N° d'ORDRE : 33/ 2011-M ***/MT***

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE et POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR et
de la RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE des SCIENCES et de la TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENNE »

FACULTE DE MATHEMATIQUES

جامعة هواري بومدين
للعلوم والتكنولوجيا
U S T H B

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN : MATHEMATIQUES

SPECIALITE *: Analyse : Équations aux dérivées partielles*

Par : DJAFER KHODJA Fatiha

Sujet :

STABILISATION D'UN PROBLEME THERMOELASTIQUE

Soutenue publiquement le : 13/07/2011 devant le jury composé de :

M. BEBBOUCHI Rachid	***Professeur***	***à l'USTHB***	***Président***
M. KHEMMOUDJ Ammar	***M.C/A***	***à l'USTHB***	***Directeur de thème***
M. MEDJDEN Mohamed	***Professeur***	***à l'USTHB***	***Examinateur***
M. TOUZALINE Arezki	***M.C/A***	***à l'USTHB***	***Examinateur***
M. KESSAB Omar	***M.C/A***	***à l'USTHB***	***Examinateur***

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur A. Khemmoudj, mon Directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissante pour la confiance qu'il m'a accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus vifs à Mr Bebbouchi Rachid, .pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Mes remerciements tout aussi vifs vont à aux examinateurs suivants :Mr. Medjden Mohamed , Mr .Touzaline Arezki , et Mr.. Kessab Omar, qui ont accepté de faire partie de mon jury.

Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents, pour leur soutien et leur confiance en moi, ainsi qu'au reste de la famille, sans oublier mes amis et tous ceux qui ont servis, de près ou de loin à ma formation.

.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Le modèle

Soit Ω un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière régulière Γ.

On considère le système d'une plaque thermoélastique suivant (voir [14]):

$$\begin{cases} [I-\alpha\Delta]\,\omega_{tt}+\Delta^2\omega+\gamma\Delta\theta+F(\omega)=0 \text{ dans } \Omega\times(0,\infty) \\ \theta_t-\Delta\theta-\gamma\Delta\omega_t=0 \text{ dans } \Omega\times(0,\infty) \end{cases} \tag{1.1.1}$$

où $\omega\,(x,t)$ et $\theta\,(x,t)$ représentent respectivement le déplacement et la température du point $x\in\Omega$ à l'instant t.

Le problème (1.1.1) est muni des conditions aux limites libres pour ω

$$\begin{cases} \Delta\omega+(1-\mu)\mathcal{B}_1\omega+\gamma\theta=0, \\ \dfrac{\partial\Delta\omega}{\partial\nu}+(1\partial-\mu)\dfrac{\partial\mathcal{B}_2\omega}{\partial\tau}-\eta\omega-\alpha\dfrac{\omega_{tt}}{\partial\nu}+\gamma\dfrac{\partial\theta}{\partial\nu}=0, \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma\times(0,\infty) \tag{1.1.2}$$

et des conditions aux limites de Robin pour θ :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial\nu}+\lambda\theta=0. \quad \text{sur } \Gamma\times(0,\infty) \end{cases} \tag{1.1.3}$$

où les opérateurs frontières $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{B}_2$ sont donnés par (voir [14])

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1\omega &= \Delta\omega+(1-\mu)\mathcal{B}_1\omega, \\ \mathbf{B}_2\omega &= \frac{\partial\Delta\omega}{\partial\nu}+(1-\mu)\frac{\partial\mathcal{B}_2\omega}{\partial\tau}, \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1\omega &= 2\nu_1\nu_2\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y} - \nu_1^2\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} - \nu_2^2\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}, \\ \mathcal{B}_2\omega &= (\nu_1^2 - \nu_2^2)\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y} + \nu_1\nu_2(\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}). \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

et la constante $\mu \in (0,1)$ représente le module de Poisson, $\alpha \geq 0$, $\gamma > 0$,$\eta \geq 0$ et $\lambda \geq 0$ sont des constantes et τ et ν sont respectivement le vecteur tangent unitaire et le vecteur normal dirigé vers l'extérieur de Ω.

