

N° d'ordre : 02/2003-M/M.T

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées

***Thèse présentée pour l'obtention du
grade de Magister***

En
Mathématiques
Spécialité
Recherche Opérationnelle (Méthodes Stochastiques)

Par
M^r Mohamed BOUALEM.

Thème

***Inégalités pour les systèmes de
files d'attente avec rappels***

Soutenue publiquement le : lundi 17/02/2003, devant le jury composé de :

M ^r M. DJEDOUR	Professeur	U.S.T.H.B Président
M ^r A. AISSANI	Professeur	U.S.T.H.B Directeur de thèse
M ^r H. FELLAG	Maître de conférences	U.M.M.T.O Examineur
M ^r K. BOUKHETALA	Maître de conférences	U.S.T.H.B Examineur
M ^r T. LARDJENE	Chargé de cours	U.S.T.H.B Examineur

Remerciements

*Tout d'abord, je remercie le **bon dieu** pour son aide et son soutien.*

*En témoignage de reconnaissance et gratitude, je voudrais exprimer mes remerciements les plus sincères et les plus vifs à monsieur **Amar Aissani**, Professeur à l'U.S.T.H.B., de m'avoir initié à la recherche, de m'avoir proposé ce sujet, que j'ai trouvé très intéressant, et de m'avoir soutenu et supporté tout au long de ce travail. Ses conseils, sa patience et sa disponibilité m'ont été d'une aide précieuse. Qu'il trouve ici ma profonde admiration.*

*Je voudrais également exprimer mes remerciements et ma reconnaissance à monsieur **M. Djedour** Professeur à l'U.S.T.H.B., de m'avoir honoré par son aimable acceptation à présider le Jury de cette thèse.*

*Je tien aussi à remercier chaleureusement monsieur **K. Boukhetala**, Maître de conférences à l'U.S.T.H.B., de m'avoir fait l'honneur de faire partie du Jury de cette thèse.*

*Je voudrais également témoigner ma grande reconnaissance et les plus vifs remerciements à monsieur **H. Fellag**, Maître de conférences à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, de m'avoir fait l'honneur par son acceptation d'appartenir au Jury de cette thèse.*

*Je remercie, particulièrement monsieur **T. Lardjene**, chargé de cours à l'U.S.T.H.B., pour l'intérêt apporté à mon travail et pour son acceptation d'appartenir au Jury de cette thèse.*

Enfin, il ne me paraît pas possible de citer ici nommément tous ceux avec qui j'ai eu contact durant la préparation de cette thèse, mais qu'ils ne seront jamais oubliés et qu'ils en soient chaleureusement remerciés.

*Monsieur **Mohamed Boualem**.*

Table des matières

Introduction générale	1
Chapitre 1 : systèmes de files d'attente avec rappels et vacances	
1.0 Introduction	5
1.1 Description du modèle de files d'attente avec rappels	6
1.2 Exemples des systèmes modélisés par des files d'attente avec rappels	7
1.2.1 Les systèmes informatiques à temps réel	7
1.2.2 Le protocole de communication CSMA	8
1.3 Modèles de files d'attente avec rappels	8
1.3.1 Modèles markoviens	9
1.3.2 Modèles non markoviens	12
1.3.2.1 Méthodes des étapes d'Erlang	12
1.3.2.2 Méthodes de la chaîne Markov induite	12
1.3.2.3 Méthode des variables auxiliaires	12
1.3.2.4 Méthode des événements fictifs	13
1.3.2.5 Méthodes d'approximations	13
1.3.2.6 Simulation	13
1.3.3 Modèles semi-markoviens	13
1.4 Le modèle de files d'attente avec rappels et vacances	18
1.4.1 Classification des différents modèles d'attente avec vacances	19
a/ La discipline de service exhaustif (complet)	19
b/ La discipline de service avec barrière	19
c/ La discipline de service limité	20
1.5 Conclusion	22
Chapitre 2 : Eléments de la théorie des ordres partiels et de monotonie	
2.0 Introduction.	23
2.1. Propriétés générales des ordres partiels d'une fonction de distribution	24
2.1.1. Ordre stochastique	26
2.1.2. Ordre Convexe	28

2.1.3.	Ordre concave	31
2.1.4.	Ordre en transformée de Laplace	32
2.1.5.	Relations entre les ordres partiels	34
2.2.	Modèles stochastiques et monotonies	35
2.2.1.	Modèles stochastiques	35
	a/. Modèles finis	35
	b/. Modèles récurrents	35
2.2.2.	Propriétés de monotonies	36
	a./ Monotonie interne	36
	b. Monotonie externe	37
2.3	Comparabilité et monotonie des processus markoviens homogènes	38
	2.3.1 Opérateurs monotones et comparables	38
	2.3.2 Conditions de monotonie et de comparabilité.	40
2.4	Distribution d'âge	40
Chapitre 3: Inégalités pour systèmes d'attente avec rappels et vacances		
3.0	Introduction :	43
3.1	Inégalités stochastiques pour le système $M/G/1$ avec rappels constant	45
	3.1.1 Monotonie de la chaîne de Markov incluse	46
	3.1.2 Inégalités stochastiques pour le nombre de clients dans le système	47
	3.1.3 Inégalités pour quelques caractéristiques de la période d'activité	47
	3.1.4 Conclusion	49
3.2	Analyse du modèle $M/G/1$ avec rappels constants et vacance du serveur	50
	3.2.1 Description du modèle	50
	3.2.2 Chaîne de Markov incluse $M/G/1$ avec rappels constants	52
	3.2.3 $M/G/1$ avec rappels et vacances	53
	3.2.4 Conclusion	55
3.3	Inégalités stochastiques pour le modèle $M/G/1$ avec rappels et vacances	56
	3.3.1 Inégalités préliminaires	56
	3.3.2 Monotonie de la chaîne de Markov incluse	64
	3.3.3 Inégalité stochastique pour le nombre de clients dans le système	74
	Conclusion générale	78
	Bibliographie	79

Introduction générale

Les modèles d'attente avec rappels occupent une situation intermédiaire entre les modèles d'Erlang avec refus et les modèles classiques avec attente *FIFO* (premier arrivé premier servi), qui en constituent les modèles limites dans les cas de faibles et de fortes intensités de rappels.

Ces modèles ont été introduit par Kosten [28], Wilkinson [41], et Cohen [8] dans leurs versions la plus simple, lors de la modélisation de service d'abonnés dans un central téléphonique, et sont utilisés d'avantage pour modéliser divers problèmes dans les systèmes de production, les systèmes informatiques et les réseaux de télécommunication.

Par exemple, dans les systèmes de télécommunications, l'abonné (client) qui trouve le signal occupé, peut renouveler son appel autant de fois qu'il le désire jusqu'à ce qu'une connexion soit établie avec succès. Dans le cas où la connexion ne peut être établie, l'abonné peut décider d'abandonner son appel, un tel appel est dit perdu.

A vrai dire, le temps durant lequel un abonné répète les appels est plus ou moins déterminé par la persistance de l'abonné et l'urgence de l'appel.

La plupart des travaux sur les modèles de files d'attente traitent les systèmes dans lesquels le serveur reste oisif quand la file d'attente est vide.

Cependant, le temps d'oisiveté du serveur pourrait être utilisé pour un travail secondaire dans le but d'améliorer l'efficacité du système. Ces situations pratiques peuvent être analysées par des modèles appelés : "*Modèles de files d'attente avec vacance*".

Il est à noter que dans le cas des systèmes d'attente avec panne active et réparation les périodes de panne ou de réparation peuvent être vues aussi comme des périodes de vacance. Aussi les files d'attente avec rappels peuvent être considérées comme un cas particulier des systèmes de files d'attente avec vacances, où la période de vacance commence à la fin de chaque temps de service et dure jusqu'à ce que le serveur soit réactivé par l'arrivée d'un client primaire (de l'extérieur) ou bien secondaire (de l'orbite) [4]. Autrement dit la période d'oisiveté du serveur peut être considérée comme une période de vacance.

Il est important de signaler par ailleurs, que les principales méthodes et caractéristiques de la théorie des systèmes d'attente avec rappels sont différentes de celles correspondant aux systèmes avec vacances [4].

Pendant environ trois décennies, plusieurs chercheurs se sont intéressés aux modèles de ce type, les techniques et les résultats obtenus ont été fructueusement utilisés dans une variété d'applications.

Les études analytiques de la majorité des modèles de files d'attente se sont avérées très complexes. Les efforts fournis pour simplifier les modèles afin d'obtenir des équations les régissant n'ont pas suffi pour avoir la solution générale, puisque même si on est souvent arrivé à définir les équations du modèle, leur résolution n'a pas toujours été évidente. En effet, dans la majorité des cas, on se retrouve confronté à des systèmes d'équations dont la résolution est complexe, ou possédant des solutions qui ne sont pas facilement interprétables pour que le praticien puisse en bénéficier. Dans bien des cas l'existence et l'unicité de la solution sont difficiles à établir.

Pour pallier aux difficultés rencontrées dans l'obtention de solutions exactes et interprétables pour de nombreux systèmes d'attente, les analystes ont recouru à des méthodes d'approximation.

Ces dernières décennies, Il est apparu dans la littérature des files d'attente des méthodes d'approximation ayant permis d'avoir des estimations quantitatives et qualitatives des caractéristiques des modèles étudiés. Les méthodes de comparaisons stochastiques qui conduisent à des inégalités stochastiques en terme de majoration ou de minoration sont développées dans le but d'avoir des estimations qualitatives.

Ces méthodes constituent aujourd'hui l'une des principales activités de recherche dans divers domaines scientifiques tels que l'économie, la biologie, la recherche opérationnelle, la théorie de décision, la télécommunication, ...etc.

Elles fournissent un outil d'aide à la décision pour l'étude et la conception des systèmes complexes. En effet, elles permettent d'obtenir des estimations et de mettre en évidence des propriétés qualitatives des mesures de performance, en termes de monotonie ou de comparabilité, suivant des ordres stochastiques donnés, lorsqu'on est confronté à des variables aléatoires ou à des processus stochastiques dont l'étude analytique s'avère trop difficiles ou ayant des caractéristiques trop complexes pour un usage pratique.

L'utilisation de ces méthodes permet d'étudier le comportement des estimations fournies d'un modèle complexe en les comparant aux caractéristiques d'un modèle plus simple dont les caractéristiques sont déterminées.

Falin [13,14] a établi les conditions de comparabilité ; pour le système $M/G/1$ avec rappels et un serveur absolument fiable, sous lesquelles l'opérateur de transition de la chaîne de Markov incluse est monotone. Il a montré également que si la loi de service est NBUE (New Better than Used in Expectation), alors le nombre de clients dans le système est inférieur, suivant l'ordre convexe " \leq_v ", à une variable aléatoire de loi binomiale négative.

Greenberg.[22] a prouvé que si la loi de service est NWUE (New Worse than Used in Expectation) , alors la probabilité de blocage calculée sous l'hypothèse de l'approximation de Wolff est une borne supérieure de la probabilité de blocage d'un système $M/G/1$ avec rappels non persistants. Le même résultat a été établi par Greenberg et Wolff [21] pour le système avec rappels non persistants $M/M/m/m$.

Pour le modèle $M/M/m/m$ avec une orbite infinie, Falin [11] obtient une estimation de l'erreur d'approximation par un système d'orbite à capacité finie, via la monotonie du processus tronqué $(C(t), R(t))_{t \geq 0}$.

Liang et Kulkarni (1993) [31] ont fourni des comparaisons stochastiques des diverses mesures de performance du système $GI/GI/1/N$ avec rappels lorsque la loi des temps entre rappels suit une loi PH et ont exprimé ainsi l'effet qualitatif des temps entre rappels sur l'évolution du système.

Falin et Khalil. [1994][27] ont utilisé la théorie générale des ordres stochastiques pour l'étude des propriétés de monotonies du système $M/G/1$ avec rappels suivant des ordres stochastiques donnés ; Ordre stochastique, convexe et en transformée de Laplace. En particulier, ils ont déterminé des bornes simples pour la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système et aussi pour le nombre moyen de clients servis durant une période d'activité.

Artalejo.J.R. [4] a déterminé en utilisant une approche numérique, des estimations par majoration et minoration pour la période d'activité du système $M/M/1$ avec rappels et pannes actives.

Oukid. [34](1995) a généralisé les travaux de Stoyan [36], traitant le modèle de files d'attente classique $GI/GI/1$ en obtenant des estimations par majoration et minoration pour la période d'activité du système $GI/GI/1$ avec rappels et serveur non fiable, comme elle a obtenu des conditions de comparabilité pour une série de systèmes $M/G/1$ avec rappels et serveur non fiable.

Aissani.A. [1](1999) a établi , pour le modèle $GI/GI/1$, des conditions sur les distributions paramétriques (le processus des arrivées, le temps de service et le délais d'attente) pour lesquelles deux modèles de files d'attente sont comparables

du point de vue de certaines mesures de performances ‘ due-date ’ au sens de certains ordres stochastiques donnés . Des bornes pour ces mesures de performance sont obtenus et des exemples numériques sont donnés pour vérifier les résultats trouvés.

Le modèle de files d’attente avec rappels et vacances du serveur a été étudié par Langaris et Moutzoukis [29] dans le cas des arrivées par lots et une politique de vacance exhaustive. Ensuite, ils se sont intéressés [30] aux modèles de files d’attente multi-classes avec rappels et vacance du serveur.

Plus tard, Aissani A. [2] a considéré une file d’attente avec rappels, les arrivées par lots et vacances du serveur. Les temps de service et les périodes de vacance sont arbitrairement distribués. Il a obtenu les fonctions génératrices du nombre de clients dans le système et dans l’orbite en régime stationnaire.

Dans cette thèse, nous étudions l’application de ces méthodes à une classe de modèles de files d’attente avec rappels constants et vacances.

Dans le chapitre premier de cette thèse, on commence par donner une description d’un modèle d’attente avec rappels, puis on enchaîne par quelques exemples pratiques modélisés par ce type de système. Ensuite des définitions et quelques caractéristiques des modèles markoviens, semi-markovien et non-markovien sont donnés. On clôt le chapitre par une description détaillée d’un modèle d’attente avec rappels et vacances.

Dans le chapitre deuxième on donne, un aperçu sur la notion des ordres partiels usuels (ordre stochastique, convexe et de Laplace), des éléments sur la théorie de comparabilité des processus stochastiques et en particulier on définit la monotonie interne et externe d’un processus stochastique. Aussi on présente les classes de distributions d’âges issues de la théorie de la fiabilité.

Le chapitre troisième est consacré à l’étude des inégalités stochastiques pour le modèle $M/G/1$ avec rappels et vacances en s’inspirant des résultats obtenus par Khalil et Falin. [27]. On donne des conditions pour lesquelles l’opérateur de transition de la chaîne de Markov incluse est monotone par rapport aux ordres stochastiques et convexe, on étudie la comparabilité des opérateurs de transition pour les chaînes de Markov incluses de deux systèmes $M/G/1$ avec rappels et vacances, ainsi que la comparabilité des distributions stationnaires respectives des nombre de clients dans les deux système. En dernier lieu, on montre que la distribution stationnaire du nombre de clients dans un système $M/G/1$ avec rappels et vacances est majorée par la distribution stationnaire du nombre de clients dans un système $M/M/1$ avec rappels et vacances.

Chapitre 1

Systemes de files d'attente avec rappels et vacances

1.0 Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons passer en revue certains résultats consacrés aux modèles de files d'attente avec rappels : modèles Markoviens, modèles semi-markoviens . Cette synthèse actualise celles de Yang et Templeton [42], Falin [14], Falin et Templeton [17] et Templeton [40]

Les modèles de files d'attente constituent un outil théorique ou appliqué pour la modélisation, l'évaluation de performance et le contrôle des systèmes de production.

Les modèles de files d'attente, développés ces dernières années, tentent de tenir compte de l'influence des phénomènes de répétitions d'appels qui exercent une influence non négligeable sur les indices de performance de certains systèmes réels, par exemple dans les systèmes de télécommunication.

Les premières tentatives rigoureuses sur les systèmes avec rappels remontent aux travaux de Kosten[28], Clos[7], Wilkinson [41], et Cohen [8], lors de la

modélisation du service d'abonnés dans un central téléphonique. Ce type de systèmes

peut également modéliser le service des avions à l'atterrissage dans un aéroport (d'où l'origine du terme « entrer en orbite »), ou le comportement des processus (taches, programmes...), dans un réseau informatique constitué d'un ordinateur central et d'un ensemble de périphériques (terminaux), ou aussi le protocole CSMA (Carrier Sense Multiple Access) [6] autres exemples sont cités dans les articles [26] et [24].

Dans la première section de ce chapitre on donne une description mathématique d'un modèle de file d'attente avec rappels. Des exemples pratiques modélisés par ce type de système d'attente sont donnés dans la deuxième section et dans la troisième section on trouve les définitions des modèles (markoviens, semi-markoviens et non-markoviens) avec rappels. Une synthèse sur les modèles d'attente avec rappels et vacances est donnée dans la quatrième section.

1.1 Description du modèle de files d'attente avec rappels [42] :

Un système de files d'attente avec rappels est un système composé de m serveurs identiques et indépendants ($m \geq 1$), et de $s-m$ positions d'attentes ($s \geq m$), et d'une orbite de capacité finie ou infinie.

S'il y a un ou plusieurs serveurs libres, un client qui arrive est immédiatement pris en charge par l'un de ces serveurs. Sinon il rejoint la file d'attente, s'il y a une position d'attente libre. Par ailleurs si tous les serveurs et toutes les positions d'attente occupés, il quitte définitivement le système avec une probabilité $1-H_0$, ou bien entre en orbite avec la probabilité H_0 . Il devient alors une source d'appels secondaires et il retentera sa chance après une durée aléatoire.

Les clients qui reviennent et rappellent pour service sont dits « en orbite ». Si l'orbite est à capacité finie et saturée, le client qui trouve tous les serveurs et positions d'attente occupés, à son arrivée, sera contraint de quitter le système sans être servi.

Tout client de l'orbite, appelé client secondaire, est supposé rappeler pour le service à des intervalles de temps aléatoires, ces clients secondaires sont traités comme des clients primaires.

C'est-à-dire si un client de l'orbite (secondaire) rappelle pour le service et trouve un serveur ou une position d'attente libre, il occupe le service ou bien une position dans la file s'il n'y a aucun serveur libre. Par contre si tous les serveurs et toutes les positions d'attente sont occupés, il quitte définitivement le système avec une probabilité $1-H_k$ (où k représente la $k^{\text{ème}}$ tentative infructueuse), ou bien il rejoint l'orbite (si elle n'est pas saturée) avec une probabilité H_k .

Le schéma général d'un système avec rappels est donné par la figure (fig1.1).

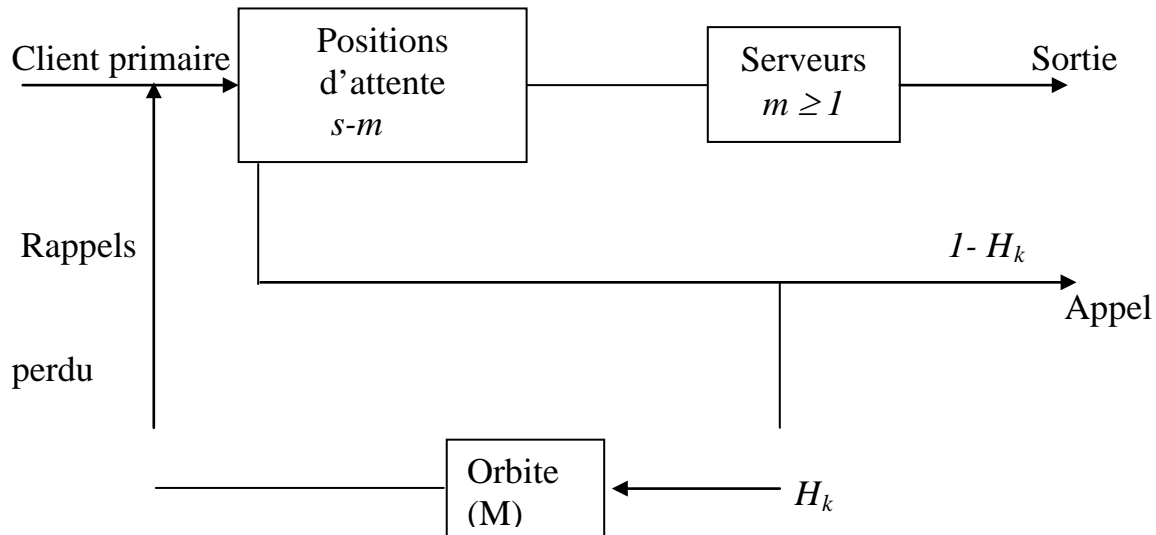


Fig. 1.1 : Modèle de file d'attente avec rappels.

