N° d'ordre : 23 / 2010-M / MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POP0ULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

En Mathématiques

Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres

Par

DJEDIDI Mohamed Yacine

Sujet

Grandes valeurs de la fonction arithmétique : Nombre de factorisations d'un entier en produit ordonné de facteurs premiers

Soutenu publiquement, le 10 juin 2010, devant le jury composé de :

M.	**BENZAGHOU**	Benali	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Président.
M.	**HERNANE**	Mohand Ouamar	Maître de Conférences	à l'U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
M.	**AIDER**	Méziane	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Examinateur.
M.	**HACHAICHI**	Mohamed Salah	Maître de Conférences	à l'U.S.T.H.B.	Examinateur.
M.	**KESSI**	Arezki	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Examinateur.
M.	**ZITOUNI**	Mohamed	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Examinateur.

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur le Professeur Benali BENZAGHOU, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Je remercie vivement Monsieur le Professeur Mohamed ZITOUNI, d'avoir accepté d'examiner ce travail en consacrant son temps à lire cette thèse.

Je remercie vivement Monsieur Mohamed Salah HACHAÏCHI*, Maître de Conférences d'avoir accepté d'examiner ce travail.* Que Monsieur le Professuer Méziane AIDER et Monsieur le Professuer Arezki KESSI, qui ont bien voulu faire partie du jury, trouvent ici mes remerciements les plus sincères.

Je voudrais aussi sincèrement exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur Mohand Ouamar HERNANE mon Directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents, pour leur soutien et leur confiance en moi, ainsi qu'au reste de la famille, sans oublier mes amis et tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin à ma formation.

Table des matières

Notations

On désignera par

k un entier positif, p_k le k-ième nombre premier tel que $p_1 = 2$, $p_2 = 3$,...

$\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$, l'ensemble des nombres premiers.

$\log$: le logarithme Népérien.

$[x]$: partie entière du nombre réel x.

$\delta(n)$: la fonction arithmétique définie par :

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & si\ n = 1 \\ 0 & si\ n \geq 2 \end{cases}.$$

$1(n)$: la fonction arithmétique définie par :

$$1(n) = 1, \text{ pour tout } n \geq 1$$

$\mu(n)$: la fonction arithmétique définie par :

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ si } n \text{ à un facteur carré} \\ (-1)^k \text{ si } n \text{ est un produit de } k \text{ facteurs premiers distincts} \end{cases}$$

$\omega(n)$: la fonction arithmétique, qui compte le nombre de facteurs premiers distincts de n.

$\Omega(n)$: la fonction arithmétique, le nombre de facteurs premiers de n, compté avec multiplicité.

$\tau(n)$: la fonction arithmétique, qui compte le nombre de diviseurs positifs de n.

$\pi(x)$: la fonction, qui compte le nombre de nombres premiers $\leq x$.

f et g étant deux fonctions réelles

$f \sim g$ signifie que f est asymptotiquement équivalente à g , autrement dit

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

$f = o(g)$ si pour tout nombre réel strictement positif ε, il existe un nombre réel x_0, tel que on ait

$$\forall x \geq x_0 : \text{on a } |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

$f = O(g)$ s'il existe deux constantes x_0 et $C > 0$, tel qu'on ait

$$\forall x \geq x_0 : \ \ |f(x)| \leq C\,|g(x)|\,.$$

$f \asymp g$: signifie que $f = O\,(g)$ et $g = O(f)$.

$f \ll g$: signifie que $f = O\,(g)$.

$f = O_\nu(g)$ cette notation signifie que la constante C dépend de ν.

$E_1(x)$: l'exponentielle intégrale :

$$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \ , \ x > 0$$

dont le développement asymptotique est

$$E_1(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + ...\right) = e^{-x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\right), \text{ lorsque } x \to +\infty.$$

$Li(x)$: le logarithme intégral :

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Grandes valeurs de la fonction : Nombre de factorisations d'un entier en produit ordonné de facteurs premiers.

Introduction

Le travail que nous présentons dans ce mémoire est consacré à l'étude des grandes valeurs de la fonction $h(n)$, qui compte le nombre de factorisations d'un entier en produit ordonné de facteurs premiers non distincts. Si $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} ... q_k^{\alpha_k}$ alors,

$$h(n) = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k)!}{\alpha_1! \alpha_2! ... \alpha_k!}$$

Pour étudier les grandes valeurs de la fonction $h(n)$, nous sommes amenés à résoudre le problème d'optimisation en nombres entiers suivant : $\begin{cases} n \leq x \\ \max h(n) \end{cases} \qquad (P_1)$

où $n = p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_k^{x_k}$ et $p_1 = 2$, $p_2 = 3$,..., p_k le $k-$ième nombre premier et les inconnues x_i sont des entiers positifs ou nuls.

Pour k assez grand, le problème (P_1) est équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} x_1 \log 2 + x_2 \log 3 + x_3 \log 5 + ... + x_k \log p_k \leq \log X \\ \max \log \left(\dfrac{(x_1 + x_2 + ... + x_k)!}{x_1! x_2! ... x_k!} \right) \end{cases} \qquad (P_2)$$

Nous introduisons la fonction $P(s) = \sum_{p \ premier} p^{-s}$ pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, appelée fonction zéta des nombres premiers, cette fonction joue un rôle important dans l'étude des grandes valeurs de la fonction h. L'équation $P(s) = 1$, admet une unique solution réelle positive λ, les calculs numériques montrent que $\lambda = 1.399433...$. Les résultats exposés dans ce travail reposent essentiellement sur l'article de M. O. Hernane et J. L. Nicolas cf.[15], dans lequel les auteurs ont démontré qu'il existe deux constantes positives C_1 et C_2 tel que, pour tout $n \geq 3$, on ait

$$\log h(n) \leq \lambda \log n - C_1 \frac{(\log n)^{\frac{1}{\lambda}}}{\log \log n}$$

et pour tout $n \geq 3$, il existe un entier $m \leq n$ tel que :

$$\log h(m) \geq \lambda \log n - C_2 \frac{(\log n)^{\frac{1}{\lambda}}}{\log \log n}.$$

Nous détaillerons les preuves de ces résultats.

Un entier N est appelé nombre h-champion si pour tout entier M, $M < N$ implique $h(M) < h(N)$.

Ce présent mémoire est constitué de trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques notions et résultats sur les fonctions arithmétiques. Nous introduisons également les fonctions de factorisation et nous exposons quelques propriétés qui nous seront utiles dans la suite de ce travail.

Dans le deuxième chapitre, nous utilisons la formule de Stirling pour approximer la fonction $log(h(n))$ par une fonction convenablement choisie.

Nous utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange, pour résoudre le problème d'optimisation (P_2) et nous démontrons le théorème (2.5.2), qui donne les grandes valeurs de la fonction $h(n)$.

Au troisième chapitre, nous étudions les propriétés des nombres $h-$champions. Nous montrons que le nombre $\omega(N)$ de facteurs premiers distincts d'un nombre $h-$champion satisfait $\omega(N) \sim \lambda a^{1/\lambda} \dfrac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N}$ et que le nombre $\Omega(N)$ de facteurs premiers comptés avec multiplicité, vérifie $\Omega(N) \sim 2^{\lambda} a \log N$ où $a = 0.5776486....$ Nous donnons aussi une estimation du nombre $Q(X)$ de nombres $h-$champions inférieurs ou égaux à X où X est un nombre réel, tel que $X > 1$.

A la fin de ce chapitre nous présentons en annexe deux programmes écrits en Maple, qui permettent de déterminer les nombres $h-$champions ainsi que les constantes λ_k, a_k. Nous dressons deux tables des valeurs de ces constantes :

La première donne quelque valeurs de λ_k, a_k et la seconde donne quelque nombres $h-$champions.

Chapitre 1

Fonctions de factorisation

1.1 Rappels d'arithmétique

Définition 1.1.1 *Une fonction arithmétique est une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$.*

On dit qu'une fonction arithmétique f est multiplicative, si pour tous m et n premiers entre eux, on a

$$f(mn) = f(m)f(n) \text{ et } f(1) = 1.$$

Définition 1.1.2 *La fonction μ de Möbius, est la fonction arithmétique définie par*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ si } n \text{ à un facteur carré} \\ (-1)^k \text{ si } n \text{ est un produit de } k \text{ facteurs premiers distincts} \end{cases}$$

Théorème 1.1.1 *Soit n entier ≥ 1, alors*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Preuve. cf.[2] ■

1.1.1 Le produit de convolution de fonctions arithmétiques.

Définition 1.1.3 *Soient f et g deux fonctions arithmétiques, le produit de convolution (ou de Dirichlet) de f et g est défini par,*

$$f * g(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} f(\frac{n}{d})g(d) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1)g(d_2).$$

1.1.2 Séries de Dirichlet.

Définition 1.1.4 *Soit f une fonction arithmétique. On appelle série de Dirichlet associée à f la série,*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

où s est une variable réelle ou complexe.

Si $f(n) = 1$, pour $n \geq 1$, la série de Dirichlet associée à f, est $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

La fonction Zêta de Riemann.

Proposition 1.1.1 *Soit s un nombre complexe, tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$.*

Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ est convergente.

Preuve. Soit $s = \sigma + it$, un nombre complexe tel que $\sigma > 1$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ est absolument convergente puisque le module de son terme général

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}} = \frac{1}{n^{\sigma}}$$

est le terme général d'une série de Riemann, convergente pour $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 1$. ■

Définition 1.1.5 *Soit s un nombre réel ou complexe.*

On appelle fonction zêta Riemann et on note $\zeta(s)$ la somme de la série

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \text{ pour } \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Théorème 1.1.2 *Soient f et g deux fonctions arithmétiques et h leur produit de Dirichlet. Soient $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ et $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$ les séries de Dirichlet associes à f et g. Alors pour tout nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) > Max(a, b)$ on a,*

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) n^{-s} \tag{1.1.1}$$

où a et b sont les abscisses de convergence absolues respectives de $F(s)$ et $G(s)$.

Preuve. (cf.[2] et [27]). ■

Produit Eulérien.

Proposition 1.1.2 *Soit s un nombre complexe tel que* $\mathrm{Re}\,(s) > 1$*.*

Alors,

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1} \tag{1.1.2}$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.

Preuve. (cf.[14] et [2]). ■

La fonction Zêta des nombres premiers.

Définition 1.1.6 *Soit s un nombre réel ou complexe. On appelle fonction Zêta de nombres premiers que l'on note $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$ la série,*

$$\zeta_{\mathcal{P}}(s) = \sum_{p\in\mathcal{P}} p^{-s} = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + ..., \textit{ pour } \mathrm{Re}\, s > 1 \tag{1.1.3}$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.

Dans la suite nous poserons $\zeta_{\mathcal{P}}(s) = P(s) = \sum\limits_{p\in\mathcal{P}} \dfrac{1}{p^s}$.

Théorème 1.1.3 *Pour* $\mathrm{Re}\,(s) > 1$*, on a:*

$$\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} \log(\zeta(ks)). \tag{1.1.4}$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.

Preuve. Posons : $P(s) = \sum\limits_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^s}$

On a

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}$$

d'où

$$\log\zeta(s) = \sum_{p\in\mathcal{P}} \log\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right) = -\sum_{p\in\mathcal{P}} \log\left(1-p^{-s}\right) = -\sum_{p\in\mathcal{P}} \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

Comme pour $|x| < 1$, on a

$$\log(1-x) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}$$

alors

$$\log \zeta(s) = \sum_{p\in\mathcal{P}} \left(\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{lp^{ls}} \right) = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{l} \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^{ls}} = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{P(ls)}{l}$$

d'où l'on a pour $k \geq 1$,

$$\log \zeta(k.s) = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{P(kls)}{l}$$

ceci d'une part, d'autre part on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k} \log(\zeta(ks)) &= \sum_{k=1,\ l=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)\, P(kls)}{kl} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{l=1}^{+\infty} \mu(k) \frac{P(kls)}{kl} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{kl=n} \mu(k) \frac{P(kls)}{kl} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k|n} \mu(k) \frac{P(ns)}{n} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k|n} \mu(k) \right) \frac{P(ns)}{n} \\
&= P(s)
\end{aligned}$$

d'où l'on a,

$$\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} \log(\zeta(ks)).$$

■

1.1.3 Le théorème des nombres premiers.

En 1896, Hadamard et De La Vallée Poussin, ont démontré pour la première fois indépendamment, le théorème suivant :

Théorème 1.1.4 *Lorsque x tend vers l'infini on a :*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

où $\pi(x)$ est le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x.

Preuve. (cf.[27] et [2]) ■

1.1.4 Le logarithme et l'exponentielle intégral.

Définition 1.1.7 *On appelle logarithme intégral la fonction définie par,*

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}. \tag{1.1.5}$$

Définition 1.1.8 *L'exponentielle intégrale est la fonction définie par,*

$$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \ , \ x > 0 \tag{1.1.6}$$

Le développement asymptotique de $E_1(x)$ est donné par,

$$E_1(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + ...\right) = e^{-x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\right), \text{ lorsque } x \to +\infty. \tag{1.1.7}$$

1.1.5 Nombre $f-$champion

Définition 1.1.9 *Soit f une fonction arithmétique réelle, un entier naturel N est dit f-champion si et seulement si*

$$\text{pour tout } M \in \mathbb{N}^*, \ M < N \ \text{ implique } f(M) < f(N). \tag{1.1.8}$$

Lorsque $f(n)$ est la fonction $\tau(n)$ nombre de diviseurs positifs de l'entiers n, S. *Ramanujan (1915) a* introduit la notion de nombre $\tau-$champion, connus sous le nom des nombres hautement composés de *Ramanujan.*

1.2 Fonctions de factorisation

1.2.1 Les fonctions τ_r

Soit n un entier, $n \geq 1$. On considère l'équation diophantienne,

$$x_1 x_2 ... x_r = n \text{ , pour tout } r \in \mathbb{N}. \tag{1.2.1}$$

On désigne par τ_r, la fonction qui compte les solutions de l'équation (1.2.1) on a,

$$\tau_r(n) = \sum_{x_1 x_2 ... x_r = n} 1. \tag{1.2.2}$$

Pour $r = 0$, on a $\tau_0(n) = \delta(n)$.

Pour $r = 1$, on a $\tau_1(n) = 1(n) = 1$, pour tout $n \geq 1$.

Pour $r = 2$, on a $\tau_2(n) = \tau(n) = \sum_{x_1 x_2 = n} 1 = \sum_{d \mid n} 1$.

La fonction de factorisation la plus classique, est la fonction $\tau(n)$ nombre de diviseurs positifs de n, qui est aussi le nombre de solutions de l'équation diophantienne $x_1 x_2 = n$.

Soit un entier $n \geq 2$, si $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} ... q_k^{\alpha_k}$, est la décomposition de n en produit de facteurs premiers distincts q_i, alors,

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) ... (\alpha_k + 1).$$

La série de Dirichlet associée à τ_r, $r \geq 0$

La série de Dirichlet associée à τ_r est donnée par,

Proposition 1.2.1 *Soient r et n deux entiers positifs, et s un nombre complexe tel que* $\mathrm{Re}(s) > 1$, *la série de Dirichlet associée à $\tau_r(n)$ est donnée par,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_r(n)}{n^s} = (\zeta(s))^r \tag{1.2.3}$$

où $\zeta(s)$ est la fonction zêta de Riemann.

Preuve. .

Pour $r = 0$, la relation (1.2.3) est vérifiée, puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_0(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta(n)}{n^s} = 1 = (\zeta(s))^0.$$

Pour $r = 1$ et $\mathrm{Re}(s) > 1$, la relation (1.2.3) implique,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_1(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s).$$

Pour $r \geq 2$ et $\mathrm{Re}(s) > 1$ on a,

$$\begin{aligned}
(\zeta(s))^r &= \left(\sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^s}\right)\left(\sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{n_2^s}\right) ... \left(\sum_{n_r=1}^{\infty} \frac{1}{n_r^s}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n_1 n_2 ... n_r = n} \frac{1}{(n_1 n_2 ... n_r)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{n_1 n_2 ... n_r = n} \frac{1}{n^s}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{n_1 n_2 ... n_r = n}^{\infty} 1
\end{aligned}$$

d'après (1.2.2) il vient,

$$(\zeta(s))^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tau_r(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_r(n)}{n^s}.$$

■

Cas particulier. Pour $r = 2$, la série de Dirichlet associée à $\tau_2(n)$ est,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_2(n)}{n^s} = (\zeta(s))^2$$

Grandes valeurs de la fonction τ

Dans [25], S. Ramanujan a montré :

Théorème 1.2.1 *Soit n un entier naturel.*

Alors,

1) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0(\varepsilon) > 0$, tel que :

$$\tau(n) < \exp\{(1+\varepsilon)\log 2.\log n \ \ / \ \ \log\log n\ \} \quad \textit{pour} \quad n \geq n_0(\varepsilon)\ .$$

2) Pour tout entier n, on a

$$\tau(n) > \exp\{(1-\varepsilon)\log 2.\log n \ \ / \ \ \log\log n\ \} \quad .$$

Preuve. cf.[25], [27] et [14] ■

1.2.2 La fonction d'Oppenheim $O(n)$.

Un autre exemple de fonction arithmétique de factorisation est la fonction d'Oppenheim notée $O(n)$, cette fonction compte le nombre de solution de (1.2.1) pour tout r, mais sans tenir compte de l'ordre des facteurs et chaque facteurs doit vérifier $x_i \geq 2$, avec la convention $O(1) = 1$. (cf.[23]).

Exemple 1.2.1 *Pour $n = 30$, on trouve $O(30) = 5$, puisque 30 admet les factorisations d'Oppenheim suivantes :*

$$30\ ,\ 2.15\ ,3.10\ ,\ 5.6\ ,\ 2.3.5$$

La série de Dirichlet associée à la fonction $O(n)$.

Proposition 1.2.2 *La série de Dirichlet associée à $O(\boldsymbol{n})$ est donnée par la formule :*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{O(n)}{n^s}=\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n^s}\right)^{-1}\quad \textit{où}\quad \mathrm{Re}\,(s)>1.$$

Preuve. cf.[23] ■

Grandes valeurs de la fonction d'Oppenheim $O\,(n)$

Les grandes valeurs de la fonction d'Oppenheim O, ont été étudiées en 1926 par *A. Oppenheim (cf.*[23]), qui a donné plusieurs propriétés de cette fonction.

