_n),\ \ j = 1, ...n, \tag{6}$$

   avec chaque F_j analytique en z et rationnelle en ses autres arguments.
   Un cas important est l'EDO d'ordre n qui a la forme :

$$\frac{d^n w}{dz^n} = F(z; w, w^{(1)}, ..., w^{(n-1)}), \tag{7}$$

   avec F analytique en z et rationnelle en ses autres arguments.

2. Au voisinage du point singulier mobile z_0, la fonction solution est équivalent.à :

$$w_j \sim \alpha_j \cdot (z - z_0)^{p_j},\ \text{quand}\ z \longrightarrow z_0 \tag{8}$$

Remarque :
a) Cela n'exclue pas les points de branchements logarithmiques.

b) Une EDO sans point de branchement mobile, pourrait admettre des points singuliers essentiels mobiles. Et donc cette méthode n'identifie pas les points singuliers essentiels, alors elle nous fournit des **conditions nécessaires** pour que l'EDO soit de type Painlevé.

c) La raison pour laquelle une singularité essentielle mobile crée des difficultés est l'inexistence de méthodes pour exprimer des conditions pour qu'elle soit non critique (voir [19]).

d) Ces conditions fournies ne sont pas suffisantes pour dire que l'EDO est de type Painlevé, et donc il faut voir avec la solution de l'EDO.

Dans ce travail on s'intéresse à étudier les EDO non linéaires, en supposant que la fonction devienne infinie aux points singuliers.

2.3 Présentation de l'algorithme

L'algorithme est réparti en trois parties

$1^{ière}$ étape

Partie dominante:

On cherche la solution de (7) sous la forme

$$w \sim \alpha(z-z_0)^p \text{ avec : } Re(p)<0,\ z_0 \text{ arbitraire.} \tag{9}$$

On injecte (9) dans (7), pour certaines valeurs de p, au moins deux termes se simplifient entre eux, et le reste va disparaître en faisant tendre z vers z_0. Alors pour chacun de ces choix possibles de p, les termes qui se simplifient s'appellent les termes dominants (ils ont la plus petite puissance), et l'équation formée par ces termes à partir de l'EDO s'appelle l'équation simplifiée.

En général, l'**équation simplifiée** d'une EDO non linéaire qui vérifiée (7), peut se mettre sous la forme:

$$\begin{aligned}
& a_0(z)\cdot w^{(n)} + \sum_{1\le -pj\le n, j\in\mathbb{N}} a_j(z) w^{(n+pj)} w^j \qquad (10)\\
& + \sum_{0\le k<1-\frac{n}{p}, s\neq -kp, k\in\mathbb{N}, \frac{p-n-kp}{p-n+s}\in\mathbb{N}} [\sum_{s=0}^{n-1} b_{s,k}(z)(w^{(n-s)})^{\frac{p-n-kp}{p-n+s}}\cdot w^k]\\
& + \sum_{0<k<\frac{n}{2}+p,(k,n+2p-k)\in\mathbb{N}^2} b_k(z)\cdot ww^{(k)}w^{(n+2p-k)}\\
& + \sum_{CD_3} b_{k_2k_3}(z)\cdot ww^{(k_2)}w^{(k_3)}w^{(n+3p-k_2-k_3)}\\
& + \sum_{CD_4} b_{k_2,k_3,k_4}(z)\cdot ww^{(k_2)}w^{(k_3)}w^{(k_4)}w^{(n+4p-k_2-k_3-k_4)} +\\
& \vdots\\
& + \sum_{CD_t} b_{k_2,k_3,\ldots,k_t}(z)\cdot ww^{(k_2)}w^{(k_3)}w^{(k_4)}\ldots w^{(k_t)}w^{(n+tp-k_2-k_3-k_4-\ldots-k_t)}\\
= \ & 0,
\end{aligned}$$

avec:

$CD_3 : 0\le k_2\le k_3\le n+3p-k_2-k_3$

$$\begin{aligned}
(k_2,k_3,n+3p-k_2-k_3) &\in \mathbb{N}^3\\
(k_2,k_3,n+3p-k_2-k_3) &\neq (k_2,k_2,k_2)\\
&\neq (0,k_3,k_3)\\
&\neq (0,0,n+3p)
\end{aligned}$$

$CD_4 : 0 \leq k_2 \leq k_3 \leq k_4 \leq n + 4p - k_2 - k_3 - k_4$

$$\begin{array}{rcl} (k_2, k_3, k_4, n + 4p - k_2 - k_3 - k_4) & \in & \mathbb{N}^4 \\ (k_2, k_3, k_4, n + 4p - k_2 - k_3 - k_4) & \neq & (k_2, k_2, k_2, k_2) \\ & \neq & (0, k_3, k_3, k_3) \\ & \neq & (0, 0, k_4, k_4) \\ & \neq & (0, 0, 0, n + 4p) \end{array}$$

$CD_t : 0 \leq k_2 \leq k_3 \leq k_4 \leq ... \leq k_t \leq n + tp - k_2 - k_3 - k_4 ... - k_t$

$$\begin{array}{rcl} (k_2, k_3, k_4, ..., k_t, n + tp - k_2 - k_3 - k_4 ... - k_t) & \in & \mathbb{N}^t \\ & \neq & (k_2, k_2, ..., k_2) \\ & \neq & (0, k_3, ..., k_3) \\ & \neq & (0, 0, k_4, ..., k_4) \\ & \vdots & \\ & \neq & (0, 0, ..., 0, k_{t-1}, k_{t-1}) \\ & \neq & (0, 0, ..., n + tp) \end{array}$$

Avec : $n \in \mathbb{N}^*$, $[(n + pj) \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq j \leq \frac{-n}{p}.]$
$\frac{p-n-pk}{p-n+s} \in \mathbb{N}^* - \{1\}, (n - s) \in \mathbb{N}^*, s \in \mathbb{N},\ [k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k < 1 - \frac{n}{p}]$

Remarque (*): On peut toujours réduire au même dénominateur, pour avoir les puissances en w positives.

Justification de l'équation simplifiée

On a pris :

1. $\frac{p-n-kp}{p-n+s} \neq 0 \Longrightarrow k \neq 1 - \frac{n}{p}$, sinon (si $k = (1 - \frac{n}{p}) \in \mathbb{N}$)
$$(w^{(n-s)})^{\frac{p-n-kp}{p-n+s}} w^k = w^{1-\frac{n}{p}},$$
qu'on peut avoir à partir de $w^{(n+pj)} w^j$ en posant $n + pj = 0$.

2. $\frac{p-n-kp}{p-n+s} \neq 1 \Longrightarrow s \neq -kp$, sinon $(w^{(n-s)})^{\frac{p-n-kp}{p-n+s}} w^k = w^{(n-s)} w^k$, qu'on peut avoir à partir de $w^{(n+pj)} w^j$ en posant $n + pj = n - s$, donc $j = \frac{-s}{p} = \frac{kp}{p} = k$.

3. On a: $(n - s) > 0$ et $p < 0$, donc : $p - (n - s) < 0$, comme $\frac{p-n-kp}{p-n+s} \in \mathbb{N} \Longrightarrow$ $p - n - kp < 0$ alors : $p - n < kp \Longrightarrow 0 \leq k < 1 - \frac{n}{p}$ ($k \geq 0$ d'aprés la remarque (*)).

4. $n - s > 0, \Longrightarrow s \leq n - 1$, sinon $n - s = 0 \Longrightarrow n = s$, donc $(w^{(n-s)})^{\frac{p-n-kp}{p-n+s}} \cdot w^k = w^{1-\frac{n}{p}}$, qu'on peut avoir à partir de $w^{(n+pj)} w^j$ en posant $n + pj = 0$.

5. On ne peut pas avoir : $(s, k) = (0, 0)$, sinon on va avoir : $(w^{(n-s)})^{\frac{p-n-kp}{p-n+s}} w^k = w^{(n)}$, donc il y a un terme déjà existant qui se répéte.

6. On ne peut pas avoir $s = -kp$, sinon on va avoir : $(w^{(n-s)})^{\frac{p-n-kp}{p-n+s}} w^k = w^{(n-s)} w^k$, donc il y a un terme déjà existant qui se répéte.

Après avoir trouvé la valeur de p, on la remplace dans l'équation qui nous a permis de déterminer cette valeur, on trouve une équation dont l'inconnue est α; de cette façon on détermine le couple (p, α), ou bien on prend (9) on l'injecte dans (10) et on trouve la forme suivante :

$$\alpha \cdot R \cdot (z - z_0)^{p-n} = 0$$

avec :

$$\begin{aligned}
R \;=\; & a_0(z)p(p-1)...(p-n+1) \\
& + \sum_{1 \leq j \leq \frac{-n}{p}} a_j(z)\alpha^j \{p(p-1)...(p-n-pj+1)\} \\
& + \sum_{0 \leq k < 1-\frac{n}{p}, s \neq -kp} [\sum_{s=0}^{n-1} b_{s,k}(z) \times \alpha^{\left(\frac{p-n-kp}{p-n+s}+k-1\right)} \{[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{\frac{p-n-kp}{p-n+s}}\} \\
& + \sum_{0<k<\frac{n}{2}+p, (k, n+2p-k) \in \mathbb{N}^2} b_k(z)\alpha^2 \{p(p-1)...(p-k+1)p(p-1)...(p-n-2p+k+1)\} \\
& + \sum_{CD_3} b_{k_2,k_3}(z)\alpha^3 \{p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1) \\
& \times p(p-1)...(p-n-3p+k_2+k_3+1)\} + \\
& \vdots \\
& + \sum_{CD_t} b_{k_2,k_3,...,k_t}(z)\alpha^t \{p(p-1)...(p-k_2+1) \times p(p-1)...(p-k_3+1) \times ... \\
& \times p(p-1)...(p-k_t+1)p(p-1)...(p-n-tp+k_2+k_3+...+k_t+1)\}
\end{aligned}$$

Cette dernière relation nous permet de déterminer α.

Notation 14 *On note*

l'équation simplifiée : ES

les termes dominants: TD

Remarque 15 *D'aprés le théoreme de Painlevé, pour qu'une équation soit à point critique fixe il est nécessaire que son équation simplifiée soit à point critique fixe.*

Dans la suite, on étudie l'équation simplifiée pour avoir des conditions nécessaires pour la stabilité de l'équation (pour que l'ED soit de type Painlevé).

Exemple 16 *Soit l'équation différentielle non linéaire suivante:*

$$w^{(3)} + ww^{(2)} - 2w^3 + \lambda w^2 + \mu w = 0 \tag{11}$$

Cherchons la partie dominante *(ça consiste à chercher le α et le p). En injectant (9) dans (11), on trouve:*

$$\begin{aligned} & \alpha p^3(z-z_0)^{p-3} - 3\alpha p^2(z-z_0)^{p-3} + 2\alpha p(z-z_0)^{p-3} \\ & +\alpha^2(z-z_0)^{2p-2}[p^2-p] - 2\alpha^3(z-z_0)^{3p} + \lambda\alpha^2(z-z_0)^{2p} + \mu\alpha(z-z_0)^p \\ = \; & 0 \end{aligned} \tag{12}$$

en divisant (12) par $(z-z_0)^{p-3}$ on trouve :

$$\begin{aligned} & \alpha p^3 - 3\alpha p^2 + 2\alpha p + \alpha^2(p^2-p)(z-z_0)^{p+1} \\ & -2\alpha^3(z-z_0)^{2p+3} + \lambda\alpha^2(z-z_0)^{p+3} + \mu\alpha(z-z_0)^3 \\ = \; & 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Si on prend $p+1=0 \Longrightarrow p=-1$ dans (13), et on fait tendre $z \to z_0$ on trouve :

$$2\alpha(\alpha-3) = 0$$

qui a pour solution $\alpha = 0$, $\alpha = 3$. Si on prend $\alpha = 0$ on va avoir $w = 0$, ce n'est pas intéressant (ça n'aboutit à rien), donc on évite $\alpha = 0$, ainsi on prend $\alpha = 3$. Dans ce cas :

$$w \sim 3(z-z_0)^{-1},$$

les TD sont ceux qui ont les plus petites puissances dans l'équation (12) (avec $p=-1$) : $w^{(3)}$, $ww^{(2)}$, l'ES est :

$$w^{(3)} + ww^{(2)} = 0.$$

Si on prend $2p+3=0 \Longrightarrow p=-\frac{2}{3}$ dans (13), on ne peut pas faire tendre $z \to z_0$, car on a une puissance négative en $(z-z_0)$, ainsi on ne peut pas prendre $p=-\frac{2}{3}$.
Si on prend $p+3=0 \Longrightarrow p=-3$ dans (13), on ne peut pas faire tendre $z \to z_0$ car on a une puissance négative en $(z-z_0)$, ainsi on ne peut pas prendre $p=-3$.
Si on divise (12) par $(z-z_0)^{2p-2}$ on aboutit au même résultat trouvé.ci dessus c à d :

$$w \sim 3(z-z_0)^{-1}$$

Si on divise (12) par $(z-z_0)^{3p}$ on trouve :

$$\begin{aligned} & \alpha p^3(z-z_0)^{-2p-3} - 3\alpha p^2(z-z_0)^{-2p-3} + 2\alpha p(z-z_0)^{-2p-3} \\ & +\alpha^2(z-z_0)^{-p-2}[p^2-p] - 2\alpha^3 + \lambda\alpha^2(z-z_0)^{-p} + \mu\alpha(z-z_0)^{-2p} \\ = \; & 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Si on prend $-2p-3=0 \Longrightarrow p=-\frac{3}{2}$ dans (14), et on fait tendre $z \to z_0$ on trouve l'infini, donc la valeur de $p=-\frac{3}{2}$ est rejetée, car on ne peut pas déterminer α.
Si on prend $-p-2=0 \Longrightarrow p=-2$ dans (14), et on fait tendre $z \to z_0$, on trouve :

$$2\alpha^2(3-\alpha) = 0.$$

qui a pour solution : $\alpha = 0, 3$*, la valeur* 0 *est rejetée car ça donne* $w = 0$*, donc il reste* $\alpha = 3$*, ainsi :*

$$w \sim 3(z - z_0)^{-2},$$

les TD sont : $ww^{(2)}$, $2w^3$*, l'ES est :*

$$ww^{(2)} - 2w^3 = 0.$$

On ne peut pas prendre $p = 0$*, car par hypothèse on a* $\mathrm{Re}(p) < 0$*.*
Si on divise (12) par $(z - z_0)^{2p}$ *on trouve :*

$$\begin{aligned} & \alpha p^3(z-z_0)^{-p-3} - 3\alpha p^2(z-z_0)^{-p-3} + 2\alpha p(z-z_0)^{-p-3} \\ & +\alpha^2(z-z_0)^{-2}[p^2 - p] - 2\alpha^3(z-z_0)^{p} + \lambda\alpha^2 + \mu\alpha(z-z_0)^{-p} \\ = \; & 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Si on prend $-p - 3 = 0 \Longrightarrow p = -3$ *dans (15), et on fait tendre* $z \to z_0$ *on trouve l'infini,* $(\mu \neq 0)$*, donc la valeur* $p = -3$ *est rejetée, car on ne peut pas déterminer* α*.*
Si on divise (12) par $(z - z_0)^{p}$ *on trouve :*

$$\begin{aligned} & \alpha p^3(z-z_0)^{-3} - 3\alpha p^2(z-z_0)^{-3} + 2\alpha p(z-z_0)^{-3} + \alpha^2(z-z_0)^{p-2}[p^2 - p] \\ & -2\alpha^3(z-z_0)^{2p} + \lambda\alpha^2(z-z_0)^{p} + \mu\alpha \\ = \; & 0, \end{aligned}$$

dans ce cas on ne peut pas prendre $p - 2 = 0$*, car on aura* $p = 2$*, qui est rejetée par hypothèse. Idem pour* $p = 0$*.*

Exemple 17 *Soit l'équation différentielle non linéaire suivante:*

$$w^{(3)} + aww^{(2)} + b(w^{(1)})^2 + cw^4 + dww^{(1)} + ew^3 + fw^2 + gw = 0 \tag{16}$$

Cherchons la partie dominante *(ça consiste à chercher le* α *et le* p*). Injectons (9) dans (16) les puissances de* $(z - z_0)$ *trouvées sont respectivement :* $p - 3, 2p - 2, 2p - 2, 4p, 2p - 1, 3p, 2p, p.$*:*

$$\begin{aligned} \text{Si} &: \; p - 3 = 2p - 2 = 4p \Longrightarrow p = -1 \\ \text{Si} &: \; p - 3 = 2p - 1 \Longrightarrow p = -2 \\ \text{Si} &: \; 2p - 2 = 3p \Longrightarrow p = -2 \\ \text{Si} &: \; 4p = 2p - 1 \Longrightarrow p = -\frac{1}{2} \\ \text{Si} &: \; 2p - 1 = 3p \Longrightarrow p = 1 \\ \text{Si} &: \; 2p - 1 = p \Longrightarrow p = 1 \; (\textit{rejetée}) \end{aligned}$$

Si on injecte (9) dans (16) avec $p = -1$*, les puissances qu'on va trouver sont respectivement :* $-4, -4, -4, -4, -3, -3, -2, -1$*. Dans ce cas, on peut prendre* $p = -1$*, les termes* *dominants sont ceux qui correspondent à la puissance* -4. (*pour* $p = -1$) *c à d : les 4 premiers termes de l'EDO, l'équation simplifiée est :*

$$w^{(3)} + aww^{(2)} + b(w^{(1)})^2 + cw^4 = 0. \tag{17}$$

Cherchons le α *qui correspond a* $p = -1$, *il suffit de remplacer* p *par sa valeur* ($p = -1$) *dans (17), on trouve :*

$$\alpha \cdot R \cdot (z - z_0)^{-4} = 0$$

avec :

$$R = -6 + (2a + b)\alpha + c\alpha^3 = 0, \tag{18}$$

alors α *est solution de (18).*
Si on injecte (9) dans (16) avec $p = -2$, *les puissances qu'on va trouver sont respectivement :*$-5, -6, -6, -8, -5, -6, -4, -2$. *On remarque que la plus petite puissance est* -8, *il n'existe qu'un seul terme qui a cette puissance, donc on ne peut pas la prendre.*
Si on injecte (9) dans (16) avec $p = -\frac{1}{2}$, *les puissances qu'on va trouver sont respectivement :* $-\frac{7}{2}, -3, -3, -2, -2, \frac{-3}{2}, -1, \frac{-1}{2}$. *La plus petite puissance est* $-\frac{7}{2}$, *il n'existe qu'un seul terme qui a cette puissance, donc on ne peut pas la prendre, finalement le seul choix possible de* p, *est* $p = -1$.

Exemple 18 *Soit l'équation différentielle non linéaire suivante:*

$$w^{(2)} = \frac{2w(w^{(1)})^2}{(w^2 - 1)}$$

ou bien:

$$w^{(2)}(w^2 - 1) - 2w(w^{(1)})^2 = 0, \ (w^2 - 1) \neq 0 \tag{19}$$

Cherchons la partie dominante*: Injectons (9) dans (19) on trouve :*

$$-\alpha^3 p^2 (z - z_0)^{3p-2} - \alpha p^2 (z - z_0)^{p-2} - \alpha^3 p (z - z_0)^{3p-2} + \alpha p (z - z_0)^{p-2} = 0 \tag{20}$$

les puissances de $(z - z_0)$ *sont respectivement :* $3p - 2$, $p - 2$, $3p - 2$, $p - 2$ *:*

$$\textit{si on prend : } 3p - 2 = p - 2 \Longrightarrow p = 0 \textit{ (rejetée).}$$

divisons (20) par $(z - z_0)^{3p-2}$ *on trouve :*

$$-\alpha^3 p^2 - \alpha p^2 (z - z_0)^{-2p} - \alpha^3 p + \alpha p (z - z_0)^{-2p} = 0$$

quand on fait tendre $z \longrightarrow z_0$ *on trouve :*

$$-\alpha^3 p(p + 1) = 0, \tag{21}$$

qui a pour solutions : $\alpha = 0$, $p = 0$, $p = -1$. *Les deux premières valeurs sont rejetées, car pour* $\alpha = 0$ *on aura* $w = 0$ *ce n'est pas intéressant, pour la valeur* $p = 0$ *on ne peut pas la prendre car on a par hypothèse* $\mathrm{Re}(p) < 0$.

Donc on prend $p = -1$, on remplace cette valeur dans (21) on trouve $0 = 0$, on deduit donc que α est arbitraire, les termes dominants sont :

$$w^{(2)}w^2,\ 2w(w^{(1)})^2,$$

l'équation simplifiée qui lui correspond est :

$$w^{(2)}w^2 - 2w(w^{(1)})^2 = 0$$

Si on divise (20) par $(z - z_0)^{p-2}$ on trouve :

$$-\alpha^3 p^2 (z - z_0)^{2p} - \alpha p^2 - \alpha^3 p (z - z_0)^{2p} + \alpha p = 0,$$

on ne peut pas faire tendre $z \longrightarrow z_0$, car la puissance de $(z - z_0)$ est négative, donc on a qu'un seul choix de p (trouvé ultérieurement), $p = -1$.
On peut avoir plusieurs choix de p. Si un de ces choix possibles n'est pas entier, et si (9) est asymptotique au voisinage de z_0, alors ce dernier représente le comportement dominant d'un point de branchement mobile algébrique d'ordre p. L'existence d'un tel point signifie que l'EDO n'est pas de type Painlevé.
Pour prouver que (9) est asymptotique, on définit une nouvelle variable

$$v = w^{\frac{1}{p}} \tag{22}$$

et on réécrit l'EDO en fonction de v. Par construction v disparaît en z_0, et v' est finie. On doit montrer à partir de l'EDO que $v(z)$ est analytique en z_0, .ensuite il vient de (22) que w a un point de branchement mobile d'ordre p en z_0.

Exemple 19 *Soit l'équation différentielle non linéaire suivante:*

$$w^{(2)} + 10w^4 = 0 \tag{23}$$

Cherchons la partie dominante *: Injectons (9) dans (23) on trouve :*

$$p(\alpha p^2 - \alpha p)(z - z_0)^{p-2} + 10\alpha^4 (z - z_0)^{4p} = 0,$$

si on pose :

$$p - 2 = 4p$$

On trouve :$p = \frac{-2}{3}$.
Puisque p n'est pas entier, cherchons si (9) est asymptotique au voisinage de z_0.
On fait le changement de variable suivant :

$$v(z) = w^{\frac{1}{p}}(z) = w^{-\frac{3}{2}}(z) \tag{24}$$

On écrit (23) en fonction de (24) on trouve :

$$(v^{(1)})^2 - \frac{3}{5}v^{(2)}v + (3)^2 = 0, \tag{25}$$

il y a une solution analytique pour (25) au voisinage de z_0 si :

$$v(z_0) = 0,\ v^{(1)}(z_0) = \pm 3i,\ v^{(2)}(z_0)\ \textit{est finie},$$

donc v est analytique au voisinage de z_0, alors (9) est asymptotique au voisinage de ce point, d'aprés (24) l'EDO a un point de branchement mobile d'ordre $\frac{-2}{3}$, ainsi l'EDO n'est pas de type Painlevé.

Remarque 20 *Pour montrer qu'on a une solution analytique au voisinage d'un point, il suffit de montrer que les dérivées existent et sont bornées dans ce voisinage.*

La donnée d'une EDO qui a un point de branchement, une simple transformation peut la rendre de type Painlevé.

