N° d'ordre : 21/2011-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

جامعة هواري بومدين للعلوم و التكنولوجيا
U S T H B

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER EN MATHÉMATQUES.

Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres.

Par : CHAIA Ahmed

Sujet

Estimation de la fonction θ de Tchebychef sur le k-iéme nombre premier.

Soutenu publiquement le 17/03/2011, devant le jury composé de :

Mr.	**B. BENZAGHOU**	Professeur, *à l'*USTHB.	Président.
Mr.	**M.O. HERNANE**	Maître de Conférences/A, *à l'*USTHB.	Directeur de thèse.
Mr.	**M. AIDER**	Professeur, *à l'*USTHB.	Examinateur.
Mr.	**M. ZITOUNI**	Professeur, *à l'*USTHB.	Examinateur.
Mr.	**M.S. HACHAICHI**	Maître de Conférences/A, *à l'*USTHB.	Examinateur.
Mr.	**A. DERBAL**	Maître de Conférences/A, *à l'*ENS/ Kouba.	Examinateur.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail, fruit de plusieurs années d'efforts, tout d'abord à mes très chers parents, plus particuliérement à ma défunte mère, en guise de reconnaissance pour leur amour, leur aide, leur confiance, leur patience et leur présence dans tous les moments difficiles.

Je tient à les remercier trés affectueusement sachant d'avance que je ne pourrai jamais leur rendre ce qu'ils ont fait pour moi.
A ma généreuse mère, que Dieu aie pitié de son âme dans une vie paradisiaque éternelle.

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur le Professeur Benali BENZAGHOU, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Je remercie vivement Monsieur le Professeur Mohamed ZITOUNI, d'avoir accepté d'examiner ce travail en consacrant son temps à lire ce mémoire.

Je remercie vivement Monsieur Mohamed Salah HACHAICHI*, Maître de Conférences classe A d'avoir accepté d'examiner ce travail.* Que Monsieur le Professeur Méziane AIDER et Monsieur DERBAL Abdalah *Maître de Conférences classe A à l'ENS de Kouba*, qui ont bien voulu faire partie du jury, et *d'examiner ce travail,* trouvent ici mes remerciements les plus sincères.

Je voudrais aussi sincèrement exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur Mohand Ouamar HERNANE, mon Directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé.
Je lui suis également reconnaissant pour ses conseils, son aide et sa disponibilité, il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents, pour leur soutien et leur confiance en moi, ainsi qu'au reste de la famille, en particulier mes oncles MEZOUAR Kalifa et Abdelkrim sans oublier mes amis et tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin à ma formation.

Table des matières

Notations

Dans ce mémoire nous utiliserons les notations suivantes :

- k un entier positif, p_k le k-ième nombre premier tel que $p_1 = 2$, $p_2 = 3$,...
- $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$, l'ensemble des nombres premiers.
- log : désigne le logarithme Népérien.
- $[x]$: désigne la partie entière du nombre réel x.
- $\theta(x)$: désigne la fonction de Tchebychef on a : $\theta(x) = \sum\limits_{p \leq x} \log p$ pour $x > 0$
- $\pi(x)$: désigne la fonction qui compte le nombre de nombres premiers plus petits que x, on a

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1, \ pour \ x > 0$$

- $s = \sigma + it$: désigne un nombre complexe .
- $\mathrm{Re}(s)$: désigne la partie réelle de s tel que $\mathrm{Re}(s) = \sigma$.
- $\mathrm{Im}(s)$: désigne la partie imaginaire de s tel que $\mathrm{Im}(s) = t$.
- $\zeta(s)$: désigne la fonction zêta de Riemann on a $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ pour $\mathrm{Re}(s) > 1$

Pour deux fonctions réelles f et g ,

- $f \sim g$ signifie que f est asymptotiquement équivalente à g , autrement dit

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

- $f(x) = o(g(x))$ si et seulement si, pour tout nombre réel strictement positif ε, il existe un nombre réel x_0, tel que l'on ait,

$$\forall x \geq x_0, \qquad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| .$$

- $f(x) = O(g(x))$ si et seulement s'il existe deux constantes x_0 et $C > 0$, tel que on ait

$$\forall x \geq x_0, \qquad |f(x)| \leq C |g(x)| .$$

- $f(x) \asymp g(x)$: s'il existe $x_0 > 0$, $a > 0$ et $b > 0$ tel que :

$$\forall x \geqslant x_0, \quad af(x) \leqslant g(x) \leqslant bf(x) .$$

- Li : désigne le logarithme intégral, on a :

$$Li(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\log t} \right) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + Li(2) \quad \text{où } Li\ (2) = 1.045...,$$

Introduction

Soit $\pi(x)$ la fonction qui compte le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x et θ la fonction de Tchebychef définie pour $x > 0$, par $\theta(x) = \sum\limits_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \log p$, on désigne par p_k le $k^{iéme}$ nombre premier.
Dans ce travail, nous étudions le comportement asymptotique de la fonction de Tchebychef $\theta(x)$ sur le $k^{iéme}$ nombre premier p_k, c'est à dire les encadrements de $\theta(p_k)$ en utilisant les résulats connus sur la fonction $\pi(x)$. En 1983 G. Robin a montré que l'équivalence $\theta(p_k) \sim k \log k$ est un résultat plus faible que le théorème des nombres premiers, il a montré également que $\theta(p_k) > k \log k$ pour k assez grand.
Dans [27] , l'auteur a donné des encadrements explicites de la fonction $\theta(p_k)$ dans le cas où p_k est la suite des nombres premiers.

Ce présent mémoire est constitué de trois chapitres.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous avons rappelé quelques notions de la théorie des nombres premiers : les définitions des fonctions $\pi(x)$, $\theta(x)$, la déinition de la fonction zêta ζ de Riemann ainsi que les formules de sommation d'Abel et d'Euler.

Nous avons consacré le deuxième chapitre de ce travail à l'étude du comportement asymptotique de $\theta(p_k)$, sous diverses hypothèses sur $\pi(x)$.
Nous présentons et détaillons les démonstrations des résultats relatifs aux encadrements de $\theta(p_k)$ dûs à G. Robin (cf [27]).

Dans le troisième chapitre, nous nous sommes intéressés aux encadrements explicites de $\theta(p_k)$.

Dans leur article (cf [33]) , J. B. Rosser et L. Schoenfeld affirment que l'inégalité

$\theta(p_k) > k \log k$ est vérifiée pour $k \geqslant 13$.

En utilisant l'inégalité classique $\theta(x) < x \log 4$, valable pour $x > 0$, nous reprenons et détaillons la preuve de ce résultat.

Diverses inégalités basées sur les résultats de B. Rosser et L. Schoenfeld ont été prouvées par G . Robin (cf [27]), parmi ces résultats, nous considérons les encadrements :

$$\theta(p_k) \geqslant k(\log k + \log\log k - 1.076868)\,, \text{ valable } \textit{pour } k \geqslant 2,$$

avec égalité pour $k = 66$,

$$\theta(p_k) > k(\log k + \log\log k - 1)\,, \text{ valable } \textit{pour } k \leqslant 17 \ \ \textit{et} \ \ k \geqslant 5106$$

et

$$\theta(p_k) < k(\log k + \log\log k - 1)\,, \text{ valable } \textit{pour } 18 \leqslant k \leqslant 5105.$$

Nous avons repris et détaillé les démonstrations de tous ces résultats.

Notons que certaines inégalités ont été vérifiées à l'ordinateur à l'aide de *Mathématica*.

Enfin nous terminons cette étude par une conclusion et une annexe où sont données les procédures que nous avons utilisées pour les calculs numériques ainsi que quelques graphes des fonctions etudiées.

Chapitre 1

Rappels de quelques définitions et résultats fondamentaux.

1.1 Fonctions arithmétiques

Définition 1.1.1 *Une fonction arithmétique est une application de* $\mathbb{N}^*$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.2 *On dit qu'une fonction arithmétique* f *est multiplicative, si pour tous* m *et* n *entiers positifs premiers entre eux on a,*

$$f(mn) = f(m)f(n) \text{ et } f(1) = 1.$$

On dit qu'elle est complètement multiplicative si pour tous m *et* n *entiers positifs on a,*

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad \text{et } f(1) = 1.$$

1.2 Formules de sommation d'Abel et d'Euler

La formule de sommation d'Abel est le procédé consistant à transformer une somme finie de produits de deux termes en faisant apparaître les sommes partielles de l'un des deux facteurs de ce produit.

Théorème 1.2.1 (*Identité d'Abel*)
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ *tels que* $0 < y < x$, *soit* $\alpha(n)$ *une fonction arithmétique et* f *une fonction*

de classe C^1 *sur* $[y,\ x]$

on pose,

$$A(t) = \sum_{n \le t} \alpha(n)\,,\ \ t > 0\ \ (A(t) = 0,\ \ pour\ t < 1)$$

alors,

$$\sum_{y \le n \le x} \alpha(n) f(n) = A(x) f(x) - A(y) f(y) - \int_y^x A(t) f'(t)\, dt$$

Démonstration. $(cf\ [1])$

Corollaire 1.2.1 *Soient* $x, y \in \mathbb{R}$ *tels que* $0 < y < x$ *et* f *une fonction de classe* C^1 *sur* $[y,\ x]$ *alors,*

$$\sum_{y \le n \le x} f(n) = [x] f(x) - [y] f(y) - \int_y^x [t] f'(t)\, dt \tag{1.2.1}$$

Démonstration.

En prenant $\alpha(n) = 1$ *dans le théorème 1.2.1 on obtient,*

$$A(t) = \sum_{n\ \le t} 1 = \sum_{n\ \le [t]} 1 = [t]$$

l'identité d'Abel implique alors la formule (1.2.1).

Théorème 1.2.2 (*Formule de sommation d'Euler*)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ *tels que* $0 < y < x$, *et* f *une fonction de classe* C^1 *sur* $[y,\ x]$ *alors,*

$$\sum_{y \le n \le x} f(n) = \int_y^x f\ (t)\, dt + \int_y^x (t - [t]) f'(t)\, dt + ([y] - y) f(y) - ([x] - x) f(x)$$

Preuve : $(cf\ [1])$

1.3 Les fonctions $\theta(x)$ *et* $\pi(x)$

Soit x un nombre réel strictement positif et p un nombre premier.

Définition 1.3.1 *La fonction de Tchebychef* $\theta(x)$ *est définie pour* $x > 0$, *par :*

$$\theta(x) = \sum_{p \le x} \log p$$

Définition 1.3.2 *La fonction $\pi(x)$ compte le nombre de nombres premiers plus petits que x, autrement dit on a,*

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

1.4 Le théorème des nombres premiers.

En 1896, Hadamard et de la Vallée Poussin, ont démontré pour la première fois indépendamment l'un de l'autre le théorème :

Théorème 1.4.1 *Lorsque x tend vers l'infini on a :*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

Preuve. (cf.[12] et [37]) ■

Théorème 1.4.2 *Les assertions suivantes sont équivalentes,*

$$(i) \qquad \pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad \textit{lorsque } x \to +\infty \tag{1.4.1}$$

$$(ii) \qquad \theta(x) \sim x \qquad \textit{lorsque } x \to +\infty \tag{1.4.2}$$

$$(iii) \qquad p_k \sim k \log k \qquad \textit{lorsque } k \to +\infty \tag{1.4.3}$$

Ce théorème est une conséquence du théorème suivant :

Théorème 1.4.3 *Pour $x \geqslant 2$ on a,*

$$(i) \qquad \theta(x) = \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \tag{1.4.4}$$

$$(ii) \qquad \pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t \log^2 t} dt \tag{1.4.5}$$

Démonstration. *(cf [16])*

■

1.5 La fonction zêta de Riemann

Soit $s = \sigma + it$ une variable complexe telle que $\sigma = \mathrm{Re}\,(s) > 1$, alors la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s},$$

est absolument convergente.

En effet, la valeur absolue de son terme général est égal à,

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}} = \frac{1}{n^\sigma}$$

qui est le terme général d'une série de Riemann convergente pour $\mathrm{Re}\,(s) = \sigma > 1$.

Définition 1.5.1 *On appelle fonction zêta de Riemann et on note $\zeta(s)$ la somme de la série convergente,*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \textit{pour } \mathrm{Re}(s) > 1.$$

1.6 L'Hypothèse de Riemann

L'hypothèse de Riemann est une conjecture formulée en 1859, par le Mathématicien Bernhard Riemann. Il a conjecturé que tous les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann $\zeta\,(s)$ sont situés sur la droite $\mathrm{Re}\,(s) = \frac{1}{2}$.

autrement dit on a,

$$\zeta(\frac{1}{2} + it) = 0 \text{ où } t \text{ est un nombre réel}$$

Cette conjecture possède des conséquences importantes en théorie analytique des nombres. Plusieurs résultats dû à Schoenfeld (cf [34]) sont démontrés sous cette hypothèse, parmi ces résultats nous citons le :

Théorème 1.6.1 *Sous l'hypothèse de Riemann on a,*

$$|\ \pi\,(x) - Li\,(x)| \leqslant \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\log x, \qquad \textit{pour} \quad x \geqslant 2657$$

Théorème 1.6.2 *Sous l'hypothèse de Riemann on a,*

$$| \theta(x) - x| \leqslant \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}(\log x \; - 2)\log x, \qquad \textit{pour} \quad x \geqslant 23.10^8$$

$$| \theta(x) - x| \leqslant \frac{1}{8\pi}\log^2 x, \qquad \textit{pour} \quad x \geqslant 599$$

Plusieurs autres résultats ont été démontrés sous l'hypothèse de Riemann.

Chapitre 2

Comportement asymptotique de $\theta(p_k)$ sous diverses hypothèses sur $\pi(x)$

2.1 Introduction

Soient k un entier naturel, x un nombre réel positif et p_k le $k^{iéme}$ nombre premier. Soient $\theta(x)$ la fonction de Tchebychef, $\pi(x)$ la fonction qui compte le nombre de nombres premiers plus petits que x et $Li\ (x)$ le logarithme intégral, défini par :

$$Li\,(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + Li\ (2) \text{ où } Li\ (2) = 1.045...,$$

Dans ce chapitre, nous reprenons et détaillons les démonstrations des résultats dûs à G. Robin suivants :
lorque k tend vers l'infini on a,

$$\theta(p_k) = k(\log k + \log\log k + O(1))$$

$$\theta(p_k) = k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k}{\log k} + O\left(\frac{1}{\log k}\right)\right)$$

et

$$\theta(p_k) = Li^{-1}(k) + O\left(\sqrt{k}\,(\log k)^{\frac{3}{2}}\right)$$

Les démonstrations de ces estimations sont basées éssentiellement sur la formule de sommation d'Abel et le théorème des nombres premiers (cf[1]) .
ainsi que sur l'inégalité classique,

$$\theta(x) < x \log 4, \quad \textit{pour } x > 0 \tag{2.1.1}$$

et l'inégalité de Hanson,

$$\theta(x) \geqslant \frac{3}{4}x\ , \quad \textit{pour } x \geqslant 13 \quad (cf\ \ [13]\ ) \tag{2.1.2}$$

2.2 Estimations de $\theta(p_k)$ et p_k .

Théorème 2.2.1 ($Théorème\ de\ Tchebychef$ (cf [15]))

$$\pi(x) \asymp \frac{x}{\log x}, \quad \textit{lorsque } x \to +\infty$$

Preuve($cf.$ [15])
Le théorème qui suit donne l'estimation de $\theta(p_k)$ lorsque k tend vers l'infini on a,

Théorème 2.2.2 *Soit x un nombre réel strictement positif et k un entier naturel. Alors les assertions suivantes sont équivalentes,*

(i)	$\pi(x) \asymp \dfrac{x}{\log x}$	*lorsque* $x \to +\infty$
(ii)	$\theta(x) \asymp x$	*lorsque* $x \to +\infty$
(iii)	$p_k \asymp k \log k$	*lorsque* $k \to +\infty$
(iv)	$\theta(p_k) = k(\log k + \log\log k + O(1))$	*lorsque* $k \to +\infty$

Preuve.

Démonstration de (ii) ***implique*** (i) *:*

Soit $k \geqslant 2$ et $(p_i)_{1 \leq i \leq k}$, la suite des nombres premiers tel que $p_1 < p_2 < .. < p_k$
On suppose (ii) , c'est à dire qu'il existe $a > 0$, $b > 0$ et $x_0 > 0$ tels que l'on ait,

$$ax \leqslant \theta(x) \leqslant bx \quad \textit{pour} \quad x \geqslant x_0$$

ce qui implique *pour* $x \geqslant x_0 \geqslant 2$,

$$ax+\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt \leqslant \theta(x)+\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt \leqslant bx \ + \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt \quad ,$$

en utilisant la formule (1.4.4) on obtient,

$$ax+\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt \leqslant \pi(x)\log x \leqslant bx \ + \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt, \tag{2.2.1}$$

comme on a,

$$0 \leqslant \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt \leqslant \int_2^x dt = x-2 < x \qquad \left(\text{car } \pi(t) < \frac{1}{2}t - 1 < t, \text{ cf } [11] \right)$$

alors (2.2.1) s'écrit,

$$ax \leqslant \pi(x)\log x \leqslant (b+1)x \quad \textit{pour} \quad x \geqslant x_0 \geqslant 2$$

ce qui est équivalent à,

$$a\frac{x}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant (b+1)\frac{x}{\log x} \qquad \textit{pour} \quad x \geqslant x_0 \geqslant 2$$

d'où l'assertion (i).

Démonstration de (i) implique (iii) :

On suppose (i), c'est -à -dire qu'il existe $a > 0$, $b > 0$ et $x_0 > 0$ tels que,

$$a\frac{x}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant b\frac{x}{\log x} \qquad \textit{pour} \quad x \geqslant x_0,$$

alors ceci est équivalent à,

$$ax \leqslant \pi(x)\log x \leqslant bx \qquad \textit{pour} \quad x \geqslant x_0, \tag{2.2.2}$$

en prenant le logarithme népérien dans (2.2.2) on obtient,

$$\log a + \log x \leqslant \log \pi(x) + \log\log x \leqslant \log b + \log x \tag{2.2.3}$$

et en divisant (2.2.3) par $\log x$ il vient,

$$\frac{\log a}{\log x} + 1 \leqslant \frac{\log \pi(x)}{\log x} + \frac{\log\log x}{\log x} \leqslant \frac{\log b}{\log x} + 1$$

par passage à la limite lorsque $x \to +\infty$ on obtient,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\log \pi(x)} = 1, \quad \text{puisque} \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\log x}{\log x} = 0$$

ceci implique,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ A > 0 \ \textit{tel que}\ \forall x \geqslant A\ :\quad \left|\frac{\log x}{\log \pi(x)} - 1\right| \leqslant \varepsilon$$

en posant $\varepsilon = \varepsilon_0 < 1$, on obtient,

$$(1-\varepsilon_0)\log \pi(x) \leqslant \log x \ \leqslant (1+\varepsilon_0)\log \pi(x) \quad \textit{pour}\ x \geqslant A,$$

en prenant $x = p_k$, nous obtenons,

$$(1-\varepsilon_0)\log k \leqslant \log\ p_k \leqslant (1+\varepsilon_0)\log k \qquad \textit{pour}\ \ p_k \geqslant A, \tag{2.2.4}$$

et l'encadrement (2.2.2) s'écrit alors,

$$ap_k \leqslant k\log p_k \leqslant b\ p_k \quad \textit{pour}\ \ p_k \geqslant x_0,$$

ce qui est équivalent à,

$$\frac{1}{b}k\log p_k \leqslant p_k \leqslant \frac{1}{a}k\log p_k \quad \textit{pour}\ \ p_k \geqslant x_0, \tag{2.2.5}$$

les inégalités (2.2.4) et (2.2.5) impliquent alors,

$$\frac{(1-\varepsilon_0)}{b}k\log k \leqslant\ p_k \leqslant \frac{(1+\varepsilon_0)}{a}k\log k \quad \textit{pour}\ k \geqslant k_0\ \ \textit{tel que}\ \ p_{k_0} \geqslant \max\{x_0, A\}$$

d'où la relation (iii) .

Montrons l'équivalence de (iii) et (iv) :

Supposons (iii) vérifiée alors,

$$ak\log k \leqslant\ p_k \leqslant bk\log k \quad \textit{pour}\ k \geqslant k_0\ \ \textit{tel que}\ a > 0\ , b > 0\ \textit{et}\ k_0 \geqslant 1,$$

comme la fonction $x \to \log x$ est croissante sur $]0, +\infty[$ alors,

$$\log a + \log k\ + \log\log k \leqslant \log p_k\ \leqslant \log b + \log k + \log\log k$$

ce qui est équivalent à,

$$\log a \leqslant \log p_k \ - \log k - \log\log k \leqslant \log b,$$

en posant, $C = \max\{|\log a|, |\log b|\}$ on obtient,

$$-C \leqslant \log p_k \ - \log k - \log\log k \leqslant +C,$$

autrement dit on a,

$$|\log p_k \ - \log k - \log\log k| \leqslant C,$$

donc,

$$\log p_k - \log k - \log\log k = O(1),$$

d'où,

$$\log p_k = \log k + \log\log k + O(1),$$

par suite,

$$\theta(p_k) = \sum_{p \leq p_k} \log p = \sum_{i=1}^{k} \log p_i = \log p_1 + \sum_{i=2}^{k} \log p_i = \log 2 + \sum_{i=2}^{k} (\log i + \log\log i) + \sum_{i=2}^{k} O(1)$$

$$= \sum_{i=2}^{k} (\log i + \log\log i) + (k-1)\, O(1) \tag{2.2.6}$$

posons, $f(t) = \log t + \log\log t$, on a $f \in C^{1}[2,k]$.

En utilisant la formule de sommation (1.2.1) pour $x = k$ *et* $y = 2$ il vient,

$$\sum_{i=2}^{k} f(i) - k(\log k + \log\log k) = O(k)$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{n=2}^{k} (\log i + \log\log i) = k(\log k + \log\log k + O(1)), \tag{2.2.7}$$

En utilisant les rélations (2.2.6) et (2.2.7) on obtient,

$$\theta(p_k) = k(\log k + \log\log k + O(1)) + O(k),$$

d'où l'on déduit l'estimation,

$$\theta(p_k) = k(\log k + \log\log k + O(1)),$$

Montrons que (iv) **implique** (iii) :
L'inégalité,

$$\theta(p_k) = \sum_{i=1}^{k} \log\ p_i \leqslant k \log\ p_k$$

et l'hypothèse (iv) impliquent,

$$\log k + \log\log k + O(1) \ \leqslant\ \log p_k\ . \tag{2.2.8}$$

Ceci d'une part,
D'autre part on a,

$$\begin{aligned}\theta(p_{2k}) - \theta(p_k) &= 2k\left(\log 2k + \log\log 2k + O(1)\right) - k\left(\log k + \log\log k + O(1)\right)\\ &= 2k\left(\log 2 + \log k + \log\left(\log 2 + \log k\right) + O(1)\right) - k\left(\log k + \log\log k + O(1)\right)\\ &= k(\log k + \log\log k) + (2\log 2 + 2\log\left(1 + \frac{\log 2}{\log k}\right) + O(1))k,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\theta(p_{2k}) - \theta(p_k) - k\left(\log k + \log\log k + (2\log 2 + 2\log\left(1 + \frac{\log 2}{\log k}\right)\right) = O(k))$$

il existe donc deux constantes $C > 0$ et $k_0 \geqslant 2$ tels que l'on ait,

$$\left|\theta(p_{2k}) - \theta(p_k) - k(\log k + \log\log k) - \left[2\log 2 + 2\log\left(1 + \frac{\log 2}{\log k}\right)\right] k\right| \leqslant C\ k\ \ pour\ \ k \geqslant k_0 \geqslant 2 \tag{2.2.9}$$

d'où l'on déduit que,

$$\begin{aligned}\left|\theta(p_{2k}) - \theta(p_k) - k(\log k + \log\log k)\right| &\leqslant \left[2\log 2 + 2\log\left(1 + \frac{\log 2}{\log k}\right)\right] k + Ck\\ &\leqslant (4\log 2 + C)\,k\end{aligned}$$

donc,

$$\theta(p_{2k}) - \theta(p_k) = k\left(\log k + \log\log k + O(1)\right),$$

comme on a,

$$\theta(p_{2k}) - \theta(p_k) = \sum_{k+1}^{2k} \log\ p_i \geqslant k \log p_k,$$

alors,

$$\log k + \log\log k + O(1) \ \geqslant\ \log p_k, \tag{2.2.10}$$

De (2.2.8) et (2.2.10) on déduit que,

$$\log \frac{p_k}{k \log k} = O(1),$$

il existe donc $C > 0$ et $k_0 \geqslant 2$ tel que l'on ait,

$$-C \leqslant \log \frac{p_k}{k \log k} \leqslant +C, \quad \textit{pour } k \geqslant k_0$$

d'où,

$$\exp(-C)\, k \log k \leqslant p_k \leqslant \exp(C)\, k \log k,$$

ce qui prouve (iii).