En 1983, *E. R. Canfield, P. Erdös* et *C. Pomerance* ont *dans* [3], amélioré les résultats d'*Oppenheim* en montrant,

Théorème 1.2.2 *Il existe deux constantes positives $0<c_1<c_2$ tels que :*

1. *Pour tout entier n suffisamment grand on ait,*

$$O(n)\leq n\exp\left(-\frac{\log n}{\log_2 n}\left(\log_3 n+\log_4 n+\frac{\log_4 n-1}{\log_3 n}+c_1\frac{\log_4^2 n}{\log_3^2 n}\right)\right).$$

2. *Et pour une infinité d'entiers n,*

$$O(n)\geq n\exp\left(-\frac{\log n}{\log_2 n}\left(\log_3 n+\log_4 n+\frac{\log_4 n-1}{\log_3 n}+c_2\frac{\log_4^2 n}{\log_3^2 n}\right)\right).$$

Preuve. *cf.*[3]. ■

1.2.3 La fonction de Kalmár $K(n)$.

La fonction de Kalmár notée $K(n)$, compte les solutions de l'équation (1.2.1) pour tout r, en tenant compte de l'ordre, et avec la condition que chaque facteur x_i doit vérifier $x_i\geq 2$.

Ainsi, $K(30)=13$, puisque 30 admet les factorisations suivantes :

30 , 2×15 , 15×2 , 3×10 , 10×3 , 5×6 , 6×5 , $2\times3\times5$, $2\times5\times3$, $3\times5\times2$, $3\times2\times5$, $5\times2\times3$, $5\times3\times2$.

L. *Kalmár* a montré que,

Proposition 1.2.3 *Soit n un entier positif, lorsque $x \to \infty$, on a*

$$\sum_{n \leq x} K(n) \sim \frac{-x^{\rho}}{\rho \acute{\zeta}(\rho)}$$

où ρ est la solution positive de l'équation $\zeta(s) = 2$.

La série de Dirichlet associée à la fonction $K(n)$ de Kalmár.

Proposition 1.2.4 *Soit n un entier naturel.*

Alors,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K(n)}{n^s} = \frac{1}{2 - \zeta(s)}, \textit{ pour } \operatorname{Re}(s) > \rho$$

où ρ est la solution positive de l'équation $\zeta(s) = 2$, on a $\rho = 1.728...$

La fonction $K(n)$ est liée à la fonction $\tau_r(n)$ par la relation suivante,

$$K(n) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\tau_r(n)}{2^r}, \text{ pour } \ n \geq 2 \tag{1.2.4}$$

Les grandes valeurs de la fonction $K(n)$

Les grandes valeurs de la fonction $K(n)$, ont été étudiées la première fois en (1931) par *L. Kalmár* et aussi par P. *Erdös* , E. *Hille* et *M. Klazar* et *F. Luca,* les résultats de ces derniers on été améliorés par *M. Deléglise*, *M. O. Hernane* et *J.-L. Nicolas*, en montrant,

Théorème 1.2.3 *Il existe deux constantes positives C_1 et C_2, telles que :*

1. *Pour tout entier n suffisamment grand on a*

$$\log K(n) \leq \rho \log n - C_1 \frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log \log n}$$

2. *Pour tout entier n suffisamment grand, il existe $m \leq n$, tel que*

$$\log K(m) \geq \rho \log n - C_2 \frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log \log n} \geq \rho \log m - C_2 \frac{(\log m)^{1/\rho}}{\log \log m} \ .$$

où $\rho = 1.728...$

1.2.4 Généralisation de la fonction Kalmár

Soit $A \subset \{2, 3, 4, ...\}$; E. Hille et P. Erdös ont généralisé la fonction de Kalmár en définissant la fonction $f_A(n)$, qui compte les solutions de l'équation (1.2.1) pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, avec la condition que chaque facteur x_i doit appartenir à A (cf.[17], [10]).

Cas particuliers :

Lorsque $A = \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, on obtient $f_{\mathbb{N}\backslash\{0,1\}}(n) = K(n)$, c'est la fonction de Kalmár.

Lorsque $A = \mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers, la fonction $f_{\mathcal{P}}(n)$ est le nombre de solutions de (1.2.1) en nombres premiers. Nous nous intéressons essentiellement dans ce travail à l'étude des grandes valeurs de la fonction $f_{\mathcal{P}}(n)$, que nous désignerons dans la suite de ce mémoire par $h(n)$. La série de Dirichlet associée à $f_A(n)$ est

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_A(n)}{n^s} = \frac{1}{1 - \zeta_A(s)} \text{ pour } \operatorname{Re}(s) > a \tag{1.2.5}$$

où a est l'abscisse de convergence absolue de la série $\zeta_A(s) = \sum_{n \in A} n^{-s}$.

1.3 La fonction $h(n)$

Soit $n \geq 2$, et $r \geq 1$. On considère le nombre de solutions de l'équation diophantienne

$$x_1.x_2...x_r = n \tag{1.3.1}$$

en nombres premiers non distincts $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_r$.

Soit $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} ... q_k^{\alpha_k}$ et $\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k$, le nombre de facteurs premiers comptés avec multiplicité.

La seule possibilité d'écrire n sous la forme (1.3.1) , avec $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_r$ des nombres premiers non distincts est de prendre $r = \Omega(n)$ puis de choisir,
α_1 variables x_i égales à q_1, α_2 variables x_i égales à q_2,..., α_k variables x_i égales à q_k.

Le nombre de façons de faire ce choix est le coefficient multinomial (cf.[4]) on a donc pour $n \geq 2$,

$$h(n) = \binom{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k}{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k)!}{\alpha_1! \alpha_2! ... \alpha_k!} \tag{1.3.2}$$

on pose $h(1) = 1$.

Notons que $h(n)$ est aussi le nombre de factorisations de n en produit ordonné de facteurs premiers non distincts.

Exemple 1.3.1 *Pour* $n = 30 = 2 \times 3 \times 5$ *, on a* $h(30) = \dfrac{(1+1+1)!}{1!1!1!} = 3! = 6$*, les six factorisations de* 30 *en produit ordonné de facteurs premiers non distincts sont :*

$$2 \times 3 \times 5\ ,\ 2 \times 5 \times 3\ ,\ 3 \times 5 \times 2\ ,\ 3 \times 2 \times 5\ ,\ 5 \times 2 \times 3\ ,\ 5 \times 3 \times 2$$

1.3.1 Quelques propriétés de la fonction $h\,(n)$

Proposition 1.3.1 .

1) La série de Dirichlet associée à $h(n)$ est

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n^s}=\frac{1}{1-P\,(s)},\ \textit{pour}\ \operatorname{Re}s>\lambda$$

où λ est défini par

$$P\,(\lambda)=1,\ \lambda=1.399433... \tag{1.3.3}$$

2) Pour $n\geq 2$, on a

$$h(n)=\sum_{p\in\mathcal{P},\ p|n}h(\frac{n}{p}). \tag{1.3.4}$$

3) Lorsque $x\to+\infty$, on a

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}h(n)\sim-\frac{1}{\lambda P'\,(\lambda)}x^{\lambda-1}.$$

Preuve. .

1) Le résultat (1) de la proposition (1.3.1) s'obtient, en utilisant la relation donnée par (1.2.5) avec $h(n)=f_{\mathcal{P}}(n)$ où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.

2) Soit $n\geq 2$, un entier naturel tel que $n=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}...q_k^{\alpha_k}$, où q_i sont des nombres premiers et $\alpha_i\geq 1$.

Pour i fixé, $1\leq i\leq k$ on a,

$$\frac{n}{q_i}=q_1^{\alpha_1}...q_i^{\alpha_i-1}...q_k^{\alpha_k},\ 1\leq i\leq k$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{k}h(\frac{n}{q_i})=\sum_{i=1}^{k}\frac{(\alpha_1+...+\alpha_k-1)!}{\alpha_1!...\,(\alpha_i-1)!...\alpha_k!} \tag{1.3.5}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur de (1.3.5) par $\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k\right)\alpha_i$ on obtient,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} h(\frac{n}{q_i}) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{(\alpha_1+...+\alpha_k-1)!\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k\right)\alpha_i}{(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k)\ \ \alpha_1!...\left(\alpha_i-1\right)!\alpha_i...\alpha_k!} \\
&= \frac{(\alpha_1+...+\alpha_k)!}{\alpha_1!...\alpha_k!} \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{(\alpha_1+...+\alpha_k)} \\
&= \frac{(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k)!}{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_k!} \\
&= h(n).
\end{aligned}$$

d'où

$$h(n) = \sum_{p\in\mathcal{P},\ p|n} h(\frac{n}{p}).$$

3) Ce résultat est démontré dans [18]. ■

Chapitre 2

Grandes valeurs de la fonction $h(n)$

L'étude des grandes valeurs de la fonction $h(n)$, se ramène à la résolution du problème d'optimisation en nombres entiers suivant :

$$\begin{cases} n \leq X \\ \max h(n) \end{cases} \tag{P$_1$}$$

où $n = p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_k^{x_k}$ et $p_1 = 2$, $p_2 = 3$,..., p_k le k-ième nombre premier et les inconnues x_i sont des entiers positifs où nuls.

Pour k assez grand, le problème (P_1) est équivalent au :

$$\begin{cases} x_1 \log 2 + x_2 \log 3 + x_3 \log p_3 + ... + x_k \log p_k \leq \log X \\ \max\limits_{(x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}_+^k} \log(\dfrac{(x_1 + x_2 + ... + x_k)!}{x_1! x_2! ... x_k!}) \end{cases} \tag{P$_2$}$$

En utilisant la formule de Stirling, nous remplaçons dans (P_2), la fonction à optimiser $\log h(n)$ par une fonction convenablement choisie $F(x_1, x_2, ..., x_k)$, puis on résoud le problème d'optimisation :

$$\begin{cases} x_1 \log 2 + x_2 \log 3 + x_3 \log p_3 + ... + x_k \log p_k \leq \log X \\ \max\limits_{(x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}_+^k} F(x_1, x_2, ..., x_k) \end{cases}. \tag{P}$$

Nous montrons que ce problème a une solution simple x_1^*, x_2^*,..., x_k^*, cette solution est donnée par la proposition (2.4.1), elle permet de majorer $h(n)$.

Pour une valeur de k convenable, en choisissant pour α_i un entier proche de x_i^*, on construit des nombres entiers $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, pour lesquelles $h(n)$ prend des grandes valeurs.

2.1 Approximation de $\log(h\,(n))$

Ce lemme nous sera utile dans la suite.

Lemme 2.1.1 *Pour tout $n \geq 1$, on a*

$$n^n \exp(-n)\sqrt{2\pi n} \leq n! \leq \exp(1)\, n^n \exp(-n)\sqrt{n}. \tag{2.1.1}$$

Preuve. La formule (2.1.1) , découle de la formule classique de *Stirling* (cf.[1]) valable pour $n \geq 1$, on a

$$n! = n^n \exp(-n)\sqrt{2\pi n} \exp\left(\frac{\theta}{12n}\right), \text{ où } 0 < \theta < 1. \tag{2.1.2}$$

Pour $n = 1$, on obtient :

$$\exp(-1)\sqrt{2\pi} = 0.922\,14 < 1$$

donc la formule (2.1.1) est vérifiée pour $n = 1$

Pour $n \geq 2$, on a

$$\sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{\theta}{12n}\right) \leq \sqrt{2\pi} \exp(1/24) = 2.61... < \exp(1)$$

par la formule (2.1.2) , il vient

$$n! \leq n^n \exp(-n)\sqrt{2\pi}\sqrt{n} \exp\left(\frac{1}{24}\right) \leq n^n \exp(-n)\sqrt{n} \exp(1)$$

donc la majoration est vérifiée .

Pour la minoration, on a

$$1 \leq \exp\left(\frac{\theta}{12n}\right) \text{ où } 0 < \theta < 1$$

la formule (2.1.2) implique,

$$n! \geq n^n \exp(-n)\sqrt{2\pi n}.$$

■

Notation 2.1.1 *Pour $k \geq 2$ on pose $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}_+^k$ et $\underline{0} = (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}_+^k$.*

Définition 2.1.1 . *Soient x_1, x_2,..., x_k des nombres réels positifs ou nuls.*

Pour $\underline{x} \in \mathbb{R}_+^k$, on définit la fonction $F : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}$ par

$$F(x_1, x_2, ..., x_k) = (x_1 + x_2 + ... + x_k) \log(x_1 + x_2 + ... + x_k) - \sum_{i=1}^{k} x_i \log x_i \qquad (2.1.3)$$

avec la convention $t \log t = 0$ si $t = 0$.

Remarque 2.1.1 . *La convention $t \log t = 0$ si $t = 0$, nous permet de prolonger par continuité la fonction F en $\underline{0}$.*

Grâce au lemme (2.1.1), nous montrons :

Proposition 2.1.1 . *Soit un entier naturel $n \geq 2$ dont la décomposition en produit de facteurs premiers distincts est $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} ... q_k^{\alpha_k}$.*

Alors on a,

(i) $\log h(n) \leq F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) - \dfrac{k-1}{3} \leq F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$

(ii) $\log h(n) \geq F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) - k - \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \log \alpha_i$

Preuve. La proposition est vraie pour $k = 1$, puisque on a $h(q_1^{\alpha_1}) = 1$ et $F(\alpha_1) = 0$

Supposons donc $k \geq 2$.

Posons,

$$S = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k \quad \text{et} \quad T = \alpha_1! \alpha_2! ... \alpha_k!$$

comme $h(n) = \dfrac{(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k)!}{\alpha_1! \alpha_2! ... \alpha_k!}$, alors $h\,(n) = \dfrac{S!}{T}$

Preuve de l'inégalité (i) **:** Le lemme (2.1.1) implique,

$$S! \leq \exp{(1)}\, S^s \exp{(-S)} \sqrt{s}$$

ce qui équivalent à :

$$S! \leq \exp{(1)}\, (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k)^{(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k)} \exp(-(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k)) \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k)} \qquad (2.1.4)$$

et

$$T \geq \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} ... \alpha_k^{\alpha_k} (\sqrt{2\pi})^k \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k} \exp(-(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k)) \qquad (2.1.5)$$

Les inegalits (2.1.4) et (2.1.5) entrainent,

$$
\begin{aligned}
h(n) &\leq \frac{\exp(1)(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k)^{(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k)}\exp(-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k))\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k)}}{\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}...\alpha_k^{\alpha_k}(\sqrt{2\pi})^k\exp(-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k))\sqrt{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k}} \\
&= \frac{(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k)^{(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k)}}{\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}...\alpha_k^{\alpha_k}}\frac{\exp(1)\sqrt{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k}}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k}}
\end{aligned}
$$

comme,

$$\frac{(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k)^{(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k)}}{\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}...\alpha_k^{\alpha_k}} = \exp(F(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k)) \tag{2.1.6}$$

alors,

$$h(n) \leq \exp(F(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k))\frac{\exp(1)\sqrt{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha}_k}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k}} \tag{2.1.7}$$

mais $\alpha_i \geq 1$ implique,

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k}{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k}+...+\frac{\alpha_k}{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k} \leq k \leq 2^{k-1} \tag{2.1.8}$$

De (2.1.7) et (2.1.8) on déduit que

$$h(n) \leq \exp(F(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k))\exp(1)(2\pi)^{-k/2}\,2^{\frac{k-1}{2}}$$

d'où

$$h(n)\exp(-F(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k)) \leq \exp(1)(2\pi)^{-k/2}\,2^{\frac{k-1}{2}} = \frac{\exp(1)\,\pi^{\frac{1-k}{3}}}{\sqrt{2}\pi^{\frac{k+2}{6}}} \leq \frac{\exp(1)}{\sqrt{2}\pi^{2/3}}\pi^{\frac{1-k}{3}} \leq e^{\frac{1-k}{3}}$$

par suite,

$$h(n)\exp(-F(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k)) \leq e^{\frac{1-k}{3}} \tag{2.1.9}$$

en prenant le logarithme des deux membres de (2.1.9) , on obtient

$$\log h(n) - F(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k) \leq \frac{1-k}{3} \tag{2.1.10}$$

(2.1.10) entraine,

$$\log h(n) \leq F(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k) - \frac{k-1}{3} \leq F(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k)$$

car $\dfrac{k-1}{3} > 0$, puisque $k \geq 2$.

Preuve de l'inégalité (ii)**.** Se démontre de la même façon que (i)
(2.1.1) implique,

$$S! \geq S^s \exp(-S)\sqrt{2\pi S}$$

ce qui est équivalent à,

$$S! \geq (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k)^{(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k)} \exp(-(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k))\sqrt{2\pi}\sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k)} \tag{2.1.11}$$

et

$$T \leq \exp(k)\, \alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}...\alpha_k^{\alpha_k}\sqrt{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k}\exp(-(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k)) \tag{2.1.12}$$

(2.1.11) et (2.1.12) entrainent :

$$h(n) \geq \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k)^{(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k)} \exp(-(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k))\sqrt{2\pi}\sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k)}}{\exp(k)\, \alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}...\alpha_k^{\alpha_k} \exp(-(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k))\sqrt{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k}} \tag{2.1.13}$$

De (2.1.6) et (2.1.13) on déduit que

$$h(n) \geq \exp(F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k))\frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha}_k}{e^k\sqrt{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k}} \tag{2.1.14}$$

comme $\sqrt{2\pi(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k)} > 1$, puisque $\alpha_i \geq 1$
alors (2.1.14) entraine,

$$h(n)\exp(-F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)) \geq \frac{1}{\exp(k)\sqrt{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k}}$$

ce qui implique,

$$\log h(n) - F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \geq -k - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\log\alpha_i$$

si et seulement si,

$$\log h(n) \geq F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) - k - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\log\alpha_i$$

ce qui prouve (ii). ■

2.2 Étude de λ et λ_k

Soient $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ..., p_k, où p_k désigne le k-ième nombre premier, pour $k \geq 1$.

On pose,

$$P_k(s) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j^s}. \tag{2.2.1}$$

Pour k fixé, la fonction P_k est décroissante et continue sur l'intervalle $[0\ ; +\infty[$, elle décroît de k à 0, lorsque s varie de 0 à $+\infty$. La fonction $P_k(s) : [0, +\infty[\to]0, k]$, admet donc une fonction réciproque $P_k^{-1}(y)$ définie pour $0 < y \leq k$.

Posons :

$$\lambda_k = P_k^{-1}(1). \tag{2.2.2}$$

Proposition 2.2.1 .

1) La série

$$P(s) = \sum_{p \in \wp} \frac{1}{p^s} \tag{2.2.3}$$

converge normalement pour $s \geq s_0 > 1$ et donc la suite des sommes partielles $(P_k(s))_{k \geq 1}$ converge uniformément vers $P(s)$ pour $s \geq s_0 > 1$.

2) Soient λ_k, λ définis par (2.2.2) et (1.3.3) .

Alors,

$$(\lambda_k)_{k \geq 1} \text{ est une suite croissante de plus on a : } \lim_{k \to \infty} \lambda_k = \lambda. \tag{2.2.4}$$

Preuve. .

1) La série $P(s) = \sum\limits_{p \in \wp} \frac{1}{p^s}$ est normalement convergente pour $s \geq s_0 > 1$

En effet, pour $s \geq s_0 > 1$ on a,

$$\frac{1}{p^s} \leq \frac{1}{p_j^{s_o}} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{p_j^{s_o}} \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^{s_o}}$$

or la série $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^{s_o}}$ converge car c'est une série de Riemann convergente puisque $s_0 > 1$, d'où le résultat.