Remarque 1.1.1 :

Le modèle, décrit ci-dessus, est un modèle général. Plusieurs systèmes de files d'attente avec rappels peuvent être considérés comme des cas particuliers, tels que : les systèmes sans positions d'attente et les systèmes à un seul serveur.

1.2 Exemples des systèmes modélisés par des files d'attente avec rappels

1.2.1 Les systèmes informatiques à temps réel

Considérons un système informatique à temps réel dans lequel il y a m ports et s terminaux ($s \geq m$).

Pour la connexion d'un terminal à l'ordinateur central, un seul port doit être utilisé uniquement. Les étudiants arrivent au centre de calcul pour utiliser l'ordinateur central pendant une durée de temps aléatoire. Un étudiant qui arrive doit d'abord trouver un terminal libre pour se connecter, s'il n'en existe aucun, l'étudiant tentera sa chance après un intervalle de temps, par contre s'il trouve un terminal libre, il doit envoyer des commandes pour demander la connexion à l'ordinateur. S'il y a un port libre, le terminal est connecté à l'ordinateur, autrement dit, la requête sera mise

dans une file d'attente et l'étudiant doit attendre jusqu'à ce qu'il y ait un port libre pour lui.

Ce système peut être modélisé par une file d'attente avec rappels à plusieurs serveurs, à s positions d'attente et à une orbite de taille infinie. Les ports correspondent aux serveurs et les terminaux aux positions d'attente.

1.2.2 Le protocole de communication CSMA [6,43]

Dans les réseaux locaux se partageant un bus unique, l'un des protocoles de communication le plus généralement utilisé est appelé non-persistant CSMA (Carrier Sense Multiple Access), c'est une méthode d'accès à un réseau local.

Un réseau local simple est composé de stations ou de terminaux interconnectés par un bus unique, qui est le canal de communication. Ainsi, les stations communiquent les unes avec les autres via le bus qui peut être utilisé par une seule station à la fois. Une telle architecture de réseau d'ordinateur local est appelée architecture en bus.

Des messages de longueurs variables arrivent aux stations du monde extérieur. En recevant le message, la station le découpe en un nombre fini de paquets de longueur fixe, et consulte immédiatement le bus pour voir s'il est occupé ou bien libre.

Si le bus est libre, l'un de ces paquets est transmis via ce bus à la station de destination et les autres paquets sont stockés dans le tampon pour une transmission ultérieure, par contre si le bus n'est pas libre, tous les paquets sont stockés dans le tampon (positions d'attente) et la station peut reconsulter le bus après une certaine période aléatoire.

Ce problème peut être modélisé comme un système d'attente avec rappels à un seul serveur, qui est le bus, et les tampons des stations représentent l'orbite.

Ce système est décrit dans le schéma de la figure 1.2

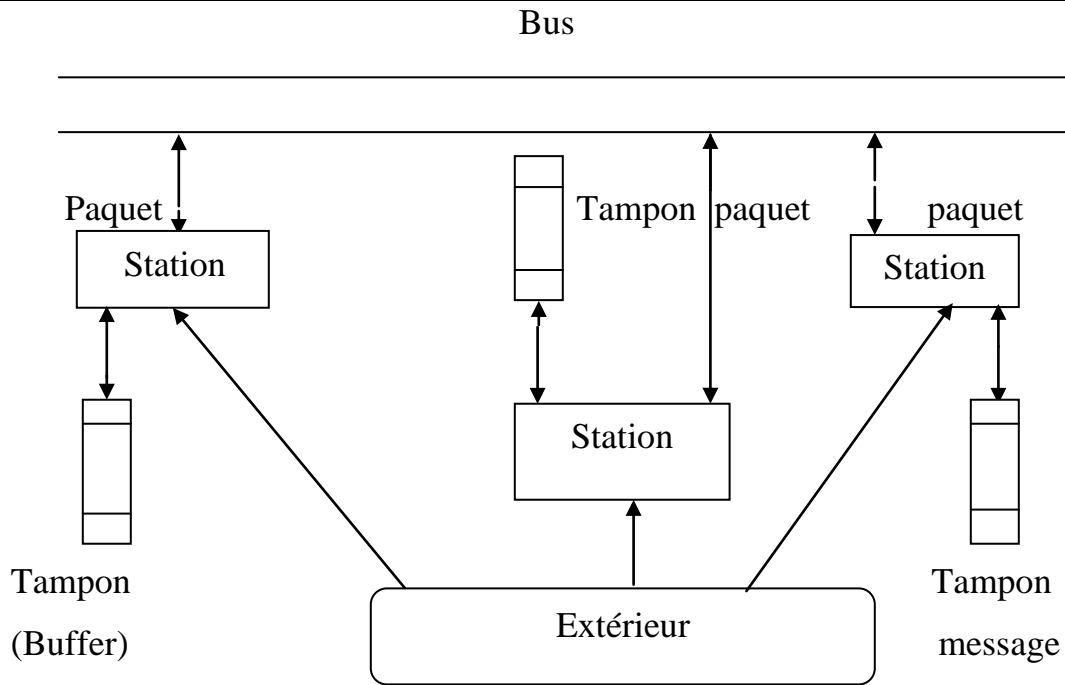


Fig. 1.2 : Schéma d'un réseau local.

1.3 Modèles de files d'attente avec rappels

1.3.1 Modèles Markoviens

Les modèles Markoviens sont des systèmes où les intervalles de temps séparants les arrivées primaires, les durées de service et les temps inter-rappels sont des variables aléatoires indépendantes et exponentiellement distribuées.

Considérons un système de files d'attente avec rappels à m serveurs dont les clients arrivent suivant un flux poissonnien de taux λ . Si un client primaire trouve au moins un serveur libre, il est immédiatement pris en charge et quitte le système à la fin de son service, sinon il entre en orbite et devient une source d'appels répétés [8].

La durée de service suit une loi exponentielle de paramètre θ , la durée entre deux rappels successifs d'une même source secondaire est aussi d'une distribution exponentielle de paramètre μ . Dans ce cas il n'y a pas de positions d'attente ($m = s$) et l'orbite est de capacité infinie.

L'état du système peut être décrit par le processus Markovien homogène

$$X(t) = \{C(t), N(t)\}_{t \geq 0}$$

d'espace d'états $S = \{0, 1, \dots, m\} \times \mathbb{N}$ où :

- $C(t)$ est le nombre de clients en cours de service à l'instant t .
- $N(t)$ est le nombre de clients en orbite à l'instant t .

Soit

$$P_{ij}(t) = P(C(t)=i, N(t)=j) \quad \text{avec } i = 0, 1, \dots, m \text{ et } j \geq 0$$

Les taux de transition du processus $X(t)$ de l'état (i, j) vers (k, l) sont données par :
pour $0 \leq i \leq m-1$

$$P_{ij}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (i+1, j), \\ i\theta & \text{si } (k, l) = (i-1, j), \\ j\mu & \text{si } (k, l) = (i+1, j-1), \\ -(\lambda + i\theta + j\mu) & \text{si } (k, l) = (i, j), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $i = m$

$$P_{ij}(k, l) = \begin{cases} \lambda & \text{si } (k, l) = (m, j+1), \\ m\theta & \text{si } (k, l) = (m-1, j), \\ -(\lambda + m\theta) & \text{si } (k, l) = (m, j), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas particulier où $m = 1$ (un serveur), on montre que la condition d'ergodicité est :

$$\rho = \frac{\lambda}{\theta} < 1.$$

Dans ce cas, les probabilités stationnaires P_{ij} existent, et sont données par les expressions suivantes [14] :

$$P_{0j} = \frac{\rho^j}{j! \mu^j} \prod_{i=0}^{j-1} (\lambda + i\mu)(1-\rho)^{\lambda/\mu+1},$$

$$P_{1j} = \frac{\rho^{j+1}}{j! \mu^j} \prod_{i=1}^j (\lambda + i\mu)(1-\rho)^{\lambda/\mu+1}.$$

Toutes les mesures de performance s'obtiennent alors soit de manière directe, soit à partir des fonctions génératrices [8].

Par ailleurs, Falin [12] et [13] a étudié le modèle markovien avec rappels et positions d'attente, et a obtenu des résultats explicites uniquement pour le cas d'un seul serveur.

Le modèle $M/M/2/2$ a fait l'objet de l'étude de Hanschke [23], qui a montré que les fonctions génératrices partielles des probabilités d'états stationnaires peuvent être exprimées en termes de fonctions hypergéométriques généralisées. Il a obtenu également des algorithmes pour le calcul des deux premiers moments.

Pour $m \geq 2$, on n'a pas obtenu de formules analytiques explicites, les résultats disponibles qui sont établis dans [8] et [23], sont difficilement exploitables dans les cas pratiques.

Pour cela, en vue d'avoir des résultats interprétables, de nombreuses approches ont été proposées, entre autres :

- Méthodes d'approximations.
- Méthodes itératives [24].
- Méthodes numériques [13, 33].
- Méthodes asymptotiques [14, 16].

1.3.2 Modèles non markoviens

Si on s'écarte de l'hypothèse d'exponentialité des deux quantités stochastiques - le temps inter-arrivées et la durée de service - ou lorsqu'on introduit des paramètres supplémentaires spécifiques au modèle étudié, alors on n'aura plus de processus markovien, ce qui rend l'analyse du système très délicate .

Souvent on se ramène à un processus markovien judicieusement choisi, et ceci grâce aux méthodes d'analyses suivantes :

1.3.2.1 Méthode des étapes d'Erlang

Elle a pour principe d'approximer toute loi de probabilité ayant une transformée de Laplace rationnelle par une loi de Cox qui possède la propriété d'absence de mémoire.

1.3.2.2 Méthode de la chaîne de Markov induite

Cette méthode, élaborée par Kendall, consiste à choisir une séquence d'instants $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ (déterministes ou aléatoires) telle que le processus induit $\{X_n, n \geq 0\}$ soit markovien et homogène, avec $X_n = X(\theta_n)$

1.3.2.3 Méthode des variables auxiliaires

Elle consiste à compléter l'information sur le processus $(X(t))_{t \geq 0}$ de telle manière à lui donner un caractère markovien.

Ainsi, on aura à étudier le processus :

$$(X(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_k(t))_{t \geq 0}$$

où $\xi_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) sont des variables aléatoires dites auxiliaires.

1.3.2.4 Méthode des événements fictifs

L'idée de la méthode est d'introduire des événements fictifs, qui permettent de donner une interprétation probabiliste aux transformés de Laplace et aux variables aléatoires décrivant le système étudié.

1.3.2.5 Méthodes d'approximations

On distingue entre autres :

- Des méthodes asymptotiques
- L'estimation par bornes de certaines de ces caractéristiques.

1.3.2.6 Simulation

La simulation est un procédé d'imitation artificielle d'un processus réel sur ordinateur. A l'aide de cette imitation, nous obtenons des données sur le système qui nous permettent de mesurer sa performance. Plusieurs modèles de simulation existent qu'ils soient statiques ou dynamiques, déterministes ou aléatoires.

1.3.3 Modèles semi-markoviens

Le modèle $M/G/1$ avec rappels est le modèle le plus étudié par les spécialistes, des résultats très intéressants sont obtenus sur ses diverses propriétés [14, 15, 27, 18, 35, 5].

Dans ce système, le flot des arrivées primaires est poissonnien de taux λ . Un client primaire qui arrive dans le système et qui trouve le serveur libre est immédiatement pris en charge et quitte le système à la fin de son service. Sinon il entre en orbite et devient source d'arrivées secondaires, après une durée de temps aléatoire il rappelle pour le service. Les intervalles inter-rappels suivent une loi de Poisson de taux μ .

Un client provenant de l'orbite et trouvant le serveur libre l'occupe et quitte le système après la complétion de son service. Par contre s'il le trouve occupé, il retourne dans l'orbite. Les rappels qui arrivent durant un temps de service n'influent pas sur le processus. La durée de service suit une loi générale de distribution $B(x)$, de moyenne $1/\theta$, et de transformée de Laplace-Stieltjes $B(s)$ pour $Re(s) > 0$.

Les inter-arrivées des clients primaires, les intervalles entre les rappels répétés des clients secondaires et le temps de service sont supposés mutuellement indépendants.

Bien que ce système soit semi-markovien, on peut l'analyser par les méthodes d'analyse des systèmes non markoviens citées précédemment.

Dans la suite nous nous limiterons à la méthode de la chaîne de Markov induite.

La méthode des variables auxiliaires s'applique aux systèmes $M/G/1$ avec rappels en complétant l'information sur $X(t) = \{C(t), N(t)\}_{t \geq 0}$ par la variable $\xi_1(t)$ qui représente le temps de service déjà écoulé à l'instant t . Le processus bidimensionnel $\{X(t), \xi_1(t)\}_{t \geq 0}$ décrit complètement le système $M/G/1$ avec rappels. Le calcul de son régime transitoire fait intervenir des équations aux dérivées partielles dont la résolution est difficile. La méthode de la chaîne de Markov induite ramène l'étude de ce processus au cas discret.

En effet, en considérant les instants (θ_n^+) de départ du $n^{\text{ème}}$ client, le processus $\{X(\theta_n^+), \xi_1(\theta_n^+)\}$ sera équivalent à $X_n = X(\theta_n^+)$ puisque $\xi_1(\theta_n^+) = 0$.

La variable aléatoire X_n , qui représente le nombre de clients dans le système juste après l'instant (θ_n^+) , est une chaîne de Markov à temps discret. On considère le processus $\{\Delta_n\}_{n \geq 0}$ représentant le nombre d'arrivées primaires durant le service du $n^{\text{ème}}$ client, les variables Δ_n sont indépendantes entre elles, leur distribution commune est :

$$P[\Delta_n = k] = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^k}{k!} dB(x).$$

On a l'équation de récurrence suivante :

$$X_{n+1} = X_n - \delta_n + \Delta_{n+1} \quad n \in \mathbb{N}$$

avec δ_n la variable de Bernoulli :

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si le client qui quitte le système à l'instant } t_{n+1} \text{ provient de l'orbite,} \\ 0 & \text{si le client qui quitte le système à l'instant } t_{n+1} \text{ provient de l'extérieur.} \end{cases}$$

$$P[\delta_n = 1 / X_n = k] = \frac{k\mu}{\lambda + k\mu}.$$

$$P[\delta_n = 0 / X_n = k] = \frac{\lambda}{\lambda + k\mu}.$$

Où μ est le taux de rappels.

- **Régime transitoire**

Les probabilités de transitions en un pas de la chaîne de Markov X_n sont données par :

$$P_{nm} = P[X_{k+1} = m / X_k = n] = \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} K_{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} K_{m-n+1}.$$

Avec

$$K_k = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^k}{k!} dB(x) \quad \forall k \geq 0.$$

- **Régime stationnaire**

Si $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, alors la chaîne de Markov X_n admet une distribution stationnaire π_k et on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P[X(t) = k] = \lim_{n \rightarrow +\infty} P[X(\theta_n^+) = k] = \pi_k$$

ainsi, la solution ergodique de X_n est la même pour $X(t)$, t quelconque

Pour le calcul du noyau de transition, on distingue quatre cas :

1) Si $i = X_n = 0$, alors aucun client n'est dans le système et il y a j arrivées primaires durant une étape

$$P(X_{n+1} = j / X_n = i) = P(\Delta_{n+1} = j) = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^j}{j!} dB(x).$$

2) Si $j = i-1$, alors il n'y a aucune arrivée primaire et il y a un rappel durant cette étape

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = i-1 / X_n = i) &= \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} P(\Delta_{n+1} = 0) \\ &= \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) dB(x). \end{aligned}$$

3) si $j \geq i$, alors :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j / X_n = i) &= P(\Delta_{n+1} = j + \delta_n + 1) \\ &= \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dB(x) \\ &\quad + \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^{j-i}}{(j-i)!} dB(x). \end{aligned}$$

4) si $j < i-1$, alors $P_{ij} = 0$

le noyau de transition de système avec rappels $M/G/1$ s'écrit alors :

$$P_{ij} = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^j}{j!} dB(x) & \text{si } i=0, \\ \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) dB(x) & \text{si } i=j+1, \\ \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dB(x) + \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^{j-i}}{(j-i)!} dB(x) & \text{si } j \geq i \geq 1. \end{cases}$$

La fonction génératrice de la distribution de probabilité du nombre de client dans le système est donnée par :

$$\begin{aligned} Q(z) &= \frac{(1-\rho)(1-z)B^*(\lambda-\lambda z)}{B^*(\lambda-\lambda z)-z} \frac{\Phi(z)}{\Phi(1)} \\ &= \Pi(z) \frac{\Phi(z)}{\Phi(1)}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Où

$$\Phi(z) = \text{Exp} \left\{ \frac{-\lambda}{\theta} \int_0^z \frac{1-B^*(\lambda-\lambda x)}{x-B^*(\lambda-\lambda x)} dx \right\}$$

et

$$\Pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)B^*(\lambda-\lambda z)}{B^*(\lambda-\lambda z)-z} \quad (1.2)$$

La formule (1.1) est appelée « décomposition stochastique » du système $M/G/1$ avec rappels. Si on note par n_s le nombre moyen de clients dans le système,

alors $n_s = n_\infty + Z$, où Z est la variable aléatoire de fonction génératrice $\frac{\Phi(z)}{\Phi(1)}$, et

n_∞ est le nombre moyen de clients dans le système $M/G/1$ classique avec attente de fonction génératrice $\Pi(z)$.

La formule (1.2) n'est autre que la formule de « Pollaczek-Khintchine » pour le nombre de clients dans le système $M/G/1$ sous la discipline *FIFO*. Cette décomposition a déjà été observée pour les systèmes avec vacances, sa validité a été prouvée pour certaines classes de modèles avec rappels, à titre d'exemple :

Yang et Templeton [42] ont montré que cette décomposition est valable pour un système dont la loi des arrivées est générale Artalejo et Falin [4] ont donné diverses applications de cette propriété de décomposition pour un système d'attente avec rappels. En particulier, ils ont obtenu :

a) Des expressions explicites pour les moments factoriels de la taille de l'orbite et du nombre de clients dans le système.

b) La vitesse de convergence du système $M/G/1$ avec rappels vers le système $M/G/1$ classique quand le taux de rappels tend vers l'infini.

c) Une mesure de la proximité entre ces deux systèmes.

On doit noter que la complexité de la formule explicite de la transformée de Laplace du temps virtuel d'attente du système $M/G/1$ avec rappels, c'est-à-dire le temps entre l'arrivée et le début de service du client qui est en service limite la propriété de la décomposition à la distribution conjointe de l'état du canal et de la taille de l'orbite. Donc, la validité de la propriété de décomposition pour le temps d'attente virtuel est une conjecture.

Artalejo [5] a obtenu la décomposition de la distribution stationnaire en trois composantes liées à la discipline de vacance, les rappels et la distribution de la taille du système $M/G/1$ ordinaire (sans rappels et sans vacance). Falin, Artalejo et Martin ont obtenu la décomposition stochastique pour les systèmes avec rappels et priorité, les systèmes avec rappels et pannes, les systèmes avec rappels et vacances et arrivées par groupes et aussi dans le cas de rappels non exponentielle [16].