Exemple 21 *Soit l'équation différentielle non linéaire suivante:*

$$ww^{(2)} = \frac{5}{2}(w^{(1)})^2 \tag{26}$$

Cherchons la partie dominante *:En injectant (9) dans (26), on trouve :*

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}\alpha^2 p^2 (z-z_0)^{2p-2} - \alpha^2 p (z-z_0)^{2p-2} &= 0 \\ &\Longrightarrow \alpha^2 p (z-z_0)^{2p-2}(-\frac{3}{2}p - 1) = 0 \\ &\Longrightarrow \alpha^2 p(-\frac{3}{2}p - 1)(z-z_0)^{2p-2} = 0 \\ &\Longrightarrow \alpha = 0,\ p = 0,\ p = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

On prend : $p = -\frac{2}{3}$ (on ne peut pas prendre les autres valeurs car pour $\alpha = 0$, on aura $w = 0$, pour $p = 0$, on a une contradiction avec l'hypothèse $\mathrm{Re}(p) < 0$, donc on prend : $p = -\frac{2}{3}$ et α est arbitraire). Ainsi :

$$w = \alpha(z-z_0)^{-\frac{2}{3}} \tag{27}$$

p n'est pas entier, cherchons si w est asymptotique au voisinage de z_0. Pour cela on procède au changement de variable suivant :
On pose :

$$v = w^{-\frac{3}{2}} \tag{28}$$

On écrit (26) en fonction de (28), on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{10}{9}\frac{[v^{(1)}(z)]^2}{v^{\frac{8}{3}}(z)} - \frac{2}{3}\frac{v^{(2)}(z)}{v^{\frac{5}{3}}(z)}}{v^{\frac{2}{3}}(z)} - \frac{10}{9}\frac{[v^{(1)}(z)]^2}{v^{\frac{10}{3}}(z)} &= 0 \\ -\frac{2}{3}\frac{v^{(2)}(z)}{v^{\frac{7}{3}}(z)} &= 0 \\ v^{(2)}(z) &= 0 \end{aligned}$$

donc on aura une équation linéaire, ce qui implique qu'on n'a pas de point singulier mobile, donc l'EDO est de type Painlevé.

Remarque 22 *Si tous les cas possibles de p sont entiers, alors (9) peut représenter le premier terme d'une série de Laurent, définie dans un voisinage pointé du pôle mobile z_0, dans ce cas, la solution de (7) est de la forme:*

$$w(z) = (z - z_0)^p \sum_{i=0}^{\infty} c_i (z - z_0)^i, \ 0 < |z - z_0| < R. \tag{29}$$

Ici z_0 est une constante arbitraire. Si $(n-1)$ des coefficients $\{c_j\}$ sont aussi arbitraires, alors ils constituent les constants d'intégrations de l'EDO, et (29) est la solution générale de l'EDO dans un voisinage pointé de z_0. Les puissances i pour lesquelles les coefficients c_i sont arbitraires s'appellent les résonances.

$2^{iéme}$ étape

Introduction

Pour chaque (p, α) trouvé à l'étape 1, après avoir obtenu l'équation simplifiée, qui ne contient que les termes dominants de l'équation initiale, on cherche dans cette étape les résonances qui correspondent aux puissances i, pour lesquelles les coefficients c_i sont arbitraires dans la solution générale de l'ED.

Cherchons la résonance:

Soit :

$$w(z) = (z - z_0)^p \sum_{i=0}^{\infty} c_i (z - z_0)^i, \; 0 < |z - z_0| < R. \tag{30}$$

la solution générale de l'équation simplifiée. Si on injecte (30) dans l'ES, et on cherche le coefficient de $(z - z_0)^{p+m-n}$, on peut l'écrire sous la forme :

$$Q(m) \cdot c_m(z_0) + H_m(z_0, \alpha, c_1, c_2, ..., c_{m-1}).$$

Ce dernier doit être nul pour chaque $m \geq 0$ (ça ressemble à la méthode de Frobenius pour la résolution des problèmes linéaires aux voisinages des points singuliers réguliers), alors les indices m pour lesquels les coefficients $c_m(z)$ sont arbitraires, se déterminent en annulant le polynôme $Q(m)$, et dans ce cas le terme $H_m(z_0, \alpha, c_1, c_2, ..., c_{m-1})$ s'annule aussi, les racines de $Q(m)$ sont appelées les résonances.

La forme générale de H_m est donnée par la formule suivante :

$$
\begin{aligned}
H_m \; = \; & \sum_{1\leq -pj\leq n} \sum_{CD_{1'}} a_j(z)c_{m-s}(z)(p+m-s)...(p+m-s-n-pj+1) \times \\
& C_j^{j-l}.(c_k(z))^{j-l}\frac{l!}{l_1!l_2!...l_l!}.(c_{s_1}(z))^{l_1}(c_{s_2}(z))^{l_2}(c_{s_3}(z))^{l_3}...(c_{s_l}(z))^{l_l} \\
& + \sum_{\substack{0\leq k<1-\frac{n}{p},\\ s\neq -kp, k\in\mathbb{N}}} \sum_{CD_{2'}} b_{s,k}(z)C_h^{h-u}[c_l(z)(p+l)(p+l-1)...(p+l-n+s+1)]^{h-u} \times \\
& \frac{u!}{l'_1!l'_2!...l'_u!}[c_{s'_1}(z)(p+s'_1)...(p+s'_1-n+s+1)]^{l'_1}[c_{s'_2}(z)(p+s'_2)...(p+s'_2-n+s+1)]^{l'_2} \times \\
& ...[c_{s'_u}(z)(p+s'_u)...(p+s'_u-n+s+1)]^{l'_u}. \times \\
& C_k^{k-e}[c_b(z)]^{k-e}\frac{e!}{l''_1!l''_2!...l''_e!}.[c_{s''_1}(z)]^{l''_1}[c_{s''_2}(z)]^{l''_2}...[c_{s''_e}(z)]^{l''_e} \\
& + \sum_{\substack{0<k<\frac{n}{2}+p,\\ (k,n+2p-k)\in\mathbb{N}^2}} b_k(z)\sum_{CD_{2*}} \alpha^i.c_{i_1}(z)c_{i_2}(z)(p+i_2).(p+i_2-1)...(p+i_2-k+1) \times \\
& c_{i_3}(z)(p+i_3)...(p+i_3-n-2p+k+1) \\
& + \sum_{j=3}^{t} \sum_{CD_j} b^{k_2...k_j}(z) \sum_{CD_{j*}} \alpha^i c_{i_1}(z)c_{i_2}(z)(p+i_2)...(p+i_2-k_2+1) \times \\
& ...c_{i_q}(z)(p+i_q)...(p+i_q-k_q+1)...c_{i_j}(z_0)(p+i_j)...(p+i_j-k_j+1) \\
& c_{i_{j+1}}(z)(p+i_{j+1})...(p+i_{j+1}-n-jp+k_2+k_3+...+k_j+1)
\end{aligned}
$$

avec :

$$CD_{1'}:\begin{cases} m-s\in\mathbb{Z}^+,\ j-l\in\mathbb{Z}^+,\ \{l,s,s_1,s_2,...,s_l,l_1,...,l_l\}\subset\mathbb{Z}^+\\ l_1s_1+l_2s_2+...+l_ls_l=s+k(l-j)\\ l_1+l_2+...+l_l=l\\ (m-s,k,l)\neq(0,0,1),\text{car } (m-s,k,l)=(0,0,1) \text{ on le trouve dans } Q(m)\\ s\neq 0,\text{car } s=0 \text{ on la trouve dans } Q(m)\\ \text{si } s=0 \text{ alors: } l_1s_1+l_2s_2+...+l_ls_l=k(l-j) \text{ qui à lieu si elle est nulle}\\ (\text{car } l_1s_1+l_2s_2+...+l_ls_l\geq 0 \text{ et } \ k(l-j)\leq 0)\\ \text{ce qui exige que } s_i=0\ \forall i\in\{1,..,l\}\wedge(l-j)=0, \text{ on ne peut pas avoir } k=0,\\ \text{d'aprés la formule du Binôme}\end{cases}$$

$$CD_{2'}:\begin{cases} \{\frac{p-n-kp}{p-n+s}=h,(h-u),u,e,l'_1,l'_2,...,l'_u,s'_1,s'_2,...,s'_u,l''_1,l''_2,...,l''_e,s''_1,s''_2,...,s''_e\}\subset\mathbb{Z}^+\\ l'_1+l'_2+...+l'_u=u;\\ l''_1+l''_2+...l''_e=e;\\ (s'_1l'_1+s'_2l'_2+...+s'_ul'_u)+(s''_1l''_1+s''_2l''_2+...+s''_el''_e)=m-l(h-u)-b(k-e)\\ (l,u,b,e)\neq(0,0,0,0) \text{ car } (l,u,b,e)=(0,0,0,0) \text{ ça correspond}\\ \text{au coefficient de } (z-z_0)^{p-n} \text{ et pas au coefficient de } (z-z_0)^{p+m-n}\\ (l,u,b,e)\notin\{(0,1,0,0),(0,0,0,1)\} \text{ car } (l,u,b,e)\in\{(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}\\ \text{on les trouve dans } Q(m)\end{cases}$$

$$CD_{2*}:\begin{cases} \{i_1,i_2,i_3\}\subset\mathbb{Z}^+\\ i_1+i_2+i_3=m\\ (i_1,i_2,i_3)\neq(0,0,0) \text{ car } (i_1,i_2,i_3)=(0,0,0) \text{ ça correspond au coefficient}\\ \text{de } (z-z_0)^{p-n} \text{ et pas au coefficient de } (z-z_0)^{p+m-n}\\ (i_1,i_2,i_3)\notin\{(m,0,0),(0,m,0),\ (0,0,m)\}\text{car on les trouve dans} Q(m)\\ i \text{ est le nombre des } i_q \text{ qui sont nuls, } q\in\{1,2,3\},\ 0\leq i\leq 1\end{cases}$$

$\vdots$

$$CD_{j*}:\begin{cases} \{i_1,i_2,...,i_j,i_{j+1}\}\subset\mathbb{Z}^+\\ i_1+i_2+...+i_j+i_{j+1}=m\\ (i_1,i_2,...,i_{j+1})\neq(0,0,...,0), \text{ car } (i_1,i_2,...,i_{j+1})=(0,0,...,0) \text{ ça correspond}\\ \text{au coefficient de } (z-z_0)^{p-n} \text{ et pas au coefficient de } (z-z_0)^{p+m-n}\\ (i_1,i_2,...,i_{j+1})\notin\{(m,0,...,0),(0,m,...,0),(0,0,m,...,0),...,(0,...,m,0),(0,...,0,m)\}\text{car}\\ \text{on les trouve dans } Q(m)\\ i \text{ est le nombre des } i_q \text{ qui sont nuls, } q\in\{1,..,j+1\},\ 0\leq i\leq j-1\end{cases}$$

et :
La forme générale de $Q(m)$ est donnée par la formule suivante

$$
\begin{aligned}
Q(m) \;=\;& a_0(z)(p+m)(p+m-1)...(p+m-n+1) \\
&+ \sum_{-\frac{1}{p}\leq 1\leq .j\leq \frac{-n}{p}} a_j(z)\alpha^j\{p(p-1)...(p-n-pj+1)(j) \\
&+(p+m)(p+m-1)...(p+m-n-pj+1)\} \\
&+ \sum_{0\leq k<1-\frac{n}{p},s\neq -kp}\ \sum_{s=0}^{n-1} b_{s,k}(z)(\alpha)^{\frac{p-n-kp}{p-n+s}+k-1}\{[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{\frac{p-n-kp}{p-n+s}}(k) \\
&+\frac{p-n-kp}{p-n+s}[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{\frac{p-n-kp}{p-n+s}-1}\times \\
&(p+m)(p+m-1)...(p+m-n+s+1)\} \\
&+ \sum_{CD_2=0<k<\frac{n}{2}+p,(k,n+2p-k)\in\mathbb{N}^2} b_k(z)\alpha^2\{p(p-1)...(p-k+1)p(p-1)...(p-n-2p+k+1) \\
&+p(p-1)...(p-k+1).(p+m)(p+m-1)...(p+m-n-2p+k+1) \\
&+(p+m)(p+m-1)...(p+m-k+1)p(p-1)...(p-n-2p+k+1)\}. \\
&+\sum_{CD_3} b_{k_2k_3}(z)\alpha^3\{p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1) \\
&(p+m)(p+m-1)...(p+m-n-3p+k_2+k_3+1) \\
&+p(p-1)...(p-k_2+1)(p+m)(p+m-1)...(p+m-k_3+1) \\
&\times p(p-1)...(p-n-3p+k_2+k_3+1) \\
&+(p+m)(p+m-1)...(p+m-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1) \\
&\times p(p-1)..(p-n-3p+k_2+k_3+1) \\
&+p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)p(p-1)...(p-n-3p+k_2+k_3+1)\}+ \\
&\vdots \\
&+\sum_{CD_t} b_{k_2,k_3,...,k_t}(z)\alpha^t\{p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)...\times \\
&p(p-1)...(p-k_t+1)(p+m)(p+m-1)...(p+m-n-tp+k_2+k_3+...+k_t+1) \\
&+p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)...p(p-1)...(p-k_{t-1}+1)\times . \\
&(p+m)(p+m-1)...(p+m-k_t+1)p(p-1)...(p-n-tp+k_2+k_3+...+k_t+1) \\
&+p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)...p(p-1)...(p-k_{t-2}+1)\times \\
&(p+m)(p+m-1)...(p+m-k_{t-1}+1)p(p-1)...(p-k_t+1).\times \\
&p(p-1)...(p-n-tp+k_2+k_3+...+k_t+1)+... \\
&+(p+m)(p+m-1)...(p+m-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)...p(p-1)...\times \\
&(p-k_t+1).p(p-1)...(p-n-tp+k_2+k_3+...+k_t+1) \\
&+p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)...p(p-1)...(p-k_t+1)p(p-1)...\times \\
&(p-n-tp+k_2+k_3+...+k_t+1)\}
\end{aligned}
$$

Dans cette partie du test au lieu d'injecter toute la série dans l'équation simplifiée on injecte seulement

$$w = \alpha(z - z_0)^p + \beta(z - z_0)^{p+r} \tag{31}$$

dans cette dernière, et on cherche le coefficient de β qu'on trouve sous la forme :

$$Q(r)(z - z_0)^q = 0, \ q \geq p + r - n \tag{32}$$

$Q(r)$ est donnée plus haut. Les racines de $Q(r)$ sont appelées résonances.de l'équation.

Remarque 23 *Le polynome Q ainsi obtenu est le même que si on injecte toute la série solution.*

Proposition 24 *Si le terme correspondant au plus haut degré de dérivation de l'équation initiale est parmi les termes dominants, alors $q = p + r - n$ et $Q(r)$ est un polynôme en r d'ordre n. Sinon $q > p + r - n$, et l'ordre de $Q(r)$ est égal à l'ordre de la plus grande dérivée parmi les termes dominants ($< n$).*

Preuve. Si le terme correspondant au plus haut degré de dérivation de l'équation initiale ($= n$) est parmi les termes dominants, dans ce cas on dérive (31) n fois pour déterminer le degré du polynôme en $(z - z_0)$ coefficient de β, qui est égal dans ce cas à $p + r - n$, et $Q(r)$ sera un polynôme en r de degré n. Si l'orde de l'équation simplifiée est égal à $n^{'} < n$, on dérive (31) $n^{'}$ fois pour déterminer le degré du polynôme en $(z - z_0)$ coefficient de β qui est égal dans ce cas à $p + r - n^{'} > p + r - n$, et $Q(r)$ sera un polynôme en r d'ordre n'. ■

Proposition 25 -1 *est une racine pour le polynôme $Q(r)$.*

Preuve. Faisons la démonstration par récurrence sur l'entier j, $j \geq 2$. En formulant la propriété $P(J)$:

$$Q_J(-1) = (1 - \frac{n}{p})R_J$$

avec : j l'indice qui correspond à la condition j.
Pour $j = 2$, on a :

$$\begin{aligned}
Q_2(-1) \;=\; & a_0(z)(p-1)(p-2)...(p-n) \\
& + \sum_{1 \leq j \leq \frac{-n}{p}} a_j(z)\alpha^j \{p(p-1)...(p-n-pj+1)(j) + (p-1)(p-2)...(p-n-pj)\} \\
& + \sum_{0 \leq k < 1-\frac{n}{p}, s \neq -kp} [\sum_{s=0}^{n-1} b_{s,k}(z).\alpha^{\frac{p-n-kp}{p-n+s}+k-1}\{[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{\frac{p-n-kp}{p-n+s}}(k) \\
& + \frac{p-n-kp}{p-n+s}[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{\frac{p-n-kp}{p-n+s}-1}(p-1)(p-2)...(p-n+s)\} \\
& + \sum_{0 < k < \frac{n}{2}+p, (k, n+2p-k) \in \mathbb{N}^2} b_k(z)\alpha^2.\{p(p-1)...(p-k+1)p(p-1)...(p-n-2p+k+1) \\
& + p(p-1)...(p-k+1)(p-1)(p-2)...(p-n-2p+k) \\
& + (p-1)(p-2)...(p-k)p(p-1)...(p-n-2p+k+1)\}
\end{aligned}$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
Q_2(-1) &= a_0(z)\{p(p-1)(p-2)...(p-n+1) - \frac{n}{p} \cdot p(p-1)(p-2)...(p-n+1)\} \\
&+ \sum_{1 \leq j \leq \frac{-n}{p}} a_j(z)\alpha^j\{(p-1)...(p-n-pj+1).[pj+(p-n-pj)]\} \\
&+ \sum_{0 \leq k < 1-\frac{n}{p}, s \neq -kp} [\sum_{s=1}^{n-1} b_{s,k}(z)(\alpha)^{\frac{p-n-kp}{p-n+s}+k-1}\{[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{\frac{p-n-kp}{p-n+s}} \\
&\times[k + \frac{(p-n-kp)(p-1)(p-2)...(p-n+s)}{(p-n+s)p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)}]\} \\
&+ \sum_{0<k<\frac{n}{2}+p,(k,n+2p-k)\in\mathbb{N}^2} b_k(z)\alpha^2\{p(p-1)...(p-k+1)p(p-1)...(p-n-2p+k+1) \\
&\times[1 + \frac{1}{p}(p-n-2p+k) + \frac{1}{p}(p-k)]
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
Q_2(-1) &= a_0(z).\{p(p-1)(p-2)...(p-n+1)\ (1-\frac{n}{p}) \\
&+ \sum_{1 \leq j \leq \frac{-n}{p}} a_j(z).\alpha^j.p(p-1)...(p-n-pj+1)\ (1-\frac{n}{p}) \\
&+ \sum_{\substack{0 \leq k < 1-\frac{n}{p}, \\ s \neq -kp}} [\sum_{s=0}^{n-1} b_{s,k}(z)(\alpha)^{\frac{p-n-kp}{p-n+s}+k-1}[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{\frac{p-n-kp}{p-n+s}}\ (1-\frac{n}{p}) \\
&+ \sum_{\substack{0<k<\frac{n}{2}+p, \\ (k,n+2p-k)\in\mathbb{N}^2}} b_k(z)\alpha^2 p(p-1)...(p-k+1)p(p-1)...(p-n-2p+k+1)(1-\frac{n}{p})
\end{aligned}$$

ainsi :

$$Q_2(-1) = (1-\frac{n}{p})R_2$$

Nous avons montré que cette relation est vraie pour $j = 2$, supposons qu'elle est vraie jusqu'à l'ordre $(t-1)$ c à d: $Q_{t-1}(-1) = (1-\frac{n}{p})R_{t-1}$, et montrons qu'elle est vraie à l'ordre t.

$$\begin{aligned}
Q_t(r) &= Q_{t-1}(r) + \sum_{CD_t} b_{k_2,k_3,\ldots,k_t}(z)\alpha^t\{p(p-1)\ldots(p-k_2+1)p(p-1)\ldots(p-k_3+1)\ldots \\
&\times p(p-1)\ldots(p-k_t+1)(p+r)(p+r-1)\ldots(p+r-n-tp+k_2+k_3+\ldots+k_t+1) \\
&+p(p-1)\ldots(p-k_2+1)p(p-1)\ldots(p-k_3+1)\ldots p(p-1)\ldots(p-k_{t-1}+1). \\
&\times(p+r)(p+r-1)\ldots(p+r-k_t+1)p(p-1)\ldots(p-n-tp+k_2+k_3+\ldots+k_t+1) \\
&+p(p-1)\ldots(p-k_2+1)p(p-1)\ldots(p-k_3+1)\ldots p(p-1)\ldots(p-k_{t-2}+1) \\
&\times(p+r)(p+r-1)\ldots(p+r-k_{t-1}+1)p(p-1)\ldots(p-k_t+1). \\
&\times p(p-1)\ldots(p-n-tp+k_2+k_3+\ldots+k_t+1)+\ldots+ \\
&(p+r)(p+r-1)\ldots(p+r-k_2+1)p(p-1)\ldots(p-k_3+1)\ldots \\
&\times p(p-1)\ldots(p-k_t+1).p(p-1)\ldots(p-n-tp+k_2+k_3+\ldots+k_t+1) \\
&+p(p-1)\ldots(p-k_2+1)p(p-1)\ldots(p-k_3+1)\ldots p(p-1)\ldots(p-k_t+1)p(p-1)\ldots \\
&\times(p-n-tp+k_2+k_3+\ldots+k_t+1)\}
\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
R_t &= R_{t-1} + \sum_{CD_t} b_{k_2,k_3,\ldots,k_t}(z)\alpha^t\{p(p-1)\ldots(p-k_2+1)p(p-1)\ldots(p-k_3+1)\times\ldots \\
&\ldots p(p-1)\ldots(p-k_t+1).p(p-1)\ldots(p-n-tp+k_2+k_3+\ldots+k_t+1)\}
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
Q_t(-1) &= Q_{t-1}(-1) + \sum_{CDt} b_{k_2,k_3,\ldots,k_t}(z)\alpha^t\{p(p-1)\ldots(p-k_2+1)p(p-1)\ldots(p-k_3+1)\ldots \\
&\times p(p-1)\ldots(p-k_t+1)(p-1)(p-2)\ldots(p-n-tp+k_2+k_3+\ldots+k_t) \\
&+p(p-1)\ldots(p-k_2+1).p(p-1)\ldots(p-k_3+1)\ldots p(p-1)\ldots(p-k_{t-1}+1). \\
&\times(p-1)(p-2)\ldots(p-k_t).p(p-1)\ldots(p-n-tp+k_2+k_3+\ldots+k_t+1) \\
&+p(p-1)\ldots(p-k_2+1).p(p-1)\ldots(p-k_3+1)\ldots p(p-1)\ldots(p-k_{t-2}+1) \\
&\times(p-1)(p-2)\ldots(p-k_{t-1}).p(p-1)\ldots(p-k_t+1) \\
&\times p(p-1)\ldots(p-n-tp+k_2+k_3+\ldots+k_t+1)+ \\
&\vdots \\
&+(p-1)(p-2)\ldots(p-k_2).p(p-1)\ldots(p-k_3+1)\ldots \\
&\times p(p-1)\ldots(p-k_t+1).p(p-1)\ldots(p-n-tp+k_2+k_3+\ldots+kt+1) \\
&+p(p-1)\ldots(p-k_2+1).p(p-1)\ldots(p-k_3+1)\ldots p(p-1)\ldots(p-k_t+1)p(p-1)\ldots \\
&\times(p-n-tp+k_2+k_3+\ldots+k_t+1)\}
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}Q_t(-1) &= (1-\frac{n}{p})R_{t-1}+\{\sum_{CDt} b_{k_2,k_3,...,k_t}(z)\alpha^t\{p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)...\\&...p(p-1)(p-2)...(p-k_t+1)\\&\times p(p-1)(p-2)...(p-n-tp+k_2+k_3+...+k_t+1)\}\\&\times[\frac{1}{p}(p-n-tp+k_2+k_3+...+k_t)+\frac{1}{p}(p-k_t)+\frac{1}{p}(p-k_{t-1})+...+\frac{1}{p}(p-k_2)+1]\end{aligned}$$

c.-à-d:

$$\begin{aligned}Q_t(-1) &= (1-\frac{n}{p})R_{t-1}+\sum_{CD_t} b_{k_2,k_3,...,k_t}(z)\alpha^t\{p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)\times...\\&p(p-1)(p-2)...(p-k_t+1)\times p(p-1)(p-2)...(p-n-tp+k_2+k_3+...+k_t+1)\}\\&\times[(1-\frac{n}{p}-t+\frac{k_2}{p}+\frac{k_3}{p}+...+\frac{k_t}{p})+(1-\frac{k_t}{p})+(1-\frac{k_{t-1}}{p})+...+(1-\frac{k_2}{p})+1]\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}Q_t(-1) &= (1-\frac{n}{p})R_{t-1}+\{\sum_{CD_t} b_{k_2,k_3,...,k_t}(z)\alpha^t\{p(p-1)...(p-k_2+1).p(p-1)...(p-k_3+1)\times\\&...p(p-1)(p-2)...(p-k_t+1).p(p-1)(p-2)...(p-n-tp+k_2+k_3+...+k_t+1)\}\\&\times(1-\frac{n}{p}-t+t)\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}Q_t(-1) &= (1-\frac{n}{p})[R_{t-1}+\sum_{CD_t} b_{k_2,k_3,...,k_t}(z)\alpha^t\\&\times\{p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)...\\&\times p(p-1)(p-2)...(p-k_t+1)\\&\times p(p-1)(p-2)...(p-n-tp+k_2+k_3+...+k_t+1)\}]\end{aligned}$$

finalement :

$$Q_t(-1)=(1-\frac{n}{p})R_t$$

Comme : $R_t=0$ (car $\alpha.R_t.(z-z_0)^{p-n}=0$) alors :

$$Q_t(-1)=0$$

donc

$$Q(-1)=0.$$

■

Remarque 26 *Si α est arbitraire, alors tous les coefficients des puissances de α dans le polynôme R sont nuls. Donc :*

1. $a_0(z_0)$ est nul, car il correspond au coefficient de α^0, donc $w^{(n)}$ n'existe pas dans R.