2) Pour k fixé, la fonction $s \to P_k(s) = \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j^s}$ est décroissante

(car on a $P_k'(s) = -\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{\log p_j}{p_j^s} < 0$).

On a

$$P_k(\lambda_k) = 1 = P_{k+1}(\lambda_{k+1}) = P_k(\lambda_{k+1}) + \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}} > P_k(\lambda_{k+1})$$

donc

$$\lambda_k < \lambda_{k+1}.$$

De même :

$$P_k(\lambda_k) = 1 = P(\lambda) = P_k(\lambda) + \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda}} + \frac{1}{p_{k+2}^{\lambda}} + ... > P_k(\lambda)$$

donc

$$\lambda_k < \lambda$$

La suite $(\lambda_k)_k$, est croissante et majorée par λ, elle est donc convergente, soit λ' sa limite, on a $\lambda' \leq \lambda$. Comme la série $P(s)$ est normalement convergente pour $s \geq s_0 > 1$, et donc la suite des sommes partielles $(P_k(s))_{k\geq 1}$ converge uniformément vers $P(s)$ pour $s \geq s_0 > 1$.

La convergence uniforme implique,

$$\lim_{k\to+\infty} P_k(\lambda_k) = P(\lambda') \quad \text{mais} \quad P_k(\lambda_k) = 1$$

donc $P(\lambda') = 1$ et $\lambda' = \lambda$. ■

Proposition 2.2.2 *Avec les mêmes notations précédentes, on a lorsque $k \to \infty$*

$$\lambda - \lambda_k \sim \frac{-1}{(\lambda-1)P'(\lambda)k^{\lambda-1}(\log k)^{\lambda}} = \frac{1.44617...}{k^{\lambda-1}(\log k)^{\lambda}} \tag{2.2.5}$$

Pour la démonstration, nous aurons besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.2.1 *Lorsque x tend vers l'infini, on a :*

$$\pi(x) = Li(x) + R(x) \tag{2.2.6}$$

où Li est le logarithme intégral et

$$R(x) = O_v\left(\frac{x}{(log x)^v}\right) \tag{2.2.7}$$

où v est un nombre réel fixé supérieur à 1.

Preuve. cf.[9] ■

Lemme 2.2.2 . *Soit k un entier positif, lorsque $k \to \infty$, on a*

$$p_k \sim k \log k \quad et \quad \log p_k \sim \log k \tag{2.2.8}$$

Preuve. Nous utilisons le théorème des nombres premiers,

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \text{ pour } x \to +\infty$$

Nous démontrons d'abord, que $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log \pi(x)}$, lorsque $x \to +\infty$.

En effet, lorsque $x \to \infty$, on a

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \text{ si et seulement si } \lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1 \tag{2.2.9}$$

en prenant le logarithme des deux membres on obtient,

$$\lim_{x \to +\infty} \log \pi(x) + \log \log x - \log x = 0$$

d'où

$$\lim_{x \to +\infty} \log x \left(\frac{\log \pi(x)}{\log x} + \frac{\log \log x}{\log x} - 1 \right) = 0$$

puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \log x = +\infty$

alors,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log \pi(x)}{\log x} + \frac{\log \log x}{\log x} - 1 = 0 \tag{2.2.10}$$

comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log \log x}{\log x} = 0$, (2.2.10) implique,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log \pi(x)}{\log x} = 1 \tag{2.2.11}$$

(2.2.9) et (2.2.11) entrainent,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x) \log \pi(x)}{x} = 1, \tag{2.2.12}$$

pour $x = p_k$, on a $\pi(x) = k$ et la relation (2.2.12) permet de déduire

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{k \log k}{p_k} = 1$$

d'où

$$p_k \sim k \log k, \text{ lorsque } k \to +\infty. \tag{2.2.13}$$

Montrons maintenant, que $\log p_k \sim \log k$ lorsque $k \to +\infty$

En prenant le logarithme des deux membres dans la relation (2.2.13) on obtient,

$$\begin{aligned} \log p_k &\sim \log (k \log k) = \log k + \log \log k \\ &\sim \log k \quad \text{ lorsque } k \to +\infty. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.2.1 (Intégral de Stieltjes) . *Soit E un ensemble discret de $\mathbb{R}$, $F \in C^1([a, b[)$ et g une fonction réelle (ou complexe) définie sur E.*

On pose $G(t) = \sum\limits_{u \in E,\ u \leq t} g(u)$.

Alors,

$$\sum_{a<u\leq b} F(u)g(u) = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) - \int_a^b F'(t)\,G(t)\,dt = \int_a^b F(t)\,d(G(t)).$$

Preuve. cf.[24] ■

Lemme 2.2.3 . *Soient $s > 1$, $m \geq 0$ et $v \geq 0$. Pour $x > 1$, on a :*

$$\int_x^\infty \frac{dt}{t^s(\log t)^v} = \frac{1}{x^{s-1}(\log x)^v} \left[\begin{array}{c} \dfrac{1}{s-1} - \dfrac{v}{(s-1)\log x} + \dfrac{v(v+1)}{(s-1)^2(\log x)^2} \\ +\dots+ \dfrac{(-1)^m v(v+1)\dots(v+m-1)}{(s-1)^m(\log x)^m} \\ + \dfrac{(-1)^{m+1} v(v+1)\dots(v+m)}{(s-1)^{m+1}} \displaystyle\int_x^\infty \dfrac{dt}{t^s(\log t)^{v+m+1}} \end{array} \right].$$

Preuve. *Le résultat du lemme (2.2.3) s'obtient en intégrant m fois par parties.* ■

Preuve de la proposition (2.2.2). Les relations (2.2.1) et (2.2.3) impliquent

$$P(s) - P_k(s) = \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_j^s} \tag{2.2.14}$$

en utilisant l'intégrale de Stieltjes et le lemme (2.2.1) pour $s \geq s_0 > 1$ on obtient,

$$\begin{aligned}
P(s) - P_k(s) &= \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_j^s} \\
&= \int_{p_k^+}^{\infty} \frac{d(\pi(t))}{t^s} \\
&= \int_{p_k^+}^{\infty} \frac{d(Li(x) + R(x))}{t^s} \\
&= \int_{p_k}^{\infty} \frac{dt}{t^s \log t} + \int_{p_k^+}^{\infty} \frac{d(R(x))}{t^s} \qquad (2.2.15)
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $y = (s-1)\log t$ et en utilisant (1.1.6) on obtient,

$$\begin{aligned}
\int_{p_k^+}^{\infty} \frac{dt}{t^s \log t} &= \int_{(s-1)\log p_k}^{\infty} \frac{e^{-y}dy}{y} \\
&= E_1((s-1)\log p_k) \qquad (2.2.16)
\end{aligned}$$

En intégrant par parties et en utilisant (2.2.7) , le deuxième terme de (2.2.15) devient,

$$\begin{aligned}
\int_{p_k^+}^{\infty} \frac{d(R(x))}{t^s} &= \left.\frac{R(x)}{t^s}\right|_{P_k}^{+\infty} + \int_{p_k^+}^{\infty} \frac{sR(t)}{t^{s+1}}dt \\
&= -\frac{R(p_k)}{(p_k)^s} + \int_{p_k^+}^{\infty} \frac{sC_v}{t^s(\log t)^v}dt
\end{aligned}$$

où C_v est une constante dépendante de v.

Le lemme (2.2.3) entraine,

$$\begin{aligned}
\int_{p_k^+}^{\infty} \frac{d(R(x))}{t^s} &= -\frac{C_v}{p_k^{s-1}(\log p_k)^v} + \frac{1}{p_k^{s-1}(\log p_k)^v} O_{v,s_0}(1) \\
&= -\frac{O_{v,s_0}(1)}{p_k^{s-1}(\log p_k)^v} \qquad (2.2.17)
\end{aligned}$$

Les relations (2.2.15) , (2.2.16) et (2.2.17) impliquent,

$$P(s) - P_k(s) = E_1((s-1)\log p_k) + \frac{O_{v,s_0}(1)}{p_k^{s-1}(\log k)^v} \tag{2.2.18}$$

De même, pour $s \geq s_0 > 1$ on a,

$$\begin{aligned} P'_k(s) - P'(s) &= \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\log p_j}{p_j^s} \\ &= \int_{p_k^+}^{\infty} \frac{d(\pi(t))\log t}{t^s} \\ &= \int_{p_k}^{\infty} \frac{dt}{t^s} + \int_{p_k^+}^{\infty} \frac{d(R(t))\log t}{t^s} \\ &= \frac{1}{(s-1)\,p_k^{s-1}} + \frac{O_{v,s_0}(1)}{p_k^{s-1}(\log k)^{v-1}} \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

En appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2 on obtient,

$$P_k(\lambda_k) - P_k(\lambda) = (\lambda_k - \lambda)P'_k(\lambda) + \frac{(\lambda_k-\lambda)^2}{2}M' \tag{2.2.20}$$

où $M' = P''_k(\xi)$ et $\lambda_k < \xi < \lambda$.

Comme $\dfrac{\log^2 p_j}{p_j^s} > 0$ pour $s \geq s_0 > 1$, donc la suite $(P_k{}''(s))_{k\geq 1}$ est croissante puisque $P''_k(s) = \sum_{j=1}^{k} \dfrac{\log^2 p_j}{p_j^s}$.

Pour $k \geq 3$ on a,

$$0.182... = \frac{(\log 2)^2}{2^\lambda} = P''_1(\lambda) < M' < P''(\lambda_3) = 926.56...$$

les relations (2.2.2) et (1.3.3) entrainent,

$$P_k(\lambda_k) - P_k(\lambda) = P(\lambda) - P_k(\lambda) \tag{2.2.21}$$

(2.2.20) et (2.2.19) il vient (pour $s = \lambda$)

$$\begin{aligned} P_k(\lambda_k) - P_k(\lambda) &= (\lambda_k - \lambda)\left(P'(\lambda) + P'_k(\lambda) - P'(\lambda)\right) + \frac{(\lambda_k-\lambda)^2}{2}M' \\ &= (\lambda_k - \lambda)\left(P'(\lambda) + \left(P'_k(\lambda) - P'(\lambda)\right) + \frac{(\lambda_k-\lambda)}{2}M'\right) \\ &= (\lambda_k - \lambda)\left(P'(\lambda) + \frac{1}{(s-1)\,p_k^{s-1}} + \frac{O_v(1)}{p_k^{\lambda-1}(\log k)^{v-1}} + \frac{(\lambda_k-\lambda)}{2}M'\right) \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

De (2.2.18) , (2.2.21) et (2.2.22) on déduit (pour $s = \lambda$),

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_k - \lambda)\left(P'(\lambda) + \frac{1}{(s-1)\,p_k^{s-1}} + \frac{O_v(1)}{p_k^{\lambda-1}(\log k)^{v-1}} + \frac{(\lambda_k-\lambda)}{2}M'\right) \\
= \quad & E_1((\lambda-1)\log p_k) + \frac{O_v(1)}{p_k^{\lambda-1}(\log k)^{v}} \qquad (2.2.23)
\end{aligned}
$$

lorsque $k \to +\infty$, (2.2.4) implique $\lambda_k - \lambda \to 0$

De (2.2.23) , on déduit $(\lambda_k - \lambda)P'(\lambda) \sim E_1((\lambda-1)\log p_k)$

(2.2.8) et (1.1.7) donnent,

$$(\lambda_k - \lambda)P'(\lambda) \sim \frac{1}{(\lambda-1)\,k^{\lambda-1}(\log k)^{\lambda}}.$$

■

2.3 Étude de a et a_k

Soient $k \geq 1$, λ_k, λ, P_k et P définis par (2.2.2) , (1.3.3) , (2.2.1) et (2.2.3) . On définit a et a_k par

$$a = \frac{-1}{P'(\lambda)} = 0.5776486... \quad \text{et} \quad a_k = \frac{-1}{P'_k(\lambda_k)} \qquad (2.3.1)$$

Proposition 2.3.1 .

$$\textit{La suite } (a_k)_{k\geq 1} \textit{ est décroissante et on a } \lim_{k\to+\infty} a_k = a \qquad (2.3.2)$$

Preuve. Montrons que $(a_k)_k$ est une suite décroissante.

On a,

$P(s) = \sum_{j\geq 1}\frac{1}{p_j^s}$ et $P_k(s) = \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{p_j^s}$ impliquent,

$$P'(s) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{-\log p_j}{p_j^s} \quad \text{et} \quad P'_k(s) = \sum_{j=1}^{k}\frac{-\log p_j}{p_j^s} \ (s \geq s_0 > 1) \qquad (2.3.3)$$

(2.3.1) et (2.3.3) entrainent,

$$a_{k+1} - a_k = \frac{-1}{P'_{k+1}(\lambda_{k+1})} + \frac{1}{P'_k(\lambda_k)} = \frac{P'_{k+1}(\lambda_{k+1}) - P'_k(\lambda_k)}{P'_k(\lambda_k)\,P'_{k+1}(\lambda_{k+1})} \qquad (2.3.4)$$

Evaluons $P'_{k+1}(\lambda_{k+1}) - P'_k(\lambda_k)$.

On a :

$$\begin{aligned}
P'_{k+1}(\lambda_{k+1}) - P'_k(\lambda_k) &= -\sum_{j=1}^{k+1} \frac{\log p_j}{p_j^{\lambda_{k+1}}} - P'_k(\lambda_k) \\
&= -\frac{\log p_{k+1}}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\log p_j}{p_j^{\lambda_{k+1}}} - P'_k(\lambda_k) \\
&= -\frac{\log p_{k+1}}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}} + P'_k(\lambda_{k+1}) - P'_k(\lambda_k) \qquad (2.3.5)
\end{aligned}$$

D'autre part, la relation (2.2.2) implique,

$$\begin{aligned}
\lambda_{k+1} &= P_k^{-1}(P_k(\lambda_{k+1})) \\
&= P_k^{-1}\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j^{\lambda_{k+1}}}\right) \\
&= P_k^{-1}\left(\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{p_j^{\lambda_{k+1}}} - \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}}\right) \\
&= P_k^{-1}\left(1 - \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}}\right)
\end{aligned}$$

puisque $\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{p_j^{\lambda_{k+1}}} = P_{k+1}(\lambda_{k+1}) = 1.$
donc

$$\lambda_{k+1} = P_k^{-1}\left(1 - \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}}\right) \qquad (2.3.6)$$

(2.3.6) implique,

$$P'_k(\lambda_{k+1}) = P'_{_{k+1}} \circ P_k^{-1}\left(1 - \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}}\right) \qquad (2.3.7)$$

de (2.2.2) on déduit,

$$P'_k(\lambda_k) = P'_k \circ P_k^{-1}(1) \qquad (2.3.8)$$

Les relations (2.3.5) , (2.3.7) et (2.3.8) impliquent,

$$P'_{_{k+1}}(\lambda_{k+1}) - P'_k(\lambda_k) = -\frac{\log p_{k+1}}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}} + P'_k \circ P_k^{-1}\left(1 - \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}}\right) - P'_k \circ P_k^{-1}(1)$$

Le théorème des accroissements finis appliqué à $\phi(s) = P_k' \circ P_k^{-1}(s)$ sur $\left[1 - \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}}, 1\right]$, implique qui il existe un nombre η_k, $1 - \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}} < \eta_k < 1$, tel que

$$\begin{aligned} P_{k+1}'(\lambda_{k+1}) - P_k'(\lambda_k) &= -\frac{\log p_{k+1}}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}} - \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}} \frac{P_k'' \circ P_k^{-1}(\eta_k)}{P_k' \circ P_k^{-1}(\eta_k)} \qquad (2.3.9) \\ &= \frac{-1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}} \left(P_k' \circ P_k^{-1}(\eta_k)\right)} \left(\log p_{k+1} P_k' \circ P_k^{-1}(\eta_k) + P_k'' \circ P_k^{-1}(\eta_k)\right) \end{aligned}$$

En posant $\rho_k = P_k^{-1}(\eta_k)$, on obtient,

$$P_k^{-1}\left(1 - \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}}\right) > P_k^{-1}(\eta_k) > P_k^{-1}(1)$$

puisque $P_k^{-1}(s)$ est décroissante car $P_k'(s) = -\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{\log p_j}{p_j^s} < 0$.

Comme $P_k^{-1}(1) = \lambda_k$ et $P_k^{-1}\left(1 - \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}}\right) = \lambda_{k+1}$

alors,

$$\lambda_k < \rho_k < \lambda_{k+1}.$$

En remplaçant ρ_k dans (2.3.9) on obtient,

$$\begin{aligned} P_{k+1}'(\lambda_{k+1}) - P_k'(\lambda_k) &= \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}\left(-P_k'(\rho_k)\right)} \left(\log p_k P_k'(\rho_k) + P_k''(\rho_k)\right) \\ &= \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}\left(-P_k'(\rho_k)\right)} \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\log^2 p_j}{p_j^{\rho_k}} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\log p_j \log p_{k+1}}{p_j^{\rho_k}}\right) \\ &= \frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}\left(-P_k'(\rho_k)\right)} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\log^2 p_j - \log p_j \log p_{k+1}}{p_j^{\rho_k}}\right) \\ &< 0 \qquad (2.3.10) \end{aligned}$$

puisque $\frac{1}{p_{k+1}^{\lambda_{k+1}}\left(-P_k'(\rho_k)\right)} > 0$ et $\sum\limits_{j=1}^{k} \left(\frac{\log^2 p_j - \log p_j \log p_{k+1}}{p_j^{\rho_k}}\right) < 0$
car $\log p_j < \log p_{k+1}$ pour tout j, $1 \leq j \leq k$
donc $P_{k+1}'(\lambda_{k+1}) - P_k'(\lambda_k) < 0$

La dénominateur dans la relation (2.3.4) est strictement positif puisque

$$P_k'(s) = -\sum_{j=1}^{k} \frac{\log p_j}{p_j^s} < 0, \forall s > 1$$

donc

$$a_{k+1} - a_k = \frac{P'_{k+1}\left(\lambda_{k+1}\right) - P'_k\left(\lambda_k\right)}{P'_{k+1}\left(\lambda_{k+1}\right) P'_k\left(\lambda_k\right)} < 0$$

si et seulement si $a_{k+1} < a_k$.

Montrons que la suite $(a_k)_{k\geq 1}$ est convergente.

La série $P'(s)$ est normalement convergente pour $s \geq s_0 > 1$, car $|P'(s)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{s_0}}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{s_0}}$ est une série convergente pour $s_0 > 1$, et donc la suite des sommes partielles $(P'_k(s))_{k\geq 1}$ converge uniformément vers $P'(s)$.