Au modèle (1.1.1), on associe les conditions initiales:

$$\begin{aligned} \omega(.,0) &= \omega_0 \in H^2(\Omega), \\ \omega_t(.,0) &= \omega_1 \in H^1_\alpha(\Omega), \\ \theta(.,0) &= \theta_0 \in L^2(\Omega), \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

avec

$$H^1_\alpha(\Omega) = \begin{cases} H^1(\Omega) \text{ si } \alpha > 0, \\ L^2(\Omega) \text{ si } \alpha = 0. \end{cases} \tag{1.1.7}$$

Parmi les constantes physiques du modèle (1.1.1)-(1.1.2) la plus importante est α.

Le cas $\alpha > 0$ signifie qu'il y a présence de l'inertie de rotation, et pour $\alpha = 0$ signifie l'abscence de l'inertie de rotation.

Les deux cas $\alpha > 0$ et $\alpha = 0$ produisent des propriétés dynamiques très différentes.

La contribution principale du résultat de stabililisation de notre travail (se rapportant au cas $\alpha = 0$) est le *théorème* suivant :

Théorème 1.1.1 *Soient les hypothéses* 1.4 *sur* F *, et supposons que les paramétres* η, λ *sont positifs .*

Alors, pour des données initiales $[\omega_0, \omega_1, \theta_0] \in H_\alpha$ *, il existe deux constantes positives* C *et* ρ, *qui peuvent dépendre de* α *et* $E(0)$, *telles que*

$$E(t) \leq Ce^{-\rho t}E(0) \text{ pour } t \geq 0$$

Pour le cas $\alpha > 0$, ce *théorème* a été démontré dans [3], pour le cas linéaire, et dans [5] pour le cas non linéaire.

1.2 Littérature

Les plaques thermoélastiques lineaires ont été étudiées intensivement ces dernieres années. La plupart des papiers traitent le modèle avec des conditions aux limites d'encastrement (*clamped*) ou déplacements pivotants (*hinged*) et le cas où le paramètre $\alpha = 0$. En effet, pour ces modèles particuliers, la stabilité exponentielle des solutions correspendantes a été prouvée par plusieurs auteurs (voir [13] , [26] , [27] , [4] et [30]). L'analyticité du semi groupe associé à la plaque thermoélastique linéaire a été démontrée récemment dans [24] . C'est le résultat le plus important pour les conditions aux limites d'encastrement (*clamped*) ou (*hinged*) mécanique / Dirichlet thermique, et $\alpha = 0$. Les généralisations concernant le cas des conditions aux *limites unies hinged* /*Newmann* .

Grace à l'analyticicité du semi groupe linéaire, la décroissence exponentielle de l'énergie est constamment réduite dans le cas des conditions aux limites libres. Les conditions aux limites entrainent une forte union sur le bord entre les variables thermique et mécanique, ce qui fait que les conditions de *Lopatinski* ne sont pas satisfaites, et ceci pose des difficultés pour prouver l'analycité.

Dans le cas des conditions aux limites libres, on sait que le semi groupe linéaire correspondant est uniformement stable. La décroissance uniforme du modèle linéaire a été établi. Le problème le plus important qui reste est celui des estimations explicites produites qui peuvent être transformées en variations non linéaires du modèle . Les estimations de la stabilité ont été obtenues pour presque toutes les conditions aux limites. Cependant, les techniques utilisées ne nous permettent pas d'aboutir aux mêmes résultats pour les modèles avec des conditions aux limites libres.

Pour obtenir ces estimations, il faut prouver des résultats de trace pour le modèle *Euler-Bernoulli* dans le cas où les conditions de *Lopatinski* ne sont pas satisfaites (une théorie similaire a été développée dans [17] , [18] , [19] et [32] pour l'équation des ondes). Mais, cette analyse n'a pas encore été faite, et son entreprise constiturait un projet technique très difficile. Cet ingrédient de trace est indispensable pour obtenir des estimations explicites du taux de décroissance pour le système thermoélastique linéaire avec $\alpha = 0$ et avec des conditions aux limites libres.

1.3 But

Le but de ce travail est de démontrer que le système thérmoélastique non lineaire , avec le paramétre $\alpha = 0$ et (avec des non linéarités vérifiant les hypothéses 1.4 ci dessous) est exponentiellement stable pour une grande famille de "dissipativité" $F(.)$, et il englobe plusieurs modéles classiques de la mécanique comme:

1) Le systéme de $Von\ Karman$,

2) L'équation quasilinéaire de $Berger$,

3) Le modèle d'une plaque *Euler -Bernouilli* semi linéaire.

