Université des Sciences et de la Thechnologie Houari Boumediènne
Faculté de Mathématiques

Résumé du Mémoire de Magister en Mathématiques
Option : Algèbre et Théorie des Nombres

Présenté par :

CHAIA Ahmed[1]

Sujet

Estimation de la fonction θ de Tchebychef sur le k-ième nombre premier

Résumé

L'objet de ce mémoire porte essentiellement sur l'étude du comportement asymptotique de la fonction de Tchebychef définie par,

$$\theta(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \log p,$$

sur le k -ième nombre premier p_k. Divers encadrements de cette fonction ont été donnés par J. B. Rosser et L. Schoenfeld (cf.[10]).
Dans (cf.[8]), G. Robin a amélioré sensiblement les résultats obtenus par ces auteurs. Après avoir étudié les articles des deux premiers auteurs, nous nous sommes intéressés aux travaux de G. Robin.
En nous inspirant des idées et méthodes utilisées, nous avons repris et détaillé les résultats de ce dernier. Nous avons dans certains cas, utilisé Mathematica pour compléter les démonstrations et vérifier ces résultats numériquement ou graphiquement.
***Mots-clés:**Nombres premiers, fonction de Tchebychef.*

(1) Directeur de thèse : M.O. Hernane, Maître de conférences à l'U.S.T.H.B.

Introduction

Soit $\pi(x)$ la fonction qui compte le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x, et la fonction de Tchebychef définie pour $x > 0$ par $\theta(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \log p$, on désigne par p_k le $k^{iéme}$ nombre premier.

Dans ce travail, nous étudions le comportement asymptotique de la fonction de Tchebychef $\theta(x)$ sur le $k^{iéme}$ nombre premier p_k, c'est à dire les encadrements de $\theta(p_k)$ en utilisant les résulats connus sur la fonction $\pi(x)$. En 1983 G. Robin a montré que l'équivalence $\theta(p_k) \sim k \log k$ est un résultat plus faible que le théorème des nombres premiers, il a montré également que $\theta(p_k) > k \log k$ pour k assez grand.

Dans $[4]$, l'auteur a donné des encadrements explicites de la fonction $\theta(p_k)$ dans le cas où p_k est la suite des nombres premiers.

Ce présent mémoire est constitué de trois chapitres.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous avons rappelé quelques notions de théorie des nombres premiers, les définitions des fonctions $\pi(x)$ et $\theta(x)$ ainsi que la fonction zeta ζ de Riemann.

Nous avons consacré le deuxième chapitre de ce travail, à l'étude du comportement asymptotique de $\theta(p_k)$ sous diverses hypothèses sur $\pi(x)$.

Nous présentons et détaillons les démonstrations des résultats relatifs aux encadrements de $\theta(p_k)$ dûs à G. Robin $[4]$.

Dans le troisième chapitre, nous nous sommes intéressés aux encadrements explicites de $\theta(p_k)$.

Dans leur article $(cf\ [9])$, J. B. Rosser et L. Schoenfeld affirment que l'inégalité $\theta(p_k) \geqslant k \log k$ est vérifiée pour $k \geqslant 13$.

En utilisant l'inégalité classique $\theta(x) < x \log 4$, valable pour $x > 0$, nous reprenons et détaillons la preuve de ce résultat.

Diverses inégalités basées sur les résultats de B. Rosser et L. Schoenfeld ont été prouvées par G . Robin (cf [4]), parmi ces résultats, nous considérons les encadrements :

$$\theta(p_k) \geqslant k(\log k + \log\log k - 1.076868),$$

pour $k \geqslant 2$, avec égalité pour $k = 66$,

$$\theta(p_k) > k(\log k + \log\log k - 1),$$

pour $k \leqslant 17$ et $k \geqslant 5106$
et

$$\theta(p_k) < k(\log k + \log\log k - 1)$$

pour $18 \leqslant k \leqslant 5105$.

Nous avons repris et détaillé les démonstrations de ces résultats.

Notons que certaines inégalités ont été vérifiées à l'ordinateur à l'aide de *Mathématica.*

Enfin nous terminons par une conclusion et une annexe où sont donnés les programmes que nous avons utilisés pour les calculs numériques. à l'aide de Mathematica.

1 Chapitre 1 : Rappels de quelques définitions et résultats fondamentaux.

Ce chapitre est consacré à quelques rappels des définitions et théorèmes fondamentaux que nous utiliserons dans la suite de ce travail.
Nous rappelons les formules de sommations d'Abel et d'Euler et définissons les fonctions $\theta(x)$ de Tchebychev et $\pi(x)$. Nous enonçons comme résultat fondamental nécessaire à notre étude, le théorème de nombres premiers. Enfin, nous rappelons la conjecture de Riemann.