Démonstration de (iv) implique (ii) :

L'hypothèse (iv) implique,

$$\log k + \log\log k - C \leqslant \frac{\theta(p_k)}{k} \leqslant \log k + \log\log k + C \quad \textit{pour } k \geqslant k_0 \geqslant 2 \tag{2.2.11}$$

comme,

$$\lim_{k \to +\infty} \log\log k = +\infty,$$

alors pour tout $A > 0$, il existe $K_A \geqslant 2$ tel que,

$$\log\log k > A \quad \textit{pour tout } k \geqslant K_A$$

Pour $A = C$ on a,

$$\log\log k > C \quad \textit{pour tout } k \geqslant K_C$$

l'encadrement (2.2.11) implique alors *pour* $k \geqslant \max\{k_0,\ K_C\}$,

$$\log k < \frac{\theta(p_k)}{k} \leqslant \log k + \log\log k + \log\log k,$$

d'où l'on déduit l'inégalité,

$$k\log k < \theta(p_k) \leqslant 3k\log k \quad pour\ k \geqslant k_1 = \max\{k_0,\ K_C\}, \tag{2.2.12}$$

comme (iv) implique (iii), alors il existe $a > 0$, $b > 0$ et $k_2 \geqslant 2$ tels que,

$$ak\log k \leqslant p_k \leqslant bk\log k \quad pour\ k \geqslant k_2, \tag{2.2.13}$$

les inégalités (2.2.12) et (2.2.13) impliquent alors,

$$\frac{1}{b}p_k \leqslant \theta(p_k) \leqslant \frac{3}{a}p_k \quad pour\ k \geqslant \max\{p_{k_1},\ p_{k_2}\}. \tag{2.2.14}$$

Soit $x > 0$ tel que,

$$p_k \leqslant x < p_{k+1} = \frac{p_{k+1}}{p_k}p_k, \tag{2.2.15}$$

alors,

$$\theta(p_k) = \sum_{i=1}^{k}\log p_i = \sum_{p\leq p_k\leq x}\log p = \theta(x) \tag{2.2.16}$$

les inégalités (2.2.13) et (2.2.15) impliquent,

$$p_k \leqslant x < 4\frac{b}{a}p_k \tag{2.2.17}$$

grâce à (2.2.14) , (2.2.16) et à (2.2.17) on obtient,

$$\frac{a}{4b^2}x \leqslant \theta(x) \leqslant \frac{3}{a}x \qquad pour\ \ x \geqslant \max\{p_{k_2},\ p_{k_1}\}$$

d'où l'assertion (ii) .

Corollaire 2.2.1 *Soient $a > 0$ et $x_0 > 0$.*
Si $\theta(x) < ax$ pour $x \geqslant x_0$, alors, il existe $K_0 > 0$ tel que, $\theta(p_k) > k\log k$ pour $k \geqslant K_0$.

Démonstration *Se démontre en utilisant le théorème 2.2.2 .*

Théorème 2.2.3 *Les trois premières assertions suivantes sont équivalentes et entraînent la quatrième,*

(i) $\quad \pi(x) = \dfrac{x}{\log x} + O\left(\dfrac{x}{\log^2 x}\right)$ *lorsque* $x \to +\infty$

(ii) $\quad \theta(x) = x + O\left(\dfrac{x}{\log x}\right)$ *lorsque* $x \to +\infty$

(iii) $\quad p_k = k(\log k + \log\log k + O(1))$ *lorsque* $k \to +\infty$

(iv) $\quad \theta(p_k) = k\left(\log k + \log\log k - 1 + \dfrac{\log\log k}{\log k} + O\left(\dfrac{1}{\log k}\right)\right)$ *lorsque* $k \to +\infty$

preuve :

Pour la démonstration nous utiliserons les lemmes suivants :

Lemme 2.2.1 *On a,*

(i) $\quad \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\log t} \leqslant 2\frac{x}{\log x}$ *pour* $x \geqslant 2$,

(ii) $\quad \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} \leqslant 1.7\frac{x}{\log^2 x}$ *pour* $x \geqslant 790$,

Démonstration *Soient* n *un entier naturel non nul et* x_0 *une constante réelle positive. La fonction* $x \to \dfrac{\log x - n}{\log x}$ *étant croissante pour* $x \geqslant x_0 > 1$ *alors,*

$$\frac{\log x_0 - n}{\log x_0} \leqslant \frac{\log x - n}{\log x} \quad \text{pour } x \geqslant x_0, \tag{2.2.18}$$

en multipliant (2.2.18) *par* $\dfrac{\log x_0}{\log x_0 - n}\dfrac{1}{\log^n x}$ *on obtient pour* $x \geqslant x_0 > \exp(n)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log^n x} &\leqslant \frac{\log x_0}{\log x_0 - n}\frac{\log x - n}{\log^{n+1} x} \\ &= \frac{\log x_0}{\log x_0 - n}\left(\frac{x}{\log^n x}\right)' \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

par suite en intégrant (2.2.19) *dans l'intervalle* $[x_0,\ x]$ *on obtient,*

$$\int_{x_0}^x \frac{dt}{\log^n t} \leqslant \frac{\log x_0}{\log x_0 - n}\left[\frac{t}{\log^n t}\right]_{x_0}^x = \frac{\log x_0}{\log x_0 - n}\frac{x}{\log^n x} - \frac{x_0}{(\log x_0 - n)\log^{n-1} x_0}$$

ce qui implique pour $x \geqslant x_0$,

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^n t} \leqslant \int_2^{x_0} \frac{dt}{\log^n t} - \frac{x_0}{(\log x_0 - n)\log^{n-1} x_0} + \frac{\log x_0}{\log x_0 - n}\frac{x}{\log^n x} \tag{2.2.20}$$

Preuve de (i)

En prenant $n=1$ *et* $x_0=\exp(2)$ *dans* $(2.2.20)$, *on obtient pour* $x\geqslant\exp(2)$,

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} \leqslant \int_2^{\exp(2)} \frac{dt}{\log t} - \exp(2) + 2\frac{x}{\log x},$$

comme,

$$\int_2^{\exp(2)} \frac{dt}{\log t} - \exp(2) = -3.480\,0...,$$

alors,

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} \leqslant -3.4800 + 2\frac{x}{\log x} \leqslant 2\frac{x}{\log x} \quad \textit{pour } x \geqslant \exp(2)\,.$$

Supposons $x\in[2,\ \exp(2)]$.
La fonction $x\rightarrow f(x)=\displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\log^n t}$ *est croissante pour* $x\geqslant 2$,
on a alors pour $2\leqslant x\leqslant\exp(2)$,

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} \leqslant \int_2^{\exp(2)} \frac{dt}{\log t} = 3.9091 < 2\exp(1) \tag{2.2.21}$$

Dans l'intervalle $]1,+\infty[$, *la fonction* $g:x\rightarrow\dfrac{x}{\log^n x}$ *atteint son minimum au point* $x=\exp(n)$, *et on a* $g(\exp(n))=\left(\dfrac{\exp(1)}{n}\right)^n$, *donc,*

$$\left(\frac{\exp(1)}{n}\right)^n \leqslant \frac{x}{\log^n x}\ . \qquad \textit{pour } x>1, \tag{2.2.22}$$

en utilisant l'inégalité (2.2.22) pour $n=1$ *et* $(2.2.21)$ *il vient,*

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} < 2\exp(1) \leqslant 2\frac{x}{\log x} \quad \textit{pour } 2\leqslant x\leqslant\exp(2)$$

ce qui achève la preuve de (i) *du lemme* 2.2.1.

Preuve de (ii)

Pour $x_0=790$ *et* $n=2$, *l'inégalité (2.2.20) implique,*

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} \leqslant \int_2^{790} \frac{dt}{\log^2 t} - \frac{790}{(\log 790-2)\log 790} + \frac{\log 790}{\log 790-2}\frac{x}{\log^2 x},$$

les calculs numériques donnent,

$$\int_2^{790} \frac{dt}{\log^2 t} - \frac{790}{(\log 790-2)\log 790} \simeq 4.8$$

donc,

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} \leqslant 4.8 \frac{(\log 790)^2}{790} \frac{790}{(\log 790)^2} + \frac{\log 790}{\log 790 - 2} \frac{x}{\log^2 x}$$

La fonction $x \rightarrow \dfrac{x}{\log^2 x}$ *étant croissante pour* $x \geqslant \exp(2)$ *on a alors pour* $x \geqslant 790$,

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} &\leqslant 4.8 \frac{(\log 790)^2}{790} \frac{x}{\log^2 x} + \frac{\log 790}{\log 790 - 2} \frac{x}{\log^2 x} \\ &\leqslant 1.7 \frac{x}{\log^2 x} \qquad \square \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de (ii) du lemme 2.2.1.

Lemme 2.2.2 : *On a*

$$(i) \quad p_k \geqslant c_1 k \log k \ , \qquad pour\ k \geqslant 110 \tag{2.2.23}$$

$$(ii) \quad \log p_k \leqslant c_2 \log k \ , \quad pour\ k \geqslant 2 \tag{2.2.24}$$

$$(iii) \quad p_k \leqslant c_3 k \log k \ , \quad pour\ k \geqslant 2 \tag{2.2.25}$$

$$où \quad c_1 = \frac{1}{2} \ , \ c_2 = 2 \quad et \quad c_3 = \exp(1)$$

Démonstration

Preuve de *(2.2.23) .*

La majoration (2.1.1) *implique avec la relation* (1.4.5) ,

$$\pi(x) \leqslant \frac{x}{\log x} \log 4 + (\log 4) \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} \quad pour\ x \geqslant 2,$$

en utilisant (ii) *du lemme* 2.2.1*, on obtient pour* $x \geqslant 790$*,*

$$\begin{aligned}
\pi(x) &\leqslant \frac{x}{\log x} \log 4 + (\log 4) \times 1.7 \frac{x}{\log^2 x} \\
&\leqslant \left(\log 4 + (\log 4) \times 1.7 \times \frac{1}{\log 790} \right) \frac{x}{\log x} \\
&\leqslant 1.74 \frac{x}{\log x}
\end{aligned}$$

Comme on a pour $600 \leqslant x \leqslant 790$ *alors,*

$$\pi(x) \leqslant \pi(790) < \pi(967) = 163 < 1.74 \frac{600}{\log 600} \leqslant 1.74 \frac{x}{\log x} \qquad \square$$

d'où l'on déduit que pour tout $x \geqslant 600$ *on a,*

$$\pi(x) \leqslant 1.74 \frac{x}{\log x} \tag{2.2.26}$$

en posant $x = p_k$*, on a pour* $k \geqslant \pi(600) + 1 = 110$*,*

$$p_k \geqslant \frac{1}{1.74} k \log p_k \geqslant \frac{1}{1.74} k \log k \geqslant \frac{1}{2} k \log k \qquad \square.$$

Preuve de (2.2.24)

D'après l'inégalité ***(2.2.22)*** *on a,*

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 < \left(\frac{\exp(1)}{2}\right)^2 \leqslant \frac{x}{\log^2 x} \quad pour \ \ x \geqslant 2$$

ce qui implique,

$$\sqrt{x} \leqslant \frac{3}{4}\frac{x}{\log x} \quad pour \quad x \geqslant 2, \tag{2.2.27}$$

D'autre part les relations (1.4.5) *et* (2.1.2) *entrainent pour* $x \geqslant 13$,

$$\pi(x) \geqslant \frac{3}{4}\frac{x}{\log x} + \frac{3}{4}\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} \geqslant \frac{3}{4}\frac{x}{\log x}$$

mais on a,

$$\pi(x) \geqslant \pi(8) = 4 > \frac{3}{4}\frac{13}{\log 13} \geqslant \frac{3}{4}\frac{x}{\log x} \quad pour\ 8 \leqslant x \leqslant 13$$

et

$$\pi(x) \geqslant \pi(5) = 3 > \frac{3}{4}\frac{8}{\log 8} \geqslant \frac{3}{4}\frac{x}{\log x} \quad pour\ 5 \leqslant x \leqslant 8$$

alors pour tout $x \geqslant 5$ *on a,*

$$\pi(x) \geqslant \frac{3}{4}\frac{x}{\log x}, \tag{2.2.28}$$

cela implique avec ***(2.2.27) ,***

$$\pi(x) \geqslant \sqrt{x} \quad pour \quad x \geqslant 5,$$

d'où l'on déduit pour $x = p_k$ *l'inégalité,*

$$\log p_k \leqslant 2\log k \quad pour\ k \geqslant 3$$

et pour $k = 2$ *on a bien,*

$$\log p_2 \leqslant 2\log 2. \qquad \square$$

donc,

$$\log p_k \leqslant c_2 \log k\ ,\ pour\ k \geqslant 2 \qquad où\ \ c_2 = 2$$

Preuve de (2.2.25)

En remplaçant x *par* p_k *dans* ***(2.2.28)*** *nous obtenons,*

$$p_k \leqslant \frac{4}{3} k \log p_k \quad pour\ k \geqslant 3,$$

et en utilisant ***(2.2.24)*** *il vient,*

$$p_k \leqslant \frac{4c_2}{3} k \log k \ \leqslant c_3 k \log k \quad pour\ k \geqslant 3 \qquad avec\ \ c_3 = \exp(1)$$

et pour $k = 2$ *on a* $p_2 = 3 \leqslant 2\exp(1)\log 2 = 3.7683$.

Lemme 2.2.3. *Lorsque k tend vers l'infini on a,*

$$\log(1 + \frac{\log\log k + O(1)}{\log k}) = \frac{\log\log k + O(1)}{\log k}$$

Démonstration. *La fonction* $f(x) = \log(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$ *étant croissante pour* $x \geqslant 0$ *alors,*

$$\log(1+x) \geqslant x - \frac{1}{2}x^2 \quad \textit{pour } x \geqslant 0, \tag{2.2.29}$$

en utilisant l'inégalité usuelle $\log(1+x) \leqslant x$ *valable pour* $x \geqslant 0$ *il vient,*

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \log(1+x) \leqslant x \leqslant x + \frac{1}{2}x^2 \quad \textit{pour } x \geqslant 0,$$

ce qui est équivalent à,

$$|\log(1+x) - x| \leqslant \frac{1}{2}x^2 \quad \textit{pour } x \geqslant 0,$$

pour $x = \dfrac{\log\log k + O(1)}{\log k}$ *on obtient,*

$$\left|\log(1 + \frac{\log\log k + O(1)}{\log k}) - \frac{\log\log k + O(1)}{\log k}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\log\log k + O(1)}{\log k}\right)^2$$

En divisant par $\dfrac{1}{\log k}$ *et par passage à la limite lorsque* x *tend vers* $+\infty$, *on obtient,*

$$\log(1 + \frac{\log\log k + O(1)}{\log k}) - \frac{\log\log k + O(1)}{\log k} = O\left(\frac{1}{\log k}\right)$$

d'où l'on déduit que,

$$\log(1 + \frac{\log\log k + O(1)}{\log k}) = \frac{\log\log k}{\log k} + O\left(\frac{1}{\log k}\right)$$

Ceci achève la preuve du lemme 2.2.3.

***Démonstration* du théorème 2.2.3.**

Démonstration de (ii) *implique* (i) :

La relation (1.4.5) *implique,*

$$\pi(x) - \frac{x}{\log x} = \frac{\theta(x) - x}{\log x} + \int_2^{x_0} \frac{\theta(t)}{t\log^2 t}dt + \int_{x_0}^{x} \frac{\theta(t) - t}{t\log^2 t}dt + \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\log^2 t} \quad \textit{pour} \quad x \geqslant 2,$$

posons,

$$\int_2^{x_0} \frac{\theta(t)}{t\log^2 t}dt = K, \quad \text{où } K \text{ est une constante}$$

alors,

$$\pi(x) - \frac{x}{\log x} = \frac{\theta(x) - x}{\log x} + \int_{x_0}^{x} \frac{\theta(t) - t}{t\log^2 t}dt + \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\log^2 t} + K \quad \text{pour} \quad x \geqslant 2 \tag{2.2.30}$$

en prenant la valeur absolue de (2.2.30) , l'hypothèse (ii) *étant équivalente à,*

$$|\theta(x) - x| \leqslant c\frac{x}{\log x} \quad \text{pour } x \geqslant x_0 \text{ où } c \text{ et } x_0 \text{ sont des constantes positives,}$$

on obtient alors pour $x \geqslant x_0 \geqslant 790$,

$$\begin{aligned}\left|\pi(x) - \frac{x}{\log x}\right| &\leqslant \frac{|\theta(x) - x|}{\log x} + \int_{x_0}^{x} \frac{|\theta(t) - t|}{t\log^2 t}dt + \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\log^2 t} + |K| \\ &\leqslant c\frac{x}{\log^2 x} + c\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\log^2 t} + \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\log^2 t} + \frac{4}{e^2}|K|\left(\frac{e}{2}\right)^2\end{aligned}$$

et en utilisant (ii) *du lemme* 2.2.1 *et l'inégalité* ***(2.2.22)*** *il vient,*

$$\begin{aligned}\left|\pi(x) - \frac{x}{\log x}\right| &\leqslant c\frac{x}{\log^2 x} + 1.7(c+1)\frac{x}{\log^2 x} + \frac{4}{e^2}|K|\frac{x}{\log^2 x} \\ &\leqslant \left(2.7c + \frac{4}{e^2}|K| + 1.7\right)\frac{x}{\log^2 x}, \quad \text{pour } x \geqslant x_0 \geqslant 790\end{aligned}$$

d'où l'on déduit,

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) \qquad \square$$

Démonstration de (iii) ***implique*** (iv) :

Supposons (iii), *c'est-à-dire que l'on a,*

$$p_k = k(\log k + \log\log k + O(1))$$

alors,

$$p_k = k\log k\left(1 + \frac{\log\log k + O(1)}{\log k}\right)$$

grâce au lemme 2.2.3 on obtient,

$$\log p_k = \log\left[k\log k\left(1 + \frac{\log\log k + O(1)}{\log k}\right)\right]$$

$$= \log k + \log\log k + \frac{\log\log k}{\log k} + O\left(\frac{1}{\log k}\right)$$

ceci implique qu'il existe deux constantes positives $C > 0$ et $k_0 \geqslant 2$ tel que pour $k \geqslant k_0$ on ait,

$$\left|\log p_k - \left(\log k + \log\log k + \frac{\log\log k}{\log k}\right)\right| \leqslant C\frac{1}{\log k},$$

par suite,

$$\sum_{i=k_0}^{k}\left|\log p_i - \left(\log i + \log\log i + \frac{\log\log i}{\log i}\right)\right| \leqslant C\sum_{i=k_0}^{k}\frac{1}{\log i},$$

d'où,

$$\left|\sum_{i=k_0}^{k}\log p_i - \sum_{i=k_0}^{k}\left(\log i + \log\log i + \frac{\log\log i}{\log i}\right)\right| \leqslant C\sum_{i=k_0}^{k}\frac{1}{\log i}, \tag{2.2.31}$$

en posant $f(t) = \log t + \log\log t + \dfrac{\log\log t}{\log t}$ où $t \in [2, k]$, l'inégalité (2.2.31) devient,

$$\left|\theta\left(p_k\right) - \theta\left(p_{k_0-1}\right) - \sum_{i=k_0}^{k} f(i)\right| \leqslant C\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\log i}$$

que l'on peut encore écrire,

$$\left|\theta\left(p_k\right) - \theta\left(p_{k_0-1}\right) - k\left(f(k) - 1\right) + k\left(f(k) - 1\right) - \left(\sum_{i=2}^{k} f(i) - \sum_{i=2}^{k_0-1} f(i)\right)\right| \leqslant C\sum_{i=k_0}^{k}\frac{1}{\log i}$$

ou encore,

$$\left|\theta\left(p_k\right) - k\left(f(k) - 1\right) + k\left(f(k) - 1\right) - \sum_{i=2}^{k} f(i) + H_0\right| \leqslant C\sum_{i=k_0}^{k}\frac{1}{\log i} \quad \text{avec} \quad H_0 = \theta\left(p_{k_0-1}\right) - \sum_{i=2}^{k_0-1} f(i)$$

ce qui implique,

$$\left|\theta\left(p_k\right) - k\left(f(k) - 1\right)\right| - \left|k\left(f(k) - 1\right) - \sum_{i=2}^{k} f(i) + H_0\right| \leqslant C\sum_{i=k_0}^{k}\frac{1}{\log i}$$

d'où,

$$\left|\theta\left(p_k\right) - k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k}{\log k}\right)\right| \leqslant \left|k\left(f(k) - 1\right) - \sum_{i=2}^{k} f(i) + H_0\right| + C\sum_{i=k_0}^{k}\frac{1}{\log i} \tag{2.2.32}$$

l'estimation des termes du membre de droite de l'inégalité (2.2.32), *se fait comme suit :*
Avec le corollaire 1.2.1, *on estime les termes du membre de droite de l'inégalité* (2.2.32), *on obtient,*

$$\begin{aligned}\left|k\left(f\left(k\right)-1\right)-\sum_{i=2}^{k}f\left(i\right)+H_0\right| &\leqslant \left|H_0-2-2f\left(2\right)\right|+\left|\int_2^k\left[t\right]f'\left(t\right)dt-\int_2^k dt\right|\\ &\leqslant \frac{\left|H_0-2-2f\left(2\right)\right|}{\exp\left(1\right)}\frac{k}{\log k}\\ &+\left|\int_2^k dt-\int_2^k\frac{\left[t\right]}{t}\left(1+\frac{1}{\log t}+\frac{1-\log\log t}{\log^2 t}\right)dt\right|\end{aligned} \tag{2.2.33}$$

en posant $H_1=\dfrac{\left|H_0-2-2f\left(2\right)\right|}{\exp\left(1\right)}$, *l'inégalité (2.2.33) devient,*

$$\begin{aligned}\left|k\left(f\left(k\right)-1\right)-\sum_{i=2}^{k}f\left(i\right)+H_0\right| &\leqslant H_1\frac{k}{\log k}+4\int_2^k\frac{1}{\log t}dt\\ &\leqslant H_1\frac{k}{\log k}+8\frac{k}{\log k}=\left(H_1+8\right)\frac{k}{\log k}\end{aligned} \tag{2.2.34}$$

en appliquant encore le corollaire 1.2.1, puis (i) *du lemme 2.2.1, on majore le deuxième terme de* (2.2.32) *par,*

$$\sum_{i=k_0}^{k}\frac{C}{\log i}\leqslant C\int_2^k\frac{dt}{\log t}\leqslant 2C\frac{k}{\log k}\quad \textit{pour } k\geqslant k_0. \tag{2.2.35}$$

Les inégalités (2.2.32), *(2.2.34) et (2.2.35) entraînent alors,*

$$\left|\ \theta\left(p_k\right)-k\left(\log k+\log\log k-1+\frac{\log\log k}{\log k}\right)\right|\leqslant\left(H_1+2C+8\right)\frac{k}{\log k}\quad \textit{pour } k\geqslant k_0$$

d'où l'estimation (iii)

