

N° D'ORDRE :

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENE »
FACULTE DE MATHEMATIQUES



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En: Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle (Mathématiques de Gestion)

Par : **CHERGUI Zhor**

Sujet en

Evaluation De Méthodes Multicritère: Etude Et Application

Soutenu le 16 /03 /2010, devant le jury composé de:

Mr- AIDER Méziane	Professeur	Président ;
Mr- ABBAS Moncef	Professeur	Directeur de thèse ;
Mr- CHAABANE Djamel	Maître de Conférences	Examineur ;
Mr- CHERGUI M ^{ed} Amine	Chargé de Recherches	Invité.

Remerciements

Je tiens tout particulièrement à remercier Mr. ABBAS Moncef pour l'encadrement de ce mémoire, leur disponibilité au quotidien, leur patience, leurs précieux conseils et leurs commentaires constructifs tout au long de la rédaction de ce travail.

Je voudrais remercier également les membres du jury :

Mr. AIDER Meziane, professeur à l'USTHB, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury ;

Mr. CHAABANE Djamel, qui a bien voulu examiner mon travail et être membre de ce jury ;

Mr. CHERGUI M^{ed} Amine , chargé de recherche à l'USTHB, pour avoir accepté notre invitation et participé à ce jury

Mais surtout, un tout grand merci à mes parents, qui m'ont donné l'opportunité d'accomplir ces études dans les meilleures conditions et qui m'ont toujours soutenue et encouragée.

Enfin, merci à mes frères, ma sœur, mes amis, mes collègues de travail et toute personne qui, de près ou de loin, a contribué à l'accomplissement de cette thèse.

Dédicaces

A mes parents ;

A mes frères ;

A ma sœur.

Table des matières

Introduction	7
1 Généralités	11
1.1 Introduction	11
1.2 De l'unicritère vers le multicritère	12
1.2.1 Le modèle unicritère	12
1.2.2 Le modèle multicritère	16
1.2.3 Elaboration de modèles [12]	16
2 Etat de l'art sur les méthodes d'aide multicritère à la décision et leur évaluation	28
2.1 Introduction	28
2.2 Méthodes d'aide multicritère à la décision	29
2.2.1 Les méthodes de surclassement [21]	29
2.2.2 Le modèle additif	42
2.2.3 La méthode AHP	43
2.3 Quelques travaux sur l'évaluation des méthodes multicritères	45
2.3.1 L'évaluation de quelques méthodes multidimensionnelles	45
2.3.2 L'évaluation de l'AHP et quelques méthodes de ses variantes	46
2.3.3 L'évaluation de quelques méthodes Electre	47

2.3.4 Synthèse sur l'analyse de performance de quelques méthodes d'aide multicritère à la décision	48
3 Étude critique et résultats	51
3.1 Introduction	51
3.2 Étude de la performance du premier test de critère	51
3.2.1 Cas d'une relation d'indifférence	52
3.2.2 Exemples	55
3.2.3 Cas d'une relation d'incomparabilité	61
3.2.4 Exemple	63
3.3 Critères qualitatifs	66
3.3.1 Cas général	66
3.4 Critères quantitatifs	69
3.4.1 Critère linéaire	69
3.4.2 Critère linéaire avec indifférence	73
3.4.3 Critère gaussien	75
3.5 autres résultats	77
3.5.1 Critères quantitatifs	77
3.5.2 Critères qualitatifs	77
3.6 L'amélioration proposée	78
3.6.1 Algorithme	78
3.6.2 Justification de l'algorithme	79
Conclusion	82
Bibliographie	85

Introduction

De très nombreuses méthodes multicritère ont été élaborées jusqu'à présent et principalement durant la fin des années soixante jusqu'aux années quatre vingt. Actuellement, ces méthodes se répartissent principalement en trois grandes familles ([1], [4], [6], [7], [12]) : Les méthodes de surclassement (ELECTRE, PROMETHEE, ...), les méthodes interactives basées essentiellement sur la programmation multiobjectif (STEM, Vincke, ...) et les méthodes basées sur la théorie de l'utilité multi-attribut (UTA, ...). Une bonne part de ces méthodes ont été utilisées pour résoudre des cas concrets. Cependant, vu que l'étude comparative entre ces méthodes n'a pas de sens car les contextes dans lesquels fonctionnent sont différents, il serait alors judicieux d'étudier séparément la performance de chacune de ces méthodes. Sur ce dernier plan, il est à noter que très peu de travaux ont été réalisés dans la littérature.

Une analyse minutieuse des travaux de recherche réalisés sur la performance des méthodes multicritères d'aide à la décision, fait ressortir que la plupart de ceux-ci se focalisent principalement sur l'AHP ([16], [17], [19]) et ses variantes. Cette catégorie est caractérisée par sa robustesse devant les tests de performance existants dans la littérature. Contrairement aux méthodes Electre ([2], [3]) et AHP, abondamment utilisées, peu de travaux ont été consacrés à l'étude de la performance avec d'autres méthodes (Prométhée, UTA, STEM, ...etc).

La performance des méthodes d'aide multicritère à la décision reste toujours un problème ouvert suscitant un fort engouement des chercheurs. E.Triantaphylou([16], [17], [23], [24]), à travers des contributions personnelles et collectives, a présenté de nombreux tests de critères qui permettent de résoudre ce problème. Dans l'article qu'il a réalisé conjointement avec X. Wang ([23], [24]), il a détaillé trois tests de critère qui examinent la fiabilité de la procédure de rangement qui caractérise la méthode utilisée, ces trois tests forment une série de tests considérée suffisante dans le jugement de la fiabilité d'une méthode d'aide multicritère à la décision. Dans d'autres travaux de recherche [17], [19], il a expliqué que les tests de critère représentent un moyen très efficace à l'examen de la fiabilité d'une méthode. Plus précisément, on a démontré qu'une méthode est dite non efficace, si elle ne vérifie au minimum un test parmi les trois, et que l'inverse de cette implication est fausse, c'est-à-dire, qu'il est fort probable qu'une méthode n'est pas efficace alors qu'elle passe les trois tests avec succès.

Pour tout travail de recherche, la critique est une suite inéluctable afin de vérifier les résultats proposés, et dans le cas échéant, apporter d'éventuelles modifications ou améliorations. Dans la présente thèse, le travail de critique consiste principalement à évaluer la performance des trois tests de critères.

Le premier chapitre " Généralités " est consacré à la définition de quelques généralités de l'aide multicritère à la décision auxquelles nous faisons appel dans le reste du document.

Dans le deuxième chapitre " État de l'art " nous présentons un récapitulatif des principaux travaux de recherches ayant trait avec le thème étudié.

Le troisième chapitre " Étude critique et résultats " représente la partie la plus impor-

tante de ce travail. En effet, nous avons commencé ce chapitre par une étude critique sur la performance du premier test de critère. Ensuite, une contribution personnelle a été apportée avec l'élaboration d'une nouvelle série de tests de critère qui convient particulièrement avec les méthodes Prométhée.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Introduction

Trouver une localisation pour une nouvelle entreprise, sélectionner des projets de recherche, déterminer le tracé d'une nouvelle autoroute, décider quelle maison ou quelle voiture acheter [15] sont quelques problèmes de décision qui se posent dans la vie de tous les jours.

Une caractéristique humaine face à un problème de décision est de toujours vouloir trouver la meilleure solution possible. Dans le cas où un seul critère est pris en compte (le plus souvent le profit ou le rendement), il s'agit alors de résoudre un problème d'optimisation.

Si l'on choisit de se placer dans une approche multicritère, il n'y a en général pas de solution optimale, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de solution particulière qui optimise tous les critères simultanément en raison de leur caractère conflictuel. Il faut donc envisager des solutions de compromis. L'objet de l'aide multicritère à la décision sera d'aider le décideur à trouver les meilleures décisions de compromis.

Ce premier chapitre est consacré aux définitions auxquelles nous nous rapporterons tout au long de ce mémoire. Le lecteur souhaitant une référence complète pourra consulter ([8], [12], [15]).

1.2 De l'unicritère vers le multicritère

1.2.1 Le modèle unicritère

Le modèle unicritère se formule de la façon suivante :

$$\text{opt}\{f(X) \mid X \in \mathbf{A}\} \quad (1.1)$$

Il apparaît donc comme un problème d'optimisation, et son avantage est de donner lieu à un problème clairement posé. Tous les problèmes classiques de la recherche opérationnelle sont de ce type. Par contre, le modèle unicritère implique que la modélisation des préférences se fasse au moyen d'un critère qui synthétise à lui seul tous les objectifs du décideur et toutes les conséquences de la décision.

D'après Scharlig [15], cette approche est bien adaptée au traitement de certains problèmes techniques, mais présente toutefois de gros inconvénients dans un très grand nombre de cas, surtout lorsque le facteur humain intervient.

Pour bien illustrer le fait que les problèmes unicritères ne sont pas adaptés aux traitements de la réalité humaine, considérons les deux exemples suivants :

Exemple 1

gestion d'un ménage

Considérons un individu qui doit acheter une nouvelle voiture. S'il ne raisonnait que

suyant un seul critère et ne s'intéressait qu'au coût de l'achat (car lorsqu'on ne s'intéresse qu'à un seul critère, c'est souvent l'aspect financier qui l'emporte), il roulerait avec la voiture la moins chère du marché. Or on sait que la réalité est tout autre : on voit toutes sortes de voitures dans les rues, de la moins chère à la plus coûteuse, le chef d'entreprise préférera avoir la voiture la plus confortable et la plus voyante sans vraiment faire attention au prix, le chef de famille voudra un véhicule pratique et assez grand pour emmener toute sa famille, tandis que l'étudiant se contentera de la voiture la moins chère, pourvu qu'elle fonctionne. Cela ne peut s'expliquer que par la prise en compte, dans la tête de chaque individu, d'autres critères en plus du pécuniaire : le confort sous tous ses aspects, la satisfaction personnelle, l'impression produite sur autrui, et ainsi de suite.

Exemple 2

Emplacement d'une nouvelle usine [15]

Considérons un chef d'entreprise qui souhaite construire une usine dans un pays étranger. A première vue, le critère qui intéresse ce dirigeant est le profit à long terme. Mais les critères qui seront retenus ne seront pas forcément ceux qui concernent l'aspect pécuniaire immédiat du problème. Il est par exemple arrivé qu'une entreprise algérienne de mécanique choisisse de construire une nouvelle usine en tunisie - où il est bien connu que les niveaux des salaires sont bien plus élevés que dans les pays limitrophes. Il est donc clair que cette entreprise n'a pas mis la priorité sur la minimisation des coûts de main-d'œuvre. Cette décision peut néanmoins se comprendre en considérant d'autres facteurs : le site choisi avait l'avantage d'être situé non loin de terrains pas trop chers, en vue de la construction de villas pour les employés expatriés, et à proximité d'écoles de tous niveaux en langue française pour leurs enfants. Et cela à été pris en compte au même titre que la proximité d'une autoroute, le raccordement au rail et le fait de s'installer dans une zone industrielle bien équipée. Il s'agit là de critères qui concourent à

la minimisation des problèmes à court terme pour l'entreprise, et qui auront un impact certain sur le profit à long terme.

Ceci nous montre que dans la gestion de tout ménage, pour tout patron qui doit gérer une petite ou moyenne entreprise, et même pour des décisions à prendre dans de grandes entreprises ou dans l'administration, toutes les décisions se jugent sur plusieurs critères.

Propriétés du modèle unicritère

Considérons le modèle unicritère (1.1), où nous supposons, sans perte de généralité, que le critère $f(x)$ doit être maximisé. Nous notons I pour Indifférence et P pour Préférence. Ces notions seront développées plus amplement dans la section suivante. Concernant l'intransitivité de l'indifférence et de la préférence, plusieurs exemples peuvent être trouvés dans [12].

le problème unicritère possède plusieurs propriétés :

- (a) Il s'agit d'un problème mathématiquement bien posé ; la notion de solution optimale a toujours un sens ;
- (b) La relation $\{I, P\}$, qui définit une relation de préférence sur les couples d'éléments de A , est une relation d'ordre ou de préordre complet. Pour rappel, cette structure permet de ranger les actions de la meilleure à la moins bonne, avec éventuellement la présence d'ex aequo. Nous dirons que cet ordre (ou ce préordre) est complet car tous les éléments de A sont comparables deux à deux. Ainsi, nous remarquons que dans le paradigme unicritère, on ne tient jamais compte d'éventuelles incomparabilités.

- (c) Dans le modèle unicritère, nous supposons que les relations P et I sont transitives. Ainsi, ce modèle ne tient pas compte d'une éventuelle intransitivité de ces deux relations.

Objections au modèle unicritère

De ces quelques propriétés du paradigme unicritère définies à la section précédente, on peut directement en déduire quelques objections évidentes. B. Roy les résume par l'expression "hypothèse de complète comparabilité transitive". Les trois critiques principales de l'approche unicritère pour un problème de décision sont donc les suivantes [15] :

- Ne pas tenir compte de la situation d'incomparabilité qui pourtant est une caractéristique bien humaine. Il est en effet fréquent que, comparant deux actions potentielles, un décideur ne parvienne pas à dire laquelle il préfère ;
- Ne pas considérer qu'il existe des cas où l'indifférence est intransitive, comme l'a montré D. Luce dans son célèbre exemple du sucre dans le thé (voir section suivante).
- Ne pas considérer que la préférence n'est pas non plus toujours transitive. Des exemples montrant ceci peuvent être trouvés dans [12] .

Sous ces hypothèses, la relation caractéristique est donc supposée complète et transitive, ce qui implique qu'un problème unicritère sera toujours représenté par une structure de préordre total. Pour pallier à ces hypothèses qui semblent trop fortes pour pouvoir modéliser un problème dans lequel le facteur humain apparaît, nous introduisons ici un modèle multicritère.

1.2.2 Le modèle multicritère

Le problème prend cette fois la forme suivante :

$$\text{opt}\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x) | x \in A\}$$

Les préférences s'expriment ici au moyen de k critères d'évaluation. Chaque critère est soit à maximiser, soit à minimiser, selon qu'il représente un profit ou un coût.

Cette approche est étudiée depuis 1970 environ, et convient particulièrement au traitement de réalités humaines.

La construction d'un processus d'aide à la décision peut se résumer en quelques grandes étapes. La première est celle de la modélisation des préférences. Nous ne nous attarderons ici que sur les définitions principales, mais de plus amples détails peuvent être trouvés dans [11].

1.2.3 Elaboration de modèles [12]

Actions

La première question à se poser lorsque nous sommes confrontés à un processus de décision est de savoir quelles sont les différentes actions ou solutions possibles.

Définition 1.1. *L'ensemble des actions, noté A , est l'ensemble des objets, décisions, candidats, ... que l'on va explorer dans le processus de décision.*

Cet ensemble peut être :

- défini en extension par énumération de ses éléments (lorsqu'il est fini et suffisamment petit pour que l'énumération soit possible) ;
- défini en compréhension s'il n'est pas défini en extension, donc lorsqu'il est infini, ou fini mais très grand, grâce à une propriété caractéristique ou des contraintes mathématiques.