Notre objectif est aussi de montrer comment la régularité produite par l'analyticité du semi groupe peut être exploitée pour obtenir des estimations explicites du taux de décroissance de l'énergie. L'avantage positif de cette méthode c'est qu'elle peut être utilisée traiter le cas des modèles non linéaires.

1.4 Hypothèses sur la non linéarité $F(.)$

On suppose que l'opérateur de non linéarité $F(.)$ vérifie les hypothèses suivantes:

1.4.1 Hypothèse 1

On suppose que l'application $F : H^2(\Omega) \longrightarrow [H^1(\Omega)]^{'}$ est

- *localement Lipschitzienne*,
- *continue*,
- $F(0) = 0$,
- F *est différentiable au sens de Fréchet au point* 0.

1.4.2 Hypothèse 2

On suppose que l'application F vérifie la relation:

$$\int_\Omega F(\omega)\omega d\Omega \geq 0$$

et

$$\int_\Omega F(\varpi(t))\varpi_t(t)d\Omega = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_F(\varpi(t)) \ \forall t>0, \ \forall\omega\in H^2(\Omega) \text{ et } \varpi\in W^{1,2}(0,T,H^2(\Omega)); \tag{1.4.1}$$

où la fonctionnelle $E_F \in H^2(\Omega)$ vérifie :

$$0 \leq E_F(\omega) \leq C(\|\omega\|^2_{H^2(\Omega)})\|\omega\|^2_{H^2(\Omega)}. \tag{1.4.2}$$

Les deux hypothèses précédentes 1 et 2 sur F sont nécéssaires pour obtenir le résultat principal de stabilisation de notre travail , dans le cas $\alpha = 0$.

Pour $\alpha > 0$, on a besoin d'une hypothèse supplémentaire.

1.4.3 Hypothèse 3

Dans le cas $\alpha > 0$, F est faiblement continue de $H^2(\Omega)$ dans $D'(\Omega)$.

Remarque 1.4.1 *1. On note généralement par $C(.)$ une fonction bornée à valeurs bornées , par contre, on note par C une constante positive .*

On peut démontrer directement que les exemples des non linéarités qui vérifient les hypothéses 1-4 énoncées avant incluent dans les modèles suivants:

1 -*Modèle de Von Karman* : voir [12] , [11] et [23]

$$F(\omega) = -[f(\omega),\omega];$$

où $[.,.]$ est le crochet de Von Karman qui est défini par

$$[\omega,\varpi] \equiv \omega_{xx}\varpi_{yy} + \omega_{yy}\varpi_{xx} - 2\omega_{xy}\varpi_{xy},$$

et la fonction f est solution du problème

$$\Delta^2 f(\omega) = -[\omega,\omega] \text{ dans } \Omega$$

$$f(\omega) = \frac{\partial f(\omega)}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

2 -*Modèle de Berger* : voir [7] , [29] et [31]

$$F(\omega) = -\Delta\omega.g(\int_\Omega |\nabla\omega|^2 dx)$$

où $g \in C^1(\mathbb{R})$ avec $g^{'} \geq 0$.

3 -*Modèle de Euler– Bernoulli*

$$F(\omega) = \mid \omega \mid^p \omega, \text{ou } p \geq 0.$$

1.5 Dissipation

Notre intéret est le comportement asymptotique des solutions du modèle décrit par (1.1.1)-(1.1.2), qui est perturbé par les forces F, affectant la plaque. Les instabilités dans les modèles libres sont intrinsèquement de dimension infinie (nombre infini de valeurs propres sur l'axe imaginaire), par conséquent le damping utilisé doit être assez fort pour supprimer les instabilités. Assez fort, veut dire qu'il ne peut pas être modelisé par un opérateur compact (par rapport à l'espace des phases). Il y a plusieurs manières d'introduire physiquement une dissipation dans le système.

Parmi les dissipations que l'on rencontre, on peut citer:

• **Dissipation mécanique interne**, éventuellement non linéaire, agissant sur tout l'intérieur du domaine. Ce type de dissipation est modèlisé par une fonction $g(u_t)$, où $g(s)$ est une fonction non linéaire.