Démonstration de (i) ***implique*** (iii) :

On suppose (i), *c'est-à-dire que l'on a,*

$$\left|\pi\left(x\right)-\frac{x}{\log x}\right|\leqslant c\frac{x}{\log^2 x}\qquad \textit{pour}\ \ x\geqslant x_0\ \ \textit{où}\ \ c \textit{ est une constante positive,}$$

ceci est équivalent à,

$$-c\frac{x}{\log^2 x}\leqslant\frac{x}{\log x}-\pi\left(x\right)\leqslant c\frac{x}{\log^2 x} \tag{2.2.36}$$

d'où l'on déduit que,

$$-c\frac{x}{\log x}+\pi(x)\log x\leqslant x\leqslant c\frac{x}{\log x}+\pi(x)\log x \quad pour \quad x\geqslant x_0,$$

*comme **(2.2.28)** implique pour* $x\geqslant 5$,

$$-\frac{4}{3}\pi(x)\leqslant -\frac{x}{\log x}\quad et \quad \frac{x}{\log x}\geqslant \frac{4}{3}\pi(x)$$

alors on a pour $x\geqslant \max\{x_0,\ 5\ \}$,

$$-\frac{4c}{3}\pi(x)+\pi(x)\log x\leqslant x\leqslant +\frac{4}{3}\pi(x)+\pi(x)\log x$$

et pour $x=p_k$ *on obtient,*

$$-\frac{4c}{3}k+k\log p_k\leqslant p_k\leqslant +\frac{4c}{3}k+k\log p_k \quad pour\ k\geqslant k_0\ tel\ que\ p_{k_0}\geqslant \max\{x_0,5\}$$

En utilisant (2.2.28) nous obtenons pour $k\geqslant k_0$,

$$-\frac{4c}{3}k+k\log\left(\frac{1}{2}k\log k\right)\leqslant p_k\leqslant +\frac{4c}{3}k+k\log\left(\exp(1)\,k\log k\right)$$

ce qui est équivalent à,

$$-\frac{4c}{3}k-k\log 2\leqslant p_k-k\left(\log k+\log\log k\right)\leqslant \frac{4c}{3}k+k$$

et donc,

$$-\left(\frac{4c}{3}+1\right)k\leqslant -\left(\frac{4c}{3}+\log 2\right)k\leqslant p_k-k\left(\log k+\log\log k\right)\leqslant \left(\frac{4c}{3}+1\right)k$$

ce qui entraîne,

$$\left|p_k-k\left(\log k+\log\log k\right)\right|\leqslant \left(\frac{4c}{3}+1\right)k \quad pour\ k\geqslant k_0$$

d'où l'on obtient,

$$p_k=k\left(\log k+\log\log k+O(1)\right).$$

Démonstration de (iii) ***implique*** (ii) :

Soit x *un nombre réel tel que* $p_k\leqslant x<p_{k+1}$ *où* p_k *le désigne* $k-$*ième nombre premier.*

Alors on a ,

$$\theta(p_k)=\theta(x) \quad et \quad -p_{k+1}<-x\leqslant -p_k$$

d'où,

$$\theta(p_k)-p_{k+1}<\theta(p_k)-x\leqslant \theta(p_k)-p_k, \tag{2.2.37}$$

en remplaçant $\theta(p_k)$ par $\theta(x)$ dans le scond membre de (2.2.37) on obtient,

$$\theta(p_k)-p_{k+1}<\theta(x)-x\leqslant \theta(p_k)-p_k, \tag{2.2.38}$$

comme par (2.2.23) et (2.2.25) on a,

$$p_k \asymp k\log k$$

le théorème 2.2.2 implique alors,

$$\theta(p_k)=k(\log k+\log\log k+O(1))$$

or on a,

$$p_k=k(\log k+\log\log k+O(1))$$

donc,

$$\theta(p_k)-p_k=O(k) \tag{2.2.39}$$

alors il existe $C>0$ et $k_0\geqslant 2$ tel que,

$$|\theta(p_k)-p_k|\leqslant Ck \qquad pour\ k\geqslant k_0$$

d'où,

$$\theta(p_k)-p_k\leqslant Ck \qquad pour\ k\geqslant k_0 \tag{2.2.40}$$

ceci d'une part,
d'autre part, d'après (2.2.39) on a lorsque $k\to+\infty$,

$$\begin{aligned}\theta(p_k)-p_{k+1} &= \theta(p_k)-\theta(p_{k+1})+O(k+1)=\theta(p_k)-\left(\sum_{i=1}^{k}\log p_i+\log p_{k+1}\right)+O(k+1)\\ &= \theta(p_k)-(\theta(p_k)+\log p_{k+1})+O(k+1)=-\log p_{k+1}+O(k+1)\end{aligned}$$

d'où,

$|\theta(p_k) - p_{k+1} + \log p_{k+1}| \leqslant \acute{C}(k+1)$ *pour* $k \geqslant k_1 \geqslant 2$ *où* C *et* k_1 *sont des constantes positives.*

Donc pour $k \geqslant k_1$ *on a,*

$$|\theta(p_k) - p_{k+1}| - |\log p_{k+1}| \leqslant C \ (k+1) \quad \textit{pour } k \geqslant k_1$$

*grâce à l'inégalité **(2.2.24)** on obtient pour* $k \geqslant k_1$,

$$\begin{aligned}|\theta(p_k) - p_{k+1}| &\leqslant \acute{C}(k+1) + |\log p_{k+1}| \leqslant \acute{C}(k+1) + 2\log(k+1) \\ &\leqslant 2\left(2 + \acute{C}\right)k\end{aligned}$$

ce qui implique pour $k \geqslant k_1$,

$$-2\left(2 + \acute{C}\right)k \leqslant \theta(p_k) - p_{k+1} \tag{2.2.41}$$

enfin de (2.2.38) , (2.2.40) et(2.2.41) , on obtient pour $x \geqslant x_0 = \max\{p_{k_0}, p_{k_1}\}$,

$$-2\left(2 + \acute{C}\right)\pi(x) = -2\left(2 + \acute{C}\right)k \leqslant \theta(x) - x \leqslant Ck = C\pi(x)$$

*en utilisant **(2.2.26)** puis en posant* $M = \max\left\{1.74C,\ 3.48\left(2 + \acute{C}\right)\right\}$ *il vient ,*
pour $x \geqslant \max\{x_0,\ 600\}$,

$$-3.48\left(2 + \acute{C}\right)\frac{x}{\log x} \leqslant \theta(x) - x \leqslant 1.74C\frac{x}{\log x}$$

d'où,

$$-M\frac{x}{\log x} \leqslant \theta(x) - x \leqslant M\frac{x}{\log x} \qquad \textit{pour } x \geqslant \max\{x_0,\ 600\},$$

ce qui est équivalent à,

$$|\theta(x) - x| \leqslant M\frac{x}{\log x} \qquad \textit{pour } x \geqslant \max\{x_0,\ 600\},$$

donc,

$$\theta(x) = x + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

ce qui achève la preuve du théorème 2.2.3.

Théorème 2.2.4 *Les trois premières assertions suivantes sont équivalentes et entraînent la quatrième*

(i) $\pi(x) = Li(x) + O(\sqrt{x}\log x)$ *lorsque* $x \to +\infty$

(ii) $\theta(x) = x + O\left(\sqrt{x}\log^2 x\right)$ *lorsque* $x \to +\infty$

(iii) $p_k = Li^{-1}(k) + O\left(\sqrt{k}(\log k)^{\frac{5}{2}}\right)$ *lorsque* $k \to +\infty$

(iv) $\theta(p_k) = Li^{-1}(k) + O\left(\sqrt{k}(\log k)^{\frac{3}{2}}\right)$ *lorsque* $k \to +\infty$

Preuve :

Pour la démonstration nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.2.4 *Il existe une constante $c_4 > 0$ tel que,*

$$(i) \quad Li(x) \leqslant c_4 \frac{x}{\log x}, \quad \textit{pour } x \geqslant \exp(10) \qquad (c_4 = 1.1315) \tag{2.2.42}$$

$$(ii) \quad Li(x) \geqslant \frac{x}{\log x}, \quad \textit{pour } x \geqslant \exp\left(\frac{2}{Li(2)}\right) \tag{2.2.43}$$

Démonstration du lemme 2.2.4.

***Preuve de** (2.2.42)*

on a,

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + Li(2) \quad \textit{où} \quad Li(2) = 1.045...,$$

en prenant $x_0 = \exp(10)$ dans (2.2.20) on obtient pour $x \geqslant \exp(10)$,

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + Li(2) \leqslant \int_2^{\exp(10)} \frac{dt}{\log t} - \frac{\exp(10)}{9} + 1.045 + \frac{10}{9}\frac{x}{\log x} \ .$$

Les calculs effectués à l'ordinateur nous donnent,

$$\int_2^{\exp(10)} \frac{dt}{\log t} - \frac{\exp(10)}{9} = 43.799...$$

d'où l'on a,

$$\begin{aligned} Li(x) &\leqslant 44.89 + 1.11112\frac{x}{\log x} \\ &\leqslant (1.1315 - 1.11112)\frac{\exp(10)}{\log(\exp(10))} + 1.11112\frac{x}{\log x} \end{aligned}$$

comme la fonction $x \to \dfrac{x}{\log x}$ est croissante pour $x \geqslant \exp(1)$, on a alors pour $x \geqslant \exp(10)$,

$$Li(x) \leqslant (1.1315 - 1.11112)\frac{x}{\log x} + 1.11112\frac{x}{\log x} = 1.1315\frac{x}{\log x} = c_4\frac{x}{\log x} \qquad \square$$

***Preuve de** (2.2.43)*

pour $x \geqslant 2$ *on a,*

$$\frac{x-2}{\log x} = \frac{1}{\log x}\int_2^x dt \leqslant \int_2^x \frac{dt}{\log t},$$

ce qui entraîne,

$$\frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log x} + Li(2) \leqslant \int_2^x \frac{dt}{\log t} + Li(2) = Li(x) \;\; pour \;\; x \geqslant 2, \tag{2.2.44}$$

comme,

$$-\frac{2}{\log x} + Li(2) \geqslant 0 \quad pour\ x \geqslant \exp\left(\frac{2}{Li(2)}\right),$$

on déduit alors de (2.2.44) que,

$$Li(x) \geqslant \frac{x}{\log x} \quad pour\ x \geqslant \exp\left(\frac{2}{Li(2)}\right) \; . \qquad \square$$

Lemme 2.2.5 *Pour* $k \geqslant 28622$, *il existe une constante* c_5 *tel que l'on ait,*

$$\log p_k - \log(c_4 c_3) \leqslant \log Li^{-1}(k) \leqslant \log p_k + \log(c_5)$$

où c_3, c_4 *sont les constantes définies au lemme 2.2.2 et* $c_5 = \dfrac{5}{4}$.

Démonstration du lemme 2.2.5

La fonction $x \to Li(x)$ *est bijective pour* $x \geqslant 2$, *puisque elle est croissante et continue sur l'intervalle* $[2, +\infty[$, *elle admet donc une fonction réciproque* $Li^{-1}(x)$ *qui elle aussi croissante.*

En posant $x = Li^{-1}(k)$, *les relations (2.2.42) et (2.2.43) impliquent,*

$$\frac{Li^{-1}(k)}{\log Li^{-1}(k)} \leqslant Li\left(Li^{-1}(k)\right) \leqslant c_4 \frac{Li^{-1}(k)}{\log Li^{-1}(k)} \qquad pour\ tout\ k\ tel\ que\ Li^{-1}(k) \geqslant \exp(10), \tag{2.2.45}$$

comme on a,

$$Li\left(Li^{-1}(k)\right) = k \quad et\ Li^{-1}(k) \geqslant 2,$$

alors on obtient en multipliant la double inégalité (2.2.45) par $Li^{-1}(k)$,

$$Li^{-1}k \leqslant \quad k \log Li^{-1}(k) \leqslant c_4 Li^{-1} k \tag{2.2.46}$$

d'où l'on a pour $k \geqslant Li(\exp(10)) = 2493,$

$$Li^{-1}k \leqslant \quad k \log Li^{-1}(k) \tag{2.2.47}$$

d'autre part la deuxième inégalité de (2.2.46) implique pour $k \geqslant Li(\exp(10)) = 2493,$

$$\frac{1}{c_4} k \log Li^{-1}(k) \leqslant Li^{-1}k, \tag{2.2.48}$$

comme pour tout $x \geqslant 332103$ *on a,*

$$\frac{x}{\log^5 x} \geqslant \frac{332103}{\log^5(332103)} > 1, \text{ puisque la fonction } x \to \frac{x}{\log^5 x} \text{ est croissante pour } x \geqslant \exp(5).$$

alors,

$$\frac{x^{\frac{1}{5}}}{\log x} > 1 \quad \text{pour } x \geqslant 332103 > \exp(5),$$

grâce à (2.2.46) on obtient,

$$\frac{4}{5} \log x < \log Li(x) \quad \text{pour } x \geqslant 332103$$

et en posant $x = Li^{-1}(k)$ *il vient,*

$$\frac{4}{5} \log Li^{-1}(k) \leqslant \log k \quad \text{pour tout } k \text{ tel que } Li^{-1}(k) \geqslant 332103$$

d'où l'on déduit que pour $k \geqslant Li(332103) = 28622,$ *l'inégalité,*

$$\log Li^{-1}(k) \leqslant c_5 \log k \quad \text{avec } c_5 = \frac{5}{4} \tag{2.2.49}$$

de plus, d'après (2.2.42) on a,

$$Li(x) \leqslant 1.1315 \frac{x}{\log x} \leqslant \frac{c_4}{10} x = 0.11315x \quad \text{pour } x \geqslant \exp(10), \tag{2.2.50}$$

en prenant $x = Li^{-1}(k)$ *dans (2.2.50) on obtient pour* $k \geqslant 2493,$

$$k \leqslant \frac{c_4}{10} x = \frac{c_4}{10} Li^{-1}(k) < Li^{-1}(k), \quad \left(\text{car } \frac{c_4}{10} < 1\right). \tag{2.2.51}$$

La majoration (2.2.48) et l'inégalité (2.2.51) impliquent,

$$\frac{1}{c_4} k \log k \leqslant Li^{-1}k \quad \text{pour } k \geqslant 2493, \tag{2.2.52}$$

puis la majoration (2.2.42) et l'inégalité (2.2.51) entraînent,

$$Li^{-1}k \leqslant c_5 k \log k \ , \quad \textit{pour } k \geqslant 28622 \tag{2.2.53}$$

De (2.2.52) et (2.2.53) on déduit que pour $k \geqslant 28622$ on a,

$$\frac{1}{c_4} k \log k \leqslant Li^{-1}k \leqslant c_5 k \log k$$

ou encore,

$$\frac{1}{c_4 c_3} c_3 k \log k \leqslant Li^{-1}k \leqslant c_5 k \log k \qquad \textit{pour } k \geqslant 28622,$$

En utilisant l'inégalité $k \log k < p_k$, valable pour $k \geqslant 1$, (cf [32])
ainsi que l'inégalité (2.2.25) du lemme 2.2.2, nous obtenons pour $k \geqslant 28622$,

$$\frac{1}{c_4 c_3} p_k \leqslant Li^{-1}k \leqslant c_5 p_k \tag{2.2.54}$$

en prenant le logarithme néperien de (2.2.54) , on obtient pour $k \geqslant 28622$,

$$\log p_k - \log(c_4 c_3) \leqslant \log Li^{-1}k \leqslant \log p_k + \log(c_5) \qquad \square$$

Démonstration du théorème 2.3.3.

Le théorème 2.2.4 est équivalent à,

(1) *Il existe deux conctantes positives C_1 et x_0 tel que l'on ait,*

$$|\pi(x) - Li(x)| \leqslant C_1 \sqrt{x} \log x \quad \textit{pour } x \geqslant x_0,$$

(2) *Il existe deux conctantes positives C_2 et x_1 tel que ,*

$$|\theta(x) - x| \leqslant C_2 \sqrt{x} \log^2 x \quad \textit{pour } x \geqslant x_1 \ ,$$

(3) *Il existe deux conctantes positives C_3 et k_0 tel que ,*

$$\left|p_k - Ii^{-1}(k)\right| \leqslant C_3 \sqrt{k} \log^{\frac{5}{2}} k \quad \textit{pour } k \geqslant k_0,$$

(4) *et il existe deux conctantes positives C_4 et k_1 tel quel'on ait,*

$$\left|\theta(p_k) - Ii^{-1}(k)\right| \leqslant C_4 \sqrt{k} \log^{\frac{3}{2}} k \quad \textit{pour } k \geqslant k_1$$

Démonstration de (i) ***implique*** (ii) :

Le théorème (1.4.4) *implique,*

$$\theta(x) - x = \pi(x)\log x - \int_2^x \frac{\pi(t) - Li(t)}{t}dt - \int_2^x \frac{Li(t)}{t}dt - x \qquad pour\ x \geqslant 2$$

en intégrant $\int_2^x \frac{Li(t)}{t}dt$ *par parties on obtient,*

$$\begin{aligned}\theta(x) - x = {} & \pi(x)\log x - \int_2^x \frac{\pi(t) - Li(t)}{t}dt - \left([Li(t)\log t]_2^x - \int_2^x \log t \frac{1}{\log t}dt\right) - x \\ = {} & (\pi(x) - Li(x))\log x - \int_2^x \frac{\pi(t) - Li(t)}{t}dt + Li(2)\log 2 - 2 \qquad (2.2.55)\end{aligned}$$

en prenant la valeur absolue dans la relation (2.2.55) , puis en utilisant l'hypothèse (i), *on obtient pour* $x \geqslant x_0 \geqslant 2$,

$$|\theta(x) - x| \leqslant C_1\sqrt{x}\log^2 x + \left|-\int_2^x \frac{\pi(t) - Li(t)}{t}dt + Li(2)\log 2 - 2\right| \qquad (2.2.56)$$

d'autre part on a,

$$\begin{aligned}& \left|-\int_2^x \frac{\pi(t) - Li(t)}{t}dt + Li(2)\log 2 - 2\right| \\ & = \left|-\int_{x_0}^x \frac{\pi(t) - Li(t)}{t}dt - \int_2^{x_0} \frac{\pi(t) - Li(t)}{t}dt + Li(2)\log 2 - 2\right| \\ & \leqslant \int_{x_0}^x \frac{|\pi(t) - Li(t)|}{t}dt + \left|-\int_2^{x_0} \frac{\pi(t) - Li(t)}{t}dt + Li(2)\log 2 - 2\right| \qquad (2.2.57)\end{aligned}$$

La relation (2.2.55) implique pour $x = x_0$,

$$\left|-\int_2^{x_0} \frac{\pi(t) - Li(t)}{t}dt + Li(2)\log 2 - 2\right| = |\theta(x_0) - x_0 - (\pi(x_0) - Li(x_0))\log x_0| = K_1 \qquad (2.2.58)$$

où K_1 *est une constante réelle positive.*

grâce à l'hypothèse (i) *on obtient,*

$$\int_{x_0}^x \frac{|\pi(t) - Li(t)|}{t}dt = 2C_1\sqrt{x}(\log x) - 2C_1\sqrt{x_0}(\log x) \qquad (2.2.59)$$

Avec (2.2.57) et (2.2.58) l'inégalité (2.2.59) devient,

$$\left|-\int_2^x \frac{\pi(t)-Li(t)}{t}dt+Li(2)\log 2-2\right| \leqslant 2C_1\sqrt{x}(\log x)-2C_1\sqrt{x_0}(\log x)+\mid K_1\mid \quad \textit{pour } x\geqslant x_0$$

comme on a,

$$\mid K_1\mid -2C_1\sqrt{x_0}(\log x)\leqslant 0 \quad \textit{pour } x\geqslant \exp\left(\frac{\mid K_1\mid}{2C_1\sqrt{x_0}}\right),$$

alors tout pour $x\geqslant \max\{\exp\left(\frac{|K_1|}{2C_1\sqrt{x_0}}\right),\, x_0\}$ *on a,*

$$\left|-\int_2^x \frac{\pi(t)-Li(t)}{t}dt+Li(2)\log 2-2\right| \leqslant 2C_1\sqrt{x}\log x \tag{2.2.60}$$

les inégalités (2.2.56) et (2.2.60) impliquent alors,

$$\begin{aligned}|\theta(x)-x| &\leqslant C_1\sqrt{x}\log^2 x+2C_1\sqrt{x}\log x\\ &\leqslant 4C_1\sqrt{x}\log^2 x\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que,

$$\theta(x)=x+O\left(\sqrt{x}\log^2 x\right)$$

Démonstration de (ii) *implique* (i) :

La relation (1.4.5) *implique,*

$$\begin{aligned}\pi(x)-Li(x) &= \frac{\theta(x)}{\log x}+\int_2^x \frac{\theta(t)}{t\log^2 t}dt-\left(\int_2^x \frac{dt}{\log t}+Li(2)\right) \quad \textit{pour } x\geqslant 2\\ &= \frac{\theta(x)-x}{\log x}+\int_2^x \frac{\theta(t)-t}{t\log^2 t}dt+\frac{2}{\log 2}-Li(2). \end{aligned} \tag{2.2.61}$$

pour $x>x_1$, *(2.2.61) s'écrit :*

$$\pi(x)-Li(x)=\frac{\theta(x)-x}{\log x}+\int_2^{x_1}\frac{\theta(t)-t}{t\log^2 t}dt+\int_{x_1}^x \frac{\theta(t)-t}{t\log^2 t}dt+\frac{2}{\log 2}-Li(2)$$

en prenant la valeur absolue des deux membres de cette dernière relation puis en utilisant l'hypothèse (ii) *on obtient pour* $x\geqslant x_1\geqslant 2$,

$$|\pi(x)-Li(x)|\leqslant \frac{\mid\theta(x)-x\mid}{\log x}+\int_{x_1}^x \frac{\mid\theta(t)-t\mid}{t\log^2 t}dt+\left|\int_2^{x_1}\frac{\theta(t)-t}{t\log^2 t}dt+\frac{2}{\log 2}-Li(2)\right|$$

$$\leqslant C_2\sqrt{x}\log x + 2C_2\int_{x_1}^{x}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt + \left|\int_2^{x_1}\frac{\theta(t)-t}{t\log^2 t}dt + \frac{2}{\log 2} - Li(2)\right| \quad (2.2.62)$$

et pour $x = x_1$, (2.2.61) implique ,

$$\left|\int_2^{x_1}\frac{\theta(t)-t}{t\log^2 t}dt + \frac{2}{\log 2} - Li(2)\right| = \left|\pi(x_1) - Li(x_1) - \frac{\theta(x_1)-x_1}{\log x_1}\right| = K_2 \quad (2.2.63)$$

où K_2 est une constante réelle positive,

De (2.2.62) et (2.2.63) on déduit que pour $x \geqslant x_1$ on a,

$$\begin{aligned}
|\pi(x) - Li(x)| &\leqslant C_2\sqrt{x}\log x + 2C_2\left(\sqrt{x} - \sqrt{x_1}\right) + K_2 \\
&\leqslant \left(C_2 + \frac{2C_1}{\log x} + \frac{K_2}{\sqrt{x}\log x}\right)\sqrt{x}\log x \\
&\leqslant M\sqrt{x}\log x \quad \text{où} \quad M = 4C_2 + \frac{K_2}{\sqrt{2}\log 2}
\end{aligned}$$

d'où l'estimation,

$$\pi(x) - Li(x) = O(\sqrt{x}\log x)$$

***Démonstration de** (i) implique (iii) :*

Pour $k \geqslant 1$, on a,

$$\pi(p_k) - Li(p_k) = k - Li(p_k) = Li\left(Li^{-1}(k)\right) - Li(p_k) = \int_2^{Li^{-1}(k)}\frac{dt}{\log t} - \int_2^{p_k}\frac{dt}{\log t}$$

Nous distinguons deux cas :

Si $Li^{-1}(k) > p_k$ alors $\pi(p_k) - Li(p_k) > 0$.