Il sera dit :

- stable s'il est défini a priori et n'est pas susceptible d'être changé en cours de procédure ;
- évolutif si au contraire il peut être modifié en cours de procédure.

Il peut également être intéressant de considérer le cas où A est :

- globalisé dans le cas où chaque élément de A est exclusif de tout autre ;
- fragmenté dans le cas où les résultats du processus de décision font intervenir des combinaisons de plusieurs éléments de A .

Pour illustrer ces définitions, considérons deux exemples simples :

1. Supposons qu'une entreprise internationale décide de s'agrandir, et souhaite ouvrir un ou plusieurs nouveaux centres en Europe. Dans ce cas, on considérera les possibilités (actions) suivantes : (Belgique , France , Grande-Bretagne , Pays-Bas , Luxembourg , Allemagne , Suisse , Pologne , Danemark , Autriche , etc). L'ensemble des actions est ici défini en extension. Il est stable, car il ne sera probablement pas modifié en cours de procédure. De plus, il est fragmenté car on pourrait imaginer une combinaison de plusieurs pays dans lequel la compagnie décide de s'implanter pour la décision finale ;
2. Considérons le problème du voyageur de commerce, dans lequel un représentant doit rendre visite à 20 clients répartis dans toute l'Algérie . Il s'intéresse à l'ordre dans lequel il va organiser ses visites, sachant qu'il doit passer une et une seule fois chez chaque client. Dans ce cas, l'ensemble des actions est trop grand pour être énuméré, et est donc défini en compréhension. On pourrait imaginer que le représentant conclue un nouveau contrat alors qu'il est en route, et dans ce cas l'ensemble des actions est évolutif. Comme chaque solution est ici exclusive de toute autre, on a un ensemble d'actions globalisé.

Dans le cadre de ce travail, seuls des ensembles finis d'actions seront considérés, on les définira en extension. Ils seront stables et globalisés.

Modélisation des préférences

Lors de la phase d'aide à la décision, les différentes méthodes existantes procèdent à la comparaison des actions potentielles. Ces comparaisons sont basées sur la modélisation des préférences du décideur. Nous introduirons ici les concepts de base de la modélisation des préférences.

Quelques rappels sur les relations

Définition 1.2. *Une relation binaire sur un ensemble A est une partie R de $A \times A$. Si le couple $(x, y) \in R$, on dit que x est en relation avec y et on note xRy .*

Soit R une relation binaire sur l'ensemble A et soient a , b et c trois éléments de A . La relation binaire R est dite :

- réflexive ssi aRa
- irreflexive ssi $a \text{ non } Ra$
- symétrique ssi $(aRb \Rightarrow bRa)$
- asymétrique ssi $(aRb \Rightarrow b \text{ non } Ra)$
- transitive ssi $(aRb \text{ et } bRc \Rightarrow aRc)$

Relations de préférences usuelles

Nous supposons d'abord que, confronté à la comparaison de deux actions, le décideur a une des trois réactions suivantes :

- préférence pour l'une des deux actions,
- indifférence entre les deux actions,
- refus ou impossibilité de comparer.

Notons

- aPb si a est préféré à b , ou bPa dans le cas inverse,
- aIb s'il y a indifférence entre a et b ,
- aRb s'il y a incomparabilité.

Il semble alors naturel de supposer que :

$$\forall a, b \in A : \left\{ \begin{array}{l} aPb \Rightarrow b \text{ non } Pa : P \text{ est asymétrique;} \\ aIa : I \text{ est réflexive;} \\ aIb \Rightarrow bIa : I \text{ est symétrique;} \\ a \text{ non } Ra : R \text{ est irréflexive;} \\ aRb \Rightarrow bRa : R \text{ est symétrique.} \end{array} \right.$$

Définition 1.3. *Les trois relations $\{P, I, R\}$ constituent une structure de préférence sur A si elles ont les propriétés citées ci-dessus, et si, étant donné deux éléments quelconques a et b de A , une et une seule des situations suivantes est vérifiée : aPb , bPa , aIb , aRb .*

Il n'est pas évident à première vue de se rendre compte que les relations P et I ne sont pas toujours transitives. Prenons deux exemples simples pour illustrer d'une part l'intransitivité de l'indifférence, et ensuite celle de la préférence :

- Illustrons d'abord l'intransitivité de l'indifférence. Désignons par p_i un objet pesant i grammes. Un individu qui est amené à comparer le poids de différents objets n'apercevra pas une différence de quelques grammes, et sera indifférent

à devoir porter l'un ou l'autre, mais préférera transporter un objet léger qu'un autre beaucoup plus lourd. Ainsi, $p_i I p_{(i+1)}$, $\forall i$, mais $p_i P p_{(i+N)}$ avec N suffisamment grand. Ceci nous montre bien que l'indifférence n'est pas toujours transitive. Ce problème sera également considéré dans la suite de ce chapitre, lorsque nous définirons une structure de préférence de quasi-ordre, dans laquelle on tient compte de l'intransitivité de l'indifférence,

- En ce qui concerne l'intransitivité de la préférence, prenons l'exemple suivant d'un individu qui désire acheter une nouvelle voiture. Nous considérerons ici qu'il y a trois modèles disponibles, A , B et C , et que ces trois modèles sont évalués par rapport à deux critères seulement : le prix et le confort. Les évaluations des différentes actions sur les différents critères se font au moyen de trois appréciations : bon, normal, mauvais. Considérons le tableau suivant qui représente les évaluations des différentes actions sur les différents critères :

	prix	confort
modèle A	B	B
modèle B	N	N
modèle C	M	M

Dans ce cas, l'acheteur préférera le modèle A au modèle B (APB) et le modèle B au modèle C (BPC), mais pourrait ne pas pouvoir se prononcer en faveur de A ou de C , en disant qu'il est impossible pour lui de les comparer et d'avoir une préférence pour l'un ou pour l'autre (ARC). Cet exemple simple nous montre donc bien qu'il n'y a pas toujours transitivity de la relation de préférence.

Relation de surclassement

Toute structure de préférence peut être entièrement caractérisée par la donnée de la relation binaire définie par :

$$aSb \Leftrightarrow aPb \text{ ou } aIb \quad (S = P \cup I)$$

En effet, on a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} aPb \Leftrightarrow aSb \text{ et } b \text{ nonS } a ; \\ aIb \Leftrightarrow aSb \text{ et } bSa ; \\ aRb \Leftrightarrow a \text{ nonS } b \text{ et } b \text{ nonS } a. \end{array} \right.$$

Définition 1.4. *Nous dirons qu'une action a surclasse une autre action b et nous noterons aSb si et seulement si a est aussi bonne que b et qu'il n'y a aucune raison de refuser cette affirmation.*

Cette relation de surclassement est réflexive, ce qui découle directement de sa définition, et n'est pas a priori transitive. Elle le sera si et seulement si les relations P et I le sont. En effet, S sera transitive si et seulement si $\forall a, b, c \in A$, on a $aSb \wedge bSc \Rightarrow aSc$.

Différents cas sont possibles :

- $aPb \wedge bPc \Rightarrow aPc$, ssi P est transitive,
- $aPb \wedge bIc \Rightarrow aPc$,
- $aIb \wedge bPc \Rightarrow aPc$,
- $aIb \wedge bIc \Rightarrow aIc$, ssi I est transitive.

Structures de préférences

Nous présenterons dans cette section une courte introduction des structures de préférences les plus courantes. Pour plus de détails, le lecteur intéressé pourra consulter [12].

Structure d'ordre total et de préordre total

L'approche traditionnelle consiste à ramener un problème de décision à un problème d'optimisation. La comparaison de deux actions a et b revient alors à comparer deux valeurs $g(a)$ et $g(b)$, où g est une fonction définie sur A , et sans perte de généralité, nous supposons que la fonction g est à maximiser.

Définition 1.5. *Une structure de préférence est une structure de préordre total si elle est représentable par le modèle traditionnel :*

$$\forall a, b \in A : \begin{cases} aPb \Leftrightarrow g(a) > g(b); \\ aIb \Leftrightarrow g(a) = g(b). \end{cases}$$

Définition 1.6. *Une structure de préférence est une structure d'ordre total si elle est une structure de préordre total et qu'en plus, la relation I se limite aux couples identiques.*

Structure de quasi-ordre

D. Luce (1956) a mis en évidence, grâce à son exemple du sucre dans le thé, le problème de la non-transitivité de l'indifférence. Il a rendu clair que si l'action a est indifférente à l'action b , et l'action b est indifférente à l'action c , on n'a pas forcément indifférence entre les actions a et c .

Ainsi, pour reprendre l'exemple proposé par D. Luce [8], désignons par T_i une tasse de thé contenant i milligrammes de sucre. Il est normal qu'un individu qui est amené à comparer différentes tasses de thé ne perçoive pas une différence de 1 milligramme ($T_i I T_{i+1}, \forall i$) mais qu'il préfère une tasse de thé bien sucré à une tasse de thé sans sucre ($T_N P T_0$, où N est suffisamment grand), ce qui contredit la transitivité de l'indifférence.

Cet exemple nous montre donc qu'il est impossible d'utiliser une structure de préordre total si l'on veut modéliser les préférences de l'individu de l'exemple de D.Luce. Nous

sommes ainsi amenés à considérer une nouvelle structure de préférences, dans laquelle on tiendra compte d'un certain seuil d'indifférence, en-dessous duquel le décideur ne aperçoit pas de différence entre deux éléments.

Définition 1.7. *La structure de préférence $\{P, I\}$ est une structure de quasi-ordre si et seulement si il existe une fonction $g : A \mapsto R$ et $q \in R^+$ tels que :*

$$\forall a, b \in A : \begin{cases} aPb \Leftrightarrow g(a) > g(b) + q; \\ aIb \Leftrightarrow |g(a) - g(b)| \leq q. \end{cases}$$

Structure d'ordre d'intervalle

Le modèle précédent ne considère qu'un seuil constant, mais il peut être intéressant de considérer un seuil d'indifférence variable, car dans un certain nombre d'applications, ce seuil varie selon l'échelle considérée. Par exemple, une différence de 100 euros n'a pas la même importance selon que l'on considère des sommes d'exprimant en centaines ou en milliers d'euros.

Définition 1.8. *Une structure de préférence $\{P, I\}$ est une structure d'ordre d'intervalle si et seulement si il existe une fonction $g : A \mapsto R$ et une fonction $q : R \mapsto R^+$ telles que :*

$$\forall a, b \in A : \begin{cases} aPb \Leftrightarrow g(a) > g(b) + q(g(b)); \\ aIb \Leftrightarrow \begin{cases} g(a) \leq g(b) + q(g(b)); \\ g(b) \leq g(a) + q(g(a)). \end{cases} \end{cases}$$

Structure de pseudo-ordre

En pratique, il semble difficile de fixer une valeur précise au-dessus de laquelle il y a préférence stricte et en-dessous de laquelle il y a indifférence. Il semble plus réaliste de considérer une zone intermédiaire dans laquelle le décideur hésite. Cette hésitation du décideur sera modélisée par la préférence faible, notée Q . Une structure de préférence sera un pseudo-ordre si elle prend en compte un seuil d'indifférence, au-dessous duquel le décideur marque une indifférence nette, et un seuil de préférence, au-dessus duquel le décideur montre une préférence stricte.

Définition 1.9. *Une structure de préférence $\{P, I, Q\}$ est un pseudo-ordre si et seulement si il existe une fonction $g : A \rightarrow R$ et une fonction $q : R \rightarrow R^+$ telles que :*

$$\forall a, b \in A : \begin{cases} aPb \Leftrightarrow g(a) > g(b) + p(g(b)); \\ aQb \Leftrightarrow g(b) + p(g(b)) \geq g(a) > g(b) + q(g(b)); \\ aIb \Leftrightarrow \begin{cases} g(b) + q(g(b)) \geq g(a); \\ g(a) + q(g(a)) \geq g(b). \end{cases} \end{cases}$$

Modèles incluant l'incomparabilité

Ces modèles sont les structures d'ordre partiel, de préordre partiel, de quasi-ordre partiel et d'ordre d'intervalle partiel.

Critères

Un critère représente les préférences d'un décideur par rapport à un point de vue particulier du problème de décision.

Définition 1.10. *On appelle critère une fonction f , définie sur A , qui prend ses valeurs dans un ensemble totalement ordonné, et qui représente les préférences du décideur selon un point de vue.*

Vincke [22] distingue plusieurs types de critères selon la structure de préférence sous-jacente. Un critère sera dit :

- un vrai-critère si la structure de préférence sous-jacente est une structure de préordre total (modèle traditionnel) ;
- un quasi-critère si c'est une structure de quasi-ordre (modèle à seuil) ;
- un critère d'intervalle si c'est une structure d'ordre d'intervalle (modèle à seuil variable) ;
- un pseudo-critère si c'est une structure de pseudo-ordre (modèle à deux seuils).

Lorsqu'on considérera plusieurs critères dans un problème de décision, nous les noterons g_1, \dots, g_n . Nous noterons $F = \{g_1, \dots, g_n\}$, où F est appelé famille de critères. L'évaluation d'une action a suivant le critère j sera notée $f_j(a)$.

Problématiques d'aide à la décision [21]

Il existe plusieurs types de problèmes pour lesquels on peut faire appel à un processus d'aide à la décision. Nous distinguons ici trois grandes problématiques :

1. La problématique de choix P_α

Il s'agit dans ce cas de déterminer un sous-ensemble d'actions considérées comme les meilleures vis-à-vis de la famille de critères F . On peut citer par exemple le problème qui consiste à déterminer un nouveau site pour la construction d'une école dont les bâtiments sont trop dispersés.

2. La problématique de tri P_β

Cette problématique consiste à partitionner A en sous-ensembles en suivant des normes préétablies, de telle sorte que des actions qui appartiennent à la même classe soient aussi homogènes que possible, et des actions qui appartiennent à des classes différentes soient aussi dissemblables que possible. On peut distinguer deux situations :

- catégories ordonnées : chaque catégorie est caractérisée soit par des actions de référence centrales, soit par des profils frontières (un profil limite supérieur et un profil limite inférieur); chaque observation à classer sera comparée soit aux profils centraux des différentes classes, soit ‘a ces profils limites. On peut citer les exemples suivants : demandes de prêts dans les banques, diagnostic de firmes...
- classes non-ordonnées : chaque catégorie est caractérisée par un objet représentatif; chaque observation à classer est comparée à ces objets. Pour exemple, on peut citer le cas du diagnostic médical : suivant les symptômes, il faut associer chaque patient (action) à une maladie (classe).

3. La problématique de rangement P_γ

Il s’agit ici de ranger les actions de A de la meilleure à la moins bonne. Par exemple, c’est cette problématique qui est utilisée lorsqu’on dispose d’un budget destiné à financer des projets scientifiques. Celui qui est chargé de répartir ce budget est alors désireux de donner de l’argent aux meilleurs projets, leur nombre étant limité par le montant de ce budget.

Chapitre 2

Etat de l'art sur les méthodes d'aide multicritère à la décision et leur évaluation

2.1 Introduction

L'état de l'art que nous avons réalisé sur la fiabilité des méthodes d'aide multicritère à la décision a fait ressortir que la majorité des travaux de recherche qui concernent ce sujet se focalisent principalement sur les familles Electre et AHP, les résultats de ces travaux sont établis suivant des paramètres de performance bien définis appelés tests de critère.