2 Chapitre 2 : Comportement Asymptotique de $\theta(p_k)$

Soient k un entier positif, x un nombre réel positif et p_k le $k^{iéme}$ nombre premier. Soient $\theta(x)$ la fonction de Tchebychef, $\pi(x)$ qui compte le nombre de nombres premiers plus petits que x et $Li\ (x)$ le logarithme intégral, la fonction définie par :

$$Li\,(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + Li\ (2).$$

Dans ce chapitre, nous démontrons que lorsque k tend vers l'infini on a, .
$\theta(p_k) = k(\log k + \log\log k + O(1))$, $\theta(p_k) = k\left(\log k + \log\log k - 1 + \dfrac{\log\log k}{\log k} + O\left(\frac{1}{\log k}\right)\right)$
et $\theta(p_k) = Li^{-1}(k) + O\left(\sqrt{k}\,(\log k)^{\frac{3}{2}}\right)$.
Les démonstrations de ces estimations utilisent essentiellement la formule de sommation d'Abel, le théorème des nombres premiers (cf[1]), ainsi que les inégalités classiques, $\theta(x) < x\log 4$ valable pour $x > 0$ et $\theta(x) \geqslant \frac{3}{4}x$ valable pour $x \geqslant 13$ $(cf\ [2]\ )$.

2.1 Théorèmes autour de $\theta(p_k)$:

Théorème 2.1 *(de Tchebychef) (cf* [3]*)*
Pour x assez grand on a,

$$\pi(x) \asymp \frac{x}{\log x},$$

Proof. (cf.[3])
■

Théorème 2.2 *Soit x un nombre réel strictement positif et k un entier naturel, alors les propositions suivantes sont equivalentes,*

(i) $\pi(x) \asymp \dfrac{x}{\log x}$
(ii) $\theta(x) \asymp x$
(iii) $p_k \asymp k\log k$
(iv) $\theta(p_k) = k(\log k + \log\log k + O(1))$

Proof. (cf.[4])
■

Corollaire 2.1 *Soient $a > 0$ et $x_0 > 0$*
Si $\theta(x) < ax$ pour $x \geqslant x_0$,
alors il existe $K_0 > 0$ tel que, $\theta(p_k) > k \log k$ pour $k \geqslant K_0$

Théorème 2.3 *Les trois premières propositions sont équivalantes et entrainent la quarième,*

(i) $$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

(ii) $$\theta(x) = x + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

(iii) $$p_k = k(\log k + \log\log k + O(1))$$

(iv) $$\theta(p_k) = k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k}{\log k} + O\left(\frac{1}{\log k}\right)\right)$$

Proof. *(cf.[4])*
■

Théorème 2.4 *Les trois premières propositions sont équivalantes et entrainent la quarième,*

(a) $$\pi(x) = Li(x) + O(\sqrt{x}\log x)$$

(b) $$\theta(x) = x + O\left(\sqrt{x}\log^2 x\right)$$

(c) $$p_k = Li^{-1}(k) + O\left(\sqrt{k}(\log k)^{\frac{5}{2}}\right),$$

(d) $$\theta(p_k) = Li^{-1}(k) + O\left(\sqrt{k}(\log k)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Proof. *(cf.[4])*
■

3 Chapitre 3 : Estimation de $\theta(p_k)$.

Soient k un entier positif, x un nombre réel positif et p_k le $k^{iéme}$ nombre premier. Soient $\theta(x)$ la fonction de Tchebychef, $\pi(x)$ qui compte le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. Dans le chapitre 2, nous avons étudié le comportement asymptotique de $\theta(p_k)$ sous diverses hypothèses sur $\pi(x)$.
Dans ce qui suit nous nous intéressons aux encadrements explicites de $\theta(p_k)$ lorsque $(p_k)_{k\geq 1}$ est la suite des nombres premiers .
J . B . Rosser et L . Schoenfeld ont dans [9] conjecturé que $\theta(p_k) > k \log k$ pour $k \geqslant 13$.
G. Robin (cf [4]) a en utilisant l'inégalité classique $\theta(x) < x \log 4$ valable pour $x > 0$, donné une preuve simple de ce résultat.
Plusieurs autres inégalités sur l'estimation de $\theta(p_k)$ ont été également démontrées par ce dernier, en utilisant essentiellement les résultats dûs à J. B. Rosser et L. Schoenfeld.
Nous reprenons ces résultats et nous détaillons leurs démonstrations.
Dans [8] , [9] et [10] , J. B. Rosser et L. Schoenfeld ont prouvé que,