2. Le coefficient du terme correspondant à la plus grande puissance de α dans R, peut être calculé à partir de :

$$\sum_{1\le j\le \frac{-n}{p}} a_j(z)\alpha^j\{p(p-1)...(p-n-pj+1) \tag{33}$$

ou bien de

$$\sum_{1\le j\le \frac{-n}{p}} a_j(z).w^{(n+pj)}w^j$$

en posant:

$$n+pj=0 \Longrightarrow j=-\frac{n}{p}, \text{ avec } w=\alpha(z-z_0)^p$$

Dans ce cas, la plus grande puissance possible de α dans R est $-\frac{n}{p}$ (dans le cas où : $-\frac{n}{p}\in\mathbb{N}$). Cherchons maintenant le coefficient de $\alpha^{-\frac{n}{p}}$, qui est nul si α est arbitraire, tout d'abord existe-t-il des puissances de α égales à $-\frac{n}{p}$ dans les sommes :

$$\sum_{0\le k<1-\frac{n}{p}, s\neq -kp}\left[\sum_{s=0}^{n-1} b_{s,k}(z)(\alpha)^{\frac{p-n-kp}{p-n+s}+k-1}\times\{[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{\frac{p-n-kp}{p-n+s}} \right. \tag{34}$$

et de

$$\begin{aligned}&\sum_{CD_m} b_{k_2,k_3,...,k_m}(z)\alpha^m\{p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)... \\ &\times p(p-1)...(p-k_m+1).p(p-1)...(p-n-mp+k_2+k_3+...+k_m+1)\end{aligned} \tag{35}$$

avec $2\le m\le t.$, dans le cas où $m=2$ ça correspond à :

$$\sum_{0<k<\frac{n}{2}+p,(k,n+2p-k)\in\mathbb{N}^2} b_k(z)\alpha^2\{p(p-1)...(p-k+1)p(p-1)...(p-n-2p+k+1)\}.$$

Supposons qu'on peut trouver un coefficient de $\alpha^{-\frac{n}{p}}$ à partir de (34) dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\exists(k,s) &\in \mathbb{N}\times\{0,1,...,n-1\},\ 0\le k<1-\frac{n}{p},\ s\neq -kp \text{ tq :}\\
-\frac{n}{p} &= \frac{p-n-kp}{p-n+s}+k-1\\
\frac{p-n}{p} &= \frac{p-n-kp+kp-kn+ks}{p-n+s}\\
(p-n)(p-n+s) &= p(p-n-kn+ks)\\
ps-np+n^2-ns &= -pkn+pks\\
n(n+pk-p) &= s(n+pk-p)\\
&\Longrightarrow n=s\ ,\ [(n+pk-p)\neq 0,\ \text{car } k\neq 1-\frac{n}{p}]\\
\text{ce qui donne :}\quad & n=s \text{ absurde, car } 1\le s\le n-1
\end{aligned}$$

et donc on ne peut pas avoir: $-\frac{n}{p} = \frac{p-n-kp}{p-n+s} + k - 1$.

Supposons maintenant qu'on peut trouver un coefficient de $\alpha^{-\frac{n}{p}}$ à partir de (35). Dans ce cas

$$\begin{aligned}
\exists\, m, 2 &\leq m \leq t \text{ vérifiant la condition } \mathrm{CD}_m \text{ tq :} \\
-\frac{n}{p} &= m \\
-\frac{n}{p} &= m \Longrightarrow n + m.p = 0
\end{aligned}$$

mais on a d'après la condition CD_m, $n + mp - k_2 - k_3 - k_4 - ... - k_m \in \mathbb{N} \Longrightarrow -k_2 - k_3 - k_4 - ... - k_m = 0$, de plus $(k_2, k_3, k_4, ..., k_m) \in \mathbb{N}^{t-1} \Longrightarrow (k_2, k_3, k_4, ..., k_m) = (0, 0, ..., 0)$, contradiction avec la condition CD_m, et donc on ne peut pas avoir $-\frac{n}{p} = m$. Ainsi le seul coefficient qu'on peut avoir de $\alpha^{-\frac{n}{p}}$est celui qu'on peut tirer de (33), qui est nul dans le cas où α est arbitraire.(dans le cas où $\frac{-n}{p} \in \mathbb{N}$).

Notation 27 *On note*

$$\begin{cases} b_{s,k}(z) = b_{sj}^k(z_0) & si \\ b_{s,k}(z) = 0 & sinon \end{cases} \quad \frac{p-n-kp}{p-n+s} + k - 1 = j \in \mathbb{N}, 0 \leq k < 1 - \frac{n}{p}, s \neq -kp, 0 \leq s \leq n-1$$

Proposition 28 *Si α est arbitraire, alors $Q(0) = 0$.*

Preuve. D'aprés ce qu'on a ci-dessus on peut écrire si α est arbitraire :

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{1 \leq j \leq \frac{-n}{p} - 1} a_j(z) \alpha^j \{p(p-1)...(p-n-pj+1)\} \\
&+ \sum_{\substack{0 \leq k < 1 - \frac{n}{p}, s \neq -kp \\ (\frac{p-n-kp}{p-n+s} + k - 1) = j}} [\sum_{s=0}^{n-1} b_{sj}^k(z).(\alpha)^j.[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{j+1-k} \\
&+ \sum_{0 < k < \frac{n}{2} + p, (k, n+2p-k) \in \mathbb{N}^2} b_k(z) \alpha^2.p(p-1)...(p-k+1)p(p-1)...(p-n-2p+k+1) \\
&+ \sum_{CD_3} b_{k_2 k_3}(z) \alpha^3.p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1) \\
&\times p(p-1)...(p-n-3p+k_2+k_3+1) + \\
&\vdots \\
&+ \sum_{CD_t} b_{k_2, k_3, ..., k_t}(z) \alpha^t p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)... \\
&\times p(p-1)...(p-k_t+1)p(p-1)...(p-n-tp+k_2+k_3+...+k_t+1)
\end{aligned}$$

en developpant on obtient :

$$
\begin{aligned}
R \;=\;& [a_1(z)p(p-1)...(p-n+(-p)+1) \\
&+ \sum_{0\leq k<1-\frac{n}{p},s\neq -kp}\ \sum_{s=0}^{n-1} b_{s1}^{k}(z)[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{2-k}]\alpha^1 \\
&+\{a_2(z_0)p(p-1)...(p-n+(-2p)+1) \\
&+ \sum_{0\leq k<1-\frac{n}{p},s\neq -kp}\ \sum_{s=0}^{n-1} b_{s2}^{k}(z)[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{3-k} \\
&+ \sum_{0<k<\frac{n}{2}+p,(k,n+2p-k)\in\mathbb{N}^2} b_k(z).p(p-1)...(p-k+1)p(p-1)...(p-n-2p+k+1)\}\alpha^2 \\
&+\{a_3(z_0)p(p-1)...(p-n+(-3p)+1) \\
&+ \sum_{0\leq k<1-\frac{n}{p},s\neq -kp}\ \sum_{s=0}^{n-1} b_{s3}^{k}(z)[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{4-k} \\
&+\sum_{CD_3} b_{k_2k_3}(z)p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1) \\
&\times p(p-1)...(p-n-3p+k_2+k_3+1)\}\alpha^3 + \\
&\vdots \\
&+\{a_t(z)p(p-1)...(p-n+(-tp)+1) \\
&+ \sum_{0\leq k<1-\frac{n}{p},s\neq -kp}\ \sum_{s=0}^{n-1} b_{st}^{k}(z)[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{t+1-k} \\
&+\sum_{CDt} b_{k_2,k_3,...,k_t}(z)p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)... \\
&\times p(p-1)...(p-k_t+1)p(p-1)...(p-n-tp+k_2+k_3+...+k_t+1)\}\alpha^t \\
&+\{a_{t+1}(z_0)p(p-1)...(p-n+(-(t+1)p)+1) \\
&+ \sum_{0\leq k<1-\frac{n}{p},s\neq -kp}\ \sum_{s=0}^{n-1} b_{s(t+1)}^{k}(z)[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{(t+1)+1-k}\}\alpha^{t+1} + \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Sachant que si α est arbitraire, alors tous les coefficients de puissance de α dans R sont nuls. Ce qui donne :

$$[a_1(z)p(p-1)...(p-n+(-p)+1)+\sum\sum b_{s1}^{k}(z)[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{2-k}]=0$$

$$a_2(z).p.(p-1)...(p-n+(-2p)+1)+\sum\sum b_{s2}^{k}(z)[p.(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{3-k}$$

$$+\sum_{0<k<\frac{n}{2}+p,(k,n+2p-k)\in\mathbb{N}^2} b_k(z).p.(p-1)...(p-k+1)\times p(p-1)...(p-n-2p+k+1)=0$$

$$a_3(z).p.(p-1)...(p-n+(-3p)+1)+\sum\sum b^k_{s3}(z).[p.(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{4-k}+$$

$$\sum_{CD_3} b_{k_2k_3}(z)p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)p(p-1)...(p-n-3p+k_2+k_3+1)=0$$

$\vdots$

$$a_t(z)p(p-1)...(p-n+(-tp)+1)+\sum\sum b^k_{st}(z)[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{t+1-k}+$$

$$\sum_{CDt} b_{k_2,k_3,...,k_t}(z)p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)...p(p-1)...(p-k_t+1)\times$$

$$p.(p-1).(p-2).(p-3)...(p-n-tp+k_2+k_3+...+k_t+1)=0$$

$$a_{t+1}(z)p(p-1)...(p-n-(-(t+1)p)+1)+\sum\sum b^k_{s(t+1)}(z)[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{(t+1)+1-k}=0$$

$\vdots$

$$a_{\frac{-n}{p}-1}(z)p(p-1)...(p-n-(-\frac{n}{p}-1)p+1)+\sum\sum b^k_{s(\frac{-n}{p}-1)}(z)[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{\frac{-n}{p}-k}=0$$

Calculons $Q(0)$ pour α arbitraire.

$$\begin{aligned}
Q(0) \quad = \quad & \sum_{-\frac{1}{p}\leq 1\leq j<\frac{-n}{p},j\in\mathbb{N}} a_j(z)\alpha^j\{p(p-1)...(p-n-pj+1)(j)+p(p-1)...(p-n-pj+1)\}+\\
& +\sum_{0\leq k<1-\frac{n}{p},s\neq -kp}[\sum_{s=0}^{n-1} b^k_{sj}(z)(\alpha)^j\{[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{j+1-k}(k)\\
& +(j+1-k)[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{(j-k)}p(p-1)...(p-n+s+1)\}\\
& +\sum_{0<k<\frac{n}{2}+p,(k,n+2p-k)\in\mathbb{N}^2} b_k(z)\alpha^2\{p(p-1)...(p-k+1)\\
& p(p-1)...(p-n-2p+k+1)+p(p-1)...(p-k+1)\times\\
& p(p-1)...(p-n-2p+k+1)+p(p-1)...(p-k+1)p(p-1)...(p-n-2p+k+1)\}\\
& +\sum_{CD_3} b_{k_2k_3}(z)\alpha^3\{p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)\\
& \times p(p-1)...(p-n-3p+k_2+k_3+1)+p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)\\
& \times p(p-1)...(p-n-3p+k_2+k_3+1)+p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)\\
& \times p(p-1)..(p-n-3p+k_2+k_3+1)\\
& +p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)p(p-1)...(p-n-3p+k_2+k_3+1)\}+\\
& \vdots
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$+\sum_{CD_t} b_{k_2,k_3,\dots,k_t}(z)\alpha^t\{p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)...$$
$$\times p(p-1)...(p-k_t+1)p(p-1)...(p-n-tp+k_2+k_3+...+k_t+1)$$
$$+p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)...p(p-1)...(p-k_{t-1}+1).$$
$$\times p(p-1)...(p-k_t+1)p(p-1)...(p-n-tp+k_2+k_3+...+k_t+1)$$
$$+p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)...p(p-1)...(p-k_{t-2}+1)$$
$$\times p(p-1)...(p-k_{t-1}+1)p(p-1)...(p-k_t+1)$$
$$\times p(p-1)...(p-n-tp+k_2+k_3+...+k_t+1)+...+$$
$$+p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)...p(p-1)...(p-k_t+1)p(p-1)..$$
$$\times(p-n-tp+k_2+k_3+...+k_t+1)\}$$

on a :

$$\sum_{-\frac{1}{p}\leq 1\leq j<\frac{-n}{p},j\in\mathbb{N}} a_j(z)\alpha^j\{p(p-1)...(p-n-pj+1)(j)+p(p-1)...(p-n-pj+1)\}$$
$$=\sum_{-\frac{1}{p}\leq 1\leq j<\frac{-n}{p},j\in\mathbb{N}} a_j(z)\alpha^j p(p-1)...(p-n-pj+1)(j+1).$$

$$\sum_{0\leq k<1-\frac{n}{p},s\neq -kp}[\sum_{s=0}^{n-1} b_{sj}^k(z)(\alpha)^j\{[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{j+1-k}(k)$$
$$+(j+1-k)[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{(j-k)}p(p-1)...(p-n+s+1)\}$$
$$=\sum_{0\leq k<1-\frac{n}{p},s\neq -kp}\sum_{s=0}^{n-1} b_{sj}^k(z)(\alpha)^j[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{j+1-k}(j+1).$$

donc :

$$\begin{aligned}
Q(0) &= \sum_{-\frac{1}{p}\leq 1\leq j<\frac{-n}{p},j\in\mathbb{N}} a_j(z)\alpha^j p(p-1)...(p-n-pj+1)(j+1)\\
&+\sum_{0\leq k<1-\frac{n}{p},s\neq -kp}\sum_{s=0}^{n-1} b_{sj}^k(z)(\alpha)^j[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{j+1-k}(j+1)\\
&+\sum_{0<k<\frac{n}{2}+p,(k,n+2p-k)\in\mathbb{N}^2} 3.b_k(z)\alpha^2 p(p-1)...(p-k+1)p(p-1)...(p-n-2p+k+1)\\
&+\sum_{CD_3} 4.b_{k_2k_3}(z)\alpha^3 p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)\\
&\times p(p-1)...(p-n-3p+k_2+k_3+1)\\
&\vdots\\
&+\sum_{CD_t}(t+1).b_{k_2,k_3,\dots,k_t}(z)\alpha^t.p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)...\\
&\times p(p-1)...(p-k_t+1)p(p-1)...(p-n-tp+k_2+k_3+...+k_t+1)
\end{aligned}$$

alors :

$$
\begin{aligned}
Q(0) \;=\; & 2.[a_1(z)p(p-1)...(p-n+(-p)+1) \\
& + \sum_{(\frac{p-n-kp}{p-n+s}+k-1)=1} \sum b_{s1}^k(z)[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{2-k}]\alpha^1 \\
& +3\{a_2(z)p(p-1)...(p-n+(-2p)+1) \\
& + \sum_{(\frac{p-n-kp}{p-n+s}+k-1)=2} \sum b_{s2}^k(z)[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{3-k} \\
& + \sum_{0<k<\frac{n}{2}+p,(k,n+2p-k)\in\mathbb{N}^2} b_k(z).p(p-1)...(p-k+1)p(p-1)...(p-n-2p+k+1)\}\alpha^2 \\
& +4\{a_3(z_0)p(p-1)...(p-n+(-3p)+1) \\
& + \sum_{(\frac{p-n-kp}{p-n+s}+k-1)=3} \sum b_{s3}^k(z)[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{4-k} \\
& + \sum_{CD_3} b_{k_2k_3}(z)p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1) \\
& \times p(p-1)...(p-n-3p+k_2+k_3+1)\}\alpha^3 \\
& \vdots \\
& +(t+1)\{a_t(z)p(p-1)...(p-n+(-tp)+1) \\
& + \sum_{(\frac{p-n-kp}{p-n+s}+k-1)=t} \sum b_{st}^k(z)[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{t+1-k} \\
& + \sum_{CDt} b_{k_2,k_3,...,k_t}(z)p(p-1)...(p-k_2+1)p(p-1)...(p-k_3+1)...p(p-1)... \\
& \times(p-k_t+1)p(p-1)...(p-n-tp+k_2+k_3+...+k_t+1)\}\alpha^t \\
& +(t+2)\{a_{t+1}(z)p(p-1)...(p-n+(-(t+1)p)+1) \\
& + \sum_{(\frac{p-n-kp}{p-n+s}+k-1)=t+1} \sum b_{s(t+1)}^k(z)[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{(t+1)+1-k}\}\alpha^{t+1} + \\
& \vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \vdots \\
& +(-\frac{n}{p})\{a_{\frac{-n}{p}-1}(z)p(p-1)...(p-n-(-\frac{n}{p}-1)p+1) \\
& + \sum_{(\frac{p-n-kp}{p-n+s}+k-1)=\frac{-n}{p}-1} \sum b_{s(\frac{-n}{p}-1)}^k(z)[p(p-1)(p-2)...(p-n+s+1)]^{\frac{-n}{p}-k}\}\alpha^{\frac{-n}{p}-1}
\end{aligned}
$$

Ce qui donne d'après ce qui précède $Q(0) = 0$. ■

Question : Si $r = 0$.est une racine pour $Q(r)$, est-ce-que cela implique que α est arbitraire ? La réponse est en génerale non.

Exemple 29 *On considère l'EDO non linéaire donnée par :*

$$w^{(2)} + 4ww^{(1)} + 2w^3 = 0 \tag{36}$$

on sait que :

$$w \sim \alpha(z - z_0)^{-1} \tag{37}$$

avec α solution de

$$2\alpha(\alpha - 1)^2 = 0 \Longrightarrow (\alpha = 0) \vee (\alpha = 1 \text{ est une racine double.})$$

et L'ES est l'EDO toute entière. Cherchons $Q(r)$, on substitue (31) dans (36) et on cherche le coefficient de β on trouve :

$$Q(r)(z - z_0)^{p+r-n} = 0,$$

avec :

$$Q(r) = r(r + 1).$$

dans ce cas, on a $r = 0$ est une racine de $Q(r)$, cependant $\alpha = 1$ n'est pas arbitraire. Donc (37) ne peut être le premier terme de la série de Laurent, solution générale de (36).car s'il est solution on doit avoir dans ce cas α arbitraire, ce qui n'est pas le cas.

Remarque 30 *On ignore les racinés de $Q(r)$ telles que* $\operatorname{Re}(r) < 0$, *elles sont traitées indépendamment dans la deuxième partie de ce travail.*

Proposition 31 *Si on a* : $\operatorname{Re}(r) > 0$, *et r n'est pas un entier réel alors $z = z_0$ est un point de branchement mobile.*

Preuve. Montrons la, par la contraposée $(A \Longrightarrow B) \iff (nonB \Longrightarrow nonA)$. On le fait pour $(\operatorname{Re}(r) > 0)$. Supposons qu'on n'a pas de point de branchement dans la solution générale, que nous cherchons sous la forme $w(z) = \sum_{j \in I} a_j(z - z_0)^{p+j}$, $0 < |z - z_0| < R$ alors $(p + j) \in \mathbb{Z}$, $\forall\ j \in I$, en particulier pour $j = r$ c-à-d $p + r \in \mathbb{Z}$ et comme $p \in \mathbb{Z}$ alors $r \in \mathbb{Z}$.ça signifie que r est un entier réel.(cqfd). ■

Exemple 32 *On considère l'EDO non linéaire donnée par :*

$$w^{(3)} + ww^{(2)} - 2w^3 + \lambda w^2 + \mu w = 0. \tag{38}$$

Nous avons trouvé $w \sim 3(z - z_0)^{-1}$ et l'E.S est :

$$w^{(3)} + ww^{(2)} = 0. \tag{39}$$

Cherchons $Q(r)$,on substitue (31) dans (39) et on cherche le coefficient de β on trouve :

$$Q(r)(z - z_0)^{p+r-n} = Q(r)(z - z_0)^{-4+r} = 0$$

avec
$$Q(r) = (r+1)(r-(2+i\sqrt{2}))(r-(2-i\sqrt{2})).$$
$Q(r)=0 \iff \begin{cases} r=-1 \\ r=(2+i\sqrt{2}) \\ r=(2-i\sqrt{2}). \end{cases}$ *. Alors on a* $\mathrm{Re}((2+i\sqrt{2}))>0$ *et* $(2+i\sqrt{2})$ *n'est pas entier, cela signifie qu'on a un point de branchement en* $z=z_0$*. Donc l'EDO n'est pas de type Painlevé.*

Proposition 33 *Si pour tous les choix possibles de* (p,α) *trouvés à l'étape* 1*, toutes les racines de* $Q(r)$ *(à part* $-1,0$*) sont positives réelles entières, alors on n'a pas de point de branchement.algébrique.*

Preuve. Supposons qu'on a un point de branchement algébrique en $z=z_0$, donc au voisinage de z_0 la solution s'écrit sous la forme : $w=\sum_{j\in I} a_j(z-z_0)^{p+j}$ avec j rationnel non entier ($p\in\mathbb{Z}$), .donc $p+j$ est rationnel $\forall\ j\in I$ en particulier pour $j=r$ mais on a r réel entier par hypothèse donc $p+r$ est réel entier ce qui est absurde. Ce qui revient à dire qu'on ne peut pas avoir de point de branchement. ■

On passe à l'étape suivante qui consiste à chercher les points logarithmiques.dans le cas où on n'a pas de point de branchement

Proposition 34 *Si* $Q(r)$ *a une racine multiple, alors on a un point de branchement logarithmique mobile en* $z=z_0$ *avec un coefficient arbitraire.*

Proposition 35 *Pour représenter la solution générale d'une EDO d'ordre* n *dans un voisinage d'un pôle mobile,* $Q(r)$ *doit avoir* $(n-1)$ *racines positives, distinctes deux à deux et entières. Si pour les valeurs de* (p,α) *trouvées dans la première étape,* $Q(r)$ *n'a pas* $(n-1)$ *racines, aucune solution locale n'est générale, ça signifie que (9) ne peut être partie principale de la solution générale.*

Preuve. Les solutions de $Q(r)$ nous donnent $(n-1)$ constantes d'intégration arbitraires et z_0 est la n ^{iéme} constante arbitraire. ■

Conclusion : Si l'EDO est d'ordre n, et si l'E.S contient le terme qui correspond au plus grand degré de dérivation de l'équation initiale, alors $Q(r)$ est un polynôme en r d'ordre n, ainsi $Q(r)$ a au plus n racines. Si parmi ces racines il existe une racine multiple, ça signifie qu'on a un point de branchement (d'après la proposition précédente) et donc l'algorithme s'arrête, cela veut dire qu'on ne peut pas avoir la solution générale. Pour pouvoir représenter la solution générale au voisinage du pôle mobile, il faut avoir $(n-1)$ racines simples autres que -1. S'il existe une racine qui n'est pas entière, à part la racine -1, alors d'après la proposition (34) on a un point de branchement et donc l'algorithme s'arrête.

Si L'ES ne contient pas le terme qui correspond au plus grand ordre de dérivation de l'équation initiale, alors $Q(r)$ est un polynôme en r d'ordre n' avec ($n\prime < n$). Ainsi $Q(r)$ a au plus n' racines, comme -1 est une racine donc il lui reste $(n'-1)$ racines (avec $\mathrm{Re}(r) > 0$, le cas $\mathrm{Re}(r) < 0$ n'est pas traité dans cette partie). Comme L'EDO est d'ordre n, donc la solution doit avoir n constantes d'intégrations, ce qui n'a pas lieu car $Q(r)$ a au plus $n'(\leq n-1)$ racines, ce n' représente le nombres des constantes d'intégrations qui est inférieure à n.