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés aux principaux travaux de recherches qui utilisent la série de tests de Triantaphyllou ([23], [24]). Cette partie comporte une description détaillée de cette série et quelques observations sur sa performance.

2.2 Méthodes d'aide multicritère à la décision

D'après Vincke [22], les spécialistes de l'aide multicritère à la décision ont pris l'habitude de subdiviser les méthodes en trois grandes familles, même si les frontières entre ces familles restent très floues : la théorie de l'utilité multi-attribut, les méthodes de surclassement et les méthodes interactives.

Nous développerons ici en détails quelques méthodes de surclassement, le modèle additif et les méthodes AHP, qui seront beaucoup utilisées dans la suite de ce travail.

2.2.1 Les méthodes de surclassement [21]

Principes de base

L'idée des méthodes de surclassement est d'éviter d'introduire des hypothèses mathématiques trop lourdes, et de ne pas poser au décideur des questions trop pointues, en acceptant de se contenter d'un résultat intermédiaires parfois moins riche que celui fourni par les méthodes de l'utilité multi-attribut. De plus, ces méthodes de surclassement ont la caractéristique d'accepter des incomparabilités entre les actions potentielles, et de ne pas imposer des Propriétés de transitivité.

Les méthodes de surclassement ont été introduites par B.Roy, et se basent sur le principe de surclassement qui a été défini dans la section (1.2.3). Nous pouvons également remarquer que la plupart des méthodes de surclassement font intervenir la notion de poids des critères, en vue de représenter leurs importances relatives.

Nous pouvons citer ici les méthodes Electre, et les méthodes Prométhée.

Dans les prochaines sections, nous développerons plus en détails les méthodes Prométhée, ainsi que les méthodes Electre, car elles nous seront utiles dans la suite.

I. Les méthodes PROMETHEE

Les méthodes Prométhée ont été proposées pour la première fois en 1982 par J.P. Brans. Depuis, elles ont fait l'objet de développements et d'adaptations complémentaires.

Ces méthodes s'adressent à tout problème multicritère du type

$$opt\{g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x) | x \in A\}$$

où A est un ensemble fini de n actions potentielles, et $g_j(\cdot), j = 1 \dots k$ sont k critères qui sont des applications de A sur l'ensemble des nombres réels. Les données relatives à un tel problème peuvent être représentées dans un tableau comprenant $n \times k$ évaluations.

actions/critères	$g_1(\cdot)$	$g_2(\cdot)$...	$g_j(\cdot)$...	$g_k(\cdot)$
a_1	$g_1(a_1)$	$g_2(a_1)$...	$g_j(a_1)$...	$g_k(a_1)$
a_2	$g_1(a_2)$	$g_2(a_2)$...	$g_j(a_2)$...	$g_k(a_2)$
...
a_i	$g_1(a_i)$	$g_2(a_i)$...	$g_j(a_i)$...	$g_k(a_i)$
...
a_n	$g_1(a_n)$	$g_2(a_n)$...	$g_j(a_n)$...	$g_k(a_n)$

Tableau 2.1 – Tableau d'évaluation

D'après Brans [5], les méthodes de surclassement peuvent se décomposer en trois grandes étapes :

i) **Enrichissement de la structure de préférence**

Nous allons définir une nouvelle notion, celle de critère généralisé, qui sera définie à partir d'une fonction de préférence. Cette notion est introduite afin de tenir compte des amplitudes des écarts entre les évaluations sur les différents critères, et également afin d'éliminer tous les effets d'échelle liés aux unités dans lesquelles les critères sont exprimés.

ii) **Enrichissement de la relation de dominance**

Une relation de surclassement évaluée tenant compte de l'ensemble des critères

est proposée et pour chaque paire d'actions, un degré de préférence global d'une action sur l'autre sera établi.

iii) Aide à la décision

La relation de surclassement évaluée est exploitée en vue d'éclairer le décideur. Prométhée I fournira un rangement partiel des actions, tandis que Prométhée II fournit un rangement total.

I.1. Notion de critère généralisé

Considérons un critère particulier $g_j(\cdot)$ et supposons qu'il soit à maximiser. Nous avons vu que des comparaisons entre paires d'actions de A donnent lieu à une relation de dominance naturelle I, P telle que :

$$\forall a, b \in A : \begin{cases} g_j(a) > g_j(b) \Leftrightarrow aP_jb; \\ g_j(a) = g_j(b) \Leftrightarrow aI_jb; \\ g_j(a) < g_j(b) \Leftrightarrow bP_ja. \end{cases}$$

où P_j désigne la préférence pour le critère j et I_j désigne l'indifférence pour le critère j .

En considérant une telle relation de dominance, il n'est pas tenu compte de l'amplitude des écarts entre les évaluations, donc il n'est pas précisé quelle est l'intensité de la préférence de a sur b pour le critère j . Pour palier à ce problème, considérons

$$d_j(a, b) = g_j(a) - g_j(b)$$

l'écart entre les évaluations $g_j(a)$ et $g_j(b)$, et considérons une fonction $P_j(a, b)$ donnant le degré de préférence de a sur b en fonction de $d_j(a, b)$:

$$P_j(a, b) = P_j[d_j(a, b)]$$

Nous supposons que ce degré de préférence est normé de telle sorte que :

$$0 \leq P_j(a, b) \leq 1$$

et supposons également que

$$0 \leq P_j(a, b) + P_j(b, a) \leq 1$$

On aura alors, pour $a, b \in A$:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_j(a, b) = 0 \text{ si } d_j(a, b) \leq 0 \text{ (pas de préférence)} ; \\ P_j(a, b) \simeq 0 \text{ si } d_j(a, b) > 0 \text{ (préférence faible)} ; \\ P_j(a, b) \simeq 1 \text{ si } d_j(a, b) \gg 0 \text{ (préférence forte)} ; \\ P_j(a, b) = 1 \text{ si } d_j(a, b) \gg \gg 0 \text{ (préférence stricte)}. \end{array} \right.$$

Ainsi, comme les fonctions de préférences entre les actions sur les différents critères sont normées, elles ne dépendent plus des échelles dans lesquelles les critères sont exprimés, et comme ces fonctions de préférences dépendent des écarts entre les évaluations, on a bien une nuance dans l'intensité des préférences.

Définition 2.1. *Le couple $\{g_j(\cdot), P_j(\cdot)\}$ est appelé critère généralisé. Il s'agit du critère d'évaluation complété par sa fonction de préférence.*

Un critère généralisé devra donc être associé à chaque critère $g_j(\cdot)$, $j = 1, \dots, k$. Il s'agit d'une information complémentaire importante, et pour faciliter la tâche au décideur, un ensemble de six types lui est proposé :

– **Type I : critère usuel**

Dans ce cas, dès qu'il y a un écart, il y a préférence stricte pour l'action ayant l'évaluation la plus élevée. Si le décideur choisit le type *I* pour un critère particulier, il ne doit fixer aucun paramètre.

– **Type II : quasi-critère**

Les actions a et b sont dans ce cas indifférentes aussi longtemps que l'écart $d_j(a, b)$ ne dépasse pas un seuil q_j , et au-delà de ce seuil, la préférence est stricte. Ici, il

faut fixer le seuil d'indifférence q_j . Ce type de critère provient de la notion de quasi-ordre introduit par D.Luce.

– **Type III : critère à préférence linéaire**

Un tel critère permet au décideur de préférer progressivement a à b en fonction de l'écart observé entre $g_j(a)$ et $g_j(b)$. Le degré de préférence croît alors jusqu'à ce que le seuil p_j soit atteint, et au-dessus de ce seuil, la préférence est stricte. Dans ce cas, le seul paramètre à fixer est le seuil de préférence stricte.

– **Type IV : critère à paliers**

Deux actions a et b sont ici considérées comme indifférentes aussi longtemps que l'écart entre $g_j(a)$ et $g_j(b)$ ne dépasse pas q_j ; entre q_j et p_j , le degré de préférence est faible, et au-delà de p_j , la préférence devient stricte. Il y a donc ici deux paramètres à fixer.

– **Type V : critère à préférence linéaire avec zone d'indifférence**

Dans ce cas-ci comme dans le précédent, a et b sont considérées comme indifférentes aussi longtemps que l'écart entre $g_j(a)$ et $g_j(b)$ ne dépasse pas q_j ; au-delà de ce seuil, le degré de préférence croît linéairement avec d_j jusqu'à atteindre un seuil de préférence stricte à partir de p_j . Ici encore, deux paramètres doivent être fixés.

– **Type VI : critère gaussien**

Dans ce cas, le degré de préférence croît de façon continue en fonction de d_j , un seul paramètre s_j doit être fixé. Pour un écart égal à s_j , on obtient une préférence moyenne (0, 39).

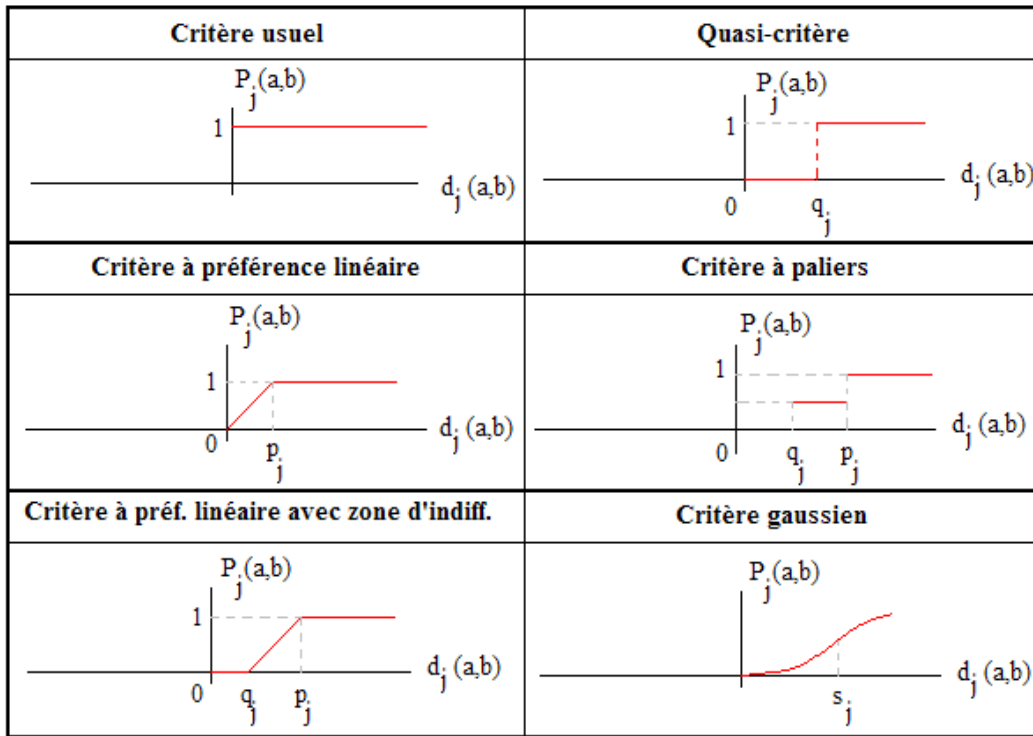


Figure 2.1 – types de fonctions de préférence

Le tableau ci-dessus illustre les types de fonctions de préférence définis juste avant. Remarquons que, comme la plupart des méthodes multicritères, les méthodes Prométhée requièrent des évaluations numériques. Dans le cas où les différentes évaluations s'expriment comme des évaluations qualitatives, on devra associer aux niveaux d'une telle échelle des valeurs numériques afin de pouvoir choisir un type de critère généralisé. Ainsi, deux degrés de liberté importants sont laissés au choix du décideur : le type de critère généralisé et les seuils qui interviennent dans la définition de ce critère. Vincke [22] nous fournit quelques lignes directrices afin de faire ces choix le plus efficacement possible :

Choix du type de critère généralisé

- Cas où les évaluations sont des nombres réels mesurés sur une échelle continue : le type V s'adapte bien à la situation car il fait intervenir une zone de préférence stricte et une zone d'indifférence ; et dans le cas où le décideur pense ne pas devoir tenir compte d'une zone d'indifférence, le type III s'impose.
- Cas où les données sont qualitatives, mesurées sur une échelle discrète, le type IV s'adapte bien à une échelle numérique associée au critère.
- Cas où le décideur veut considérer un degré de préférence positif même si l'écart entre les deux actions est faible, il peut choisir un critère généralisé de type I, et s'il souhaite voir croître ce degré de préférence lorsque l'écart grandit, il adoptera le critère VI.

Choix des seuils

- Les significations des seuils d'indifférence q et de préférence stricte p ont une signification claire, et ils sont en général choisis assez facilement par le décideur ;
- Dans le cas d'un critère de type IV, le seuil s sera fixé entre q et p , plus proche de q si le décideur souhaite renforcer le degré de préférence pour de petits écarts, et plus proche de p s'il souhaite atténuer la progression du degré de préférence en fonction des écarts observés.

I.2. Relation de préférence valuée

Pour tenir compte de l'importance relative des différents critères dans le processus d'aide à la décision, le décideur doit fixer une autre information complémentaire : le vecteur $w = (w_1, \dots, w_k)$ des poids des différents critères ($w_j > 0, j = 1 \dots k$).

Calculons à présent

$$\pi(a, b) = \sum_{j=1}^k \omega_j \cdot P_j(a, b), \text{ où } \sum_{j=1}^k \omega_j = 1$$

L'indice $\pi(a, b)$ est une mesure de préférence de a sur b , sur l'ensemble des critères :

$\pi(a, b) \approx 0 \Leftrightarrow$ faible préférence de a sur b ,

$\pi(a, b) \approx 1 \Leftrightarrow$ forte préférence de a sur b .

Nous avons également les propriétés suivantes :

Propriété 2.1.

$$\pi(a, a) = 0$$

Preuve. Ceci se déduit directement de la définition de $\pi(a, b)$. □

Propriété 2.2.

$$0 \leq \pi(a, b) \leq 1$$

Preuve. On sait par hypothèse que $0 \leq P_j(a, b) \leq 1$, et que $w_j > 0, j = 1, \dots, k$. On peut donc multiplier chaque membre de la comparaison précédente par w_j sans changer le sens des inégalités et ensuite, comme cette suite d'inégalités est vraie pour $j = 1 \dots n$, on peut sommer sur toutes les valeurs possibles de j . On obtient alors :

$$0 \leq \sum_{j=1}^k \omega_j \cdot P_j(a, b) \leq \sum_{j=1}^k \omega_j = 1$$

Après avoir calculé les valeurs de $\pi(a, b)$ pour chaque paires d'actions, on peut construire le graphe complet valué $(A, \pi(a, b))$, ayant pour sommets les actions de A et tel que $\forall a, b \in A$, les arcs (a, b) et (b, a) existent et ont comme valeurs respectives $\pi(a, b)$ et $\pi(b, a)$.

Brans ([4], [5]) fait d'ailleurs remarquer que l'information obtenue grâce à cette relation de surclassement valuée est particulièrement réaliste. En effet, lorsque deux actions a et b sont comparées, a est préférée à b avec un certain degré $\pi(a, b)$, car a est meilleure que b sur certains critères; et inversement, b est préférée à a avec un certain degré $\pi(b, a)$ car en général b sera également meilleure que a sur d'autres critères.