on a,

$$\pi(p_k) - Li(p_k) = \int_2^{p_k}\frac{dt}{\log t} + \int_{p_k}^{Li^{-1}(k)}\frac{dt}{\log t} - \int_2^{p_k}\frac{dt}{\log t} = \int_{p_k}^{Li^{-1}(k)}\frac{dt}{\log t} \quad (2.2.64)$$

de plus,

$$\frac{Li^{-1}(k) - p_k}{\log Li^{-1}(k)} = \frac{1}{\log Li^{-1}(k)}\int_{p_k}^{Li^{-1}(k)}dt \leqslant \int_{p_k}^{Li^{-1}(k)}\frac{dt}{\log t} \leqslant \frac{1}{\log p_k}\int_{p_k}^{Li^{-1}(k)}dt = \frac{Li^{-1}(k) - p_k}{\log p_k},$$

grâce à l'égualité (2.2.64) on obtient,

$$\frac{Li^{-1}(k) - p_k}{\log Li^{-1}(k)} \leqslant \pi(p_k) - Li(p_k) \leqslant \frac{Li^{-1}(k) - p_k}{\log p_k}$$

de cette dernière relation on déduit que,

$$(\pi(p_k) - Li(p_k))\log p_k \leqslant Li^{-1}(k) - p_k \leqslant (\pi(p_k) - Li(p_k))\log Li^{-1}(k) \ . \quad (2.2.65)$$

Les relations (2.2.49) et (2.2.65) entraînent alors,

$$(\pi(p_k) - Li(p_k)) \log p_k \leqslant Li^{-1}(k) - p_k \leqslant c_5 (\pi(p_k) - Li(p_k)) \log p_k \quad \textit{pour } k \geqslant 28622,$$

comme $\pi(p_k) - Li(p_k) = |\pi(p_k) - Li(p_k)|$ *(puisque* $\pi(p_k) - Li(p_k) > 0$*) alors,*

$$0 < |\pi(p_k) - Li(p_k)| \log p_k \leqslant Li^{-1}(k) - p_k \leqslant c_5 |\pi(p_k) - Li(p_k)| \log p_k,$$

d'où l'on déduit que,

$$-c_5 |\pi(p_k) - Li(p_k)| \log p_k \leqslant Li^{-1}(k) - p_k \leqslant c_5 |\pi(p_k) - Li(p_k)| \log p_k,$$

et ceci est équivalent à,

$$\left|Li^{-1}(k) - p_k\right| \leqslant c_5 |\pi(p_k) - Li(p_k)| \log p_k, \tag{2.2.66}$$

Si $Li^{-1}(k) \leqslant p_k$ *alors* $\pi(p_k) - Li(p_k) \leqslant 0$.
Ecrivons que,

$$\begin{aligned} \pi(p_k) - Li(p_k) &= k - Li(p_k) = Li\left(Li^{-1}(k)\right) - Li(p_k), \\ &= \int_2^{Li^{-1}(k)} \frac{dt}{\log t} - \left(\int_2^{Li^{-1}(k)} \frac{dt}{\log t} + \int_{Li^{-1}(k)}^{p_k} \frac{dt}{\log t}\right) = -\int_{Li^{-1}(k)}^{p_k} \frac{dt}{\log t}, \end{aligned} \tag{2.2.67}$$

en utilisant la même méthode précédente on obtient,

$$\frac{p_k - Li^{-1}(k)}{\log p_k} \leqslant \int_{Li^{-1}(k)}^{p_k} \frac{dt}{\log t} \leqslant \frac{p_k - Li^{-1}(k)}{\log Li^{-1}(k)},$$

d'où l'on déduit l'encadrement,

$$\frac{Li^{-1}(k) - p_k}{\log p_k} \geqslant -\int_{Li^{-1}(k)}^{p_k} \frac{dt}{\log t} \geqslant \frac{Li^{-1}(k) - p_k}{\log Li^{-1}(k)},$$

par (2.2.67) il vient,

$$\frac{p_k - Li^{-1}(k)}{\log p_k} \leqslant -(\pi(p_k) - Li(p_k)) \leqslant \frac{p_k - Li^{-1}(k)}{\log Li^{-1}(k)},$$

de cette dernière relation on déduit alors que,

$$-(\pi(p_k) - Li(p_k)) \log Li^{-1}(k) \leqslant p_k - Li^{-1}(k) \leqslant -(\pi(p_k) - Li(p_k)) \log p_k,$$

comme,

$$-\left(\pi\left(p_k\right)-Li\left(p_k\right)\right)=\left|\pi\left(p_k\right)-Li\left(p_k\right)\right| \quad \left(car \quad \pi\left(p_k\right)-Li\left(p_k\right)\leqslant 0\right),$$

alors,

$$\left|\pi\left(p_k\right)-Li\left(p_k\right)\right|\log Li^{-1}(k)\leqslant p_k-Li^{-1}(k)\leqslant\left|\pi\left(p_k\right)-Li\left(p_k\right)\right|\log p_k,$$

d'où l'inégalité,

$$\left|p_k-Li^{-1}(k)\right|\leqslant\left|\pi\left(p_k\right)-Li\left(p_k\right)\right|\log p_k, \tag{2.2.68}$$

les inégalités (2.2.66) et (2.2.68) impliquent que pour tout $k\geqslant 28622$ on a,

$$\begin{aligned}\left|p_k-Li^{-1}(k)\right| &\leqslant \max\{c_5,\ 1\}\left|\pi\left(p_k\right)-Li\left(p_k\right)\right|\log p_k\\ &= c_5\left|\pi\left(p_k\right)-Li\left(p_k\right)\right|\log p_k \quad \left(c_5=\frac{5}{4}\right).\end{aligned} \tag{2.2.69}$$

Grâce à l'hypothèse (i) et aux inégalités (2.2.24) et (2.2.25) , l'inégalité (2.2.69) entraînent pour $k\geqslant\max\{k_0,\ 28622\}$ tel que $p_{k_0}\geqslant x_0$,

$$\begin{aligned}\left|Li^{-1}(k)-p_k\right| &\leqslant C_1c_5\sqrt{p_k}\log^2 p_k,\\ &\leqslant \beta\sqrt{c_3}k^{\frac{1}{2}}(\log k)^{\frac{5}{2}} \quad \text{où } \beta=c_2^2C_1c_5,\end{aligned}$$

d'où l'estimation,

$$p_k=Li^{-1}(k)+O\left(\sqrt{k}\,(\log k)^{\frac{5}{2}}\right).$$

Démonstrations *(iii) implique (i) : Se démontre de la manière.*
Soit x un nombre réel tel que $p_k\leqslant x<p_{k+1}$ où p_k désigne le $k-$iéme nombre premier.
Nous partons de la relation ,

$$\pi(x)-Li(x)=k-Li(x)=Li\left(Li^{-1}(k)\right)-Li(x)=\int_2^{Li^{-1}(k)}\frac{dt}{\log t}-\int_2^x\frac{dt}{\log t},$$

et nous distinguons deux cas : $x\leqslant Li^{-1}(k)$ et $x>Li^{-1}(k)$.
Si $x\leqslant Li^{-1}(k)$ alors,

$$|\pi(x)-Li(x)|=\left|\int_x^{Li^{-1}(k)}\frac{dt}{\log t}\right|\leqslant\left|\frac{1}{\log p_k}\int_{p_k}^{Li^{-1}(k)}dt\right|=\frac{\left|Li^{-1}(k)-p_k\right|}{\log p_k}\ , \tag{2.2.70}$$

l'inégalité (2.2.70) et l'hypothèse (iii) impliquent alors pour $k \geqslant k_0$,

$$|\pi(x) - Li(x)| \leqslant C_3 \frac{k^{\frac{1}{2}} (\log k)^{\frac{5}{2}}}{\log p_k} \leqslant C_3 \frac{k^{\frac{1}{2}} (\log k)^{\frac{5}{2}}}{\log k}$$

$$= C_3 k^{\frac{1}{2}} (\log k)^{\frac{5}{2}}, \tag{2.2.71}$$

Si $x > Li^{-1}(k)$ *alors,*

$$\pi(x) - Li(x) = k - Li(x) = Li\left(Li^{-1}(k)\right) - Li(x) = -\int_{Li^{-1}(k)}^{x} \frac{dt}{\log t}, \tag{2.2.72}$$

et comme dans ce qui précède on a,

$$|\pi(x) - Li(x)| = \left| -\int_{Li^{-1}(k)}^{x} \frac{dt}{\log t} \right| = \left| \int_{Li^{-1}(k)}^{x} \frac{dt}{\log t} \right|,$$

$$\leqslant \left| \int_{Li^{-1}(k)}^{p_{k+1}} \frac{dt}{\log t} \right| \quad \left(car \;\; Li^{-1}(k) \leqslant x < p_{k+1} \right),$$

$$\leqslant \frac{|Li^{-1}(k+1) - p_{k+1}|}{\log Li^{-1}(k)} + \frac{|Li^{-1}(k) - Li^{-1}(k+1)|}{\log Li^{-1}(k)}, \tag{2.2.73}$$

puis (2.2.51) et (2.2.73) impliquent,

$$|\pi(x) - Li(x)| \leqslant \frac{|Li^{-1}(k+1) - p_{k+1}|}{\log k} + \frac{|Li^{-1}(k) - Li^{-1}(k+1)|}{\log k}, \tag{2.2.74}$$

grâce à l'hypothèse (iii), le premier terme du second membre de l'inégalité (2.2.74) est majoré pour $k \geqslant k_0 \geqslant 2493$ *par,*

$$\frac{|Li^{-1}(k+1) - p_{k+1}|}{\log k} \leqslant 8 C_3 k^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{3}{2}} k \;, \tag{2.2.75}$$

ceci d'une part .

D'autre part on a,

$$1 = k+1-k = Li\left(Li^{-1}(k+1)\right) - Li\left(Li^{-1}(k)\right) = \int_{Li^{-1}(k)}^{Li^{-1}(k+1)} \frac{dt}{\log t} \geqslant \frac{1}{\log Li^{-1}(k+1)} \int_{Li^{-1}(k)}^{Li^{-1}(k+1)} dt$$

$$= \frac{|Li^{-1}(k+1) - Li^{-1}(k)|}{\log Li^{-1}(k+1)} \;, \; \left(car\ Li^{-1}(k) \;\; est\ croissante \right)$$

ce qui entaîne,

$$\left| Li^{-1}(k+1) - Li^{-1}(k) \right| \leqslant \log Li^{-1}(k+1) \;\;,$$

avec la relation (2.2.49) on obtient,

$$\left|Li^{-1}(k+1) - Li^{-1}(k)\right| \leqslant c_5 \log(k+1) \quad \textit{pour } k \geqslant 28622 \ ,$$

d'où en divisant les deux membres de cette dernière inégalité par $\log k$ *on obtient pour* $k \geqslant 28622$*,*

$$\frac{\left|Li^{-1}(k+1) - Li^{-1}(k)\right|}{\log k} \leqslant c_5 \frac{\log(k+1)}{\log k} \leqslant c_5 \frac{2\log k}{\log k} = 2c_5, \tag{2.2.76}$$

*les inégalités (2.2.74) , (2.2.75) et (**??**) impliquent alors,*

$$|\pi(x) - Li(x)| \leqslant 8C_3 k^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{3}{2}} k + 2c_5 \quad \textit{pour} k \geqslant k_1 = \max\{k_0, 28622\},$$

en comparant (2.2.71) avec l'inégalité (2.2.76) on déduit que pour tout $k \geqslant k_1$*,*

$$\begin{aligned}|\pi(x) - Li(x)| &\leqslant \max\{8C_3 k^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{3}{2}} k + 2c_5 \ , C_3 k^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{3}{2}} k\} \\ &= 8C_3 k^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{3}{2}} k + 2c_5, \\ &\leqslant 8C_3\sqrt{2}\sqrt{c_1 k \log k}\log p_k + 3\sqrt{p_k}\log 2 \quad \left(\textit{puisque } 2c_5 = \frac{5}{2} < 3\sqrt{2}\log 2\right)\end{aligned} \tag{2.2.77}$$

grâce aux inégalités (2.2.23) et (2.2.77) on obtient pour $k \geqslant k_1$*,*

$$\begin{aligned}|\pi(x) - Li(x)| &\leqslant 8\sqrt{2}C_3\sqrt{p_k}\log p_k + 3\sqrt{p_k}\log 2 \\ &\leqslant \left(8\sqrt{2}C_3 + 3\right)\sqrt{p_k}\log p_k,\end{aligned}$$

comme $p_k \leqslant x < p_{k+1}$ *alors,*

$$|\pi(x) - Li(x)| \leqslant \left(8\sqrt{2}C_3 + 3\right)\sqrt{x}\log x \qquad \textit{pour } x \geqslant p_k \geqslant p_{k_1},$$

d'où l'estimation,

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(\sqrt{x}\log x\right) \ .$$

Démonstrations (i) *implique* (iv) :

L'inégalité (2.2.65) implique,

$$\theta(p_k) - Li^{-1}(k) \leqslant -(\pi(p_k) - Li(p_k))\log p_k + \theta(p_k) - p_k \tag{2.2.78}$$

et

$$\theta(p_k) - Li^{-1}(k) \geqslant -(\pi(p_k) - Li(p_k))\log Li^{-1}(k) + \theta(p_k) - p_k \ . \tag{2.2.79}$$

En utilisant la relation (2.2.55) avec $x = p_k$, *l'inégalité (2.2.78) , s'ecrit,*

$$\begin{aligned}\theta(p_k) - Li^{-1}(k) &\leqslant -(\pi(p_k) - Li(p_k))\log p_k + (\pi(p_k) - Li(p_k))\log p_k \\ &\qquad - \int_2^{p_k} \frac{\pi(t) - Li(t)}{t} dt - 2 + Li(2)\log 2 \\ &= - \int_2^{p_k} \frac{\pi(t) - Li(t)}{t} dt - 2 + Li(2)\log 2\end{aligned}$$

ce qui est équivalent à,

$$\theta(p_k) - Li^{-1}(k) + \int_2^{p_k} \frac{\pi(t) - Li(t)}{t} dt + 2 - Li(2)\log 2 \leqslant 0 \tag{2.2.80}$$

Nous distinguons comme précédemment deux cas :

$$(\pi(p_k) - Li(p_k)) \leqslant 0 \quad et \quad (\pi(p_k) - Li(p_k)) > 0$$

Si $(\pi(p_k) - Li(p_k)) \leqslant 0$, *alors le lemme 2.2.5 implique pour* $k \geqslant 28622$,

$$-(\pi(p_k) - Li(p_k))\log Li^{-1}(k) \geqslant -(\pi(p_k) - Li(p_k))\log p_k + (\pi(p_k) - Li(p_k))\log c_4c_3,$$

et grâce à l'inégalité (2.2.79) on obtient,

$$\theta(p_k) - Li^{-1}(k) + \int_2^{p_k} \frac{\pi(t) - Li(t)}{t} dt + 2 - Li(2)\log 2 \geqslant (\pi(p_k) - Li(p_k))\log(c_4c_3),$$

et l'inégalité (2.2.80) implique alors pour $k \geqslant 28622$,

$$\begin{aligned}&\left|\theta(p_k) - Li^{-1}(k) + \int_2^{p_k} \frac{\pi(t) - Li(t)}{t} dt + 2 - Li(2)\ln\log 2\right| \\ &\qquad \leqslant |(\pi(p_k) - Li(p_k))|\log(c_4c_3) \quad (puisque\ \ c_4c_3 > 1)\end{aligned} \tag{2.2.81}$$

Si $(\pi(p_k) - Li(p_k)) > 0$, *alors la deuxième inégalité du lemme 2.2.5 implique pour* $k \geqslant 28622$,

$$-(\pi(p_k) - Li(p_k))\log Li^{-1}(k) \geqslant -(\pi(p_k) - Li(p_k))\log p_k - (\pi(p_k) - Li(p_k))\log c_5,$$

et en utilisant la même méthode précédente on obtient,

$$\theta(p_k) - Li^{-1}(k) + \int_2^{p_k} \frac{\pi(t) - Li(t)}{t} dt + 2 - Li(2)\log 2 \geqslant -(\pi(p_k) - Li(p_k))\log c_5,$$

d'où l'on déduit avec (2.2.80) que pour $k \geqslant 28622$ *on a,*

$$\left|\theta(p_k) - Li^{-1}(k) + \int_2^{p_k} \frac{\pi(t) - Li(t)}{t} dt + 2 - Li(2)\log 2\right| \leqslant |(\pi(p_k) - Li(p_k))| \log c_5, \tag{2.2.82}$$

Les deux inégalités (2.2.81) et (2.2.82) impliquent alors,

$$\left|\theta(p_k) - Li^{-1}(k) + \int_2^{p_k} \frac{\pi(t) - Li(t)}{t} dt + 2 - Li(2)\log 2\right| \leqslant |(\pi(p_k) - Li(p_k))| \log \delta,$$

$$\textit{où} \quad \delta = \max\{c_5, c_4 c_3\}$$

d'où l'on a,

$$\left|\theta(p_k) - Li^{-1}(k)\right| \leqslant |(\pi(p_k) - Li(p_k))| \log \delta + \left|\int_2^{p_k} \frac{\pi(t) - Li(t)}{t} dt + 2 - Li(2)\log 2\right|. \tag{2.2.83}$$

Les inégalités (2.2.83) , (2.2.60) pour $x = p_k$ *ainsi que l'hypothèse* (i) *impliquent,*

$$\left|\theta(p_k) - Li^{-1}(k)\right| \leqslant C_1\sqrt{p_k}\log p_k \log \delta + 2C_1\sqrt{p_k}\log p_k, \quad \textit{pour } p_k \geqslant \max\left\{\exp\left(\frac{|K_1|}{2C_1\sqrt{x_0}}\right),\ x_0,\ p_{28622}\right\},$$

où K_1 *est la constante définie par (2.2.58)*
En utilisant les inégalités (2.2.23) et (2.2.25) on obtient pour $p_k \geqslant \max\left\{\exp\left(\frac{|K_1|}{2C_1\sqrt{x_0}}\right), x_0,\ p_{28622}\right\}$

$$\left|\theta(p_k) - Li^{-1}(k)\right| \leqslant C_1(\log\delta + 2)\sqrt{c_3 k \log k}\, c_2 \log k \ \leqslant C_1(\log\delta + 2)\sqrt{c_3}\, c_2 k^{\frac{1}{2}} (\log k\ )^{\frac{3}{2}},$$

d'où l'estimation,

$$\theta(p_k) = Ii^{-1}(k) + O\left(k^{\frac{1}{2}} (\log k\ )^{\frac{3}{2}}\right).$$

Ce qui achève la preuve du théorème 2.2.4

Chapitre 3

Estimations de la fonction θ de Tchebychef sur le k-ième nombre premier.

3.1 Introduction

Soient la fonction θ de Tchebychef définie pour $x > 0$, par $\theta(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} \log p$, k un entier positif et p_k le $k^{iéme}$ nombre premier.

Dans le chapitre 2 précédent, nous avons étudié le comportement asymptotique de $\theta(p_k)$ sous diverses hypothèses sur $\pi(x)$.

Dans ce qui suit nous nous intéressons aux encadrements explicites de $\theta(p_k)$ lorsque p_k est la suite usuelle des nombres premiers.

J. B. Rosser et L. Schoenfeld ont dans [33] , conjecturé que $\theta(p_k) > k \log k \;\; pour \;\; k \geqslant 13$.

G. Robin (cf [27]) a, en utilisant l'inégalité classique $\theta(x) < x \log 4$ pour $x > 0$, donné une preuve simple de ce résultat.

Plusieurs autres inégalités concernant $\theta(p_k)$ ont été également démontrées par ce dernier, en utilisant les résultats dûs à Rosser et Schoenfeld notamment.

Nous reprenons ces résultats et nous détaillons leurs démonstrations.

Dans [32] , [33] et [34] J. B. Rosser et L. Schoenfeld ont prouvé que,

Proposition 3.1.1 *On a,*

$$(i) \qquad \theta(x) < x\ , \qquad\qquad pour\ x < 10^{11} \tag{3.1.1}$$

$$(ii) \qquad \theta(x) < x + 0.000081\frac{x}{\log x}, \quad pour\ x \geqslant 1 \tag{3.1.2}$$

$$(iii) \quad |\theta(x) - x| \leqslant \frac{0.007763x}{\log x}, \qquad pour\ x \geqslant 1,04 \times 10^7 \tag{3.1.3}$$

Preuve. *Les inégalités* (3.1.1), (3.1.2) *et* (3.1.3) *sont démontrées dans* [34] (*p*.360) ■

Proposition 3.1.2 (*cf* [32])

Soit p_k *le k-ième nombre premier alors,*

$$(i) \qquad p_k \geqslant k\left(\log k + \log\log k - \frac{3}{2}\right) \quad pour\ k \geqslant 2, \tag{3.1.4}$$

$$(ii) \qquad p_k \leqslant k\left(\log k + \log\log k - \frac{1}{2}\right) \quad pour\ \ k \geqslant 20, \tag{3.1.5}$$

Preuve: (*cf* [32]) .

3.2 Estimations de $\theta(p_k)$

Le lemme préliminaire suivant nous sera utile dans la suite de notre travail.