Pour représenter la solution générale d'une EDO au voisinage du pôle mobile, $Q(r)$ doit avoir $(n-1)$ racines distinctes, entières, positives, sinon on ne peut pas représenter la solution générale de L'EDO au voisinage du pôle mobile. Et ça signifie que (8) ne peut être partie principale de la solution.générale.

$3^{ième}$ étape   Cherchons les constantes d'intégration :

Pour les valeurs de (p,α) trouver à l'étape 1, soient :$r_1 < r_2 < \cdots < r_s$ les racines entières positives de $Q(r)$; $(s \leq n-1)$. Injectons :

$$w = \alpha(z-z_0)^p + \sum_{j=1}^{r_1} a_j (z-z_0)^{p+j} \tag{40}$$

dans (7), et déterminons les a_j $1 \leq j \leq r_1$.(Cette partie de l'analyse est semblable à la méthode de Frobenius pour des problèmes linéaires.), le coefficient de $(z-z_0)^{p+j-n}$ $(1 \leq j \leq r_1)$ est :

$$Q(j)a_j - R_j(z,\alpha,a_1,a_2,...a_{j-1}) = 0, \ 1 \leq \ j \leq r_1 \tag{41}$$

si $j < r_1$, (41) détermine a_j,
si $j = r_1$, (41) devient :

$$0 \times a_{r_1} - R_{r_1}(z,\alpha,a_1,a_2,...a_{r_1-1}) = 0, \tag{42}$$

si

$$R_{r_1}(z,\alpha,a_1,a_2,...a_{r_1-1}) = 0, \tag{43}$$

on a dans ce cas a_{r_1} qui est arbitraire, on passe a l'étape suivante en posant :

$$w = \alpha(z-z_0)^p + \sum_{j=1}^{r_2} a_j (z-z_0)^{p+j} \tag{44}$$

dans cette étape nous avons les valeurs des a_j, $1 \leq j \leq r_1$, il reste à déterminer les a_j, $r_{1+1} \leq j \leq r_2$, pour cela faisons le même travail qu'à l'étape précédente. En injectant (44) dans (7), on trouve le coefficient de $(z-z_0)^{p+j-n}$ qui vaut :

$$Q(j)a_j - R_j(z_0,\alpha,a_1,a_2,...a_{j-1}) = 0, \ (r_{1+1} \leq j \leq r_2) \tag{45}$$

Pour $j < r_2$, (45) détermine a_j, .pour $j = r_2$, (45) devient :

$$0 \times a_{r_2} - R_{r_2}(z_0,\alpha,a_1,a_2,...a_{r_2-1}) = 0,$$

si

$$R_{r_2}(z_0,\alpha,a_1,a_2,...,a_{r_1-1}) = 0.$$

on a dans ce cas a_{r_2} qui est arbitraire, on continue le processus jusqu'à arriver à la dernière étape où on pose:

$$w = \alpha(z-z_0)^p + \sum_{j=1}^{r_s} a_j (z-z_0)^{p+j}$$

et on fait le même travail. Si parmi ses étapes on trouve qu'il existe un r_i, $1 \leq i \leq s$, tel que r_i ne soit pas arbitraire c-à-d :

$$R_{r_i}(z_0, \alpha, a_1, a_2, ..., a_{r_i-1}) \neq 0,$$

ce qui veut dire qu'on n'a pas de solution sous la forme

$$w = \alpha(z - z_0)^p + \sum_{j=1}^{r_i} a_j (z - z_0)^{p+j}, \tag{46}$$

pour rendre a_{r_i} arbitraire et $R_{r_i} = 0$, on introduit un terme logarithmique dans la solution, en remplaçant (46) par :

$$w = \alpha(z - z_0)^p + \sum_{j=1}^{r_i-1} a_j (z - z_0)^{p+j} + [a_{r_i} + b_{r_i} \ln(z - z_0)](z - z_0)^{p+r_i}. \tag{47}$$

Dans ce cas le coefficient de $[(z - z_0)^{p+r_i-n} \ln(z - z_0)]$ est $Q(r_i)b_{r_i} = 0$, et b_{r_i}est déterminé en annulant le coefficient de $(z - z_0)^{p+r_i-n}$; a_{r_i} et dans ce cas arbitraire, on procède de la même manière pour les autres résonances c'est à dire on introduit des termes logarithmiques chaque fois qu'on à $R_{r_j}(z, \alpha, a_1, a_2, ...a_{r_j-1}) \neq 0$, $j = 1, ..., s$.

Alors la solution générale au voisinage épointé de z_0 est représentée par (47). Elle admet un point de branchement logarithmique mobile en $z = z_0$. L'EDO n'est pas de type Painlevé.

Si aucun terme logarithmique n'est introduit en chaque résonance pour toutes les valeurs possibles de (p, α) trouvées à l'étape 1, on dit que l'équation vérifie les conditions nécessaires pour qu'elle soit de type Painlevé, est dans ce cas la solution est donnée sous la forme :

$$w = \alpha(z - z_0)^p + \sum_{j=1}^{r_s} a_j (z - z_0)^{p+j}$$

2.4 Application

Exemple 36 *On considère l'EDO donnée par :*

$$w^{(4)} = 27w^{(2)}w^2 + 21w^{(1)}w^3 - 9w^5 \tag{48}$$

Cherchons la partie dominante: *Injectons $w = \alpha(z-z_0)^p$ dans (48) on trouve :*

$$\begin{aligned} &\alpha(p^4 - 6p^3 + 11p^2 - 6p)(z-z_0)^{p-4} + 27\alpha^3 p(1-p)(z-z_0)^{3p-2} \\ &-21\alpha^4 p(z-z_0)^{4p-1} + 9\alpha^5(z-z_0)^{5p} \\ = \; & 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Les puissances de $(z-z_0)$ dans (49) sont d'ordres suivants :$(p-4),(3p-2),(4p-1),5p$.
Si on prend : $(p-4) = (3p-2) = (4p-1) = 5p$ alors $p = -1$.
Les TD sont les termes de l'EDO, l'ES est l'EDO toute entière et pour la détermination de α, on remplace p par sa valeur dans (49) on trouve :

$$3\alpha(\alpha-1)(3\alpha^3 + 10\alpha^2 - 8\alpha - 8)(z-z_0)^{-5} = 0,$$

donc

$$R = 3(\alpha-1)(3\alpha^3 + 10\alpha^2 - 8\alpha - 8)$$

ce qui donne : $\alpha = 1$, et trois autres solutions.
Si on prend $\alpha = 1$, dans ce cas $w = (z-z_0)^{-1}$.
Cherchons la résonance $(p = -1,\ \alpha = 1)$***:*** *on substitue (31) dans (49) et on cherche le coefficient de β on trouve :*

$$Q(r)(z-z_0)^{p+r-n} = Q(r)(z-z_0)^{r-5},$$

avec:

$$Q(r) = (r+1)(r-1)^2(r-9).$$

Comme $r = 1$ est une racine double de $Q(r)$, alors d'après la proposition on a un point de branchement logarithmique en $z = z_0$, donc l'EDO n'est pas de type Painlevé.

Exemple 37 *On considère la $1^{iéme}$* ***équation de Painlevé*** *(voir [20] page 345 Chapitre XIV)*

$$w^{(2)} = 6w^2 + z \tag{50}$$

Cherchons la partie dominante: *Injectons (9) dans (50) on trouve :*

$$\alpha p^2(z-z_0)^{p-2} - \alpha p(z-z_0)^{p-2} - 6\alpha^2(z-z_0)^{2p} - z = 0,$$

Si on divise par $(z-z_0)^{p-2}$ on trouve :

$$\alpha p^2 - \alpha p - 6\alpha^2(z-z_0)^{p+2} - z(z-z_0)^{-p+2} = 0. \tag{51}$$

Choisissons dans ce cas : $p + 2 = 0 \Longrightarrow p = -2$, *on remplace cette valeur dans (51) ensuite en fait tendre* $z \longrightarrow z_0$ *on trouve :*

$$6\alpha - 6\alpha^2 = 0,$$

qui a pour solutions : $\alpha = 0, 1$, *la valeur* 0 *est rejetée. Donc :*

$$w = (z - z_0)^{-2}.$$

Les TD sont : $w^{(2)}, 6w^2$ *et l'équation simplifiée dans ce cas est :*

$$w^{(2)} = 6w^2 \tag{52}$$

On aboutit au même résultat si on divise par $(z - z_0)^{2p}$.

Cherchons la résonance: on substitue (31) dans (52) et on cherche le coefficient de β on trouve:

$$Q(r)(z - z_0)^{p+r-n} = Q(r)(z - z_0)^{r-4},$$

ce qui donne :

$$Q(r) = (r + 1)(r - 6).$$

Cherchons les constantes d'intégration :

les racinées de $Q(r)$ sont $-1, 6$. Injectons :

$$w = \alpha(z - z_0)^{-2} + \sum_{j=1}^{r=6} a_j(z - z_0)^{j-2}$$

dans (50), pour déterminer a_j on annule le coefficient de $(z - z_0)^{p+j-n} = (z - z_0)^{j-4}$.

le coefficient de a_1 correspond à $(z - z_0)^{-3}$, qui est égal à :

$$-10a_1 = 0 \Longrightarrow a_1 = 0$$

le coefficient de a_2 correspond à $(z - z_0)^{-2}$, qui est égal à :

$$-12a_2 - 6a_1^2 = 0 \Longrightarrow a_2 = 0$$

le coefficient de a_3 correspond à $(z - z_0)^{-1}$, qui est égal à :

$$-12a_3 = 0 \Longrightarrow a_3 = 0$$

le coefficient de a_4 correspond à $(z - z_0)^0$, qui est égal à :

$$-10a_4 - z_0 = 0 \Longrightarrow a_4 = \frac{-1}{10} z_0$$

le coefficient de a_5 correspond à $(z - z_0)^1$, qui est égal à

$$-1 - 6a_5 = 0 \Longrightarrow a_5 = \frac{-1}{6}.$$

Donc la solution générale de l'EDO dans un voisinage pointé de z_0 : $0 < |z - z_0| < R'$ est donnée par la formule suivante :

$$w(z) = (z - z_0)^{-2} - \frac{1}{10}z_0(z - z_0)^2 - \frac{1}{6}(z - z_0)^3 + c(z - z_0)^4 + ..., \text{ c est arbitraire.}$$

On dit dans ce cas que l'EDO vérifiée les conditions nécessaires pour qu'elle soit de type Painlevé.

Remarque 38 *Les équations de Painlevé sont à points critiques fixes.*

Exemple 39 $2^{ième}$ ***équation de Painlevé*** *(voir [20] page 345 Chapitre XIV)*

$$w^{(2)} = 2w^3 + zw + \gamma \tag{53}$$

Cherchons la partie dominante *: Injectons (9) dans (53) on trouve :*

$$\alpha p^2(z - z_0)^{p-2} - \alpha p(z - z_0)^{p-2} - 2\alpha^3(z - z_0)^{3p} - z\alpha(z - z_0)^p - \gamma = 0 \tag{54}$$

on divise par $(z - z_0)^{p-2}$ *on trouve :*

$$\alpha p^2 - \alpha p - 2\alpha^3(z - z_0)^{2p+2} - z\alpha(z - z_0)^2 = 0 \tag{55}$$

Choisissons dans ce cas : $2p + 2 = 0 \Longrightarrow p = -1$, *on remplace cette valeur dans (55) ensuite en fait tendre* $z \longrightarrow z_0$ *on trouve :*

$$2\alpha - 2\alpha^3 = 0$$

qui a pour solutions : $\alpha = 0, 1, -1$. *La valeur* 0 *est rejetée.*

Donc on a deux valeurs pour w :

$$w = (z - z_0)^{-1} ,w = -(z - z_0)^{-1}$$

Les TD qui leurs correspondent sont : $w^{(2)}$, $2w^3$,
et l'ES est :

$$w^{(2)} = 2w^3 \tag{56}$$

Cherchons la résonance $(p = -1, \alpha = 1)$ **:**

On substitue : $w = (z - z_0)^{-1} + \beta(z - z_0)^{r-1}$ dans (56) et on cherche le coefficient de β on trouve :

$$Q(r)(z - z_0)^{p+r-n} = Q(r)(z - z_0)^{r-3}$$

avec :

$$Q(r) = (r + 1)(r - 4)$$

Cherchons les constantes d'intégration :

les racines de $Q(r)$ sont $-1, 4$, injectons :

$$w = (z - z_0)^{-1} + \sum_{j=1}^{r=4} a_j (z - z_0)^{j-1}$$

dans l'EDO (53), pour déterminer a_j on annule le coefficient de $(z-z_0)^{p+j-n} = (z-z_0)^{j-3}$.

Le coefficient de a_1, correspond à $(z - z_0)^{-2}$, il est égal à :

$$-6a_1 = 0 \Longrightarrow a_1 = 0,$$

le coefficient de a_2, correspond à $(z - z_0)^{-1}$, il est égal à :

$$-6a_2 - z_0 = 0 \Longrightarrow a_2 = \frac{-1}{6} z_0,$$

le coefficient de a_3, correspond à $(z - z_0)^{0}$, il est égal à :

$$-4a_3 - 1 - \gamma = 0 \Longrightarrow a_3 = \frac{-1}{4} - \frac{1}{4}\gamma,$$

le coefficient de a_4, correspond à $(z - z_0)^{1}$, il est égal à :

$$0.a_4 = 0 \Longrightarrow a_4 \text{ est arbitraire.}$$

Donc la solution générale de l'EDO au voisinage pointé du pôle mobile z_0 est donnée par la formule suivante :

$$w = (z - z_0)^{-1} - \frac{1}{6} z_0 (z - z_0) + (\frac{-1}{4} - \frac{1}{4}\gamma)(z - z_0)^{-2} + c(z - z_0)^{-3} + ..., \text{ c est arbitraire.}$$

Cherchons la résonance $(p = -1, \alpha = -1)$ **:**

On substitue : $w = -(z - z_0)^{-1} + \beta (z - z_0)^{r-1}$ dans (56) et on cherche le coefficient de β on trouve :

$$Q(r)(z - z_0)^{p+r-n} = Q(r)(z - z_0)^{r-3},$$

avec :

$$Q(r) = (r + 1)(r - 4).$$

Cherchons les constantes d'intégration :

les racines de $Q(r)$ sont $-1, 4$, injectons :

$$w = -(z - z_0)^{-1} + \sum_{j=1}^{r=4} c_j (z - z_0)^{j-1},$$

dans (53), pour déterminer c_j, on annule le coefficient de $(z - z_0)^{p+j-n} = (z - z_0)^{j-3}$.

le coefficient de c_1, correspond à $(z - z_0)^{-2}$, il est égal à :

$$c_1 = 0$$

le coefficient de c_2, correspond à $(z-z_0)^{-1}$, il est égal à :

$$-6c_2 + z_0 = 0 \Longrightarrow c_2 = \frac{1}{6}z_0$$

le coefficient de c_3, correspond à $(z-z_0)^0$, il est égal à :

$$-4c_3 + 1 - \gamma = 0 \Longrightarrow c_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\gamma$$

le coefficient de c_4, correspond à $(z-z_0)^1$, il est égal à :

$$0.c_4 = 0 \Longrightarrow c_4 \text{ est arbitraire.}$$

Donc la solution générale de l'EDO au voisinage pointé du pôle mobile z_0 est donnée par la formule suivante :

$$w = -(z-z_0)^{-1} + \frac{1}{6}z_0(z-z_0) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\gamma)(z-z_0)^{-2} + c(z-z_0)^{-3} + ..., \text{ c est arbitraire.}$$

donc l'EDO vérifie les conditions nécessaires pour qu'elle soit de type Painlevé.

Exemple 40 $4^{iéme}$ ***équation de Painlevé*** *(voir [**20**] page 345 Chapitre XIV)*

$$w^{(2)} = \frac{1}{2w}(w^{(1)})^2 + \frac{3}{2}w^3 + 4zw^2 + 2(z^2-\mu)w + \frac{\lambda}{w} \tag{57}$$

Cherchons la partie dominante*: Injectons (9) dans (57) on trouve :*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\alpha p^2(z-z_0)^{p-2} - \alpha p(z-z_0)^{p-2} - \frac{3}{2}\alpha^3(z-z_0)^{3p} \\ & -4z\alpha^2(z-z_0)^{2p} - 2\alpha z^2(z-z_0)^p + 2\alpha\mu(z-z_0)^p - \frac{\lambda}{\alpha}(z-z_0)^{-p} \\ = \; & 0 \end{aligned} \tag{58}$$

on divise par $(z-z_0)^{p-2}$ on trouve :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\alpha p^2 - \alpha p - \frac{3}{2}\alpha^3(z-z_0)^{2p+2} \\ & -4z\alpha^2(z-z_0)^{p+2} - 2\alpha z^2(z-z_0)^2 + 2\alpha\mu(z-z_0)^2 - \frac{\lambda}{\alpha}(z-z_0)^{-2p+2} \\ = \; & 0 \end{aligned} \tag{59}$$

Si on prend : $2p+2=0 \Longrightarrow p=-1$, on remplace cette valeur dans (59) ensuite en fait tendre $z \longrightarrow z_0$ on trouve :

$$\frac{3}{2}\alpha(1-\alpha^2) = 0 \Longrightarrow \alpha = 0, 1, -1$$

La valeur 0 est rejetée, donc :

$$w = (z-z_0)^{-1}, \; w = -(z-z_0)^{-1}$$

Les termes dominant sont : $w^{(2)}$, $\frac{1}{2w}(w^{(1)})^2$, $\frac{3}{2}w^3$.

et l'ES est :

$$w^{(2)} = \frac{1}{2w}(w^{(1)})^2 + \frac{3}{2}w^3 \tag{60}$$

qu'on peut la mettre sous la forme :

$$ww^{(2)} = \frac{1}{2}(w^{(1)})^2 + \frac{3}{2}w^4$$

Exemple 41 *dans (58) on peut diviser par $(z - z_0)^{3p}$ au lieu de $(z - z_0)^{p-2}$, on aboutit au même résultat, cependant on ne peut pas diviser par $(z - z_0)^{2p}$ car pour le seul choix possible de p quand z tend vers z_0, on ne peut pas déterminer α, car la limite de la partie gauche de l'équation pour ce choix de p, est égale à l'infini.*

Cherchons la résonance $(p = -1, \alpha = 1)$**:**
On substitue : $w = (z - z_0)^{-1} + \beta(z - z_0)^{r-1}$ dans (60) et on cherche le coefficient de β on trouve :

$$Q(r)(z - z_0)^{p+r-n'} = Q(r)(z - z_0)^{r-3}$$

avec :

$$Q(r) = (r + 1)(r - 3)$$

Cherchons les constantes d'intégration :

les racines de $Q(r)$ sont $-1, 3$, injectons :

$$w = (z - z_0)^{-1} + \sum_{j=1}^{r=3} a_j(z - z_0)^{j-1}$$

dans (57), alors pour déterminer a_j, on annule le coefficient de $(z - z_0)^{p+j-n}$.

Remarque 42 *Dans ce cas on doit prendre notre $n = 3$, pour pouvoir appliquer la formule qui nous permet de déterminer les constantes d'intégration. Ce choix est fait à partir des essais numériques.*

Pour déterminer a_j, on annule le coefficient de $(z - z_0)^{p+j-n} = (z - z_0)^{j-4}$
le coefficient de a_1, correspond à $(z - z_0)^{-3}$, il est égal à :

$$-4a_1 - 4z_0 = 0 \Longrightarrow a_1 = -z_0$$

le coefficient de a_2, correspond à $(z - z_0)^{-2}$, il est égal à :

$$-3a_2 + z_0^2 - 4 + 2\mu = 0 \Longrightarrow a_2 = \frac{z_0^2 - 4 + 2\mu}{3}$$

le coefficient de a_3, correspond à $(z - z_0)^{-1}$, il est égal à :

$$\begin{aligned} & 6z_0(\frac{5}{3}z_0^2 - \frac{8}{3} + \frac{4}{3}\mu) + 6z_0(\frac{1}{3}z_0^2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\mu) \\ & -4z_0(4z_0^2 - 4 + 2\mu) + 8z_0 + 4(z_0^2 - \mu)z_0 \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

on trouve :

$$0 = 0$$

ça signifie que a_4 est arbitraire.

Donc la solution générale de l'EDO au voisinage pointé du pôle mobile z_0 est donnée par la formule suivante

$$w = (z - z_0)^{-1} - z_0 + \frac{z_0^2 - 4 + 2\mu}{3}(z - z_0) + c(z - z_0)^2 + ..., \text{ c est arbitraire.}$$

Cherchons la résonance ($p = -1$, $\alpha = -1$)**:** on substitue : $w = -(z - z_0)^{-1} + \beta(z - z_0)^{r-1}$ dans (60) et on cherche le coefficient de β on trouve :

$$Q(r)\beta(z - z_0)^{p+r-n'} = Q(r)\beta(z - z_0)^{r-3}$$

avec :

$$Q(r) = (r + 1)(r - 3)$$

Cherchons les constants d'intégration :

les racines de $Q(r)$ sont $-1, 3$, injectons :

$$w = -(z - z_0)^{-1} + \sum_{j=1}^{r=3} b_j(z - z_0)^{j-1}$$

dans (57), pour déterminer b_j, on annule le coefficient de $(z - z_0)^{p+j-n} = (z - z_0)^{j-4}$

Remarque 43 *Nous avons pris $n = 3$ pour les mêmes causes que précédemment.*

le coefficient de b_1, correspond à $(z - z_0)^{-3}$, il est égal à :

$$4b_1 + 4z_0 = 0 \Longrightarrow b_1 = -z_0$$

le coefficient de b_2, correspond à $(z - z_0)^{-2}$, il est égal à :

$$3b_2 + z_0^2 + 4 + 2\mu = 0 \Longrightarrow b_2 = -(\frac{z_0^2 + 4 + 2\mu}{3})$$

le coefficient de b_3, correspond à $(z - z_0)^{-1}$, il est égal à :

$$\begin{aligned} & 6z_0(\frac{5}{3}z_0^2 + \frac{8}{3} + \frac{4}{3}\mu) + 6z_0(-\frac{1}{3}z_0^2 - \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\mu) \\ & -4z_0(-4z_0^2 - 4 - 2\mu) + 8z_0 - 4(z_0^2 - \mu)z_0 \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

on trouve :

$$0 = 0$$

ça signifie que b_4 est arbitraire.

La solution générale de l'EDO au voisinage pointé du pôle mobile z_0 est donnée par la formule suivante

$$w = \frac{-1}{(z-z_0)} - z_0 - (\frac{z_0^2+4+2\mu}{3}).(z-z_0) + c(z-z_0)^2 + ..., \; c \text{ est arbitraire},$$

donc l'EDO vérifie les conditions nécessaires pour qu'elle soit de type Painlevé.

Remarque 44 *Une ED qui vérifie les conditions de l'algorithme, ne veut pas dire qu'elle n'admet pas de point singulier essentiel mobile.*

Exemple 45 *L'équation différentielle:*

$$w^{(2)} = \frac{(w^{(1)})^2(2w-1)}{(w^2+1)}$$

admet comme solution générale

$$w = \tan \ln(az+b), \; a, b \text{ arbitraires},$$

qui a un point singulier essentiel mobile au point $z_0 = -\frac{b}{a}$, alors que l'EDO vérifie les conditions de l'algorithme.

Chapitre 3

Résonance Négative

3 Résonance négative

3.1 Introduction

La majorité des méthodes, utilisées, pour ce genre de problème, sont analytiques (c.à.d on cherche la solution sous la forme d'une série) dans lesquelles on introduit un paramètre complexe ε assez petit pour pouvoir appliquer le Théorème de Painlevé (qui consiste à étudier le système réduit). La méthode qu'on va entamer (Méthode perturbée de Painlevé) est parmi ces méthodes, elle nous permet d'extraire les informations concernant l'indice négatif ([21]), ainsi de pouvoir obtenir d'autres conditions nécessaires pour l'absence des points critiques mobiles de type logarithmique ([22]). Avant de présenter cette méthode on va donner quelques définitions.