□

I.3. Flux de surclassement

Afin d'apprécier comment chaque action de A se comporte face aux $(n-1)$ autres actions, nous introduisons ici trois flux de surclassement.

- le flux de surclassement sortant

Considérons

$$\phi^+(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A - \{a\}} \pi(a, x)$$

Ce flux exprime le caractère surclassant de l'action a face aux $(n-1)$ autres actions, c'est-à-dire sa puissance. $\phi^+(a)$ est d'autant plus grand que a surclasse fortement les autres actions.

Propriété 2.3.

$$0 \leq \phi^+(a) \leq 1$$

Preuve. Nous avons déjà montré que $0 \leq \pi(a, b) \leq 1$. Or on déduit directement de ceci et de la définition de $\phi^+(a)$ que $\frac{1}{n-1} \sum_{x \in A - \{a\}} 0 \leq \phi^+(a) \leq \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A - \{a\}} 1$

D'où $0 \leq \phi^+(a) \leq \frac{1}{n-1} \cdot (n-1)$

on a donc bien montré que

$$0 \leq \phi^+(a) \leq 1$$

□

- le flux de surclassement entrant

Considérons

$$\phi^-(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A - \{a\}} \pi(x, a)$$

Ce flux exprime le caractère surclassé de l'action a face aux $(n-1)$ autres actions, c'est-à-dire sa faiblesse. $\phi^-(a)$ est d'autant moins grand que a est peu surclassée.

Propriété 2.4.

$$0 \leq \phi^-(a) \leq 1$$

Preuve. Ceci se démontre de façon analogue à la démonstration concernant les flux entrants. \square

- Le flux de surclassement net

Considérons

$$\phi(a) = \phi^+(a) - \phi^-(a)$$

Le flux net exprime le bilan des flux entrant et sortant de l'action a . Plus $\phi(a)$ est grand, meilleure est l'action.

Propriété 2.5.

$$-1 \leq \phi(a) \leq 1$$

Preuve. Ceci se déduit directement de la définition du flux net et des propriétés 3 et 4. \square

I.4. Exploitation de la relation de surclassement valuée

Prométhée I : rangement partiel

Les flux sortant et entrant permettent de ranger les actions de A de façon naturelle. Désignons par (S^+, I^+) et (S^-, I^-) les deux préordres induits par ces flux. On sait qu'une action est d'autant meilleure que son flux sortant est élevé, et que son flux entrant est faible.

- $aS^+b \Leftrightarrow \phi^+(a) > \phi^+(b)$
- $aI^+b \Leftrightarrow \phi^+(a) = \phi^+(b)$
- $aS^-b \Leftrightarrow \phi^-(a) < \phi^-(b)$
- $aI^-b \Leftrightarrow \phi^-(a) = \phi^-(b)$

Prométhée I construit un rangement partiel en prenant l'intersection de ces deux préordres.

$$\left\{ \begin{array}{l} aPb \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} aS^+b \text{ et } aS^-b; \\ aS^+b \text{ et } aI^-b; \\ aI^+b \text{ et } aS^-b. \end{array} \right. ; \\ aIb \Leftrightarrow aI^+b \text{ et } aI^-b; \\ aRb \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

où P, I, R désignent respectivement la préférence, l'indifférence et l'incomparabilité dans Prométhée I.

Ainsi, avec ce rangement partiel, certaines actions restent incomparables.

Les résultats possibles de la comparaison de deux actions seront donc les suivants :

– aPb : a est préférée à b

a est dans ce cas plus puissante et moins faible que b . L'information fournie par les deux flux de surclassement va dans le même sens et peut être considérée comme sûre. Il est dans ce cas réaliste de déclarer a préférée à b .

– aIb : a et b sont indifférentes

La puissance et la faiblesse de a et b sont égales donc rien ne permet de départager objectivement a et b .

– aRb : a et b sont incomparables

Ici, une plus grande puissance d'une des actions est assortie d'une faiblesse moindre de l'autre et l'information fournie par les deux flux est alors contradictoire. On rencontre généralement cette situation lorsque l'action a est nettement meilleure que b sur un sous-ensemble de critères et que b est meilleure que a sur un autre sous-ensemble de critères. Il est dans ce cas raisonnable d'interdire au modèle de se prononcer en faveur d'une des actions et il appartient dans ce cas au décideur de trancher en faveur d'une des deux actions.

Prométhée II : rangement complet

On utilisera Prométhée II si on souhaite disposer d'un rangement complet de toutes les actions. Ce rangement est obtenu en rangeant les actions dans l'ordre décroissant du flux net.

on a alors :

- $aPb \Leftrightarrow \phi(a) > \phi(b)$
- $aIb \Leftrightarrow \phi(a) = \phi(b)$

Remarquons que Prométhée II ne laisse pas de place à l'incomparabilité. L'information fournie par le préordre complet est plus simple à interpréter, mais est moins riche que celle fournie par Prométhée I. En effet, dans Prométhée II, une partie de l'information disparaît dans la différence entre les flux, et le résultat obtenu peut donc être plus discutable.

II. Les méthodes ELECTRE

Nous ne développerons pas ici en détails toutes les méthodes Electre existantes, mais simplement certaines notions générales qui nous seront utiles dans la suite de ce travail.

Un degré de surclassement $S(a, b)$ associé à chaque couple d'actions (a, b) où $a, b \in A$ a été défini. Ce degré sera compris entre 0 et 1 et sera d'autant plus grand que la crédibilité d'un surclassement de l'action a sur l'action b est grande. La méthode Electre est donc basée sur une relation de surclassement valuée.

Nous nous placerons dans le cadre d'un modèle à deux seuils, donc nous considérerons une structure de pseudo-ordre pour la modélisation des préférences. Ainsi, les critères considérés seront des pseudo-critères.

Pour rappel, nous avons vu qu'une action en surclasse une autre si elle est au moins aussi bonne que l'autre relativement à une majorité de critères (condition de concordance), sans être trop nettement plus mauvaise que cette autre relativement aux autres critères (condition de non-discordance).

Cette notion de surclassement fait intervenir deux indices importants : l'indice de concordance et l'indice de discordance :

- **Indices de concordance**

- i) **Indice de concordance par critère**

Pour chaque paire d'actions (a_i, a_k) , l'indice de concordance $c_j(a_i, a_k)$ mesure la crédibilité de l'hypothèse selon laquelle l'action a_i est meilleure que l'action a_k sur le critère j . Il est défini par :

$$c_j(a_i, a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_j(a_k) > g_j(a_i) + p_j ; \\ 0 & \text{si } g_j(a_k) < g_j(a_i) + p_j ; \\ \text{linéaire entre les deux.} & \end{cases}$$

- ii) **Indice de concordance globale**

Pour chaque paire d'actions (a_i, a_k) , l'indice de concordance globale $c_{i,k}$ mesure la crédibilité de l'hypothèse selon laquelle l'action a_i est meilleure que l'action a_k sur l'ensemble des critères. $c_{i,k} = \frac{1}{\sum_{j=1}^m P_j} \sum_{j=1}^m P_j \cdot c_j(a_i, a_k)$ où P_j

représente l'importance relative du critère j .

- **Indice de discordance par critère**

La relation de concordance définie ci-dessus doit être affaiblie par une notion de discordance, qui sera exprimée grâce à un seuil de veto. Le seuil de veto pour le critère j sera noté v_j et représente la valeur de $g_j(a_k) - g_j(a_i)$ à partir de laquelle il paraît prudent de refuser toute crédibilité au surclassement de l'action a_k par l'action a_i , même si tous les autres critères sont en concordance avec ce surclassement [14].

On définit alors un indice de discordance $d_j(a_i, a_k)$ qui mesure l'intensité de la discordance entre deux actions :

$$d_j(a_i, a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_j(a_i) + v_j > g_j(a_k); \\ 0 & \text{si } g_j(a_k) < g_j(a_i) + p_j; \\ \text{linéaire entre les deux.} & \end{cases}$$

Après avoir défini l'indice de concordance et l'indice de discordance, on peut enfin définir le degré de crédibilité de surclassement :

$$S(i, k) = \begin{cases} c_{i,k} & \text{si } d_j(a_i, a_k) \leq c_{i,k}; \\ c_{i,k} \times \prod_{j \in J(i,k)} \frac{1 - d_j(a, b)}{1 - c_{i,k}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $J(i,k)$ est l'ensemble des critères pour lesquels $d_j(a, b) > c_{i,k}$. Ainsi, le degré de crédibilité est égal à l'indice de concordance si aucun critère n'est très discordant, et dans le cas contraire, le degré de crédibilité est l'indice de discordance, d'autant plus diminué que l'indice de discordance est élevé.

2.2.2 Le modèle additif

Le modèle additif est probablement l'approche la plus utilisée des décideurs, il convient particulièrement avec les problèmes unicritères.

si on dispose de M alternatives et N critères, la meilleure alternative est celle qui vérifie (cas de maximisation) l'expression suivante :

$$A^* = \max_i \sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot w_j \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots, M$$

où N = le nombre de critères, a_{ij} = l'évaluation de l'alternative i relativement au critère j , w_j = le poids du j^{ieme} critère.

Dans les problèmes à une seule dimension, le modèle additif peut être utilisé sans aucune difficulté grâce à l'unicité d'unité de mesure, la difficulté de ce dernier émerge quand il est appliqué sur des problèmes multidimensionnels (plusieurs unités de mesure) dont les résultats s'annoncent erronés.

2.2.3 La méthode AHP

la méthode AHP a été développée par le professeur Thomas Saaty [16], c'est un très puissant processus qui, par la réduction de la complexité des problèmes en un système hiérarchique, aide les décideur à établir les préférences et choisir les meilleurs moyen de décision.

la méthode AHP utilise la comparaison par paires et le vecteur de décision à la détermination des éléments a_{ij} et les poids associés au critères w_j . a_{ij} représente l'évaluation de l'alternative a_i suivant le critère j , cette valeur doit être verticalement normalisée, ce qui donne que la somme des éléments par colonne est égale à 1 ; cette procédure permet d'éliminer les unités de mesure, tout en utilisant une procédure purement additive. L'expression de la meilleure alternative est donnée par la formule suivante :

$$P_{AHP}^* = \max_i P_i = \max_i \sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot w_j \quad i = 1, 2, 3, \dots, M$$

Après son apparition, cette méthode a connu une très bonne réputation entre les décideurs, elle a été largement utilisées dans des différents domaines (industrie, affaires, gouvernement, ...etc). Plus tard, elle a rencontré plusieurs critiques qui ont été conclues par quelques améliorations présentées sous la forme de nouvelles méthodes :

- L'AHP révisée

Belton et Gear [2] ont proposé une version révisée de l'AHP, connue plus tard par le mode idéal de l'AHP, ils ont constaté qu'une incohérence peut arriver à l'application

de l'AHP version originale. Un exemple numérique de trois critères et trois alternatives a été présenté par ces deux chercheurs où l'indication de la meilleure alternative change quand une alternative non-optimale est introduite à l'ensemble précédent des alternatives, ils ont constaté que l'origine de cette incohérence revient au fait que la somme des valeurs relatives a_{ij} par rapport à chaque critère est égale à 1 ; afin de corriger cette anomalie les auteurs ont proposé de remplacer cette étape de calcul par une autre procédure qui consiste à diviser les éléments de chaque colonnes de la matrice de décision par la valeur maximale de cette colonne, cette procédure s'avère plus cohérente que celle de la version originale.

- l'AHP multiplicative

L'utilisation d'une formule multiplicative pour définir les priorités dans un problème d'aide à la décision multicritère est une idée qui a commencé avec l'apparition du modèle multiplicatif aux débuts du 20^{ème} siècle, dans cette méthode chaque alternative est comparée aux autres à l'aide d'un nombre bien spécifié des ratios qui est égal au nombre de critères, la formule mathématique de comparaison entre deux alternatives A_k et A_l est la suivante :

$$R\left(\frac{A_k}{A_l}\right) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{a_{kj}}{a_{lj}}\right)^{w_j}$$

si $R(A_k/A_l) \geq 1$, alors A_k est plus désirable que A_l . on se basant sur la formule mathématique du modèle multiplicatif, Barzilai et Lootsma [9] ont proposé une nouvelle version de l'AHP, appelée l'AHP multiplicative, dans cette méthode la performance des valeurs relatives a_{ij} de la matrice de décision et des poids de critères w_j est représentée par la formule générale suivante :

$$P_i = \prod_{j=1}^n (a_{ij})^{w_j}$$

cette formule mesure la préférence entre les alternatives telle que, si $P_i > P_j$, alors A_i est meilleure que A_j .

2.3 Quelques travaux sur l'évaluation des méthodes multicritères

2.3.1 L'évaluation de quelques méthodes multidimensionnelles

Ce paragraphe présente les résultats d'une étude qui compare quatre méthodes d'aide multicritère à la décision [18] : le modèle additif, le modèle multiplicatif, l'AHP (Analytic hierarchy process) et l'AHP révisée.

Après avoir constaté que l'application de ces quatre méthodes sur la même instance peut donner plusieurs résultats différents, une justification liée à la fiabilité des méthodes a été proposée par les auteurs.

Deux critères d'évaluation ont été utilisés dans le but de trouver la méthode la plus performante. Les auteurs ont recommandé le fait que si une méthode est fiable dans le cas de plusieurs dimensions, alors elle doit l'être dans le cas d'une seule dimension. Le deuxième critère détermine la stabilité de la méthode quand on change une alternative non optimale par une autre alternative plus mauvaise, une méthode fiable doit garder l'indication de sa meilleure alternative après le changement.

Les méthodes à plusieurs dimensions sont souvent critiquées, du fait que l'application de certaines d'entre elles sur les mêmes instances donnent généralement des résultats différents, malgré cela, elles ont été largement utilisées dans la littérature.

Le modèle additif est le plus ancien et probablement le plus utilisé. ce modèle convient particulièrement aux problèmes unidimensionnelles, alors qu'il montre une faiblesse flagrante envers les problèmes multidimensionnelles. Les autres méthodes sont applicables aux deux cas.

Partant du fait que la meilleure alternative est unique quelque soit la méthode utilisée, les auteurs ont fait une comparaison entre les résultats du modèle additif et ceux des autres méthodes. Cette comparaison effectuée sur des instances unidimensionnelles a permis d'évaluer les méthodes à travers le premier test de critère.

Dans cette étude, il est important de noter que si les résultats des deux critères affirment l'inefficacité d'une méthode, alors elle l'est forcément. Cependant, il se peut qu'une méthode soit inefficace sans que les deux critères le détectent.

Ce qu'on peut déduire de ce travail, c'est que les deux tests de critère montrent qu'aucune méthode parmi les méthodes multidimensionnelles examinées n'est efficace, et que l'AHP est pratiquement la plus mauvaise des trois.

2.3.2 L'évaluation de l'AHP et quelques méthodes de ses variantes

plusieurs chercheurs avaient observé que l'utilisation de l'AHP (version originale) et quelques méthodes de ses variantes peuvent mener à des anomalies de rangement qui causent probablement des conséquences indésirables dans la pratique [15].