Les caractéristiques du système $M/G/1$ avec rappels sont données dans [42] :

- **Nombre moyen de clients dans le système :**

$$\bar{n} = \rho + \frac{\lambda^2 E(\tau^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda\rho}{\mu(1-\rho)}, \quad \text{où } \tau \text{ est la durée de service d'un client}$$

- **Nombre moyen de clients dans l'orbite :**

D'après les formules de Little, on a

$$\bar{n}_o = \bar{n} - \rho = \frac{\lambda^2 E(\tau^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda\rho}{\mu(1-\rho)}.$$

- **Temps d'attente et nombre de rappels :**

Le temps d'attente d'un client est mesuré à partir du temps de son entrée dans le système jusqu'au temps du commencement de son service.

Pour trouver le temps moyen d'attente W , on utilise la formule de Little $\bar{n} = \lambda \bar{w}$, pour avoir l'expression suivante :

$$\bar{W} = \frac{\lambda E(\tau^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}.$$

Une fois le temps d'attente \bar{W} connu, il est aisé de déduire $\bar{\eta}$, le nombre moyen de rappels par client :

$$\bar{\eta} = \mu \bar{w} = \frac{\lambda \mu E(\tau^2)}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{1-\rho}.$$

1.4. Le modèle de files d'attente avec rappels et vacances

La plupart des travaux sur les modèles classiques traitent des systèmes dans lesquels le serveur reste oisif quand la file d'attente est vide. Cependant, le temps d'oisiveté du serveur pourrait être utilisé pour un travail secondaire dans le but d'améliorer la performance du système.

Ces situations d'attente peuvent être étudiées par des modèles appelés « modèles de files d'attente avec vacances » ou « vacation queueing systems ». Dans un tel modèle, le serveur prend occasionnellement une vacance d'une durée aléatoire, qui peut être utilisée pour accomplir une ou plusieurs tâches secondaires, comme elle peut modéliser une période d'oisiveté du serveur. Ce modèle a été largement étudié et appliqué à divers problèmes dans l'analyse des systèmes informatiques, des systèmes de communication, de productionetc.

Dans les systèmes d'élection (« polling systems ») par exemple, tels les réseaux locaux à jetons, un serveur unique assure le service d'un groupe de files d'attente d'une manière cyclique et suivant un ordre spécifié. Par rapport à une file particulière, le serveur prend une vacance chaque fois qu'il cesse de servir cette file.

Pendant environ trois décennies, plusieurs chercheurs se sont penchés sur les modèles de ce type, les techniques et les résultats obtenus ont été fructueusement utilisés dans une variété d'applications. Une synthèse des systèmes d'attente avec vacances est donnée dans [39] Takagi [37] et Doshi [9, 10].

1.4.1. Classification des différents modèles d'attente avec vacances

Les files d'attente avec vacances peuvent être classifiées de différentes façons. Les disciplines de service les plus connues sont :

a) La discipline de service exhaustif (complet) :

Dans un système avec vacances et service exhaustif, chaque fois que le serveur retourne d'une vacance, il servira tous les clients en attente dans le système avant de commencer une autre vacance.

b) La discipline de service avec barrière :

Dans le cas du service avec barrière («gated service»), quand le serveur retourne d'une vacance, il sert seulement les clients qui étaient en attente dans la file à son arrivée. Autrement dit, dès l'arrivée du serveur, il met une barrière fictive derrière les clients en attente dans la file et ne prend une autre vacance qu'une fois que tous les clients qui étaient présents à son arrivée soient servis.

c) La discipline de service limité :

Dans un système avec service limité, on se fixe un nombre k . A son retour de la vacance, le serveur servira au plus k clients et commencera ensuite une autre vacance. Ainsi, le serveur sert jusqu'à ce que la file d'attente soit vide ou bien jusqu'à ce que k clients soient servis, ensuite il prend une autre vacance.

Une comparaison des différentes politiques de service est donnée dans [38]. Si le serveur retourne d'une vacance et trouve la file d'attente vide, il exécute une des deux actions suivantes:

- Sous le schéma de « vacances multiples », le serveur commencera immédiatement une autre vacance et continue à prendre des vacances successives, jusqu'à ce qu'il trouve au moins un client en attente dans la file. Dans ce cas, toute vacance est indépendante de la précédente, mais distribuée identiquement.
- Sous le schéma de « vacances uniques », le serveur attendra jusqu'à la fin de la prochaine période d'activité pendant laquelle un client au moins sera servi, avant de commencer une autre vacance. Autrement dit, il y a exactement une seule vacance à la fin de chaque période d'activité, ou bien entre deux vacances, au moins un client doit être servi.

Une autre politique de vacance non exhaustive dite : la politique de décision séquentielle de Bernoulli (Bernoulli sequential policy). Pour cette politique, à la fin de chaque période de service, le serveur va en vacance avec la probabilité P ou bien décide d'attendre le prochain client (primaire ou secondaire) avec la probabilité $1-P$. De la même manière, à la fin de chaque période de vacance, le serveur prend une

autre vacance avec la probabilité H ou bien attend l'arrivée du prochain client avec la probabilité $1 - H$.

Dans le schéma de classification considéré précédemment, les différentes disciplines de service définissent l'instant du début de la vacance. Il existe un autre schéma de classification possible, mais qui considère plutôt l'instant où le serveur retourne de la vacance. Dans ce schéma, trois politiques de vacance sont définies et dans chacune d'elles, le serveur prend une vacance seulement quand le système est vide (service exhaustif) [39, 3].

Dans les systèmes d'attente avec rappels, le serveur est supposé généralement servir sans aucune interruption. Ainsi, les périodes de panne ou de réparation sont rarement étudiées. Cependant, il est plus réaliste de modéliser un système à communication téléphonique ou un réseau de télécommunication, où une transmission de message peut ne pas se faire à cause d'une panne du serveur (ligne téléphonique), à l'aide de systèmes d'attente avec vacances, cette panne qui peut arriver d'une manière aléatoire ainsi que la tâche de réparation qui lui succède, peuvent être vues comme des périodes de vacance.

De la même manière, les processeurs dans les systèmes informatiques et les systèmes de communication exécutent en plus de leurs fonctions primaires des tâches de tests et de maintenance préventive qui permettent principalement de préserver le

système contre les pannes et de prévoir une haute fiabilité de celui-ci. Ces périodes peuvent aussi être considérées comme des vacances du serveur [10]. Ainsi, ces systèmes qui sont caractérisés par la présence simultanée des phénomènes de rappels et de vacances à la fois, sont appelés :

« Systèmes d'attente avec rappels et vacances ».

Dans ces modèles, durant la période de vacance, le serveur est occupé avec les tâches supplémentaires, ainsi il n'est pas disponible aux nouvelles arrivées de clients primaires ni aux appels répétés des clients de l'orbite. Dans ce cas, tout client qui trouve le serveur non disponible (occupé ou en vacance) est bloqué, alors il quitte la zone de service et rappelle à des intervalles de temps aléatoires, jusqu'à ce qu'il le trouve oisif pour qu'il puisse le servir.

Dans un certain sens, les files d'attente avec rappels peuvent être considérées comme un cas particulier des files avec vacances, où la vacance commence à la fin de chaque temps de service et dure jusqu'à ce que le serveur soit réactivé encore par l'arrivée d'un client primaire ou secondaire [4].

Autrement dit, la période d'oisiveté du serveur peut-être simulée par une période de vacance. Cependant, il y a une différence significative entre ces deux types de vacances :

- 1) Dans une période de vacance classique, le serveur est bloqué pour toute arrivée de client primaire ou secondaire, alors que durant la période d'oisiveté le serveur est prêt à servir tout client qui arrive.
- 2) La seconde différence est que la durée de la période d'oisiveté du serveur est déterminée par une compétition entre le flux d'arrivée des clients primaires et celui des clients secondaires, alors que la durée d'une période de vacance est déterminée par la distribution de temps de vacance.

1.5. Conclusion :

La majorité des modèles d'attente avec rappels et vacances sont étudiés sous des hypothèses très restrictives (nombre de serveurs, exponentialité de certaines lois, absence de contraintes sur la capacité de l'orbite,...etc.), ceci est dû essentiellement aux difficultés pour obtenir des résultats analytiques.

La résolution de ces modèles peut se faire alors à l'aide de méthodes approximatives. Parmi les principales approches développées dans ce sens, on trouve les méthodes de comparaison stochastiques qui conduisent à des estimations qualitatives des mesures de performances en termes de monotonie ou de comparabilité au sens d'ordres stochastiques donnés.

Ce type de méthode fait l'objet d'étude dans les chapitres suivants.

Chapitre 2 :

Eléments de la théorie des ordres partiels et de monotonie des modèles stochastiques

2.0. Introduction

a **L** complexité de l'étude de la majorité des systèmes de files d'attente a contraint les analystes à recourir à des méthodes d'approximation en termes d'inégalités stochastiques (majoration ou minoration) pour avoir des estimations qualitatives des caractéristiques du modèle étudié. Cela a motivé l'élaboration de la théorie des ordres partiels qui nous a permis l'étude du concept de monotonie des processus stochastiques.

L'objectif de ces méthodes est l'approximation du modèle étudié par un modèle plus simple ou bien par un modèle dont les distributions paramétriques plus simples que celles du modèle étudié. Cela permet d'avoir des informations, difficiles à avoir directement sans faire la comparaison, de notre modèle.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : Dans la première section on commence par donner brièvement quelques propriétés générales des ordres partiels des fonctions de répartition de variables aléatoires. Les quatre ordres partiels (stochastique, convexe, concave ainsi que l'ordre de Laplace) sont considérés. Dans la deuxième section on donne quelques propriétés de la monotonie et des modèles stochastiques. Les conditions de monotonie et de comparabilité des processus markoviens homogènes sont traitées dans la troisième section et on donne une liste de distributions d'âge dans la quatrième section.

Les résultats et les notions décrits dans ce chapitre peuvent être trouvés dans les monographies de Stoyan [36].

2.1. Propriétés générales des ordres partiels d'une fonction de distribution

On appelle un ordre partiel, noté " \prec ", une relation binaire définie sur un ensemble D d'éléments a, b, c, \dots , satisfaisant les trois axiomes :

- (i) $a \prec a$ (réflexivité)
- (ii) si $a \prec b$ et $b \prec c$ alors $a \prec c$ (transitivité)
- (iii) si $a \prec b$ et $b \prec a$ alors $a = b$ (antisymétrie)

Notons que $a \prec b$ équivaut à dire que $b \succ a$.

Cette section est consacrée à quelques propriétés de l'ordre partiel défini sur D l'ensemble de toutes les fonctions de répartition de variables aléatoires réelles (ou bien l'un de ces sous-ensembles).

Pour les deux variables aléatoires X et Y de fonctions de répartition F et G (respectivement) on a par convention :

$$F \prec G \Leftrightarrow X \prec Y$$

On suppose que deux variables aléatoires X et Y sont définies sur le même espace de probabilité, alors leurs fonctions de répartition respectives F et G peuvent satisfaire la propriété d'antisymétrie (iii) sans pour autant avoir $X = Y$.

Lorsque les variables aléatoires sont dégénérées, certaines propriétés des ordres partiels définies sur D découlent directement des propriétés de l'ordre des nombres réels. Pour cela on utilisera la distribution de Dirac, notée par $\theta_c(\cdot)$, définie pour tout les nombres réels comme suit :

$$\theta_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c \\ 1 & \text{si } x \geq c \end{cases}$$

Définitions 2.1.1. :

Soit un ordre partiel donné " \prec " défini sur (un sous ensemble de) l'espace D des fonctions de répartition.

On dit que cet ordre possède la propriété :

- (R) : si $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, alors $\theta_a < \theta_b$.

- (E) : si $F < G$, alors $m_F \leq m_G$ lorsque les moyennes existent.
- (M) : si $F < G$, alors $F^c < G^c$; $\forall c > 0$ où $F^c(x) = F(x/c)$, $\forall x$.
- (C) : si $F_1 < F_2$ alors $F_1 * G < F_2 * G$
 où $(F_i * G)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(x-y) dG(y) \quad i = 1, 2.$
- (W) : si F_n et G_n convergent faiblement vers F et G (respectivement)
 alors : $\forall n, F_n < G_n \Rightarrow F < G.$

Remarque 2.1.1. :

Pour les deux variables aléatoires X et Y ;

La propriété (M) assure que :

$$X \prec Y \Leftrightarrow cX \prec cY \quad \text{pour tout } c \in]0, +\infty[.$$

La propriété (C) assure que :

$$X_1 \prec X_2 \Rightarrow X_1 + Y \prec X_2 + Y$$

où Y est une variable aléatoire indépendante de X_1 et X_2 .

La propriété (E) assure que :

$$X \prec Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y).$$

Remarquons que la propriété (E) découle des autres propriétés.

Proposition 2.1.1. :

Un ordre partiel \prec sur un ensemble (ou bien un sous-ensemble) de D qui vérifie les propriétés (R), (M), (C) et (W), vérifie aussi la propriété (E).

Définition 2.1.2. :

Pour une classe de fonctions réelles $\mathfrak{F}_<$, l'ordre partiel $<$ défini sur l'ensemble (ou sous-ensemble) D est dit généré par $\mathfrak{F}_<$ si :

$$F < G \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dG(x)$$

pour toute fonction f dans $\mathfrak{F}_<$, telles que les intégrales existent.

Définition 2.1.3. :

La classe \mathcal{Y} de fonctions réelles définies sur la droite réelle \mathbb{R} (respectivement la demi-droite \mathbb{R}_+) est dite invariante par translation, si pour tout $a \in \mathbb{R}$ (respectivement $a \in \mathbb{R}_+$), lorsque $f \in \mathcal{Y}$, $f_a \in \mathcal{Y}$ aussi. Où f_a est la fonction définie par :

$$f_a(x) = f(x + a), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{respectivement } \forall x \in \mathbb{R}_+).$$

Proposition 2.1.2. :

Soit un ordre partiel $<$ défini sur D qui est généré par la classe $\mathfrak{F}_<$. Si cette classe est invariante par translation, alors $<$ vérifie la propriété (C).

La classe $\mathfrak{R}_<$ de fonctions vérifiant l'inégalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dG(x),$$

avec $F, G \in D$ et $F < G$, est appelée classe des fonctions $<$ -monotones.

Remarquons que cette classe est plus large que la classe $\mathfrak{F}_<$ générée par l'ordre $<$ dans le sens de la définition 2.1.2.

2.1.1. Ordre stochastique

Définition 2.1.4. :

On dit que la variable aléatoire X de fonction de répartition F , est stochastiquement inférieure (ou bien inférieure en distribution) à la variable aléatoire Y de fonction de répartition G , et on note $F \leq_{st} G$, lorsque :

$$F(x) \geq G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On écrit aussi : $X \leq_{st} Y$ (st est aussi noté par d)

Dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires discrètes prenant des valeurs sur Z (l'ensemble des entiers relatifs), et en notant par $P_i^{(1)} = \{X = i\}$ et $P_i^{(2)} = \{Y = i\}$ pour $i \in Z$, alors :

$$X \leq_{st} Y \quad \text{ssi} \quad \sum_{j=-\infty}^i P_j^{(1)} \geq \sum_{j=-\infty}^i P_j^{(2)}, \quad i \in Z,$$

ce qui est équivalent à :

$$\sum_{j=i}^{+\infty} P_j^{(1)} \leq \sum_{j=i}^{+\infty} P_j^{(2)}, \quad i \in Z.$$

Remarquons que l'ordre stochastique \leq_{st} satisfait les axiomes de l'ordre partiel \prec .

Proposition 2.1.4. :

Si $F_1 \leq_{st} F_2$ alors il existe deux variables aléatoires X_1 et X_2 définies sur le même espace de probabilités (Ω, \mathcal{A}, P) pour lesquelles

$$X_1(\omega) \leq X_2(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega,$$

et

$$P(\omega : X_k(\omega) \leq x) = F_k(x) \quad \text{pour } k = 1, 2.$$

Notons par : $\mathcal{F}_{st} = \{\theta_x : x \in \mathbb{R}\}$, et par : $\mathcal{R}_{st}(\mathbb{R})$ la classe des fonctions réelles non décroissantes, alors la classe $\mathbb{R}_{\leq_{st}}$ des fonctions \leq - monotones est confondue avec la classe $\mathcal{R}_{st}(\mathbb{R})$

i.e. $\mathbb{R}_{\leq_{st}} = \mathcal{R}_{st}(\mathbb{R})$.

Théorème 2.1.1: [36]

L'inégalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF_2(t) \tag{2.1}$$

est vérifiée pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{R}_{st}(\mathbb{R})$ pour laquelle l'intégrale existe, ssi $F_1 \leq_{st} F_2$.

Pour une fonction f donnée, l'inégalité (2.1) est vérifiée pour tout F_1 et F_2 telle que $F_1 \leq_{st} F_2$ seulement si f est non décroissante.

Corollaire 2.1.1. :

Pour deux variables aléatoires X et Y non négatives, avec $X \leq_{st} Y$, on a :

$$\begin{aligned} E(X^r) &\leq E(Y^r) && (r \geq 0) \\ E(X^r) &\geq E(Y^r) && (r < 0) \end{aligned}$$

lorsque les espérances existent. et si celles ci sont bien définies ;

$$E(X^r) \leq E(Y^r) \quad (r = 1, 3, 5...)$$

pour des variables quelconques (pas forcément non négatives).

2.1.2. Ordre Convexe

On note par : $x_+ = \max(0, x)$.

Définition 2.1.5. :

On dit que la variable aléatoire X , de fonction de répartition F , est inférieure en moyenne de vie résiduelle à la variable aléatoire Y , de fonction de répartition G , et on écrit $X \leq_v Y$, ou bien $F \leq_v G$ ssi :

$$\begin{aligned} E(X - x)_+ &= \int_x^{+\infty} (t - x) dF(t) = \int_x^{+\infty} (1 - F(t)) dt \\ &\leq \int_x^{+\infty} (1 - G(t)) dt = E(Y - x)_+ \end{aligned} \tag{2.2}$$

lorsque les espérances (ou bien les intégrales) sont bien définies

Dans le cas discret, on a :

$$X \leq_v Y \quad \text{ssi} \quad \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} p_j^{(1)} \leq \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} p_j^{(2)}$$

Une conséquence immédiate de cette définition :

$$\text{si } F \leq_{st} G \text{ et } E(Y_+) < \infty \quad \text{alors} \quad F \leq_v G$$

En notant par $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$, l'inégalité (2.2) peut s'écrire comme suit :

$$\int_x^\infty \bar{F}(t) dt \leq \int_x^\infty \bar{G}(t) dt,$$

ou bien :

$$\begin{aligned} E(\max(x, X)) &= x + E(X-x)_+ \\ &\leq x + E(Y-x)_+ \\ &= E(\max(x, Y)), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Lorsque $E(x-X)_+$ et $E(x-Y)_+$ existent ,

$$X \leq_v Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y).$$

En effet :

$$\begin{aligned} E(Y) - E(X) &= E(Y-x)_+ - E(X-x)_+ - E(x-Y)_+ + E(x-X)_+ \\ &\geq E(x-X)_+ - E(x-Y)_+ \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

De l'inégalité (2.2) découle la transitivité et l'antisymétrie de l'ordre convexe " \leq_v ", alors c'est un ordre partiel sur le sous ensemble

(de fonctions) de D pour lesquelles $\int_0^\infty t dF(t) < \infty$. Sans cette condition la

propriété de l'antisymétrie peut ne pas avoir lieu.

Pour une variable aléatoire X de moyenne finie m , il est clair que :

$$\begin{aligned} E(\max(x, X)) &\geq \max(x, E(X)) \\ &= \max(x, m). \end{aligned}$$

En vertu de l'inégalité (2.3), on a :

$$m \leq_v X$$

Il s'ensuit, d'après l'inégalité (2.3) que l'ordre convexe " \leq_v " possède la propriété (R) et (M).

