
Ce mémoire porte sur des aspects théoriques et numériques de quelques problèmes mathématiques issus du traitement d'images. Ces problèmes concernent essentiellement des questions de restauration d'images, et s'inscrivent le plus souvent dans les domaines des équations aux dérivées partielles, du calcul des variations et de l'optimisation.

Modélisation du problème traité

Lorsque l'on observe un objet ou un paysage par des moyens de photographie, les images que l'on obtient sont souvent dégradées par des bruits extérieurs ou intérieurs à l'appareil utilisé, et par un flou qui peut être dû au système optique de l'appareil, à l'atmosphère ou au mouvement de l'objet. Si l'on veut produire des observations de bonne qualité, reflétant autant que possible les propriétés de la scène originale, il faut effectuer une *restauration* dont l'objectif principal est éliminer autant que possible les effets du bruit tout en défloutant l'image. La modélisation mathématique de ce phénomène physique fournit une équation reliant les observations à la variable recherchée par une relation du type général

$$u_0 = Ru + n,$$

où u_0 est l'image observée, u l'image originale, R un opérateur traduisant la dégradation (souvent supposé linéaire), et n un bruit additif (c'est donc une variable aléatoire). Le problème principal consiste à reproduire fidèlement l'image originale u à partir de u_0 , sous certaines hypothèses sur n et R , qui sont le plus souvent inconnus. Quand $R = I$, on parle du problème de débruitage (*denoising*). Quand $n = 0$ et R partiellement inconnu, on parle de défloutage (*deblurring*). Les autres cas correspondent à un débruitage et un défloutage

au même temps. Il s'agit en général d'un *problème inverse* où le but est de reconstruire une donnée à partir d'une observation.

Il existe plusieurs modèles non probabilistes pour restaurer une image quand l'origine du flou R est connue. L'un de ces modèles est basé sur le maximum de vraisemblance et consiste à l'origine à minimiser la fonctionnelle

$$E_1(u) = \int_{\Omega} |Ru - u_0|^2 dx,$$

sous certaines contraintes sur u . Malheureusement ce modèle est en général mal posé ou conduit à des instabilités et cela souvent parce que l'opérateur R^*R possède des petites valeurs propres. L'une des façons de pallier à cette difficulté consiste à minimiser une énergie de la forme suivante

$$E(u) = E_1(u) + \lambda E_2(u),$$

où $E_2(u)$ est un terme de *régularisation* qui dépend généralement de u (le gradient de u). Dans le cas d'une régularisation de type Tikhonov, ce terme est de la forme

$$E_2(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

Néanmoins, il s'avère que cette régularisation introduit trop de diffusion près des discontinuités. D'autres modèles de régularisation avec prise en compte des discontinuités sont apparus comme une voie intéressante à exploiter et le problème du choix de la fonctionnelle E_2 à utiliser afin d'assurer au mieux une préservation des discontinuités s'est donc trouvé rapidement posé. Sous sa forme générale, le modèle utilisé conduit au problème de minimisation

$$\min_u E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_0 - Ru|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) dx, \quad (1)$$

où la fonction ϕ est à choisir convenablement. Les trois principales conditions portent sur le comportement de la fonction $\frac{\phi'(t)}{t}$: Elles se traduisent par :

-
- (i) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi'(t)}{t} = M > 0$, et $\phi'(0) = 0$: lissage isotropique dans les zones homogènes.
 - (ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi'(t)}{t} = 0$, et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi''(t) = 0$: préservation des forts gradients (i.e : des discontinuités).
 - (iii) $\frac{\phi'(t)}{t}$ continue et strictement décroissante afin d'assurer la stabilité du terme de régularisation.

De plus pour assurer l'unicité de la solution, ϕ est supposé convexe. Dans cette étude on fait implicitement l'hypothèse que les forts gradients correspondent aux contours présents dans l'image originale, et qu'on aimerait les préserver (voir[4]) (en pratique ce n'est pas toujours vrai ; de fort gradients peuvent aussi être dûs au bruit). De la même façon on a supposé que les faibles gradients peuvent correspondre à des régions homogène dans l'image.

Le cas d'une régularisation de type Tikhonov (voir[8]) correspondant au cas $\phi(t) = t^2$. Le modèle de Rudin-Osher et Fatimi, (voir [7]) dit aussi de Variation Totale (TV) correspond au cas $\phi(t) = t$.

Soulignons par ailleurs que l'opérateur de floutage K est souvent de type convolutif de la forme

$$Kv = k \star v,$$

où k est un noyau vérifiant $k \star 1 = 1$. Quand le flou est dû à un effet de défocalisation (*out-of-focus*), k est la fonction indicatrice d'un disque. Dans le cas d'un flou gaussien, k est proportionnel à une fonction gaussienne.

Notons enfin qu'il existe d'autres modèles de débruitage en l'absence de flou

($R = I$). On peut par exemple citer les techniques de filtrage des fréquences élevées, supposées correspondre à un bruit (voir[5]). On peut aussi citer des techniques basées sur une équation d'évolution non-linéaire (voir [1]) du type

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla u(t, x)|)\nabla u(t, x)) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y). \end{cases} \quad (2)$$

Dans le présent mémoire, on se contente d'étudier les modèles variationnels du type (1).