Ces irrégularités ont été constatées lors des expériences effectuées par les auteurs sur des cas concrets, où ils ont décomposé un problème de décision en un ensemble de sous-problèmes, chaque sous-problème est défini par deux alternatives et le même nombre de critères que le problème d'origine. Les anomalies apparaissent après l'assemblage des rangements des sous-problèmes ; ils ont remarqué que parfois le rangement global résultant est différent du rangement initial.

Dans cette étude les auteurs ont démontré à travers quelques exemples numériques qu'il se peut que le décideur ne va jamais connaître le rangement exact des alternatives quand l'AHP ou une de ses variantes additives est utilisée. Cette faiblesse montre que

la famille de méthodes AHP n'est pas aussi fiable que leurs fondateurs le pensaient et que ses résultats doivent être sévèrement critiqués.

L'AHP multiplicative a été aussi critiquée dans ce travail, où il a été démontré que les irrégularités de rangement citées précédemment n'ont pas de lieu.

Il est aussi important de noter que si l'AHP multiplicative est stable par rapport aux anomalies constatées avec les variantes additives de l'AHP, alors elle n'est pas forcément fiable.

2.3.3 L'évaluation de quelques méthodes Electre

Les méthodes Electre ont rencontré une large acceptation chez les décideurs dans la résolution des problèmes d'aide multicritère à la décision. Cependant, dans ce travail de recherche, les chercheurs à travers des études bien spécifiées sur Electre II et Electre III ont indiqué l'existence de plusieurs preuves tangibles qui remettent en cause l'exactitude des rangements établis par ces deux méthodes [23].

Trois tests ont été utilisés pour évaluer la fiabilité de ces méthodes. Le premier test consiste à remplacer aléatoirement une alternative non-optimale par une autre alternative plus mauvaise et effectuer le rangement. Le deuxième test examine la transitivité du résultat de rangement dans chaque sous-problème déterminé par la décomposition du problème initial. Le troisième test de critère vérifie la transitivité dans le rangement global qui est établi en combinant les rangements partiels des sous-problèmes.

Les résultats des trois tests sont comparés par rapport au rangement du problème à l'état initial (sans aucune modification).

Dans ce travail, les auteurs ont effectué des expériences sur dix cas réels en utilisant ces trois tests de critères, les résultats sont mentionnées comme suit :

- quatre cas sur dix ont passé le premier test avec succès ;

- par rapport au deuxième test, la propriété de transitivité n'a été vérifiée que par un seul cas ;
- puisque un seul cas a passé avec succès le test n°2, alors c'est le seul qui pourrait être examiné par le troisième test. Cependant, le tableau représentatif des résultats montre qu'il échoue dans ce test.

Les auteurs ont constaté que la raison principale de l'apparition de ces problèmes est liée au processus du rangement qui caractérise ces méthodes (Electre II, Electre III), en effet, le rangement de chaque alternative est décidé par le degré avec lequel elle surclasse les autres alternatives ; quand une alternative non optimale est remplacée par une autre plus mauvaise, le rangement relié à cette dernière peut être changé et par conséquent le rangement global change.

Ils ont constaté aussi que la propriété de transitivité est parfois non respectée, ce qui pose un grand problème dans la définition de la meilleure alternative.

Ce travail de recherche élargit la catégorie des méthodes qui souffrent des problèmes de rangement et attire l'attention des décideurs sur le fait que le choix d'une méthode d'aide à la décision est mesuré par le degré de la fiabilité qu'elle pourrait garantir.

2.3.4 Synthèse sur l'analyse de performance de quelques méthodes d'aide multicritère à la décision

Nous avons vu dans le premier chapitre que plusieurs méthodes ont été proposées pour analyser et résoudre les problèmes d'aide multicritère à la décision dans les différents domaines. Cependant la fiabilité des résultats de ces dernières est une question très importante qui doit être posée. La majorité des travaux de recherche effectués dans ce contexte traitent principalement de la méthode AHP et ses variantes. Cette question a été largement développée dans [15] et [18].

L'évaluation de la performance d'une méthode multicritère d'aide à la décision se base

sur la vérification de quelques critères fondamentaux. L'étude la plus récente propose trois tests de critères complémentaires :

- **Test n°1** : une méthode efficace doit garder l'indication de sa meilleure alternative quand une alternative non optimale est remplacée par une autre plus mauvaise, les alternatives inchangées doivent aussi garder leur rangement initial ;
- **Test n°2** : le deuxième vérifie si le rangement des alternatives gardent la propriété de transitivité, c'est-à-dire, si on décompose le problème en sous-problèmes, le rangement obtenu en résolvant chaque sous-problème doit satisfaire la propriété de transitivité ;
- **Test n°3** : ce test est une continuité du test n°2. Dans ce test, il faut s'assurer qu'en combinant les rangements des sous-problèmes, nous aurons un rangement similaire à celui du problème d'origine.

En tenant compte des résultats de recherche effectués sur l'évaluation des méthodes Electre et AHP, une synthèse globale sur la fiabilité de ces méthodes a été réalisée. Dans cette synthèse les auteurs indiquent que les irrégularités de rangement détectées dans ([16], [17], [24]) et dans d'autres articles de recherche ont tendance d'apparaître quand les alternatives sont proches l'une de l'autre. Autrement dit, plus les alternatives sont moins proches, plus le risque d'avoir ce genre de problèmes diminue.

Chapitre 3

Étude critique et résultats

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, l'étude critique réalisée en vue d'étudier le comportement de la série de tests à l'application de Prométhée 1, a fait ressortir que celle-ci ne constitue nullement un moyen efficace pour le jugement de la fiabilité de cette méthode.

En appuyant sur cette étude, nous proposons de nouveaux résultats qui se basent essentiellement sur les relations de surclassement d'indifférence et d'incomparabilité, et qui utilisent les critères généralisées les plus connus, ces résultats permettent d'améliorer la performance du test n°1 et ainsi de toute la série.

3.2 Étude de la performance du premier test de critère

Soit un exemple défini par un ensemble fini d'actions, A , et une famille cohérente de critères numériques, $F = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, avec le tableau d'évaluation correspondant. L'application de la méthode Prométhée I nécessite l'introduction de critères généralisés

et implique une relation de surclassement notée \mathcal{R} . Supposons que le préordre établi dans ce cas possède au moins une relation d'indifférence et/ou une relation d'incomparabilité.

Afin d'analyser la performance du test de critère n° 1, nous l'avons testé sur les relations de surclassement, ce fait a ouvert la porte sur plusieurs résultats importants qui vont être formulés et démontrés dans ce qui suit :

3.2.1 Cas d'une relation d'indifférence

Dans la présente section, nous allons étudier l'effet du test de critère n° 1 sur la relation d'indifférence.

Soient a_p, a_k deux actions indifférentes, et une action a' plus mauvaise qu'une autre alternative c telle que $\pi(a_p, a') > \pi(a_p, c)$.

Le cas où $\pi(a, a') < \pi(a, c)$ est impossible car la fonction p_i est une fonction monotone croissante. De ce fait, si la différence $g_i(a) - g_i(b)$ (pour a et b quelconques) augmente, la fonction $p_i(a, b)$ augmente de valeur (suivant l'intervalle de variation), et par conséquent la valeur de $\pi(a, b)$ augmente. Ainsi, plus la différence $g_i(b) - g_i(a)$ diminue, plus la quantité $\pi(b, a)$ diminue.

Notons que $D_l = \pi(a_l, a') - \pi(a_l, c), l \in \{p, k\}$; et que $D_l^- = \pi(c, a_l) - \pi(a', a_l), l \in \{p, k\}$.

Proposition 3.1. *Soit un rangement établi par application de la méthode Prométhée 1 et qui contient au moins une relation d'indifférence notée $(a_p I a_k)$. D'après le test de critère n° 1, si le choix de la nouvelle alternative a' entraîne au moins une des inégalités suivantes :*

1. $D_p \neq D_k$;

2. $D_p^- \neq D_k^-$;

alors la méthode est jugée non performante. Autrement dit, pour montrer la non fiabilité de Prométhée I il suffit de vérifier au moins une des inégalités précédentes.

Preuve. Soit la formule du flux sortant suivante : $[\Phi^+(a_p)] = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in (A - \{a_p\})} \pi(a, b)$.

En remplaçant l'action c par l'action a' , la formule du flux sortant s'écrit :

$$[\Phi^+(a_p)]_{a'} = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in ((A - \{a_p, c\}) \cup \{a'\})} \pi(a, b)$$

$$[\Phi^+(a_p)]_{a'} = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in (A - \{a_p, a'\})} \pi(a_p, b) + \frac{1}{n-1} \pi(a_p, a')$$

Par suppositions on a :

$$\pi(a_p, a') > \pi(a_p, c)$$

Donc :

$$[\Phi^+(a_p)]_{a'} > \frac{1}{n-1} \sum_{b \in (A - \{a_p, a'\})} \pi(a_p, b) + \frac{1}{n-1} \pi(a_p, c) = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in (A - a_p)} \pi(a_p, b) = [\Phi^+(a_p)]$$

Soit : $\pi(a_p, a') = \pi(a_p, c) + D_p$,

Si $D_p \neq D_k$, alors :

$$[\Phi^+(a_p)]_{a'} = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in (A - \{a_p, a'\})} \pi(a_p, b) + \frac{1}{n-1} \pi(a_p, a')$$

$$[\Phi^+(a_p)]_{a'} = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in (A - \{a_p, a'\})} \pi(a_p, b) + \frac{1}{n-1} (\pi(a_p, c) + D_p)$$

$$[\Phi^+(a_p)]_{a'} = \Phi^+(a_p) + \frac{1}{n-1} D_p$$

$$[\Phi^+(a_p)]_{a'} = \Phi^+(a_k) + \frac{1}{n-1} D_p \text{ car } \Phi^+(a_k) = \Phi^+(a_p)$$

Or, $D_p \neq D_k$, alors $[\Phi^+(a_p)]_{a'} \neq [\Phi^+(a_k)]_{a'}$.

D'autre part, si $\pi(a_p, a') > \pi(a_p, c)$, alors $\pi(a', a_p) \leq \pi(c, a_p)$ car pour tout indice i tel que $p_i(a_p, a') > p_i(a_p, c)$, on a $p_i(a', a_p) \leq p_i(c, a_p)$.

Notons que juste après cette preuve nous donnons un exemple qui illustre les cas de variation possibles.

Par rapport aux flux entrants $[\Phi^-(a_p)]_{a'}$ et $[\Phi^-(a_k)]_{a'}$, on a :

$$\begin{aligned} [\Phi^-(a_p)]_{a'} &= \frac{1}{n-1} \sum_{b \in ((A - \{a_p, c\}) \cup \{a'\})} \pi(a, b) \\ [\Phi^-(a_p)]_{a'} &= \frac{1}{n-1} \sum_{b \in (A - \{a_p, a'\})} \pi(b, a_p) + \frac{1}{n-1} \pi(a', a_p) \\ [\Phi^-(a_p)]_{a'} &\leq \frac{1}{n-1} \sum_{b \in (A - \{a_p, a'\})} \pi(b, a_p) + \frac{1}{n-1} \pi(c, a_p) \\ [\Phi^-(a_p)]_{a'} &\leq \frac{1}{n-1} \sum_{b \in (A - a_p)} \pi(b, a_p) = [\Phi^-(a_p)] \end{aligned}$$

Posons $\pi(a', a_p) = \pi(c, a_p) - D_p^-$.

Si $D_p^- \neq D_k^-$,

$$\begin{aligned} [\Phi^-(a_p)]_{a'} &= \frac{1}{n-1} \sum_{b \in (A - \{a_p, a'\})} \pi(b, a_p) + \frac{1}{n-1} \pi(a', a_p) \\ [\Phi^-(a_p)]_{a'} &= \frac{1}{n-1} \sum_{b \in (A - \{a_p, a'\})} \pi(b, a_p) + \frac{1}{n-1} (\pi(c, a_p) - D_p^-) \\ [\Phi^-(a_p)]_{a'} &= \Phi^-(a_p) - \frac{1}{n-1} D_p^- \\ [\Phi^-(a_p)]_{a'} &= \Phi^-(a_k) - \frac{1}{n-1} D_p^- \neq [\Phi^-(a_k)]_{a'} \end{aligned}$$

Si $D_p \neq D_k$, ou si $D_p^- \neq D_k^-$, alors on a soit a_p est préférée à a_k , soit a_k est préférée à a_p , soit a_p est incomparable à a_k . \square

Exemple

Soit les alternatives suivantes : $a = (4, 3, 5)$, $b = (2, 3, 1)$ et $c = (3, 1, 3)$ telles que :

$$\begin{cases} p_i(a, b) = 1 \text{ si } g_i(a) - g_i(b) \geq 2 \\ p_i(a, b) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Les valeurs de l'indice multicritère correspondant : $\pi(a, b) = 2$, $\pi(b, a) = 0$, $\pi(b, c) = 1$, $\pi(c, b) = 1$.

Le changement de b par une autre alternative $b' = (1, 1, 1)$, donne les nouvelles valeurs de $\pi = (., .)$ suivantes : $\pi(a, b) = 3$, $\pi(b, a) = 0$, $\pi(b, c) = 2$, $\pi(c, b) = 0$.

Remarque

$$\text{Si } [p_i(a_p, c) - p_i(a_p, a')] = [p_i(a_k, a') - p_i(a_k, c)],$$

$\forall i \in F$, l'égalité suivante : $\pi(a_p, a') = \pi(a_k, a')$ n'est pas toujours vérifiée.

L'application de Prométhée I sur un exemple qui fournit un résultat répondant à la proposition précédente et qui par conséquent montre la non fiabilité de cette méthode, entraîne la question suivante : est-ce que le jugement de la non fiabilité porté par le critère n°1 est toujours correct ?

A la recherche d'une réponse à cette question, nous avons pensé à des exemples numériques qui pourraient emmener à des résultats satisfaisants :

3.2.2 Exemples**Exemple 1**

Nous proposons un exemple numérique, relatif à quatre actions comparées suivant trois critères, les évaluations de chaque action par rapport aux critères $g_i(-)$ sont mentionnées dans le tableau suivant :

Actions \ Critères	Critères		
	i=1	i=2	i=3
a	3	4	4
b	3	3	1
c	3	2	1
d	3	2	2

Tableau 3.1 – Tableau d'évaluations.

Nous définissons les critères généralisés $p_j(a, b)$ comme suit :

$$\begin{cases} p(a, b) = 1, & \text{si } g_i(a) - g_i(b) > 0 \\ p(a, b) = 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Les poids associés aux critères sont supposés égaux.

L'application de la méthode Prométhée 1 sur cet exemple fournit le graphe du rangement partiel suivant :

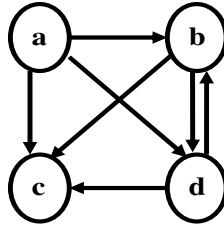


Figure 3.1 – Graphe du rangement partiel.

On remarque que b est indifférente à d . Ce rangement est justifié par les valeurs de flux entrant et sortant de chaque alternative : $F(a) = (2/3, 0)$, $F(b) = (2/9, 1/3)$, $F(c) = (0, 4/9)$, $F(d) = (2/9, 1/3)$.