Lemme 3.2.1 *Soient* $k_0 \in \mathbb{N}$ *et* $f\ [k_0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ *une fonction croissante et continue par morceaux, alors pour tout* $k \geqslant k_0$ *on a,*

$$\sum_{i=k_0}^{k-1} f(i) \leqslant \int_{k_0}^{k} f(t)\,dt \leqslant \sum_{i=k_0+1}^{k} f(i)\,.$$

Théorème 3.2.1 *Si* $(p_k)_{k\geq 1}$ *est la suite des nombres premiers alors,*

$$\theta(p_k) > k\log k \qquad pour\ \ k \geqslant 13.$$

Démonstration. *D'après* ***(2.2.26)*** *on a,*

$$x \geqslant \frac{1}{1.74}\pi(x)\log x \qquad pour\ \ x \geqslant 600,$$

en prenant $x = p_i$ *on obtient,*

$$p_i \geqslant \frac{1}{1.74} i \log p_i \geqslant \frac{1}{1.74} i \log i \quad \textit{pour} \quad i \quad \textit{tel que} \quad p_i \geqslant 600,$$

d'où,

$$\log p_i \geqslant \log i + \log\log i - \log 1.74 \quad \textit{pour } i \geqslant k_0$$

$$\textit{où} \quad k_0 \geqslant \pi\left(600\right) + 1 = 110,$$

par suite,

$$\theta\left(p_k\right) - \theta\left(p_{k_0}\right) = \sum_{i=k_0+1}^{i=k} \log p_i \geqslant \sum_{i=k_0+1}^{i=k} \left(\log i + \log\log i - \log 1.74\right)$$

comme la fonction $x \to \log x + \log\log x - \log 1.74$ *est continue et croissante sur l'intervalle* $\left[k_0 + 1, +\infty\right[$, *le lemme 3.1.1 implique alors,*

$$\theta\left(p_k\right) - \theta\left(p_{k_0}\right) \geqslant \int_{k_0}^{k} \left(\log t + \log\log t\right) dt - \left(k - k_0\right) \log 1.74$$

ceci d'une part ,
d'autre part en intégrant par prties $\int_{k_0}^{k} \left(\log t + \log\log t\right) dt$ *on obtient,*

$$\int_{k_0}^{k} \left(\log t + \log\log t\right) dt = \left[t\left(\log t + \log\log t\right)\right]_{k_0}^{k} - \int_{k_0}^{k} t\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t\log t}\right) dt$$

$$= \left[t\left(\log t + \log\log t - 1\right) - Li\left(t\right)\right]_{k_0}^{k}$$

d'où,

$$\left(\theta\left(p_k\right) - k\log k\right) - \left(\theta\left(p_{k_0}\right) - k_0 \log k_0\right) \geqslant \left[t\left(\log\log t - 1 - \log b\right) - Li\left(t\right)\right]_{k_0}^{k}$$

En posant, $f\left(k\right) = \theta\left(p_k\right) - k\log k$ *et* $g\left(x\right) = x\left(\log\log x - 1 - \log 1.74\right) - Li\left(x\right)$
alors,

$$f\left(k\right) - f\left(k_0\right) \geqslant g\left(k\right) - g\left(k_0\right)$$

comme on a,

$$g'\left(x\right) = \log\log x - \left(1 + \log(1.74)\right),$$

la fonction g *est croissante pour* $x \geqslant \exp\left(\exp\left(1 + \log(1.74)\right)\right) = 113.\,27... = x_0,$

on a donc pour $k \geqslant k_0 \geqslant [x_0]+1 = 114$, $g(k) \geqslant g(k_0)$ et donc $f(k) \geqslant f(k_0)$ pour $k \geqslant k_0 \geqslant 114$,
d'où,

$$f(k) \geqslant f(114) = 55.133... > 0 \quad pour\ k \geqslant 114,$$

et

$$\theta(p_k) > k\log k \qquad pour\ k \geqslant 114.$$

La suite de la démonstration se fait à l'ordinateur, à l'aide de Mathematica, nous vérifions graphiquement que pour $14 \leqslant k \leqslant 113$, le graphe de la suite $\theta(p_k) - k\log k$ est situé au dussus de l'axe des abscisses (figures 10-1 et 10-2), ceci implique que,

$$\theta(p_k) - k\log k > 0, \quad pour\ 14 \leqslant\ k \leqslant 113$$

et pour $k = 13$ on a,

$$\theta(p_{13}) = 33.348.. > 33.344 \simeq 13\log 13$$

d'où le théorème ■

Théorème 3.2.2 $(cf\,[27])$ *Pour $k \geqslant 3$ on a,*

$$\theta(p_k) \leqslant k(\log k + \log\log k)$$

Démonstration. *L'inégalité **(2.2.25)** implique,*

$$\log p_k \leqslant \log k + \log\log k + 1, \quad pour\ k \geqslant 2 \tag{3.2.1}$$

par suite pour $k \geqslant k_0 \geqslant 2$, on a grâce à (3.2.1),

$$\theta(p_{k-1}) - \theta(p_{k_0-1}) = \sum_{i=k_0}^{i=k-1} \log p_i \leqslant \sum_{i=k_0}^{i=k-1} (\log i + \log\log i + 1),$$

comme la fonction $f(x) = \log x + \log\log x + 1$ est continue et croissante pour $x > 1$ alors,

$$\theta(p_{k-1}) - \theta(p_{k_0-1}) \leqslant \int_{k_0}^{k} (\log t + \log\log t + 1)\,dt = \int_{k_0}^{k} (\log t + \log\log t)\,dt + (k - k_0)$$
$$= [t(\log t + \log\log t - 1) - Li(t)]_{k_0}^{k} + (k - k_0)$$
$$= [t(\log t + \log\log t) - \log(\exp(1)\,t\log t) + \log(\exp(1)\,t\log t) - Li(t)]_{k_0}^{k}$$

d'où l'on a,

$$\theta(p_{k-1}) - \theta(p_{k_0-1}) - [t(\log t + \log\log t) - \log(\exp(1)\, t \log t)]_{k_0}^{k} \leqslant [\log(\exp(1)\, t\log t) - Li(t)]_{k_0}^{k}$$

Posons,

$$g(k) = \theta(p_{k-1}) - k(\log k + \log\log k) + \log(\exp(1)\, k \log k)$$

et

$$h(x) = \log(\exp(1)\, x\log x) - Li(x)$$

alors,

$$g(k) - g(k_0) \leqslant h(k) - h(k_0)$$

comme,

$$h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x\log x} - \frac{1}{\log x} = \frac{\log x - x + 1}{x \log x} \leqslant 0 \qquad \textit{pour } x > 1$$

alors h *est décroissante pour* $k \geqslant k_0 \geqslant 2$, *on a donc* $h(k) \leqslant h(k_0)$ *par suite* $g(k) \leqslant g(k_0)$ *pour* $k \geqslant k_0 \geqslant 2$

et comme,

$$g(4) = -0.73759 < 0$$

alors,

$$g(k) \leqslant 0 \qquad \textit{pour } k \geqslant 4,$$

d'où l'on a,

$$\theta(p_k) = \theta(p_{k-1}) + \log p_k \leqslant k(\log k + \log\log k) - \log(\exp(1)(k\log k)) + \log p_k \quad \textit{pour } k \geqslant 4$$

mais d'après (3.2.1) *on a,*

$$\log p_k \leqslant \log(\exp(1)\, k\log k) \quad \textit{pour } k \geqslant 2,$$

d'où,

$$\theta(p_k) \leqslant k(\log k + \log\log k) \quad \textit{pour } k \geqslant 4$$

et pour $k = 3$ *on a,*

$$\theta(p_3) = \log 2 + \log 3 + \log 5 = 3.4012 < 3(\log 3 + \log\log 3) \simeq 3.5780$$

ce qui achève la démonstration du théorème 3.2.2. ■

3.3 Minorations de $\theta(p_k)$

Les lemmes suivants nous seront utiles dans la suite de ce chapitre.

Lemme 3.3.1 *On suppose qu'il existe $a > 0$, k_0 et $k_1 \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $e^a \leqslant \log k_0 \leqslant \log k_1$ tels que,*

$$p_k \geqslant k(\log k + \log\log k - a) \qquad \textit{pour } k_0 \leqslant k \leqslant k_1.$$

Alors on a,

$$\theta(p_k) - \theta(p_{k_0}) \geqslant \int_{k_0}^{k} \left(\log t + \log\log t + \frac{\log\log t}{\log t} - \frac{\alpha}{\log t}\right) dt \tag{3.3.1}$$

avec $\alpha = a + \dfrac{1}{2}\dfrac{(\log y - a)^2}{y}$ où y est défini par,

$$y = \begin{cases} \log k_0 & \textit{si } \log k_0 > \exp(a+2) \\ \log k_1 & \textit{si } \log k_1 < \exp(a+2) \\ \exp(a+2) & \textit{si } \log k_0 \leqslant \exp(a+2) \leqslant \log k_1 \end{cases}$$

Démonstration. *Pour $k_0 \leqslant k \leqslant k_1$ on a,*

$$\log p_k \geqslant \log k + \log\log k + \log(1 + \frac{\log\log k - a}{\log k}) \tag{3.3.2}$$

en utilisant l'inégalité (2.2.29) avec $x = \dfrac{\log t - a}{t}$ on obtient,

$$\log(1 + \frac{\log t - a}{t}) \geqslant \frac{\log t}{t} - \frac{1}{t}\left(a + \frac{1}{2}\frac{(\log t - a)^2}{t}\right) \tag{3.3.3}$$

La fonction $x \to f(t) = \dfrac{(\log t - a)^2}{t}$ est croissante pour $\exp(a) \leqslant t \leqslant \exp(a+2)$ et décroissante pour $t > \exp(a+2)$ et pour $0 < t < \exp(a)$.

Supposons $\log k_0 > \exp(a+2)$, alors pour $k_0 \leqslant k \leqslant k_1$ on a,

$$\log k_0 \leqslant \log k \textit{ implique } f(\log k) \leqslant f(\log k_0)$$

d'où,

$$\frac{\log\log k}{\log k} - \frac{1}{\log k}\left(a + \frac{1}{2}\frac{(\log\log k - a)^2}{\log k}\right) \geqslant \frac{\log\log k}{\log k} - \frac{1}{\log k}\left(a + \frac{1}{2}\frac{(\log\log k_0 - a)^2}{\log k_0}\right),$$

en utilisant cette dernière inégalité et (3.3.3) *avec* $t = \log k$ *on obtient,*

$$\log(1 + \frac{\log\log k - a}{\log k}) \geqslant \frac{\log\log k}{\log k} - \frac{1}{\log k}\left(a + \frac{1}{2}\frac{(\log\log k_0 - a)^2}{\log k_0}\right),$$

puis grâce à (3.3.2) *on déduit que,*

$$\log p_k \geqslant \log k + \log\log k + \frac{\log\log k}{\log k} - \frac{\alpha}{\log k} \quad \textit{avec } \alpha = a + \frac{1}{2}\frac{(\log y - a)^2}{y} \quad \textit{où } y = \log k_0$$

Si $\log k_1 < \exp(a+2)$ *alors pour* $k_0 \leqslant k \leqslant k_1$ *on a,*

$$f(\log k) \leqslant f(\log k_1) \;\; \textit{car} \;\; \log k \leqslant \log k_1 \;\; \textit{et } f \;\; \textit{croissante.}$$

Avec la même méthode précédente on aboutit à,

$$\log p_k \geqslant \log k + \log\log k + \frac{\log\log k}{\log k} - \frac{\alpha}{\log k} \quad \textit{avec } \alpha = a + \frac{1}{2}\frac{(\log y - a)^2}{y} \quad \textit{où } y = \log k_1$$

Si $\log k_0 \leqslant \exp(a+2) \leqslant \log k_1$ *alors pour* $k_0 \leqslant k \leqslant k_1$, *on a*

$$f(\log k) \leqslant \max_{k_0 \leq k \leq k_1} f(\log k) = f(\exp(a+2)) \;\; (\textit{car } f \;\; \textit{atteint son maximum au point } t = \exp(a+2))$$

donc,

$$\log p_k \geqslant \log k + \log\log k + \frac{\log\log k}{\log k} - \frac{\alpha}{\log k} \quad \textit{avec } \alpha = a + \frac{1}{2}\frac{(\log y - a)^2}{y} \quad \textit{où } y = \exp(a+2)$$

par suite dans tous les cas on a,

$$\log p_k \geqslant \log k + \log\log k + \frac{\log\log k}{\log k} - \frac{\alpha}{\log k} \qquad \textit{pour} \quad k_0 \leqslant k \leqslant k_1,$$

d'où l'on déduit que,

$$\theta(p_k) - \theta(p_{k_0}) \geqslant \sum_{i=k_0+1}^{i=k}\left(\log i + \log\log i + \frac{\log\log i}{\log i} - \frac{\alpha}{\log i}\right),$$

La fonction $x \to \log x + \log\log x + \dfrac{\log\log x}{\log x} - \dfrac{\alpha}{\log x}$ *est croissante pour* $x > 1$ *en effet sa dérivée est positive pour* $x > 1$, *puisque on a,*

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{\alpha + 1}{x(\log x)^2} + \frac{\log x - \log\log x}{x(\log x)^2} > 0 \quad \textit{pour } x > 1,$$

le lemme 3.3.1, implique alors que pour $k_0 \leqslant k \leqslant k_1$, $(k_0 \geqslant \exp(\exp(a)) > \exp(1))$ *on a,*

$$\theta(p_k) - \theta(p_{k_0}) \geqslant \int_{k_0}^{k}\left(\log t + \log\log t + \frac{\log\log t}{\log t} - \frac{\alpha}{\log t}\right)dt \qquad \square$$

■

Lemme 3.3.2 *Pour* $k \geqslant \exp(10)$ *on a,*

$$p_k \geqslant k(\log k + \log\log k - 1.1315)$$

Démonstration. *D'après le lemme* 9 (*cf* [31])*on a,*

$$\theta(p_k) \geqslant k(\log k + \log\log k - 1) - Li(k) \ \ pour \ \ k \geqslant 5 \tag{3.3.4}$$

par (3.1.2) *il vient alors,*

$$\theta(p_k) \leqslant p_k + 0.000081\frac{p_k}{\log p_k}, \tag{3.3.5}$$

en utliisant l'inégalité ***(2.2.28)*** *avec* $x = p_k$ *on obtient,*

$$\frac{p_k}{\log p_k} \leqslant \frac{4}{3}k, \tag{3.3.6}$$

les majorations (3.3.5) *et* (3.3.6) *impliquent alors,*

$$\theta(p_k) \leqslant p_k + 0.000081 \times \frac{4}{3}k \ \leqslant p_k + 0.021k,$$

d'où $p_k \geqslant \theta(p_k) - 0.021k$, *puis avec* (3.3.4) *on obtient,*

$$p_k \geqslant k(\log k + \log\log k - 1.021) - Li(k) = k(\log k + \log\log k - 1.021) - Li(k),$$

Grâce à (2.2.50) on obtient pour $k \geqslant \exp(10)$,

$$p_k \geqslant k(\log k + \log\log k - 1.13415).$$

■

Théorème 3.3.1 (*cf* [27]) *On a,*

$$(i) \qquad \theta(p_k) \geqslant k(\log k + \log\log k - 1.076868) \qquad pour \ k \geqslant 2 \tag{3.3.7}$$

avec égalité pour $k = 66$.

$$(ii) \qquad \theta(p_k) > k(\log k + \log\log k - 1) \qquad pour \ k \leqslant 17 \ et \ k \geqslant 5106 \tag{3.3.8}$$

$$(iii) \qquad \theta(p_k) < k(\log k + \log\log k - 1) \qquad pour \ 18 \leqslant k \leqslant 5105 \tag{3.3.9}$$

Démonstration.

Preuve de (3.3.8). *On suppose les hypothèses du lemme 3.3.1 vérifiées et $k_1 \to +\infty$ alors,*

$$\theta(p_k) - \theta(p_{k_0}) \geqslant \int_{k_0}^{k} (\log t + \log\log t)dt + \int_{k_0}^{k} \frac{\log\log t - \alpha}{\log t} dt$$
$$= \left[t(\log t + \log\log t - 1) - Li(t)\right]_{k_0}^{k} + \int_{k_0}^{k} \frac{\log\log t - \alpha}{\log t} dt$$

d'où,

$$\theta(p_k) - \theta(p_{k_0}) - \left[t(\log t + \log\log t - 1)\right]_{k_0}^{k} \geqslant -\left[Li(t)\right]_{k_0}^{k} + \int_{k_0}^{k} \frac{\log\log t - \alpha}{\log t} dt,$$

posons,

$$f(k) = \theta(p_k) - k(\log k + \log\log k - 1)$$

et

$$g(x) = -Li(x) + \int_{k_0}^{x} \frac{\log\log t - \alpha}{\log t} dt \quad \textit{pour } x \geqslant k_0$$

alors,

$$f(k) - f(k_0) \geqslant g(k) - g(k_0)$$

en prenant $k_0 = \exp(10)$ et $a = 1.13415$ et en utilisant le lemme 3.3.2, les hypothèses du lemme 3.3.1 sont vérfiées donc,

$$\alpha = a + \frac{1}{2}\frac{(\log y - a)^2}{y} \quad \textit{avec } y = \exp(a+2) \quad \textit{puisque} \quad \log k_0 = 10 < \exp(a+2) = 22.969...$$

d'où,

$$\alpha = a + \frac{2}{\exp(a+2)} = 1.22122...$$

la fonction g étant croissante puisque,

$$g'(x) = \frac{\log\log x - \alpha - 1}{\log x} \geqslant 0 \quad \textit{pour } x \geqslant \exp(\exp(\alpha+1)) = \exp(9.2186)$$

on a donc pour $k \geqslant k_0 \geqslant \exp(9.2186)$

$$g(k) \geqslant g(k_0),$$

en prenant $k_0 = \exp(10)$ on obtient,

$$g(k) \geqslant g(\exp(10)) \quad , \quad \textit{pour } k \geqslant \exp(10)$$

par suite pour $k \geqslant \exp(10)$ *on a,*

$$f(k) \geqslant f(\exp(10)) = 371.177... > 0$$

d'où l'on déduit pour $k \geqslant \exp(10)$ *l'inégalité,*

$$\theta(p_k) > k(\log k + \log\log k - 1).$$

pour $k \leqslant 17$ *et* $5106 \leqslant k \leqslant \exp(10)$, *le graphe de la suite* $\varphi(k) = \theta(p_k) - k(\log k + \log\log k - 1)$ *(figures 1-1, 1-2, 1-3 et 1-4) montre que* $\varphi(k) > 0$, *d'où l'inégalité* (3.3.8).

Preuve de (3.3.9)
Le graphe de la suite $\varphi(k)$ *montre que,*

$$\varphi(k) < 0 \quad \textit{pour } 18 \leqslant k \leqslant 5105,$$

donc l'inégalité (3.3.9) *est encore vérifiée.*

Preuve de (3.3.7).
En utilisant l'inégalité (3.3.8) *il vient pour* $k \leqslant 17$ *et* $k \geqslant 5106$,

$$\theta(p_k) > k(\log k + \log\log k - 1) > k(\log k + \log\log k - 1.076868).$$

et pour $18 \leqslant k \leqslant 5105$, *le graphe de la suite* $\psi(k) = \theta(p_k) - k(\log k + \log\log k - 1.076868)$ *(figures 2-1, 2-2 et 2-3) montre que,* $\psi(k) > 0$, *d'où* (3.3.7) *du théorème 3.3.1.*

■

Lemme 3.3.3 *On a,*

$$(i) \qquad p_k \geqslant k(\log k + \log\log k - 1) \qquad \textit{pour } k \geqslant 2 \textit{ et } p_k \leqslant 10^{11} \qquad (3.3.10)$$

$$(ii) \qquad p_k \geqslant k(\log k + \log\log k - 1.0077629) \qquad \textit{pour } p_k \geqslant 10^{11} \qquad (3.3.11)$$

Démonstration.
Preuve de (3.3.10).
L'inégalité (3.1.1), *la proposition* 3.1.1 *et l'inégalité* (3.3.8) *impliquent,*

$$p_k \geqslant \theta(p_k) > k(\log k + \log\log k - 1) \quad \textit{pour} \quad k \geqslant 5106 \textit{ et pour } k \geqslant 2 \textit{ tel que } p_k \leqslant 10^{11}$$

Pour $2 \leqslant k \leqslant 5105$, *le graphe de la suite* $p_k - k(\log k + \log\log k - 1)$ (*figures 9-1 et 9-2*) *montre que l'on a bien,*

$$p_k - k(\log k + \log\log k - 1) > 0$$

donc,

$$p_k > k(\log k + \log\log k - 1)\,, \ \textit{pour } k \geqslant 2 \ \textit{tel que } p_k \leqslant 10^{11}$$

Preuve de (3.3.11)
Soit k *un entier naturel non nul tel que* $p_k \geqslant 10^{11}$.
En utilisant l'inégalité (3.1.3) *de la proposition 3.1.1 avec* $x = p_k$ *on obtient,*

$$p_k \geqslant \theta(p_k) - 0.007763\frac{p_k}{\log p_k},$$

puis (3.3.8) *implique,*

$$p_k \geqslant k(\log k + \log\log k - 1) - 0.007763\frac{p_k}{\log p_k}. \qquad (3.3.12)$$

D'autre part en remarquant que la fonction $x \to \dfrac{x}{\log x}$ *est croitssante pour* $x \geqslant \exp(1)$, *l'inégalité* (3.1.5) *implique alors,*

$$\frac{p_k}{\log p_k} \leqslant \frac{k\left(\log k + \log\log k - \frac{1}{2}\right)}{\log k + \log\log k} < k \qquad \textit{pour } k \geqslant 20,$$

d'où l'on déduit,

$$-\frac{p_k}{\log p_k} > -k \ \ \textit{pour } k \geqslant 20$$

par suite pour $p_k \geqslant 10^{11}$, *on déduit de l'inégalité* (3.3.12) *que,*

$$p_k \geqslant k(\log k + \log\log k - 1) - 0.007763k \ = k(\log k + \log\log k - 1.007763)$$

■

3.4 Minorations plus fines de $\theta(p_k)$.

Théorème 3.4.1 *Pour $k \geqslant 3$ on a,*

$$\theta(p_k) \geqslant k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k}{\log k} - \frac{2.1454}{\log k}\right) \tag{3.4.1}$$

avec égalité pour $k = 4714$.

Démonstration. *Avec les hypothèses du lemme 3.3.1, l'inégalité (3.3.1) peut s'écrire :*

$$\theta(p_k) - \theta(p_{k_0}) \geqslant \int_{k_0}^{k} (\log t + \log\log t)dt + \int_{k_0}^{k} \frac{\log\log t - \alpha}{\log t} dt \ , \quad \text{pour } k_0 \leqslant k \leqslant k_1$$

par une intégration par parties on obtient,

$$\theta(p_k) - \theta(p_{k_0}) \geqslant [t(\log t + \log\log t - 1) - Li(t)]_{k_0}^{k} + \int_{k_0}^{k} \frac{\log\log t - \alpha}{\log t} dt \tag{3.4.2}$$

le second membre de cette dernière inégalité s'écrit,

$$[t(\log t + \log\log t - 1) - Li(t)]_{k_0}^{k} + \int_{k_0}^{k} \frac{\log\log t - \alpha}{\log t} dt = \left[t(\log t + \log\log t - 1) + t\frac{\log\log t - \beta}{\log t}\right]_{k_0}^{k}$$

$$+ \left[-t\frac{\log\log t - \beta}{\log t} - Li(t)\right]_{k_0}^{k} + \int_{k_0}^{k} \frac{\log\log t - \alpha}{\log t} dt \tag{3.4.3}$$

où β est une constante positive,

de (3.4.2) et (3.4.3) on déduit que,

$$\theta(p_k) - \theta(p_{k_0}) - \left[t\left(\log t + \log\log t - 1 + \frac{\log\log t - \beta}{\log t}\right)\right]_{k_0}^{k} \geqslant$$

$$\left[-t\frac{\log\log t - \beta}{\log t} - Li(t)\right]_{k_0}^{k} + \int_{k_0}^{k} \frac{\log\log t - \alpha}{\log t} dt \tag{3.4.4}$$

posons,

$$f(k) = \theta(p_k) - k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k - \beta}{\log k}\right)$$

et

$$g(x) = -x\frac{\log\log x - \beta}{\log x} - Li(x) + \int_{k_0}^{x} \frac{\log\log t - \alpha}{\log t} dt \quad \text{pour } x \geqslant k_0 \geqslant 2.$$

L'inégalité (3.4.4) est équivalente alors à,

$$f(k) - f(k_0) \geqslant g(k) - g(k_0). \tag{3.4.5}$$

D'autre part on a,

$$g'(x) = \frac{(\beta - \alpha - 1)\log x + \log\log x - \beta - 1}{(\log x)^2}$$

la fonction g est croissante si et seulement si,

$$(\beta - \alpha - 1)\log x + \log\log x - \beta - 1 \geqslant 0$$

c'est à dire si,

$$\beta \geqslant \alpha + 1 + \frac{\alpha + 2 - \log\log x}{\log x},$$

posons,

$$h(x) = \alpha + 1 + \frac{\alpha + 2 - \log\log x}{\log x},$$

alors,

$$h'(x) = \frac{\dfrac{1}{\log x} - \alpha - 3 + \log\log x}{x(-1 + \log x)^2},$$

$h'(x)$ est donc du même signe que $\varphi(x) = \dfrac{1}{\log x} - \alpha - 3 + \log\log x$.

Or on a,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x\log x}\left(1 - \frac{1}{\log x}\right) > 0 \quad \textit{pour } x > 1,$$

donc φ est strictement croissante pour $x > 1$,

comme,

$$\varphi(\exp(\exp(\alpha + 2))) = \frac{1}{\exp(\alpha + 2)} - 1 < 0 \qquad \textit{et} \qquad \varphi(\exp(\exp(\alpha + 3))) = \frac{1}{\exp(\alpha + 3)} > 0$$

alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique constante c dans l'intervalle $]\exp(\exp(\alpha + 2)),\ \exp(\exp(\alpha + 3))[$ *tel que* $\varphi(c) = 0$,

de plus on a,

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(c) = 0, \ \textit{pour } x \leqslant c \quad \textit{et} \quad \varphi(x) \geqslant \varphi(c) = 0, \ \textit{pour } x \geqslant c$$

donc h est croissante pour $x \geqslant c$ et décroissante pour $x \leqslant c$.