D'après l'inégalité (2.2), on déduit que " \leq_v " est généré par la famille :

$$\mathcal{F}_v = \{ e_x; -\infty < x < +\infty \}$$

des fonctions " e_x " définies comme suit :

$$e_x(t) = (t-x)_+ = \int_{-\infty}^t \theta_x(u) du$$

Puisque la classe \mathfrak{F}_v est invariante par translation, alors " \leq_v " possède la propriété (C).

Théorème 2.1.2 : [36]

1) *L'inégalité :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF_2(t) \tag{2.4}$$

est vérifiée pour toute fonction f appartenant à $\mathfrak{R}_v(\mathbb{R})$ pour laquelle les intégrales sont bien définies, si et seulement si $F_1 \leq_v F_2$.

2) *Pour une fonction donnée f , l'inégalité (2.4) a lieu pour toutes les fonctions F_1 et F_2 telles que $F_1 \leq_v F_2$ seulement si f est une fonction convexe et non décroissante.*

3) *Si $F_1 \leq_v F_2$ et leurs moyennes existent et sont égales, alors l'inégalité (2.4) est vérifiée pour toute fonction convexe f donné.*

Corollaire 2.1.2. :

Pour deux variables aléatoires X et Y non-négatives telles que $X \leq_v Y$

on a :

$$E(X^r) \leq E(Y^r) \quad (r \geq 1)$$

lorsque les espérances existent.

En général, pour des variables aléatoires X et Y telles que

$$E(X) = E(Y) \quad \text{et} \quad X \leq_v Y$$

alors,

$$E(X^r) \leq E(Y^r) \quad (r = 2, 4, 6, \dots).$$

Il est intéressant de remarquer que pour deux variables aléatoires X et Y non-négatives telles que $X \leq_v Y$, l'égalité $E(X^r) = E(Y^r)$ pour tout $r > 1$ implique l'égalité $X =_{st} Y$.

En effet :

$$E (X^r) = \int_0^{+\infty} r x^{r-1} (1-F(x)) dx = \int_0^{+\infty} r (r-1) x^{r-2} dx \int_x^{+\infty} (1-F(y)) dy$$

Cette propriété est l’analogue de la propriété suivante pour l’ordre stochastique :

$$X \leq_{st} Y \text{ et } E(X) = E(Y) \Rightarrow X =_{st} Y$$

Proposition 2.1.5. :

Supposons que les suites de variables aléatoires (X_n) et (Y_n) convergent faiblement vers X et Y (respectivement).

Si

$$E (X_+) \text{ et } E (Y_+) \text{ sont finies,}$$

$$E (X_n)_+ \rightarrow E (X_+) \text{ quand } n \rightarrow +\infty,$$

$$E (Y_n)_+ \rightarrow E (Y_+) \text{ quand } n \rightarrow +\infty,$$

$$\text{et si } X_n \leq_v Y_n, \text{ alors } X \leq_v Y$$

2.1.3. Ordre concave

Définition 2.1.6. :

On dit que la variable aléatoire X de fonction de répartition F est inférieure en moyenne de vie écoulée à la variable aléatoire Y de fonction de répartition G , i.e $X \leq_{cv} Y$ (ce qui est équivalent à $F \leq_{cv} G$), lorsque :

$$\begin{aligned} E (x-X)_+ &= \int_{-\infty}^x (x-t) dF(t) = \int_{-\infty}^x F(t) dt \\ &\geq \int_{-\infty}^x G(t) dt = E(x-Y)_+ ; \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.5}$$

où les espérances mathématiques (les intégrales) sont bien définies. Par conséquent , si :

$$F \leq_{st} G \text{ et } E(X) = E(\max (0, -X)) < \infty, \text{ alors } X \leq_{cv} Y$$

Remarquons que l’ordre concave “ \leq_{cv} ” est un ordre partiel sur le

sous-ensemble de D des fonctions vérifiant $\int_{-\infty}^0 |t| dF(t) < \infty$ comme dans le cas de l'ordre convexe " \leq_v ".

On observe d'après (2.5) que l'inégalité $X \leq_{cv} Y$ est équivalente à l'inégalité $-Y \leq_v -X$.

Si on a l'égalité $E(X) = E(Y)$, alors l'inégalité $X \leq_{cv} Y$ est équivalente à $Y \leq_v X$

Notons par $\mathcal{R}_{cv}(\mathbb{R})$, la classe des fonctions concaves et non-décroissantes

Théorème 2.1.5 : [36]

1) *L'inégalité :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dG(t) \tag{2.6}$$

est vérifiée pour toute fonction $f \in \mathcal{R}_{cv}(\mathbb{R})$ pour laquelle les intégrales sont bien définies si et seulement si :

$$F \leq_{cv} G$$

2) *Pour une fonction f donnée, l'inégalité (2.6) a lieu pour toutes les fonctions F et G telles que $F \leq_{cv} G$ seulement si f est concave et non décroissante.*

3) *Si $F \leq_{cv} G$ et leurs moyennes existent et sont égales alors, l'inégalité (2.6) est vérifiée pour toute fonction concave f donné.*

2.1.4 Ordre en transformée de Laplace

Définition 2.1.7. :

Pour deux variables aléatoires non négatives X et Y de fonctions de répartition F et G (respectivement), F est dite inférieure par rapport à l'ordre laplacien à G , et on note $F \leq_L G$, si pour tout s positif on a l'inégalité suivante :

$$E[\exp\{-sX\}] = \int_0^{+\infty} \exp(-sx) dF(x) \geq \int_0^{+\infty} \exp(-sx) dG(x) = E[\exp\{-sY\}]$$

Il est clair que l'ordre en transformée de Laplace est réflexif, transitif et antisymétrique. L'ordre en transformée de Laplace correspond à une classe de fonctions f de la forme :

$$f(x) = -e^{-sx} \quad \text{où } s \leq 0$$

Définition 2.1.8. :

Une fonction $f : IR_+ \rightarrow IR$ est dite strictement monotone si toutes ses dérivées $n^{i\grave{e}me}, f^{(n)}$ existent et vérifient :

$$f^{(0)} \equiv f(x) \geq 0$$

$$f^{(1)} \leq 0$$

$$f^{(2)} \geq 0$$

⋮

En d'autres termes : $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0 \quad \forall x > 0$

La fonction f définie par : $f(x) = \exp\{-sx\}$ est strictement monotone pour tout $s > 0$

Théorème 2.1.3 : [36].

Soit la fonction f strictement monotone, alors $F \leq_L G$ implique

$$\int_0^{+\infty} f(t) dF(t) \leq \int_0^{+\infty} f(t) dG(t). \tag{2.7}$$

Inversement toute fonction réelle f , pour laquelle l'inégalité (2.7) a lieu, pour toutes les fonctions F et G telles que $F \leq_L G$, a la propriété de la monotonie stricte.

Corollaire 2.1.3. :

1) *Pour deux variables aléatoires X et Y non négatives, de fonctions de répartition F et G (respectivement) telles que $F \leq_L G$ alors , on a l'inégalité suivante :*

$$(1 - E(\exp\{-sX\})) / s \leq (1 - E(\exp\{-sY\})) / s ; \forall s > 0$$

2) *Lorsqu'on fait tendre s vers zéro " $s \rightarrow 0$ ", on obtient le résultat suivant :*

$$F \leq_L G \Rightarrow E(X) \leq E(Y) \tag{2.8}$$

lorsque les espérances existent .

Le résultat qui suit donne une caractérisation de l'ordre en transformées de Laplace.

Théorème 2.1.4. [36] :

Soient X et Y deux variables aléatoires quelconques de fonctions de répartition F et G (respectivement), alors :

$$F \leq_L G \Leftrightarrow E[f(X)] \geq E[f(Y)] \tag{2.9}$$

pour toute fonction f strictement monotone , telles que les espérances existent.

Ordre en fonctions génératrices

Soient X et Y deux variables aléatoires non-négatives discrètes de fonctions de répartition F et G (respectivement), on dit que X est inférieur à Y par rapport à l'ordre en fonctions génératrices, et on note $F \leq_g G$, si et seulement si :

$$E(z^X) \geq E(z^Y),$$

où ;

$$E(z^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) z^n \quad \text{et} \quad E(z^Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n) z^n \quad ; \quad |z| < 1$$

Cet ordre peut être déduit de l'ordre laplacien " \leq_L " en posant $s = -\log z$.

2.1.5. Relations entre les ordres partiels

Soient X et Y deux variables aléatoires de fonctions de répartition F et G (respectivement) , alors on a les relations suivantes :

- Si $F \leq_{st} G$ et $E(Y_+) < \infty \Rightarrow F \leq_v G$
- Si $F \leq_{st} G$ et $E(X) = E[\max(0, -x)] < \infty \Rightarrow F \leq_{cv} G$

- Si $E(X) = E(Y)$, alors $F \leq_{cv} G \Leftrightarrow G \leq_v F$
- $F \leq_{st} G \Rightarrow F \leq_L G \Rightarrow F \leq_g G$
- $F \leq_{cv} G \Rightarrow F \leq_L G \Rightarrow F \leq_g G$
- Si $E(X) = E(Y)$ et $F \leq_v G \Rightarrow G \leq_L F \Rightarrow G \leq_g F$
- $F \leq_L G \Rightarrow F \leq_g G$.

2.2. Modèles stochastiques et monotonies

2.2.1. Modèles stochastiques

Les domaines de la théorie des probabilités appliquées, files d'attente, fiabilité, ordonnancement, où interviennent les influences aléatoires peuvent être décrits par deux types de modèles stochastiques :

a. Modèles finis

Etant données N variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_N qui sont suffisantes pour décrire le comportement d'un certain système. Le problème général est de considérer les propriétés de la variable aléatoire Z qui représente une mesure de performance du modèle et qui est de la forme suivante :

$$Z = f(X_1, \dots, X_N)$$

où f est une application.

Exemple :

- En fiabilité
 X_i : durée de vie du $i^{\text{ème}}$ élément.
 Z : durée de vie du système.
 On prend par exemple :

$$Z = \min(X_1, \dots, X_n) \quad \text{pour la durée de vie d'un système en série}$$

et $Z = \max(X_1, \dots, X_n)$ pour la durée de vie d'un système en parallèle.

b. Modèles récurrents

Etant donné une suite infinie $\{X_n\}_{n \geq 1}$ de variables aléatoires décrivant les influences aléatoires sur l'état d'un système donné aux instants t_n (déterministes ou aléatoires), avec $t_n < t_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. L'état du système à l'instant t_{n+1} est décrit par la variable aléatoire Z_{n+1} donnée par la formule de récurrence suivante :

$$Z_{n+1} = f_n(Z_n, X_n)$$

où Z_n représente l'état du système à l'instant t_n

Exemples :

1- En file d'attente :

$$X_n = \{n^{\text{ième}} \text{ inter-arrivées , } n^{\text{ième}} \text{ durée de service } \}$$

$$Z_n = \text{ temps d'attentes du } n^{\text{ième}} \text{ client}$$

2- En gestion de stock :

$$X_n = \text{ demande(s) durant la } n^{\text{ième}} \text{ période}$$

$$Z_n = \text{ le volume du stock de stock au début de la } n^{\text{ième}} \text{ période}$$

Dans les deux cas, la quantité aléatoire Z_n peut être exprimée, à l'aide d'une formule de récurrence, en fonction des variables aléatoires X_n .

Remarque 2.2.1. :

Les fonctions f et f_n sont déterminées par la dynamique des états du système.

2.2.2. Propriétés de monotonies

a. Monotonie interne

Soit Σ un modèle stochastique constituée des distributions paramétriques $(U, F_1, F_2 \dots) \equiv (U, F)$, où U est la distribution initiale.

On note par c_Σ les indices de performances du système Σ .

Par exemple, pour un système de files d'attente Σ , c_Σ peut être le temps moyen d'attente virtuel à l'instant t , ou la distribution de probabilité du nombre de clients dans le système à l'instant t , ou bien ses mesures de performance seront calculées à une suite d'instant (déterministe ou aléatoire) t_n ($n = 1, 2, \dots$). D'une manière plus précise on peut exprimer c_Σ comme suit :

$$c_\Sigma(t) = c_\Sigma(t, U, \{F_i\})$$

ou bien

$$c_\Sigma(n) = c_\Sigma(n, U, \{F_i\})$$

On note par " \prec " l'ordre partiel défini sur C_Σ l'ensemble des valeurs possibles de c_Σ

Définition 2.2.1. :

L'indice de performance $c_{\Sigma}(\cdot)$ est non décroissant (resp. non croissant) par rapport à la distribution initiale U si pour tout $t < u$, on a :

$$\begin{aligned} t \leq u &\Rightarrow c_{\Sigma}(t) \prec c_{\Sigma}(u) \\ &\text{(resp. } c_{\Sigma}(t) \succ c_{\Sigma}(u) \text{)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

ou bien pour les entiers $m < n$:

$$\begin{aligned} m < n &\Rightarrow c_{\Sigma}(m) \prec c_{\Sigma}(n) \\ &\text{(resp. } c_{\Sigma}(m) \succ c_{\Sigma}(n) \text{)} \end{aligned}$$

Cette propriété est appelée monotonie interne. D'autres appellations sont utilisées telles que, monotonie temporelle ou intrinsèque. Celles-ci découlent du fait que cette monotonie ne dépend en aucun cas des distributions paramétriques $\{F_i\}$, mais seulement peut être de la distribution initiale.

Si $c_{\Sigma}(t)$ ou bien $c_{\Sigma}(n)$ converge, quand t (ou bien n) $\rightarrow \infty$, à une certaine limite $c_{\Sigma} \equiv c_{\Sigma}(\{F_i\})$ indépendante de la distribution initiale U , alors il suit, dans le cas (2.10), que pour tout t , on a le résultat suivant :

$$c_{\Sigma}(t, U, \{F_i\}) \prec (\succ) c_{\Sigma}(\{F_i\})$$

b. Monotonie externe

On note par D_k l'ensemble des distributions F_k partiellement ordonnées par l'ordre " $<_k$ " (qui est l'ordre de la $k^{\text{ième}}$ distribution paramétrique), et soit " $<_c$ " l'ordre partiel défini sur C_{Σ} l'ensemble des mesures de performances.

Définition 2.2.2 :

L'indice de performance c_{Σ} est non décroissant sur D_k par rapport à l'ordre $<_k$ si pour tout F, G dans D_k et tout autre distribution paramétrique constante, on a :

$$F <_k G \Rightarrow c_{\Sigma}(F_1, \dots, F_{k-1}, F, F_{k+1}, \dots) <_c c_{\Sigma}(F_1, \dots, F_{k-1}, G, F_{k+1}, \dots),$$

Laquelle propriété est appelée monotonie externe.

Lorsque un système possède la propriété de monotonie externe, les indices de performances des modèles stochastiques possédant, la même structure avec des distributions paramétriques comparables mais différentes, sont comparables.

On peut interpréter la monotonie externe comme suit :

Soient Σ_1 et Σ_2 deux modèles stochastiques ayant la même structure et la même distribution initiale, on dira que les modèles possèdent la propriété de monotonie externe lorsque pour deux distributions paramétriques F et G dans Σ_1 et Σ_2 (resp.) on a :

$$F \prec G \Rightarrow c_{\Sigma}(F) <_c c_{\Sigma}(G)$$

pour l'indice de performance c_{Σ} .

La monotonie externe est un outils de grande valeur dans la construction des bornes pour les mesures de performances d'un système donné .Soit par exemple la distribution paramétrique F_k peut être bornée par les distributions G_1 et G_2 appartenant à l'ensemble D_k pour lesquelles :

$$G_1 <_k F_k <_k G_2,$$

alors pour les mesures de performances correspondantes , on obtient :

$$c_{\Sigma}(G_1) <_k c_{\Sigma}(F) <_k c_{\Sigma}(G_2),$$

lorsque les systèmes ont la propriété de la monotonie externe.

2.3. Comparabilité et monotonie des processus markoviens homogènes

Les propriétés de comparabilité et de monotonie d'un processus markovien homogène ont été étudiées en premier lieu par Kalmykov (1962) pour l'ordre stochastique " \leq_{st} " où $E = IR$, par la suite Daley (1968) a considéré des processus à valeurs réelles sous un ordre stochastique, et a élaboré des conditions de comparabilité et de monotonie sur les opérateurs de transitions.

2.3.1. Opérateurs monotones et comparables

Soient, (E, M) un espace probabilisé , P_M l'ensemble de toutes les mesures de probabilités définies sur M , les opérateurs $T, T^{(1)}, T^{(2)}$ définis de P_M dans lui même et l'ordre partiel " \prec " défini sur P_M

Définition 2.3.1. :

Un opérateur T est dit \prec -monotone si pour toutes mesures de probabilités $P^{(1)}, P^{(2)}$ appartenant à P_M telles que $P^{(1)} \prec P^{(2)}$, on a :

$$T P^{(1)} \prec T P^{(2)}.$$

L'opérateur $T^{(1)}$ est inférieur à $T^{(2)}$ si $T^{(1)} P \prec T^{(2)} P$ pour tout $P \in P_M$ et on écrit :

$$T^{(1)} \prec T^{(2)}.$$

Pour des applications aux processus de Markov homogènes, on s'intéresse à la comparabilité des distributions $P_1^{(n)}$ et $P_2^{(n)}$ définies par :

$$P_n^{(k)} = T_n^{(k)} P^{(k)} \quad k = 1, 2 ; n \in \mathbb{N}^*$$

pour deux distributions initiales $P^{(k)}$ et les opérateurs $T^{(k)}$ ($k = 1, 2$).

Théorème 2.3.1 : [36].

Soient, $T^{(1)}$ et $T^{(2)}$ deux opérateurs définis sur P_M et $P^{(1)}, P^{(2)}$ deux mesures de probabilités définies sur M ,
alors :

$$P^{(1)} \prec P^{(2)} \quad \text{implique} \quad P_n^{(1)} \prec P_n^{(2)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

s'il existe un opérateur T \prec -monotone défini sur P_M tel que :

$$T^{(1)} \prec T \prec T^{(2)}.$$

Remarquons que ce théorème reste vrai, en général, pour les opérateurs définis dans un espace partiellement ordonné.

A présent, on considère les opérateurs de transitions d'une chaîne de Markov homogène $\{X_n\}$ d'espace d'état (E, M) . Les opérateurs de transition sont décrits par leurs fonctions de transition $p(x, B)$,

$$p(x, B) = P(X_{n+1} \in B / X_n = x) \quad x \in E, B \in M$$

ou bien, dans le cas où les processus sont à valeurs réelles, par leurs distributions de transition :

$$p(x, y) = P(X_{n+1} < y / X_n = x), \quad x, y \in E \subseteq \mathbb{R}.$$

Maintenant on donne des conditions, sur les fonctions de transitions, qui assurent la monotonie ou la comparabilité des opérateurs de transitions.

Théorème 2.3.2 : [36].

Les opérateurs de transitions $T^{(1)}$ et $T^{(2)}$ satisfont l'inégalité $T^{(1)} \prec T^{(2)}$ si et seulement si, leurs fonctions de transition $P^{(1)}$ et $P^{(2)}$ satisfont :

$$P^{(1)}(x, \cdot) \prec P^{(2)}(x, \cdot) ; \quad \forall x \in E.$$

2.3.2. Conditions de monotonie et de comparabilité [36]

Pour l'étude de la monotonie et la comparabilité des chaînes de Markov homogènes, on peut énoncer les deux théorèmes suivants qui constituent un outil important pour prouver la monotonie interne et/ou externe de ces modèles stochastiques.