Pour s'assurer de la fiabilité de ce résultat (le rangement), nous avons résolu la même instance à l'aide du modèle additif, qui est considéré par ailleurs comme étant le modèle le plus approprié dans des exemples semblables (Voir [17]).

L'application de cette méthode a donné le même préordre ; avec les valeurs numériques suivantes : $W(a) = \sum_{i=1}^N a_{ij}w_i = 10/3$, $W(b) = 7/3$, $W(c) = 6/3$, $W(d) = 7/3$.

Rappelons que la formule générale de l'AHP révisée s'écrit comme suit : $AHP(a) = \sum_{i=1}^N a_{ij}w_i$, les résultats de cette dernière (tableau AHP) ont donné le même préordre.

	i=1	i=2	i=3	i=4
w_i	1/3	1/3	1/3	-
a	1	1	1	1
b	1	3/4	1/4	2/3
c	1	1/2	1/4	7/12
d	1	1/2	1/2	2/3

Tableau 3.2 – Tableau AHP.

Reprenons à présent l'exemple 1 avec une petite modification sur l'évaluation de l'alternative c ; nous définissons une nouvelle action $c' = (3, 1, 1)$ moins meilleure que c , le tableau représentatif est le suivant :

Actions \ Critères	Critères		
	i=1	i=2	i=3
a	3	4	4
b	3	3	1
c'	3	1	1
d	3	2	2

Tableau 3.3 – Tableau d'évaluations.

L'application de la même méthode (Prométhée 1) sur cette instance, fournit un rangement autre que celui de l'exemple 1. Ce rangement est donné par la figure suivante :

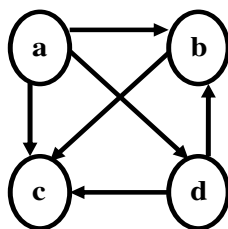


Figure 3.2 – Graphe du rangement partiel.

les valeurs de flux sont données par : $F(a) = (2/3, 0)$, $F(b) = (2/9, 1/3)$, $F(c) = (0, 5/9)$, $F(d) = (1/3, 1/3)$. Le tableau suivant exprime les valeurs caractéristiques de (D_l, D_l^-) où $l \in \{b, d\}$:

	b	d
D	0	1/3
D^-	0	0

Tableau 3.4 – Tableau des valeurs caractéristiques.

Exemple 2

Nous définissons trois pseudo-critères avec les deux seuils d’indifférence et d’incomparabilité correspondants : $q_i = 0, 2$, $p_i = 0, 6$.

Les critères généralisés $p_i(a, b) = [g_i(a) - g_i(b)]$ prennent leurs valeurs dans des intervalles de variation tels que :

$$\begin{cases} p(a, b) = 1, & \text{si } p(a, b) > p_i \\ p(a, b) = 1/2, & \text{si } q_i < p(a, b) \leq p_i \\ p(a, b) = 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Les évaluations des alternatives suivant les critères sont exprimées dans le tableau ci-dessous :

Actions \ Critères	Critères		
	i=1	i=2	i=3
a	4	4	4
b	3	3	2
c'	3	2	2
d	3	2	3

Tableau 3.5 – Tableau d'évaluations.

En suivant les mêmes étapes que dans le premier exemple, nous obtenons les valeurs de flux suivantes et le rangement correspondant : $F(a) = (1, 0)$, $F(b) = (2/9, 4/9)$, $F(c) = (0, 5/9)$, $F(d) = (2/9, 4/9)$.

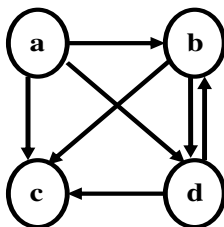


Figure 3.3 – Graphe du rangement partiel.

Nous remarquons qu'il y'a une indifférence entre les actions d et b . Ce nouveau rangement est le même que celui obtenu par le modèle additif et l'AHP révisée. La matrice de comparaison de l'AHP révisée est la suivante :

	i=1	i=2	i=3	$P_{AHP}(\cdot)$
w_i	1/3	1/3	1/3	-
a	1	1	1	1
b	3/4	3/4	1/2	1/3
c	3/4	1/2	1/2	7/12
d	3/4	1/2	3/4	1/3

Tableau 3.6 – Tableau AHP.

L'insertion d'une nouvelle alternative c' à la place de c , fournit un préordre autre que celui du problème d'origine.

Actions \ Critères	Critères		
	i=1	i=2	i=3
a	4	4	4
b	3	3	2
c'	3	1,5	2
d	3	2	3

Tableau 3.7 – Tableau d'évaluations

- $F(a) = (1, 0)$, $F(b) = (2/9, 4/9)$, $F(c) = (0, 5, 5/9)$, $F(d) = (2, 5/9, 4/9)$;
- $(D_b, D_d) = (0.1/6)$, $(D_b^-, D_d^-) = (0.0)$.

Le nouveau préordre est donné par le schéma ci-après :

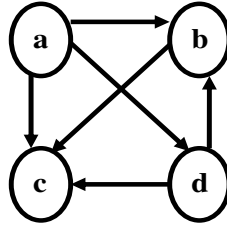


Figure 3.4 – Graphe du rangement partiel.

Les deux exemples montrent une contradiction entre les résultats de l’AHP révisée et le modèle additif et ceux du test n°1, plus explicitement, l’AHP révisée et le modèle additif ont confirmé la fiabilité de Prométhée 1 au moment où le test n°1 a exprimé l’inverse.

3.2.3 Cas d’une relation d’incomparabilité

De même que dans le premier cas, nous allons tester la performance du critère n° 1, néanmoins, nous considérons la relation d’incomparabilité.

Soient $\{a_p, a_k\} \in A$ une paire d’actions incomparables, et une action a' plus mauvaise qu’une autre alternative c , telle qu’on a au moins l’inégalité suivante $\pi(a_p, a') > \pi(a_p, c)$. d (resp. d^-) est la différence entre $[\Phi^+(a_k)]$ et $[\Phi^+(a_p)]$ (resp. $[\Phi^-(a_k)]$ et $[\Phi^-(a_p)]$).

Proposition 3.2. *Soit un rangement établi par application de la méthode Prométhée I et qui contient au moins une relation d’incomparabilité (a_p, a_k) .*

Admettons que $[\Phi^+(a_k)] > [\Phi^+(a_p)]$, la méthode Prométhée 1 est jugée non fiable si la condition suivante n’est pas vérifiée :

$$D_k > (D_p - d) \text{ (resp. } <) \text{ et } D_k^- > (D_p^- - d^-) \text{ (resp. } <).$$

Preuve. Par supposition on a :

$$[\Phi^+(a_k)]_{a'} = \Phi^+(a_k) + D_k > \Phi^+(a_p) + D_p$$

Or $\Phi^+(a_k) = \Phi^+(a_p) + d$

alors

$$\begin{aligned} \Phi^+(a_p) + d + D_k > \Phi^+(a_p) + D_p &\iff \Phi^+(a_p) + d + D_k > \Phi^+(a_p) + D_p \\ &\iff D_k > (D_p - d) \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$[\Phi^-(a_k)]_{a'} = \Phi^-(a_k) + D_k^- > \Phi^-(a_p) + D_p^-$$

Or $\Phi^-(a_k) = \Phi^-(a_p) + d^-$

alors

$$\begin{aligned} \Phi^-(a_p) + d^- + D_k^- > \Phi^-(a_p) + D_p^- &\iff \Phi^-(a_p) + d^- + D_k^- > \Phi^-(a_p) + D_p^- \\ &\iff D_k^- > (D_p^- - d^-) \end{aligned}$$

□

Le rangement obtenu après modification conserve les relations d'incomparabilité sauf si : $[\Phi^-(a_k)]_{a'} > [\Phi^-(a_p)]_{a'}$ (resp. $<$) et $[\Phi^+(a_k)]_{a'} > [\Phi^+(a_p)]_{a'}$ (resp. $<$). Ces inégalités sont vérifiées si et seulement si : $D_k > (D_p - d)$ (resp. $<$) et $D_k^- > (D_p^- - d^-)$ (resp. $<$).

La proposition précédente peut être expliquée par le schémas ci-après :

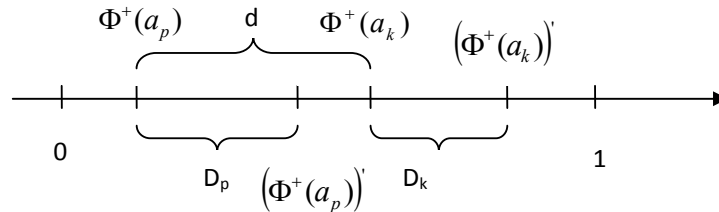


Figure 3.5 – schémas illustratif .

notons que la fiabilité de la proposition citée ci-dessus est liée à la fiabilité du test de critère n°1.

l'exemple suivant vient pour montrer quelques faiblesses dans la performance du test de critère n°1 :

3.2.4 Exemple

Dans cet exemple nous proposons trois pseudo critères, les deux seuils d'indifférence et d'incomparabilité sont donnés par $q_j = 0,2$ et $p_j = 0,6$.

Les critères généralisés $p_j(a, b) = g_j(a) - g_j(b)$ prennent les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} p(a, b) = 1, & \text{si } p(a, b) > p_j \\ p(a, b) = 1/2, & \text{si } q_j < p(a, b) \leq p_j \\ p(a, b) = 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Les évaluations des alternatives suivant les critères sont exprimées dans le tableau ci-après :

Actions \ Critères	Critères		
	j=1	j=2	j=3
a	4	4	4
b	3	3	2
c	3	2,6	2
d	3	2	3

Tableau 3.8 – Tableau d'évaluations.

Cet exemple peut être concrétisé comme suit : un produit 'A' peut être fabriqué suivant quatre procédés de fabrication possibles, chaque procédé génère un mélange, les mélanges sont exprimés par les quatre alternatives a , b , c et d . La qualité de chacun est mesurée à l'aide de trois pseudo critères qui sont à maximiser. Les seuils d'incomparabilité et de préférences sont respectivement $q_i = 0,2$ et $p_i = 0,6$.

Après calcul nous obtenons les valeurs de flux suivantes et le rangement correspondant :

$$F(a) = (1, 0), F(b) = (1/6, 4/9), F(c) = (1/18, 1/2), F(d) = (2/9, 1/2).$$

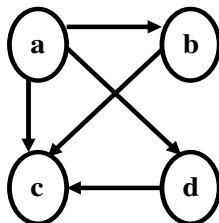


Figure 3.6 – Graphe du rangement partiel.

D'autre part, la comparaison des alternatives deux à deux donne le résultat suivant :

- a est préférée à tout le reste des alternatives ;
- b est préférée à c , elle est incomparable à d car (bP_2d) et (dP_3b) ;
- On constate aussi que la paire de critères $\{2, 3\}$ sont en conflit présumé favorable à d car (dP_3c) et (cQ_3d) (voir [12])

La méthode AHP révisée aboutit au même rangement.

	i=1	i=2	i=3	$P_{AHP}(\cdot)$
w_i	1/3	1/3	1/3	-
a	1	1	1	1
b	3/4	3/4	1/2	2/3
c	3/4	2,6/4	1/2	7,6/12
d	3/4	1/2	3/4	2/3

Tableau 3.9 – Tableau AHP.

L'insertion d'une nouvelle alternative à la place de c , entraîne un préordre autre que celui du problème d'origine.

Actions \ Critères	Critères		
	i=1	i=2	i=3
a	4	4	4
b	3	3	2
c'	3	2	2
d	3	2	3

Tableau 3.10 – Tableau d'évaluations.

$F(a) = (1, 0)$, $F(b) = (2/9, 4/9)$, $F(c) = (0, 5/9)$, $F(d) = (2/9, 4/9)$ et $d = d^- = 1/18$.

Les autres paramètres sont donnés par le tableau suivant :

	b	d
D	1/6	0
D^-	0	1/6

Tableau 3.11 – Tableau des valeurs spécifiques.

Le nouveau préordre est donné par le schéma ci-après :

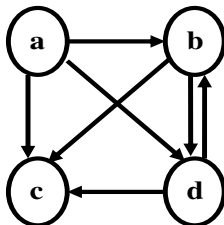


Figure 3.7 – Graphe du rangement partiel.

Relativement au résultat précédent cet exemple représente le cas où la première inégalité n'est pas vérifiée.

De la même façon que dans le cas précédent, nous venons de démontrer que tout exemple vérifie le résultat précédent (proposition n°3) ne donne pas forcément un jugement favorable au sujet de la non fiabilité de Prométhée 1.

Ces derniers résultats montrent que la série de tests présentée par Triantaphyllou et Wang dans [24] et spécialement le test N°1 peut ne pas dégager un jugement correct sur la performance de la méthode utilisée.

Tout en maintenant l'objectif de cette étude, nous présentons quelques résultats trouvés en analysant la performance du test n°1 dans le cas de critères généralisés qualitatifs.

3.3 Critères qualitatifs

par la suite nous considérons le cas des trois types de critères généralisés suivants :

- Type I : vrai critère ;
- Type II : quasi-critère ;
- Type III : Pseudo critère.

Ces trois types sont adaptés à la modélisation des critères qualitatifs.

3.3.1 Cas général

Admettons que a' est une alternative moins meilleure qu'une autre alternative non optimale notée c , telle que, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $\forall a \in A$, $p_i(a, c) = p_i(a, a')$ et $p_i(c, a) = p_i(a', a)$, c'est à dire, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $\forall a \in A$, $g_i(a) - g_i(c)$ et $g_i(a) - g_i(a')$ ainsi que $g_i(a) - g_i(c)$ et $g_i(a) - g_i(a')$ appartiennent au même intervalle de variation.

Le remplacement de c par a' entraîne la proposition suivante :

Proposition 3.3. *Dans un modèle numérique caractérisé par les trois types de critères qualitatifs cités auparavant, la méthode Prométhée I est stable pour le test n° 1, si $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $\forall a \in A$, $g_i(a) - g_i(c)$ et $g_i(a) - g_i(a')$ ainsi que $g_i(a) - g_i(c)$ et $g_i(a) - g_i(a')$ appartiennent au même intervalle de variation, autrement dit, si $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $\forall a \in A$, $p_i(a, c) = p_i(a, a')$ et $p_i(c, a) = p_i(a', a)$.*

Preuve. On a :

$\forall a \in A$,

$$[\Phi^+(a)]_{a'} = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in ((A - \{a, c\}) \cup \{a'\})} \pi(a, b)$$

$$[\Phi^+(a)]_{a'} = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in (A - \{a, a'\})} \pi(a, b) + \frac{1}{n-1} \pi(a, a')$$

Par supposition on a :

$$\pi(a, a') = \pi(a, c) \text{ car } p_i(a, c) = p_i(a, a'), \forall a \in A$$

Donc :

$$[\Phi^+(a)]_{a'} = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in (A - \{a, c\})} \pi(a, b) + \frac{1}{n-1} \pi(a, c)$$

Par conséquent :

$$[\Phi^+(a)]_{a'} = [\Phi^+(a)]$$

De la même manière on montre que : $[\Phi^-(a)]_{a'} = [\Phi^-(a)], \forall a \in A$.