Définition 46 *Le couple* $(u_0^{(0)}, p)$, *avec* p *l'ordre du pôle,* $u_0^{(0)}$ *le coefficient correspondant à cet ordre.dans le développement de la solution d'une ED non linéaire est appelé Une famille*

Définition 47 *Une famille maximale d'une ED, est une famille dont le nombre des indices est égal à l'ordre de l'équation différentielle en question.*

Définition 48 *Une famille principale est une famille maximale, dont tous les indices à part* -1 *sont entiers, positifs et simples.*

Définition 49 *Un développement générique, est un développement dans lequel le nombre des coefficients arbitraires est égal à l'ordre de l'ED en question, et donc il représente la solution générale de l'ED au voisinage du point pour lequel on fait le développement.*

Remarque 50 *Une condition nécessaire pour que le développement au voisinage d'un pôle en série de Laurent, soit générique dans le cas d'une EDO, ou bien d'une EDP (et non un système) et que les indices à part* -1 *soient des nombres entiers positifs distincts.*

Définition 51 *Une solution singulière est une solution qui n'est pas particulière, donc ne peut pas se déduire de la solution générale (elle ne vérifiée pas la condition d'unicité du théorème de Cauchy).*

Exemple 52 *L'équation de type Clairaut :*

$$2(u')^2 - xu' + u = 0$$

$$\text{a pour : } \begin{cases} \text{solution générale } \ cx - 2c^2, \\ \text{solution singulière } x^2/8, \\ \text{une solution particulier } x - 2. \end{cases}$$

Remarque 53 *([31]) était le premier à noter l'absence de corrélation entre la structure des singularités de la solution générale et de la solution singulière.*

Exemple 54 *L'équation différentielle non linéaire ([30])*

$$(u^{(3)}-2u'u^{(2)})^2+4(u^{(2)})^2(u^{(2)}-(u')^2-1)=0,$$

a pour : $\begin{cases} \text{solution générale : } u=e^{\frac{c_1x+c_2}{c_1}}+\frac{c_1^2-4}{4c_1}x+c_3, \text{ qui est uniforme} \\ \text{solution singulière : } u=C_2-Logcos(x-C_1), \text{ qui possède un point singulier logarithmi} \end{cases}$

Exemple 55 *L'équation différentielle non linéaire ([32])*

$$27u(u')^3-12xu'+8u=0,$$

a pour : $\begin{cases} \text{solution générale : } u^3=c(x-c)^2, \text{ qui possède un point critique mobile.} \\ \text{solution singulière : } u^3=(4/27)x^3, \text{ qui est uniforme} \end{cases}$

Exemple 56 *L'équation différentielle non linéaire ([33])*

$$(u'')^2+4(u')^3+2(xu'-u)=0,$$

a pour : $\begin{cases} \text{solution générale : } u=(1/2)(v')^2-2v^3-xv, v''=6v^2+x, \text{ qui est uniforme} \\ \text{solution singulière : } u=Cx+2C^3, \text{ qui est uniforme} \end{cases}$

Remarque 57 *Dans le cas où on n'a pas assez de coefficients arbitraires le développement.*

$$u=\sum_{j=0}^{\infty}u_j\chi^{p+j},\ \chi=x-x_0,\ u_0\neq 0,\ p\in\mathbb{Z}^{-*} \tag{61}$$

qu'on appelle développement de Painlevé, représente une solution particulière (où même une solution singulière), cela est du à plusieurs raisons, soit la famille n'est pas maximale, ou on a un indice qui n'est pas entier, ou bien un indice négative différent de -1. *La méthode qu'on va présenter (La méthode de perturbation de Painlevé) consiste à associer un coefficient arbitraire à chaque indice.*

Théorème 58 *Les seuls bijections qui peuvent exister sur la sphère de Riemann, sont les transformations homographiques :*

$$z\longrightarrow\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},\ \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0,$$

avec $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ *des constantes complexes arbitraires.*

Théorème 59 *.La propriété de Painlevé pour une EDO* $E(u,x)=0$ *est invariante via une transformation homographique arbitraire de la variable dépendante* u *et un changement holomorphe arbitraire de la variable indépendante* x *:*

$$(u,x)\rightarrow(U,X):u=\frac{\alpha(x)U+\beta(x)}{\gamma(x)U+\delta(x)},\ X=\xi(x),\ \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0, \tag{62}$$

où $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\xi$ *dénotent des fonctions analytiques arbitraires.*

Preuve :voir ([19])

Notation 60 *Un élément de ce groupe homographique (62) sera dénoté :* $T(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\xi)$ *ou simplement* $T(\alpha,\beta;\xi)$ *dans le cas* $(\gamma=0,\delta=1)$.

Remarque 61 *L'équation représentative (par cette transformation (62) est choisie afin de simplifier une certaine expression.*

Remarque 62 *.La propriété de Painlevé est également invariante sous un plus grand groupe ([24],[16]) de transformations birationnelles, par exemple :*

$$\begin{aligned}(u,x) &\rightarrow (U,X) : u = r(x,U,\frac{dU}{dX},...,\frac{d^{N-1}U}{dx^{N-1}}) = 0, x = \phi(X),\\ (U,X) &\rightarrow (u,x) : U = R(X,u,\frac{du}{dx},...,\frac{d^{N-1}u}{dx^{N-1}}) = 0, X = \xi(x),\end{aligned}$$

N *est l'ordre de l'équation différentielle,* r *(resp* R*) est rationnelle en* u *(resp* U*) et leurs dérivées, analytique en* $x,$ *(resp* X*).*

Remarque 63 *Un changement de variable en dehors de ces transformations ((62) et le groupe de transformation birationnelles), peut changer le type d'une ED*

Exemple 64 *L'équation différentielle non linéaire*

$$2uu' - 1 = 0$$

qui a comme solution $u(z) = \sqrt{z+c}$, *admet* $z_0 = -c$, *comme point critique mobile, cependant si on fait le changement du variable suivant :* $u^2(z) = t(z)$, *l'ED devient une ED*

$$t' - 1 = 0$$

qui admet une solution à valeur uniforme : $t(z) = z$.

Remarque 65 *Si l'équation :*

$$y'' = R(y', y, z)$$

où R *désigne une fonction rationnelle en* y', *algébrique en* y *et analytique en* z, *est transformable par une transformation de (62) à une des* $50+3$ *équations trouvées par Painlevé et ses étudiants, alors elle est à point critique fixe, si non elle est à points critiques mobiles ([19]).*
L'équation :

$$y' = R(y, z)$$

est à point critique fixe, si elle est transformable par une transformation de (62) à une équation de Ricatti.

3.2 La méthode de perturbation de Painlevé

La méthode perturbée de Painlevé consiste à chercher un développement de Laurent, pour n'importe qu'elle solution, proche de la solution obtenue par la méthode de Painlevé classique. Nous faisons ceci en considérant une expansion de perturbation. Ainsi notre perturbation prolonge la solution particulière en une représentation de la solution générale.

Soit

$$E \equiv K[u, x]$$

une EDO non linéaire d'ordre N et soit

$$u^{(0)} = \sum_{j=0}^{+\infty} u_j^{(0)} \chi^{p+j}$$

une solution de cette ED, avec p l'ordre du pôle. Supposons que nous avons une famille maximale non principale, ce qui nous permet d'appliquer la méthode de Painlevé. Cherchons dans ce cas la solution perturbée proche de $u^{(0)}$, pour cela on va chercher la solution générale sous la forme :

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n u^{(n)}, .\varepsilon \text{ n'apparaît pas dans l'équation initiale} \tag{63}$$

avec:

$$u^{(n)} = \sum_{j=n\rho}^{+\infty} u_j^{(n)} \chi^{p+j}, \rho \text{ est le plus petit indice de Fuchs,}$$

Remarque 66 *Pour $u^{(n)}$, nous avons commencé par $j = n\rho$ pour avoir toutes les conditions de compatibilités pour chaque indice de Fuchs quand on injecte $u^{(n)}$ dans l'ED.*

Si on injecte (63) dans l'équation initiale, E s'écrit sous la forme :

$$E = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n E^{(n)}$$

avec :

$$\text{pour } n = 0 : \; E^{(0)} = E(x, u^{(0)}) = 0 \tag{64}$$

$$\forall n \geq 1 : E^{(n)} = \hat{E}'(x, u^{(0)}) u^{(n)} + R^{(n)}(x, u^{(0)}, u^{(1)}, ...u^{(n-1)}) = 0 \tag{65}$$

Dans laquelle $\hat{E}'$ est l'opérateur défini par la formule :

$$\hat{E}'(x, u^{(0)})_v = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} [\hat{E}(x, u^{(0)} + \lambda v) - \hat{E}(x, u^{(0)})]$$

$\hat{E}$ est la partie dominante de E, $R^{(n)}$ est un polynôme des termes précédents du développement. $R^{(1)}$ est identiquement égal à zéro. Notre objectif est de déterminer des conditions sous lesquelles l'ED soit de type Painlevé, pour cela on va utiliser le théorème II de Poincaré qui exige que :

- la solution générale $u^{(0)}$ de (64) n'a aucun point critique mobile,
- la solution générale $u^{(n)}$ de (65) n'a aucun point critique mobile pour chaque $n \geq 1$.

- **à l'ordre zéro** : La solution $\mathbf{u}^{(0)}$ de l'équation (64) qui est non linéaire ne doit pas avoir de point critique mobile, $u^{(0)}$ représente une solution particulière contenant un certain nombre de coefficients arbitraires égal à un (indice -1) auquel on ajoute le nombre d'indices de Fuchs positifs.

- **à l'ordre un** : L'équation est linéaire:

$$E^{(1)} = \hat{E}'(x, u^{(0)})u^{(1)} = 0 \tag{66}$$

avec :

$$\mathbf{u}^{(1)} = \sum_{j=\rho}^{+\infty} u_j^{(1)} \chi^{p+j}, \rho \text{ est le plus petit indice de Fuchs}$$

donc (66) peut se mettre sous la forme :

$$E^{(1)} = \sum_{j=\rho}^{+\infty} E_j^{(1)} \chi^{p+j}$$

avec :

$$E_j^{(1)} \equiv Q(j)u_j^{(1)} + H_j^{(1)} = 0,$$

à cette étape on détermine la série de Laurent $\mathbf{u}^{(1)}$, on utilise la Méthode de Frobenius, $\mathbf{u}^{(1)}$ représente la solution générale de (66), elle contient un nombre de coefficients arbitraires égal au nombre d'indices de Fuchs, de plus les indices de Fuchs de (66) sont au nombre de $i+p$ où les nombres i sont les indices de Fuchs trouvés auparavant dans $E^{(0)}$ et on a un coefficient arbitraire introduit à chaque indice de Fuchs (car l'ED est linéaire) qui doit vérifier la condition de compatibilité :

$$H_i^{(1)} = 0, \; i \text{ indice de Fuchs}$$

\- **à l'ordre supérieur** : on a

$$E^{(n)} = \hat{E}'(x, u^{(0)})u^{(n)} + R^{(n)}(x, u^{(0)}, u^{(1)}, ...u^{(n-1)}) = 0, \forall n \geq 2$$

avec :

$$u^{(n)} = \sum_{j=n\rho}^{+\infty} u_j^{(n)} \chi^{p+j}, \; \rho \text{ est le plus petit indice de Fuchs}$$

donc $E^{(n)}$ peut se mettre sous la forme :

$$E^{(n)} = \sum_{j=n\rho}^{+\infty} E_j^{(n)} \chi^{p+j}, \; \rho \text{ est le plus petit indice de Fuchs}$$

et par suite on a :

$$E_j^{(n)} \equiv Q(j)u_j^{(n)} + H_j^{(n)}(x, \{u_{j'}^{(n')}\}) = 0, \; j \geq n\rho$$

avec :

$$n' \leq n, j' - n'\rho \leq j - n\rho, (n', j') \neq (n, j),$$

à cette étape on détermine la série de Laurent $\mathbf{u}^{(n)}$, qui vérifie une équation linéaire non homogène, avec la même équation indicielle pour chaque $n \geq 1$ et $R^{(n)}$ différent pour chaque $n \geq 2$ et chaque indice de Fuchs doit vérifier la condition de compatibilité

$$\forall n \geq 0,\ H_i^{(n)} = 0. \text{ pour chaque } (i) \text{ indice de Fuchs}$$

Ces conditions sont identiques à la condition d'absence de points logarithmiques

A chaque étape nous avons un nombre de conditions nécessaires pour la stabilité de l'ED et toutes ces conditions constituent des conditions nécessaires de stabilité, si une de ces conditions n'est pas vérifiée alors l'ED n'est pas de type Painlevé.

Remarque 67 : *Nous ne savons pas s'il y a une limite supérieure pour n (ordre de perturbation) pour laquelle on s'arrête pour conclure que l'ED vérifie, ou non les conditions nécessaires de stabilité à part les deux cas suivants, on s'arrête quand :*

- la condition de compatibilité $H_i^{(n)} = 0$. i indice de Fuchs n'est pas vérifié (n ordre de perturbation)

où bien

- On a une famille maximale principale dont les $u_0^{(0)}$ trouvés ne sont pas multiples. Dans ce cas on se restreint à l'ordre zéro de perturbation, car elle correspond à la méthode classique. Ce qui nous pousse à dire, si les conditions de compatibilité sont vérifiées à l'ordre zéro, alors elles sont vérifiées pour chaque ordre supérieur à zéro.

Question **:** Si on fixe le n (l'ordre de perturbation) à quel ordre sur la somme (pour chaque terme $u^{(k)} = \sum_{j=k\rho}^{+\infty} u_j^{(k)} \chi^{p+j}$,$k \leq n$) on s'arrête ?

Réponse :

- Afin d'obtenir des conditions de stabilité, le côté pratique de cette technique montre qu'on a seulement besoin des premiers $-n\rho$ coefficients pour chaque expression (ρ est le plus petit indice de Fuchs)

$$u^{(k)} = \sum_{j=k\rho}^{+\infty} u_j^{(k)} \chi^{p+j}, k \leq n,\ n \text{ est l'ordre de perturbation}$$

  c à d :

$$u^{(k)} = \sum_{j=k\rho}^{k\rho - n\rho - 1} u_j^{(k)} \chi^{p+j}, n \text{ est l'ordre de perturbation, } (n \text{ est fixé})$$

  car au delà de cet ordre il n'y a pas des conditions de stabilités qui peuvent surgir d'une part et d'autre part les termes qui suivent le terme $u^{(k)}$ ne vont dépendre que de ces premiers $-n\rho$ coefficients.

La double expansion de la solution u (Taylor en ε, Laurent en χ) peut être réécrite comme série de Laurent en χ qui s'étend à l'infini dans les deux extrémités on a :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n u^{(n)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \sum_{j=n\rho}^{+\infty} u_j^{(n)} \chi^{p+j} \end{aligned}$$

comme : $0 \leq n < +\infty$ et $\rho \leq -1$ alors : $n\rho > -\infty$ et puisque $n\rho = j \leq +\infty$ ce qui nous permet de dire que :$-\infty \leq j \leq +\infty$ ainsi on peut écrire :

$$u = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} u_j \chi^{p+j}.$$

- La méthode perturbée de Painlevé est utile si et seulement si l'ordre zéro $n = 0$ échoue à décrire la solution générale. Ceci peut se produire quand il y a présence d'un indice négatif de Fuchs en plus de -1.

- S'il existe des familles pour lesquelles le test est vérifié, alors ces familles maximales donnent des représentations locales, uniformes de la solution générale de l'ED en question au voisinage du point singulier z_0.

- Le test de Painlevé ne vise pas à donner tous les cas possibles de stabilité, mais à donner plus de conditions

3.3 Application

Les exemples qu'on va présenter exposent en détail toutes les étapes de ce test, et dévoilent un de ses avantages en trouvant la solution générale de l'ED au voisinage des pôles mobiles, de plus on donne les cas pour lesquelles on peut appliquer cette technique (Perturbation de Painlevé).

Exemple 68 *([28] p108) On considère l'EDO non linéaire E qui a pour solution générale :*

$$u = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}, \; a \text{ et } b \text{ sont arbitraires}$$

à savoir :

$$E \equiv K[u] \equiv u_{xx} + 3uu_x + u^3 = 0, \tag{67}$$

on va voir si on peut appliquer la méthode de perturbation de Painlevé, et s'il est possible d'aboutir au même résultat, tout d'abord on va déterminer toutes les familles de (67), Injectons

$$u = u_0^{(0)} \chi^p \tag{68}$$

dans (67) on trouve :

$$p(u_0^{(0)}p - u_0^{(0)})\chi^{p-2} + 3(u_0^{(0)})^2 p\chi^{2p-1} + (u_0^{(0)})^3\chi^{3p} = 0 \tag{69}$$

Cherchons le nombre $p < 0$ afin d'équilibrer les puissances minimales des termes de l'ED, posons : $q = \min\ (p-2, 2p-1, 3p)$, on a le cas suivant pour le choix de p, q

$$p - 2 = 2p - 1 = 3p = q$$

qui donne :

$$(p, q) = (-1, -3),$$

l'équation simplifiée dans ce cas qu'on note $\hat{E}$ est :

$$\hat{E} \equiv E$$

on remplace $p = -1$ dans (69), on la divise par χ^{-3}, on obtient :

$$2u_0^{(0)} - 3(u_0^{(0)})^2 + (u_0^{(0)})^3 = u_0^{(0)}(u_0^{(0)} - 2)(u_0^{(0)} - 1) = 0$$

puisque $u_0^{(0)} \neq 0$, alors :

$$u_0^{(0)} = 2, 1$$

on a deux familles :

$$(p, u_0^{(0)}) = (-1, 1), (-1, 2).$$

Cherchons les indices de Fuchs, injectons :

$$u_0^{(0)}\chi^{-1} + \beta\chi^{r-1}$$

dans l'ES on trouve :

$$Q(r) = (r-1)(r-2) + 3[u_0^{(0)}(r-1) - u_0^{(0)} + (u_0^{(0)})^2]$$

par conséquent : $\begin{cases} \text{pour } u_0^{(0)} = 1 \text{ on a :} Q(r) = (r-1)(r+1), \text{ les indices de Fuchs sont :} -1, 1 \\ \text{pour } u_0^{(0)} = 2 \text{ on a :} Q(r) = (r+1)(r+2), \text{ les indices de Fuchs sont :} -1, -2 \end{cases}$

On remarque que les deux familles sont maximales, donc l'application de la méthode de perturbation de Painlevé est faisable pour ces deux familles.

- – Pour la première famille $(p, u_0^{(0)}) = (-1, 1)$, cherchons la série de Painlevé (solution générale au voisinage de $\chi = 0$) sous la forme :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n u^{(n)} \\ &= u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \varepsilon^3 u^{(3)} + ... + \varepsilon^j u^{(j)} + ... \end{aligned} \tag{70}$$

avec :

$$u^{(n)} = \sum_{j=n.\rho}^{+\infty} u_j^{(n)}.\chi^{p+j},\ \rho \text{ est le plus petit indice de Fuchs, } n \geq 0$$

En injectant (70) dans (67) on trouve :

$$\begin{aligned}
E = & \underbrace{u_{xx}^{(0)} + 3u^{(0)}.u_x^{(0)} + (u^{(0)})^3} \qquad (71)\\
& +\varepsilon\{[\underbrace{u_{xx}^{(1)} + 3u^{(0)}.u_x^{(1)} + 3u^{(1)}u_x^{(0)} + 3(u^{(0)})^2u^{(1)}}] + \underbrace{\ 0\ }\}\\
& +\varepsilon^2\{[\underbrace{u_{xx}^{(2)} + 3u^{(0)}.u_x^{(2)} + 3u^{(2)}u_x^{(0)} + 3(u^{(0)})^2u^{(2)}}] + \underbrace{[3u^{(1)}.u_x^{(1)} + 3(u^{(1)})^2u^{(0)}]}\}\\
& +\varepsilon^3\{[\underbrace{u_{xx}^{(3)} + 3u^{(0)}.u_x^{(3)} + 3u^{(3)}u_x^{(0)} + 3(u^{(0)})^2u^{(3)}}] + \underbrace{[3(u^{(1)}u^{(2)})_x + (u^{(1)})^3]}\}\\
& +\vdots\\
& +\varepsilon^n\{\underbrace{\hat{E}'(x,u^{(0)})u^{(n)}} + \underbrace{R^{(n)}(x,u^{(0)},u^{(1)},...u^{(n-1)})}\}\\
& +\vdots\\
= & \ 0
\end{aligned}$$

qui ce met sous la forme suivante :

$$E = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n E^{(n)}$$

avec :

$$\begin{aligned}
E^{(0)} &= E(x,u^{(0)})\\
E^{(n)} &\equiv \underbrace{\hat{E}'(x,u^{(0)})u^{(n)}} + \underbrace{R^{(n)}(x,u^{(0)},u^{(1)},...u^{(n-1)})},\ n \geq 1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\hat{E}'(x,u^{(0)})_v &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}[\hat{E}(x,u^{(0)}+\lambda v) - \hat{E}(x,u^{(0)})]\\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\{(u_{xx}^{(0)}+\lambda v_{xx}) + 3[(u^{(0)}+\lambda v)(u_x^{(0)}+\lambda v_x)] + (u^{(0)}+\lambda v)^3\\
&\quad -[u_{xx}^{(0)} + 3u^{(0)}u_x^{(0)} + (u^{(0)})^3]\}\\
&= v_{xx} + 3u^{(0)}v_x + 3vu_x^{(0)} + 3(u^{(0)})^2v
\end{aligned}$$

d'où :

$$\hat{E}'(x,u^{(0)}) = K_d'[u^{(0)}] \equiv \partial_x^2 + 3u^{(0)}.\partial_x + 3u_x^{(0)} + 3(u^{(0)})^2$$

- pour $E^{(0)}$ on a :

$$\begin{aligned}
E^{(0)} &= E(x,u^{(0)}) \qquad (72)\\
&= u_{xx}^{(0)} + 3u^{(0)}.u_x^{(0)} + (u^{(0)})^3
\end{aligned}$$

en remplaçant $u^{(0)}$ par la série :

$$u^{(0)} = \sum_{j=0}^{+\infty} u_j^{(0)}.\chi^{p+j},\ p = -1$$

dans (72) on trouve :

$$\begin{aligned} E^{(0)} &= 0.\chi^{-3} + 0.\chi^{-2} + [3u_2^0 + 3(u_1^0)^2]\chi^{-1} \\ &\quad +[8u_3^0 + (u_1^0)^3 + 9u_1^0u_2^0] \\ &\quad +[15u_4^0 + 3(u_1)^2u_2 + 6(u_2)^2 + 12u_1u_3]\chi \\ &\quad +\vdots \\ &= 0 \end{aligned} \tag{73}$$

d'autre part on a :

$$\begin{aligned} E^{(0)} &= \sum_{j\geq 0} E_j^{(0)}\chi^{j+q},\ q = -3 \\ &= \sum_{j\geq 0}[Q(j)u_j^0 + H_j^{(0)}]\chi^{j-3} \end{aligned} \tag{74}$$

pour $u_0^0 = 1$, en identifiant (74) et (73) on trouve :

- $Q(0)u_0^0 + H_0^{(0)} = 0 \Longrightarrow -1 + H_0^{(0)} = 0 \Longrightarrow H_0^{(0)} = 1$
- $Q(1)u_1^0 + H_1^{(0)} = 0 \Longrightarrow H_1^{(0)} = 0$ et $u_1^0 = c$ arbitraire
- $Q(2)u_2^0 + H_2^{(0)} = 3u_2^0 + 3(u_1^0)^2 = 0$, ce qui donne$\left\{\begin{array}{rl} u_2^0 &= -(c)^2 \\ H_2^{(0)} &= 3(u_1^0)^2 = 3(c)^2 \end{array}\right.$
- $Q(3)u_3^0 + H_3^{(0)} = 8u_3^0 + (u_1^0)^3 + 9u_1^0u_2^0 = 0$, ce qui donne $u_3^0 = c^3$
- $Q(4)u_4^0 + H_4^{(0)} = 15u_4^0 + 3(u_1)^2u_2 + 6(u_2)^2 + 12u_1u_3 = 0$, ce qui donne

$$u_4 = -c^4$$

donc le premier terme de notre sérié de Painlevé pour la famille $(p, u_0) = (-1, 1)$ est :

$$u^{(0)} = \chi^{-1} + c - (c)^2\chi + c^3\chi^2 - c^4\chi^3 + ...,\ c \text{ est arbitraire}$$

qui se met sous la forme :

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= \chi^{-1} + \frac{c}{1 + c\chi}, 0 < |\chi| < |c|^{-1} \\ &= \chi^{-1} + c\sum_{j=1}^{\infty}(-c\chi)^{j-1} \end{aligned}$$