• **Dissipation mécanique interne localisée**, dissipation localisée sur un certain sous ensemble de Ω. Dans ce cas le terme de dissipation prend la forme $\xi(x)g(u_t)$ avec $\xi(x)$ localisée sur une partie de Ω.

• **Dissipation mécanique** qui agit seulement sur le bord. Dans ce cas une fonction qui dépend de la vitesse u_t est ajoutée aux conditions aux limites.

• **Dissipation thermique**. Dans ce cas il ya une autre équation qui décrit la température dans la plaque.

Le mémoire se compose de **quatre chapitres**.

Le **Chapitre 1** est consacré à une introduction où l'on expose l'objectif de notre travail.

Le **Chapitre 2** est consacré à l'introduction d'outils d'analyse fonctionnelle, des résultats préliminaires, des rappels sur les opérateurs , les semi-groupes , des rappels sur l'opérateur biharmonique et la théorie des plaques.

Dans le **Chapitre 3**, on expose les résultats obtenus concernant l'existence, l'unicité et la régularité des solutions du problème thermo élastique non linéaire en utilisant la théorie des semi groupe non linéaires.

Le **Chapitre 4** est consacré à l'étude la stabilisation exponentielle du système thermo élastique par une dissipation thermique en l'absence d'inertie rotationnelle c'est à dire dans le cas $\alpha = 0$..

Chapitre 2

Rappels généraux et définitions

2.1 Quelques outils d'analyse fonctionnelle

Nous n'avons pas l'intention de présenter ici la théorie des espaces de Sobolev dans toute généralité. Nous allons simplement introduire les notions de base, suffisantes pour la compréhension de notre problème, en renvoyant à la bibliographie pour les démonstrations de ces dernières (par exemple pour les théorèmes de trace).
Les notions introduites dans cette section seront utilisées dans les chapitres ultérieurs; nous rappellerons au moment opportun les résultats les plus élaborés sur les espaces de Sobolev dont nous aurons besoin, (pour cette section voir [11, Chapitre 1]).

2.1.1 Théorème de la convergence dominée

Soit $(f_n)_{n\in N}$ une suite de fonctions Lebesgue intégrables sur $\Omega \subset \mathbb{R}^d$qui converge presque partout vers f (sauf peut être sur un ensemble de mesure négligeable).

On suppose qu'il existe une fonction g, non négative et intégrable, qui vérifie

$$|f_n(x)| \leq g(x) \ ,\forall n \ , \ x \in \Omega \ , \ p.p$$

alors

$$(i) \quad f \in L^1_\mu(\Omega)\,, \qquad .$$

$$(ii) \quad \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega |f_n - f\ |\, d\mu = 0,$$

2.1.2 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on introduit les espaces suivants[1] :

Les espaces $L^p(\Omega)$

1. $L^p(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions f mesurables telles que (p étant donné avec $1 \leq p \leq \infty$) :

$$|f|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty; \qquad 1 \leq p < \infty, \tag{2.1.1}$$

$$|f|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess. |f(x)| \, dx < \infty; \qquad p = \infty, \tag{2.1.2}$$

muni de la norme (2.1.1) si $p \neq \infty$ et (2.1.2) si $p = \infty$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach; si $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire correspondant à la norme (2.1.1) (où $p = 2$) est donné par

$$(f, g) = \int_\Omega f(x) \, g(x) \, dx. \tag{2.1.3}$$

2. $\mathscr{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ et à support compact dans Ω. Etant donné une suite $\varphi_j \in \mathscr{D}(\Omega)$ on dira que $\varphi_j \longrightarrow 0$ dans $\mathscr{D}(\Omega)$ si :

(i) $\exists K$ (compact) fixé tel que

$$K \subset\subset \Omega, supp\varphi_j \subset K, \ \forall j;$$

(ii) $\forall\alpha$, $D^\alpha\varphi_j \longrightarrow 0$ uniformément sur Ω où l'on a posé :

$$D^\alpha\varphi = \frac{\partial^{\alpha_1+...+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}\varphi, \ \alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \in \mathbb{N}^n. \tag{2.1.4}$$