De la convergence uniforme de $(P'_k(s))_{k\geq 1}$ et de la relation (2.2.4) on déduit que,

$$\lim_{k\to+\infty} P'_k(\lambda_k) = P'(\lambda) \text{ d'où } \lim_{k\to+\infty} a_k = a.$$

■

Proposition 2.3.2 *Lorsque $k \to +\infty$ on a,*

$$a_k - a \sim \frac{1}{(\lambda-1)(P\,'(\lambda))^2(k\log k)^{\lambda-1}} = \frac{0.835378...}{(k\log k)^{\lambda-1}} \tag{2.3.11}$$

Preuve. On a,

$$P'(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-\log p_j}{p_j^s} \quad \text{et } P'_k(s) = \sum_{j=1}^{k} \frac{-\log p_j}{p_j^s} \quad (s \geq s_0 > 1) \tag{2.3.12}$$

En appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2 à la fonction $P'_k(s)$, il vient

$$P'_k(\lambda_k) - P'_k(\lambda) = (\lambda_k - \lambda)P''_k(\lambda) + \frac{(\lambda_k-\lambda)^2}{2}M'' \tag{2.3.13}$$

où $M'' = P_k^{(3)}(\xi)$ et $\lambda_k < \xi < \lambda$.

comme $\left|P_k^{(3)}(s)\right| = \sum_{j=1}^{k} \frac{\log^3 p_j}{p_j^s}$, est une fonction décroissante et que la suite (λ_k) est croissante, alors pour $k \geq 3$ on a : $\lambda_3 < \lambda_k < \xi < \lambda$ et

$$|M''| < \left|P_k^{(3)}(\lambda_3)\right|$$

D'autre part on a $P''_k(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\log^2 p_j}{p_j^s}$ ce qui implique,

$$P''_k(\lambda) - P''(\lambda) = \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\log^2 p_j}{p_j^{\lambda}}$$

En utilisant l'intégrale de Stieltjes et (2.2.6) on obtient,

$$\begin{aligned} P_k''(\lambda) - P''(\lambda) &= \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\log^2 p_j}{p_j^{\lambda}} \\ &= \int_{p_k^+}^{\infty} \frac{d(\pi(t))\log^2 t}{t^{\lambda}} \\ &= \int_{p_k}^{\infty} \frac{\log t dt}{t^{\lambda}} + \int_{p_k^+}^{\infty} \frac{d(R(t))\log^2 t}{t^{\lambda}} \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

en intégrant $\int_{p_k}^{\infty} \frac{\log t dt}{t^{\lambda}}$ par parties on obtient,

$$\int_{p_k}^{\infty} \frac{\log t dt}{t^{\lambda}} = \frac{(\lambda-1)\log p_k + 1}{(\lambda-1)^2 p_k^{\lambda-1}} \tag{2.3.15}$$

pour la deuxième intégral $\int_{p_k^+}^{\infty} \frac{d(R(t))\log^2 t}{t^{\lambda}}$ de (2.3.14) , en intégrant par parties et en utilisant (2.2.7) on obtient,

$$\begin{aligned} \int_{p_k^+}^{\infty} \frac{\log^2 t.d(R(t))}{t^{\lambda}} &= \left.\frac{(\log^2 t)R(t)}{t^{\lambda}}\right|_{P_k}^{+\infty} + \int_{p_k}^{\infty} \frac{(2\log t - \lambda \log^2 t)R(t)}{t^{\lambda+1}} dt \\ &= -\frac{C_v}{p_k^{\lambda-1}\log^{v-2} p_k} + \int_{p_k}^{\infty} \frac{2C_v}{t^{\lambda+1}(\log t)^{v-1}} dt - \int_{p_k^+}^{\infty} \frac{\lambda C_v}{t^{\lambda+1}(\log t)^{v-2}} dt \\ &= \frac{O_v(1)}{p_k^{\lambda-1}(\log k)^{v-2}} \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

où C_v est une constante dépendant de v.

De (2.3.14) , (2.3.15) et (2.3.16) on déduit que,

$$P_k''(\lambda) - P''(\lambda) = \frac{(\lambda-1)\log p_k + 1}{(\lambda-1)^2 p_k^{\lambda-1}} + \frac{O_v(1)}{p_k^{\lambda-1}(\log k)^{v-2}} \tag{2.3.17}$$

Les relations (2.3.13) , (2.2.19) (pour $s = \lambda$), (2.3.17) et (2.2.5) entrainent, lorsque $k \to +\infty$,

$$P_k'(\lambda_k) - P'(\lambda) = (\lambda_k - \lambda)P''(\lambda) + \frac{1}{(\lambda-1)p_k^{\lambda-1}} + \frac{O_v(1)}{p_k^{\lambda-1}(\log k)^{v-1}} \tag{2.3.18}$$

En appliquant la formule de Taylor à la fonction $x \to f(t) = \dfrac{1}{t}$ à l'ordre 2, on obtient,

$$\begin{aligned} a_k - a &= \frac{-1}{P'_k(\lambda_k)} - \frac{-1}{P'(\lambda)} \\ &= \frac{P'_k(\lambda_k) - P'(\lambda)}{P'(\lambda)^2} + O\left(\left(P'_k(\lambda_k) - P'(\lambda) \right)^2 \right) \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

lorsque $k \to +\infty$, par (2.3.19) , (2.3.18) et (2.2.8) on déduit que,

$$a_k - a = \frac{(\lambda_k - \lambda) P''(\lambda)}{P'(\lambda)^2} + \frac{1}{(\lambda - 1) p_k^{\lambda-1} P'(\lambda)^2} + \frac{O_v(1)}{k^{\lambda-1} (\log k)^{\lambda+v-2}} \tag{2.3.20}$$

La proposition (2.2.2) implique que le premier terme de (2.3.20) est négligeable devant le second et en choisissant $v = 1$, on obtient la proposition (2.3.2). ■

2.4 La solution du problème d'optimisation

Soit $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}_+^{*k}$ et posons,

$$\begin{aligned} F(\underline{x}) &= (x_1 + x_2 + ... + x_k) \log(x_1 + x_2 + ... + x_k) - \sum_{i=1}^{k} x_i \log x_i \\ \text{et} \qquad g(\underline{x}) &= \sum_{i=1}^{k} x_i \log p_i. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Soit A un nombre réel positif et $k \geq 2$, on définit le domaine $\boldsymbol{D}(A) \subset \mathbb{R}_+^k$ par

$$\boldsymbol{D}(A) = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}_+^k ;\ \ x_1 \log 2 + x_2 \log 3 + ... + x_k \log p_k \leq A \right\} \tag{2.4.2}$$

Lemme 2.4.1 . *La fonction F définie par (2.4.1) est concave dans $\mathbb{R}_+^k$.*

Preuve. .

Soit $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}_+^{*k}$, posons $S = x_1 + x_2 + ... + x_k$.

On a,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}) = \log\left(\frac{S}{x_i}\right) \geq 0 \tag{2.4.3}$$

d'où,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(\underline{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\log(S) - \log x_i) \\ &= \frac{1}{S} - \frac{1}{x_i} \end{aligned}$$

Pour $j \neq i$ et $1 \leq i, j \leq k$, on a,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_i}(\log(S) - \log x_j) \\ &= \frac{1}{S} \end{aligned}$$

La forme quadratique des dérivées partielles secondes de F s'écrit alors,

$$F''(\underline{x}).(h_1, h_2, ..., h_k) = \frac{1}{S}\left(\sum_{i=1}^{k} h_i\right)^2 - \sum_{i\ =1}^{k} \frac{h_i^2}{x_i} \tag{2.4.4}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Shwarz, on obtient,

$$\left(\sum_{i\ =1}^{k} h_i\right)^2 = \left(\sum_{i\ =1}^{k} \sqrt{x_i}\frac{h_i}{\sqrt{x_i}}\right)^2 \leq S\sum_{i\ =1}^{k} \frac{h_i^2}{x_i}$$

d'où

$$\begin{aligned} F''(\underline{x}).(h_1, h_2, ..., h_k) &= \left(\frac{1}{S}\right)\left(\sum_{i\ =1}^{k} h_i\right)^2 - \sum_{i\ =1}^{k} \frac{h_i^2}{x_i} \\ &\leq \frac{1}{S} S \sum_{i\ =1}^{k} \frac{h_i^2}{x_i} - \sum_{i\ =1}^{k} \frac{h_i^2}{x_i} = 0 \end{aligned}$$

ce qui implique que F est concave dans $\mathbb{R}_+^k$ ■

D'après (2.4.3) la fonction F est croissante par rapport à chaque variable, le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \max\limits_{\underline{x} \in \mathbb{R}_+^k} F(x_1, x_2, ..., x_k) \\ \qquad g(\underline{x}) \leq A \end{cases} \qquad (P)$$

a donc la même solution que le problème

$$\begin{cases} \max\limits_{\underline{x} \in \mathbb{R}_+^k} F(x_1, x_2, ..., x_k) \\ \qquad g(\underline{x}) = A \end{cases} \qquad (P')$$

Proposition 2.4.1 *La solution du problème d'optimisation (P) ou (P') est donnée par*

$$x_i^* = \frac{a_k A}{p_i^{\lambda_k}} \tag{2.4.5}$$

de plus on a,

$$F(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*) = \lambda_k A \tag{2.4.6}$$

où a_k, λ_k et F sont définis par (2.3.1) , (2.2.2) et (2.4.1) .

Preuve. Nous utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange

Preuve de le résultat (2.4.5)

On a

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}^*) = \log\left(\frac{x_1^* + x_2^* + ... + x_k^*}{x_i^*}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial x_i}(\underline{x}^*) = \log p_i$$

d'où pour $i = 1,\ 2, ...,\ k$, on a,

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}^*)}{\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(\underline{x}^*)} = \frac{1}{\log p_i}\log\left(\frac{x_1^* + x_2^* + ... + x_k^*}{x_i^*}\right) = \lambda' \tag{2.4.7}$$

où λ' est le multiplicateur de Lagrange.

De (2.4.7) on déduit que,

$$\log\left(\frac{x_1^* + x_2^* + ... + x_k^*}{x_i^*}\right) = \log p_i^{\lambda'}$$

ce qui implique,

$$\frac{x_1^* + x_2^* + ... + x_k^*}{x_i^*} = p_i^{\lambda'}$$

ce qui est équivalent à,

$$x_i^* = \frac{x_1^* + x_2^* + ... + x_k^*}{p_i^{\lambda'}} \text{ , pour tout } i = 1, 2, ..., k \ . \tag{2.4.8}$$

d'où,

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^* = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_1^* + x_2^* + ... + x_k^*}{p_i^{\lambda'}} = \sum_{i=1}^{k} x_i^* \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i^{\lambda'}}$$

en divisant par $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^*$ on obtient,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i^{\lambda'}} = 1 \quad \text{or} \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i^{\lambda'}} = P_k(\lambda') = 1$$

donc $\lambda' = \lambda_k$ est le multiplicateur de Lagrange.

Comme $(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*)$, satisfait la contrainte $g(\underline{x}) = A$,

alors,

$$x_1^* \log 2 + x_2^* \log 3 + x_3^* \log 5 + ... + x_k^* \log p_k = A \tag{2.4.9}$$

Grâce aux relations (2.4.8) et (2.3.12) on obtient,

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{k} x_i^* \log p_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_1^* + x_2^* + ... + x_k^*}{p_i^{\lambda_k}} \log p_i = (x_1^* + x_2^* + ... + x_k^*) \sum_{i=1}^{k} \frac{\log p_i}{p_i^{\lambda_k}} \\ &= -(x_1^* + x_2^* + ... + x_k^*) P_k'(\lambda_k) \end{aligned}$$

comme d'après (2.3.1) $a_k = \dfrac{-1}{P_k'(\lambda_k)}$ alors,

$$x_1^* + x_2^* + ... + x_k^* = -\frac{A}{P_k'(\lambda_k)} = a_k A \tag{2.4.10}$$

par suite,

$$x_i^* = \frac{x_1^* + x_2^* + ... + x_k^*}{p_i^{\lambda_k}} = \frac{a_k A}{p_i^{\lambda_k}} \ , \ 1 \leq i \leq k.$$

Preuve de le résultat (2.4.6)

La relation (2.4.7) s'écrit,

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}^*)}{\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(\underline{x}^*)} = \frac{1}{\log p_i} \log \left(\frac{x_1^* + x_2^* + ... + x_k^*}{x_i^*} \right) = \lambda_k \tag{2.4.11}$$

d'où

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}^*) = \lambda_k \log p_i \tag{2.4.12}$$

puisque $\lambda' = \lambda_k$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(\underline{x}^*) = \log p_i$

En multipliant l'égalité (2.4.11) par $x_i^* \log p_i$, on obtient,

$$\frac{x_i^* \log p_i}{\log p_i} \left(\log (x_1^* + x_2^* + ... + x_k^*) - \log x_i^* \right) = \lambda_k x_i^* \log p_i$$

d'où,

$$x_i^* \log (x_1^* + x_2^* + ... + x_k^*) - x_i^* \log x_i^* = \lambda_k x_i^* \log p_i$$

en prenant la somme de $i = 1$ à k, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{k} \left(x_i^* \log (x_1^* + x_2^* + ... + x_k^*) - x_i^* \log x_i^* \right) = \lambda_k \sum_{i=1}^{k} x_i^* \log p_i$$

ce qui est équivalent à :

$$\log (x_1^* + x_2^* + ... + x_k^*) \sum_{i=1}^{k} x_i^* - \sum_{i=1}^{k} x_i^* \log x_i^* = \lambda_k \sum_{i=1}^{k} x_i^* \log p_i$$

et comme
$$\sum_{i=1}^{k} x_i^* \log p_i = A$$
alors $F(x_1, x_2, ..., x_k) = \lambda_k A$. ■

Proposition 2.4.2 *Soit $k \geq 2$, $(x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbf{D}(A)$ et $x_1^*,\ x_2^*, ...,\ x_k^*$ définis par (2.4.5) alors on a,*

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, ..., x_k) &\leq F\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*\right) - \frac{1}{2A \log p_k}\left(\sum_{i=1}^{k-1} |x_i - x_i^*| \log p_i\right)^2 \qquad (2.4.13) \\ &\leq F\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*\right) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\log p_i)^2}{2A \log p_k} \left(x_i - x_i^*\right)^2 . \end{aligned}$$

où $\mathbf{D}(A)$ est défini par (2.4.2) .

Preuve. Soit $\underline{x} \in D(A)$, et posons $\underline{y} = (y_1, y_2, ..., y_k)$, tel que :

$$y_1 = x_1,\ y_2 = x_2, ...,\ y_{k-1} = x_{k-1}, \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{k} y_i \log p_i = A \qquad (2.4.14)$$

comme $\underline{x} \in D(A)$ alors $x_k \leq y_k$, la croissance de F par rapport à chacune des variables entraine,

$$F(\underline{x}) \leq F(\underline{y}) \qquad (2.4.15)$$

Posons $h_i = y_i - x_i^*$, on a par (2.4.14) et (2.4.9)

$$\sum_{i=1}^{k} h_i \log p_i = \sum_{i=1}^{k} y_i \log p_i - \sum_{i=1}^{k} x_i^* \log p_i = A - A = 0 \qquad (2.4.16)$$

La formule de Taylor appliquée à F entre les points $\underline{y}$ et $\underline{x}^*$ à l'ordre 2 donne,

$$F(\underline{y}) - F(\underline{x}^*) = \sum_{i=1}^{k} h_i \frac{\partial F}{\partial x}(\underline{x}^*) + \frac{1}{2} F''(\underline{\xi}).\,(\underline{h}) \qquad (2.4.17)$$

où $\underline{\xi} = \theta \underline{y} + (1 - \theta)\, \underline{x}^*$ et $0 < \theta < 1$.

De (2.4.12) et (2.4.16) on déduit que,

$$\sum_{i=1}^{k} h_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}) = \lambda_k \sum_{i=1}^{k} h_i \log p_i = 0 \qquad (2.4.18)$$

La relation (2.4.16) et l'inégalité de Cauchy-Shwarz impliquent,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i\ =1}^{k} h_i\right)^2 &= \left(\sum_{i\ =1}^{k} h_i - \sum_{i\ =1}^{k} \frac{h_i \log p_i}{\log p_k}\right)^2 = \left(\sum_{i\ =1}^{k} h_i \left(1 - \frac{\log p_i}{\log p_k}\right)\right)^2 \\
&= \left(\sum_{i\ =1}^{k} \sqrt{\xi_i} \frac{h_i}{\sqrt{\xi_i}} \left(1 - \frac{\log p_i}{\log p_k}\right)\right)^2 \\
&\leq (\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_k) \sum_{i\ =1}^{k} \frac{h_i^2}{\xi_i} \left(1 - \frac{\log p_i}{\log p_k}\right)^2
\end{aligned}$$

donc

$$\left(\sum_{i\ =1}^{k} h_i\right)^2 \leq (\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_k) \sum_{i\ =1}^{k} \frac{h_i^2}{\xi_i} \left(1 - \frac{\log p_i}{\log p_k}\right)^2 \tag{2.4.19}$$

en utilisant l'inégalité $(1-t)^2 \leq 1-t$, valable pour $0 < t \leq 1$ avec $t = \dfrac{\log p_i}{\log p_k}$ et la relation (2.4.4) on obtient,

$$\begin{aligned}
F''(\underline{\xi}).(\underline{h}) &= \left(\frac{1}{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_k}\right) \left(\sum_{i\ =1}^{k} h_i\right)^2 - \sum_{i\ =1}^{k} \frac{h_i^2}{\xi_i} \\
&\leq \sum_{i\ =1}^{k} \frac{h_i^2}{\xi_i} \left(1 - \frac{\log p_i}{\log p_k}\right)^2 - \sum_{i\ =1}^{k} \frac{h_i^2}{\xi_i} \\
&\leq -\sum_{i\ =1}^{k} \frac{h_i^2}{\xi_i} \frac{\log p_i}{\log p_k}
\end{aligned} \tag{2.4.20}$$

Comme on a,

$$\sum_{i=1}^{k} \xi_i \log p_i = \theta \sum_{i=1}^{k} y_i \log p_i + (1-\theta) \sum_{i=1}^{k} x_i^* \log p_i = \theta A + (1-\theta) A = A$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique,

$$\left(\sum_{i\ =1}^{k} |h_i| \log p_i\right)^2 = \left(\sum_{i\ =1}^{k} \sqrt{\xi_i \log p_i} \frac{|h_i| \sqrt{\log p_i}}{\sqrt{\xi_i}}\right)^2 \leq A \sum_{i\ =1}^{k} \frac{h_i^2 \log p_i}{\xi_i} \tag{2.4.21}$$

en divisant (2.4.21) par $-A \log p_k$ on obtient,

$$-\sum_{i\ =1}^{k} \frac{h_i^2 \log p_i}{\xi_i \log p_k} \leq \frac{-1}{A \log p_k} \left(\sum_{i\ =1}^{k} |h_i| \log p_i\right)^2 \tag{2.4.22}$$

les inégalités (2.4.22) et (2.4.20) impliquent,

$$F''(\underline{x}).(\underline{h}) \leq -\sum_{i\ =1}^{k} \frac{h_i^2}{\xi_i} \frac{\log p_i}{\log p_k} \leq \frac{-1}{A \log p_k} \left(\sum_{i\ =1}^{k} |h_i| \log p_i\right)^2 \tag{2.4.23}$$

ce qui avec (2.4.14) , (2.4.15) , (2.4.17) et (2.4.18) entrainent,

$$\begin{aligned} F(\underline{x}) &\leq F(\underline{y}) \leq F(\underline{x}^*) - \frac{1}{2A\log p_k}\left(\sum_{i\ =1}^{k} |y_i - x_i^*| \log p_i\right)^2 \\ &\leq F(\underline{x}^*) - \frac{1}{2A\log p_k}\left(\sum_{i\ =1}^{k-1} |x_i - x_i^*| \log p_i\right)^2 \\ &\leq F(\underline{x}^*) - \frac{1}{2A\log p_k}\sum_{i\ =1}^{k-1} (x_i - x_i^*)^2 (\log p_i)^2 . \end{aligned}$$

■

2.5 Grandes valeurs de la fonction $h\,(n)$

Théorème 2.5.1 .