Cherchons maintenant le deuxième terme $u^{(1)}$

- pour $E^{(1)}$ on a :

$$\begin{aligned} E^{(1)} &= \hat{E}'(x,u^{(0)})u^{(1)} \\ &= \underbrace{u^{(1)}_{xx} + 3u^{(0)}.u^{(1)}_x + 3u^{(1)}u^{(0)}_x + 3(u^{(0)})^2u^{(1)}} \end{aligned} \tag{75}$$

en remplaçant $u^{(1)}$ par la série

$$u^{(1)} = \sum_{j=-1}^{+\infty} u^{(1)}_j.\chi^{p+j},\ p=-1$$

dans (75) on trouve :

$$\begin{aligned} E^{(1)} = & -u^1_0\chi^{-3} + [3u^0_2u^1_{-1} + 3u^0_1u^1_0 + 3(u^0_1)^2u^1_{-1}]\chi^{-2} \\ & +[6u^0_1u^1_1 + 6u^0_2u^1_0 + 3(u^0_1)^2u^1_0 + 6u^0_3u^1_{-1} + 6u^0_1u^0_2u^1_{-1} + 3u^1_2]\chi^{-1} \\ & +\vdots \end{aligned} \tag{76}$$

d'autre part on a :

$$E^{(1)} = \sum_{j\geq -1}[Q(j)u^1_j + H^{(1)}_j]\chi^{j-3} \tag{77}$$

en identifiant (76) et (77) on trouve :

- $Q(-1)u^1_{-1} + H^{(1)}_{-1} = 0 \Longrightarrow H^{(1)}_{-1} = 0,\ u^1_{-1} = A_1$ arbitraire
- $Q(0)u^1_0 + H^{(1)}_0 = -u^1_0 = 0 \Longrightarrow H^{(1)}_0 = 0$
- $Q(1)u^1_1 + H^{(1)}_1 = 3u^0_2u^1_{-1} + 3u^0_1u^1_0 + 3(u^0_1)^2u^1_{-1} = 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} H^{(1)}_1 = 3u^0_2u^1_{-1} + 3u^0_1u^1_0 + 3(u^0_1)^2u^1_{-1} = 0 \\ u^1_1 = B_1 \text{ arbitraire},\ u^1_0 = 0 \end{cases}$$

- $Q(2)u^1_2 + H^{(1)}_2 = 0$

$\Longrightarrow 3u^1_2 + 6u^0_1u^1_1 + 6u^0_2u^1_0 + 3(u^0_1)^2u^1_0 + 6u^0_3u^1_{-1} + 6u^0_1u^0_2u^1_{-1} = 0$

$\Longrightarrow$

$$u^1_2 = -2cB_1$$

- $Q(3)u^1_3 + H^{(1)}_3 = 0$

$\Longrightarrow 8u^1_3 + 6u^0_1u^0_2u^1_0 + 9u^1_0u^0_3 + 9u^1_0u^1_2 + 9u^0_2u^1_1 + 3(u^0_1)^2u^1_1 + 9u^1_{-1}u^0_4 + 3(u^0_2)^2u^1_{-1} + 6u^0_1u^0_3u^1_{-1} = 0$

$\Longrightarrow$

$$u^1_3 = 3(c)^2B_1$$

donc le deuxième terme de notre série de Painlevé pour la famille $(p, u^{(0)}_0) = (-1, 1)$ est :

$$u^{(1)} = A_1\chi^{-2} + B_1 - 2cB_1\chi + 3(c)^2B_1\chi^2 + ...$$

- Cherchons maintenant le troisième terme $u^{(2)}$ on a :

$$\begin{aligned} E^{(2)} &= u_{xx}^{(2)} + 3u^{(0)}.u_x^{(2)} + 3u^{(2)}u_x^{(0)} + 3(u^{(0)})^2u^{(2)} \\ &\quad +3u^{(1)}.u_x^{(1)} + 3(u^{(1)})^2u^{(0)} \end{aligned} \tag{78}$$

en remplaçant $u^{(2)}$ par la série

$$u^{(2)} = \sum_{j=-2}^{+\infty} u_j^{(2)}.\chi^{p+j},\ p = -1$$

dans (78) et $u^{(1)}$,$u^{(0)}$ par leurs séries on trouve :

$$\begin{aligned} E^{(2)} &= [-3(u_{-1}^1)^2 + 3u_{-2}^2]\chi^{-5} \\ &\quad +[-3u_{-1}^1u_0^1 - 3u_1^0u_{-2}^2 + 3u_1^0(u_{-1}^1)^2]\chi^{-4} \\ &\quad +[-u_0^2 + 6u_1^0u_{-1}^1u_0^1 + 3u_2^0(u_{-1}^1)^2 + 3(u_0^1)^2u_{-2}^2]\chi^{-3} + \\ &\quad +[3u_{-1}^1u_2^1 + 3(u_1^0)^2u_{-1}^2 + 3u_1^0(u_0^1)^2 + 3(u_{-1}^1)^2u_3^0 + 6u_1^0u_2^0u_{-2}^2 \\ &\quad +3u_0^1u_1^1 + 6u_2^0u_{-1}^1u_0^1 + 3u_3^0u_{-2}^2 + 3u_2^0u_{-1}^2 + 6u_1^0u_{-1}^1u_1^1]\chi^{-2} \\ &\quad +[3u_{-2}^2(u_2^0)^2 + 6u_{-2}^2u_3^0u_1^0 + 6u_1^0u_0^1u_1^1 + 6u_{-1}^2u_3^0 + 3(u_{-1}^1)^2u_4^0 \\ &\quad +3u_0^2(u_1^0)^2 + 6u_{-1}^1u_3^1 + 6u_1^0u_1^2 + 6u_1^0u_{-1}^1u_2^1 + 6u_2^1u_0^1 + 6u_1^0u_2^0u_{-1}^2 \\ &\quad +6u_{-1}^1u_1^1u_2^0 + 6u_{-1}^1u_0^1u_3^0 + 6u_2^0u_0^2 + 6u_4^0u_{-2}^2 + 3(u_1^1)^2 \\ &\quad +3u_2^0(u_0^1)^2 + 3u_2^2]\chi^{-1} \\ &\quad +\vdots \end{aligned} \tag{79}$$

d'autre part on a :

$$\begin{aligned} E^{(2)} &= \sum_{j\geq -2} E_j^{(2)}\chi^{j+q},\ q = -3 \\ &= \sum_{j\geq -2} [Q(j)u_j^2 + H_j^{(2)}]\chi^{j-3} \end{aligned} \tag{80}$$

en identifiant (79) avec (80) on trouve :

- $Q(-2)u_{-2}^2 + H_{-2}^{(2)} = -3(u_{-1}^1)^2 + 3u_{-2}^2 = 0$, ce qui donne :

$$u_{-2}^2 = (u_{-1}^1)^2 = (A_1)^2$$

- $Q(-1)u_{-1}^2 + H_{-1}^{(2)} = -3u_{-1}^1u_0^1 - 3u_1^0u_{-2}^2 + 3u_1^0(u_{-1}^1)^2 = 0$, ce qui donne :

$$H_{-1}^{(2)} = -3u_{-1}^1u_0^1 - 3u_1^0u_{-2}^2 + 3u_1^0(u_{-1}^1)^2 = 0,\ u_{-1}^2{=}A_2 \text{ arbitraire}$$

- $Q(0)u_0^2 + H_0^{(2)} = -u_0^2 + 6u_0^1u_{-1}^1u_0^1 + 3u_2^0(u_{-1}^1)^2 + 3(u_0^1)^2u_{-2}^2 = 0$

$\Longrightarrow$

$$u_0^2 = -3(c)^2(A_1)^2$$

- $Q(1)u_1^2 + H_1^{(2)} = 3u_{-1}^1u_2^1 + 3(u_1^0)^2u_{-1}^2 + 3u_1^0(u_0^1)^2 + 3(u_{-1}^1)^2u_3^0 + 6u_1^0u_2^0u_{-2}^2$

$+3u_0^1u_1^1 + 6u_2^0u_{-1}^1u_0^1 + 3u_3^0u_{-2}^2 + 3u_2^0u_{-1}^2 + 6u_1^0u_{-1}^1u_1^1 = 0$
$\Longrightarrow$

$$H_1^{(2)} = 0, u_1^2 = B_2 \text{ arbitraire}$$

- $-$

$$\begin{aligned}
Q(2)u_2^2 + H_2^{(2)} &= 3u_2^2 + 3u_{-2}^2(u_2^0)^2 + 6u_{-2}^2u_3^0u_1^0 + 6u_1^0u_0^1u_1^1 + 6u_{-1}^2u_3^0 \\
&\quad +3(u_{-1}^1)^2u_4^0 + 3u_0^2(u_1^0)^2 + 6u_{-1}^1u_3^1 + 6u_1^0u_1^2 + 6u_1^0u_{-1}^1u_2^1 \\
&\quad +6u_2^1u_0^1 + 6u_1^0u_2^0u_{-1}^2 + 6u_{-1}^1u_1^1u_2^0 + 6u_{-1}^1u_0^1u_3^0 + 6u_2^0u_0^2 \\
&\quad +6u_4^0u_{-2}^2 + 3(u_1^1)^2 + 3u_2^0(u_0^1)^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$u_2^2 = 3(c)^4(A_1)^2 - 2cB_2 - 2(c)^4 - (B_1)^2$$

donc on peut écrire :

$$\begin{aligned}
u^2 &= (A_1)^2\chi^{-3} + A_2\chi^{-2} - 3(c)^2(A_1)^2\chi^{-1} + B_2 \\
&\quad +[3(c)^4(A_1)^2 - 2cB_2 - 2(c)^4 - (B_1)^2]\chi \\
&\quad +\vdots
\end{aligned}$$

En suivant ce procédé, on détermine la série de Painlevé pour la famille $(p, u_0^{(0)}) = (-1, 1)$ qui est donnée par la formule :

$$\begin{aligned}
u &= \chi^{-1} + c\sum_{j=1}^{\infty}(-c\chi)^{j-1} \\
&\quad +\varepsilon\{A_1\chi^{-2} + B_1 - 2cB_1\chi + 3(c)^2B_1\chi^2 + ...\} \\
&\quad +\varepsilon^2\{(A_1)^2\chi^{-3} + A_2\chi^{-2} - 3(c)^2(A_1)^2\chi^{-1} + B_2 \\
&\quad +[3(c)^4(A_1)^2 - 2cB_2 - 2(c)^4 - (B_1)^2]\chi + ...\} \\
&\quad +\vdots
\end{aligned}$$

$$u = (\varepsilon A_1\sum_{j=-\infty}^{-2}(\varepsilon A_1)^{-j-2}\chi^j) + \chi^{-1} + (C_1\sum_{j=0}^{+\infty}(-C_1\chi)^j),\ C_1 = c + \varepsilon B_1$$

qui se met sous la forme :

$$\begin{aligned}
u &= \frac{\varepsilon A_1 \chi^{-2}}{1-\varepsilon A_1 \chi^{-1}} + \chi^{-1} + \frac{C_1}{1+C_1\chi} \\
&= \frac{1}{\chi - \varepsilon A_1} + \frac{C_1}{1+C_1\chi} \\
&= \frac{1}{x-(x_0+\varepsilon A_1)} + \frac{1}{x-(x_0-1/C_1)} \\
&= \frac{1}{x-(x_0+\varepsilon A_1)} + \frac{1}{x-[x_0-\frac{1}{(c+\varepsilon B_1)}]} \\
&= \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b},
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
a &= (x_0+\varepsilon A_1) \\
b &= (x_0-1/C_1)
\end{aligned}$$

Finalement on peut dire, pour la famille $(p, u_0^{(0)}) = (-1, 1)$ nous avons pu écrire la solution sous la forme lancée au début.

- Pour la deuxième famille $(p, u_0^{(0)}) = (-1, 2)$ qui est maximale non principale, .la solution de l'ED au voisinage de $\chi = 0$ à l'ordre zéro de perturbation est réduite à un seul terme (solution particulière, on ne peut pas appliquer la méthode classique de Painlevé car on a un indice négative)

$$u^{(0)} = 2\chi^{-1}$$

- Cherchons le deuxième terme $u^{(1)}$

pour $E^{(1)}$ on a :

$$E^{(1)} = u_{xx}^{(1)} + 3u^{(0)}.u_x^{(1)} + 3u^{(1)}u_x^{(0)} + 3(u^{(0)})^2 u^{(1)} \tag{81}$$

si on remplace $u^{(0)}$ par la valeur $u^{(0)} = 2\chi^{-1}$, et $u^{(1)}$ par la série :

$$\begin{aligned}
u^{(1)} &= \sum_{j=\rho=-2}^{+\infty} u_j^{(1)}.\chi^{p+j} \\
&= u_{-2}^{(1)}\chi^{-3} + u_{-1}^{(1)}\chi^{-2} + u_0^{(1)}\chi^{-1} + u_1^{(1)} + \ldots
\end{aligned}$$

dans (81) on trouve :

$$2u_0^{(1)}\chi^{-3} + 6u_1^{(1)}\chi^{-2} + 12u_2^{(1)}\chi^{-1} + 20u_3^{(1)} + 30u_4^{(1)}\chi + \ldots \tag{82}$$

qui se met sous la forme :

$$E^{(1)} = \sum_{j \geq -2} [Q(j)u_j^1 + H_j^{(1)}]\chi^{j-3} \tag{83}$$

avec :

$$Q(r) = (r+1)(r+2)$$

en identifiant (82) et (83) on trouve

- $[Q(-2)u_{-2}^1 + H_{-2}^{(1)}]\chi^{-5} = 0 \Longrightarrow H_{-2}^{(1)} = 0,\ u_{-2}^1 = A_1$ arbitraire
- $[Q(-1)u_{-1}^1 + H_{-1}^{(1)}]\chi^{-4} = 0 \Longrightarrow H_{-1}^{(1)} = 0,\ u_{-1}^1 = B_1$ arbitraire
- $[Q(0)u_0^1 + H_0^{(1)}]\chi^{-3} = 2u_0^{(1)}\chi^{-3} = 0 \Longrightarrow H_0^{(1)} = 0, u_0^{(1)} = 0$
- $[Q(1)u_1^1 + H_1^{(1)}]\chi^{-2} = 6u_1^{(1)}\chi^{-2} = 0 \Longrightarrow H_1^{(1)} = 0, u_1^{(1)} = 0$
- $[Q(2)u_2^1 + H_2^{(1)}]\chi^{-1} = 12u_2^{(1)}\chi^{-1} = 0 \Longrightarrow H_2^{(1)} = 0, u_2^{(1)} = 0$
- $\vdots$

ce qui implique que les deux coefficients $u_{-2}^{(1)}, u_{-1}^{(1)}$ sont arbitraires et les autres sont nuls. Alors la série $u^{(1)}$ est donnée par la formule :

$$u^{(1)} = A_1\chi^{-3} + B_1\chi^{-2},\ \ A_1, B_1 \text{ sont arbitraires}$$

Cherchons le terme $u^{(2)}$ on a :

$$\begin{aligned} E^{(2)} &= \underbrace{[u_{xx}^{(2)} + 3u^{(0)}.u_x^{(2)} + 3u^{(2)}u_x^{(0)} + 3(u^{(0)})^2u^{(2)}]} \\ &\quad + \underbrace{[3u^{(1)}.u_x^{(1)} + 3(u^{(1)})^2u^{(0)}]} \end{aligned} \tag{84}$$

- remplaçons $u^{(0)}$, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ dans (84), respectivement par : $2\chi^{-1}$, $A_1\chi^{-3} + B_1\chi^{-2}$,

$$\sum_{j=2\rho=-4}^{+\infty} u_j^{(2)}.\chi^{p+j} = u_{-4}^{(2)}\chi^{-5} + u_{-3}^{(2)}\chi^{-4} + u_{-2}^{(2)}\chi^{-3} + u_{-1}^{(2)}\chi^{-2} + ...$$

on trouve :

$$\begin{aligned} E^{(2)} &= [6u_{-4}^{(2)} - 3(A_1)^2]\chi^{-7} + [2u_{-3}^{(2)} - 3A_1B_1]\chi^{-6} + 2u_0^{(2)}\chi^{-3} \\ &\quad +6u_1^{(2)}\chi^{-2} + 12u_2^{(2)}\chi^{-1} + 20u_3^{(2)} + 30u_4^{(2)}\chi + ... \end{aligned} \tag{85}$$

qui se met sous la forme :

$$\begin{aligned} E^{(2)} &= \sum_{j=2\rho=-4}^{+\infty} E_j^{(2)}.\chi^{q+j} \\ &= E_{-4}^{(2)}\chi^{-7} + E_{-3}^{(2)}\chi^{-6} + E_{-2}^{(2)}\chi^{-5} + E_{-1}^{(2)}\chi^{-4} + +E_0^{(2)}\chi^{-3}... \\ &= \sum_{j=2\rho=-4} [Q(j)u_j^2 + H_j^{(2)}]\chi^{j-3} \end{aligned} \tag{86}$$

en identifiant (85) et (86) on trouve :

- $Q(-4)u_{-4}^2 + H_{-4}^{(2)} = 6u_{-4}^{(2)} - 3(A_1)^2 = 0 \Rightarrow u_{-4}^{(2)} = \frac{1}{2}(A_1)^2 = H_{-4}^{(2)}$
- $Q(-3)u_{-3}^2 + H_{-3}^{(2)} = [2u_{-3}^{(2)} - 3A_1B_1 = 0 \Rightarrow u_{-3}^{(2)} = \frac{3}{2}A_1B_1$
- $Q(-2)u_{-2}^{(2)} + H_{-2}^{(2)} = 0 \Rightarrow u_{-2}^{(2)} = A_1$ arbitraire et $H_{-2}^{(2)} = 0$
- $Q(-1)u_{-1}^2 + H_{-1}^{(2)} = 0 \Rightarrow u_{-1}^{(2)} = B_1$ arbitraire et $H_{-1}^{(2)} = 0$

$\vdots$

Finalement on a :

$$u^{(2)} = \frac{1}{2}(A_1)^2\chi^{-5} + \frac{3}{2}A_1B_1\chi^{-4} + ...$$

Cherchons le terme $u^{(3)}$ on a :

$$\begin{aligned} E^{(3)} &= [\underbrace{u_{xx}^{(3)} + 3u^{(0)}.u_x^{(3)} + 3u^{(3)}u_x^{(0)} + 3(u^{(0)})^2u^{(3)}}] \\ &\quad + \underbrace{[3(u^{(1)}u^{(2)})_x + (u^{(1)})^3]}\} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{87}$$

si on remplace $u^{(0)}, u^{(1)}$, $u^{(2)}$par leurs valeurs et $u^{(3)}$ par la série

$$u^{(3)} = \sum_{j=3\rho=-6}^{+\infty} u_j^{(3)}.\chi^{p+j}$$

dans (87) on trouve :

$$\begin{aligned} E^{(3)} &= (20u_{-6}^3 - 5(A_1)^3)\chi^{-9} + [12u_{-5}^3 - 15(A_1)^2B_1]\chi^{-8} \\ &\quad +(6u_{-4}^3 - 6A_1(B_1)^2)\chi^{-7} + [2u_{-3}^3 + (B_1)^3]\chi^{-6} \\ &\quad +0.\chi^{-5} + 0.\chi^{-4} + 2u_0^3\chi^{-3} + ... \end{aligned} \tag{88}$$

qui se met sous la forme :

$$\begin{aligned} E^{(3)} &= \sum_{j=2\rho=-6}^{+\infty} E_j^{(3)}.\chi^{q+j} \\ &= \sum_{j=2\rho=-6} [Q(j)u_j^3 + H_j^{(3)}]\chi^{j-3} \end{aligned} \tag{89}$$

en identifiant (89) et (88) on trouve :

- $Q(-6)u^3_{-6} + H^{(3)}_{-6} = 20u^3_{-6} - 5(A_1)^3 = 0 \Rightarrow u^3_{-6} = \frac{1}{4}(A_1)^3$
- $Q(-5)u^3_{-5} + H^{(3)}_{-5} = 12u^3_{-5} - 15(A_1)^2B_1 = 0 \Rightarrow u^3_{-5} = \frac{5}{4}(A_1)^2B_1$
- $Q(-4)u^3_{-4} + H^{(3)}_{-4} = 6u^3_{-4} - 6A_1(B_1)^2 - 6A_1A_1 = 0$

$\Rightarrow$

$$u^3_{-4} = A_1(B_1)^2 + A_1A_1$$

- $Q(-3)u^3_{-3} + H^{(3)}_{-3} = 2u^3_{-3} - 3B_1A_1 + (B_1)^3 - 3A_1B_1 \Rightarrow$

$$u^3_{-3} = \frac{3}{2}B_1A_1 - \frac{1}{2}(B_1)^3 + \frac{3}{2}A_1B_1$$

- $Q(-2)u^{(3)}_{-2} + H^{(3)}_{-2} = 0 \Rightarrow$

$$u^{(3)}_{-2} = A_1 \text{ arbitraire et } H^{(3)}_{-2} = 0$$

- $Q(-1)u^{(3)}_{-1} + H^{(3)}_{-1} = 0 \Rightarrow$

$$u^{(3)}_{-1} = B_1 \text{ arbitraire et } H^{(3)}_{-1} = 0$$

ainsi on a :

$$\begin{aligned} u^{(3)} &= \frac{1}{4}(A_1)^3\chi^{-7} + \frac{5}{4}(A_1)^2B_1\chi^{-6} + [A_1(B_1)^2]\chi^{-5} \\ &\quad +[-\frac{1}{2}(B_1)^3]\chi^{-4} + ... \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} u &= 2\chi^{-1} + \varepsilon(A_1\chi^{-3} + B_1\chi^{-2}) + \varepsilon^2(\frac{1}{2}(A_1)^2\chi^{-5} + \frac{3}{2}A_1B_1\chi^{-4}) \\ &\quad +\varepsilon^3\{\frac{1}{4}(A_1)^3\chi^{-7} + \frac{5}{4}(A_1)^2B_1\chi^{-6} + [A_1(B_1)^2 + A_1A_1]\chi^{-5} \\ &\quad +[\frac{3}{2}B_1A_1 - \frac{1}{2}(B_1)^3 + \frac{3}{2}A_1B_1]\chi^{-4} + A_1\chi^{-3} + B_1\chi^{-2}\} \\ &\quad +\vdots \end{aligned}$$

dans ce cas on trouve :

$$\begin{aligned} u &= 2\chi^{-1} + \varepsilon(A_1\chi^{-3} + B_1\chi^{-2}) + \varepsilon^2(\frac{1}{2}(A_1)^2\chi^{-5} + \frac{3}{2}A_1B_1\chi^{-4}) \\ &\quad +\varepsilon^3\{\frac{1}{4}(A_1)^3\chi^{-7} + \frac{5}{4}(A_1)^2B_1\chi^{-6} + A_1(B_1)^2\chi^{-5} - \frac{1}{2}(B_1)^3\chi^{-4}\} \\ &\quad +\vdots \end{aligned}$$

qu'on peut la mettre sous la forme d'une série de Laurent :

$$u = 2\chi^{-1} + \varepsilon B_1\chi^{-2} + \varepsilon A_1\chi^{-3} + [\varepsilon^2\frac{3}{2}A_1B_1 - \frac{1}{2}\varepsilon^3(B_1)^3]\chi^{-4} + ...$$

d'autre part on a :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\chi - a} + \frac{1}{\chi - b} & (90) \\ &= \frac{1}{\chi}\frac{1}{(1-\frac{a}{\chi})} + \frac{1}{\chi}\frac{1}{(1-\frac{b}{\chi})} \\ &= \frac{1}{\chi}\sum_{j\geq 0}(\frac{a}{\chi})^j + \frac{1}{\chi}\sum_{j\geq 0}(\frac{b}{\chi})^j, \left|\frac{a}{\chi}\right| < 1, \left|\frac{b}{\chi}\right| < 1 \\ &= \sum_{j\geq 0} a^j\chi^{-j-1} + \sum_{j\geq 0} b^j\chi^{-j-1} \\ &= \sum_{j\geq 0}(a^j + b^j)\chi^{-j-1}, \text{(car les 2 séries sont cv)} & (91) \end{aligned}$$

comme :

$$u = 2\chi^{-1} + \varepsilon B_1\chi^{-2} + \varepsilon A_1\chi^{-3} + [\varepsilon^2\frac{3}{2}A_1B_1 - \frac{1}{2}\varepsilon^3(B_1)^3]\chi^{-4} + ... \quad (92)$$

en identifiant (91) et (92) on trouve :

- $(a + b) = \varepsilon B_1$
- $(a^2 + b^2) = \varepsilon A_1$

$\vdots$

comme $(a + b)^2 = (\varepsilon B_1)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
alors : $\varepsilon A_1 + 2ab = (\varepsilon B_1)^2$
ainsi : $ab = \frac{1}{2}[(\varepsilon B_1)^2 - \varepsilon A_1]$
on peut écrire :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\chi - a} + \frac{1}{\chi - b} \\ &= \frac{2\chi - (a+b)}{(\chi - a)(\chi - b)} \\ &= \frac{2\chi - \varepsilon B_1}{\chi^2 - \chi(a+b) + ab} \\ &= \frac{2\chi - \varepsilon B_1}{\chi^2 - \chi\varepsilon B_1 + \frac{1}{2}[(\varepsilon B_1)^2 - \varepsilon A_1]} \end{aligned}$$

d'autre part : $a+b=\varepsilon B_1 \Longrightarrow a=\varepsilon B_1 - b$.
et $a^2+b^2=\varepsilon A_1 \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon B_1-b)^2+b^2 &= \varepsilon A_1\\
2b^2-2b\varepsilon B_1 &= \varepsilon A_1-(\varepsilon B_1)^2\\
b^2-2b\frac{\varepsilon B_1}{2}+(\frac{\varepsilon B_1}{2})^2-(\frac{\varepsilon B_1}{2})^2 &= \frac{1}{2}[\varepsilon A_1-(\varepsilon B_1)^2]\\
(b-\frac{\varepsilon B_1}{2})^2 &= \frac{1}{2}[\varepsilon A_1-(\varepsilon B_1)^2]+(\frac{\varepsilon B_1}{2})^2\\
(b-\frac{\varepsilon B_1}{2})^2 &= \frac{1}{4}[2\varepsilon A_1-(\varepsilon B_1)^2]\\
b &= \frac{1}{2}(\varepsilon B_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{[2\varepsilon A_1-(\varepsilon B_1)^2]})
\end{aligned}$$

même chose pour a

$$a=\frac{1}{2}(\varepsilon A_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{[2\varepsilon B_1-(\varepsilon A_1)^2]})$$

Finalement on peut dire, que le pôle simple de (92) dont le résidu est égal à 2, trouvé par la méthode de perturbation, est transformé par un changement de variable en deux pôles simples de (90) avec un résidu 1 pour chaque pôle, aux deux endroits arbitraires $\frac{1}{2}(\varepsilon B_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{[2\varepsilon A_1-(\varepsilon B_1)^2]})$.