Nous distinguons alors trois cas :

$$k_0 \geqslant c, \ k_1 \leqslant c \ \textit{ et } \ k_0 \leqslant c \leqslant k_1$$

Si $k_0 \geqslant c$ alors,

$$h(k) \leqslant h(k_1) \quad \textit{pour } k_0 \leqslant k \leqslant k_1.$$

Si $k_1 \leqslant c$ *alors,*

$$h(k) \leqslant h(k_0) \quad pour\ k_0 \leqslant k \leqslant k_1.$$

Si $k_0 \leqslant c \leqslant k_1$ *alors,*

$$h(c) \leqslant h(k) \leqslant h(k_1) \quad pour\ c \leqslant k \leqslant k_1.$$

et

$$h(c) \leqslant h(k) \leqslant h(k_0) \quad pour\ k_0 \leqslant k \leqslant c,$$

donc g *est croissante pour tout* k *tel que* $k_0 \leqslant k \leqslant k_1$ *si et seulement si,*

$$h(k) = \alpha + 1 + \frac{\alpha + 2 - \log\log k}{\log k} \leqslant \beta \quad avec\ \ \beta = \max\{h(k_0),\ h(k_1)\}$$

l'inégalité (3.4.5) *implique donc pour* $k_0 \leqslant k \leqslant k_1$,

$$f(k) - f(k_0) \geqslant g(k) - g(k_0) \geqslant 0,$$

d'où l'on a,

$$f(k) \geqslant f(k_0).$$

Calculons β.

Soit k_0 *un entier positif tel que* $p_{k_0} \leqslant 10^{11} < p_{k_0+1}$,

alors,

$$k_0 = \pi\left(10^{11}\right) = 4118054813,$$

comme pour tout k *tel que* $k \geqslant k_0 + 1$ *on a,*

$$p_k \geqslant p_{k_0+1} > 10^{11},$$

le lemme 3.3.3, implique alors,

$$p_k \geqslant k(\log k + \log\log k - a) \quad avec\ \ a = 1.0077629...$$

de plus on a,

$$\log k_0 = \log \pi\left(10^{11}\right) = 22.14.. > \exp(a+2) = 20.25...$$

Le lemme 3.3.1 entraîne,

$$\alpha = a + \frac{1}{2}\frac{(\log\log k_0 - a)^2}{\log k_0} = 1.1063729...$$

comme,

$$\lim_{k_1\to+\infty} h(k_1) = \alpha + 1 = 2.1063729... \quad \textit{et} \quad h(k_0) = \alpha + 1 + \frac{\alpha + 2 - \log\log k_0}{\log k_0} = 2.106893...$$

on peut prendre alors,

$$\beta = \max\{h(k_1)\,,\ h(k_0)\} = 2.106893...$$

En itérant la même méthode en partant de $k_0 = 400000$, $k_1 = \pi(10^{11})$ *et* $a = 1$, *on obtient,*

$$\alpha = 1.09957... \ \textit{et} \quad \beta = 2.1452...$$

Les calculs effectués à l'aide de Mathemtica 7, donnent les valeurs suivantes :

k_0	k_1	a	α	β
$\pi(10^{11})$	$+\infty$	1.0077629	1.1063729	2.106893
400000	$\pi(10^{11})$	1.0000000	1.0995700	2.145200
250000	400000	1.0000000	1.0939889	2.144200
210000	250000	1.0000000	1.0929480	2.145100
200000	210000	1.0000000	1.0925260	2.145231

Si on choisit $\beta = 2.1453$ *on obtient,* $f(k) \geqslant f(200000) = 589.48... > 0$ *pour* $k \geqslant 2\times 10^5$.

et pour $3 \leqslant k \leqslant 2\times 10^5$, *le graphe de la suite* $f(k)$ (*figures 3-1,3-2,3-3 et 3-4*) *montre que,*

$$f(k) = \theta(p_k) - k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k}{\log k} - \frac{2.1454}{\log k}\right) \geqslant 0$$

c'est-à-dire,

$$\theta(p_k) \geqslant k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k}{\log k} - \frac{2.1454}{\log k}\right) \qquad \textit{pour} \quad 3 \leqslant k \leqslant 200000$$

et pour $k = 4714$, *les calculs effectués à l'aide de Mathemtica avec une precision de* 10 *décimales donnent,*

$$\theta(p_{4714}) - 4714\left(\log 4714 + \log\log 4714 - 1 + \frac{\log\log 4714}{\log 4714} - \frac{2.1453125192...}{\log 4714}\right) = 0.0000000000...$$

d'où le théorème.

■

3.5 Majorations de $\theta(p_k)$.

Pour la suite de notre étude les lemmes suivants nous seront utiles.

Lemme 3.5.1 *:*
Supposons qu'il existe $a > 0$ et $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$ on ait,

$$p_k \leqslant k(\log k + \log\log k - a) \qquad \text{et} \qquad \log\log k_0 \geqslant \max\{a, 1\}$$

alors,

$$\frac{p_k}{\log p_k} \leqslant k\left(1 - \frac{a_1}{\log k}\right) \quad \text{pour } k \geqslant k_0 \quad \text{avec} \quad a_1 = a\frac{1}{1 + \dfrac{\log\log k_0}{\log k_0}}$$

Démonstration. *La fonction $x \to \dfrac{x}{\log x}$ étant croissante pour $x > 1$, l'hypothèse $p_k \leqslant k(\log k + \log\log k - a)$ implique alors pour $k \geqslant k_0$,*

$$\frac{p_k}{\log p_k} \leqslant \frac{k(\log k + \log\log k - a)}{\log k + \log\log k + \log\left(1 + \dfrac{\log\log k - a}{\log k}\right)} \leqslant k\left(1 - \frac{a}{\log k}\frac{1}{1 + \dfrac{\log\log k_0}{\log k_0}}\right)$$

$$= k\left(1 - \frac{a_1}{\log k}\right) \quad \text{avec} \quad a_1 = \frac{a}{1 + \dfrac{\log\log k_0}{\log k_0}}.$$

Lemme 3.5.2 .
Si

(i) $$\theta(x) \geqslant x - \beta\frac{x}{\log x} \quad \text{pour } x \geqslant p_{k_0} \text{ où } k_0 \geqslant 1 \text{ et } \beta > 0$$

et

(ii) $$\theta(p_k) \leqslant k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k}{\log k} - \frac{b}{\log k}\right) \qquad \text{pour } k \geqslant k_0$$

alors,

$$p_k \leqslant k(\log k + \log\log k - \acute{a}) \quad \text{pour } k \geqslant k_0$$

avec $\acute{a} = 1 - \beta - \exp(-(b + 1 + a_1\beta))$ où a_1 est défini au lemme 3.5.1

Démonstration.
L'hypothèse (i) du lemme 3.5.2 implique pour $x = p_k$,

$$p_k \leqslant \theta(p_k) + \beta\frac{p_k}{\log p_k} \text{ pour } k \geqslant k_0$$

d'après (3.1.5) *de la proposition* (3.1.2) *l'hypothèse du lemme 3.5.1 est vérfiée donc,*

$$\frac{p_k}{\log p_k} \leqslant k\left(1-\frac{a_1}{\log k}\right) \text{ pour } k \geqslant k_0 \quad \text{avec } a_1 = \frac{a}{1+\dfrac{\log\log k_0}{\log k_0}}$$

Avec l'hypothèse (*ii*) *du lemme 3.5.2, on obtient pour* $k \geqslant k_0$,

$$\begin{aligned}\theta(p_k) &\leqslant k\left(\log k+\log\log k-1+\frac{\log\log k}{\log k}-\frac{b}{\log k}\right)+k\beta\left(1-\frac{a_1}{\log k}\right)\\ &= k\left(\log k+\log\log k-(1-\beta)+\frac{\log\log k-(b+a_1\beta)}{\log k}\right)\end{aligned}$$

La fonction $x \rightarrow \dfrac{\log x - c}{x}$ *définie pour* $x>0$, *atteint son maximum* $\exp(-(1+c))$ *pour* $x=\exp(c+1)$ *donc,*

$$\frac{\log\log k-(b+a_1\beta)}{\log k} \leqslant \exp\left(-\left(1+b+a_1\beta\right)\right),$$

par suite,

$$p_k \leqslant k\left(\log k+\log\log k-1+\beta+\exp\left(-\left(1+b+a_1\beta\right)\right)\right) = k\left(\log k+\log\log k-\acute{a}\right),$$

avec $\acute{a} = 1-\beta-\exp\left(-\left(1+b+a_1\beta\right)\right)$

■

Lemme 3.5.3

Si $p_k \leqslant k\left(\log k+\log\log k-a\right)$ *pour* $k>k_0$ *tel que* $\log\log k_0 \geqslant \max\{a,1\}$,

soit $\mu = \dfrac{\log k_0}{k_0}+\dfrac{1}{k_0}$ *et* b *une constante strictement positive tel que,*

$$a+1-b-\mu>0,$$

Si $\theta(p_{k_0})-k_0\left(\log k_0+\log\log k_0-1+\dfrac{\log\log k_0-b}{\log k_0}\right)<0$,

alors pour $k \geqslant k_0$ *on a,*

$$\theta(p_k) \leqslant k\left(\log k+\log\log k-1+\frac{\log\log k}{\log k}-\frac{b}{\log k}\right).$$

Démonstration.

L'hypothèse implique pour $k \geqslant k_0$,

$$\log p_k \leqslant \log k+\log\log k+\log\left(1+\frac{\log\log k-a}{\log k}\right),$$

$$\leqslant \log k + \log\log k + \frac{\log\log k - a}{\log k}$$

donc,

$$\theta(p_{k-1}) - \theta(p_{k_0-1}) = \sum_{i=k_0}^{i=k-1} \log p_i \leqslant \sum_{i=k_0}^{i=k-1} \left(\log i + \log\log i + \frac{\log\log i - a}{\log i} \right)$$

la fonction $x \to \log x + \log\log x + \dfrac{\log\log x - a}{\log x}$ *étant croissante et continue pour* $x \geqslant k_0$, *le lemme 3.1.1 entraîne alors,*

$$\theta(p_{k-1}) - \theta(p_{k_0-1}) \leqslant \int_{k_0}^{k} (\log t + \log\log t)\, dt + \int_{k_0}^{k} \frac{\log\log t - a}{\log t} dt$$

La première intégrale à été déja évaluée précédemment, on a donc,

$$\theta(p_{k-1}) - \theta(p_{k_0-1}) \leqslant [t(\log t + \log\log t - 1) - Ii(t)]_{k_0}^{k} + \int_{k_0}^{k} \frac{\log\log t - a}{\log t} dt$$

$$= [t(\log t + \log\log t - 1) - Ii(t)]_{k_0}^{k} + \int_{k_0}^{k} \frac{\log\log t}{\log t} dt - a\,[Li(t)]_{k_0}^{k}$$

Supposons $b > 0$.
En intégrant $\displaystyle\int_{k_0}^{k} \frac{\log\log t}{\log t} dt$ *par parties on obtient,*

$$\theta(p_{k-1}) - \theta(p_{k_0-1}) \leqslant [t(\log t + \log\log t - 1) - (1+a)\, Ii(t)]_{k_0}^{k}$$

$$+ \left[t \frac{\log\log t}{\log t} \right]_{k_0}^{k} - \int_{k_0}^{k} t \left(\frac{\log\log t}{\log t} \right)' dt + \left[\frac{bt}{\log t} - \frac{bt}{\log t} \right]_{k_0}^{k}$$

$$= \left[t \left(\log t + \log\log t - 1 + \frac{\log\log t - b}{\log t} \right) \right]_{k_0}^{k}$$

$$+ \left[\frac{bt}{\log t} - (1+a)\, Ii(t) - \int_{k_0}^{k} t \left(\frac{\log\log t}{\log t} \right)' dt \right]_{k_0}^{k}$$

d'où,

$$\theta(p_{k-1}) - \theta(p_{k_0-1}) - \left[t \left(\log t + \log\log t - 1 + \frac{\log\log t - b}{\log t} \right) \right]_{k_0}^{k},$$

$$\leqslant \left[\frac{bt}{\log t} - (1+a)\, Ii(t) - \int_{k_0}^{k} t \left(\frac{\log\log t}{\log t} \right)' dt \right]_{k_0}^{k}$$

posons,

$$f(k) = \theta(p_{k-1}) - k \left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k - b}{\log k} \right) + \log k + \log\log k + \log \left(1 + \frac{\log\log k - a}{\log k} \right)$$

et pour $x \geqslant k_0$

$$g\left(x\right)=\frac{bx}{\log x}-\left(1+a\right)Ii\left(x\right)+\int_{k_0}^{x} t\left(\frac{\log\log t}{\log t}\right)' dt+\log x+\log\log x+\log\left(1+\frac{\log\log x-a}{\log x}\right)$$

on a alors,

$$f\left(k\right)-f\left(k_0\right)\leqslant g\left(k\right)-g\left(k_0\right),$$

la dérivée de g vaut,

$$g'\left(x\right)=\frac{b-a-1}{\log x}+\frac{\log\log x-b-1}{(\log x)^2}+\frac{1}{\log x}\left(\frac{\log x}{x}+\frac{1}{x}\right)+\frac{-\log\log x+a+1}{x(\log x+\log\log x-a)\log x}$$

comme la fonction $x\rightarrow\dfrac{\log x}{x}+\dfrac{1}{x}$ *est décroissante et* $\log\log x\geqslant a$ *pour* $x\geqslant k_0$ *alors,*

$$\frac{\log x}{x}+\frac{1}{x}\leqslant\frac{\log k_0}{k_0}+\frac{1}{k_0}=\mu \quad et \quad \frac{-\log\log x+a+1}{x(\log x+\log\log x-a)\log x}\leqslant\frac{-\log\log x+a+1}{(\log x)^2}$$

donc,

$$g'\left(x\right)\leqslant\frac{-\left(a+1-\mu-b\right)\log x+a-b}{(\log x)^2}$$

d'où,

$$g'\left(x\right)\leqslant 0$$

si et seulement si,

$$\left(a+1-\mu-b\right)\log x\geqslant a-b$$

or,

$$a+1-b-\mu>0$$

donc,

$$\log x\geqslant\frac{a-b}{1-\mu+a-b}$$

si et seulement si,

$$x\geqslant\exp\left(\frac{a-b}{1-\mu+a-b}\right)$$

comme on a $\mu=\dfrac{\log k_0}{k_0}+\dfrac{1}{k_0}<1$ *pour* $k_0\geqslant 2$ *et* $\log\log k_0\geqslant\max\{a,\ 1\}$,
alors,

$$\exp\left(\frac{a-b}{1-\mu+a-b}\right)\leqslant\exp\left(1\right)\leqslant\exp\left(\exp\left(\max\{a,\ 1\}\right)\right)\leqslant k_0,$$

d'où,

$$g'\left(x\right)\leqslant 0\ ,\quad pour\ x\geqslant k_0$$

donc, g est décroissante pour $x \geqslant k_0$ par suite,

$$f(k) \leqslant f(k_0) \quad \textit{pour } k > k_0,$$

c'est à dire,

$$f(k) \leqslant \theta(p_{k_0}) - k_0 \left(\log k_0 + \log\log k_0 - 1 + \frac{\log\log k_0 - b}{\log k_0} \right) - \log p_{k_0} + \log\left(k_0\left(\log k_0 + \log\log k_0 - a\right)\right)$$

l'hypothèse du lemme 3.5.3 implique alors,

$$f(k) \leqslant -\log p_{k_0} + \log\left(k_0\left(\log k_0 + \log\log k_0 - a\right)\right) = -\log\left(\frac{p_{k_0}}{k_0\left(\log k_0 + \log\log k_0 - a\right)}\right) \leqslant 0,$$

puisque on a $p_{k_0} > k_0\left(\log k_0 + \log\log k_0 - a\right)$.
Par suite,

$$\theta(p_k) - k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k - b}{\log k}\right) \leqslant \log p_k - \log\left(k\left(\log k + \log\log k - a\right)\right)$$
$$= \log\left(\frac{p_k}{k\left(\log k + \log\log k - a\right)}\right) \leqslant 0 \quad \textit{pour} \quad k > k_0,$$

d'où le lemme 3.5.3 .

■

Théorème 3.5.1 *On a,*

(i)	$p_k \leqslant k\left(\log k + \log\log k - 0.9385\right)$	*pour* $k \geqslant 8602$	(3.5.1)
(ii)	$\theta(p_k) \leqslant k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k}{\log k} - \frac{1.9185}{\log k}\right)$	*pour* $k \geqslant 126$	(3.5.2)
(iii)	$\theta(p_k) \leqslant k\left(\log k + \log\log k - 0.9465\right)$	*pour* $k \geqslant 14$	(3.5.3)

Démonstration.

Preuve de (3.5.1).

Pour $a = 0.5$ *et* $k_0 = 20$ *et* $b = 1.1$ *on a,*

$$\log\log k_0 \geqslant \max\{a, 1\} = 1 \ \textit{et}\ a + 1 - \mu - b \simeq 0.19240 > 0$$

d'après la proposition 3.1.2 on a,

$$p_k \leqslant k(\log k + \log\log k - a) \quad \textit{pour } k \geqslant k_0$$

de plus,

$$\theta(p_{k_0}) - k_0\left(\log k_0 + \log\log k_0 - 1 + \frac{\log\log k_0 - 1.1}{\log k_0}\right) \simeq -0.00958 < 0$$

donc les conditions du lemme 3.5.3 sont satisfaites, par conséquent on a pour $k \geqslant k_0 = 20$,

$$\theta(p_k) \leqslant k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k}{\log k} - \frac{b}{\log k}\right) \quad \textit{avec} \quad b = 1.1$$

d'où la condtion (ii) *du lemme 3.5.2 .*

L'inégalité (3.1.3) *de la proposition 3.1.1, valable pour tout* k *tel que* $x = p_k \geqslant 1.04 \times 10^7$, *la condition* (i) *du lemme 3.5.2 pour* $\beta = 0.007763$ *et* k_0 *tel que* $x \geqslant p_{k_0} > 1.04 \times 10^7 > p_{k_0-1}$ *c'est-à-dire pour* $k_0 = \pi(1.04 \times 10^7) + 1 = 689383$, *ainsi que le lemme 3.5.2 impliquent,*

$$p_k \leqslant k(\log k + \log\log k - \acute{a}) \quad \textit{pour } k \geqslant k_0,$$

avec,

$$\acute{a} = 1 - \beta - \exp(-(b + 1 + a_1\beta)) \quad \textit{où} \quad a_1 = \frac{a}{1 + \dfrac{\log\log k_0}{\log k_0}} \ ,$$

d'où les valeurs approximatives de a_1 *et* $\acute{a}$ *suivantes,*

$$a_1 \simeq 0.3944 \ \textit{et} \ \acute{a} \simeq 0.87015$$

En itérant la même méthode précédente en choisissant une valeur de b *et en partant de la dernière valeur de* $\acute{a}$ *trouvée on a aboutit aux valeurs approximatives suivantes,*

$$\begin{aligned} b &= 1.46 & \acute{a} &\simeq 0.907256, \\ b &= 1.88 & \acute{a} &\simeq 0.936413, \\ b &= 1.915 & \acute{a} &\simeq 0.938343, \\ b &= 1.9179 & \acute{a} &\simeq 0.9385, \end{aligned}$$

d'où en prenant $\acute{a} = 0.9385$ *on obtient,*

$$p_k \leqslant k(\log k + \log\log k - 0.9385), \qquad \textit{pour } k \geqslant k_0 = 689383.$$

Pour $8602 \leqslant k \leqslant 689382$, *on vérifie à l'ordinateur que* $p_k - k(\log k + \log\log k - 0.9385) \leq 0$, *(figures 11-1 , 11-2 , 11-3 et 11-4) d'où l'où on déduit que,*

$$p_k \leqslant k(\log k + \log\log k - 0.9385), \quad \textit{pour} \;\; 8602 \leqslant k \leqslant 689382$$

ce qui complète et achève la démonstration de (3.5.1) *du théorème* 3.5.1.

Preuve de (3.5.2)

On vérifie de la même manière que les conditions du lemme 3.5.3 sont satisfaites pour $b = 1.9185$, $a = 0.9385$ *et* $k_0 = 8602$, *donc,*

$$\theta(p_k) \leqslant k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k}{\log k} - \frac{1.9185}{\log k}\right) \qquad \textit{pour} \;\; k \geqslant 8602.$$

La courbe représentative de la suite $\theta(p_k) - k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k}{\log k} - \frac{1.9185}{\log k}\right)$ *(figures 4-1 et 4-2) montre que ,*

$$\theta(p_k) - k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k}{\log k} - \frac{1.9185}{\log k}\right) \leqslant 0 \qquad \textit{pour} \;\; 126 \leqslant k \leqslant 8602,$$

d'où l'inégalité (3.5.2)

Preuve de (3.5.3)

Comme la fonction $k \to \dfrac{\log\log k - 1.9185}{\log k}$ *est décroissante pour* $k \geqslant \exp(\exp(2.9185))$, *alors pour* $k \geqslant 1.99 \times 10^9 > \exp(\exp(2.9185))$ *on a,*

$$\frac{\log\log k - 1.9185}{\log k} \leqslant 0.053\,5...,$$

avec l'inégalité (3.5.2) *il vient pour* $k \geqslant 1.99 \times 10^9$,

$$\theta(p_k) \leqslant k(\log k + \log\log k - 0.9465). \tag{3.5.4}$$

Il reste à vérifier l'inégalité (3.5.4) *pour* $14 \leqslant k \leqslant 1.99 \times 10^9$, *pour cela nous partageons le dernier intervalle en quatre sous-intervalles :*

$[14,\ 3 \times 10^4]$, $[3 \times 10^4,\ 10^6]$, $[10^6,\ 1.11 \times 10^7]$ *et* $[1.11 \times 10^7,\ 1.99 \times 10^9]$

Pour $30000 \leqslant k \leqslant 10^6$, *on considère la fonction* $\varphi(k) = p_k - k(\log k + \log\log k - 0.9465)$

L'étude de la courbe de $\varphi(k)$ *effectuée avec Mathemtica 7 montre que,*

$$\varphi(k) \leqslant 0 \quad \textit{pour} \;\; 30000 \leqslant k \leqslant 10^6 \;\; \textit{(figures 5-1 et 5-2)}$$

donc,

$$p_k \leqslant k(\log k + \log\log k - 0.9465) \qquad \textit{pour } 30000 \leqslant k \leqslant 10^6.$$

Pour $10^6 \leqslant k \leqslant 1.99 \times 10^9$, la méthode précédente nécessiste un ordinateur plus puissant.
Nous simplifions d'abord les calculs comme suit,
soit n un entier naturel, on pose,

$$f(n) = p_{p+q(n+1)} - (p+qn)(\log(p+qn) + \log\log(p+qn) - 0.9465)$$

pour $10^6 \leqslant k \leqslant 1.11 \times 10^7$, puis on prend $p = 10^6$, $q = 100$ et $0 \leqslant n \leqslant 101000$
Le graphe de $f(n)$ pour $0 \leqslant n \leqslant 101000$ (figure 6-1) montre que,

$$p_{p+q(n+1)} < (p+qn)(\log(p+qn) + \log\log(p+qn) - 0.9465) \quad \textit{pour } 0 \leqslant n \leqslant 101000$$

comme les suites p_k et $k(\log k + \log\log k - 0.9465)$ sont croissantes, alors pour tout k tel que $p + qn \leqslant k \leqslant p + q(n+1)$ avec $0 \leqslant n \leqslant 101000$ on a,

$$\begin{aligned} p_k \leqslant p_{p+q(n+1)} &< (p+qn)(\log(p+qn) + \log\log(p+qn) - 0.9465) \\ &\leqslant k(\log k + \log\log k - 0.9465) \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$p_k \leqslant k(\log k + \log\log k - 0.9465) \qquad \textit{pour } 10^6 \leqslant k \leqslant 1.11 \times 10^7$$

puisque,

$$\bigcup_{n\in I} [p+qn,\ p+q(n+1)] = \left[10^6,\ 1.11 \times 10^7\right] \qquad \textit{où} \quad I = \{n \in \mathbb{N}\ ;\quad 0 \leqslant n \leqslant 101000\}.$$

Pour $1.11 \times 10^7 \leqslant k \leqslant 1.99 \times 10^9$, on obtient la preuve de $(3.5.3)$ en prenant $p = 1.11 \times 10^7$, $q = 2500$ et $0 \leqslant n \leqslant 791560$ et en utilisant la même méthode précédente (figures 6-2 et 6-3).
Et pour $14 \leqslant k \leqslant 30000$, la courbe de la suite $\theta(p_k) - k(\log k + \log\log k - 0.9465)$ (figures 7-1, 7-2 et 7-3) montre que,

$$\theta(p_k) - k(\log k + \log\log k - 0.9465) < 0 \quad \textit{pour } 14 \leqslant k \leqslant 30000$$

ainsi l'inégalité $(3.5.3)$ est vérifieé pour $k \geqslant 14$.