Théorème 2.3.3. :

Une chaîne de Markov homogène $\{X_n\}$, de fonction de transition P , est non décroissante (resp. non croissante) par rapport à l'ordre partiel " \prec " si :

$$X_1 \prec X_2 \quad (\text{resp. } X_2 \prec X_1)$$

et si P est \prec -monotone

Théorème 2.3.4. :

Deux chaînes de Markov homogènes $\{X_n\}$ et $\{Y_n\}$, de fonctions de transitions p_1 et p_2 (resp.) satisfont l'inégalité :

$$\{X_n\} \prec \{Y_n\}$$

si $X_1 \prec Y_1$ et s'il existe une fonction de transition p \prec -monotone telle que :

$$P^{(1)}(x, \cdot) \prec P(x, \cdot) \prec P^{(2)}(x, \cdot) ; \quad \forall x \in E$$

2.4. Distribution d'âge

Les distributions non paramétriques ont été introduites pour l'étude de certains problèmes en relation avec la théorie de fiabilité. Elles permettent ainsi de modéliser et caractériser des propriétés qualitatives telles que le « vieillissement » et le « rajeunissement » du système.

Ces distributions sont utilisés actuellement dans divers domaines de la modélisation stochastique : analyse de survie (médecine), files d'attente, ordonnancement, théorie de la décision, économie, gestion de stock.

Définition 2.4.1. :

Soient X et X_τ des variables aléatoires représentant respectivement la durée de vie d'un élément et la durée de vie résiduelle et soient F et F_τ leurs distributions respectives

On dit que F est :

a) NBU (New Better than Used), si $F_\tau \leq_{st} F$ ($0 < \tau < \infty$)

b) NWU (New Worse than Used), si $F \leq_{st} F_\tau$ ($0 < \tau < \infty$)

c) NBUE (New Better than Used in Expectation),

$$\text{si } E(X_\tau) \leq E(X), \quad (0 < \tau < \infty)$$

d) NWUE (New Worse than Used in Expectation),

$$\text{si } E(X) \leq E(X_\tau), \quad (0 < \tau < \infty)$$

e) IFR (Increasing Failure Rate),

$$\text{si } F_y \leq_{st} F_x \quad \text{pour } 0 \leq x < y < \infty$$

f) IFRA (Increasing Failure Rate in Average),

$$\text{si } -(1/t) \log [1-F(t)] \text{ croissante, } t \geq 0$$

g) DFR (Decreasing Failure Rate),

$$\text{si } F_x \leq_{st} F_y \quad \text{pour } 0 \leq x < y < \infty$$

h) DFRA (Decreasing Failure Rate in Average),

$$\text{si } -(1/t) \log [1-F(t)] \text{ décroissante, } t \geq 0$$

i) IMRL (Increasing Mean Residual Life), si

$$E(X_\tau) = (1/(1-F(x))) \int_\tau^{+\infty} (1-F(u))du \quad \text{croissante} \quad (0 < \tau \uparrow < \infty)$$

j) DMRL (Decreasing Mean Residual Life), si

$$E(X_\tau) = (1/(1-F(x))) \int_\tau^{+\infty} (1-F(u))du \quad \text{décroissante} \quad (0 < \tau \uparrow < \infty)$$

Remarque 2.4.1. :

La figure 2.1 illustre les relations d'implications existantes entre des classes d'âges.

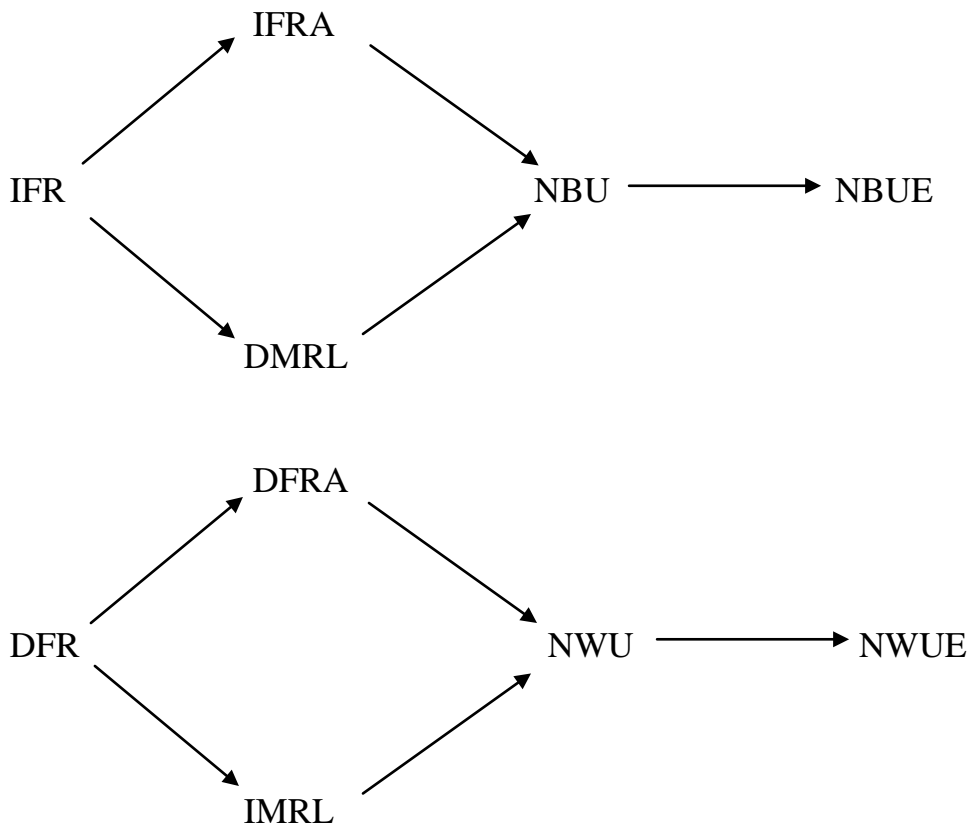


Fig.1.2 : Relations entre les classes des distributions d'âges

Proposition 2.4.1. :

Soit la variable aléatoire X de fonction de répartition F ayant une moyenne finie m .

1) Si F est NBU (resp. NWU), alors :

$$F \leq_{st} \text{Exp}(\lambda) \quad (\text{resp. } F \geq_{st} \text{Exp}(\lambda))$$

pour un certain $\lambda \leq m^{-1}$ (resp. $\lambda \geq m^{-1}$), avec la possibilité d'avoir une égalité seulement si $F = \text{Exp}(m^{-1})$

.2) Si F est NBUE (resp. NWUE), alors :

$$F \leq_v \text{Exp}(m^{-1}) \quad (\text{resp. } F \geq_v \text{Exp}(m^{-1})).$$

Chapitre 3

Inégalités pour les systèmes de files d'attente avec rappels et vacances

3.0 Introduction :

Les mesures de performances du systèmes de files d'attente $M/G/1$ avec rappels et vacances du serveur sont disponibles sous des formes explicites mais complexe (elles contiennent des transformées de Laplace , des expressions intégrales) du point de vue pratique , c'est-à-dire qu'elles ne sont pas faciles à interpréter . Pour pallier à ces difficultés, les méthodes de comparaison stochastiques ont été introduites pour qu'on puisse avoir des estimations qualitatives de ces mesures en les bornant (en les majorant ou en les minorant) par des mesures de performance d'autres modèles plus simples.

L'objectif de ce chapitre, est l'étude des conditions de comparabilité pour certaines mesures de performance d'un tel système, en utilisant la théorie générale des ordres stochastiques.

Ce travail constitue une généralisation des travaux effectués par Khalil et Falin , pour le système d'attente $M/G/1$ avec rappels classique .

Les résultats obtenus sont passés en revue dans la première partie du présent chapitre.

La première section de cette partie est consacrée à l'étude de la monotonie de la chaîne de Markov incluse. Dans la deuxième section, On donne des conditions, sous lesquelles les distributions stationnaires du nombre de clients de deux systèmes sont comparables et dans la troisième section on donne des estimations qualitatives en terme de majoration du nombre moyen de clients servis durant la période d'activité.

Dans la deuxième partie, on donne quelques résultats concernant l'analyse d'un système d'attente $M/G/1$ avec rappels et vacances. Le modèle mathématique est décrit dans la première section. On définit, dans la deuxième section, la chaîne de Markov incluse de notre système et on donne la condition de son ergodicité. Les fonctions génératrices partielles des probabilités limites, d'un système d'attente $M/G/1$ avec rappels constants et sans vacances propres, sont données dans la troisième section.

Dans la troisième partie de ce chapitre, on obtient des conditions de comparabilité pour les caractéristiques d'un modèle de files d'attentes $M/G/1$ avec rappels et vacances en s'inspirant des résultats établis par Khalil et Falin. [27] pour un système $M/G/1$ avec rappels. Dans la première section, on énonce trois lemmes qui vont permettre la comparaison des probabilités du nombre de clients arrivant durant une période de vacance de deux systèmes, suivant les ordres partiels ; stochastique, convexe et en transformée de Laplace. La condition de la monotonie de l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov incluse, par rapport aux ordres stochastique et convexe, est donnée dans la deuxième section. Dans la troisième section, on donne les conditions de comparabilité des distributions stationnaires, du nombre de clients dans le système, pour deux systèmes par rapport aux ordres stochastique et convexe.

Des graphes sont établis pour illustrer les résultats trouvés.

3.1. Inégalités stochastiques pour le système $M/G/1$ avec rappels.

On considère un système de files d'attente $M/G/1$ avec rappels. On énonce les résultats établis par Khalil et Falin [27] qui ont utilisé la théorie générale des ordres stochastiques pour l'étude des propriétés de monotonies du système relativement aux ordres ; stochastique, laplacien et convexe.

On introduit les notations suivantes :

Soient Σ_1 et Σ_2 deux modèles $M/G/1$ avec rappels de paramètres ($i=1,2$)

- $\lambda^{(i)}$: taux d'arrivées dans Σ_i .
- $\mu^{(i)}$: taux de rappels dans Σ_i .
- $B^{(i)}(x)$: distribution du temps de service dans Σ_i .
- $K_n^{(i)}$: le nombre de nouvelles arrivées durant le service du $n^{\text{ième}}$ client dans Σ_i .
- $\pi_n^{(i)}$: la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système Σ_i .

Le lemme suivant permet la comparaison des distributions de probabilités du nombre de nouvelles arrivées pendant une période de service deux modèles $M/G/1$ avec rappels.

Lemme.3.1.1. :

Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente $M/G/1$ avec rappels,
si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $B^{(1)} \leq_s B^{(2)}$ alors

$$\{k_n^{(1)}\} \leq_s \{k_n^{(2)}\} \quad \text{où } s = (st, v \text{ ou } l)$$

où

$$K_n^{(i)} = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)} x)^n}{n!} \exp\{-\lambda^{(i)} x\} dB^{(i)}(x).$$

3.1.1. Monotonie de la chaîne de Markov incluse :

Les probabilités de transition en une seule étape de la chaîne de Markov incluse d'un modèle $M/G/1$ avec rappels sont données par la formule suivante :

$$P_{nm} = \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} K_{m-n} + \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} K_{m-n+1} .$$

Soit T l'opérateur de transition de la chaîne de Markov incluse, tel que pour toute distribution de probabilité $P = (P_n)$, il associe la distribution de probabilité $T_P = q = (q_m)$ telle que,

$$q_m = \sum_n P_n P_{nm} .$$

Théorème.3.1.1. :

L'opérateur T (défini ci dessus) est monotone par rapport aux ordres stochastique et convexe. C'est-à-dire ;

Pour deux distributions $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ quelconques, l'inégalité $p^{(1)} \leq_{st} p^{(2)}$ (respectivement $p^{(1)} \leq_v p^{(2)}$) implique la suivante :

$$Tp^{(1)} \leq_{st} Tp^{(2)} \text{ (resp. } Tp^{(1)} \leq_v Tp^{(2)}).$$

En particulier, ce théorème implique que si à l'instant $t = 0$, le système est vide alors le nombre de clients dans le système aux instants des départs forme une suite croissante par rapport aux ordres partiels cités dans le théorème.

Maintenant on suppose qu'on a deux systèmes $M/G/1$ avec rappels de paramètres $\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}, B^{(1)}(x)$ et $\lambda^{(2)}, \mu^{(2)}, B^{(2)}(x)$, respectivement. On note par $T^{(1)}, T^{(2)}$ les opérateurs de transition des chaînes de Markov correspondantes.

Théorème 3.1.2. :

Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, B^{(1)}(x) \leq_s B^{(2)}(x)$ alors $T^{(1)} \leq_s T^{(2)}$ où ($s = st$ ou v).

C'est-à-dire ; Pour toute distribution de probabilité P on a $T^{(1)} P \leq_s T^{(2)} P$.

3.1.2. Inégalités stochastiques des distributions stationnaires du nombre de clients dans le système

On donne les conditions sur les paramètres de deux modèles de files d'attente $M/G/1$, sous lesquelles les distributions stationnaires du nombre de clients dans les deux systèmes sont comparables

Théorème 3.1.3. : [27]

On suppose qu'on a deux systèmes de files d'attente avec rappels ayant les paramètres $\lambda^{(1)}$, $\mu^{(1)}$, $B^{(1)}(x)$ et $\lambda^{(2)}$, $\mu^{(2)}$, $B^{(2)}(x)$ respectivement, et soient $\pi_n^{(1)}$, $\pi_n^{(2)}$ les distributions stationnaires correspondantes, du nombre de clients dans le système, alors les inégalités

$$\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \quad \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, \quad B^{(1)} \leq_s B^{(2)} \quad \text{où } (s = st \text{ ou } v),$$

impliquent la suivante $\pi_n^{(1)} \leq_s \pi_n^{(2)}$.

Théorème 3.1.4. : [27]

Si dans le modèle $M/G/1$ avec rappels, la distribution du temps de service $B(x)$ est NBUE (ou bien NWUE), alors la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système est inférieure (respectivement supérieure), par rapport à l'ordre convexe " \leq_v ", à la distribution binomiale négative dont l'expression est donnée par :

$$P_{1j} = \frac{\rho^{j+1}}{j! \mu^j} \prod_{i=1}^j (\lambda + i\mu) (1-\rho)^{\lambda+\mu+1}.$$

3.1.3. Inégalités pour quelques caractéristiques de la période d'activité

On donne des estimations qualitatives en termes de majoration du nombre moyen de clients servis durant la période d'activité pour le modèle $M/G/1$ avec rappels.

Théorème 3.1.5. :

Supposons qu'on a deux systèmes $M/G/1$ avec rappels de paramètres $\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}, B^{(1)}(x)$ et $\lambda^{(2)}, \mu^{(2)}, B^{(2)}(x)$ respectivement. Soient $I^{(1)}$ et $I^{(2)}$ le nombre de clients servis durant une période d'activité dans ces systèmes d'attente. Si

$$\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \quad \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, \quad B^{(1)} \leq_L B^{(2)},$$

alors on a l'inégalité suivante : $E(I^{(1)}) \leq E(I^{(2)})$.

Remarque 3.1.1. :

L'expression du nombre moyen de clients servis durant la période d'activité pour le système $M/G/1$ avec rappels est donnée par :

$$E(I) = \frac{1}{1-\rho} \exp \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_0^1 \frac{1-k(u)}{k(u)-u} du \right\}.$$

Théorème 3.1.6. :

Pour un système de files d'attente $M/G/1$ avec rappels, une estimation qualitative (en terme d'une majoration) du nombre moyen de clients servis durant la période d'activité est donnée par :

$$E(I) \leq \frac{1}{1-\rho} \text{Exp} \left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_0^1 \frac{1-\exp(\rho(u-1))}{\exp(\rho(u-1))-u} du \right\}.$$

Si $B(x)$ est NBUE, alors $E(I) \geq (1-\rho)^{-\frac{\lambda}{\mu}-1}$.

3.1.4. Conclusion

Dans cette étude , on a pu établir des inégalités stochastiques , suivant les ordres partiels ; stochastique, convexe et laplacien , qui ont permis d'avoir des estimations qualitatives en termes de majoration ou bien de minoration (suivant les distributions considérées) des mesures de performances ;

- (i) les distributions du nombre de nouvelles arrivées durant une période de service,
 - (ii) les distributions stationnaires du nombre de clients dans le système,
 - (iii) le nombre moyen de clients servis durant une période d'activité,
- d'un système de files d'attente $M/G/1$ avec rappels.

3.2 Analyse du modèle $M/G/1$ avec rappels constants et vacance du serveur

3.2.1. Description du modèle :

On considère un système de files d'attente à un seul serveur où les clients primaires arrivent suivant un flux poissonien de taux λ . Un client qui arrive et trouve le serveur occupé, quitte l'aire du service pour rejoindre un groupe de clients bloqués appelé "orbite". Après un certain temps aléatoire, il renouvelle sa tentative d'entrer en service, une fois, deux fois,....., jusqu'à ce qu'il le trouve disponible. Les intervalles de temps inter rappels suivent une distribution exponentielle de taux μ . Comme cette politique de rappel ne dépend pas du nombre de clients dans l'orbite, on l'appelle *politique de rappel constant* [19], en pratique on trouve cette politique de rappel constant dans des problèmes où le serveur est appelé à chercher les clients [32] et dans les protocoles de communication de type CSMA [6].

Les temps de service sont supposés d'une loi arbitraire, d'une fonction de distribution $B(t)$ ($B(0)=0$), des premiers moments β_1 et β_2 et d'une transformée de Laplace-Stieltjes $B(\theta)$. Le taux de complétion conditionnel est noté $\eta(x)$.

Tous les clients entrant dans le système sont servis d'une manière continue et dans un ordre indépendant de leur temps de service. De plus on suppose que le serveur prend une vacance chaque fois que le système devient vide (service exhaustif).

On veut dire par vacance exhaustive que le serveur ne peut prendre une vacance, seulement lorsqu'il n'y a plus de clients dans le système.

Les règles qui gouvernent les périodes de vacances sont :

1. Le mécanisme qui détermine l'instant de la fin d'une vacance, n'anticipe pas une nouvelle occurrence du processus des arrivées poissoniennes
2. Chaque temps de service est indépendant de la séquence des périodes de vacances qui précède ce temps de service.
3. Si aucun client n'arrive durant la période de vacance, on dit qu'il y'a une période d'activité pour le serveur de longueur zéro et le serveur prend une autre vacance.

4. Juste après la fin des vacances, s'il y a des clients en orbite, le prochain client qui arrive au service est déterminé par une compétition entre deux lois exponentielles de taux λ et μ .

Finalement, on suppose que le flux des arrivées primaires, les intervalles entre les rappels successifs et les temps de service sont mutuellement indépendants. Cette description coïncide avec la notion de la période d'activité introduite par Heyman [25] et avec les suppositions générales données par Fuhrmann [20]. Le choix de la politique de rappels constants est motivé par l'intérêt d'obtenir des solutions analytiques en termes d'expressions explicites.

L'état du système à l'instant t peut être décrit par le processus

$$X(t) = (C(t), N(t), \xi(t))_{t \geq 0}, \text{ où}$$

$$C(t) = \begin{cases} 0 & \text{si le serveur est oisif,} \\ 1 & \text{si le serveur est occupé,} \\ 2 & \text{si le serveur est en vacance.} \end{cases}$$

$N(t)$: le nombre de clients dans l'orbite à l'instant t .

Si $C(t) = 1$ (alternativement $C(t) = 2$), alors $\xi(t)$ représente le temps de service écoulé du client en service (respectivement, le temps de la vacance écoulé).

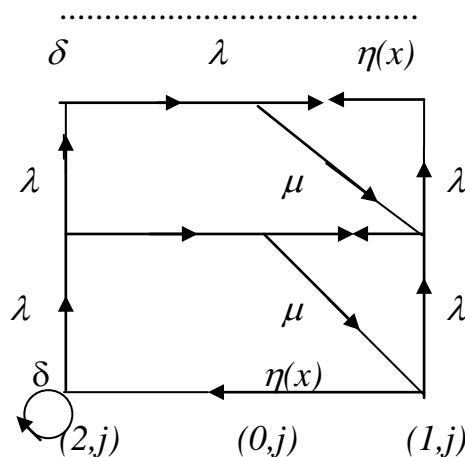


Fig.3.1: Espace d'état et transitions de processus $X(t)$

3.2.2. Chaîne de Markov incluse [5]

L'évolution de notre file d'attente avec rappels peut-être décrite en terme d'une séquence alternée de période d'occupation (activité de serveur) et d'inactivité du serveur.