Conséquence : Par la méthode de perturbation de Painlevé nous avons obtenu le même résultat annoncé au début (même solution).

Exemple 69 *On considère l'EDO non linéaire suivante :*

$$u''+4uu'+2u^3=0 \tag{93}$$

Cherchons toutes les familles de (93), injectons $u_0^{(0)}\chi^p$ dans (93) on trouve :

$$u_0^{(0)}p^2\chi^{p-2}-u_0^{(0)}p\chi^{p-2}+4(u_0^{(0)})^2p\chi^{2p-1}+2(u_0^{(0)})^3\chi^{3p} \tag{94}$$

Cherchons le nombre $p<0$, afin d'équilibrer les puissances minimales des termes de l'ED, on pose :

$$q=\min(p-2,2p-1,3p),$$

on a les cas suivants pour le choix de p,q

$$\left\{\begin{array}{l}
p-2=2p-1=q \text{ et } q\leq 3p\\
p-2=3p=q \text{ et } q\leq 2p-1\\
2p-1=3p=q \text{ et } q\leq p-2\\
p-2=p-2=q \text{ et } q\leq \min(3p,2p-1)
\end{array}\right.$$

Le seul cas qu'on peut prendre pour le couple (p,q) est :

$$(p,q)=(-1,-3),$$

l'équation simplifiée dans ce cas qu'on note $\hat{E}$ est :

$$\hat{E} \equiv E$$

on remplace $p = -1$ dans (94), on divise par χ^{-3}, on obtient :

$$2u_0^{(0)}(1 - u_0^{(0)})^2 = 0 \tag{95}$$

comme $u_0^{(0)} \neq 0 \Longrightarrow$

$$u_0^{(0)} = 1, \text{ est une valeur double.}$$

Donc on a la famille $(u_0^{(0)}, p) = (1, -1)$

cherchons la résonance, injectons :

$$u_0^{(0)}\chi^{-1} + \beta\chi^{r-1}$$

dans (93) on trouve :

$$Q(r) = r(r+1)$$

on a 2 indices de Fuchs $-1, 0$, la valeur 0 ici correspond a $u_0^{(0)}$ qui doit être arbitraire.(ce n'est pas le cas, car on a $u_0^{(0)} = 1$). Dans une telle situation on exécute la méthode de perturbation de Painlevé

pour $u_0^{(0)} = 1$ et $p = -1$, cherchons la solution générale sous la forme :

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n u^{(n)} \tag{96a}$$

on injecte (96a) dans (93) on trouve :

$$\begin{aligned}
&\underbrace{u_{xx}^{(0)} + 4u^{(0)}.u_x^{(0)} + 2(u^{(0)})^3}+\\
&\varepsilon\{[\underbrace{u_{xx}^{(1)} + 4u^{(0)}.u_x^{(1)} + 4u^{(1)}u_x^{(0)} + 2.3(u^{(0)})^2u^{(1)}}] + \underbrace{0}\} +\\
&\varepsilon^2\{[\underbrace{u_{xx}^{(2)} + 4u^{(0)}.u_x^{(2)} + 4u^{(2)}u_x^{(0)} + 2.3(u^{(0)})^2u^{(2)}}] + \underbrace{[4u^{(1)}.u_x^{(1)} + 2.3(u^{(1)})^2u^{(0)}]}\}\\
&+\vdots
\end{aligned}$$

qui se met sous la forme

$$E = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n E^{(n)}$$

avec :

$$\begin{aligned}
E^{(0)} &= \underbrace{u_{xx}^{(0)} + 4u^{(0)}.u_x^{(0)} + 2(u^{(0)})^3}\\
E^{(1)} &= [\underbrace{u_{xx}^{(1)} + 4u^{(0)}.u_x^{(1)} + 4u^{(1)}u_x^{(0)} + 2.3(u^{(0)})^2u^{(1)}}\\
E^{(2)} &= \{[\underbrace{u_{xx}^{(2)} + 4u^{(0)}.u_x^{(2)} + 4u^{(2)}u_x^{(0)} + 2.3(u^{(0)})^2u^{(2)}}] + \underbrace{[4u^{(1)}.u_x^{(1)} + 2.3(u^{(1)})^2u^{(0)}]}\\
&\vdots\\
E^{(n)} &\equiv \underbrace{\hat{E}'(x, u^{(0)})u^{(n)}} + \underbrace{R^{(n)}(x, u^{(0)}, u^{(1)}, ...u^{(n-1)})}, \ n \geq 1
\end{aligned}$$

- Pour $E^{(0)}$ on a :

$$
\begin{aligned}
E^{(0)} &= E(x, u^{(0)}) \\
&= u^{(0)}_{xx} + 4u^{(0)}.u^{(0)}_x + 2(u^{(0)})^3
\end{aligned} \tag{97}
$$

qui admet

$$u^{(0)} = \chi^{-1},$$

solution particulière.(on ne peut pas déterminer la solution générale de (97), car le coefficient qui correspond a l'indice de Fuchs $r = 0$ ne peut être arbitraire dans la solution générale de (97)).

- Pour $E^{(1)}$ on a:

$$
\begin{aligned}
E^{(1)} &= u^{(1)}_{xx} + 4u^{(0)}.u^{(1)}_x + 4u^{(1)}u^{(0)}_x + 2.3(u^{(0)})^2u^{(1)} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{98}
$$

si on remplace $u^{(0)}$ par sa valeur χ^{-1} et $u^{(1)}$ par la sérié

$$
\begin{aligned}
u^{(1)} &= \sum_{j=\rho=-1}^{+\infty} u^{(1)}_j.\chi^{j-1} \\
&= u^{(1)}_{-1}\chi^{-2} + u^{(1)}_0\chi^{-1} + u^{(1)}_1 + ...
\end{aligned}
$$

dans (98) on trouve :

$$2u^{(1)}_1\chi^{-2} + 6u^{(1)}_2\chi^{-1} + 12u^{(1)}_3 + 20u^{(1)}_4\chi + 30u^{(1)}_5\chi^2 + ... = 0 \tag{99}$$

qui s'écrit sous la forme :

$$
\begin{aligned}
E^{(1)} &= \sum_{j=-1}^{+\infty} E^{(1)}_j\chi^{j-3} \\
&= \sum_{j=-1}^{+\infty} [Q(j)u^{(1)}_j + H^{(1)}_j]\chi^{j-3}
\end{aligned} \tag{100}
$$

en identifiant (100) et (99) on trouve :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
E^{(1)}_{-1} = 0 \Longrightarrow Q(\mathbf{-1})u^{(1)}_{-1} + H^{(1)}_{(-1)} = H^{(1)}_{(-1)} = 0 \Longrightarrow u^{(1)}_{-1} = A \text{ arbitraire} \\
E^{(1)}_0 = 0 \Longrightarrow Q(\mathbf{0})u^{(1)}_0 + H^{(1)}_{(0)} = H^{(1)}_{(0)} = 0 \Longrightarrow u^{(1)}_0 = B \text{ arbitraire} \\
E^{(1)}_1 = 0, \Longrightarrow Q(1)u^{(1)}_1 + H^{(1)}_1 = 2u^{(1)}_1 = 0 \Longrightarrow u^{(1)}_1 = 0 \\
E^{(1)}_2 = 0, \Longrightarrow Q(2)u^{(1)}_2 + H^{(1)}_2 = 6u^{(1)}_2 = 0 \Longrightarrow u^{(1)}_2 = 0 \\
E^{(1)}_3 = 0, \Longrightarrow Q(3)u^{(1)}_3 + H^{(1)}_3 = 12u^{(1)}_3 = 0 \Longrightarrow u^{(1)}_3 = 0
\end{array}
\right.
$$

donc :

$$u^{(1)} = A.\chi^{-2} + B.\chi^{-1},$$

avec :A arbitraire, B arbitraire et tous les autres coefficients sont nuls.

- Pour $u^{(2)}$ on a :

$$\begin{aligned} E_2 &= u_{xx}^{(2)} + 4u^{(0)}.u_x^{(2)} + 4u^{(2)}u_x^{(0)} + 2.3(u^{(0)})^2u^{(2)} \\ &\quad +4u^{(1)}.u_x^{(1)} + 2.3(u^{(1)})^2u^{(0)} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{101}$$

si on remplace $u^{(0)}, u^{(1)}$par leurs valeurs et $u^{(2)}$ par la série

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= \sum_{j=2\rho=-2}^{+\infty} u_j^{(2)}.\chi^{j-1} \\ &= u_{-2}^{(2)}\chi^{-3} + u_{-1}^{(2)}\chi^{-2} + u_0^{(2)}\chi^{-1} + ... \end{aligned}$$

dans (101) on trouve :

$$\begin{aligned} E_2 &= (2u_{-2}^{(2)} - 8A^2)\chi^{-5} + (6u_0^{(2)}A^2 - 12AB)\chi^{-4} \\ &\quad +(-4B^2 + 12u_0^{(2)}AB)\chi^{-3} + (2u_1^{(2)} + 6u_0^{(2)}B^2)\chi^{-2} \\ &\quad +(6u_{-2}^{(2)})\chi^{-1} + ... \end{aligned} \tag{102}$$

qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} E^{(2)} &= \sum_{j=-2}^{+\infty} E_j^{(2)}\chi^{j-3} \\ &= \sum_{j=-2}^{+\infty} [Q(j)u_j^{(2)} + H_j^{(2)}(x, \{u_{j'}^{(0)}, u_{j'}^{(1)}\})]\chi^{j-3} \\ &= E_{-2}^{(2)}\chi^{-5} + E_{-1}^{(2)}\chi^{-4} + E_0^{(2)}\chi^{-3} + E_1^{(2)}\chi^{-2} + E_2^{(2)}\chi^{-1} + E_3^{(2)} + ... \end{aligned} \tag{103}$$

en identifiant (102) et (103) on trouve :

- $Q(-2)u_{-2}^2 + H_{-2}^{(2)} = 2(u_{-2}^{(2)} - 4A^2) = 0 \Longrightarrow u_{-2}^{(2)} = 4A^2$
- $Q(-1)u_{-1}^2 + H_{-1}^{(2)} = 6(u_0^{(2)}A^2 - 2AB) = 0$

$$\Longrightarrow u_0^{(2)} = \frac{2B}{A}, A \neq 0, u_{-1}^{(2)} \text{ arbitraire}$$

- $Q(0)u_0^2 + H_0^{(2)} = 0.u_0^2 + H_0^{(2)} \neq 4(-B^2 + 3u_0^{(2)}AB)$, ($H_0^{(2)}$ ne contient pas $u_0^{(2)}$)

$\Longrightarrow$on introduit un terme logarithmique à l'ordre 2 et on cherche $u^{(2)}$ sous la forme :

$$u^{(2)} = 4.A^2\chi^{-3} + A_2\chi^{-2} + [a + b\log(\chi)]\chi^{-1} + u_0^{(2)}\chi^{-1} + ... \tag{104}$$

et on répète les mêmes étapes, on injecte (104) dans l'équation qui correspond a $E^{(2)}$ on trouve :

$$u^{(2)} = (-2u_0^{(1)})^2(\chi^{-1}Log\chi - \chi^{-1}).$$

Le point de branchement logarithmique mobile est donc détecté d'une manière systématique à l'ordre $n = 2$, et indice de Fuchs $i = 0$. Donc l'ED n'est pas de type Painlevé.

Remarque 70 *La nécessité d'effectuer une perturbation résulte de la racine multiple* $u_0^{(0)} = 0$ *de l'équation (95), responsable du nombre insuffisant du coefficient arbitraire de la série* $u^{(0)}$.

Remarque 71 *Afin de résoudre ce problème, ARS exécutent un changement de variable (α transformation)*

$$(u, x) \to (U, X) : x = x_0 + \alpha \exp(\frac{1}{x}), u = \alpha^{-1} U \exp(\frac{1}{X}),$$

ils ont montré que ce problème admet un point de branchement de type logarithmique.

Exemple 72 *On considère l'EDO non linéaire suivante*

$$E \equiv -u'' - uu\prime + u^3 + fu + g = 0 \tag{105}$$

Cherchons les familles de (105), injectons

$$u = u_0^{(0)}\chi^p$$

dans (105) on trouve :

$$-u_0^{(0)}p(p-1)\chi^{p-2} - (u_0^0)^2 p\chi^{2p-1} + (u_0^0)^3\chi^{3p} + fu_0^0 + g = 0 \tag{106}$$

Cherchons le nombre $p < 0$ afin d'équilibrer les puissances minimales des termes de l'ED, on pose $q = \min(p-2, 2p-1, 3p, 0)$, on a les cas suivants pour le choix de p, q

$$\begin{cases} p-2 = 2p-1 = q \text{ et } q \leq 3p \\ p-2 = 3p = q \text{ et } q \leq 2p-1 \\ p-2 = 0 = q \text{ et } q \leq \min(2p-1,3p) \text{ et rejetée car } p = 2 \\ 2p-1 = 3p = q \text{ et } q \leq p-2 \\ 3p = 0 \text{ et } q \leq \min(p-2, 2p-1) \text{ et rejetée car par hypothèse } p < 0 \end{cases}$$

le seul cas possible pour le couple (p, q) est $(-1, -3)$, et le dominant de E qu'on note $\hat{E}$ est celui qui correspond à $q = -3$, donc :

$$\hat{E} \equiv -u'' - uu\prime + u^3 \tag{107}$$

on remplace $p = -1$ dans (106), on divise par χ^{3p} en faisant tendre χ vers zéro on trouve :

$$\begin{aligned} -2u_0^{(0)} + (u_0^{(0)})^2 + (u_0^{(0)})^3 &= 0 \\ u_0^{(0)}(u_0^{(0)} + 2)(u_0^{(0)} - 1) &= 0 \end{aligned}$$

comme $u_0^{(0)} \neq 0 \Longrightarrow$
$$u_0^{(0)} = 1, -2$$
ainsi on a deux familles maximales : $(p, u_0^{(0)}) = (-1, 1), (-1, -2)$.

Cherchons la résonance, injectons
$$u_0^{(0)}\chi^{-1} + \beta\chi^{r-1}$$
dans (107) on trouve
$$Q(r) = -(r-1)(r-2) - (r-1)u_0^{(0)} + u_0^{(0)} + 3(u_0^{(0)})^2$$
pour $u_0^{(0)} = 1$ on a :
$$Q(r) = (r+1)(r-3)$$
les indices de Fuchs sont
$$-1, 3$$

- pour $u_0^{(0)} = -2$ on a :
$$Q(r) = (r+1)(r-6)$$
les indices de Fuchs sont
$$-1, 6.$$

Puisque les familles sont maximales, on peut dans ce cas appliquer la méthode Perturbée de Painlevé, on pose :
$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n u^{(n)}$$
et on l'injecte dans (105) on trouve :
$$\begin{aligned}
E \;=\; & [-u_{xx}^{(0)} - u^{(0)}u_x^{(0)} + (u^{(0)})^3 + fu^{(0)} + g] \\
& +\varepsilon[-u_{xx}^{(1)} - u^{(0)}u_x^{(1)} - u^{(1)}u_x^{(0)} + 3(u^{(0)})^2u^{(1)} + fu^{(1)}] \\
& +\varepsilon^2[\underbrace{-u_{xx}^{(2)} - u^{(0)}u_x^{(2)} - u^{(2)}u_x^{(0)} + 3(u^{(0)})^2u^{(2)} + fu^{(2)}} - \underbrace{u^{(1)}u_x^{(1)}}] \\
& +\varepsilon^3[\underbrace{-u_{xx}^{(3)} - u^{(0)}u_x^{(3)} - u^{(3)}u_x^{(0)} + 3(u^{(0)})^2u^{(3)} + fu^{(3)}} - \underbrace{u^{(1)}u_x^{(2)} - u^{(2)}u_x^{(1)}}] \\
& +\vdots \\
& +\varepsilon^n \underbrace{\hat{E}'(x, u^{(0)})u^{(n)}} + \underbrace{R^{(n)}(x, u^{(0)}, u^{(1)}, ...u^{(n-1)})}, \; n \geq 1 \\
& +\vdots
\end{aligned}$$
qu'on peut la mettre sous la forme :
$$E = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n E^{(n)}$$

avec :

$$
\begin{aligned}
E^{(0)} &= E(x,u^{(0)}) \\
E^{(n)} &\equiv \underbrace{\hat{E}'(x,u^{(0)})u^{(n)}} + \underbrace{R^{(n)}(x,u^{(0)},u^{(1)},...u^{(n-1)})},\ n \geq 1
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\hat{E}'(x,u^{(0)})_v &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}[\hat{E}(x,u^{(0)}+\lambda v) - \hat{E}(x,u^{(0)})] \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\{-(u^{(0)}_{xx}+\lambda v_{xx}) - [(u^{(0)}+\lambda v)(u^{(0)}_x+\lambda v_x)] + (u^{(0)}+\lambda v)^3 \\
&\quad -[-u^{(0)}_{xx} - u^{(0)}u^{(0)}_x + (u^{(0)})^3]\} \\
&= -v_{xx} - u^{(0)}v_x - vu^{(0)}_x + 3(u^{(0)})^2 v
\end{aligned}
$$

d'où :

$$
\hat{E}'(x,u^{(0)}) = K'_d[u^{(0)}] \equiv -\partial_x^2 - u^{(0)}.\partial_x - u^{(0)}_x + 3(u^{(0)})^2
$$

pour $E^{(0)}$ on a :

$$
\begin{aligned}
E^{(0)} &= E(x,u^{(0)}) \\
&= -u^{(0)}_{xx} - u^{(0)}u^{(0)}_x + (u^{(0)})^3 + fu^{(0)} + g
\end{aligned} \tag{108}
$$

on remplace $u^{(0)}$ par la série :

$$
u^{(0)} = \sum_{j=0}^{+\infty} u^{(0)}_j.\chi^{p+j},\ p=-1
$$

et f, g par leurs développement de Taylor au voisinage de $\chi = 0$ dans (108) on trouve

:

$$
\begin{aligned}
&[-2u_0^{(0)} + (u_0^{(0)})^2 + (u_0^{(0)})^3]\chi^{-3} \qquad (109)\\
&+[u_0^{(0)}u_1^{(0)} + 3(u_0^{(0)})^2 u_1^{(0)}]\chi^{-2}\\
&+[3u_0^{(0)}(u_1^{(0)})^2 + 3u_2^{(0)}(u_0^{(0)})^2 + f_0 u_0^{(0)}]\chi^{-1}\\
&+[f_0 u_1^{(0)} - u_1^{(0)}u_2^{(0)} + g_0 + 6u_0^{(0)}u_1^{(0)}u_2^{(0)} + (f)'u_0^{(0)} - u_0^{(0)}u_3^{(0)} + (u_1^{(0)})^3\\
&-2u_3^{(0)} + 3u_3^{(0)}(u_0^{(0)})^2]\\
&+[f_0 u_2^{(0)} - 2u_1^{(0)}u_3^{(0)} + 3u_2^{(0)}(u_1^{(0)})^2 + 3u_0^{(0)}(u_2^{(0)})^2 + 6u_0^{(0)}u_1^{(0)}u_3^{(0)} - (u_2^{(0)})^2 + (f)'u_1^{(0)}\\
&\frac{1}{2}(f)''u_0^{(0)} - 2u_1^{(0)}u_4^{(0)} + 6u_0^{(0)}u_1^{(0)}u_3^{(0)} - 6u_4^{(0)} + 3u_4^{(0)}(u_0^{(0)})^2 - 2u_0^{(0)}u_4^{(0)} + (g)']\chi^1\\
&+[\frac{1}{2}(g)'' + \frac{1}{2}(f)''u_1^{(0)} + 3u_1^{(0)}(u_2^{(0)})^2 + \frac{1}{6}(f)'''u_0^{(0)} + (f)'u_2^{(0)} + f_0 u_3^{(0)} - 3u_5^{(0)}u_0^{(0)}\\
&-3u_1^{(0)}u_4^{(0)} + 6u_0^{(0)}u_3^{(0)}u_2^{(0)} + +6u_0^{(0)}u_4^{(0)}u_1^{(0)} - 3u_2^{(0)}u_3^{(0)} + 3u_3^{(0)}(u_1^{(0)})^2\\
&-12u_5^{(0)} + 3u_5^{(0)}(u_0^{(0)})^2]\chi^2\\
&+[\frac{1}{6}(f)'''u_1^{(0)} + \frac{1}{2}(f)''u_2^{(0)} + (u_2^{(0)})^3 + \frac{1}{6}(g)''' + \frac{1}{24}(f)^{(4)}u_0^{(0)} - 2(u_3^{(0)})^2 + (f)'u_3^{(0)}\\
&-4u_4^{(0)}u_2^{(0)} - 4u_0^{(0)}u_6^{(0)} - 4u_1^{(0)}u_5^{(0)} + 3u_4^{(0)}(u_1^{(0)})^2 + f_0 u_4^{(0)} + 6u_1^{(0)}u_3^{(0)}u_2^{(0)} + 6u_0^{(0)}u_4^{(0)}u_2^{(0)}\\
&+6u_0^{(0)}u_1^{(0)}u_5^{(0)} + 3u_0^{(0)}(u_3^{(0)})^2 - 20u_6^{(0)} + 3u_6^{(0)}(u_0^{(0)})^2]\chi^3 +\\
&\vdots\\
&+
\end{aligned}
$$

qui se met sous la forme :

$$
\begin{aligned}
E^{(0)} &= \sum_{j\geq 0} E_j^{(0)}\chi^{j+q}, \text{ avec } q = -3\\
&= \sum_{j\geq 0}(Q(j)u_j^0 + H_j^{(0)}).\chi^{j-3} \qquad (110)
\end{aligned}
$$

- donc pour $u_0^{(0)} = 1$ on a :

$$Q(i) = (i+1)(i-3)$$

en identifiant (109) et (110) on trouve :

- $Q(0)u_0^0 + H_0^{(0)} = -2u_0^{(0)} + (u_0^{(0)})^2 + (u_0^{(0)})^3 = 0 \Longrightarrow H_0^{(0)} = 3$
- $Q(1)u_1^0 + H_1^{(0)} = u_0^{(0)}u_1^{(0)} + 3(u_0^{(0)})^2 u_1^{(0)} = 0 \Longrightarrow H_1^{(0)} = 0, u_1^{(0)} = 0$
- $Q(2)u_2^0 + H_2^{(0)} = 3u_0^{(0)}(u_1^{(0)})^2 + 3u_2^{(0)}(u_0^{(0)})^2 + f_0 u_0^{(0)} = 0 \Longrightarrow u_2^0 = \frac{-f_0}{3}$

-

$$\begin{aligned}
Q(3)u_3^0 + H_3^{(0)} &= f_0 u_1^{(0)} - u_1^{(0)} u_2^{(0)} + g_0 + 6u_0^{(0)} u_1^{(0)} u_2^{(0)} + (f)' u_0^{(0)} \\
&\quad - u_0^{(0)} u_3^{(0)} + (u_1^{(0)})^3 - 2u_3^{(0)} + 3u_3^{(0)} (u_0^{(0)})^2 \\
&= g_0 + (f)' \\
&= 0
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
H_3^{(0)} &= g_0 + (f)' \\
&= 0 \text{ et } u_3^{(0)} \text{ arbitraire}
\end{aligned} \tag{111}$$

qui est la condition nécessaire de stabilité (dans le cas ou $u_0^{(0)} = 1$).