Ces égalités mènent au même rangement d'origine ; cela veut dire que sous les conditions précédentes, le changement de c par a' donne le même résultat de surclassement. \square

Remarque

Il est possible d'aboutir au même résultat ($\forall a \in A$, $\pi(a, c) = \pi(a, a')$ et $\pi(a, c) = \pi(a, a')$) même si $\forall i \in |F|, \forall a \in A$, $p_i(a, c) \neq p_i(a, a')$ et $p_i(c, a) \neq p_i(a, a')$.

Exemple

Soit le tableau d'évaluation suivant :

Actions \ Critères	Critères			
	i=1	i=2	i=3	i=4
a	1	0,98	0,5	0,875
b	0,44	0,789	0,88	1
c	0,22	0,526	0,75	0,625

Tableau 3.12 – tableau d'évaluations

Les critères sont considérés linéaires. Le critère généralisé adéquat est le Type I, d'où :

$$\begin{cases} p_i(a, b) = 1, & \text{si } g_i(a) - g_i(b) > 0 \\ p_i(a, b) = 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

La résolution de cette instance à l'aide de Prométhée 1 donne le préordre suivant : $b \succ a \succ c$ (\succ indique le surclassement).

L'introduction d'une autre alternative $c' = (0, 22; 0, 526; c'_3; 0, 625)$ à la place de c donne deux résultats possibles :

- Si $0, 5 \leq c'_3 \leq 0, 75$, le rangement initial reste inchangé ;
- Sinon, un nouveau rangement se définit où a est indifférente à b : $b = a \succ c$;

Tout exemple de la même forme illustre la proposition 3.3.1.

De même qu'avec les critères qualitatifs, le test de critère n°1 a été analysé en utilisant les critères quantitatifs.

3.4 Critères quantitatifs

Prenons un exemple caractérisé par des critères quantitatifs, la résolution à l'aide de Prométhée 1 implique l'association des critères généralisés de type III (critère linéaire), de type V (critère linéaire avec indifférence) et de type VI (critère gaussien). Toujours dans le but d'évaluer la fiabilité des résultats fournis par la série de tests multicritère, nous avons exploité ces trois types de critères généralisés. Dans cette optique, nous avons étudié la performance du test n°1 et sa sensibilité à la variation de la valeur d , cette quantité représente la différence $g_i(a) - g_i(b)$, $\{a, b\} \in A$.

L'action a' est celle choisie pour remplacer l'action c qui fournit une alternative non optimale. L'alternative relative à a' est plus mauvaise que celle relative à c .

Dans la suite nous nous intéressons au cas du critère linéaire.

3.4.1 Critère linéaire

Suivant les variations de la différence d ($d = g_i(a) - g_i(a')$), nous distinguons deux cas possibles :

1. $g_i(a) - g_i(a') \leq p_i, \forall a \in A$.

Il est évident que si cette dernière inégalité est valable pour toute action a dans A , alors si a surclasse b dans le problème d'origine, il en est de même pour le nouveau problème.

Proposition 3.4. *tout choix de a' de telle sorte que $d \leq p_i$ maintient le rangement d'origine, Prométhée 1 est donc stable pour le test de critère n°1.*

2. $\exists a \in A, g_i(a) - g_i(a') > p_i$.

Prenons une relation d'indifférence entre deux actions notées a_k et a_p , le seuil de préférence $p_j = 2$ et soit le tableau δ d'évaluations -critères par rapport aux actions-suivant :

	i=1	i=2	i=3
a _k	3	2	3
a _p	3	3	2
c	2	2	2

Tableau 3.13 – tableau d’évaluations

Remarque

Sans perte de généralité le tableau δ peut être considéré comme une petite partie d’un grand tableau d’évaluation Δ .

Un préordre solidement établi (résultat comparé avec celui du modèle additif et de l’AHP révisée) montre que a_k est indifférente à a_p . L’introduction d’une nouvelle action $a' = (2, 0, 2)$ à la place de c mène à un résultat tout à fait différent. Nous remarquons que la partie statique du graphe caractéristique de ce type de critère $[p_i, max g_i(x) - g_i(y)]$ $(x, y) \in A$ peut jouer un rôle très important dans le rangement des alternatives.

Soit $\zeta_i(\alpha) = w_i(p_i(\alpha, a') - p_i(\alpha, c)), \forall \alpha \in A$. supposons que a et b sont deux actions telles que b surclasse a .

Proposition 3.5. *Soit a et b deux actions telles que b p a , si l’application du test n°1*

entraîne l’inégalité suivante : $\sum_{i=1}^{|F|} [\zeta_i(a) - \zeta_i(b)] > \Phi^+(b) - \Phi^+(a)$, alors b non P a .

Preuve. Supposons que la relation entre a et b reste inchangée (b surclasse a) et dé-

montrons l’inégalité suivante : $\sum_{i=1}^{|F|} [\zeta_i(a) - \zeta_i(b)] \leq \Phi^+(b) - \Phi^+(a)$.

On a : $[\Phi^+(b)]' \geq [\Phi^+(a)]$ par supposition.

$$[\Phi^+(b)]' \geq [\Phi^+(a)] \Rightarrow [\Phi^+(b)]' - [\Phi^+(a)] \geq 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \Phi^+(b) + \sum_{i=1}^{|F|} w_i(p_i(b, a') - p_i(b, c)) - [\Phi^+(a) + \sum_{i=1}^{|F|} w_i(p_i(a, a') - \\ &p_i(a, c))] \geq 0 \\ &\Rightarrow \Phi^+(b) - \Phi^+(a) - \sum_{i=1}^{|F|} w_i(p_i(a, a') + p_i(a, c)) + \sum_{i=1}^{|F|} w_i(p_i(b, a') - \\ &p_i(b, c)) \geq 0 \end{aligned}$$

D'autre part, on a : $\zeta_i(\alpha) = w_i(p_i(\alpha, a') - p_i(\alpha, c)), \forall \alpha \in A$. Ainsi, l'inégalité précédente peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} &\Phi^+(b) - \Phi^+(a) + \sum_{i=1}^{|F|} \zeta_i(b) - \sum_{i=1}^{|F|} \zeta_i(a) \geq 0 \\ &\Rightarrow \phi^+(a) - \Phi^+(b) + \sum_{i=1}^{|F|} \zeta_i(a) - \sum_{i=1}^{|F|} \zeta_i(b) \leq 0 \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{|F|} \zeta_i(a) - \sum_{i=1}^{|F|} \zeta_i(b) \leq \phi^+(b) - \Phi^+(a) \quad \square \end{aligned}$$

Il est certain que si $\sum_{i=1}^{|F|} [\zeta_i(a) - \zeta_i(b)] > \phi^+(b) - \Phi^+(a)$, alors la relation existante entre a et b change.

Corollaire

Supposons que $\zeta_i^-(\alpha) = p_i(c, \alpha) - p_i(a', \alpha), \forall \alpha \in A$. Si $\sum_{i=1}^{|F|} [\zeta_i(a) - \zeta_i(b)] > \phi^+(b) - \Phi^+(a)$ et $\sum_{i=1}^{|F|} [\zeta_i^-(b) - \zeta_i^-(a)] > \phi^-(a) - \Phi^-(b)$, alors a surclasse b .

Étude de cas

Dans la suite nous étudions un cas particulier du résultat précédent. Supposons que la modification effectuée sur l'alternative c ne concerne qu'un seul critère, noté k , et que l'alternative b surclasse a . L'analyse est établie sur les valeurs possibles de $p_i(., .)$, où uniquement les $p_i(., .)$ qui sont définis à la tête de chaque cas et ceux qu'y dépendent ont la valeur 1 :

- $p_k(b, a') = 1$

Si $p_k(b, a') = 1$ alors $\zeta_k(b) = w_k(p_k(b, a') - p_k(b, c)) = w_k(1 - p_k(b, c))$

$$\sum_{i=1}^{|F|} [\zeta_i(a) - \zeta_i(b)] = \zeta_k(a) - \zeta_k(b) = w_k \left(\frac{g_k(b) - (g_k(a') + 1)}{p_k} \right)$$

Si $w_k \left(\frac{g_k(b) - (g_k(a') + 1)}{p_k} \right) > \phi^+(b) - \Phi^+(a)$ alors a n'est pas surclassée par b .

- $p_k(b, c) = 1$

Puisque c est une action meilleure que a' alors $p_k(b, a)$ est aussi égale à 1. Dans

ce cas, $\zeta_k(a) - \zeta_k(b) = \zeta_k(a) = \frac{g_k(c) - g_k(a')}{p_k}$

Si $w_k \left(\frac{g_k(c) - g_k(a')}{p_i} \right) > \phi^+(b) - \Phi^+(a)$ alors b change de relation par rapport à a .

- $p_k(a, a') = 1$

$$\zeta_k(a) - \zeta_k(b) = w_k(p_k(b, c) - p_k(a, c)) = w_k \left(\frac{g_k(b) - g_k(a)}{p_k} \right)$$

Si $w_k \left(\frac{g_k(b) - g_k(a)}{p_i} \right) > \phi^+(b) - \Phi^+(a)$ alors b ne surclasse pas a .

- $p_k(a, a') = 1$ et $p_k(b, c) = 1$

$$\zeta_k(a) - \zeta_k(b) = w_k(1 - p_k(a, c)) = w_k \left(1 - \frac{g_k(a) - g_k(c)}{p_k} \right)$$

Si $w_k \left(1 - \frac{g_k(a) - g_k(c)}{p_k} \right) > \phi^+(b) - \Phi^+(a)$ alors b ne domine pas a .

Remarque

Dans chaque cas, la nouvelle relation entre a et b reste à vérifier, autrement dit, cette dernière n'est établie qu'après le calcul des flux entrants $\Phi^-(b)$ et $\phi^-(a)$.

Exemple

Soit le tableau d'évaluation suivant :

	i=1	i=2	i=3
a	3	2	2
b	2	4	2
c	2	2	2

Tableau 3.14 – tableau d'évaluations

Prométhée1 fournit l'ordre suivant : $b = (1/3, 1/12)$, $a = (1/6, 1/6)$ et $c = (0, 1/4)$.

Le changement de c par une autre alternative $c' = (2, 0, 2)$, illustre le quatrième point de l'étude de cas. Après calcul, on a :

$$\phi^+(b) - \Phi^+(a) = 1/3 - 1/6 = 1/6$$

$\zeta_i(a) - \zeta_i(b) = \zeta_2(a) - \zeta_2(b) = w_2(1 - p_2(a, c)) = w_2(1 - \frac{g_i(a) - g_i(c)}{p_i}) = 1 > \phi^+(b) - \Phi^+(a)$, d'où a ne surclasse pas b . Pour pouvoir déterminer la nature de la relation existant entre a et b il suffit de calculer le flux entrant de chaque alternative.

3.4.2 Critère linéaire avec indifférence

Le critère généralisé de type III associé au critère linéaire est un cas particulier de celui associé au critère linéaire avec indifférence, il représente le cas où le seuil d'indifférence q_i est nul. Par rapport au critère généralisé considéré, le test de critère n°1 est visiblement sensible à deux passages critiques. De la même manière que pour le type précédent nous considérons que b surclasse a , la nouvelle action a' peut porter un changement sur $\phi^+(b)$, qui peut être plus important que le changement apporté à $\phi^+(a)$ et qui n'a lieu que si la valeur de d au point a' passe d'un intervalle à un autre. Les intervalles de variation possibles sont : $[0, q_i]$, $[q_i, p_i]$ et $]p_i, \max g_i(x) - g_i(y)]$ ($x, y \in A$). La proposition du cas linéaire reste valable pour ce critère généralisé.

Exemple

L'exemple numérique suivant montre le cas où la valeur de la différence d passe de l'intervalle $[0, q_i]$ à $[q_i, p_i]$.

Soit le tableau de données suivant :

	i=1	i=2
a	1,5	3
b	2	3

- $q_i = 0,6$ et $p_i = 2$.
- $\Phi^+(a) = 0, \Phi^-(a) = 1/3, \Phi^+(b) = 1/6$ et $\Phi^-(b) = 0$.

Le modèle additif et l'AHP révisé ont donné les mêmes résultats de rangement.

Soit a' une action telle que $a' = (1, 3)$, On remarque que si on remplace a par l'action a' , a devient indifférente à b .

Le nouveau rangement est dû au passage de la valeur d au point a' d'un intervalle à un autre et non pas à la non fiabilité de Prométhée 1.

Corollaire

la proposition 3.3 est valable dans le cas du critère linéaire si l'intervalle de travail est $]p_i, \max g_i(x) - g_i(y)]$ $(x, y) \in A$, comme elle est valable dans le cas du critère linéaire avec indifférence si les intervalles de travail sont les suivants $]0, q_i]$ et $]p_i, \max g_i(x) - g_i(y)]$ $(x, y) \in A$;

Dans la suite nous développons le cas du critère gaussien :

3.4.3 Critère gaussien

La présente section donne naissance à plusieurs résultats qui sont formulés est démontrés comme suit :

Proposition 3.6. *Dans le cas du critère gaussien on a : $\forall \{a, b\} \in A$, $g_i(a) \geq g_i(b)$ si et seulement si $p_i(a, c) \geq p_i(b, c)$.*

Preuve. • Considérons le cas où $p_i(a, c) = p_i(b, c)$. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} 1 - e^{-(g_i(a)-g_i(c))^2/2\sigma^2} &= 1 - e^{-(g_i(b)-g_i(c))^2/2\sigma^2} \\ \implies e^{-(g_i(a)-g_i(c))^2/2\sigma^2} &= e^{-(g_i(b)-g_i(c))^2/2\sigma^2} \end{aligned}$$

Après l'introduction du logarithme népérien et de la racine carrée on obtient l'égalité suivante : $g_i(a) = g_i(b)$.

L'introduction de la racine carrée est justifiée par le fait que la différence $g_i(a) - g_i(b)$ est toujours positive.

- Examinons maintenant le cas où $p_i(a, a') > p_i(b, a')$. Cette inégalité implique :

$$\begin{aligned} 1 - e^{-(g_i(a)-g_i(c))^2/2\sigma^2} &> 1 - e^{-(g_i(b)-g_i(c))^2/2\sigma^2} \\ \implies e^{-(g_i(a)-g_i(c))^2/2\sigma^2} &< e^{-(g_i(b)-g_i(c))^2/2\sigma^2} \end{aligned}$$

Puisque le logarithme népérien est une fonction continue croissante sur \mathbb{R}_+^* , alors $(g_i(a) - g_i(c))^2 > (g_i(b) - g_i(c))^2$ et donc $g_i(a) > g_i(b)$.

Nous remarquons aisément que le changement apporté à la valeur de l'action c n'a aucune influence sur la comparaison établie entre $p_i(a, c)$ et $p_i(b, c)$, cette comparaison ne dépend que de la relation existant entre $g_i(a)$ et $g_i(b)$.