Aspects théoriques

Dans le cas où la fonction ϕ est suffisamment régulière, le problème d'optimisation (1) est équivalent à l'équation aux dérivées partielles

$$K^*Ku - \operatorname{div}\left(\frac{\phi'(|u|)}{|u|}u\right) = K^*u_0 \text{ dans } \Omega, \quad (3)$$

complétée avec des conditions aux limites. Quand ϕ n'est pas assez régulière, cette équation est à remplacer par une inclusion différentielle faisant intervenir la sous-différentielle de E_2 .

Toutefois, l'approche par minimisation (1) est souvent préféragée dans la littérature. L'espace naturel pour étudier ce problème est $BV(\Omega)$, l'espace des fonctions à variations bornées. En raison du manque de la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle (1), cette dernière est souvent remplacée par une fonctionnelle dite *relaxée*, qui n'est autre que l'enveloppe semi-continue inférieure de $E(u)$ par rapport à la topologie $BV - w^*$. L'existence d'une solution $u \in BV(\Omega)$ au problème relaxé devient dès lors une tâche facile.

Une autre approche pour prouver l'existence d'une solution, consiste à

considérer une fonctionnelle modifiée de la forme

$$\min_u E_\epsilon(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_0 - Ru|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} \phi_\epsilon(|\nabla u|) dx, \quad (4)$$

pour laquelle il existe un minimum $u_\epsilon \in W^{1,2}(\Omega)$. On montre ensuite que u_ϵ converge dans $L^1(\Omega)$ vers la solution u du problème relaxé (quand $\epsilon \rightarrow 0$).

Aspects numériques

En pratique, une image u en niveaux de gris est modélisée par un vecteur bidimensionnel $u = (u_{i,j})_{i \leq N, j \leq M}$. Dans le cas du problème du denosing ($R = I$) avec une régularisation de type TV ($\phi(t) = t$), Chambolle (voir[2]) a apporté une caractérisation de la solution du problème discret (1). Plus exactement, il a montré que

$$u = u_0 - \Pi_{\lambda G} u_0 \quad (5)$$

où $\Pi_{\lambda G}$ est la projection orthogonale sur le convexe

$$G = \{div p, |p_{i,j}| \leq 1, \forall(i, j)\}.$$

Le calcul de l'image u se ramène donc au calcul de la projection $\Pi_{\lambda G}$. Cela revient à résoudre le problème de minimisation

$$P_{\lambda G}(u_0) = \min \{ |\lambda div(p) - u_0|^2 : |p_{ij}| \leq 1 \forall i, j = 1 \dots N \} \quad (6)$$

Cela peut se faire aisément par la méthode du gradient projeté. Chambolle [2] proposa aussi l'algorithme itératif suivant : $p^0 = 0$, et

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{p_{i,j}^n + \tau(\nabla(div(p^n) - u_0/\lambda))_{i,j}}{1 + \tau|(\nabla(div(p^n) - u_0/\lambda))_{i,j}|},$$

pour lequel il prouve la convergence sous la condition

$$0 < \tau < \frac{1}{8}.$$

Un autre algorithme dit algorithme semi-quadratique [3] s'appuie sur la minimisation de l'énergie modifiée $E_\epsilon(u)$ ci-dessus. Ainsi, pour (u^0, b^0) donné, on a les itérations suivantes dont chacune est composée de deux étapes :

– Etape 1 : u_ϵ^{n+1} est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} R^*Ru - \lambda \operatorname{div}(b^n \nabla u) = R^*u_0 & \text{dans } \Omega \\ b^n \frac{\partial u}{\partial N} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

– Etape 2 :

$$b^{n+1} = \frac{\varphi'(|\nabla u_\epsilon^{n+1}|)}{2|\nabla u_\epsilon^{n+1}|}.$$

On a mis en oeuvre chacune de ces méthodes dans des codes écrits en Langage C et avec Matlab. Les résultats numériques confirment l'efficacité de ces méthodes. Nous avons mené aussi une série de comparaison entre les deux algorithmes de façon à définir leurs avantages et inconvénients.

Bibliographie

- [1] L. Alvarez, P.L. Lions, and J.M. Morel. *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion (ii)*. SIAM J, Numer Anal, 29(3) : 845-866, 1992 .
- [2] A. Chambolle, et P. L. Lions, *Image Recovery via Total Variation Minimization and Related Problems*, Numer. Math, Vol. 76, 2(1997) ; pp. 167-188.
- [3] P. Charbonnier, G. Aubert, L. Blanc-Feraud et M. Barlaud. *Two determinist half-quadratic regularization algorithms for computed imaging*. Firts IEEE Internat. conf. on Image Processing, Vol. II, Austin, TX, IEEE, Pitawaway, NJ, 1994, pp. 168-172.
- [4] P. Charbonnier, G. Aubert, L. Blanc-Feraud et M. Barlaud. *Determinist edge-preserving regularization in computed imaging*. IEEE trans. Image Processing, 6(1997), pp. 298-311.
- [5] R. Deriche et O. Faugeras. *Les EDP en Traitement des Images et Vision par Ordinateur*. Traitement du Signal, 13(6), 1996. Numéro spécial RFIA 96.
- [6] J.Malik et P. Perona. *Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 12(7) :629-639, July 1990.

- [7] L. Rudin, S. Osher, et E. Fatemi. *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*. Physica D, 60 :259-268, 1992.
- [8] A. N. Tikhonov *regularization of incorrectly posed problems*, Sov. Math. Dokl. Vol. 4, pp. 1624-1627, 1963.