3.6 Encadrements de $\theta(p_k)$ sous l'hypothèse de Riemann

Dans (cf [27]) G. Robin a en utilisant un théorème dû à L. Schoenfeld (théorème 1.6.1) montré le,

Théorème 3.6.1 *:*
Sous l'hypothèse de Riemann on a,

$$(i) \quad \left|\theta(p_k) - Li^{-1}(k)\right| \leqslant 0.1224k^{\frac{1}{2}}(\log k)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{pour } k \geqslant 312 \tag{3.6.1}$$

$$(ii) \quad \left|\theta(p_k) - Li^{-1}(k)\right| \leqslant 0.2377k^{\frac{1}{2}}(\log k)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{pour } k \geqslant 5 \tag{3.6.2}$$

$$(iii) \quad \theta(p_k) \geqslant Ii^{-1}(k) - 0.12k^{\frac{1}{2}}(\log k)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{pour } k \geqslant 5 \tag{3.6.3}$$

Preuve :
Pour la démonstration, nous aurons besoin du lemme suivant,

Lemme 3.6.1 *On a,*

$$(i) \quad p_k \leqslant 1.14k\log k, \quad \text{pour } k \geqslant 8602 \tag{3.6.4}$$

$$(ii) \quad \log p_k \leqslant 1.2518\log k, \quad \text{pour } k \geqslant 12481 \tag{3.6.5}$$

Et sous l'hypothèse de Riemann on a,

$$(iii) \left|\int_2^{p_k} \frac{\pi(t) - Li(t)}{t}dt + 2 - Li(2)\log 2\right| \leqslant 0.10636k^{\frac{1}{2}}(\log k)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{pour} k \geqslant 12481 \tag{3.6.6}$$

Démonstration du lemme 3.6.1

Preuve de (3.6.4).
La fonction $k \to \dfrac{\log\log k - 0.9385}{\log k}$ *est décroissante pour* $k \geqslant \exp(\exp(1.9385))$, *donc*

$$\frac{\log\log k - 0.9385}{\log k} \leqslant \frac{\log\log(8602) - 0.9385}{\log(8602)} = 0.14 \quad \text{pour } k \geqslant 8602 > \exp(\exp(1.9385)).$$

En multipliant la dernière inégalité par $k\log k$ *on obtient,*

$$k(\log\log k - 0.9385) \leqslant 0.14k\log k,$$

d'où,

$$k(\log k + \log\log k - 0.9385) \leqslant 1.14k\log k,$$

et en utilisant l'inégalité (3.5.1) on obtient,

$$p_k \leqslant 1.14k\log k \qquad \textit{pour } k \geqslant 7750 \quad \square$$

Preuve de (3.6.5),

Par la même méthode précédente on obtient pour $k \geqslant 12481$,

$$\frac{\log\log k - (-\log(1.14))}{\log k} \leqslant \frac{\log\log(12481) - (-\log(1.14))}{\log(12481)} = 0.25179...$$

ce qui implique,

$$\log(1.14k\log k) \leqslant 1.2518\log k$$

et par l'inégalité (3.6.4) *on a pour* $k \geqslant 12481$,

$$\log p_k \leqslant \log(1.14k\log k) \leqslant 1.2518\log k$$

Preuve de (3.6.6)

En remplaçant x et x_0 respctivement par p_k et $p_{384} = 2657$, dans la relation (2.2.57) on obtient, pour $k \geqslant 384$,

$$\begin{aligned}\left|\int_2^{p_k} \frac{\pi(t) - Li(t)}{t}dt + 2 - Li(2)\log 2\right| \leqslant& \int_{2657}^{p_k} \frac{|\pi(t) - Li(t)|}{t}dt \\ &+ \left|-\int_2^{2657} \frac{\pi(t) - Li(t)}{t}dt + Li(2)\log 2 - 2\right|\end{aligned} \tag{3.6.7}$$

or d'après (2.2.58) on a,

$$\begin{aligned}\left|-\int_2^{2657} \frac{\pi(t) - Li(t)}{t}dt + Li(2)\log 2 - 2\right| &= |\theta(2657) - 2657 - (\pi(2657) - Li(2657))\log 2657| \\ &\simeq 33.1172.\end{aligned} \tag{3.6.8}$$

En appliquant le théorème 1.6.1, *puis les inégalités* (3.6.4) *et* (3.6.5), *il vient pour tout* $k \geqslant 12481$,

$$\int_{2657}^{p_k} \frac{|\pi(t) - Li(t)|}{t}dt \leqslant \frac{1}{8\pi}\int_{2657}^{p_k} \frac{\log t}{\sqrt{t}}dt \leqslant 2\frac{1}{8\pi}(\log p_k)\int_{2657}^{p_k} \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

$$\leqslant \frac{1}{4\pi}\left(\sqrt{1.14}k^{\frac{1}{2}}(\log k)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2657}\right)1.2518\log k$$

$$\leqslant 0.10636k^{\frac{1}{2}}(\log k)^{\frac{3}{2}}-5.1348\log k, \tag{3.6.9}$$

l'inégalité (3.6.7) *s'écrit grâce à* (3.6.8) *et à* (3.6.9),

$$\left|-\int_2^{p_k}\frac{\pi(t)-Li(t)}{t}dt+Li(2)\log 2-2\right|\leqslant 0.10636k^{\frac{1}{2}}(\log k)^{\frac{3}{2}}-5.1348\log k+33.1172 \quad \textit{pour } k\geqslant 12481$$

or pour $k\geqslant \exp\left(\frac{33.1172}{5.1348}\right)\simeq 633$ *on a,*

$$33.1172-5.1348\log k\leqslant 0$$

donc,

$$\left|-\int_2^{p_k}\frac{\pi(t)-Li(t)}{t}dt+Li(2)\log 2-2\right|\leqslant 0.10636k^{\frac{1}{2}}(\log k)^{\frac{3}{2}} \quad \textit{pour } k\geqslant 12481,$$

Démonstration du théorème 3.6.1.
En utilisant les inégalités (2.2.52) et (3.6.4) *on obtient,*

$$Li^{-1}(k)\geqslant \frac{1}{c_4}k\log k=\frac{1}{1.14c_4}1.14k\log k\geqslant \frac{1}{1.14c_4}p_k, \quad \textit{pour } k\geqslant 28622,$$

ceci implique pour $k\geqslant 28622$,

$$\log Li^{-1}(k)\geqslant \log p_k-\log(1.14c_4). \tag{3.6.10}$$

Nous distinguons alors les deux cas suivants :

$$(\pi(p_k)-Li(p_k))\leqslant 0 \quad \textit{et} \quad (\pi(p_k)-Li(p_k))>0$$

Si $(\pi(p_k)-Li(p_k))\leqslant 0$, (3.6.10), *implique pour* $k\geqslant 28622$,

$$-(\pi(p_k)-Li(p_k))\log Li^{-1}(k)\geqslant -(\pi(p_k)-Li(p_k))\log p_k+(\pi(p_k)-Li(p_k))\log(1.14c_4)$$

ce qui entraîne par la relation (2.2.55) que pour $x=p_k$ *on a,*

$$-(\pi(p_k)-Li(p_k))\log Li^{-1}(k)+\theta(p_k)-p_k\geqslant -(\pi(p_k)-Li(p_k))\log p_k+(\pi(p_k)-Li(p_k))\log(1.14c_4)$$

$$+(\pi(p_k)-Li(p_k))\log p_k-\int_2^{p_k}\frac{\pi(t)-Li(t)}{t}dt$$
$$-2+Li(2)\log 2$$
$$=(\pi(p_k)-Li(p_k))\log(1.14c_4)-\int_2^{p_k}\frac{\pi(t)-Li(t)}{t}dt$$
$$-2+Li(2)\log 2$$

L'inégalité (2.2.79) implique,

$$\theta(p_k)-Li^{-1}(k)+\int_2^{p_k}\frac{\pi(t)-Li(t)}{t}dt+2-Li(2)\log 2\geqslant(\pi(p_k)-Li(p_k))\log(1.14c_4)$$

et grâce à l'inégalité (2.2.80) on déduit que pour $k\geqslant 28622$,

$$\left|\theta(p_k)-Li^{-1}(k)+\int_2^{p_k}\frac{\pi(t)-Li(t)}{t}dt+2-Li(2)\ln\log 2\right|\leqslant|(\pi(p_k)-Li(p_k))|\log(1.14c_4)\quad(3.7.11)$$

Si $(\pi(p_k)-Li(p_k))>0$, alors l'inégalité (2.2.82) est vérifiée.
Par suite en comparant entre les inégalités (3.6.11) *et (2.2.82) , on obtient, pour tout $k\geqslant 28622$,*

$$\left|\theta(p_k)-Li^{-1}(k)+\int_2^{p_k}\frac{\pi(t)-Li(t)}{t}dt+2-Li(2)\ln\log 2\right|\leqslant\log(1.14c_4)|(\pi(p_k)-Li(p_k))|$$
$$\leqslant\log(1.29)|(\pi(p_k)-Li(p_k))|$$

ce qui implique grâce au théorème 1.6.1 *que,*

$$\left|\theta(p_k)-Li^{-1}(k)\right|\leqslant\frac{\log(1.29)}{8\pi}\sqrt{p_k}\log p_k+\left|\int_2^{p_k}\frac{\pi(t)-Li(t)}{t}dt+2-Li(2)\log 2\right|\quad(3.6.12)$$

Par le lemme 3.6.1 et l'inégalité (3.6.12) *valable pour $k\geqslant 28622$, on obtient,*

$$\left|\theta(p_k)-Li^{-1}(k)\right|\leqslant\frac{\log(1.29)}{8\pi}1.2518\sqrt{1.14}k^{\frac{1}{2}}(\log k)^{\frac{3}{2}}+0.10636k^{\frac{1}{2}}(\log k)^{\frac{3}{2}}$$
$$\leqslant\left(1.354\,2\times10^{-2}+0.10636\right)k^{\frac{1}{2}}(\log k)^{\frac{3}{2}}$$
$$\leqslant 0.12k^{\frac{1}{2}}(\log k)^{\frac{3}{2}}\quad(3.6.13)$$

d'où l'on déduit pour tout $k\geqslant 28622$, les inégalités (3.6.2) et (3.6.1).

D'autre part, l'inégalité (3.6.13) est equivalente à,

$$-0.12k^{\frac{1}{2}}(\log k\ )^{\frac{3}{2}} \leqslant \theta(p_k) - Li^{-1}(k) \leqslant 0.12k^{\frac{1}{2}}(\log k\ )^{\frac{3}{2}} \qquad \textit{pour } k \geqslant 28622,$$

ce qui entraîne,

$$\theta(p_k) \geqslant Li^{-1}(k) - 0.12k^{\frac{1}{2}}(\log k\ )^{\frac{3}{2}}$$

d'où l'inégalité (3.6.3) *pour* $k \geqslant 28622$.

Pour $5 \leqslant k \leqslant 28622$, *nous la vérifions à l'ordinateur.*

Annexe

Calculs numériques

Dans ce qui suit nous donnons les procédures écrites à l'aide de Mathemtica, qui nous ont permis de tracer les répresentations graphiques, pour compléter les démonstrations des théorèmes (3.2.1, 3.3.1, 3.4.1, 3.5.1 et 3.6.1) .

Notons que ces procédures ont été éxecutées à l'aide d'un ordinateur (Core de Duo, 2.00 GHz, 1.99 Go de RAM). Nous avons effectué les calculs des valeurs de $\theta(p_k)$ pour $2 \leqslant k \leqslant 200000$ et les valeurs de p_k pour $2 \leqslant k \leqslant 10^6$. Sans doute, nous pouvons améliorer les calculs plus loin ($k > 10^6$) avec un ordinateur plus puissant.
Les procédures pour tracer les répresentations graphiques (voir les figures 1-1, 1-2, ...et 11-4) respctivement sont :

1-1 DiscretePlot[$\sum\limits_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]]-k*(Log[k] + Log[Log[k]] - 1.0), {k, 2, 25000}]

1-2 DiscretePlot[$\sum\limits_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]]-k*(Log[k] + Log[Log[k]] - 1.0), {k, 2, 5210}]

1-3 DiscretePlot[$\sum\limits_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]]-k*(Log[k] + Log[Log[k]] - 1.0), {k, 2, 60}]

1-4 DiscretePlot[$\sum\limits_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]]-k*(Log[k] + Log[Log[k]] - 1.0), {k, 5100, 5110}]

2-1 DiscretePlot[$\sum\limits_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]]-k*(Log[k] + Log[Log[k]] - 1.076868), {k, 2, 5105}]

2-2 DiscretePlot[$\sum\limits_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]]-k*(Log[k] + Log[Log[k]] - 1.076868), {k, 2, 300}]

2-3 DiscretePlot[$\sum\limits_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]]-k*(Log[k] + Log[Log[k]] - 1.076868), {k,50, 80}]

3-1 DiscretePlot[$\sum_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]]- k (Log[k] + Log[Log[k]] - 1 + (Log[Log[k]] - 2.1453)/Log[k]), {k, 3, 200000}]

3-2 DiscretePlot[$\sum_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]]- k (Log[k] + Log[Log[k]] - 1 + (Log[Log[k]] - 2.1453)/Log[k]), {k, 3, 15000}]

3-3 DiscretePlot[$\sum_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]]- k (Log[k] + Log[Log[k]] - 1 + (Log[Log[k]] - 2.1453)/Log[k]), {k, 3000, 5000}]

3-4 DiscretePlot[$\sum_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]]- k (Log[k] + Log[Log[k]] - 1 + (Log[Log[k]] - 2.1453)/Log[k]), {k, 4653, 4750}]

4-1 DiscretePlot[$\sum_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]]- k (Log[k] + Log[Log[k]] - 1 + (Log[Log[k]] - 1.9185)/Log[k]), {k, 2, 7022}]

4-2 DiscretePlot[$\sum_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]]- k (Log[k] + Log[Log[k]] - 1 + (Log[Log[k]] - 1.9185)/Log[k]), {k, 120, 200}]

5-1 DiscretePlot[Prime[k]-k*(Log[k] + Log[Log[k]] - 0.9645), {k, 2, 70000}]

5-2 DiscretePlot[Prime[k]-k*(Log[k] + Log[Log[k]] - 0.9645), {k, 70000, 1000000}]

6-1 DiscretePlot[Prime[1000000 + 100 (k + 1)] - (1000000 + 100 k)*(Log[1000000 + 100 k] + Log[Log[1000000 + 100 k]] - 0.9465), {k, 0, 101000}]

6-2 DiscretePlot[Prime[11100000 + 2500 (k + 1)] - (11100000 + 2500 k)*(Log[11100000 + 2500 k] + Log[Log[11100000 + 2500 k]] - 0.9465), {k, 0 ,791560}]

6-3 DiscretePlot[Prime[11100000 + 2500 (k + 1)] - (11100000 + 2500 k)*(Log[11100000 + 2500 k] + Log[Log[11100000 + 2500 k]] - 0.9465), {k, 0 ,50000}]

7-1 DiscretePlot[$\sum_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]]-k*(Log[k] + Log[Log[k]] - 0.9645), {k, 2, 30000}]

7-2 DiscretePlot[$\sum_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]]-k*(Log[k] + Log[Log[k]] - 0.9645), {k, 2, 600}]

7-3 DiscretePlot[$\sum_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]]-k*(Log[k] + Log[Log[k]] - 0.9645), {k, 2, 20}]

8 sol = FindRoot[LogIntegral[a] == n, {a, 2}];

8-1 DiscretePlot[Abs[$\sum_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]] - Evaluate[Re[a /. sol]]] - 0.12 Sqrt[n*Log[n]] Log[n], {n, 1000, 28700}]

8-2 DiscretePlot[Abs[$\sum_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]] - Evaluate[Re[a /. sol]]] - 0.12 Sqrt[n*Log[n]] Log[n], {n, 3, 1000}]

8-3 DiscretePlot[Abs[$\sum_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]] - Evaluate[Re[a /. sol]]] - 0.1224 Sqrt[n*Log[n]] Log[n], {n, 300, 350}]

8-4 DiscretePlot[Abs[$\sum_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]] - Evaluate[Re[a /. sol]]] - 0.2377 Sqrt[n*Log[n]] Log[n], {n, 3, 312}]

8-5 DiscretePlot[Abs[$\sum_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]] - Evaluate[Re[a /. sol]]] - 0.2377 Sqrt[n*Log[n]] Log[n], {n, 3, 40}]

8-6 DiscretePlot[$\sum_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]] - Evaluate[Re[a /. sol]] + 0.12 Sqrt[n*Log[n]] Log[n], {n, 2, 350}]

8-7 DiscretePlot[$\sum_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]] - Evaluate[Re[a /. sol]] + 0.12 Sqrt[n*Log[n]] Log[n], {n, 2, 20}]

9-1 DiscretePlot[Prime[k]-k*(Log[k] + Log[Log[k]] - 1.0), {k, 2, 5105}]

9-2 DiscretePlot[Prime[k]-k*(Log[k] + Log[Log[k]] - 1.0), {k, 2, 51}]

10-1 DiscretePlot[$\sum_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]]-k*Log[k] , {k, 1, 113}]

10-2 DiscretePlot[$\sum_{i=1}^{k}$Log[Prime[i]]-k*Log[k] , {k, 8, 18}]

11-1 DiscretePlot[Prime[k]-k*(Log[k] + Log[Log[k]] - 0.9385), {k, 7022, 70000}]

11-2 DiscretePlot[Prime[k]-k*(Log[k] + Log[Log[k]] - 0.9385), {k, 70000, 1000000}]

11-3 DiscretePlot[Prime[k]-k*(Log[k] + Log[Log[k]] - 0.9385), {k, 8602, 9000}]

11-4 DiscretePlot[Prime[k]-k*(Log[k] + Log[Log[k]] - 0.9385), {k,8582, 8640}]

Graphes

graphe de la suite $\varphi(k) = \theta(p_k) - k(\log k + \log\log k - 1.076868)$

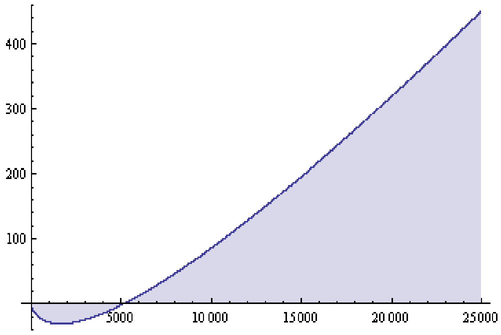

Figure 1-1

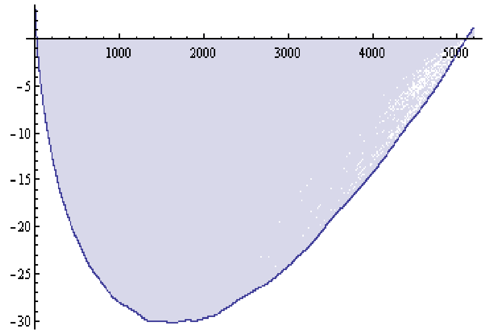

Figure 1-2

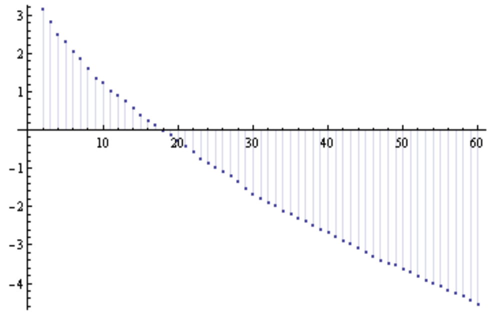

Figure 1-4

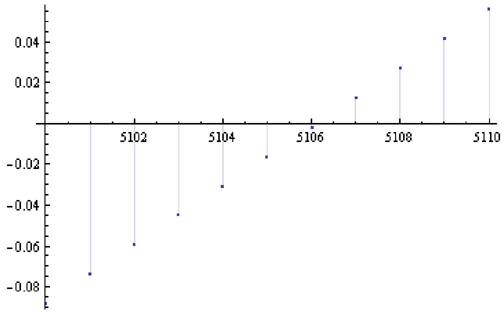

Figure 1-3

graphe de $\psi(k) = \theta(p_k) - k(\log k + \log\log k - 1.076868)$

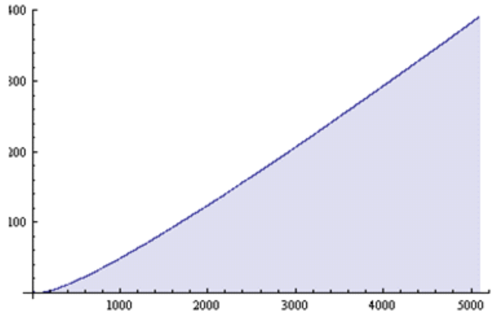

Figure 2-1

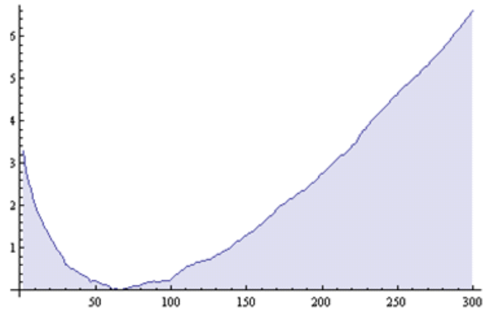

Figure 2-2

graphe de $\psi(k) = \theta(p_k) - k(\log k + \log\log k - 1.076868)$

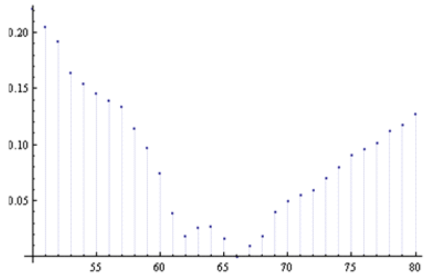

Figure 2-3

graphes de $f(k) = \theta(p_k) - k\left(\log k + \log\log k - 1 + \dfrac{\log\log k}{\log k} - \dfrac{2.1454}{\log k}\right)$

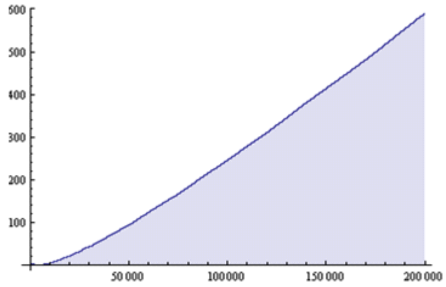

Figure 3-1

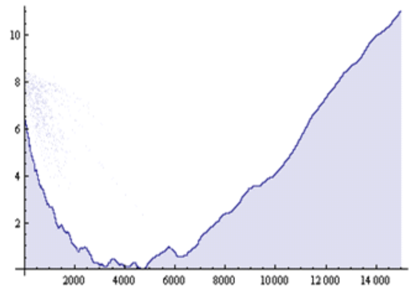

Figure 3-2

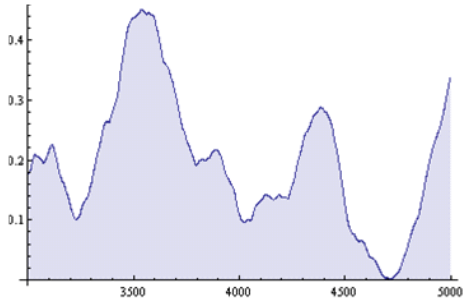

Figure 3-3

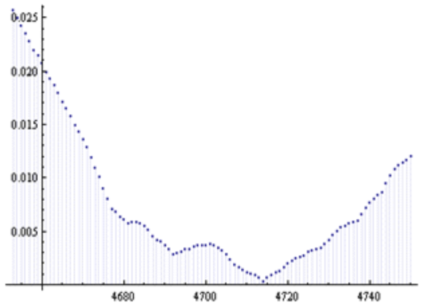

Figure 3-4

graphes de $f(k) = \theta(p_k) - k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k}{\log k} - \frac{1.9185}{\log k}\right)$