□

Proposition 3.7. *Dans un exemple caractérisé par des critères généralisés de type gaussien, si $g_i(a) - g_i(c) = \alpha_i(g_i(b) - g_i(c))$ et $g_i(a) - g_i(a') = \alpha_i(g_i(b) - g_i(a'))$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+^*$, alors la méthode Prométhée 1 est stable pour le test de critère $n^\circ 1$.*

Preuve. Nous remplaçons l'action c par l'action a' . On a :

$$p_i(a, a') = 1 - e^{-(g_i(a)-g_i(a'))^2/2\sigma^2} \text{ et } p_i(b, a') = 1 - e^{-(g_i(b)-g_i(a'))^2/2\sigma^2}.$$

Supposons que $g_i(a) - g_i(c) = \alpha_i(g_i(b) - g_i(c))$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+^*$. Donc :

$$p_i(a, c) = 1 - e^{-(g_i(a)-g_i(c))^2/2\sigma^2} = 1 - e^{-(\alpha_i(g_i(b)-g_i(c)))^2/2\sigma^2} = 1 - (e^{-\alpha_i^2} e^{-(g_i(b)-g_i(c))^2/2\sigma^2})$$

Le développement de cette dernière formule montre que la valeur de $\xi = e^{-\alpha_i^2}$ est le seul facteur duquel la comparaison entre $p_i(a, c)$ et $p_i(b, c)$ dépend.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} p_i(a, a') &= 1 - e^{-(g_i(a)-g_i(a'))^2/2\sigma^2} \\ &= 1 - e^{-(\alpha_i(g_i(b)-g_i(a')))^2/2\sigma^2} \\ &= 1 - e^{-\alpha_i^2} e^{-(g_i(b)-g_i(a'))^2/2\sigma^2} \end{aligned}$$

La différence entre $p_i(a, c)$ et $p_i(b, c)$ est égale à la différence entre $p_i(a, a')$ et $p_i(b, a')$, c'est-à-dire, $p_i(a, c) - p_i(b, c) = p_i(a, a') - p_i(b, a')$, $\forall a \in A$.

□

En passant à la formule générale $\Phi^+(\cdot)$ qui permet de déterminer l'ordre des actions, nous constatons que la quantité $\pi(a, a')$, $\forall a \in A$ est la seule qui peut influencer l'ancien rangement (changer l'ordre des alternatives). Alors, si la relation établie entre $\pi(a, a')$ et $\pi(b, a')$ reste inchangée, le rangement d'origine reste stable.

La proposition précédente peut être généralisée au résultat suivant :

Proposition 3.8. *En partant du fait que a surclasse b , l'étude effectuée sur le type de critère gaussien montre que si $\sum_{i=1}^{|F|} \gamma_i(a) + S < \sum_{i=1}^{|F|} \gamma_i(b)$ et $\sum_{i=1}^{|F|} \gamma'_i(a) + S' \geq \sum_{i=1}^{|F|} \gamma'_i(b)$, alors b surclasse a .*

notons que :

- $\gamma_i(\cdot) = w_i(e^{-(g_i(\cdot)-g_i(c))^2/2\sigma^2} - e^{-(g_i(\cdot)-g_i(a))^2/2\sigma^2})$;
- $\gamma'_i(\cdot) = w_i(e^{-(g_i(c)-g_i(\cdot))^2/2\sigma^2} - e^{-(g_i(a')-g_i(\cdot))^2/2\sigma^2})$;

- $S = \Phi^+(a) - \Phi^+(b)$.
- $S' = \Phi^-(b) - \Phi^-(a)$.

Cette catégorie de critères généralisés est caractérisée par la fonction Exponentielle qui impose une difficulté particulière lors d'une étude effectuée sur la somme pondérée de ces variantes, ce problème a rendu la recherche d'un exemple numérique qui montre la non fiabilité du premier test une tâche difficile.

3.5 autres résultats

afin d'élargir le domaine d'application des résultats proposés précédemment, nous avons jugé utile de vérifier la compatibilité de ces derniers avec Prométhée 2. Dans cet ordre d'idées, nous avons apporté des modifications sur les conditions d'efficacité du test n°1. Rappelons, par ailleurs, que le préordre établi par la méthode Prométhée 2 est un préordre complet qui ne laisse pas lieu à l'incomparabilité entre les actions.

Sous les mêmes suppositions, le deuxième résultat change complètement de conditions, elles sont en effet remplacées par l'inégalité suivante : $D_p^- + D_p \neq D_k^- + D_k$;

Le résultat n°2 ne peut pas être généralisé car la méthode ne donne pas lieu à l'incomparabilité.

3.5.1 Critères quantitatifs

- Le résultat n°3 reste valable pour Prométhée 2 car si $(\Phi^+(a))_{a'} = (\Phi^+(a))$ et $(\Phi^-(a))_{a'} = (\Phi^-(a))$, $\forall a \in A$, alors $(\Phi(a))'_{a'} = (\Phi(a))$.

3.5.2 Critères qualitatifs

- Critère linéaire et critère linéaire avec indifférence :

- Par rapport au premier cas, Prométhée 2 peut aussi résister au test de critères n°1 ;
- Les conditions du deuxième cas s'écrivent comme suit : on considère que a surclasse b , si $\sum_{i=1}^{|F|} (\xi_i(a) - \xi_i(b)) + \sum_{i=1}^{|F|} (\xi_i^-(a) - \xi_i^-(b)) > \Phi(b) - \Phi(a)$, alors b surclasse a .
- Critère gaussien : si $[\sum_{i=1}^{|F|} \gamma_i(a) + S] + [\sum_{i=1}^{|F|} \gamma'_i(a) + S'] < \sum_{i=1}^{|F|} \gamma_i(b) - \sum_{i=1}^{|F|} \gamma'_i(b)$, alors b surclasse a .

3.6 L'amélioration proposée

L'étude critique montre que le test de critère n°1 connaît une instabilité, voir faiblesse, à l'application de Prométhée. En effet, le test est parfois incompatible avec le critère généralisé choisi, comme il se peut qu'il est sans aucun effet sur la fiabilité de la méthode (cas du critère gaussien). Ces insuffisances nous ont poussé à entreprendre un travail de recherche afin d'y remédier. Pour ce faire, nous proposons un algorithme qui prend en considération les critères généralisés les plus usités dans la littérature :

3.6.1 Algorithme

Input

- Un ensemble fini des actions A ;
- Une famille cohérente de critères avec le tableau d'évaluation correspondant ;
- L'application de Prométhée sur l'ensemble de données.

Étape 0

Si le critère généralisé introduit est de type gaussien, alors **sortir**, sinon **aller à l'étape suivante**.

Étape 1

- a. Remplacer une alternative c non-optimale par une autre plus mauvaise notée a' qui est générée suivant les critères de choix présentés par Wim De Keyser, Peter Peeters [14] :
- Dans le cas des critères qualitatifs, **aller à b** ;
 - Sinon, **aller à c** ;
- b. Calculer les indices de préférence multicritère $\pi(a, a')$ et $\pi(a', a)$.
- i. Si $\pi(a, c) = \pi(a, a')$ et $\pi(c, a) = \pi(a', a), \forall a \in A$, alors **retourner à a** ;
 - ii. Sinon, **aller à l'étape suivante** ;
- c. Calculer les différences $g_i(a) - g_i(a')$ et $g_i(a') - g_i(a)$ pour tout $a \in A$:
- i. Si $q_i \leq g_i(a) - g_i(a') \leq p_i$ et $q_i \leq g_i(a') - g_i(a) \leq p_i, \forall a \in A, \forall i \in |F|$, **aller à a** ;
 - ii. Sinon, **aller à l'étape suivante** ;

Étape 2

Effectuer le rangement des alternatives et le comparer avec celui d'origine :

- i. Si c'est le même rangement, alors on ne peut rien dire sur la fiabilité de la méthode ;
- ii. Sinon, résoudre le même exemple à l'aide de l'AHP et comparer les deux rangements :
 - Si l'AHP fournit le même rangement, alors Prométhée n'est pas fiable pour cet exemple ;
 - Sinon, **retourner à (1.a)** ;

Fin.

3.6.2 Justification de l'algorithme

L'algorithme ci-dessus est justifié comme suit :

Étape 0 est expliquée par la proposition 1.8.

Étape 1

- (1.a) : l'énoncé du test de critère n°1 ;
- (1.b) : est justifié par la proposition n°3 de ce chapitre ;
- (1.c) : est expliqué par la proposition n°4.

Étape 2

- (i) vient du principe de travail de la série de tests dont la vérification d'un seul test n'exclut pas la vérification du reste ;
- (ii) est justifié par les exemples (3.2.2) et (3.2.4).

l'amélioration proposée dans cet algorithme ne concerne que le test de critère n°1, elle est basée sur l'ensemble de résultats mentionnés et démontrés dans la partie concernant l'étude critique de ce chapitre.

La série de tests de Triantaphylou sera présentée sous une nouvelle forme ; nous allons remplacer le premier test par l'algorithme cité ci-dessus, les tests 2 et 3 restent inchangés. Cette nouvelle série a été établie en analysant la performance du test n°1, qui a montré une faiblesse remarquable avec les méthodes Prométhée.

Conclusion

Le travail réalisé dans le cadre de cette thèse peut se résumer en trois points essentiels. Dans un premier temps, différentes notions d'optimisation, rappels sur les relations et quelques méthodes d'aide multicritère à la décision ont été passées en revue. Ensuite les principaux travaux de recherche relatifs au thème proposé ont été présentés. Le dernier point est consacré à l'introduction de quelques résultats permettant l'évaluation de la série de tests de critère et la génération d'un algorithme qui améliore la performance de cette dernière.

Nous avons donc, dans le premier chapitre, dressé un aperçu général des problèmes d'optimisation et ainsi des notions unicritère et multicritère, nous nous sommes attachés sur les définitions et les notations des méthodes d'aide multicritère à la décision dont on avait besoin tout au long de cette thèse. Cette étape est précédée par un bref passage sur les relations de surclassement, nous nous sommes particulièrement intéressés aux méthodes Prométhée qui sont à la base de tous les résultats obtenus.

Le second chapitre est consacré à l'étude de quelques travaux de recherche élaborés dans le but d'évaluer les méthodes d'aide multicritère à la décision. L'observation de l'évolution de la série de tests de critère nous a permis de mieux comprendre la nature du problème posé.

Dans le dernier chapitre, qui représente l'essentiel du travail élaboré, nous avons pu démontré l'infirmité de la série de tests et par la suite apporté des améliorations sur cette

dernière à travers un nouvel algorithme d'évaluation qui remplace le premier test de critère. Nous avons également donné des exemples numériques qui peuvent représenter des cas réels et qui illustrent la faiblesse du premier test de critère. Parallèlement, nous avons défini l'intervalle de fiabilité des méthodes Prométhée dans le cas du premier test de critères et sur la base des critères généralisés les plus utilisés dans la littérature.

Par la présente thèse, nous avons essayé de répondre à la problématique de la performance de la série de tests de critère et d'apporter une contribution personnelle avec de nouveaux résultats permettant l'amélioration des acquis actuels.

Nous espérons avoir cerné au mieux la problématique posée et ouvert de nouvelles voies de recherche comme par exemple :

- Critiquer et améliorer les tests de critère de transitivité;
- Généraliser l'algorithme proposé sur le reste des méthodes d'aide multicritère à la décision;
- Proposer d'autres tests qui renforcent la performance de la série de tests ou qui la remplace.

Bibliographie

- [1] M. Abbas, *Contribution au rapprochement de la théorie des graphes et de l'aide à la décision : graphes parfaits et modèles de préférence*, Thèse de doctorat d'état, ULB, 1994 ;
- [2] Belton. V, T. Gear, *On a short-coming of Saaty's Method of Analytic Hierarchies*, Omega, 228-230, December 1983 ;
- [3] S. Ben Mena, *Introduction aux methods multicritères d'aide à la decision*, faculté universitaire des sciences agronomiques de gembloux, 2000 ;
- [4] J. P. Brans, B. Mareschal, *How to decide with Promethee*, ULB and VUB Brussels Free Universities ;
- [5] J. P. Brans, B. Mareschal, *Promethee-Gaia :une méthodologie d'aide à la décision en présence de critères multiples*, éditions de l'université de Bruxelles, Ellipes, 2001 ;
- [6] J. Figueira, B. Roy, V. Mousseau, *Electre methods*, Multi criteria decision analysis " chapter 4 ", Lamsade, 2006 ;
- [7] J. R. Figueira, S. Greco, B. Roy, *Electre methods with interaction between criteria : an extension of the concordance index*, cahier de Lamsade, 2006 ;
- [8] R. D. Luce, *Semi-orders and a theory of utility discrimination*, Econometrica, Vol.24, n°.2, 178-191, 1956 ;

- [9] F. A. Lootsma, Barzilai, *Power relations and group aggregation in the multiplicative AHP and Smart*, journal of multicriteria decision making analysis, 155-165, 1997 ;
- [10] W. D. Keyser, P. Peeters, *A note on the use of PROMETHEE multicriteria methods*, European journal of operational research, 457-461, 1996 ;
- [11] B. Roy, *Méthodologie multicritères d'aide à la décision*, Economica, paris, 1985 ;
- [12] B. Roy, D. Bouyssou, *Aide à la décision multicritère : méthodes et cas*, Economica, paris, 1993 ;
- [13] P. Salminen, J. Hokkanen, R. Lahdelma, *Comparing multicriteria methods in the context of environmental problems*, European journal of operational research, 485-496, 1998 ;
- [14] T. L. Saaty, *Decision making with the AHP : why is the principal eigenvector necessary*, University of Pittsburgh, 85-91, 2003 ;
- [15] E. Triantaphyllou, *Two new cases of rank reversals when the AHP and some of its additive variants are used that do not occur with the multiplicative AHP*, journal of multi-criteria decision analysis, 11-25, 2001 ;
- [16] E. Triantaphyllou, A. Sanchez, *A sensitivity analysis approach for some deterministic multi-criteria decision making methods*, Louisiana state university, 151-194, 1997 ;
- [17] E. Triantaphyllou, B. Shu, S. Nieto Sanchez, and T. Ray, *Multi-criteria decision making : an operations research approach*, Louisiana state university, 175-186, 1998 ;
- [18] E. Triantaphyllou, S. H. Mann, *An examination of the effectiveness of multi-dimensional decision-making methods : a decision-making paradox*, The Pennsylvania state university, 1989, 303-312 ;

- [19] E. Triantaphyllou, S. H. Mann, *Some critical issues in making decisions with pairwise comparisons*, Louisiana state university ;
- [20] E. Triantaphyllou, S. H. Mann, *A computational evaluation of the original and revised analytic hierarchy process*, Louisiana state university, 609-618, 1994 ;
- [21] C. Vélain, PH. Vincke, *Méthode flowsort : extension de la méthode prométhée au problème de tri multicritère*, Mémoire de licence, Université libre de bruxelles, 2007 ;
- [22] PH. Vincke, *L'aide multicritère à la décision*, Editions de l'université de bruxelles, Ellipses, 1989 ;
- [23] X. Wang, E. Triantaphyllou, *Ranking irregularities when evaluating alternatives by using some multicriteria decision analysis methods*, European journal of operational research, 27-1 à 27-12, 2006 ;
- [24] X. Wang, E. Triantaphyllou, *Ranking irregularities when evaluating alternatives by using some Electe methods*, European journal of operational research, 45-63, 2008 ;