A la fin de chaque service, le serveur devient libre. La prochaine période d'inactivité du serveur sera de deux types différents:

Type.1. l'orbite devient vide, donc le serveur prend une vacance propre qui est Régie suivant les règles de 1 à 4.

Type.2. Si l'orbite n'est pas vide après la complétion d'un service, alors une compétition entre deux lois exponentielles de taux λ et μ déterminera le prochain client qui entrera en service.

La période de vacance du serveur peut-être considérée comme tout intervalle de temps, durant lequel le serveur est oisif ou bien libre. Ainsi la période d'oisiveté de type (2) peut aussi être considérée comme une vacance due aux rappels.

Si on ne peut pas distinguer entre une vacance propre et une vacance due aux rappels, alors on a une vacance généralisée.

Soit $\{t_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite d'instant de la complétion d'un service ou bien de la fin d'une vacance propre.

La séquence des vecteurs aléatoires $Y_n = (C(t_n^-), N(t_n^+))$ forme une chaîne de Markov, qui est une chaîne de Markov incluse pour notre système de files d'attente.

Son espace d'état est $S = \{1, 2\} \times \mathbb{N}$ et les états de transitions (voir figure 3.1) sont donnés par :

$$(i_{n+1}, j_{n+1}) = \begin{cases} (2, X) & \text{si } j_n = 0, \\ (1, j_n - B_n + U) & \text{si } j_n \geq 1. \end{cases}$$

Où X : le nombre de clients qui arrivent durant une vacance.

U : le nombre de clients qui arrivent pendant un temps de service qui se termine à l'instant t_{n+1} .

Et

$$B_n = \begin{cases} 1 & \text{si le client qui quitte le système à l'instant } t_{n+1} \text{ provient de l'orbite,} \\ 0 & \text{si le client qui quitte le système à l'instant } t_{n+1} \text{ provient de l'extérieur.} \end{cases}$$

Théorème 3.2.1. :

La chaîne de Markov incluse est ergodique si et seulement :

$$\lambda \beta_1 (\lambda + \mu) \mu^{-1} < 1.$$

Théorème 3.2.2. :

Considérons la distribution stationnaire

$$\Pi_{ij} = \lim_{n \rightarrow +\infty} P \{ Y_n = (i,j) \}, \quad (i,j) \in S.$$

Les fonctions génératrices partielles $\Pi_i(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \Pi_{ij} z^j$ sont de la forme :

$$\Pi_1(z) = \frac{\gamma(\lambda z + \mu)K(z)(X(z) - 1)}{(\lambda + \mu)z - K(z)(\lambda z + \mu)},$$

$$\Pi_2(z) = \gamma X(z),$$

où ;

$$\gamma = (1-\rho) (1 - \rho + (1 + \lambda \mu^{-1}) E(X))^{-1},$$

$$K(z) = \beta (\lambda - \lambda z)$$

et $X(z)$ est la fonction génératrice de la variable aléatoire X .

3.2.3 $M/G/1$ avec rappels constants et sans vacances propres

On considère le système $M/G/1$ avec rappels constants et sans vacances dont les transitions sont décrites dans la figure.3.2. On obtient le modèle en négligeant la vacance propre dans la formulation du modèle avec vacance décrit dans la section 3.2.1.

Soit $\{ \bar{P}_{ij}, i \in \{0, 1\}, j \in \mathbb{N} \}$ la distribution de probabilité limite de ce système. On note par $\bar{P}_i(z)$, pour $i \in \{0, 1\}$, les fonctions génératrices partielles correspondantes dont les expressions sont données dans le théorème suivant .

Théorème 3.2.3. :

Si $\rho < 1$, alors les fonctions génératrices partielles de la file d'attente avec rappels sans vacances propres sont données par :

$$\bar{P}_0(z) = \frac{(1 - \rho)(1 + \lambda\mu^{-1}z)(1 - \lambda A(z))}{(1 + \lambda\mu^{-1})(1 - \lambda A(z)(1 + \lambda\mu^{-1}z))},$$

$$\bar{P}_1(z) = (\lambda z)^{-1}(\mu \bar{P}_0(z) - (\lambda z + \mu) \bar{P}_{00}).$$

Où ;

$$A(z) = (1 - \beta(\lambda - \lambda z))(\lambda - \lambda z)^{-1},$$

$$\bar{P}_{00} = \mu(\lambda + \mu)^{-1} - \lambda \beta_1.$$

Cependant, la distribution marginale de l'état du serveur est donnée par :

$$\bar{P}_0 = 1 - \lambda \beta_1 \quad \text{et} \quad \bar{P}_1 = \lambda \beta_1.$$

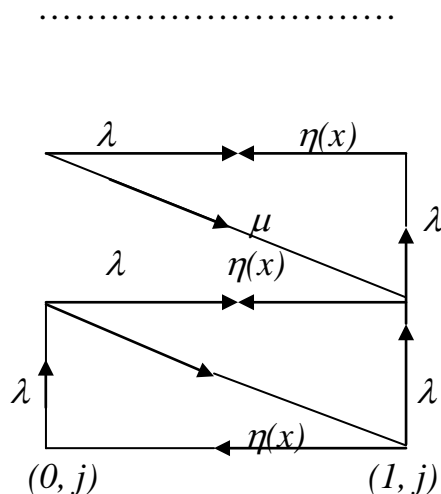


Fig. 3.2 : Transitions de $M/G/1$ avec rappels sans vacances.

L'inversion de la fonction génératrice partielle $\bar{P}_0(z)$, dans le cas où les temps de service sont exponentiellement distribués de taux θ , est donnée par :

$$\bar{p}_{0j} = (1 - \rho)(1 + \lambda\mu^{-1})^{-1} \left(\delta_{j0} \frac{\mu(\lambda + \mu) - \lambda\theta}{(\lambda + \mu)^2} + \delta_{j1} \frac{\lambda^2}{\theta \mu \rho} + \frac{\lambda(\lambda + \theta + \mu)}{(\lambda + \mu)^2} \rho^j \right), j \geq 0$$

(3.1).

3.3.4 Conclusion

Dans cette partie, on a succinctement énoncé quelques résultats établis par J.R.Artalejo [5] pour le système $M/G/1$ avec rappels et vacances du serveur. L'analyse comprend les conditions d'ergodicité de la chaîne de Markov incluse et les fonctions génératrices partielles de la distribution stationnaire de l'état du système.

3.3 Inégalités stochastiques pour le modèle $M/G/1$ avec rappels et vacances

On considère un système de files d'attente $M/G/1$ avec rappels et vacances du serveur.

Dans cette étude, on utilise les mêmes notations introduites dans la section.3.1.

Si de plus Σ_1 et Σ_2 deux modèles $M/G/1$ avec rappels et vacances de paramètres $(i=1,2)$, alors :

$V^{(i)}(x)$: distribution du temps de vacance dans Σ_i .

$f_n^{(i)}$: la probabilité du nombre de clients arrivant durant une période de vacance dans Σ_i .

$v^{(i)}$: taux de vacances dans Σ_i .

3.3.1 Inégalités préliminaires :

On compare , dans cette section, les probabilités du nombre de clients arrivant durant une période de vacance de deux systèmes d'attente $M/G/1$ avec rappels et vacances du serveur $\{f_n^{(i)}, i = 1,2 \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$, suivant les ordres partiels ; stochastique , convexe et en transformée de Laplace .

Les lemmes suivant donnent les conditions, sur les paramètres des deux systèmes, sous lesquelles ces probabilités sont comparables aux sens des ordres sus-cités :

Lemme 3.3.1. :

Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente $M/G/1$ avec rappels et vacances, si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $V^{(1)} \leq_{st} V^{(2)}$ alors

$$\{f_n^{(1)}\} \leq_{st} \{f_n^{(2)}\}.$$

Où ;

$$f_n^{(i)} = P[X = n] = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)} x)^n}{n!} \exp\{-\lambda^{(i)} x\} dV^{(i)}(x).$$

Preuve:

Supposons que $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $V^{(1)} \leq_{st} V^{(2)}$.

Par définition de l'ordre stochastique " \leq_{st} ", on a pour une loi discrète, les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} \{f_n^{(1)}\} \leq_{st} \{f_n^{(2)}\} &\Leftrightarrow \bar{f}_n^{(1)} = \sum_{m=n}^{+\infty} f_m^{(1)} \leq \sum_{m=n}^{+\infty} f_m^{(2)} = \bar{f}_n^{(2)} \\ &\Leftrightarrow \sum_{m=n}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)} x)^m}{m!} \exp\{-\lambda^{(1)} x\} dV^{(1)}(x) \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)} x)^m}{m!} \exp\{-\lambda^{(1)} x\} dV^{(1)}(x) \\ &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)} x)^m}{m!} \exp\{-\lambda^{(2)} x\} dV^{(2)}(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Pour prouver l'inégalité numérique (3.2), on considère la fonction

$$g_n(x, \lambda) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(\lambda x)^m}{m!} \exp\{-\lambda x\}.$$

En prenant sa dérivée par rapport à x , on obtient l'expression positive suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} g_n(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} > 0,$$

donc $g_n(x, \lambda)$ est une fonction croissante en x .

En effet:

$$\frac{\partial}{\partial x} g_n(x, \lambda) = \sum_{m=n}^{\infty} \left\{ \frac{m\lambda(\lambda x)^{m-1}}{m!} e^{-\lambda x} - \frac{\lambda(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda x} - \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} \\
 &= \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda x} - \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} + \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \\
 &= \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} > 0 \quad ; \text{ pour tout } x \geq 0.
 \end{aligned}$$

La dérivée par rapport à λ s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} g_n(x, \lambda) = x e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} > 0.$$

On remarque que la dérivée est positive pour toutes les valeurs positives que peut prendre le paramètre λ . Alors la fonction $g_n(x, \lambda)$ est croissante par rapport aux valeurs du paramètre λ .

En effet:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \lambda} g_n(x, \lambda) &= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{m x (\lambda x)^{m-1}}{m!} e^{-\lambda x} - \sum_{m=n}^{\infty} \frac{x (\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} \\
 &= \frac{\lambda (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\lambda (\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda x} - \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\lambda (\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} \\
 &= \frac{\lambda (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} > 0.
 \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.1.1 énoncé dans le chapitre .2. :

Comme $g_n(x, \lambda)$ est une fonction croissante en x et $V^{(1)} \leq_{st} V^{(2)}$, alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\int_0^{+\infty} g_n(x, \lambda^{(1)}) dV^{(1)}(x) \leq \int_0^{+\infty} g_n(x, \lambda^{(1)}) dV^{(2)}(x). \quad (3.3)$$

D'autre part, puisque la fonction $g_n(x, \lambda)$ est monotone par rapport à λ et que $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, on a :

$$\int_0^{+\infty} g_n(x, \lambda^{(1)}) dV^{(2)}(x) \leq \int_0^{+\infty} g_n(x, \lambda^{(2)}) dV^{(2)}(x). \quad (3.4)$$

Par conséquent des inégalités (3.3) et (3.4), l'inégalité (3.2) est vérifiée par transitivité.

□

Illustration :

La Fig.3.3 donne une comparaison des distributions $\{f_n^{(i)}\}$ en fonction de n (le nombre de clients arrivants dans le système) par rapport à l'ordre stochastique dans $\sum_i, i=1,2$, pour différentes valeurs des paramètres $\lambda^{(i)}, \nu^{(i)}$.

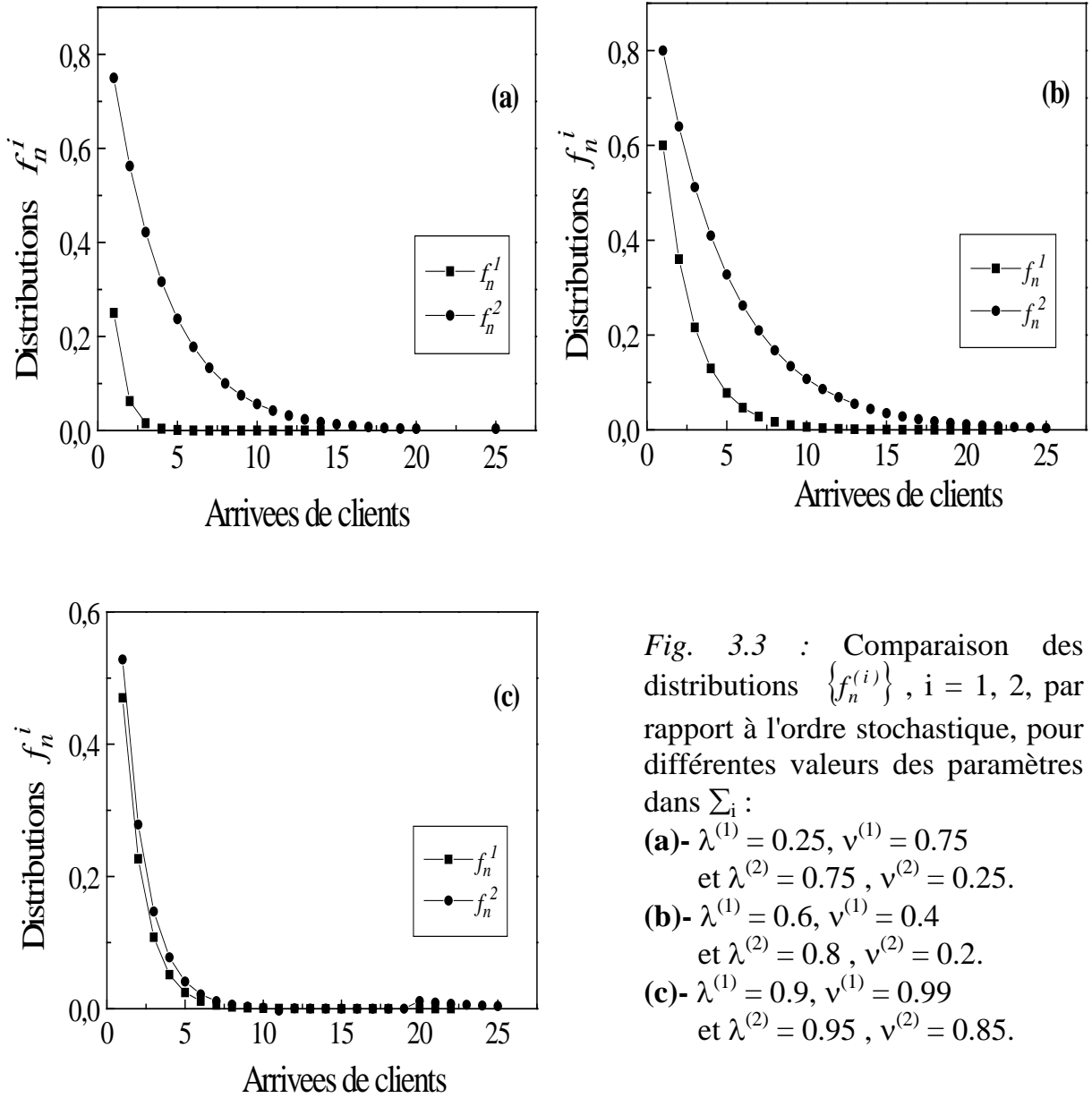


Fig. 3.3 : Comparaison des distributions $\{f_n^{(i)}\}$, $i = 1, 2$, par rapport à l'ordre stochastique, pour différentes valeurs des paramètres dans Σ_i :

- (a)- $\lambda^{(1)} = 0.25, v^{(1)} = 0.75$
 et $\lambda^{(2)} = 0.75, v^{(2)} = 0.25$.
- (b)- $\lambda^{(1)} = 0.6, v^{(1)} = 0.4$
 et $\lambda^{(2)} = 0.8, v^{(2)} = 0.2$.
- (c)- $\lambda^{(1)} = 0.9, v^{(1)} = 0.99$
 et $\lambda^{(2)} = 0.95, v^{(2)} = 0.85$.

Lemme 3.3.2 :

Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente M/G/1 avec rappels et vacances ,
 si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, V^{(1)} \leq_v V^{(2)}$, alors

$$\{f_n^{(1)}\} \leq_v \{f_n^{(2)}\}.$$

Preuve:

Par définition de l'ordre convexe " \leq_v " on a :

$$\begin{aligned}
 \{f_n^{(1)}\} \leq_v \{f_n^{(2)}\} &\Leftrightarrow f_n^{(1)} = \sum_{m=n}^{+\infty} f_m^{(1)} \leq f_n^{(2)} = \sum_{m=n}^{+\infty} f_m^{(2)} \\
 &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}x)^k}{k!} \exp\{-\lambda^{(1)}x\} dV^{(1)}(x) \\
 &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)}x)^k}{k!} \exp\{-\lambda^{(2)}x\} dV^{(2)}(x) \\
 &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} g_m(x, \lambda^{(1)}) dV^{(1)}(x) \leq \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} g_m(x, \lambda^{(2)}) dV^{(2)}(x).
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

avec $g_m(x, \lambda) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \exp\{-\lambda x\}$.

Les fonctions $g_m(x, \lambda)$ sont croissantes par rapport à λ , alors la fonction définie

par : $\bar{g}_n(x, \lambda) = \sum_{m=n}^{+\infty} g_m(x, \lambda)$ l'est aussi .

D'autre part, on a $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{g}_n(x, \lambda) = \lambda \frac{\partial}{\partial x} g_{n-1}(x, \lambda)$

$$= \lambda^2 \left(\frac{(\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!} \right) e^{-\lambda x} > 0.$$

Par conséquent, $\bar{g}_n(x, \lambda)$ est croissante et convexe par rapport à la variable x .

D'après le théorème 2.1.2. on obtient l'inégalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \bar{g}_n(x, \lambda^{(1)}) dV^{(1)}(x) \leq \int_0^{+\infty} \bar{g}_n(x, \lambda^{(2)}) dV^{(2)}(x). \tag{3.6}$$

Et on obtient, grâce à la monotonie de la fonction $\bar{g}_n(x, \lambda)$ par rapport à λ l'inégalité :

$$\int_0^{+\infty} \bar{g}_n(x, \lambda^{(1)}) dV^{(2)}(x) \leq \int_0^{+\infty} \bar{g}_n(x, \lambda^{(2)}) dV^{(2)}(x). \quad (3.7)$$

Par conséquent, l'inégalité (3.5) est vérifiée par transitivité. □

Illustration :

La Fig.3.4. donne une comparaison des distributions $\{f_n^{(i)}\}$ en fonction de n par rapport à l'ordre convexe dans $\sum_i, i=1,2$, pour différentes valeurs des paramètres $\lambda^{(i)}, \nu^{(i)}$.