Soit n un entier, $n \geq 2$ et $k = \omega\,(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts de n. Alors on a,

$$\log h(n) \leq \lambda_k \log n$$

Preuve. Nous démontrons par récurrence sur n et pour k fixé que

$$h(n) \leq n^{\lambda_k}$$

Pour $n = 2$ on a $h(2) = 1$, la propriété est vraie

Supposons la vraie jusqu'à $n-1$ avec $n = q_1^{\alpha_1}...q_j^{\alpha_j}$ où q_i, $1 \leq i \leq j \leq k$ sont des nombres premiers distincts et $\alpha_i \geq 1$.

L'hypothèse de récurrence et les relations (1.3.2) et (1.3.4) impliquent

$$\begin{aligned} h(n) &= \sum_{i=1}^{j} h\left(\frac{n}{q_i}\right) \leq \sum_{i=1}^{j}\left(\frac{n}{q_i}\right)^{\lambda_k} \\ &\leq \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{n}{p_i}\right)^{\lambda_k} = n^{\lambda_k}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i^{\lambda_k}} = n^{\lambda_k}. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.5.2 (cf.[15]) *Soit n un entier naturel, $n \geq 3$, et $k = \omega(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts de n.*

Alors ,

(i) Il existe une constante positive C_1 tel que

$$\log h(n) \leq \lambda_k \log n - \frac{k-1}{3} \leq \lambda \log n - C_1 \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log \log n}$$

(ii) Et il existe une constante positive C_2 et $m \leq n$ tel que,

$$\log h(m) \geq \lambda \log n - C_2 \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log \log n}$$

les constantes positives C_1 et C_2 sont absolues.

où λ_k et λ sont définis en (2.2.2) et (1.3.3) .

Preuve.

Démonstration de l'inégalité (i)

Soit $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \ldots q_k^{\alpha_k} \geq 3$, la décomposition de n en facteurs premiers distincts avec $q_1 < q_2 < \ldots < q_k$.

Lorsque $k = 1$, $\lambda_k = 0$ et d'après (1.3.2) ; $h(n) = 1$ et donc (i) est satisfait pour toute constante $C_1 \leq 1$ et pour tout n.

on peut donc supposer que $k \geq 2$.

On pose $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} \leq n$ où $p_1 = 2$, $p_2 = 3$,..., p_k le k-ième nombre premier.

Par (1.3.2) , on a $h(N) = h(n)$ et $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \log p_i = \log N$.

la proposition (2.1.1) (i) donne

$$\log h(n) = \log h(N) \leq F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) - \frac{k-1}{3}$$

En appliquant la proposition (2.4.1) avec $A = \log N$ on obtient

$$\log h(n) \leq \lambda_k \log N - \frac{k-1}{3}$$

et comme $\log N \leq \log n$, il vient,

$$\log h(n) \leq \lambda_k \log n - \frac{k-1}{3}.$$

Par ailleurs l'inégalité,

$$\lambda_k \log n - \frac{k-1}{3} \leq \lambda \log n - C_1 \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log\log n}$$

est équivalente à :

$$(\lambda - \lambda_k) \log n + \frac{k-1}{3} \geq C_1 \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log\log n}. \tag{2.5.1}$$

Supposons $C_1 \leq 0.135$,

pour $3 \leq n \leq 15$ et $k = \omega(n) = 2$, on a $\lambda_2 = 0.788...$ et $n \in \{6, 10, 12, 14, 15\}$ d'après le calcul, (2.5.1) est satisfaite.

On suppose maintenant $n \geq 16$, donc $\log\log n > 1$.

D'après la proposition (2.2.2) il existe une constante positive γ_1, telle que $\lambda - \lambda_k \geq \dfrac{\gamma_1}{k^{\lambda-1}(\log k)^{\lambda}}$.

Nous distinguons les deux cas suivants :

1. Si $2 \leq k \leq \dfrac{(\log n)^{\frac{1}{\lambda}}}{\log\log n} < \log n$, alors

$$\lambda - \lambda_k \geq \frac{\gamma_1}{\left(\dfrac{(\log n)^{\frac{1}{\lambda}}}{\log\log n}\right)^{\lambda-1} (\log\log n)^{\lambda}} = \frac{\gamma_1 (\log n)^{\frac{1}{\lambda}-1}}{\log\log n}$$

d'où

$$(\lambda - \lambda_k) \log n + \frac{k-1}{3} \geq \gamma_1 \frac{(\log n)^{\frac{1}{\lambda}}}{\log\log n} + \frac{k-1}{3} \geq \gamma_1 \frac{(\log n)^{\frac{1}{\lambda}}}{\log\log n}$$

donc (2.5.1) est satisfaite et aussi (i), on peut prendre $C_1 = \gamma_1$

2. Si $k > \dfrac{(\log n)^{\frac{1}{\lambda}}}{\log\log n}$, on a

$$\frac{k-1}{3} \geq \frac{k}{6} > \frac{1}{6} \frac{(\log n)^{\frac{1}{\lambda}}}{\log\log n}$$

ce qui implique,

$$(\lambda - \lambda_k) \log n + \frac{k-1}{3} > \frac{1}{6} \frac{(\log n)^{\frac{1}{\lambda}}}{\log\log n}$$

d'où (2.5.1) est donc satisfaite, on peut prendre $C_1 = 0.166...$

Dans les deux cas (2.5.1) est satisfaite et alors (i) aussi, il suffit de prendre pour celà $C_1 = \min(0.135, \gamma_1)$. ■

Avant de démontrer (ii) nous avons besoin du lemme suivant cf.[15]

Lemme 2.5.1 *Soient k un entier positif et $n = 2 \times 3 \times 5...p_k$, où p_k le k-ième nombre premier, on range les 2^k diviseurs de n par ordre croissant : $1 = d_1 < d_2 < ... < d_{2^k} = n$. Alors, pour tout i, $1 \leq i \leq 2^{k-1}$, on a*

$$d_{i+1} \leq 2d_i.$$

Preuve. Soit $n = 2 \times 3 \times 5...p_k$
supposons $d_i < n$.

1. Si d_i est impaire, $2d_i$ est un diviseur de n et comme $d_i < 2d_i$, alors $d_{i+1} \leq 2d_i$.
2. Si d_i est pair (donc divisible par 2), soit $p_j \geq 3$, $2 \leq j \leq k$ le plus petit

nombre premier ne divisant pas d_i.

Comme p_{j-1} divise d_i et que $\left(d_i, \dfrac{p_j}{p_{j-1}}\right) = 1$
alors $\dfrac{d_i p_j}{p_{j-1}}$ est un diviseur de n plus grand que d_i
par conséquent $d_{i+1} \leq \dfrac{d_i p_j}{p_{j-1}}$.

Mais, par le postulat de Bertrand (cf.[14],Th.418), on a $\dfrac{p_j}{p_{j-1}} < 2$
d'où $d_{i+1} \leq \dfrac{d_i p_j}{p_{j-1}} < 2d_i$
ce qui achève la preuve du lemme (2.5.1). ■

Démonstration de (ii) du Théorème (2.5.2).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrons qu'il existe un entier naturel $m \leq n$, vérifiant (ii) du théorème (2.5.2).

Posons,

$$k = \left[\mu \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log \log n}\right] \tag{2.5.2}$$

où μ est une constante positive satisfaisant,

$$\mu < \lambda a^{1/\lambda} = 0.945... \tag{2.5.3}$$

où a est défini par la relation (2.3.1)

Posons $A = \log n$, d'après la proposition (2.4.1) on a,

$$x_i^* = \frac{a_k \log n}{p_i^{\lambda_k}} \text{ , } i = 1, 2, ..., k \tag{2.5.4}$$

où les a_k sont définis par la relation (2.3.1) .

La relation (2.4.9) implique,

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^* \log p_i = \log n \tag{2.5.5}$$

Lorsque $n \to +\infty$, en utilisant la décroissance de la suite (a_k) et le fait que $\lambda_k \leq \lambda$, $k \in \mathbb{N}^*$, les relations (2.5.4) et (2.2.8) entrainent,

$$x_1^* > x_2^* > ... > x_k^* = \frac{a_k \log n}{p_k^{\lambda_k}} \geq \frac{a \log n}{p_k^{\lambda}} \sim \frac{a \log n}{(k \log k)^{\lambda}}$$

puisque la suite $(a_k)_k$ est décroissante et $\lambda_k \leq \lambda$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Grâce à (2.5.2) on obtient,

$$x_1^* > x_2^* > ... > x_k^* \sim \frac{a \log n}{(k \log k)^{\lambda}} \sim \frac{a\,(\log \log n)^{\lambda}}{\mu^{\lambda}(\log \kappa + 1/\lambda \log \log n - \log \log \log n)^{\lambda}} \sim \frac{a \lambda^{\lambda}}{\mu^{\lambda}} > 1 \tag{2.5.6}$$

La relation (2.4.6) implique,

$$F(\underline{x}^*) = \lambda_k \log n = \lambda \log n - (\lambda - \lambda_k) \log n \tag{2.5.7}$$

Avec (2.2.5) et (2.5.2) , lorsque $n \to +\infty$ on obtient,

$$\lambda - \lambda_k \sim \frac{1}{-(\lambda-1)P'(\lambda)k^{\lambda-1}(\log k)^{\lambda}} \sim \frac{\lambda^{\lambda}(\log n)^{1/\lambda - 1}}{-(\lambda-1)P'(\lambda)\mu^{\lambda-1}\log \log n} \tag{2.5.8}$$

En utilisant (2.5.2) , la relation (2.5.7) s'écrit,

$$F(\underline{x}^*) = \lambda_k \log n = \lambda \log n - O(k) \tag{2.5.9}$$

Par (2.4.10) et (2.3.2) on a lorsque $n \to +\infty$,

$$x_1^* + x_2^* + ... + x_k^* = a_k \log n \sim a \log n \tag{2.5.10}$$

et (2.4.5) entraine,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} \log x_i^* &= \sum_{i=1}^{k} \log(a_k \log n) - \lambda_k \sum_{i=1}^{k} \log p_i \\ &= k \log(a_k \log n) - \lambda_k \theta(p_k) \end{aligned} \tag{2.5.11}$$

où $\theta(t) = \sum_{p \leq t} \log p$ est la fonction de Tchebychev, En utilisant le développement asymptotique de Cipolla (cf.[8]), on obtient

$$p_k = k(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log(k) - 2}{\log k} + O\left(\left(\frac{\log\log k}{\log k}\right)^2\right) \tag{2.5.12}$$

Le théorème des nombres premiers (cf.[9], Th. 4.7) et (2.5.12) impliquent,

$$\theta(p_k) = p_k + \frac{O(p_k)}{(\log p_k)^2} = k(\log k + \log\log k - 1 + o(1)), \text{ lorsque } k \to \infty \tag{2.5.13}$$

Avec (2.5.2) , (2.5.13) et la relation (2.5.11) on obtient,

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \log x_i^* = \log a_k + \log\log n - \lambda_k \left(\frac{1}{\lambda}\log\log n + \log\frac{\mu}{e\lambda} + o(1)\right)$$

De la relation (2.3.2) on déduit que, $\log a_k = \log a + o(1)$ et par (2.5.3) on obtient pour k assez grand,

$$\sum_{i=1}^{k} \log x_i^* = k\lambda \log \frac{e\lambda a^{1/\lambda}}{\mu} > k\lambda \tag{2.5.14}$$

puisque $\dfrac{\lambda a^{1/\lambda}}{\mu} > 1$.

Construction de l'entier m

k étant défini par (2.5.2) et x_i^* par (2.4.5) , on pose $m_0 = \prod_{i=1}^{k} p_i^{[x_i^*]}$

on a alors,

$$\frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_k} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{x_i^*-1} < m_0 \leq n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{x_i^*}.$$

Soit d le plus grand diviseur de $p_1 p_2 \ldots p_k$, vérifiant $d \leq \dfrac{n}{m_0}$

On écrit $d = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\varepsilon_i}$, avec $\varepsilon_i = 0$ ou 1. D'après le lemme (2.5.1), on a $d > \dfrac{n}{2m_0}$

Posons $m = m_0 d$, on a alors,

$$\frac{n}{2} < m_0 d = m \leq n \tag{2.5.15}$$

d'où

$$m = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, \text{ avec } \alpha_i = [x_i^*] + \varepsilon_i,\ \varepsilon_i = 0 \text{ ou } 1 \tag{2.5.16}$$

les relations (2.5.15) et (2.5.16) entrainent,

$$-\log 2 < \log(m/n) = \sum_{i=1}^{k} \log p_i^{(\alpha_i - x_i^*)} = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - x_i^*)\log p_i \leq 0 \tag{2.5.17}$$

De (2.5.16) et (2.5.6) on déduit que,

$$1 \leq [x_i^*] \leq \alpha_i \leq 1 + [x_i^*] \leq 1 + x_i^* \leq 2x_i^* \quad , \quad 1 \leq i \leq k \tag{2.5.18}$$

et

$$|\alpha_i - x_i^*| \leq 1 \ , \ 1 \leq i \leq k \tag{2.5.19}$$

En appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2 à la fonction F définie par (2.1.3) , il existe $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)$ où $\xi_i = \theta\alpha_i + (1-\theta)x_i^*$ pour tout i, $1 \leq i \leq k$ et $0 < \theta < 1$, tel que :

$$F(\underline{\alpha}) = F(\underline{x}^*) + \sum_{i\ =1}^{k} (\alpha_i - x_i^*) \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}^*) + \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i - x_i^*\right)^2}{2(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_k)} - \sum_{i\ =1}^{k} \frac{(\alpha_i - x_i^*)^2}{2\xi_i} \tag{2.5.20}$$

de (2.5.18) on obtient,

$$\xi_i \geq \theta\,[x_i^*] + (1-\theta)\,[x_i^*] = [x_i^*] \geq 1. \tag{2.5.21}$$

Par (2.5.17) et (2.4.12) le deuxième terme du membre de droite dans (2.5.20) satisfait,

$$\sum_{i\ =1}^{k} (\alpha_i - x_i^*) \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}^*) = \lambda_k \sum_{i\ =1}^{k} (\alpha_i - x_i^*) \log p_i = \lambda_k \log \frac{m}{n} \geq -\lambda_k \log 2 \geq -\lambda \log 2. \tag{2.5.22}$$

par (2.5.19) et (2.5.21) , le quatrième terme de (2.5.20) s'écrit,

$$\sum_{i\ =1}^{k} \frac{(\alpha_i - x_i^*)^2}{2\xi_i} \leq \sum_{i\ =1}^{k} \frac{1}{2\xi_i} \leq \sum_{i\ =1}^{k} \frac{1}{2} = \frac{k}{2}. \tag{2.5.23}$$

La relation (2.5.20) et les inégalités (2.5.22) et (2.5.23) entrainent

$$F(\underline{\alpha}) \geq F(\underline{x}^*) - \lambda \log 2 - \frac{k}{2}. \tag{2.5.24}$$

puisque le troisième terme de (2.5.20) est positif.

D'autre part, l'inégalité (ii) de la proposition (2.1.1) implique, pour m défini par (2.5.16)

$$\log h(m) \geq F(\underline{\alpha}) - k - \frac{1}{2} \sum_{i\ =1}^{k} \log \alpha_i \ .$$

et avec les relations (2.5.24) et (2.5.18) on obtient,

$$\log h(m) \geq F(\underline{x}^*) - \lambda \log 2 - \frac{3k}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i\ =1}^{k} \log(2x_i^*) \tag{2.5.25}$$

(2.5.9) , (2.5.14) et (2.5.25) impliquent alors,

$$\log h(m) \geq \lambda \log n - O(k)$$

comme d'après (2.5.2) on a $k = \left[\mu \frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log \log n}\right]$ alors,

$$\log h(m) \geq \lambda \log n - O\left(\frac{(\log n)^{1/\lambda}}{\log \log n}\right).$$

ce qui termine la preuve de (ii) du théorème (2.5.2). ■

Chapitre 3

Les nombres $h-$champions

Définition 3.0.1 *On dit qu'un entier positif N est un nombre $h-$champion, si pour tout entier m, on a :*

$$m < N \quad \textit{implique} \quad h(m) < h(N) \tag{3.0.1}$$

Dans la suite de tout ce chapitre, nous désignerons par N un nombre $h-$champion et le $i-$ième nombre premier par p_i, donc $p_1 = 2$, $p_2 = 3$,... , p_k, ..., et on désignera par N_i le $i-$ième nombre $h-$champion, alors $N_1 = 1$, $N_2 = 6$, $N_3 = 12$,...

Notons que la fonction $h\,(n)$ ne dépend que des exposants de la décomposition en facteurs premiers de n, on a :

Lemme 3.0.2 *Soit $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ un nombre $h-$champion, où $p_1 = 2$, $p_2 = 3$,... , p_k est le $k-$ième nombre premier.*
Alors,

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_k \geq 1 \quad \textit{où } k = \omega(N) \tag{3.0.2}$$

Preuve. Soit N nombre $h-$champion dont la décomposition en facteurs premiers s'écrit $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$.

Supposons qu'il existe i, $2 \leq i \leq k$ tel que $\alpha_{i-1} < \alpha_i$.

Ecrivons $\alpha_i = \alpha_{i-1} + m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et donc $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_{i-1}^{\alpha_{i-1}} p_i^{\alpha_{i-1}+m} p_{i+1}^{\alpha_{i+1}} ... p_k^{\alpha_k}$.

Soit $N' = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_{i-1}^{\alpha_{i-1}+m} p_i^{\alpha_{i-1}} p_{i+1}^{\alpha_{i+1}} ... p_k^{\alpha_k}$

alors on a,

$N' < N$ car $\dfrac{N'}{N} = \dfrac{p_{i-1}^m}{p_i^m} < 1$, puisque $p_{i-1} < p_i$

Calculons $h\left(N\right)$ et $h\left(N'\right)$

on a,

$h(N) = \dfrac{(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k + m)!}{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_{i-1}!\left(\alpha_{i-1} + m\right)!\alpha_{i+1}!...\alpha_k!}$ et $h(N') = \dfrac{(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k + m)!}{\alpha_1!\alpha_2!...\left(\alpha_{i-1} + m\right)!\alpha_{i-1}!\alpha_{i+1}!...\alpha_k!}$
d'où $h(N) = h(N')$, mais $N' < N$ ceci contredit le fait que N est un nombre $h-$champion d'où le résultat du lemme (3.0.2). ■

Lemme 3.0.3 .