- Cherchons maintenant les conditions nécessaires de stabilité dans le cas ou $u_0^{(0)} = -2$. Dans ce cas on a :

  $$Q(i) = (i+1)(i-6)$$

  en identifiant (109) et (110) on trouve :

- $Q(0)u_0^0 + H_0^{(0)} = -2u_0^{(0)} + (u_0^{(0)})^2 + (u_0^{(0)})^3 = 0 \Longrightarrow H_0^{(0)} = -12$
- $Q(1)u_1^0 + H_1^{(0)} = u_0^{(0)} u_1^{(0)} + 3(u_0^{(0)})^2 u_1^{(0)} = 0 \Longrightarrow H_1^{(0)} = 0, u_1^{(0)} = 0$
- $Q(2)u_2^0 + H_2^{(0)} = 3u_0^{(0)} (u_1^{(0)})^2 + 3u_2^{(0)} (u_0^{(0)})^2 + f_0 u_0^{(0)} = 0 \Longrightarrow u_2^{(0)} = -\frac{f_0}{6}$
-

  $$\begin{aligned}
  Q(2)u_2^0 + H_2^{(0)} &= f_0 u_1^{(0)} - u_1^{(0)} u_2^{(0)} + g_0 + 6u_0^{(0)} u_1^{(0)} u_2^{(0)} + (f)' u_0^{(0)} - u_0^{(0)} u_3^{(0)} \\
  &\quad + (u_1^{(0)})^3 - 2u_3^{(0)} + 3u_3^{(0)} (u_0^{(0)})^2 \\
  &= g_0 - 2(f)' + 12u_3^{(0)} \\
  &= 0
  \end{aligned}$$

  ce qui donne :

  $$H_3^{(0)} = 2(f)' - g_0 = 12u_3^{(0)},\ u_3^{(0)} = [\frac{1}{6}(f)' - \frac{1}{12} g_0]$$

- pour la suivante on a :

  $$\begin{aligned}
  & f_0 u_2^{(0)} - 2u_1^{(0)} u_3^{(0)} + 3u_2^{(0)} (u_1^{(0)})^2 + 3u_0^{(0)} (u_2^{(0)})^2 + 6u_0^{(0)} u_1^{(0)} u_3^{(0)} - (u_2^{(0)})^2 + (f)' u_1^{(0)} + \\
  & \frac{1}{2}(f)'' u_0^{(0)} - 2u_1^{(0)} u_4^{(0)} + 6u_0^{(0)} u_1^{(0)} u_3^{(0)} - 6u_4^{(0)} + 3u_4^{(0)} (u_0^{(0)})^2 - 2u_0^{(0)} u_4^{(0)} + (g)' \\
  = & -\frac{1}{36}(f_0)^2 - (f)'' + 10u_4^{(0)} + (g)' \\
  = & \ Q(4).u_4^{(0)} + H_4^{(0)} \\
  = & -10u_4^{(0)} + H_4^{(0)} \\
  = & \ 0
  \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$H_4^{(0)} = 10u_4^{(0)},\ u_4^{(0)} = \frac{1}{10}[\frac{(f_0)^2}{36} + (f)'' - (g)']$$

pour la suivante on a :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(g)'' + \frac{1}{2}(f)''u_1^{(0)} + 3u_1^{(0)}(u_2^{(0)})^2 + \frac{1}{6}(f)'''u_0^{(0)} + (f)'u_2^{(0)} + f_0u_3^{(0)} \\
& -3u_5^{(0)}u_0^{(0)} - 3u_1^{(0)}u_4^{(0)} + 6u_0^{(0)}u_3^{(0)}u_2^{(0)} + 6u_0^{(0)}u_4^{(0)}u_1^{(0)} - 3u_2^{(0)}u_3^{(0)} \\
& +3u_3^{(0)}(u_1^{(0)})^2 - 12u_5^{(0)} + 3u_5^{(0)}(u_0^{(0)})^2 \\
= & \frac{1}{2}(g)'' - \frac{1}{3}(f)''' + \frac{1}{6}(f)'f_0 - \frac{3}{2}f_0u_3^{(0)} + 6u_5^{(0)} \\
= & Q(5)..u_5^{(0)} + H_5^{(0)} \\
= & 0
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$H_5^{(0)} = 6u_5^{(0)},\ u_5^{(0)} = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{3}(f)''' - \frac{1}{2}(g)'' - \frac{1}{6}(f)'f_0 + \frac{3}{2}f_0u_3^{(0)}\right]$$

pour la suivante on a :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6}(f)'''u_1^{(0)} + \frac{1}{2}(f)''u_2^{(0)} + (u_2^{(0)})^3 + \frac{1}{6}(g)''' + \frac{1}{24}(f)^{(4)}u_0^{(0)} - 2(u_3^{(0)})^2 + (f)'u_3^{(0)} \\
& -4u_4^{(0)}u_2^{(0)} - 4u_0^{(0)}u_6^{(0)} - 4u_1^{(0)}u_5^{(0)} + 3u_4^{(0)}(u_1^{(0)})^2 + f_0u_4^{(0)} + 6u_1^{(0)}u_3^{(0)}u_2^{(0)} + 6u_0^{(0)}u_4^{(0)}u_2^{(0)} + \\
& +6u_0^{(0)}u_1^{(0)}u_5^{(0)} + 3u_0^{(0)}(u_3^{(0)})^2 - 20u_6^{(0)} + 3u_6^{(0)}(u_0^{(0)})^2 \\
= & \frac{1}{2}(f)''u_2^{(0)} + (u_2^{(0)})^3 + \frac{1}{6}(g)''' - \frac{1}{12}(f)^{(4)} + (f)'u_3^{(0)} + f_0u_4^{(0)} - 16u_4^{(0)}u_2^{(0)} - 8(u_3^{(0)})^2 \\
= & (f)'u_3^{(0)} + \frac{1}{6}(g)''' - \frac{1}{12}(f)^{(4)} - 8(u_3^{(0)})^2 + \frac{1}{12}(f)''f_0 + (\frac{1}{6}f_0)^3 - \frac{5}{3}f_0u_4^{(0)} \\
= & Q(6).u_6^{(0)} + H_6^{(0)} \\
= & 0
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
H_6^{(0)} = & (f)'u_3^{(0)} + \frac{1}{6}(g)''' - \frac{1}{12}(f)^{(4)} - 8(u_3^{(0)})^2 + \frac{1}{12}(f)''f_0 + (\frac{1}{6}f_0)^3 - \frac{5}{3}f_0u_4^{(0)} \\
= & (f)'[\frac{(f)'}{6} - \frac{g_0}{12}] + \frac{1}{6}(g)''' - \frac{1}{12}(f)^{(4)} - 8([\frac{(f)'}{6} - \frac{g_0}{12}])^2 + \frac{1}{12}(f)''f_0 + (\frac{1}{6}f_0)^3 - \frac{5}{3}f_0u_4^{(0)} \\
= & \frac{1}{6}[(f)']^2 - \frac{1}{12}g_0(f)' - 8.[\frac{1}{6}(f)']^2 - 8[\frac{1}{12}g_0]^2 + 16\frac{1}{6}(f)'\frac{1}{12}g_0 + \\
& \frac{1}{6}(g)''' - \frac{1}{12}(f)^{(4)} + \frac{1}{12}(f)''f_0 + (\frac{1}{6}f_0)^3 - \frac{5}{3}f_0\frac{1}{10}[\frac{(f_0)^2}{36} + (f)'' - (g)'] \\
= & -\frac{1}{36}[-6(g)''' + 3(f)^{(4)} + 2[(f)']^2 + 2[g_0]^2 - 5g_0(f)' - 6f_0(g)' + 3f_0(f)''] \\
= & 0
\end{aligned}$$

ce qui donne la condition nécessaire de stabilité (dans le cas ou $u_0^{(0)} = -2$) qui est :

$$-6(g)''' + 3(f)^{(4)} + 2[(f)']^2 + 2[g_0]^2 - 5g_0(f)' - 6f_0(g)' + 3f_0(f)'' = 0, \qquad (112)$$

$$u_6^{(0)} \text{ est arbitraire}$$

Remarque 73 *Aucune de ces deux familles ne donne des conditions suffisantes de stabilités, chaque famille donne une condition nécessaire différente pour avoir l'uniformité locale de la solution générale au voisinage du pôle en question. Dans le but ou la solution générale soit uniforme on a besoin de ces deux conditions.(111) ,(112).ce qui donne la condition*

$$g = -(f)', [(f)'' + \frac{1}{2}(f)^2]'' = 0 \qquad (113)$$

Remarque 74 *Pour cet exemple Bureau a montré que les conditions (113) sont nécessaires et suffisantes pour la stabilité.*

Exemple 75 *On considère l'EDO non linéaire suivante :*

$$u^{(4)} + 3u.u'' - 4(u')^2 = 0 \qquad (114)$$

Cherchons les familles de (114), injectons $u_0^{(0)}\chi^p$ dans (114) on trouve :

$$[u_0^{(0)}p^4 - 6u_0^{(0)}p^3 + 11u_0^{(0)}p^2 - 6u_0^{(0)}p]\chi^{p-4} - [(u_0^{(0)})^2p^2 + 3(u_0^{(0)})^2p]\chi^{2p-2} = 0$$

Cherchons le nombre entier $p < 0$, afin d'équilibrer les puissances minimales des termes de l'ED, posons : $q = \min(p-4, 2p-2)$, on a deux cas :

$$(p, q) = (-3, -7), (-2, -6)$$

pour $p = -2$ on a le dominant de E qu'on note $\hat{E}$ est celui qui correspond à $p = -2$, donc :

$$\hat{E} \equiv u^{(4)} + 3u.u'' - 4(u')^2 \qquad (115)$$

on remplace $p = -2$ dans (115), on divise par χ^{-6}, on trouve :

$$\begin{aligned}
[u_0^{(0)}16 + 6u_0^{(0)}8 + 11u_0^{(0)}4 + 12u_0^{(0)}] - [(u_0^{(0)})^2.4 - 6(u_0^{(0)})^2] &= 0 \\
120.u_0^{(0)} + 2(u_0^{(0)})^2 &= 0 \\
2.u_0^{(0)}(60 + u_0^{(0)}) &= 0
\end{aligned}$$

comme $u_0^{(0)} \neq 0$ on a :

$$u_0^{(0)} = -60$$

Cherchons les indices de Fuchs, injectons $-60\chi^{-2} + \beta\chi^{r-2}$ dans (115) on trouve :

$$\begin{aligned}
Q(r) &= (r^4 - 14r^3 - 109r^2 - 214r - 120) \\
&= (r+1)(r+2)(r+3)(r-20)
\end{aligned}$$

les indices de Fuchs pour la famille $(u_0^{(0)}, p) = (-60, -2)$ sont : $-1, -2, -3, 20$

pour $p = -3$,le dominant de E qu'on note $\hat{E}$ est celui qui correspond à $q = -8$, donc :

$$\hat{E} \equiv 3u.u'' - 4(u')^2 \tag{116}$$

on remplace $p = -3$ dans l'ES, on divise par χ^{-8}, on trouve :

$$[9(u_0^{(0)})^2 - 9(u_0^{(0)})^2] = 0$$

ce qui implique que $u_0^{(0)}$ est arbitraire, cherchons les indices de Fuchs, injectons $u_0^{(0)}\chi^{-3} + \beta\chi^{r-3}$ dans (116) on trouve :

$$Q(r) = 3u_0^{(0)}r(r+1)$$

les indices de Fuchs pour la famille $(u_0^{(0)}, p) = (u_0^{(0)}, -3)$ sont : $-1, 0$.cette famille n'est pas maximale, elle décrit donc une solution particulière (suivant la méthode classique de Painlevé)

$$u = a\chi^{-3} - 60\chi^{-2}, (a, z_0) \text{ arbitraires, } \chi = (z - z_0)$$

pour la deuxième famille $(u_0^{(0)}, p) = (-60, -2)$ elle est maximale non principale donc on applique la méthode perturbée,on cherche la solution sous la forme

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n u^{(n)}$$

on l'injecte dans (114) on trouve :

$$\begin{aligned}
&\underbrace{u_{xxxx}^{(0)} + 3u^{(0)}.u_{xx}^{(0)} - 4(u_x^{(0)})^2} + \\
&\varepsilon\{[\underbrace{u_{xxxx}^{(1)} + 3u^{(0)}.u_{xx}^{(1)} + 3u^{(1)}u_{xx}^{(0)} - 8(u_x^{(0)})u_x^{(1)}}] + \underbrace{0}\} + \\
&\varepsilon^2\{[\underbrace{u_{xxxx}^{(2)} + 3u^{(0)}.u_{xx}^{(2)} + 3u^{(1)}u_{xx}^{(1)} - 8(u_x^{(0)})u_x^{(2)}}] + [\underbrace{u^{(2)}.u_{xx}^{(0)} - 4(u_x^{(1)})^2}]\} + \\
&\vdots
\end{aligned}$$

qui ce met sous la forme

$$E = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n E^{(n)}$$

avec :

$$\begin{aligned}
E^{(0)} &= \underbrace{u_{xxxx}^{(0)} + 3u^{(0)}.u_{xx}^{(0)} - 4(u_x^{(0)})^2} = 0 \\
E^{(1)} &= [\underbrace{u_{xxxx}^{(1)} + 3u^{(0)}.u_{xx}^{(1)} + 3u^{(1)}u_{xx}^{(0)} - 8(u_x^{(0)})u_x^{(1)}} = 0 \\
E^{(2)} &= \{[\underbrace{u_{xxxx}^{(2)} + 3u^{(0)}.u_{xx}^{(2)} + 3u^{(2)}.u_{xx}^{(0)} - 8(u_x^{(0)})u_x^{(2)}}] + [\underbrace{3u^{(1)}u_{xx}^{(1)} - 4(u_x^{(1)})^2}]\} = 0 \\
&\vdots \\
E^{(n)} &= \hat{E}'(x, u^{(0)})u^{(n)} + R^{(n)}(u^{(0)}, u^{(1)}, ..., u^{(n-1)}) = 0, n \geq 2
\end{aligned}$$

et $\hat{E} \equiv u^{(4)} + 3u.u'' - 4(u')^2$

$$\begin{aligned}
\hat{E}'(x,u^{(0)})_v &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}[\hat{E}(x,u^{(0)}+\lambda v) - \hat{E}(x,u^{(0)})] \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\{u^{(0)}_{xxxx} + \lambda v_{xxxx} + 3(u^{(0)}+\lambda v)(u^{(0)}_{xx}+\lambda v_{xx}) - 4(u^{(0)}_x + \lambda v_x)^2 - u^{(0)}_{xxxx} - 3u^{(0)}.u^{(0)}_{xx} + \\
&= v_{xxxx} + 3u^{(0)}v_{xx} + 3vu^{(0)}_{xx} - 8u^{(0)}_x v_x
\end{aligned}$$

ainsi :

$$\hat{E}'(x,u^{(0)}) = K'_d[u^{(0)}] \equiv \partial_x^4 + 3u^{(0)}.\partial_x^2 + 3u^{(0)}_{xx} - 8u^{(0)}_x\partial_x$$

on remplace $u^{(0)}$ par la sérié $\sum_{j\geq 0}^{+\infty} u^{(0)}_j \chi^{j-2}$, avec $u^{(0)}_0 = -60$ dans la première équation on trouve

$$\begin{aligned}
E^{(0)} &= -456.u^{(0)}_1\chi^{-5} + (2(u^{(0)}_1)^2 - 1080u^{(0)}_2)\chi^{-4} + (6u^{(0)}_1 u^{(0)}_2 - 2040u^{(0)}_3)\chi^{-3} \\
&\quad +(14u^{(0)}_1 u^{(0)}_3 - 3360u^{(0)}_4)\chi^{-2} + ...
\end{aligned}$$

d'autre part pour $u^{(0)}_0 = -60$ on a :

$$Q(i) = (i+1)(i+2)(i+3)(i-20)$$

et :

$$E^{(0)} = \sum_{j\geq 0} E^{(0)}_j \chi^{j+q},\ \text{avec } q = -6$$

de plus on a la formule suivante :

$$E^{(0)}_j = Q(j).u^{(0)}_j + H^{(0)}_j = 0,\ \forall j \geq 0$$

donc :

$$\begin{aligned}
E^{(0)}_0 &= 0 \\
&= Q(0).u^{(0)}_0 + H^{(0)}_0 \\
&= -120(-60) + H^{(0)}_0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$H^{(0)}_0 = -7200$$

pour la suivante on a :

$$\begin{aligned}
E^{(0)}_1 &= -456.u^{(0)}_1 \\
&= Q(1).u^{(0)}_1 + H^{(0)}_1 \\
&= -456.u^{(0)}_1 + H^{(0)}_1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$H_1^{(0)} = 0$$

En suivant le même procédé on trouve que $u_{20}^{(0)}, u_{-3}^{(1)}, u_{-2}^{(1)}, u_{-1}^{(1)}$ sont arbitraires, mais à l'ordre $n = 7$, on trouve que

$$\begin{aligned} H_{-1}^{(7)} &\equiv u_{20}^{(0)}(u_{-3}^{(1)})^7 = 0, \\ H_{20}^{(7)} &\equiv (u_{20}^{(0)})^2(u_{-3}^{(1)})^6 u_{-2}^{(1)} = 0 \end{aligned}$$

(Contradiction avec le fait que $u_{20}^{(0)}, u_{-3}^{(1)}, u_{-2}^{(1)}$ sont arbitraires, ce qui implique l'existence d'un point de branchement logarithmique.

Remarque 76 *Cet exemple illustre qu'on est incapable de déduire à qu'el ordre on doit s'arrêter pour conclure si on a ou on n'a pas de point de branchement.*

3.4 Avantages supplémentaires de l'analyse de Painlevé

- Pour qu'une équation soit intégrable il est nécessaire mais pas suffisant qu'elle vérifie le test de Painlevé, cependant la propriété de Painlevé est une condition suffisante pour l'intégrabilité

- Le test de Painlevé fournit la perspicacité dans la construction des solutions de soliton par l'intermédiaire des méthodes directes (le formalisme et ses clones de Hirota)

- Le test de Painlevé est applicable aux systèmes d'EDO et d'EDP polynomiales, il ne prouve pas l'intégrabilité, il aide à identifier des conditions nécessaires pour lesquelles le système peut être intégrable.

- Le Test de Painlevé est un excellent outil pour détecter les points de branchement mobiles

References

[1] M.J. Ablowitz and H Segur,Exact linearization of a Painlevé transcendent, Phys Rev Le 38 (1977) 1103–1106.

[2] M.J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur, Nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of Painlevé-type, Leut Nuov Cimenio 23 (1978) 333-338.

[3] M.J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur, A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type I, *J. Math. Phys.* 21 (1980) 715-721;II, 21 (1980) 1006-1015.

[4] B. Gambier, Sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, C.R.Acad.Sc. Paris 142 (1906) 266-269,1403-1406,1497-1500.

[5] M.Jimbo.M.D.Kruskal and T.Miwa.Painlevé test for the self dual Yang-Mills equation, Phys.Lett.A92 (1982) 59-60.

[6] J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevale, The Painlevé-property for partial differential equations, J. Math. Phys. 24 (1983) 522-526

[7] R. Conte Invariant Painlevé analysis of partial differential equations, Phys. Lett. A 140 (1989) 383-390.

[8] S.P.Hastings and J.B.Mel.cod, A boundary value problem associated with the second Painlevé transcendent and the Korteweg-de Vries equation, Archive for rational Mechanics and Analysis 73 (1980) 31-51.

[9] S.V Kovalevskaya sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la retation d'un corps solide autour d'un point fixe, Acta Math, 14 (1890) 81-93.

[10] S.V Kovalevskaya sur le probléme de la retation d'un corps solide autour d'un point fixe, Acta Math, 12(1889) 177-232.

[11] P.Hoyer, Uber die Integration eines Differentialgleichungasystems Von der Form $dx_1/dt = a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_3x_1x_2, dx_2/dt = b_1x_2x_3 + b_2x_3x_1, dx_3/dt = c_1x_2x_3 + c_2x_3x_1 + c_3x_1x_2$ durch elliptische Funktionen, Dissertation Konigl, Friedrich-Wilhelms Univ Berlin (1879) 1-36

[12] P. Painlevé, Analyse des travaux scientifiques jusqu'en 1900 (1900), in: Œuvres de Paul Painlevé, vol.1 (Editions du CNRS, Paris, 1973).

[13] F. J. Bureau, Sur la recherche des équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale est à points critiques fixes, Bulletin de la Classe des Sciences XXV (1939) 51–68.

[14] J. Chazy, Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes, Thèse, Paris (1910); Acta Math. 34 (1911) 317–385.

[15] Œuvres de Paul Painlevé, 3 volumes.1 (Editions du CNRS, Paris, 1973, 1974, 1976). Out of print

[16] P. Painlevé, Leçon sur la théorie analytique des équations différentielles (leçons de Stockholm, 1895) (Hermann, Paris, 1897); reprinted in: Œuvres de Paul Painlevé, vol.1 (édition du CNRS, Paris, 1973)

[17] A.S. Fokas, V.E. Zakharov (Eds.), *Important Developments in Soliton Theory*, Springer, Berlin, 1993

[18] K. Lonngren, A. Scott (Eds.), *Solitons in Action*, Academic Press, New York, 1978.

[19] Conte R, editor. The Painleve property, one century later. New York: Springer; 1999.

[20] Ince, E.L., *Ordinary Differential Equations*, Dover, New York 1956.

[21] A. P. Fordy and A. Pickering, Analysing negative resonances in the Painlevé test, Phys. Lett. A 160 (1991) 347–354.

[22] R. Conte, A. P. Fordy and A. Pickering, A perturbative Painlevé approach to nonlinear differential equations, Physica D 69 (1993) 33–58.

[23] A. Pickering Testing nonlinear evolution equations for complite integrability, Ph.D.Thesis, University of Leeds (1992).

[24] B. Gambier, Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes, Thèse, Paris (1909); Acta Math. 33 (1910) 1–55.

[25] G. Darboux, Sur les équations aux dérivées partielles, C. R. Acad. Sc. Paris 96 (1883) 766–769.

[26] E. Hille, Ordinary differential equations in the complex domain (J.Wiley and sons,New York, 1976).

[27] H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 3 volumes (Gauthier-Villars, Paris, 1892, 1893, 1899).

[28] π Chapman & Hall / CRC monographs and surveys in pure and applied mathematics 105. "Painlevé analysis and its applications A.Roy. Chowdhury."

[29] BSMF p 208.

[30] Chazy, thèse p.360

[31] Chazy (thèse P. 358)

[32] Valiron tome II §148

[33] Painlevé BSMF p. 239