Proposition 3.1 *On a,*

(i) $\theta(x) < x$ *pour* $x < 10^{11}$

(ii) $\theta(x) < x + 0.000081\frac{x}{\log x}$ *pour* $x \geqslant 1$

(iii) $|\theta(x) - x| \leqslant \dfrac{0.007763x}{\log x}$ *pour* $x \geqslant 1,04 \times 10^7$

Proof. *(cf* [9]*)* ■

Proposition 3.2 *(cf* [8]*)*
Soit p_k *le k-ième nombre premier alors,*

(i) $p_k \geqslant k\left(\log k + \log\log k - \frac{3}{2}\right)$ *pour* $k \geqslant 2$

(ii) $p_k \leqslant k\left(\log k + \log\log k - \frac{1}{2}\right)$ *pour* $k \geqslant 20$

4 Minorations de $\theta(p_k)$.

Théorème 4.1 *Soit* p_k *le* $k^{i\grave{e}me}$ *nombre premier, alors*

$$\theta(p_k) > k\log k \qquad pour\, k \geqslant 13$$

Proof. *(cf.*[4]*)*
■

Théorème 4.2 *(cf*[4]*) Pour* $k \geqslant 3$, *on a*

$$\theta(p_k) \leqslant k(\log k + \log\log k)$$

.

Proof. *(cf.*[4]*)*
■

Les résultats suivants que nous présentons sous forme de lemmes nous seront utiles dans la suite de ce chapitre.

Lemme 4.1 *On suppose qu'il existe* $a > 0$, k_0 *et* k_1 *entiers strictement positif vérifiant,* $e^a \leqslant \log k_0 \leqslant \log k_1$ *tels que* $p_k \geqslant k(\log k + \log\log k - a)$ *pour* $k_0 \leqslant k \leqslant k_1$
Alors on a,

$$\theta(p_k) - \theta(p_{k_0}) \geqslant \int_{k_0}^{k} \left(\log t + \log\log t + \frac{\log\log t}{\log t} - \frac{\alpha}{\log t}\right) dt$$

avec $\alpha = a + \dfrac{1}{2}\dfrac{(\log y - a)^2}{y}$ *où* y *est défini par,*

$$y = \begin{cases} \log k_0 & si \log k_0 > \exp(a+2) \\ \log k_1 & si \ \log k_1 < \exp(a+2) \\ \exp(a+2) & si \ \log k_0 \leqslant \exp(a+2) \leqslant \log k_1 \end{cases}$$

Lemme 4.2 *Pour* $k \geqslant \exp(10)$ *on a,* $p_k \geqslant k(\log k + \log\log k - 1.1315)$

Théorème 4.3 *Pour* $k \geqslant 2$ *on a,*
(i) $\theta(p_k) \geqslant k(\log k + \log\log k - 1.076868)$, *avec égalité pour* $k = 66$.

(ii) $\theta(p_k) > k(\log k + \log\log k - 1)$, *pour* $k \leqslant 17$ *et* $k \geqslant 5106$

(iii) $\theta(p_k) < k(\log k + \log\log k - 1)$, *pour* $18 \leqslant k \leqslant 5105$
Proof. *(cf.*[4]*)*
■

Lemme 4.3 *On a,*
(i) $p_k \geqslant k(\log k + \log\log k - 1)$ *pour* $p_k \leqslant 10^{11}$ *et* $k \geqslant 2$

(ii) $p_k \geqslant k(\log k + \log\log k - 1.0077629)$ *pour* $p_k \geqslant 10^{11}$

Théorème 4.4 *Pour* $k \geqslant 3$ *on a,*
$$\theta(p_k) \geqslant k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k}{\log k} - \frac{2.1454}{\log k}\right)$$
avec égalité pour $k = 4714$.

Proof. *(cf.*[4]*)*
■

5 Majorations de $\theta(p_k)$:

Pour la suite de notre étude, le lemme suivant nous sera utile,

Lemme 5.1 *: Supposons qu'il existe* $a > 0$ *et* $k_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que pour tout* $k \geqslant k_0$*, on ait* $p_k \leqslant k(\log k + \log\log k - a)$ *et* $\log\log k_0 \geqslant \max\{a, 1\}$
alors, $\dfrac{p_k}{\log p_k} \leqslant k\left(1 - \dfrac{a_1}{\log k}\right)$ *pour* $k \geqslant k_0$ *avec* $a_1 = a\dfrac{1}{1+\dfrac{\log\log k_0}{\log k_0}}$

Proof. *(cf.*[4]*)*
■

Théorème 5.1 *On a,*

(i) $p_k \leqslant k(\log k + \log\log k - 0.9385)$ *pour* $k \geqslant 8602$
(ii) $\theta(p_k) \leqslant k\left(\log k + \log\log k - 1 + \dfrac{\log\log k}{\log k} - \dfrac{1.9185}{\log k}\right)$ *pour* $k \geqslant 126$
(iii) $\theta(p_k) \leqslant k(\log k + \log\log k - 0.9465)$ *pour* $k \geqslant 14$