Pour tout $i \geq 1$ et pour tout entier positif n, si $N_i \leq n < N_{i+1}$ alors $h(n) \leq h(N_i)$, où N_i et le $i-$ième nombre $h-$champion

Preuve. Découle du fait que N_{i+1} est le plus petit entier positif plus grand que N_i verifiant $h\left(N_{i+1}\right) > h\left(N_i\right)$. ■

Lemme 3.0.4 .

Il existe une infinité de nombres $h-$champions.

Preuve. Par le théorème (2.5.2) (ii), on a $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, h(n) = +\infty$, donc l'ensemble des nombres $h-$champions est infini. ■

Lemme 3.0.5 .

Soit i un entier naturel ≥ 2, alors,

$$N_{i+1} \leq 2N_i.$$

Preuve. Soit $i \in \mathbb{N}^*$

La définition de $h\left(n\right)$ implique que pour tout entier naturel $n \geq 1$ tel que $\omega(n) = 1$, on a $h(n) = 1$

Mais comme $h\left(1\right) = 1 < h\left(6\right) = \left(2 \times 3\right) = 2$

donc pour tout $i \geq 2$, on a $\omega(N_i) \geq 2$ où N_i et le $i-$ième nombre $h-$champion.

Supposons donc $i \geq 2$. Soit N_i un nombre $h-$champion tel que $N_i = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$

on a,

$$\begin{aligned} h(2N_i) &= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k + 1)!}{(\alpha_1 + 1)!\alpha_2!...\alpha_k!} \\ &= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k + 1)}{\alpha_1 + 1} h\left(N_i\right) > h(N_i) \end{aligned}$$

d'où

$$h(2N_i) > h(N_i)$$

comme N_{i+1} est le plus petit entier plus grand que N_i et vérifiant $h(N_{i+1}) > h(N_i)$, alors $N_{i+1} \leq 2N_i$. ■

3.1 Encadrement de $\omega(N)$

Théorème 3.1.1 *Soit N $(N \neq 1)$ un nombre $h-$champion.*

Alors, il existe trois constantes positives C_3, C_4 et n_0 telles que, pour $N \geq n_0$, on ait :

$$C_3 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N} \leq \omega(N) \leq C_4 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N}.$$

Pour la démonstration, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1.1 *Soit $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ $(N \neq 1)$ un nombre $h-$champion.*
Alors,

$$\log h(N) \geq \lambda \log N - C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N}. \tag{3.1.1}$$

où C_2 est la constante définie dans le théorème (2.5.2) .

Preuve. D'après (ii) du théorème (2.5.2), il existe un entier $m \leq N$, tel que

$$\log h(m) \geq \lambda \log N - C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N}$$

L'hypothèse de N nombre $h-$champion entraine

$$\log h(N) \geq \log h(m)$$

d'où

$$\log h(N) > \log h(m) \geq \lambda \log N - C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N}.$$

■

Preuve du Théorème (3.1.1).

Soit N un nombre $h-$champion tel que $k = \omega(N) \geq 2$.

Par l'inégalité (i) du théorème (2.5.2), on a,

$$\log h\,(N) \leq \lambda_k \log N - \frac{k-1}{3} \tag{3.1.2}$$

En comparant cette inégalité et l'inégalité du lemme (3.1.1) on déduit que,

$$\lambda \log N - C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N} \leq \lambda \log N - (\lambda - \lambda_k) \log N - \frac{k-1}{3}.$$

ce qui est équivalent à l'inégalité :

$$(\lambda - \lambda_k) \log N \leq C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N} \tag{3.1.3}$$

D'après la proposition (2.2.2) le premier membre de l'inégalité (3.1.3) est équivalent à,

$$(\lambda - \lambda_k) \log N \sim \frac{\log N}{-(\lambda-1)P'(\lambda)k^{\lambda-1}(\log k)^{\lambda}}$$

en remplaçant dans (3.1.3) il vient,

$$k^{\lambda-1}(\log k)^{\lambda} \gtrsim \frac{(\log N)^{1-1/\lambda} \log\log N}{-C_2(\lambda-1)P'(\lambda)} \tag{3.1.4}$$

Posons,

$$y = f(x) = x^{\lambda-1}(\log x)^{\lambda} \tag{3.1.5}$$

et

$$T = \frac{(\log N)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \log\log N}{-C_2(\lambda-1)P'(\lambda)} \tag{3.1.6}$$

L'inégalité (3.1.4) s'écrit alors,

$$f(k) \gtrsim T \tag{3.1.7}$$

La fonction f définie par (3.1.5) , est croissante et continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$, elle admet donc une fonction réciproque g .

Par (3.1.5) on obtient,

$$\log y = \log f(x) = (\lambda - 1) \log x + \lambda \log\log x$$

mais lorsque $x \to +\infty$ on a :

$\log y \sim (\lambda - 1) \log x$, ce qui est équivalent à $\log x \sim \dfrac{\log y}{\lambda - 1}$

en remplaçant dans (3.1.5) on obtient,

$$y = f(x) \sim x^{\lambda-1}(\frac{\log y}{\lambda - 1})^{\lambda}$$

d'où l'on déduit la relation,

$$x^{\lambda-1} \sim y(\frac{\lambda-1}{\log y})^{\lambda}$$

ainsi, on obtient l'expression explicite de la fonction réciproque g de f,

$$x = g(y) \sim (\lambda-1)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}(\frac{y}{(\log y)^{\lambda}})^{\frac{1}{\lambda-1}} \tag{3.1.8}$$

comme g est une fonction croissante, puisque f est croissante, (3.1.7) implique

$$k = g(f(k)) \geq g(T). \tag{3.1.9}$$

Evaluons $g(T)$.

La relation (3.1.6) implique,

$$T^{\frac{1}{\lambda-1}} = \frac{(\log N)^{\frac{1}{\lambda}}(\log\log N)^{\frac{1}{\lambda-1}}}{(-C_2P'(\lambda))^{\frac{1}{\lambda-1}}(\lambda-1)^{\frac{1}{\lambda-1}}} \tag{3.1.10}$$

et

$$\log T = \frac{\lambda-1}{\lambda}\log\log N + \log\log\log N - \log(-C_2P'(\lambda)) - \log(\lambda-1)$$

d'où, lorsque $N \to +\infty$ on a,

$$\log T \sim \frac{\lambda-1}{\lambda}\log\log N$$

et

$$(\log T)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \sim \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}(\log\log N)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \tag{3.1.11}$$

De (3.1.8) , (3.1.10) et (3.1.11) on déduit que

$$g(T) \sim (\lambda-1)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \frac{(\log N)^{\lambda}(\log\log N)^{\frac{1}{\lambda-1}}}{(-C_2P'(\lambda))^{\frac{1}{\lambda-1}}(\lambda-1)^{\frac{1}{\lambda-1}}\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}(\log\log N)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}}$$

d'où l'on obtient,

$$g(T) \sim C_3\frac{(\log N)^{\frac{1}{\lambda}}}{(\log\log N)}$$

où

$$C_3 = \frac{(\lambda-1)}{(-C_2P'(\lambda))^{\frac{1}{\lambda-1}}\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}}$$

Lorsque $N \to +\infty$, (3.1.9) implique,

$$k \geq C_3\frac{(\log N)^{\frac{1}{\lambda}}}{(\log\log N)}$$

d'où la minoration de $k = \omega(N)$.

La majoration de $\omega(N)$, s'obtient de (3.1.2) et (3.1.1) .

En effet, on a

$$-\frac{k-1}{3} \geq -C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N}$$

car d'après (2.2.4) $\lambda_k < \lambda$.

d'où

$$k \leq 3C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N} + 1$$

Pour $N \geq 3$, on a $\dfrac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N} > 1$, où $\lambda = 1.399433...$

par suite,

$$k \leq 3C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N} + \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N}$$

donc il existe une constante C_4 tel que,

$$k \leq C_4 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N}$$

on peut prendre $C_4 = 3C_2 + 1$. $\blacksquare$

3.2 Exposants des petits facteurs premiers d'un nombre $h-$champion.

Théorème 3.2.1 *Soit N un nombre $h-$champion, tel que $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$.*
Alors lorsque $N \to +\infty$, on a :

(i) $\alpha_i = \dfrac{a}{p_i^{\lambda}} \log N + O(\dfrac{(\log N)^c}{\log p_i})$, $1 \leq i \leq k-1$

(ii) $\Omega(N) = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = a \log N + O((\log N)^c)$

où

$$c = (1 + 1/\lambda)/2 = 0.857... \tag{3.2.1}$$

Preuve.

Preuve de (i)

Soit $N = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha k}$ un nombre $h-$champion tel que $k = \omega(N)$
l'inégalité (3.1.1) et (2.2.4) entrainent,

$$\log h(N) \geq \lambda \log N - C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log \log N} \geq \lambda_k \log N - C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log \log N} \tag{3.2.2}$$

D'autre part, (i) de la proposition (2.1.1) implique,

$$\log h(N) \leq F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \tag{3.2.3}$$

l'inégalité (3.2.3) et la proposition (2.4.2) appliquée avec $A = \log N$ permettent d'obtenir,

$$\log h(N) \leq F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \leq F(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*) - \frac{1}{2 \log N \log p_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} |\alpha_i - x_i^*| \log p_i \right)^2 \tag{3.2.4}$$

où x_i^* est défini par (2.4.5)
mais par la proposition (2.4.2) appliquée pour $A = \log N$ et l'inégalité (3.2.4) on obtient,

$$\log h(N) \leq \lambda_k \log N - \frac{1}{2 \log N \log p_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} |\alpha_i - x_i^*| \log p_i \right)^2. \tag{3.2.5}$$

Les inégalités (3.2.2) et (3.2.5) impliquent

$$\frac{1}{2 \log N \log p_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} |\alpha_i - x_i^*| \log p_i \right)^2 \leq C_2 \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log \log N} \tag{3.2.6}$$

Le théorème (3.1.1) permet de déduire alors que,

$$k = \omega(N) \asymp \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N} \tag{3.2.7}$$

d'après (2.2.8) , lorsque $k \to +\infty$, on a $\log p_k \sim \log(k \log k) \sim \log k$
de (3.2.7) on déduit que lorsque $k \to +\infty$ on a,

$$\log p_k \sim \log k \sim \frac{1}{\lambda} \log\log N. \tag{3.2.8}$$

de (3.2.6) et (3.2.8) on obtient,

$$\left(\sum_{i=1}^{k-1} |\alpha_i - x_i^*| \log p_i \right)^2 \leq \frac{2C_2}{\lambda} (\log N)^{1+1/\lambda}$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{k-1} |\alpha_i - x_i^*| \log p_i = O((\log N)^c) \tag{3.2.9}$$

où $c = (1 + 1/\lambda)/2 = 0.857...$

Comme on a pour tout i, $1 \leq i < k : |\alpha_i - x_i^*| \log p_i \geq 0$, alors

$$|\alpha_i - x_i^*| \log p_i \leq \sum_{i=1}^{k-1} |\alpha_i - x_i^*| \log p_i$$

ce qui avec (3.2.9) donne,

$$|\alpha_i - x_i^*| \log p_i = O((\log N)^c) \tag{3.2.10}$$

De (2.4.5) , on a $x_i^* = \dfrac{a_k \log N}{p_i^{\lambda_k}}$, par suite (3.2.10) s'écrit pour tout i, $1 \leq i \leq k-1$,

$$\alpha_i - \frac{a_k \log N}{p_i^{\lambda_k}} = O\left(\frac{(\log N)^c}{\log p_i} \right) \tag{3.2.11}$$

ce qui est équivalent à,

$$\alpha_i - \frac{a \log N}{p_i^{\lambda}} - \left(\frac{a_k}{p_i^{\lambda_k}} - \frac{a}{p_i^{\lambda}} \right) \log N = O\left(\frac{(\log N)^c}{\log p_i} \right) \tag{3.2.12}$$

Le troisième terme à gauche de (3.2.12) en valeur absolue vaut,

$$\left| \frac{a_k}{p_i^{\lambda_k}} - \frac{a}{p_i^{\lambda}} \right| = \left| \left(\frac{1}{p_i^{\lambda_k}} - \frac{1}{p_i^{\lambda}} \right) a_k + (a_k - a) \frac{1}{p_i^{\lambda}} \right|$$

le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $x \to \dfrac{1}{p_i^x}$ sur l'interval $[\lambda_k, \lambda]$ implique,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_k}{p_i^{\lambda_k}} - \frac{a}{p_i^{\lambda}}\right| &= \left|\left(\frac{1}{p_i^{\lambda_k}} - \frac{1}{p_i^{\lambda}}\right) a_k + (a_k - a)\,\frac{1}{p_i^{\lambda}}\right| \\
&\leq \frac{\log p_i}{p_i^{\lambda_k}}\,(\lambda - \lambda_k)\, a_k + (a_k - a)\,\frac{1}{p_i^{\lambda}} \\
&\leq (\lambda - \lambda_k)\, a_k \log p_k + (a_k - a)
\end{aligned}$$

puisque, $\dfrac{\log p_i}{p_i^{\lambda_k}} < \log p_k \quad (p_i < p_k)$ et $\dfrac{1}{p_i^{\lambda_k}} \leq 1$, pour i, $1 \leq i \leq k-1$.
Les propositions (2.2.2) et (2.3.2) ainsi que la relation (3.2.8) entrainent,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_k}{p_i^{\lambda_k}} - \frac{a}{p_i^{\lambda}}\right| &\leq (\lambda - \lambda_k)\, a_k \log p_k + (a_k - a) \\
&= O\left(\frac{\log p_k}{k^{\lambda-1}\log k^{\lambda}}\right) + O\left(\frac{1}{k^{\lambda-1}\log k^{\lambda-1}}\right) \\
&= O\left(\frac{1}{k^{\lambda-1}\log k^{\lambda-1}}\right) = O\left(\frac{1}{(\log N)^{1-1/\lambda}}\right)
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Les relations (3.2.11) et (3.2.13) impliquent (i)
puisque d'après (3.2.8) on a $\log p_i \leq \log p_k = O(\log\log N)$ et $1/\lambda < c$

Preuve de (ii) du Théorème (3.2.1)

Soit N un nombre $h-$champion, tel que $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, où $p_1 = 2$, $p_2 = 3...$ et p_k le *k-ième nombre premier. On a* $\Omega(N) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$

En utilisant (2.4.9) et (2.4.10) avec $A = \log N$
on obtient,

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^* = a_k \log N \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{k} x_i^* \log p_i = \log N$$

donc,

$$\begin{aligned}
|\Omega(N) - a_k \log N| &= \left|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i - \sum_{i=1}^{k}x_i^*\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{k-1}(\alpha_i - x_i^*) + \frac{1}{\log p_k}(\alpha_k - x_k^*)\log p_k\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{k-1}(\alpha_i - x_i^*) - \frac{1}{\log p_k}(\log N - \alpha_k \log p_k - \log N + x_k^* \log p_k)\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{k-1}(\alpha_i - x_i^*) - \frac{1}{\log p_k}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i \log p_i - \sum_{i=1}^{k-1}x_i^* \log p_i\right)\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{k-1}(\alpha_i - x_i^*) - \frac{1}{\log p_k}\sum_{i=1}^{k-1}(\alpha_i - x_i^*)\log p_i\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{k-1}(\alpha_i - x_i^*)\left(1 - \frac{\log p_i}{\log p_k}\right)\right|
\end{aligned}$$

d'où

$$|\Omega(N) - a_k \log N| = \left|\sum_{i=1}^{k-1}(\alpha_i - x_i^*)\left(1 - \frac{\log p_i}{\log p_k}\right)\right| \tag{3.2.14}$$

comme pour tout i, $1 \leq i \leq k$ on a,

$$1 - \frac{\log p_i}{\log p_k} \leq 1 \text{ et } \frac{\log p_i}{\log 2} \geq 1$$

alors,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{k-1}(\alpha_i - x_i^*)\left(1 - \frac{\log p_i}{\log p_k}\right)\right| &\leq \left|\sum_{i=1}^{k-1}(\alpha_i - x_i^*)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1}|\alpha_i - x_i^*|\frac{\log p_i}{\log 2}
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

De (3.2.15) et (3.2.14) on déduit que,

$$|\Omega(N) - a_k \log N| \leq \sum_{i=1}^{k-1}|\alpha_i - x_i^*|\frac{\log p_i}{\log 2} \tag{3.2.16}$$

L'estimation (3.2.9) et l'inégalité (3.2.16) impliquent,

$$\Omega(N) = a_k \log N + O\left((\log N)^c\right)$$

donc

$$\Omega(N) - a\log N - (a_k - a)\log N = O\left((\log N)^c\right) \tag{3.2.17}$$

D'après la proposition (2.3.2) et (3.2.7) impliquent alors,

$$a_k - a = O\left(\frac{1}{(k\log k)^{\lambda-1}}\right) = O\left(\frac{1}{(\log N)^{1-1/\lambda}}\right) \tag{3.2.18}$$

D'où l'on obtient avec (3.2.17) et (3.2.18) ,

$$\begin{aligned} \Omega(N) &= a\log N + O\left(\frac{1}{(\log N)^{1-1/\lambda}}\right)\log N + O\left((\log N)^c\right) \\ &= a\log N + O\left((\log N)^{1/\lambda}\right) + O\left((\log N)^c\right) \\ &= a\log N + O\left((\log N)^c\right) \end{aligned}$$

ce qui prouve (ii). ■

3.3 Exposants des grands facteurs premiers d'un nombre $h-$champion

Théorème 3.3.1 *Soit $N = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ un nombre $h-$champion. Alors pour N assez grand on a,*

$$\alpha_k = 1 \tag{3.3.1}$$

Preuve.

Soit $N = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ un nombre $h-$champion assez grand.
Posons $M = N\dfrac{p_{k+1}p_{k+2}}{2p_{k-1}p_k}$, d'après le théorème (3.1.1) on déduit que $k = \omega(N)$ tend vers l'infini lorsque N tend vers l'infini et par le lemme (2.2.2) on a pour N assez grand

$$M < N \tag{3.3.2}$$

La définition (3.0.1) d'un nombre $h-$champion et (3.3.2) impliquent,

$$h(M) = \frac{\alpha_1\alpha_{k-1}\alpha_k}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k}h(N) < h(N) \tag{3.3.3}$$

D'après le théorème (3.2.1) lorsque $N \to +\infty$ on a,

$$\alpha_1 \sim \frac{a}{2^\lambda}\log N \text{ et } \Omega(N) = \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k \sim a\log N$$

d'où l'on obtient,

$$\frac{\Omega(N)}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k}{\alpha_1} \sim 2^{\lambda} < 3$$

donc

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k < 3\alpha_1 \tag{3.3.4}$$

Pour N assez grand l'inégalité (3.3.3) implique,

$$\frac{\alpha_1\alpha_{k-1}\alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k} < 1 \text{ ce qui est équivalent à } \alpha_{k-1}\alpha_k < \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k}{\alpha_1} \tag{3.3.5}$$

le lemme (3.0.2) et les inégalités (3.3.4) et (3.3.5) donnent,

$$1 \leq \alpha_k^2 \leq \alpha_{k-1}\alpha_k < \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k}{\alpha_1} < 3$$

d'où l'on déduit que $1 \leq \alpha_k < \sqrt{3}$, ce qui implique $\alpha_k = 1$ car $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$.