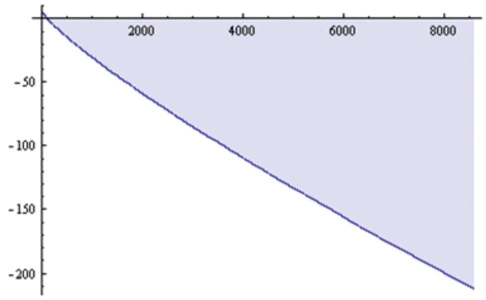

Figure 4-1

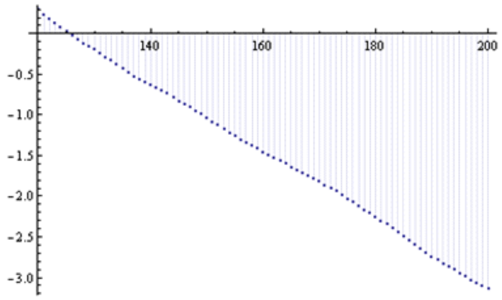

Figure 4-2

graphes de $\varphi(k) = \ p_k - k(\log k + \log\log k - 0.9465)$

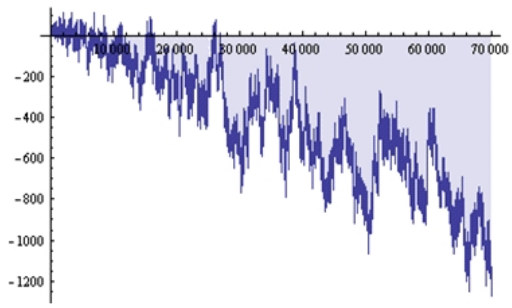

Figure 5-1

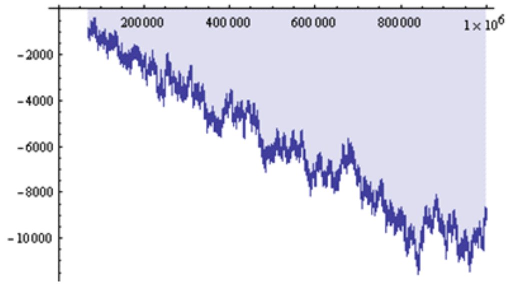

Figure 5-2

graphe de $f(k) = p_{p+q(k+1)} - (p+qk)(\log(p+qk) + \log\log(p+qk) - 0.9465)$ pour $p = 10^6, q = 100$

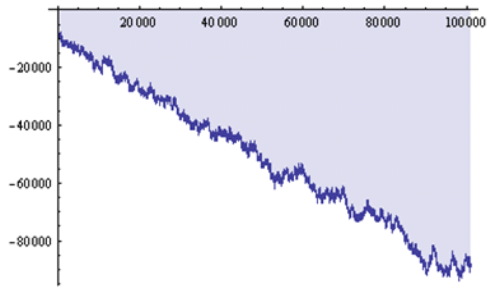

Figure 6-1

graphes de $f\left(k\right)=p_{p+q(k+1)}-\left(p+qk\right)\left(\log\left(p+qk\right)+\log\log\left(p+qk\right)-0.9465\right)$

pour $p=1.11\times10^{7},q=2500$

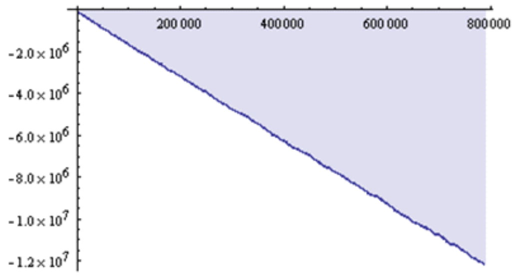

Figure 6-2

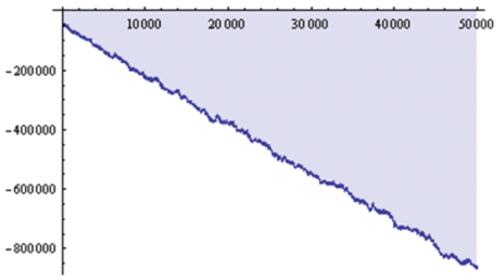

Figure 6-3

graphe de $f\left(k\right)=\ \theta\left(p_{k}\right)-k\left(\log k+\log\log k-0.9465\right)$

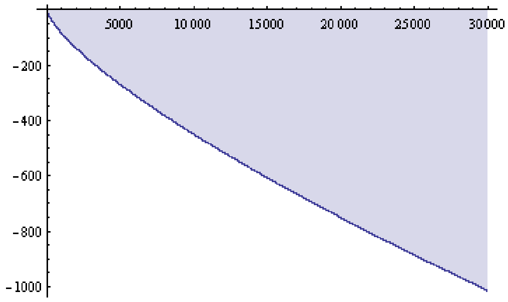

Figure 7-1

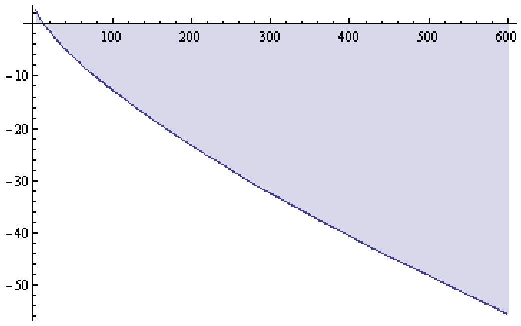

Figure 7-2

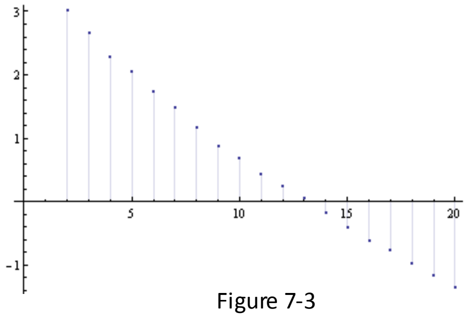

Figure 7-3

graphes de $f\left(k\right)=\left|\theta\left(p_{k}\right)-Li^{-1}\left(k\right)\right|-0.12k^{\frac{1}{2}}\left(\log k\ \right)^{\frac{3}{2}}$

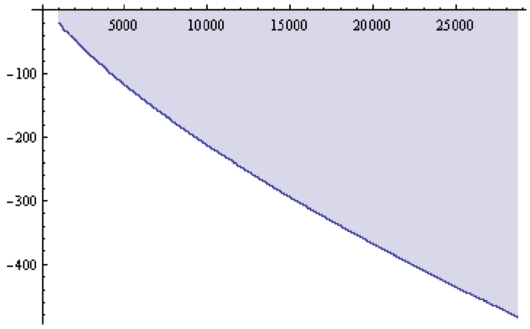

Figure 8-1

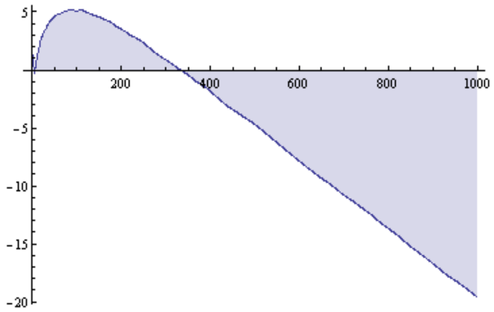

Figure 8-2

graphe de $f\left(k\right)=\left|\theta\left(p_{k}\right)-Li^{-1}\left(k\right)\right|-0.1224k^{\frac{1}{2}}\left(\log k\ \right)^{\frac{3}{2}}$

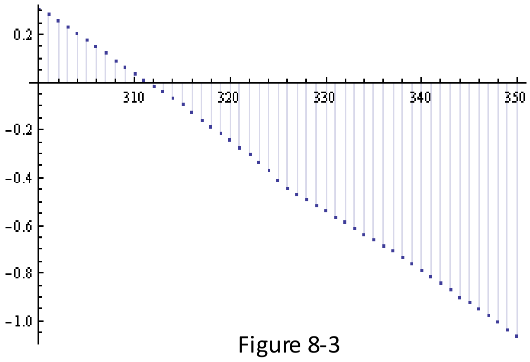

Figure 8-3

graphes de $f\left(k\right)=\left|\theta\left(p_{k}\right)-Li^{-1}\left(k\right)\right|-0.2377k^{\frac{1}{2}}\left(\log k\ \right)^{\frac{3}{2}}$

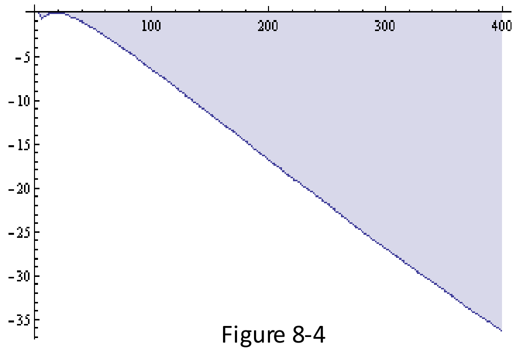

Figure 8-4

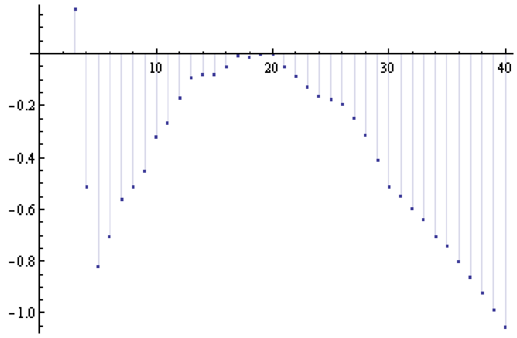

Figure 8-5

graphe de $f(k) = \theta(p_k) - Li^{-1}(k) + 0.12k^{\frac{1}{2}}(\log k)^{\frac{3}{2}}$

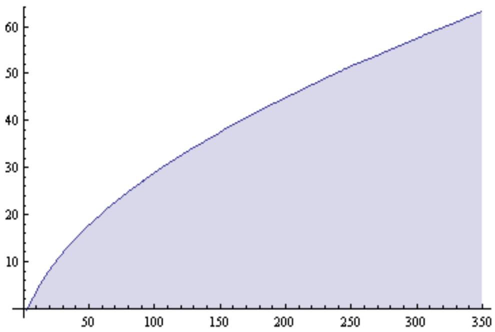

Figure 8-6

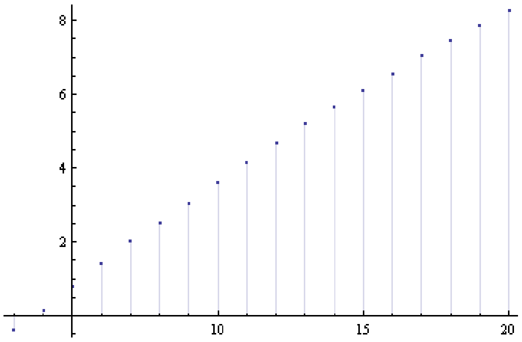

Figure 8-7

graphes de $f(k) = p_k - k(\log k + \log\log k - 1)$

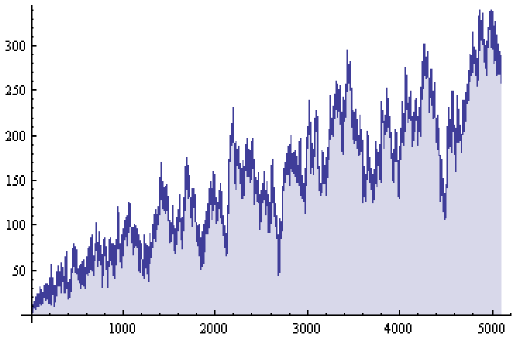

Figure 9-1

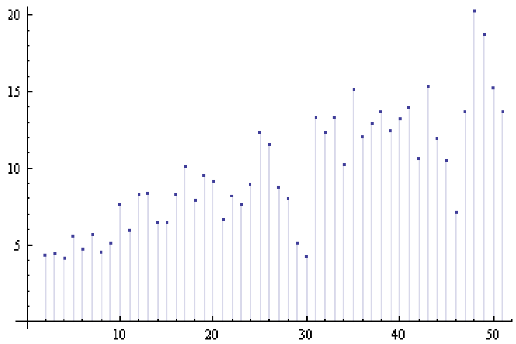

Figure 9-2

graphes de $f(k) = \theta(p_k) - k\log k$

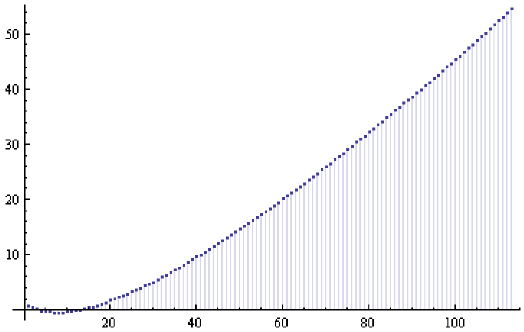

Figure 10-1

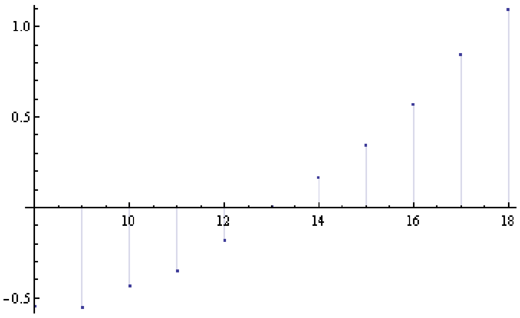

Figure 10-2

graphes de $f(k) = p_k - k(\log k + \log\log k - 0.9385)$

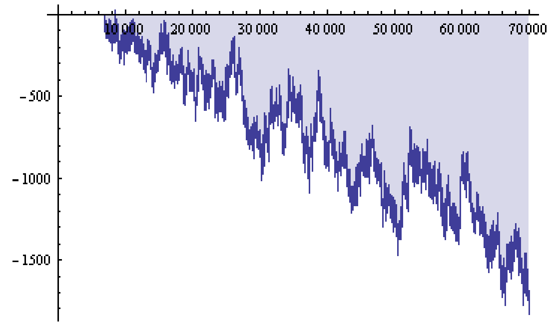

Figure 11-1

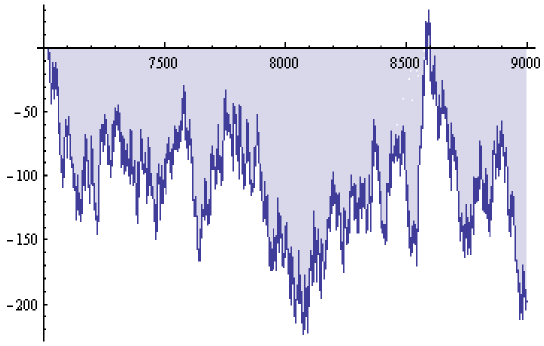

Figure 11-2

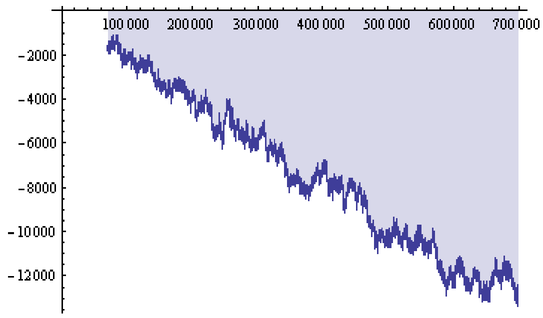

Figure 11-3

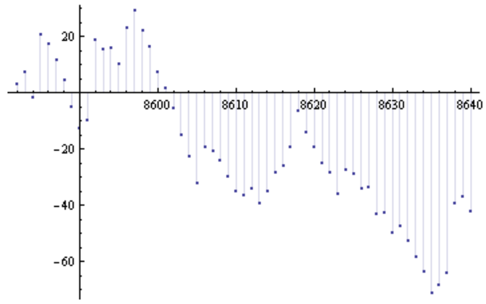

Figure 11-4

Conclusion

L'étude du comportement asymptotique et de l'encadrement de la fonction de Tchebychef θ sur le $k^{ème}$ nombre premier sous diverses hypothèses sur $\pi(x)$, a fait l'objet de plusieurs articles, nous citerons ceux de J. B. Rosser et L. Schoenfeld.

G. Robin a, dans sa thèse de Doctorat, amélioré sensiblement les résultats de ces auteurs, en donnant des encadrements explicites de p_k et de $\theta(p_k)$.

Nous avons repris les résultats de celui-ci et détaillé leurs démonstrations. Nous nous sommes inspirés des méthodes et des idées développées par les auteurs cités précédemment pour prouver certains de ces réultats d'une autre façon, cependant, les résultats que nous avons obtenus n'ont pas apporter d'améliorations pour le moment.

Notre ambition dans la suite de notre tavail de recherche dans le cadre du Doctorat, est de préciser et améliorer quelques uns des résultats dûs à G. Robin.

Notons enfin, que pour complèter dans certains cas, les preuves de certains théorèmes, l'outil informatique nous a été indisponsable. Nous avons pour cela utilisé Mathématica pour nos calculs et les représentations graphiques des fonctions considérées.

Bibliographie

[1] T. M. APOSTOL. – Introduction to analytic Number *theory. Undergradurt texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1976.*

[2] P. T. Bateman, S. Chowla and P. Erdos. – Remarks on the size of $L(1, \chi)$, Publ. Math. (Debrecen) 1(1950), pp. 165-182.

[3] J. BOHMAN. – On the number of primes less than a given limit, BIT, Vol. 12 (1972), pp. 576-588.

[4] R. B. BRENT. – Irregularities in the Distribution of primes and twin primes, Math Of Computation, Vol. 29, Number 129 (January 1975), pp. 43-56. UMT, Math Of Computation, Vol. 30, Number 134 (April 197), p379.

[5] M. CIPOLLA. – La determinazione assintotica dell' n^{imo} numero primo, Matematiche Napoli, Vol. 3 (1902), pp. 132-166.

[6] M. DELEGLISE, & J. RIVAT. – Computing $\pi(x)$: The Meissel, Lehmer, Lagarias, Miller, Odlyzko method, Math Of Computation, Vol. 65, Number 213 (J*anuary* 1996), pp. 235-245.

[7] P. DUSART. – The k^{th} prime is greater than $k(\log k + \log\log k - 1)$ for $k \geqslant 2$, Math Of Computation, Vol. 68, Number 225 (J*anuary* 1999), pp. 411-415.

[8] P. DUSART. – Autour de la fonction qui compte le nombre de nombres premiers, Thèse de Doctorat de l'Université de Limoges 1998.

[9] H . G . DIAMOND. – Elementary methods in the study of the distribution of prime numbres*, Bulletin of A.M.S, Vol. 7, Number 3 (Novembre 1982), pp. 553-589.*

[10] E . EHRHART. – On prime numbres*, Fibonacci Quarterly (Août 1982).*

[11] W.J. ELLISON & M. MANDES FRANCE. – *Les nombres premiers, Hermann, paris (1975).*

[12] D. HADAMARD, J. – Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. Bull. Soc Math.France, 24: (1896), pp. 199-220.

[13] D. HANSON. – On the products of primes, Canad. Math. Bull. 15 (1972), pp. 33-37

[14] G. H. HARDY and S. Ramanujan. – The normal numbr of prime factors of a numbre n, Quart. Journ. Math. 48 (1917), pp 76-92 et S. Ramanujan *Collected papers, Chelsea, pp. 262-275.*

[15] G. H. HARDY and E. M. WRIGHT. – *An introduction to the theory of numbres, Oxford 1960.*

[16] A. E. Ingham. – The Distribution of Prime Numbrs *Cambridge Tract No. 30, 1932, London.*

[17] J. C. LAGARIAS, V. S. MILLER & A. M. ODLYZKO. – Computing $\pi(x)$: The Meissel-Lehmer method, Math Of Computation, Vol. 44, Number 170 (April 1985), pp. *537-560.*

[18] J. L. NICOLAS. – Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan, *Canad. J. Math. 23 (1) (1971), PP. 116-130.*

[19] J. L. NICOLAS & G. ROBIN. – *Majorations explicites pour le nombre de diviseurs de N, Canad. Math. Bull. Vol 26 (4) 1983 pp. 485-492.*

[20] K. NORTON. – Numbres with small prime factors, and the least k-th power non residue, Memoir of the Amer. Math. Sos. Numb. 106 *(1971).*

[21] K. NORTON. – On the numbre of restricted prime factors of an integer III, perprint.

[22] J. P. MASSIAS & G. ROBIN. – Minoration de p_k, Compte rendu du congrés de théorie de nombre de BRUNSWICK (USA), *(1988).*

[23] J. P. MASSIAS & G. ROBIN. – Bornes effectives pour certaines fonctions concernant les nombres premier, Jornal de Théorie de Nombres de Bordaux 8 *(1996). pp. 213-238.*

[24] N . COSTA PEREIRA. – Estimates for the Chebyshev functions $\varphi(x) - \theta(x)$, Math. Of Computation, Vol. 44, Number 169 (January 1985), pp. *211-221.*

[25] S. Ramanujan. – *Highly composite numbers, Proc. London Math. Soc. Serie 2, 14, (1915), 347-409. Collected papers, Cambridge University .* Press, 1927, 78-128.

[26] B . RIEMANN. – 1859 Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée Monatsberichte der berliner Akademie, Oeuvres de Riemann (Albert Blanchard, paris 1968) p. 165-176.

[27] G. ROBIN. – Estimation de la *fonction de Tchebychef* θ sur le k^{iéme} *nombre premier et grandes valeurs de la fonction* $\omega(n)$ *nombres de diviseurs premiers de n, Acta Arithmetica, vol. 42, numéro 4 (1983) pp. 367-389*

[28] G. ROBIN. – *Grandes valeurs de la fonctions arithmétiques et Problèmes d'optimisation en nombres entiers.* Thèse de Doctorat. Limoges 10 Mars 1983.

[29] G. ROBIN. – Majoration explicites du nombre de diviseurs d'un entier, Publ. Dept. Math. Limoges, 2, 1980, 6 pages.

[30] J. B. ROSSER. – *The n-th prime is greather than* $n \log n$, *Proc London Math. Soc. (2), 45 (1939), pp. 21-44*

[31] J. B. ROSSER. – *Explicit bounds for som functions of prime numbres, Amer. J. Math. 63 (1941) pp. 211-232.*

[32] J. B. ROSSER and L. SCHOENFELD. – Approximate formulas for som functions of prime numbres. Illinois Journ. 6 (1962) pp. 64-94.

[33] J. B. ROSSER and L. SCHOENFELD. – Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ *and* $\varphi(x)$, *Math. of Comp.Vol. 29, Numb. 129, Jan. 1975, pp 243-269*

[34] L . SCHOENFELD. – Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ *and* $\varphi(x)$ *II, ibid. Vol. 30, Numb. 134, April. 1976 ,pp. 337-360.*

[35] S . SKEWES. – On the difference $\pi(x) - Ii(x)$*, Proc. Lond. Math. Soc. V 1955, pp. 48-70.*

[36] G . TENENBAUM. – Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres, Offilib, Paris (1990).

[37] LA VALLÉE POUSSIN. – Ch de la (1896) Recherches analytiques sur la théorie d*es nombres premiers.Ann. Soc. Sci. Bruxelles,* $20_2 : 183 - 256, 281 - 297$.