6 Encadrements de $\theta(p_k)$ sous l'hypothèse de Riemann

Dans (cf[4]) G. Robin a, en utilisant les résultats de L. Schoenfeld, montré le,

Théorème 6.1 *: Sous l'hypothèse de Riemann on a,*

(i) $\quad |\theta(p_k) - Li^{-1}(k)| \leqslant 0.1224 k^{\frac{1}{2}} (\log k)^{\frac{3}{2}}$, *pour* $k \geqslant 312$

(ii) $\quad |\theta(p_k) - Li^{-1}(k)| \leqslant 0.2377 k^{\frac{1}{2}} (\log k)^{\frac{3}{2}}$, *pour* $k \geqslant 5$

(iii) $\quad \theta(p_k) \geqslant Ii^{-1}(k) - 0.12 k^{\frac{1}{2}} (\log k)^{\frac{3}{2}}$, *pour* $k \geqslant 5$

La démonstration repose essentiellement sur le lemme suivant,

Lemme 6.1 *On a,*

(i) $\quad p_k \leqslant 1.14 k \log k$, *pour* $k \geqslant 8602$

(ii) $\quad \log p_k \leqslant 1.2518 \log k$, *pour* $k \geqslant 12481$

Et sous l'hypothèse de Riemann on a,

(iii) $\quad \left| \int_2^{p_k} \frac{\pi(t) - Li(t)}{t} dt + 2 - Li(2) \log 2 \right| \leqslant 0.10636 k^{\frac{1}{2}} (\log k)^{\frac{3}{2}}$, *pour* $k \geqslant 12481$

7 Conclusion:

L'étude du comportement asymptotique et de l'encadrement de la fonction de Tchebychef θ sur le $k^{ème}$ nombre premier sous diverses hypothèses sur $\pi(x)$, a fait l'objet de plusieurs articles. Nous citerons ceux de J. B. Rosser et L. Schoenfeld. G. Robin a, dans sa thèse de Doctorat amélioré sensiblement les résultats de ces auteurs, en donnant des encadrements explicites de p_k et de $\theta(p_k)$.
Nous avons repris les résultats de celui-ci et détaillé les démonstrations. Nous nous sommes inspirés des méthodes et des idées développées par les auteurs cités précedemment pour prouver certains de ces réultats d'une autre façon, cependant, les résultats que nous avons obtenus n'ont pas apporté d'améliorations pour le moment.
Notre ambition dans la suite de notre tavail de recherche dans le cadre du Doctorat, est de préciser et d'améliorer quelques uns des résultats dûs à G. Robin.

Notons enfin, que pour compléter dans certains cas les preuves de certains théorèmes, l'outil informatique nous a été indisponsable. Nous avons pour cela utilisé Mathématica pour nos calculs, et les représentations graphiques des fonctions considérées.

Références

[1] T.M. APOSTOL. , Introduction to analyticNumber *theory.Undergradurt texts in Mathematics . Springer-Verlag, New York,1976.*

[2] D. HANSON. –On the products of primes, Canad . Math . Bull . 15 (1972), pp .33-37 Ramanujan.*Collected papers, Chelsea, pp. 262-275.*

[3] G . H . HARDY and E . M . WRIGHT – *An introduction to the theory of numbres , Oxfordet 1960 .*

[4] G. ROBIN – Estimation de la *fonction de Tchebychef* θ sur le k^{iéme} *nombre premier et grandes valeurs de la fonction* $\omega(n)$*l,nombres de diviseurs premiers de n, Acta Arithmetica , vol .42 ,numéro 4 (1983)' pp.367-389*

[5] G. ROBIN– Majoration explicites du nombre de diviseurs d'un entier, Publ. Dept. Math. Limoges, 2, 1980, 6 pages.

[6] J . B . ROSSER – *The n-th prime is greather than* $n \log n$ *, Proc London Math.Soc . (2) , 45 (1939) , pp. 21-44*

[7] – *Explicit bounds for some functions of prime numbres , Amer . J . Math . 63 (1941) pp 211-232*

[8] J . B . ROSSER and vL . SCHOENFELD – Approximate formulas for som functions of prime numbres .Illinois Journ. 6 (1962) pp. 64-94

[9] – Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ *and* $\varphi(x)$ *,Math . of Comp .Vol . 29 , Numb . 129 , Jan . 1975 , pp 243-269*

[10] L . SCHOENFELD – Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ *and* $\varphi(x)$*L II , ibid . Vol . 30 , Numb . 134 ,April . 1976 ,pp . 337-360.*