3. $\mathscr{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω, c'est-à dire l'espace des formes $\varphi \longrightarrow (f, \varphi)$ linéaires continues sur $\mathscr{D}(\Omega)$ (c'est-à-dire,$\langle f, \varphi_\alpha \rangle \longrightarrow 0$ si $\varphi_\alpha \longrightarrow 0$ dans $\mathscr{D}(\Omega)$). On dira que $f_j \longrightarrow f$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ si $\langle f_j, \varphi \rangle \longrightarrow \langle f, \varphi \rangle$, $\forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

4. Si $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ on définit $D^\alpha f \in \mathscr{D}'(\Omega)$, (et cela $\forall\ \alpha$) par

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha\varphi \rangle \qquad \text{avec} \quad |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n. \tag{2.1.5}$$

En outre l'application linéaire $f \longrightarrow D^\alpha f$ de $\mathscr{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$ est continue.

[1] Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

• **Les e*spaces*** $W^{m,p}(\Omega)$

On appelle "espace de Sobolev d'ordre m sur $L^p(\Omega)$ ", que l'on note $W^{m,p}(\Omega)$, l'espace défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v|\ v \in L^p(\Omega),\ D^\alpha v \in L^p(\Omega),\ |\alpha| \leq m\}. \tag{2.1.6}$$

Muni de la norme

$$\begin{aligned} |v|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} |D^\alpha v|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} ; 1 \leq p < \infty, \\ |v|_{W^{m,\infty}(\Omega)} &= \max_{0\leq|\alpha|\leq m} |D^\alpha v|_{L^\infty(\Omega)} ; \qquad p = \infty \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Le cas $p = 2$ est fondamental, on posera

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega), \tag{2.1.8}$$

muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = (u, v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \tag{2.1.9}$$

et on note

$$|v|_{m,\Omega} = (v, v)^{\frac{1}{2}}_{m,\Omega}$$

la norme correspondante.

$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Premier théorème des traces

On prendra garde que, sauf en dimension 1, une fonction v de $H^1(\Omega)$ n'est pas nécessairement continue sur Ω, ni a fortiori sur $\overline{\Omega}$; on peut néanmoins et c'est absolument essentiel pour les applications définir les traces de v sur la frontière Γ de Ω [(1)]. Nous ferons l'hypothèse

que Ω est un ouvert borné dont la frontière Γ est une variété de dimension $(n-1)$. (2.1.10)
une fois continûment différentiable, Ω étant localement d'un seul côté de Γ.

[(1)] Plus généralement sur une variété régulière de dimension $n-1$ contenue dans $\overline{\Omega}$.

Cette définition signifie: il existe un nombre fini d'ouverts bornés U_i de $\mathbb{R}^n, 0 \leq i \leq I$, tels que $\overline{U}_0$ soit inclu dans Ω, $\{U_i\}_{i=0}^{I}$ soit un recouvrement ouvert de $\bar{\Omega}$, pour tout $i = 1, ..., I$, il existe une application inversible $\phi_i : x \longmapsto y = \phi_i(x)$ une fois continûment dérivable de U_i dans B, boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ de rayon 1, l'application inverse ${\phi_i}^{-1}$ étant une fois continûment dérivable de B dans U_i. On dira que $\{U_i, \phi_i\}_{i=1}^{I}$ est un système de cartes locales définissant Γ.

On montre alors (voir par exemple Lions-Magenes [36, Chapitre 1]) que, $\mathscr{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$ désignant l'espace des fonctions une fois continûment différentiables dans $\overline{\Omega}$, $\mathscr{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Pour $v \in \mathscr{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$ on posera

$$\gamma_0 v \text{ est la trace de } v \text{ sur } \Gamma. \tag{2.1.11}$$

On note

$$L^2(\Gamma) = \{ f |\ f \text{ mesurable et de carré sommable sur } \Gamma \text{ pour la mesure } d\Gamma\},$$

muni du produit scalaire

$$(f, g)_\Gamma = \int_\Gamma f g d\Gamma.$$

On montre alors (voir Lions-Magenes [36])

Théorème 2.1.1 *Sous l'hypothèse (2.1.10) on peut définir de façon unique la trace* $\gamma_0 v = v|_\Gamma$ *pour* $v \in H^1(\Omega)$ *de façon que* $\gamma_0 v$ *coïncide avec la définition usuelle (2.1.11) si* $v \in \mathscr{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$*;* $\gamma_0 v \in L^2(\Gamma)$ *et l'application* $v \longrightarrow \gamma_0 v$ *est linéaire continue de* $H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$*.*