Ce qui achève la preuve de (3.3.1) . ■

Notons que d'après la table des nombres $h-$champions (cf.[6]). Les seuls nombres $h-$champions, qui sont inférieurs à $X = \prod_{i=1}^{22} p_i = 3.2 \times 10^{30}$ et dont les exposants α_k, dans la décomposition en facteurs premiers sont égaux ou supérieurs à 2, sont les cinq nombres suivants,

$N_{48} = 3175200 = 2^5 3^4 5^2 7^2$, $N_{52} = 6350400 = 2^6 3^4 5^2 7^2$, $N_{56} = 12700800 = 2^7 3^4 5^2 7^2$
$N_{60} = 19051200 = 2^6 3^5 5^2 7^2$ et $N_{64} = 38102400 = 2^7 3^5 5^2 7^2$.

Lemme 3.3.1 *Soit N un nombre h_ champion tel que $N = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$*
Pour tout ε, $0 < \varepsilon < 1$, il existe N_ε tel que pour $N \geq N_\varepsilon$, il existe des entiers u, v, u', v' vérifiant,

$$(1 - \varepsilon)p_i \leq 2^u 3^v < p_i < p_{i+1} < 2^{u'} 3^{v'} < p_{i+1}(1 + \varepsilon) < p_i(1 + 2\varepsilon) \tag{3.3.6}$$

Preuve. D'apres le théorème des nombres premiers, on déduit que la limite $\frac{p_{i+1}}{p_i}$ tend vers 1. Le résultat du lemme (3.3.1) découle du fait que si l'on ordonne les nombres de la forme $2^u 3^v$ où u et v sont des entiers positifs ou nuls ($u \geq 0$, $v \geq 0$), en une suite croissante $(x_n)_{n \geq 1}$, on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ (cf.[28]) car $\frac{\log 3}{\log 2}$ est un nombre irrationnel. ■

Théorème 3.3.2 *Soit $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ un nombre $h-$champion.*
Soit q_j le plus grand nombre premier tel que q_j^j divise N (en particulier $q_1 = p_k$), alors pour j fixé, $j \geq 1$ et lorsque $N \to +\infty$, on a

$$q_j \sim \left(\frac{a \log N}{j} \right)^{1/\lambda} \sim j^{-1/\lambda} q_1. \tag{3.3.7}$$

où λ et a sont définis par (1.3.3) et (2.3.1) .

Preuve. cf.[15]

Fixons j, on désigne par $i = i(j)$ le rang du nombre premier q_j, autrement dit,

$$q_j = p_i = p_{i(j)} \tag{3.3.8}$$

et par la définition de q_j, on déduit du lemme (3.0.2)

$$\alpha_i \geq j \quad \text{et} \quad \alpha_{i+1} \leq j - 1 \tag{3.3.9}$$

L'estimation (i) du théorème (3.2.1) implique $i = i(j)$ et p_i tend vers l'infini lorsque N tend vers l'infini.

Comme $i \leq k$, de (3.2.8) et (3.3.6) on déduit que,

$$u, v, u', v' = O(\log \log N). \tag{3.3.10}$$

Posons,

$$M = \frac{N 2^u 3^v}{p_i} < N \text{ et } M' = \frac{N p_{i+1}}{2^{u'} 3^{v'}}. \tag{3.3.11}$$

Les relations (1.3.2) , (3.0.1) et (3.3.9) impliquent

$$\begin{aligned} 1 \quad > \quad \frac{h(M)}{h(N)} &= \frac{\alpha_i \left(\Omega(N) + 1\right) ... \left(\Omega(N) + u + v - 1\right)}{(\alpha_1 + 1) ... (\alpha_1 + u)(\alpha_2 + 1) ... (\alpha_2 + v)} \\ &\geq \frac{j \left(\Omega(N)\right)^{u+v-1}}{(\alpha_1 + u)^u (\alpha_2 + v)^v} \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Le (i) du théorème (3.2.1) et (3.3.10) entrainent,

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + u)^u &= \alpha_1^u \exp\left(u \log(1 + \frac{u}{\alpha_1}) \right) \leq \alpha_1^u \exp(\frac{u^2}{\alpha_1}) \\ &= \left(\frac{a \log N}{2^\lambda} \right)^u \left(1 + O\left(\frac{u}{(\log N)^{1-c}} \right) \right) \\ &\sim \left(\frac{a \log N}{2^\lambda} \right)^u \end{aligned}$$

d'où

$$(\alpha_1+u)^u \sim \left(\frac{a\log N}{2^\lambda}\right)^u$$

et

$$(\alpha_2+v)^v \sim \left(\frac{a\log N}{3^\lambda}\right)^v$$

de la relation (ii) du théorème (3.2.1) et de (3.3.10) on déduit que,

$$(\Omega(N))^{u+v-1} \sim (a\log N)^{u+v-1}.$$

La relation (3.3.12) entraîne alors, $1 \gtrsim \dfrac{j\,(2^u3^v)^\lambda}{a\log N}$, donc $2^u3^v \lesssim \left(\dfrac{a\log N}{j}\right)^{1/\lambda}$ ce qui, avec (3.3.6) donne,

$$q_j = p_i \lesssim \frac{1}{(1-\varepsilon)}\left(\frac{a\log N}{j}\right)^{1/\lambda}. \tag{3.3.13}$$

Avec le même raisonnement pour M' défini en (3.3.11) on a,

$$\begin{aligned} 1 \;>\; \frac{h(M')}{h(N)} &= \frac{(\alpha_1-u'+1)...(\alpha_1+1)\alpha_1(\alpha_2+v')...(\alpha_2+1)\alpha_2}{(\alpha_{i+1}+1)\,(\Omega(N)-u'-v'+2)\,...\,(\Omega(N)-1)\,\Omega(N)} \\ &\geq \frac{(\alpha_1-u)^{u'}(\alpha_2-v')^{v'}}{j\,(\Omega(N))^{u'+v'-1}} \sim \frac{a\log N}{j\,(2^{u'}3^{v'})^\lambda} \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

ce qui, avec (3.3.6) donne,

$$q_j = p_i \gtrsim \frac{1}{(1+2\varepsilon)}\left(\frac{a\log N}{j}\right)^{1/\lambda}. \tag{3.3.15}$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, les relations (3.3.13) et (3.3.15) entrainent,

$$q_j \sim \left(\frac{a\log N}{j}\right)^{1/\lambda}.$$

■

Corollaire 3.3.1 *Soit N $(N \neq 1)$ un nombre $h-$champion.*

Alors il existe trois constantes positives C_3, C_4 et n_0 telles que, pour $N \geq n_0$, on ait

$$k = \omega(n) \sim \lambda a^{1/\lambda}\frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N} = (0.945....)\,\frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N} \tag{3.3.16}$$

où λ et a sont définis par (1.3.3) et (2.3.1) $\left(a^{1/\lambda} = 0.676...\right)$.

Preuve. cf.[15]

En utilisant (2.2.8) on a,

$$k \sim \frac{p_k}{\log p_k} = \frac{q_1}{\log q_1}$$

et d'après le théorème (3.3.2) pour $j = 1$ on obtient,

$$k = \omega(n) \sim \frac{(a \log N)^{1/\lambda}}{(1/\lambda)\log a + 1/\lambda \log\log N} \sim \lambda a^{1/\lambda} \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log\log N}.$$

■

3.4 Estimation de $Q(X)$

Soit X un nombre réel, $X > 1$, désignons par $Q(X)$ le nombre de nombres $h-$champions inférieurs ou égaux à X. D'après le lemme (3.0.5), il existe une infinité de nombres $h-$champions.

La proposition qui suit donne une minoration de $Q(X)$.

Proposition 3.4.1 *Soit X un nombre réel $X \geq 6$, on a,*

$$Q(X) \gg \log X$$

Preuve. La relation, $Q(X) \gg \log X$ est équivalente à $\log X = O(Q(X))$, donc il suffit de démontrer que

$$\log X < Q(X)$$

Comme pour tout $X \geq 6$, il existe un entier positif $i \geq 2$ tel que l'on ait,

$$N_i \leq X < N_{i+1} \tag{3.4.1}$$

où N_i désigne le $i-$ième nombre $h-$champion $N_1 = 1$, $N_2 = 6$,...
alors, $Q(X) = i$

Mais d'après le lemme (3.0.5), on a $N_{i+1} \leq 2N_i$, $\forall i \geq 2$
d'où $N_{i+1} \leq 2^2 N_{i-1} \leq 2^3 N_{i-2} \leq ... \leq 2^{k+1} N_{i-k}$ tel que $0 \leq k \leq i-2$
pour $k = i-2$, on obtient $N_{i+1} \leq 2^{i-1} N_2 = 2^{i-1} 6 \leq 2^{i+2}$
donc pour tout $i \geq 2$ on a,

$$N_i \leq 2^{i+1}$$

d'où l'on déduit que,

$$\log N_{i+1} \leq (i+2)\log 2 < i+2 \leq 2i \tag{3.4.2}$$

les relations (3.4.1) et (3.4.2) entrainent,

$$\log X < \log N_{i+1} < 2Q(X).$$

d'où,

$$\log X = O\left(Q(X)\right).$$

■

La proposition qui suit donne une estimation plus précise de $Q(X)$.

Proposition 3.4.2

1. *Il existe un nombre réel positif δ ($\delta = 0.059$ convient) tel que pour X assez grand on ait,*

$$Q(X) \geq (\log X)^{1+\delta} \tag{3.4.3}$$

2. *Et pour X assez grand, on a*

$$\log Q(X) = O((\log X)^{c/2}) \tag{3.4.4}$$

où $c = (1+1/\lambda)/2 = 0.857...$et λ est défini par (1.3.3) .

Pour la démonstration de la proposition (3.4.2), nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 3.4.1 (cf.[15]**)** . *Soient n et k deux entiers naturels strictements positifs.*

Le nombre de solutions $\nu(n,k)$ de l'inéquation diophantienne,

$$x_1 + x_2 + ... + x_k \leq n, \text{ avec } x_i \in \mathbb{N} \text{ tels que } x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_k \tag{3.4.5}$$

satisfait,

$$\nu(n,k) = O\left(\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)\right). \tag{3.4.6}$$

Preuve. Soit l'équation diophantienne,

$$x_1 + x_2 + ... + x_k = n \text{ où } x_i \in \mathbb{N} \text{ tels que } x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_k \tag{3.4.7}$$

le nombre de solutions de l'équation diophantienne (3.4.7) est égal au nombre de partitions $p(n)$ de l'entier n

D'après (cf.[11]) on a,

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right) \tag{3.4.8}$$

donc le nombre de solutions $\nu(n,k)$ de (3.4.5) est la somme des nombres de solutions des équations diophantiennes,

$$x_1 + x_2 + ... + x_k = j \quad \text{où } 1 \leq j \leq n$$

d'où l'on a,

$$\nu(n,k) = p(1) + p(2) + ... + p(n) \leq np(n) \tag{3.4.9}$$

car la fonction $p(j)$ est croissante.

De (3.4.8) et (3.4.9) on déduit que,

$$\nu(n,k) \leq \frac{1}{4\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$$

ce qui prouve (3.4.6) . ■

Lemme 3.4.2 *Soit N un nombre $h-$champion, assez grand et soit N' le nombre $h-$champion suivant N, alors*

$$N' \leq N\left(1 + \frac{2\eta \log\log N}{(\log N)^{\eta}}\right) \tag{3.4.10}$$

où η est un nombre réel fixé, tel que $\eta < \dfrac{1-c}{\lambda+1} = 0.0594...$
où $c = (1+1/\lambda)/2 = 0.857...$ *et λ est défini par (1.3.3) .*

Preuve. cf.[15]

Soit $N = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ un nombre $h-$champion assez grand. Le théorème des nombres premiers implique que,

$$\pi\left(2\left(\log N\right)^{\eta}\right) - \pi\left(\left(\log N\right)^{\eta}\right) \sim \frac{\left(\log N\right)^{\eta}}{\eta \log\log N}$$

Autrment dit, le nombre de nombres premiers dans l'intervalle $\left[\left(\log N\right)^{\eta}, 2\left(\log N\right)^{\eta}\right]$ est équivalent à $\dfrac{\left(\log N\right)^{\eta}}{\eta \log\log N}$. Par conséquent pour N est assez grand, il existe deux nombres premiers consécutifs p_r et p_{r+1} satisfaisant à,

$$\left(\log N\right)^{\eta} \leq p_r < p_r + 2 \leq p_{r+1} < 2\left(\log N\right)^{\eta} \tag{3.4.11}$$

et

$$p_r < p_r + 2 \leq p_{r+1} \leq p_r + 2\eta \log\log N \tag{3.4.12}$$

Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $f(t) = \dfrac{1}{t^{\lambda}}$ sur l'intervalle $[p_r, p_{r+1}]$ et l'inégalité (3.4.11) impliquent,

$$p_r^{-\lambda} - p_{r+1}^{-\lambda} \geq \lambda \frac{(p_r - p_{r+1})}{p_{r+1}^{\lambda+1}} \geq \frac{2\lambda}{\left(2\left(\log N\right)^{\eta}\right)^{\lambda+1}} = \frac{\lambda 2^{-\lambda}}{\left(\log N\right)^{\eta(\lambda+1)}} \tag{3.4.13}$$

si l'on choisit de η tel que,

$$\eta < \frac{1-c}{\lambda+1} = \frac{\lambda - 1}{2\lambda\left(\lambda+1\right)} = 0.0594...$$

on déduit de (3.4.13) et de (i) du théorème (3.2.1) que pour N assez grand on a,

$$\begin{aligned} \alpha_r - \alpha_{r+1} &= a \log N \left(p_r^{-\lambda} - p_{r+1}^{-\lambda}\right) + O\left(\left(\log N\right)^{c}\right) \\ &\geq a\lambda 2^{-\lambda}\left(\log N\right)^{1-\eta(\lambda+1)} + O\left(\log N\right)^{c} \\ &\geq 2 \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

Posons,

$$M = \frac{p_{r+1}}{p_r} N > N.$$

De (1.3.2) et (3.4.14) on déduit que,

$$h(M) = \frac{\alpha_r}{\alpha_{r+1}+1} h(N) > h(N)$$

En utilisant (3.4.11) , (3.4.12) et le lemme (3.0.3), on déduit que le nombre $h-$champion N' suivant N vérifie,

$$N < N' \leq M \leq N\left(\frac{p_r + 2\eta \log\log N}{p_r}\right) \leq N\left(1 + \frac{2\eta \log\log N}{(\log N)^{\eta}}\right)$$

ce qui démontre le lemme (3.4.2). ■

Preuve de la proposition (3.4.2). cf.[15]

Preuve de la relation (3.4.3)

Soit N_i le $i-$ième nombre $h-$champion

écrivons les nombres $h-$champions entre $\frac{\sqrt{X}}{2}$ et X,

$$N_u < \frac{\sqrt{X}}{2} \leq N_{u+1} < N_{u+2} < ... < N_{u+v} < X \leq N_{u+v+1}$$

En choisissant $\delta < \eta = 0.0594...$, le lemme (3.4.2) implique pour X assez grand,

$$\frac{N_{u+i+1}}{N_{u+i}} \leq 1 + \frac{2\eta \log\log\left(\frac{\sqrt{X}}{2}\right)}{\left(\log\left(\frac{\sqrt{X}}{2}\right)\right)^{\eta}} \leq 1 + \frac{1}{2}(\log X)^{-\delta}, \text{ où } 1 \leq i \leq v$$

comme par le lemme (3.0.5) on a,

$$\frac{X}{\sqrt{X}} < \frac{N_{i+v+1}}{2N_i} \leq \frac{N_{i+v+1}}{N_{i+1}} \leq \left(1 + \frac{1}{2}(\log X)^{-\delta}\right)^{v}$$

alors

$$Q(X) \geq v \geq \frac{\frac{1}{2}\log X}{\log\left(1 + \frac{1}{2}(\log X)^{-\delta}\right)} \geq (\log X)^{1+\delta}$$

d'où la relation **(3.4.3) .**

Preuve de la relation (3.4.4)

Soit $X > 0$, un nombre réel assez grand et N un nombre $h-$champion inférieur à X.

On pose $A = \log N$, pour $1 \leq i < k$, on définit x_i^* par (2.4.5) et α_i par la relation (3.0.2)

Soit j un entier naturel ≥ 3, on a par (2.2.4) , $\lambda_j \geq \lambda_3 > 1$.

Posons,

$$T_j(N) = T_j = \sum_{i=j+1}^{k} \alpha_i. \qquad (3.4.15)$$

Si $j \geq k$, alors $T_j = 0$

Si $j < k$, alors (3.2.8) , (3.2.9) et (3.3.1) impliquent,

$$\begin{aligned} T_j &\leq \sum_{i=j+1}^{k-1} \alpha_i \log p_i + \alpha_k \log p_k \\ &\leq \sum_{i=j+1}^{k-1} x_i^* \log p_i + O\left((\log N)^c\right) \\ &= a_k \log N \sum_{i=j+1}^{k-1} \frac{\log p_i}{p_i^{\lambda_k}} + O\left((\log N)^c\right). \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

Grâce aux relations (2.2.1) , (2.2.3) ,(2.2.4) , (2.2.19) et à la proposition (2.2.2) on déduit que,

$$\sum_{i=j+1}^{k-1} \frac{\log p_i}{p_i^{\lambda_k}} \leq \sum_{i=j+1}^{+\infty} \frac{\log p_i}{p_i^{\lambda_J}} = P_j'(\lambda_j) - P'(\lambda_j) = O\left(\frac{1}{j^{\lambda_j - 1}}\right) = O\left(\frac{1}{j^{\lambda - 1}}\right)$$

la relation (3.4.16) entraîne alors,

$$T_j = O\left(\frac{\log N}{j^{\lambda-1}}\right) + O\left((\log N)^c\right). \tag{3.4.17}$$

Fixons j tel que,

$$j = [(\log X)^\gamma] \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1-c}{\lambda - 1} = \frac{1}{2\lambda} = 0.357... \tag{3.4.18}$$

où λ et c sont définis par (1.3.3) et (3.2.1) .