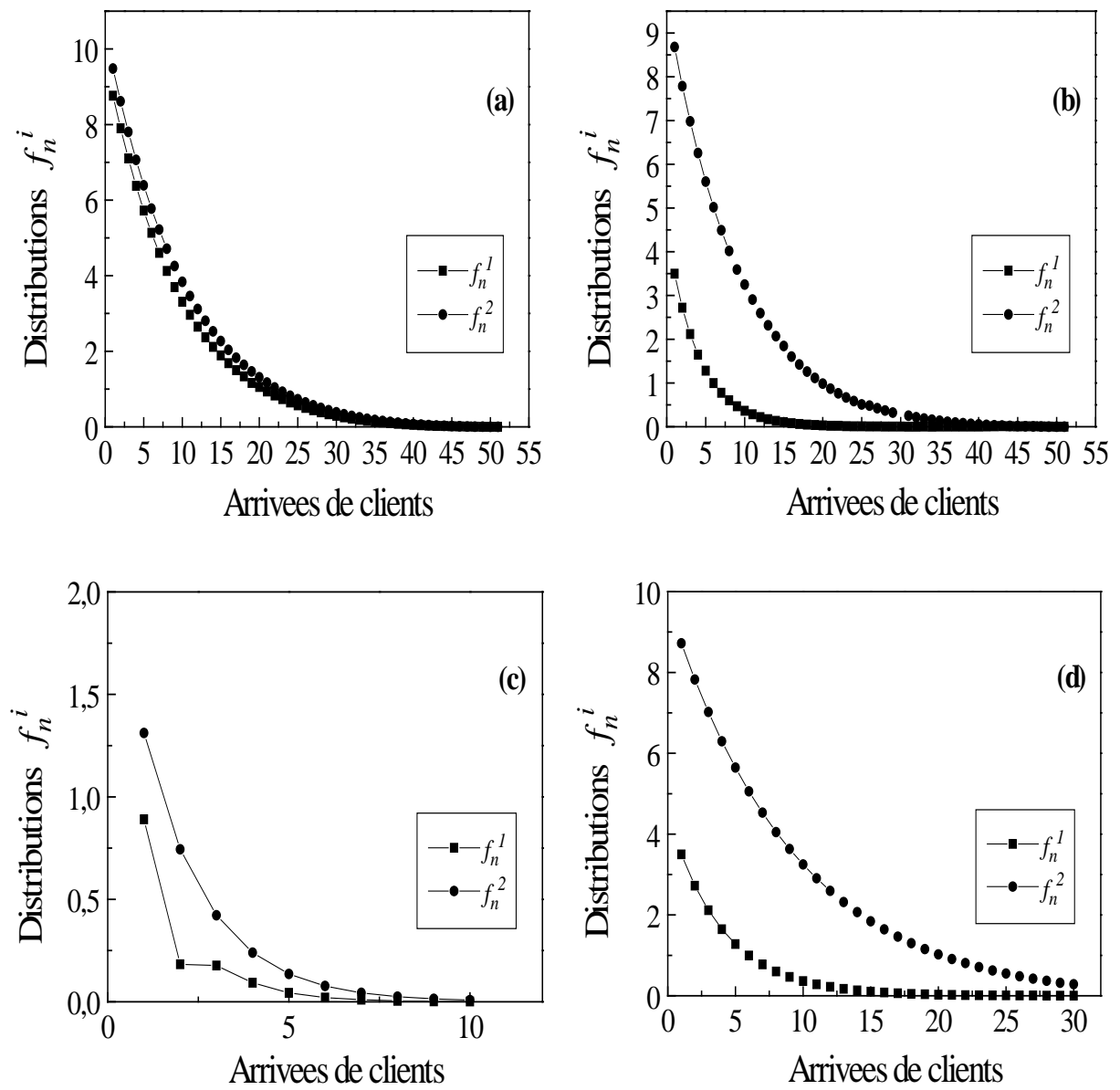


Fig. 3.4 : Comparaison des distributions $f_n^{(i)}$, pour $i = 1, 2$, par rapport à l'ordre convexe dans Σ_i pour différentes valeurs des paramètres :

- (a)- $\lambda^{(1)} = 0.91$, $\nu^{(1)} = 0.1$ et $\lambda^{(2)} = 1$, $\nu^{(2)} = 0.1$.
- (b)- $\lambda^{(1)} = 0.7$, $\nu^{(1)} = 0.2$ et $\lambda^{(2)} = 0.9$, $\nu^{(2)} = 0.1$.
- (c)- $\lambda^{(1)} = 0.8$, $\nu^{(1)} = 0.9$ et $\lambda^{(2)} = 0.8$, $\nu^{(2)} = 0.61$.
- (d)- $\lambda^{(1)} = 0.07$, $\nu^{(1)} = 0.02$ et $\lambda^{(2)} = 0.09$, $\nu^{(2)} = 0.01$.

Lemme 3.3.3 :

Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente M/G/1 avec rappels et vacances, si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $V^{(1)} \leq_L V^{(2)}$ alors

$$\{f_n^{(1)}\} \leq_L \{f_n^{(2)}\}.$$

Preuve:

Par définition de l'ordre en transformée de Laplace ; pour prouver que l'inégalité $\{f_n^{(1)}\} \leq_L \{f_n^{(2)}\}$ a lieu, il suffit d'établir l'inégalité numérique suivante, pour les fonctions génératrices correspondantes

$$f^{(1)}(z) \geq f^{(2)}(z),$$

ce qui est équivalent à montrer que :

$$\tilde{V}^{(1)}(\lambda^{(1)}(1-z)) \geq \tilde{V}^{(2)}(\lambda^{(2)}(1-z)),$$

c'est-à-dire montrer l'équivalence ;

$$\{f_n^{(1)}\} \leq_L \{f_n^{(2)}\} \Leftrightarrow \tilde{V}^{(1)}(\lambda^{(1)}(1-z)) \geq \tilde{V}^{(2)}(\lambda^{(2)}(1-z)). \quad (3.8)$$

On a:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n \geq 0} f_n z^n = \sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} z^n dV(x) \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda x z)^n}{n!} e^{-\lambda x} dV(x) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x (1-z)} dV(x) = \tilde{V}(\lambda(1-z)) \end{aligned}$$

$$V^{(1)} \leq_L V^{(2)} \Rightarrow \tilde{V}^{(1)}(S) \leq \tilde{V}^{(2)}(S) ; \forall S \geq 0$$

En particulier pour $S = \lambda^{(1)}(1-z)$, on a :

$$\tilde{V}^{(1)}(\lambda^{(1)}(1-z)) \geq \tilde{V}^{(2)}(\lambda^{(1)}(1-z)). \quad (3.9)$$

Puisque toute transformée de Laplace est une fonction décroissante, l'inégalité $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ implique la suivante :

$$\tilde{V}^{(2)}(\lambda^{(1)}(1-z)) \geq \tilde{V}^{(2)}(\lambda^{(2)}(1-z)). \quad (3.10)$$

Par conséquent, l'inégalité (3.8) découle de celles de (3.9) et (3.10).

□

3.3.2 Monotonie de la chaîne de Markov incluse

Les probabilités de transitions en un pas de la chaîne de Markov incluse pour le système $M/G/1$ avec rappels et vacances sont données par la formule suivante :

$$P_{nm} = \begin{cases} f_m & \text{si } n = 0, \\ \frac{\mu}{\lambda + \mu} K_{m-n+1} & \text{si } m = n-1 \text{ et } n \geq 1, \\ \frac{\lambda}{\lambda + \mu} K_{m-n} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} K_{m-n+1} & \text{si } m \geq n \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit l'opérateur de transition T de la chaîne de Markov incluse. Pour chaque distribution $p = (p_n)_{n \geq 0}$, on associe une distribution $T_p = q = (q_m)_{m \geq 0}$ tel que

$$q_m = \sum_{n \geq 0} p_n P_{nm}.$$

Les deux théorèmes suivants donnent la condition sous laquelle l'opérateur T est monotone par rapport aux ordres stochastique (\leq_{st}) et convexe (\leq_v).

Théorème 3.3.1 :

Si l'inégalité $V \leq_{st} B$ a lieu, alors l'opérateur de transition T est monotone, par rapport à l'ordre stochastique (\leq_{st}).

C'est-à-dire ;

Pour deux distributions quelconques $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$, l'inégalité $p^{(1)} \leq_{st} p^{(2)}$ implique la suivante :

$$Tp^{(1)} \leq_{st} Tp^{(2)} .$$

Preuve:

Un opérateur T est monotone par rapport à l'ordre stochastique " \leq_{st} " si et seulement si on a l'inégalité suivante :

$$\bar{p}_{n-1m} \leq \bar{p}_{nm} \quad \forall n, m, \quad (3.11)$$

avec,

$$\begin{aligned} \bar{p}_{nm} &= \sum_{k=m}^{+\infty} p_{nk} = \sum_{k=m}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} K_{k-n} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} K_{k-n+1} \right) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \bar{K}_{m-n} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \bar{K}_{m-n+1} \\ &= \bar{K}_{m-n} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} K_{m-n} \\ &= \bar{K}_{m-n+1} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} K_{m-n} \end{aligned}$$

$$\text{et } \bar{p}_{n-1m} = \bar{K}_{m-n+1} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} K_{m-n+1}$$

Dans le cas où $n \geq 2$, on a :

$$\bar{p}_{nm} - \bar{p}_{n-1m} = \bar{K}_{m-n+1} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} K_{m-n} - \bar{K}_{m-n+1} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} K_{m-n+1}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} K_{m-n} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} K_{m-n+1} \geq 0.$$

Ainsi l'inégalité (3.11) est vérifiée pour tout $n \geq 2$.

Il reste à vérifier le cas où $n = 1$;
C'est-à-dire l'étude de l'inégalité ;

$$\bar{p}_{0m} \leq \bar{p}_{1m}. \quad (3.12)$$

On a :

$$\begin{aligned} \bar{p}_{0m} &= \sum_{k=m}^{+\infty} p_{0k} = \sum_{k=m}^{+\infty} f_k = \bar{f}_m \\ \bar{p}_{1m} &= \sum_{k=m}^{+\infty} p_{1k} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \sum_{k=m}^{+\infty} K_{k-1} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \sum_{k=m}^{+\infty} K_k \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \bar{K}_{m-1} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \bar{K}_m \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (K_{m-1} + \bar{K}_m) + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \bar{K}_m = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} K_{m-1} + \bar{K}_m \end{aligned}$$

avec,

$$\bar{K}_{m-1} = K_{m-1} + \bar{K}_m.$$

On montre que la différence $\bar{p}_{1m} - \bar{p}_{0m}$ est positive.

On a :

$$\bar{p}_{1m} - \bar{p}_{0m} = \bar{K}_m - \bar{f}_m + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} K_{m-1}$$

Il est clair que si $\bar{f}_m \leq \bar{K}_m$, alors on aura forcément $\bar{p}_{0m} \leq \bar{p}_{1m}$.

On a les équivalences suivantes :

$$\bar{f}_m \leq \bar{K}_m \Leftrightarrow \sum_{k=m}^{+\infty} f_k \leq \sum_{k=m}^{+\infty} K_k, \text{ d'où}$$

$$\bar{f}_m \leq \bar{K}_m \Leftrightarrow \sum_{k=m}^{+\infty} f_k = \int_0^{+\infty} \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} dV(x) \leq \int_0^{+\infty} \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} dB(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} g_m(x, \lambda) dV(x) \leq \int_0^{+\infty} g_m(x, \lambda) dB(x).$$

Puisque la fonction $g_m(x, \lambda) = \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}$ est croissante en x et par hypothèse on a l'inégalité $V \leq_{st} B$, alors l'inégalité (3.12) a lieu en vertu du théorème 2.1.1 énoncé dans le chapitre.2.

En conclusion l'opérateur T est monotone par rapport à l'ordre stochastique " \leq_{st} ".

□

Illustration :

La Fig.3.5. donne une comparaison des distributions \bar{f}_n et \bar{K}_n en fonction de n par rapport à l'ordre stochastique dans Σ (M/G/1 avec rappels et vacances), pour différentes valeurs des paramètres λ, ν et θ .

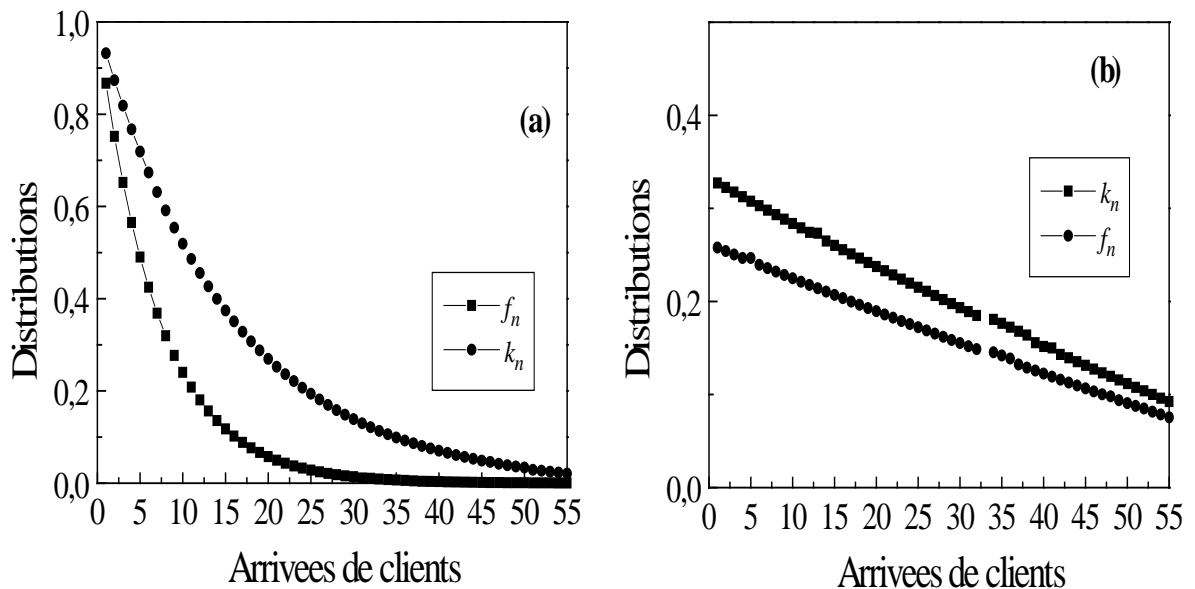


Fig. 3.5 : Comparaison des distributions \bar{f}_n et \bar{K}_n par rapport à l'ordre stochastique pour différentes valeurs des paramètres :

(a)- $\lambda > 0, \nu = 0.92$ et $\theta = 0.4$.

(b)- $\lambda > 100, \nu = 0.8$ et $\theta = 0.6$.

En particulier si les deux distributions V et B possèdent la même loi de probabilité c'est-à-dire ; $B =_{st} V$, alors l'opérateur de transition est aussi monotone.

Théorème 3.3.2 :

Si l'inégalité $V \geq_v B$ a lieu, alors l'opérateur T est monotone par rapport à l'ordre convexe " \leq_v "

C'est-à-dire ;

Pour deux distributions quelconque $p^{(1)}, p^{(2)}$ l'inégalité $p^{(1)} \leq_v p^{(2)}$ implique la suivante :

$$Tp^{(1)} \leq_v Tp^{(2)}.$$

Preuve:

L'opérateur T est monotone par rapport à \leq_v si et seulement si :

$$2 \overline{p}_{nm} \leq \overline{p}_{n-1m} + \overline{p}_{n+1m} \quad \forall n, m. \tag{3.13}$$

Où,

$$\begin{aligned} \overline{p}_{nm} &= \sum_{k=m}^{+\infty} p_{nk} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overline{K}_{m-n} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \overline{K}_{m-n+1} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overline{K}_{m-n} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left(\overline{K}_{m-n} - \overline{K}_{m-n} \right) \\ &= \overline{K}_{m-n} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \overline{K}_{m-n} \\ &= \overline{K}_{m-n} + \overline{K}_{m-n+1} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \overline{K}_{m-n} \\ &= \overline{K}_{m-n+1} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overline{K}_{m-n} \end{aligned}$$

Dans le cas où $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
 \overline{p}_{n-1m} + \overline{p}_{n+1m} - 2\overline{p}_{nm} &= \overline{\overline{K}}_{m-n+1} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \overline{\overline{K}}_{m-n+1} \\
 &\quad + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overline{\overline{K}}_{m-n-1} + \overline{\overline{K}}_{m-n} \\
 &\quad + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \overline{\overline{K}}_{m-n} - \overline{\overline{K}}_{m-n} \\
 &\quad - \overline{\overline{K}}_{m-n+1} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overline{\overline{K}}_{m-n} \\
 &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \overline{\overline{K}}_{m-n} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \overline{\overline{K}}_{m-n+1} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overline{\overline{K}}_{m-n-1} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Alors l'inégalité (3.13) est vérifiée pour tout $n \geq 2$.

Ce qui signifie que $2\overline{p}_{nm} \leq \overline{p}_{n+km} + \overline{p}_{n-km} \quad \forall n \geq 2$, ce qui est équivalent à dire que l'opérateur T est monotone par rapport à l'ordre convexe " \leq_v " pour tout $n \geq 2$.

Maintenant, il reste à vérifier le cas où $n=1$, cela revient à montrer l'inégalité suivante :

$$\overline{p}_{0m} + \overline{p}_{2m} - 2\overline{p}_{1m} \geq 0. \tag{3.14}$$

On a :

- $$\begin{aligned}
 \overline{p}_{1m} &= \overline{\overline{K}}_{m-1} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \overline{\overline{K}}_{m-1} \\
 &= \overline{\overline{K}}_m + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overline{\overline{K}}_{m-1}.
 \end{aligned}$$
- $$\overline{p}_{0m} = \overline{f}_m$$
- $$\overline{p}_{2m} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overline{\overline{K}}_{m-2} + \overline{\overline{K}}_{m-1}$$

Alors , on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \overline{p}_{0m} + \overline{p}_{2m} - 2 \overline{p}_{1m} &= \overline{p}_{0m} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overline{K}_{m-2} + \overline{K}_{m-1} \\
 &\quad + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \overline{K}_{m-1} - \overline{K}_{m-1} \\
 &\quad - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overline{K}_{m-1} - \overline{K}_m \\
 &= \overline{p}_{0m} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overline{K}_{m-2} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overline{K}_{m-1} - \overline{K}_m + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \overline{K}_{m-1} \\
 &= \overline{p}_{0m} - \overline{K}_m + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overline{K}_{m-2} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overline{K}_{m-1} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overline{K}_{m-1} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \overline{K}_{m-1} \\
 &= \overline{p}_{0m} - \overline{K}_m + \left\{ \frac{\mu}{(\lambda + \mu)} \right\} \overline{K}_{m-1} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overline{K}_{m-2} \geq 0
 \end{aligned}$$

Pour cela, il est clair qu'il est suffisant d'avoir $\overline{f}_m - \overline{K}_m \geq 0$.

On peut écrire les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 \overline{f}_m \geq \overline{K}_m &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} dV(x) \geq \int_0^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} dB(x) \\
 &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \overline{h}_m(\lambda, x) dV(x) \geq \int_0^{+\infty} \overline{h}_m(\lambda, x) dB(x)
 \end{aligned}$$

avec,

$\overline{h}_m(\lambda, x) = \sum_{n=m}^{+\infty} \left\{ \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} \right\} = \sum_{n=m}^{+\infty} h_n(\lambda, x)$ est une fonction croissante et convexe (voir la preuve du lemme.3.3.2).

Par conséquent, puisqu'on a l'inégalité $V \geq_v B$, alors l'inégalité (3.14) est vérifiée en vertu du théorème.2.1.2. énoncé dans le chapitre.2..

En conclusion, l'opérateur T est monotone par rapport à l'ordre convexe " \leq_v ".

□

Illustration :

La Fig.3.6. donne une comparaison des distributions \overline{f}_n et \overline{K}_n en fonction de n par rapport à l'ordre convexe dans Σ , pour différentes valeurs des paramètres λ, ν et θ .