Remarque 2.1.1 *L'application* $v \longrightarrow D^\alpha v$ *est linéaire continue de* $H^{|\alpha|+1}(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$*; on peut donc définir*

$$\{\gamma_0 (D^\alpha v) ; |\alpha| \leq m - 1\} \ \text{si } v \in H^m(\Omega). \tag{2.1.12}$$

En fait, puisque la connaissance de v *sur* $\Gamma^{(1)}$ *entraîne celle de ses dérivées tangentielles sur* Γ*, il est préférable de remplacer l'ensemble des dérivées apparaissant dans (2.1.12) par les dérivées normales d'ordre* $\leq m - 1$

$$\gamma v = \left\{v, \partial v/ \partial n, ..., \partial^{m-1} v/ \partial n^{m-1}\right\} \in \left(L^2(\Gamma)\right)^m \ \text{si } v \in H^m(\Omega).$$

(1) Γ régulière voir l'hypothèse (2.1.10).

Remarque 2.1.2 *On désigne par*

$$H_0^1(\Omega) \text{ le noyau de } \gamma_0 = \left\{ v | \; v \in H^1(\Omega), \gamma_0 v = 0 \right\},$$

plus généralement

$$H_0^m(\Omega) \text{ est le noyau de } \gamma = \{ v | \; v \in H^m(\Omega), \gamma v = 0 \}.$$

On a

$$H_0^m(\Omega) \text{ est un sous-espace fermé de } H^m(\Omega).$$

Donc $H_0^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la structure induite par celle de $H^m(\Omega)$.

Remarque 2.1.3 *On montre (cf.[36]) que $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^m(\Omega)$. Alors toute forme linéaire continue sur $H_0^m(\Omega)$ s'identifie à une distribution sur Ω.*
On définit par $H^{-m}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^m(\Omega)$ dans cette identification, alors

$$H_0^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \left(= H^0(\Omega)\right) \hookrightarrow H^{-m}(\Omega).$$

Afin de caractériser l'espace image de $H^1(\Omega)$ par γ_0, on introduit quelques notions supplémentaires.

• ***Les espaces*** $H^s(\Omega)$**,** $s \in \mathbb{R}$

Dans le cas particulier où $\Omega = \mathbb{R}^n$,

On désigne par $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ = l'espace des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à décroissance rapide ainsi que toutes les dérivées
($\forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |x|^k |D^\alpha f(x)| \underset{|x| \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$), muni des semi-normes

$$\left\{ f \longmapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(|x|^k |D^\alpha f(x)| \right), \, k \in \mathbb{N}, \, \alpha \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

On peut définir $H^m(\mathbb{R}^n)$ par la transformation de Fourier. Si v est une fonction continue à support compact, sa transformée de Fourier $\mathscr{F}(v)$ est définie par

$$\hat{v}(\xi) = \mathscr{F}(v)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2i\pi x \cdot \xi) \, v(x) \, dx, \text{ où } \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \quad \text{et} \quad x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i.$$

On peut définir $H^m(\mathbb{R}^n)$ (voir [36, Théorème 1.2]) par (2.1.6) ou par

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ v | \; v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \; \left(1 + |\xi|^2\right)^{m/2} \hat{v} \in L^2\left(\mathbb{R}^n_\xi\right) \right\},$$

où $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace dual de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, muni de la topologie forte de dual

Alors il est naturel de poser la définition suivante :

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ v| \ v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \ \left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} \hat{v} \in L^2\left(\mathbb{R}^n_\xi\right) \right\},$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme

$$|v|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left| \left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} \hat{v} \right|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

norme qui est équivalente à celle définie par (2.1.9) lorsque $s = m$.

$H^0(\mathbb{R}^n)$ est identifié à son dual, on a

$$(H^s(\mathbb{R}^n))' = H^{-s}(\mathbb{R}^n).$$

Remarque 2.1.4 *Les espaces $H^s(\mathbb{R}^n)$ ont la propriété de "localisation" suivante :*

$$\begin{array}{l} \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n), \ \varphi v \in H^s(\mathbb{R}^n) \ \ \forall v \in H^s(\mathbb{R}^n) \ \ \textit{et l'application } v \longrightarrow \varphi v \\ \textit{est linéaire continue de } H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n). \end{array} \tag{2.1.13}$$

Cette dernière propriété permet de définir $H^s(\Gamma)$, pour tout réel s.