Pour chaque nombre $h-$champion $N < X$, la relation (3.4.17) implique,

$$T_j\left(N\right) = \alpha_{j+1} + \alpha_{j+2} + ... + \alpha_k = O\left((\log N)^c\right)$$

D'après le lemme (3.4.1) le nombre de choix possibles pour α_{j+1},α_{j+2},...,α_k est

$$\exp\left(O\left(\sqrt{(\log N)}^c\right)\right) = \exp\left(O\left(\log X\right)^{c/2}\right). \tag{3.4.19}$$

De la relation (3.0.2) et du (i) du théorème (3.2.1), puisque on a $\dfrac{a}{p_i^\lambda} \leq \dfrac{a}{2^\lambda} < 0.219 < \dfrac{1}{2}$ on obtient,

$$\alpha_j \leq \alpha_{j+1} \leq ... \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq \frac{\log X}{2}$$

par suite le nombre des choix possibles pour chaque exposant α_i, $i = 1...j$, est majoré par

$$\left(\frac{\log X}{2} + 1\right)^j \leq (\log X)^{(\log X)^\gamma} = \exp\left((\log X)^\gamma \log\log X\right). \tag{3.4.20}$$

De (3.4.19) et (3.4.20) on déduit alors que,

$$Q\,(X) \leq \exp\left((\log X)^{\gamma} \log\log X\right) + O\left((\log X)^{c/2}\right)$$

Comme d'après (3.4.18) on a $\gamma < c/2$, cela achève la preuve de (ii) ■

Annexe

.1 Programmes

- Programme de calcul de λ, λ_k, a et a_k

Ce programme écrit à l'aide du logiciel Maple, permet de calculer les valeurs des deux suites $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ et $(a_k)_{k\geq 1}$ ainsi que la valeur de λ et a.

λ et λ_k étant définis par les relations : $P_k^{-1}(\lambda_k) = 1$ et $P(\lambda) = 1$ où $P_k(s) = \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j^s}$ et $P(s) = \sum\limits_{p\in\wp} \frac{1}{p^s}$; a et a_k par $a = \frac{-1}{P'(\lambda)}$ et $a_k = \frac{-1}{P'_k(\lambda_k)}$.

La formule,

$$P(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} \log(\zeta(ks))$$

cf.[26] permet de calculer avec précision la valeur λ.

Le programme:

```
P :=proc(s,mmax) local m , S ;
# P(s) est la somme pour p premier de 1/p^s
# P(s) est aussi egale a somme(mu(m)/m*log(zeta(m*s)), m=1..infini)
# pour avoir une valeur de P(x) avec k chiffres, choisir mmax =3*k
# Par example, pour calculer P(1.4) avec 10 décimales faire P(1.4,30) ;
S :=0 ;
for m from 1 to mmax do
S :=S+evalf(numtheory[mobius](m)/m*log(Zeta(m*s))) ;
od ;
end ;
```

```
# Les procédures Pprime et P1 calculent P'(s), P2 calcule P"(s)
# en choisissant mmax comme pour P(s)
Pprime :=proc(s,mmax) local a,b,k ;
a :=evalf(sum(numtheory[mobius](k)*Zeta(1,k*s)/Zeta(k*s), k=1..mmax)) end ;
P1 :=proc(s,mmax) local ss ; evalf(subs(ss=s,diff(P(ss,mmax),ss)))end ;
P2 :=proc(s , mmax) local ss ; evalf(subs(ss=s,diff(P(ss,mmax),ss,ss)))end ;
Q :=proc(s,k) local S,j,p
# Q(s,k) est la somme des inverses des puissance s-ieme des k premiers
# nombres premiers (notee P_k(s) dans la thèse)
S :=0. ;p :=1 ;
for j from 1 to k do
p :=nextprime(p) ;
S :=S+evalf(1/p^s) ;
od ;
S ;
end ;
Q1 :=proc(s,k) local S,j,p ;
# Q1(s,k) vaut P_k'(s)
S :=0. ;p :=1 ;
for j from 1 to k do
p :=nextprime(p) ;
S :=S+evalf(-log(p)/p^s) ;
od ;
S ;
end ;
# La fonction f sert a calculer lambda_k
f :=proc(x,k) evalf(x-Q(x,k)-1)/Q1(x,k)) end ;
# calcul de lambda_k
lambdak :=proc(k,impr) local x,i :
# calcule la valeur de lambda_k par la methode de Newton ;
```

```
# impr est une variable booleenne d'impression
# impr :=false, on n'ecrit rien ; impr=true, on ecrit le resultat.
x :=1.4 :
for i from 1 to 10 do x :=evalf(f(x,r)) ;if impr then print(i,x) fi ; od :
if impr then print(`k=`,k,`lambda_k=`,x) fi ;
x ;
end ;
# la fonction ff sert a calculer lambda
ff :=proc(x,mmax) ; x-(P(x,mmax)-1)/P1(x,mmax) ; end ;
# calcul de lambda
lambda :=proc(mmax,impr) local x,i ;
# calcule de valeur de lambda par la methode de Newton ;
# choisir mmax=3 fois le nombre de chiffres desires, comme pour P(s)
# impr est une variable booleene d'impression
# impr=false, on n'ecrit rien ; impr=true, on ecrit les resultats partiels
x :=1.4 ;
for i from 1 to 10 do x :=evalf(ff(x,mmax)) ;if impr then print(i,x) fi ; od :
if impr then print(`lambda=`,x) fi ;
x ;
end ;
ak :=proc(k,impr) local lamk,P1l,aak ;
# calcule a_k tel que defini dans notre these a_k=-1/P'(lambda_k)
lamk :=lambdak(k,impr) ;
P1l :=Q1(lamk,k) ;
aak :=evalf(-1/P1l) ;
if impr then print(`k=`,k,`lambda_k=`,lamk,`a_k=`,aak) fi ;
aak ;
end ;
asypk :=proc(kmmax,t,z) local Y,Z,ZZ,k,ord ;
# cette proc calcule en t=log(x) et z=loglog(x)
```

```
# le dev asy de Li(x)^-1
# a l'ordre 2^kmax-2 ; le reste est en 2^kmax-1 ;
Y :=t+log(t) ;
for k from 1 to kmax do
Y :=asymp(Y-(Ei(Y)-exp(t)*Y/exp(Y),t,2^k+1) ;
Y :=convert(Y,polynom) ; #print(Y) ;
od ;
Y :=asympt(exp(Y-t),t,2^kmax) ;
Y :=convert(Y,polynom) ;
Z :=subs(log(t)=z,Y) ;
ZZ :=collect(Z,[t,z]) ;
end ;
```

- **Programme de calcul des nombres $h-$champions :**

Ce programme détermine les nombres $h-$champions. Il donne pour chaque nombre $h-$champions N trouvé, la suite de ses exposants intervenant dans sa factorisation en produit de nombres premiers et il calcule la valeur de $h(n)$.

La méthode utilisée est la méthode de M. Deléglise cf.[6], elle consiste à déterminer par "backtraking" tous les nombres de la forme,

$$N = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k} \quad \text{avec} \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_k \geq 1 \tag{H}$$

et $k = \omega(N)$ et qui sont inférieurs à une borne donnée X, ensuite à l'aide de la fonction h, on élimine tous les nombres qui ne sont pas des nombres $h-$champions.

Pour $X = 3.2 \times 10^{30}$, les calculs effectués par Marc Deléglise, montrent qu'il existe 814236 nombres de la forme (H) et que seuls 785 nombres sont des $h-$champions.

Le programme :

```
init :=proc(K) local k, pk; global P,KMAX,NMAX,tab,tabexp,a,v ;
tab := table() ;
tabexp := table() ;
KMAX := K ;
P := array(0..K) ;
pk := 1 ;
P[0] :=1 ;
for k from 1 to K do
pk := pk*ithprime(k) ;
P[k] := pk od ;
NMAX :=P[K] ;
v := vector(K,0) ;
a := vector(K,0) ;
end ;
traite := proc(k,n)
local j,s,total ;
global a,v,tab,tabexp ;
s :=0 ; total :=0 ;
for j from k to 1 by -1 do
s := s+a[j] ;
total := total+s ;
v[j] := s ;
od ;
tab[n] := combinat[multinomial](total,v['j']$'j'=1..k) ;
tabexp[n] := eval([v['j']$'j'=1..k]) ;
print(`k=`,k,`n=`,n,`tab[n]=`,tab[n],`tabexp[n]=`,tabexp[n]) ;
end ;
backt := proc(k,N)
local n ;
```

```
global a ;
n := N ;
while (n<=NMAX) do
if (a[k]>0 then traite(k,n) ; print(‘k=‘,k,‘n=‘,n,‘a=‘,a) ;
else print(‘*****k=‘,k,‘n=‘,n,‘a=‘,a) ;
fi ;
if (k<KMAX) and (n*P[k+1]<=NMAX)
then
a[k+1] :=0 ;
backt(k=1,n)
fi ;
n :=n*P[k] ;
a[k] :=a[k]+1 ;
od ;
end;
champ :=proc(k)
local n,y,inds,record,liste2,z,ti ;
global a,tab,cnte,resu ;
resu :=table() ;
ti :=time() ;
init(k) ;
a :=vector(k,0) ;
backt(1.1) ;print(‘temps 1ere partie=‘,time()-ti) ;ti :=time() ;
inds :=sort(map(x->op(x) ,[indices(tab)])) ;
record :=0 ;
cnte :=0 ;
liste2 :=[] ;
print(‘nombre d’elements=‘nops(inds)) ;
for n from 1 to nops(inds) do
y :=tab[inds[n]] ;
```

```
if y>record then
record := y ;
cnte := cnte+1 ;
z :=eval(tabexp[inds[n]] ;
if z[nops(z)]>1 then liste2 :=[op(liste2),[inds[n],z]] fi ;
print(cnte,inds[n],eval(tabexp[inds[n]]), y) ;
resu[cnte] :=[inds[n],z,y] ;
fi ;
od ;
print(liste2) ;print(`temps tri=`,time()-ti) ;
end ;
```

.2 *Tables*

Table des quelques valeurs de λ_k et a_k

k	λ_k	a_k
1	0.000000000	1.4426950410
2	0.787884911	1.1577157340
3	1.032812266	1.0026586190
4	1.147338412	0.9199384156
5	1.200772803	0.8687693152
6	1.238008660	0.8329544543
7	1.261759902	0.8073711729
8	1.280631858	0.7870100677
9	1.294379142	0.7711148983
10	1.304009451	0.7588531258
20	1.347710190	0.6972891872
30	1.362395287	0.6727679268
40	1.369643257	0.6592992451
50	1.374168099	0.6503367296
60	1.377297517	0.6438268495
70	1.379584325	0.6388697231
80	1.381332992	0.6349425576
90	1.382735573	0.6317046386
100	1.383896771	0.6289627385

Table des 50 premiers nombres h−champions:

i	N_i	$(\alpha_1, ..., \alpha_k)$	$h(N_i)$	i	N_i	$(\alpha_1, ..., \alpha_k)$	$h(N_i)$
1	1		1	26	50400	(5,2,2,1)	7560
2	6	(1,1)	2	27	60480	(6,3,1,1)	9240
3	12	(2,1)	3	28	75600	(4,3,2,1)	12600
4	24	(3.1)	4	29	90720	(5,4,1,1)	13860
5	30	(1,1,1)	6	30	110880	(5,2,1,1,1)	15120
6	60	(2,1,1)	12	31	120960	(7,3,1,1)	15840
7	120	(3,1,1)	20	32	151200	(5,3,2,1)	27720
8	180	(2,2,1)	30	33	226800	(4,4,2,1)	34650
9	360	(3,2,1)	60	34	277200	(4,2,2,1,1)	37800
10	720	(4,2,1)	105	35	302400	(6,3,2,1)	55440
11	840	(3,1,1,1)	120	36	453600	(5,4,2,1)	83160
12	1080	(3,3,1)	140	37	604800	(7,3,2,1)	102960
13	1260	(2,2,1,1)	180	38	665280	(6,3,1,1,1)	110880
14	1680	(4,1,1,1)	210	39	831600	(4,3,2,1,1)	183600
15	2160	(4,3,1)	280	40	907200	(6,4,2,1)	180180
16	2520	(3,2,1,1)	420	41	1330560	(7,3,1,1,1)	205920
17	4320	(5,3,1)	504	42	1360800	(5,5,,2,1)	216216
18	5040	(4,2,1,1)	840	43	1512000	(6,3,3,1)	240240
19	7560	(3,3,1,1)	1120	44	1663200	(5,3,2,1,1)	332640
20	10080	(5,2,1,1)	1512	45	1814400	(7,4,2,1)	360360
21	12600	(3,2,2,1)	1680	46	2494800	(4,4,2,1,1)	415800
22	15120	(4,3,1,1)	2520	47	2721600	(6,5,2,1)	504504
23	25200	(4,2,2,1)	3780	48	3175200	(5,4,2,2)	540540
24	30240	(5,3,1,1)	5040	49	3326400	(6,3,2,1,1)	720720
25	45360	(4,4,1,1)	6300	50	4536000	(6,4,3,1)	840840

.3 Conclusion:

Dans ce mémoire, nous avons étudié les grandes valeurs ainsi quelques propriétés des nombres champions de la fonction h, définie pour $n \geq 1$ par $h(1) = 1$ et
$h(n) = \dfrac{(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k)!}{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_k!}$, si $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} ... q_k^{\alpha_k}$.

Nous avons repris et détaillé les résultats dûs à J. L. Nicolas et M. O. Hernane cf.[15]. Les auteurs ont dans [15] donné quelques problèmes ouverts. Notre objectif dans le futur est d'essayer de résoudre quelques uns de ces problèmes.

Les problèmes ouverts listés dans [15] et [16] sont :

1. Existe–t-il une constante C telle que, lorsque le nombre h_champion N tend vers l'infini, on ait
$$\log h(n) = \lambda \log N - (C + o(1)) \frac{(\log N)^{1/\lambda}}{\log \log N}?$$

2. Dans son article [25] S. Ramanujan a appellé nombre hautement compose superieur un nombre N pour lequel il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $M \geq 1$ on ait $\frac{\tau(M)}{M^\varepsilon} \leq \frac{\tau(N)}{N^\varepsilon}$, où $\tau(n)$ est le nombre de diviseurs de n.

   Peut-on généraliser cette notion aux nombres $h-$champions ?

3. La proposition (3.4.2) donne $Q(X) \geq (\log X)^{1+\delta}$ pour X assez grand.

   Existe-t-il une constante $\gamma > 0$ telle que $Q(X) \leq (\log X)^\gamma$?

Bibliographie

[1] T.M. Apostol. *Calculus and linear algebra. Vol. 2 Wiley, 1969.*

[2] T.M Apostol. *Introduction to analytic number theory.* Springer, 1976

[3] E. R. Canfield, P. Erdős, C. Pomerance. *On a Problem of Oppenheim concerning Factorisatio Numerorum , J. Number Theory, 17, (1983), 1-28.*

[4] L. Comtet. *Analyse Combinatoire, tome I, Presses Universitaires de France, (1970).*

[5] M. Deléglise, M. O. Hernane, J.-L. Nicolas. *Grandes valeurs et nombres champions de la fonction arithmétique de Kalmàr.*

[6] M. Deléglise. *Tables des 785 premiers champions de la fonction* $h(n)$*, http://math.univ-lyon1.fr/~deleglis/hn21.txt*

[7] J.-L. Duras, J.-L. Nicolas et G. Robin. *Grandes valeurs de la fonction* $d_k(n)$*, in J. Urbanowicz, K. Győry, H. Iwaniec, editor, Number Theory in Progress, Proceedings de la conférence de Zakopane, Pologne, (1997), Walter de Gruyter, (1997), 743-770.*

[8] P. Dusart, *The kth Prime is Greater than* $k(\ln k + \ln\ln k - 1)$ *for* $k \geq 2$, *Mathematics of Computation V. 68, Number 225, January (1999), Pages 411-415.*

[9] W. J. Ellison et M. Mendès-France, *Les nombres premiers, Publications de l'Institut de mathématique de l'université de Nancago, IX, Hermann, Paris, (1975).*

[10] P. Erdős. *On some asymptotic formulas in the theory of the factorisatio numerorum , Ann. of Math., 42, (1941), 989-993 ; corrections to two of my papers, Ann. of Math., 44, (1943), 647-651.*

[11] P. Erdős and J. Lehner. *The distribution of the number of summands in the partitions of a positive integer. Duke Math. Journal 8 (1941), 335–345.*

[12] H. Everett. *Generalized Lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources.*

[13] G. H. Hardy and S. Ramanujan. *Asymptotic formulæ in combinatory analysis*, Proc. London Math. Soc. (2), 17, (1918), 75-115 and Collected Papers of S. Ramanujan, Cambridge University Press, 276 309.

[14] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers, 4th edition, Oxford at the Clarendon Press, 1979.*

[15] M.-O. Hernane et J.-L. Nicolas. *Grandes valeurs du nombre de factorisations d'un entier en produit ordonné de facteurs premiers, The Ramanujan J, (2007) 14: 277-304.*

[16] M.-O. Hernane. *Thèse de doctorat d'Etat de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumédienne (Alger), 2005.*

[17] E. Hille. *A Problem in Factorisatio Numerorum , Acta Arith. 2, (1937), 134-144.*

[18] A. Knopfmacher, J. Knopfmacher, and R. Warlimont. *Ordered Factorizations for Integers and Arithmetical Semigroups, Advances in Number Theory (Kingston, Ontario, 1991), 151-165, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1993.*

[19] A. Knopfmacher, M. E. Mays. A survey of factorisation counting function. Int. J. Number Theory1, (2005)

[20] P. A. MacMahon. Dirichlet's series and the theory of partitions, Proc. London Math. Soc., (2), 22, (1923), 404-411. Percy Alexander MacMahon Collected Papers, The MIT Press (1978), vol. 1, 966-973.

[21] J.-L. Nicolas. *Grandes valeurs d'une fonction arithmétique.* Séminaire D.P.P., 16, no G20, 1974-75, 5p

[22] J.-L. Nicolas. *On highly composite numbers, Ramanujan revisited, edited by G. E. Andrews, R. A. Askey, B. C. Berndt, K. G. Ramanathan, R. A. Rankin, Academic Press, (1988), 216-244.*

[23] A. Oppenheim. *On an arithmetic function, J. London Math. Soc, 1, (1926), 205-211; II, 2, (1927), 123-130.*

[24] D. P. Parent. *Exercices de Théorie des Nombres.* Gauthier-Villars, Paris,(1978).

[25] S. Ramanujan. *Highly composite numbers, Proc. London Math. Soc. Serie 2, 14, (1915), 347-409. Collected papers, Cambridge University .* Press, 1927, 78-128.

[26] H. Riesel. *Prime Numbers and Computer Methods for Factorization, Birkhäuser, (1985).*

[27] G. Tenenbaum. Intoductionà la Théorie Analytique et Probabilistique des Nombres , SMF, Paris (1995)

[28] R. Tijdeman. *On the maximal distance between integers composed of small primes.* Compositio Math., 28, (1974), 159-162.