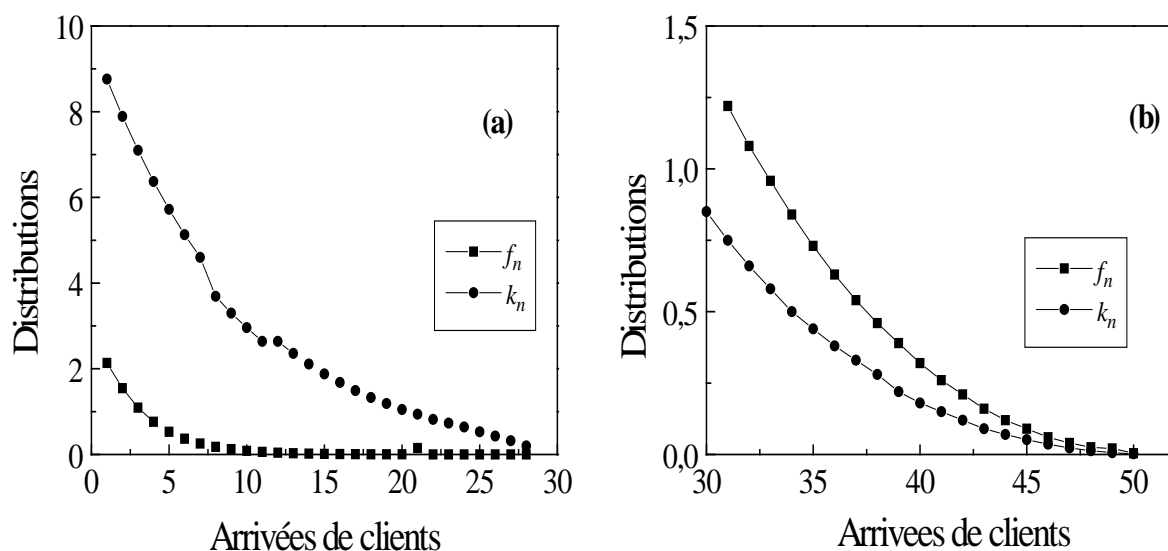


Fig. 3.6 : Comparaison des distributions \overline{f}_n et \overline{K}_n par rapport à l'ordre convexe dans Σ , pour différentes valeurs des paramètres :

- (a)- $\lambda < 10, \nu = 0.1$ et $\theta = 0.4$.
- (b)- $\lambda > 1, \nu = 0.5$ et $\theta = 0.7$.

En particulier, si V et B possèdent la même distribution au sens de l'ordre convexe, c'est-à-dire ; $V =_{\nu} B$, alors T est aussi monotone .

Maintenant, on considère Σ_1 et Σ_2 deux systèmes de files d'attente $M/G/1$ avec rappels et vacances de paramètres $\lambda^{(1)}, \mu^{(1)}, B^{(1)}(x), V^{(1)}(x)$ et $\lambda^{(2)}, \mu^{(2)}, B^{(2)}(x), V^{(2)}(x)$ respectivement. Notons par $T^{(1)}, T^{(2)}$ les opérateurs de transition associés aux chaînes de Markov incluses de chaque système Les deux théorèmes suivants donnent les conditions de comparabilité de ces opérateurs par rapport aux ordres partiels ; stochastique et convexe.

Théorème 3.3.3 :

Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente $M/G/1$ avec rappels et vacances, si

$$\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, B^{(1)} \leq_{st} B^{(2)}, V^{(1)} \leq_{st} V^{(2)} \text{ alors}$$

$$T^{(1)} \leq_{st} T^{(2)},$$

c'est-à-dire que pour une distribution quelconque p on a :

$$T^{(1)}p \leq_{st} T^{(2)}p.$$

Preuve:

D'après le théorème 2.3.2 nous devons vérifier les inégalités suivantes pour l'ordre stochastique.

$$\overline{p}_{nm}^{(1)} \leq \overline{p}_{nm}^{(2)} \quad \forall n \geq 1 \quad (3.15)$$

$$\overline{p}_{0m}^{(1)} \leq \overline{p}_{0m}^{(2)} \quad \text{pour } n = 0 \quad (3.16)$$

Ce qui revient à montrer:

- $\frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} \overline{K}_{m-n}^{(1)} + \frac{\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} \overline{K}_{m-n+1}^{(1)} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} \overline{K}_{m-n}^{(2)} + \frac{\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} \overline{K}_{m-n+1}^{(2)}.$
- $\overline{f}_m^{(1)} \leq \overline{f}_m^{(2)}.$

Cette dernière inégalité est vérifiée d'après le lemme 3.3.1.

D'autre part on a ;

Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $\mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$, alors $\frac{\lambda^{(1)}}{\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\mu^{(2)}}$

Alors comme la fonction: $x \rightarrow \frac{x}{x+n}$ est croissante par rapport à x , on a l'inégalité suivante :

$$\frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}}$$

Par la suite,

$$\begin{aligned}
 p_{nm}^{(1)} &= \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} \bar{K}_{m-n}^{(1)} + \frac{\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} \bar{K}_{m-n+1}^{(1)} \\
 &= \bar{K}_{m-n+1}^{(1)} + \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_{m-n}^{(1)} \\
 &\leq \bar{K}_{m-n+1}^{(1)} + \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_{m-n}^{(1)} \\
 &= \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} \bar{K}_{m-n}^{(1)} + \frac{\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} \bar{K}_{m-n+1}^{(1)} \\
 &\leq \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} \bar{K}_{m-n}^{(2)} + \frac{\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} \bar{K}_{m-n+1}^{(2)} \\
 &= p_{nm}^{(2)}
 \end{aligned}$$

Ainsi l'inégalité (3.15) est vérifiée.

□

Théorème 3.3.4 :

Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$, $B^{(1)}(x) \leq_v B^{(2)}(x)$ et $V^{(1)}(x) \leq_v V^{(2)}(x)$ alors

$$T^{(1)} \leq T^{(2)}$$

C'est-à-dire que pour une distribution quelconque p on a $T^{(1)}p \leq_v T^{(2)}p$

Preuve:

D'après le théorème 2.3.2, nous établirons les probabilités de transitions en un pas $p_{nm}^{(1)}$, $p_{nm}^{(2)}$, qui vérifient les inégalités numériques suivantes :

$$p_{nm}^{(1)} \leq p_{nm}^{(2)} \tag{3.17}$$

$$p_{0m}^{(1)} \leq p_{0m}^{(2)} \tag{3.18}$$

Ce qui est équivalent à démontrer que :

$$\begin{aligned}
 & \bullet \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_{m-n}^{(1)} + \frac{\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_{m-n+1}^{(1)} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_{m-n}^{(2)} + \frac{\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_{m-n+1}^{(2)} \\
 & \bullet f_m^{(1)} \leq f_m^{(2)}. \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vérifiée d'après le lemme 3.3.2. Il reste à montrer l'inégalité (3.17).

$$\begin{aligned}
 \text{On a,} \quad p_{nm}^{(1)} &= \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_{m-n}^{(1)} + \frac{\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} K_{m-n+1}^{(1)} \\
 &= K_{m-n+1}^{(1)} + \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + \mu^{(1)}} \bar{K}_{m-n}^{(1)} \\
 &\leq K_{m-n+1}^{(1)} + \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} \bar{K}_{m-n}^{(1)} \\
 &= \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_{m-n}^{(1)} + \frac{\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}} K_{m-n+1}^{(1)} \\
 &= p_{nm}^{(2)}
 \end{aligned}$$

Ainsi l'inégalité (3.19) est vérifiée. □

3.3.1 Inégalité stochastique des distributions stationnaires du nombre de clients dans le système

Les deux théorèmes suivants donnent les conditions de comparabilité des distributions stationnaires du nombre de clients – pour deux systèmes de files d'attente M/G/1 avec rappels et vacances -- par rapport aux ordres partiels ; stochastique et convexe.

Théorème 3.3.5 :

On considère deux systèmes de files d'attente avec rappels et vacances ayant les paramètres $\lambda^{(i)}$, $\mu^{(i)}$, $B^{(i)}(x)$ et $V^{(i)}(x)$, $i=1,2$ respectivement, et soient $\pi_n^{(1)}$, $\pi_n^{(2)}$ les distributions stationnaires du nombre de clients dans chaque système, alors si les inégalités suivantes ont lieu

$$\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \quad \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, \quad B^{(1)} \leq_s B^{(2)},$$

$$V^{(1)} \leq_s V^{(2)} \quad \text{et} \quad V^{(2)} \leq_{st} B^{(2)} \quad (\text{resp. } B^{(2)} \leq_v V^{(2)})$$

alors on a aussi l'inégalité suivante sur les distributions stationnaires:

$$\left\{ \pi_n^{(1)} \right\} \leq_s \left\{ \pi_n^{(2)} \right\}, \quad \text{où } s = st \quad (\text{ou } v).$$

Preuve:

Soient, $\left\{ \pi_n^{(1)} \right\}$, $\left\{ \pi_n^{(2)} \right\}$ les distributions stationnaires du nombre de clients dans chaque système. On a :

La solution ergodique de Y_k est la même pour $X(t)$, t quelconque [14].

C'est-à-dire ;

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P[X(t) = n] = \lim_{k \rightarrow +\infty} P[Y_k = n] = \pi_n$$

D'après le théorème 3.3.3, les inégalités :

$$\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \quad \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, \quad B^{(1)} \leq_s B^{(2)} \quad \text{et} \quad V^{(1)} \leq_s V^{(2)}$$

impliquent $T^{(1)} \leq_s T^{(2)}$,

c'est-à-dire ; Pour une distribution quelconque $p = (p_n)$, on a ,

$$T^{(1)} p \leq_s T^{(2)} p \tag{3.20}$$

Par hypothèse, on a $V^{(2)} \leq_{st} B^{(2)}$ (resp. $B^{(2)} \leq_v V^{(2)}$) , alors d'après le théorème.3.3.1. (resp. 3.3.2.) l'opérateur $T^{(2)}$ associé à la chaîne de Markov incluse $Y_n^{(2)}$ du deuxième système, est monotone.

C'est-à-dire que pour deux distributions quelconques $p_1^{(2)}$ et $p_2^{(2)}$ telles que

$$p_1^{(2)} \leq_s p_2^{(2)} \quad \text{alors,}$$

$$T^{(2)} p_1^{(2)} \leq_s T^{(2)} p_2^{(2)} \quad (3.21)$$

En d'autres termes :

L'inégalité (3.20) est vérifiée pour toute distribution $p = (p_n)$, en particulier

pour toutes les distributions $p^{(1)}$ du premier modèle ($Y_n^{(1)}$).

C'est-à-dire ;

$$T^{(1)} p^{(1)} \leq_s T^{(2)} p^{(1)} \quad (3.22)$$

Il existe une probabilité qu'on note $p_1^{(2)}$ du deuxième modèle ($Y_n^{(2)}$), tels qu'on ait l'inégalité suivante :

$$T^{(2)} p^{(1)} \leq_s T^{(2)} p_1^{(2)}. \quad (3.23)$$

En combinant les trois inégalités (3.21), (3.22) et (3.23), on obtient le résultat suivant :

Pour des distributions quelconques $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ du premier et du deuxième modèle ($Y_n^{(1)}$ et $Y_n^{(2)}$) respectivement, on a :

$$T^{(1)} p^{(1)} \leq_s T^{(2)} p^{(2)} \quad (3.24)$$

Cette dernière inégalité peut être réécrite de la manière suivante :

$$P[Y_k^{(1)} = n] = q_n^{(1)} = T^{(1)} p_n^{(1)} \leq_s T^{(2)} p_n^{(2)} = q_n^{(2)} = P[Y_k^{(2)} = n].$$

En prenant les limites des deux termes de cette inégalité quand k tend vers l'infini, on obtient ;

$$\{\pi_n^{(1)}\} = \lim_{k \rightarrow \infty} P[Y_k^{(1)} = n] \leq_s \lim_{k \rightarrow \infty} P[Y_k^{(2)} = n] = \{\pi_n^{(2)}\}.$$

Cette dernière inégalité est exactement le résultat recherché.

Théorème 3.3.6 :

Si pour le modèle $M/G/1$ avec rappels et vacances, la distribution de temps de service est NBUE (ou bien NWUE), et si de plus $V^{(1)} \leq_v V^{(2)}$, $B^* \leq_v V^{(2)}$, alors la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système est inférieure (respectivement supérieure), par rapport à l'ordre convexe, à la distribution stationnaire de nombre de clients dans le système $M/M/1$ avec rappels et vacances

Preuve:

Considérons un système de files d'attente $M/M/1$ avec rappels et vacances du serveur avec les mêmes paramètres ;
Taux d'arrivée λ , taux de rappels μ , temps moyen de service β_1 ,
que le système $M/G/1$ avec rappels et vacances du serveur. Mais avec un temps de service exponentiellement distribué de taux de service $\theta = \frac{1}{\beta_1}$:

$$B^*(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\beta_1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

D'après la proposition.2.4.1. ; Si $B(x)$ est NBUE (resp. NWUE), alors

$$B(x) \leq_v B^*(x)$$

(resp. $B(x) \geq_v B^*(x)$).

Et comme $V^{(1)} \leq_v V^{(2)}$, $B^* \leq_v V^{(2)}$

D'après le théorème.3.3.5. on déduit que la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système $M/G/1$ avec rappels et vacances est inférieure (resp. supérieure) à la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système $M/M/1$ avec rappels et vacances.

Conclusion :

Dans cette thèse, on a étudié quelques problèmes de comparabilité pour l'analyse des systèmes de files d'attente avec rappels constants et vacances du serveur.

On a établi des conditions, sur les paramètres d'un système de files d'attente $M/G/1$ avec rappels constants et vacances du serveur, qui assurent la monotonie de l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov incluse. Aussi, on a établi les conditions par lesquelles les opérateurs de transition ainsi que les distributions stationnaires du nombre de clients dans le système, de deux chaînes de Markov incluses associées à deux systèmes $M/G/1$ avec rappels constants et vacances ayant la même structure, mais avec des paramètres différents, sont comparables au sens des ordres stochastique et convexe.

Finalement, il serait possible de simplifier les démonstrations des théorèmes et lemmes énoncés dans la thèse en utilisant la propriété de la décomposition stochastique prouvée récemment pour ce type de modèle [2].

Evidemment, on peut étendre ce travail en estimant d'autres mesures de performance, telles que le temps moyen d'attente, le nombre moyen de rappels par client ...etc., ou bien, éventuellement, en utilisant d'autres ordres partiels (concave, en transformée de Laplace,...).

Bibliographie

- [1] Aissani A. (1999). Comparing due-date-based performance measures for queueing models . *Belgian Journal of Operations Research. Statistics and Computer Science*, Vol 39,55-74.
- [2] Aissani A. (2000). An $M^X/G/1$ retrial queue with exhaustive vacations. *Journal of Statistics & Management Systems*. Vol.3,269-286.
- [3] Artalejo J.R. (1992). A unified cost function for $M/G/1$ queueing systems with removable server. *Trabajo de Investigacion Operativa* 7, 95-104.
- [4] Artalejo J. R. and Falin G.I.(1994). Stochastic decomposition for retrial queues. *Top*, vol.2, N^o2, 329-342.
- [5] Artalejo J. R. (1997). Analysis of an $M/G/1$ queue with constant repeated attempts and server vacations. *Computers and Operations Research* 24, 493-504
- [6] Choi B.D., Shin Y.W. and Ahn W. C. (1992). Retrial queues with collision arising from unslotted CSMA/CD protocol. *Queueing Systems* 11, 335-356.
- [7] Clos C. (1948). An aspect of the dialling behaviour of subscribers and its effect on the trunk plant. *Belle System. Tech. J.*27, 424-445.
- [8] Cohen W. J. (1957). Basics problems of telephone traffic theory and the influence of repeated calls. *Philips Telecomm Rev.*18, N^o2, 49-100.
- [9] Doshi B.T. (1986). Queueing systems with vacations a survey. *Queueing Systems* 1, 29-66.

- [10] Doshi B.T. (1990). Single server queues with vacations. *Stochastic Analysis of Computer and Communications Systems. Ed. H. Takagi, Elsevier Amsterdam.*
- [11] Falin G.I. (1983). The influence of inhomogeneity of the subscribers on the functioning of telephone systems with repeated calls. *Eng. Cybernet. Rev.* 21(6), 21-25
- [12] Falin G.I. (1985). Limit Theorems for queueing systems with repeated calls. *4th Int. Vilnius Conf. On Prob. Theory and Math. Stat., Abstracts, Vol.3,* 235-237, Vilnius, USSR.
- [13] Falin G.I. (1986). On the waiting time process in a single-line queue with repeated calls. *Journal of Applied Probability* 23, 185-192.
- [14] Falin G. I. (1990). A survey of retrial queues. *Queueing Systems* 7, 127-167.
- [15] Falin G. I. And Fricker C. (1991). On the virtual waiting time in an $M/G/1$ retrial queue. *Journal of Applied Probability* 28, 446-460.
- [16] Falin G.I., Artalejo J.R. and Martin M. (1993). On the single server retrial queue with priority Customers. *Queueing Systems* 14, 439-455.
- [17] Falin G. I. and Templeton J. G. C. (1997). Retrial queues. *Chapman and Hall.*
- [18] Falin G. I. and Falin A. I. (1999). Heavy traffic analysis of $M/G/1$ type queueing systems with Markov-modulated arrivals. *Top* 7, 279-291.
- [19] Farahmand K. (1990). Single line queue with repeated demands. *Queueing Sys.* 6, 223-228.
- [20] Fuhman S.W. and Cooper R.B. (1985). Stochastic decompositions in the $M/G/1$ queue with generalised vacations. *Opera. Res.* 33, 1117-1129.
- [21] Greenberg B.S. and Wolff R.W. (1987). An upper bound on the performance of queues with returning customers. *J. Appl. Prob.* 24, 446-475.
- [22] Greenberg B.S. (1989). $M/G/1$ queueing systems with returning customers. *J. Appl. Prob.* 26, N0 1, 152-163.
- [23] Hanschke T. (1987). Explicit formulas for the Characteristics of the $M/M/2/2$ queue with repeated attempts. *J. App. Prob.* 24, 486-494, N°2
- [24] Hasida O. and Kawashima K. (1979). Buffer behaviour with repeated calls. *Electronics and Communication in Japan* 62. B, 3-27
- [25] Heyman D.P. (1977). The T-policy for the $M/G/1$ queue. *Mgmt. Sg.* 23, 775-778.
- [26] Keilson J., Cozzolino and Young H. (1968). A service system with unfilled requests repeated. *Opera. Res.* 16, 1126-1137
- [27] Khalil Z. Falin G. I. (1994). Stochastic inequalities for $M/G/1$ retrial queues. *Operations Research Letters* 16, 285-290.
- [28] Kosten. L. (1947). On the influence of repeated calls in the theory of probabilities of blocking. *De ingenieur* 59, (dutch).
- [29] Langaris C. and Moutzoukis E. (1995). A retrial queue with structured batch arrivals priorities and vacations. *Queueing Systems* 20, 341-368.
- [30] Langaris C. and Moutzoukis E. (1996). Non-pre-emptive priorities and vacations in a multiclass retrial queueing systems. *Comm. Statis. Stochastic Models* 12, 455-472.

- [31] Liang. H. and Kulkarni V.G (1993). Monotonicity properties of single server retrial queue . *Comm. Stochastic model* 9(3), 373-400.
- [32] Neuts M.F. and Ramalhoto M.F. (1984). A service is required to search for costumers. *J. App.* 21,157-166.
- [33] Neuts M.F. and Rao B.M. (1990). Numerical investigation of a multiserver retrial model. *Queueing Systems* 7,169-190.
- [34] Oukid N. (1995). Comparaisons stochastiques de files d'attente. Thèse de Magister en mathématiques appliquées. *Département de Maths. Université de Blida.*
- [35] Rodrigo A., Vazquez M. and Falin G. I. (1998). A new Markovian description of the $M/G/1$ retrial queues. *European Journal of Operational Research* 104, 231-240.
- [36] Stoyan D. (1983). Comparison methods for queueing models and other stochastic models. *Wiley.*
- [37] Takagi H.(1987). Queueing analysis of vacation models, part II: $M/G/1$ with vacations. *TRL. Research Report TR 87-0032, IBM Tokyo Research Lab.*
- [38] Tedijanito.(1991). Stochastic comparisons in vacations models. *Commun Statistic-Stochastic Models* 7(1).125-135.
- [39] Teghem J. (1986). Control of the service processing a queueing system *European Journal of Operational Research* 23,141-158.
- [40] Templeton J. G. C. (1999). Retrial queues. *Top.*7, 351-353.
- [41] Wilkinson R.I. (1956). Theories for toll traffic engineering in the U.S.A..*Bell. System Tech. J.*35 (2), 421-507.
- [42] Yang T. and Templeton J. G. C.(1987). A survey on retrial queues. *Queueing Systems* 2, 201-283.
- [43] Yang T. and Li H. (1995). A single-server retrial queues with server vacations and a finite number of input sources. *European Journal of Operational Research* 85, 149-160.