On définit $H^s(\Gamma)$ [(1)] pour $s \geq 0$, on considère ensuite

$$H^\alpha(\Gamma) = \left(H^{-\alpha}(\Gamma)\right)' \quad \text{si} \ \ \alpha < 0.$$

Pour une fonction $v \in L^2(\Gamma)$ on définit, à l'aide d'une famille de cartes locales et d'une partition $\{\vartheta_i\}_{i=0}^I$ de l'unité (C'est à dire $\vartheta_i \in \mathscr{D}(U_i)$ on peut écrire $\sum_{i=1}^{I} \vartheta_i = 1$) subordonnée au recouvrement $\{U_i\}_{i=0}^I$ (C'est à dire $\vartheta_i \in \mathscr{D}(U_i)$ $\sum_{i=1}^{I} \vartheta_i = 1$ sur $\overline{\Omega}$) :

$$v = \sum_{i=0}^{I} \vartheta_i v \qquad \text{(somme localement fini}e\text{)},$$

puis l'on définit les images de $\vartheta_i v$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$; on dira alors que $v \in H^s(\Gamma)$ si toutes les images de $\vartheta_i v$ sont dans $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$; si w_i est l'image de $\vartheta_i v$, on prend comme norme (*hilbertienne*) sur $H^s(\Gamma)$:

$$|v|_{H^s(\Gamma)} = \left(\sum_i |w_i|^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1.14}$$

[(1)] Γ régulière voir l'hypothèse (2.1.10).

Grâce à (2.1.13) l'espace $H^s(\Gamma)$ ainsi défini ne dépend pas de la famille de cartes locales et de la partition de l'unité choisie . L'espace $H^s(\Gamma)$ est défini de manière intrinsèque ainsi que sa topologie mais non sa norme.

Deuxième théorème de traces

On peut maintenant compléter le théorème 2.1.1 par le

Théorème 2.1.2 *Sous les hypothèses du théorème 2.1.1 l'application* $v \longrightarrow \gamma_0 v$ *est linéaire continue et surjective de* $H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$.

Pour la preuve voir par exemple Lions-Magenes [36].

Théorème 2.1.3 $\mathscr{D}\left(\bar{\Omega}\right)$ *est dense dans* $H^2(\Omega)$.

Théorème 2.1.4 *L'application trace*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1 : & H^2(\Omega) & \longrightarrow & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma = \partial\Omega) \\ & v & \mapsto & \nabla v.\nu = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} \end{array}$$

est linéaire continue et surjective.

La formule de Green pour le Laplacien

$$\forall u \in H^2(\Omega), \ \forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \Delta u v dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Gamma v \partial_\nu u d\Gamma. \tag{2.1.15}$$

où $\partial_\nu u = \gamma_1 u$ est la dérivées normale de u sur $\partial\Omega = \Gamma$.

- ***Les espaces*** $L^p(a, b; X)$

Soit X un espace de Banach de norme notée $|\ |_X$; on désigne par: $L^p(0, T; X)$ l'espace des (classes de) fonctions $t \longrightarrow f(t)$ mesurables de $]0, T[\longrightarrow X$ (pour la mesure dt), telles que

$$\begin{aligned} |f(t)|_{L^p(0,T;X)} &= \left(\int_0^T |f(t)|_X^p \, dt \right)^{1/p} < \infty \ (p \neq \infty), \\ |f(t)|_{L^\infty(0,T;X)} &= \sup_{t \in (0,T)} ess. \, |f(t)|_X \, . \end{aligned}$$

C'est un espace de Banach.

$C(a, b; X) \equiv C([a, b]; X) :=$ l'espace des fonctions fortement continues sur $[a, b]$ à valeur dans l'espace X.

Remarque 2.1.5 *Une signification similaire pour les notations* $C([a,b);X)$ *et* $C((a,b];X)$.

• ***Les espaces*** $W^{m,p}(a,b;X)$

$W^{1,1}(a,b;X) :=$ L'ensemble des fonctions absolument continues de $[a,b]$ dans X (voir, [49, Theorem 1.7, p. 105]).

$$W^{1,p}(a,b;X) = \{f \in C(a,b;X) : f' \in L^p(a,b;X)\},$$

où $f'(t)$ est la dérivée (presque partout) de $f(t)$ par rapport à t.

$$W^{m,p}(a,b;X) = \left\{f \in C(a,b;X) : f^{(k)} \in L^p(a,b;X)\right\}, 1 \leq k \leq m,$$

où $f^{(k)}(t)$ est la dérivée d'ordre k (presque partout) de $f(t)$ par rapport à t.

On désigne par $\mathscr{D}'\left(]0,T[\,;X\right)$ l'espace des distributions sur $]0,T[$ à valeurs dans X, défini par

$$\mathscr{D}'\left(]0,T[\,;X\right) = \mathscr{L}\left(\mathscr{D}\left(]0,T[\right);X\right),$$

où, de façon générale $\mathscr{L}(Y;X)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de $Y \longrightarrow X$, si $Y = X$ on note $\mathscr{L}(X)$.

A une fonction $f \in L^p(0,T;X)$ correspond une distribbution $\tilde{f}$ sur $]0,T[$ à valeurs dans X, définie par

$$\tilde{f}(\varphi) = \int_0^T f(t)\,\varphi(t)\,dt, \ \ \varphi \in \mathscr{D}\left(]0,T[\right),$$

(ce qui définit bien une application $\varphi \longrightarrow \tilde{f}(\varphi)$ linéaire continue de $\mathscr{D}\left(]0,T[\right) \longrightarrow X$). L'application $f \longrightarrow \tilde{f}$ est une injection; on identifiera f et $\tilde{f}$. En outre si $f \longrightarrow 0$ dans $L^p(0,T;X)$ alors $\tilde{f} \longrightarrow 0$ dans $\mathscr{D}'\left(]0,T[\,;X\right)$, c'est-à-dire $\tilde{f}(\varphi) \longrightarrow 0$ $\forall \varphi \in \mathscr{D}\left(]0,T[\right)$. On a alors

$$L^p(0,T;X) \subset \mathscr{D}'\left(]0,T[\,;X\right).$$

Pour $f \in \mathscr{D}'\left(]0,T[\,;X\right)$, on définit $d^k f \big/ dt^k = f^{(k)}$ par

$$f^{(k)}(\varphi) = (-1)^k f\left(\varphi^{(k)}\right) \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}\left(]0,T[\right),$$

ce qui définit $f^{(k)}$ comme élément de $\mathscr{D}'\left(]0,T[\,;X\right)$. En outre l'application $f \longrightarrow f^{(k)}$ est linéaire continue de $\mathscr{D}'\left(]0,T[\,;X\right)$ dans lui-même.

Soient X et Y deux espaces de Banach avec $X \subset Y$ avec injection continue et dense.

Soit $v \in L^p(0,T;X)$; alors $dv/dt \in \mathscr{D}'(]0,T[;X)$ donc, en particulier (puisque $\mathscr{D}'(]0,T[;X) \subset \mathscr{D}'(]0,T[;Y)$)

$: dv/dt \in \mathscr{D}'(]0,T[;Y)$.

Supposons alors que

$$dv/dt \in L^q(0,T;X) \qquad\qquad (1 \leq q \leq \infty).$$

Alors la fonction v est, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, continue de $[0,T] \longrightarrow Y$.

En particulier, pour V, H deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$, de norme respectives $|\ \ |_V$, $|\ \ |_H$, le produit scalaire dans H étant noté $(\ \ ,\ \ )$; on suppose que

$$V \subset H,\ V \text{ dense dans } H.$$

En identifiant H a son dual, H s'identifie alors à un sous-espace du dual V' de V, d'où $V \subset H \equiv H' \subset V'$ avec injections continues et denses. Soit $v \in L^2(0,T;V)$ alors

$$dv/dt \in L^2(0,T;V').$$

On montre (voir Lions-Magenes [36, Chapitre 1]) que, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, la fonction $t \longrightarrow v(t)$ est continue de $[0,T] \longrightarrow H$.

2.2 Rappels sur les opérateurs non linéaires

2.2.1 Opérateurs non linéaires

Dans cette section, on rappelle certains résultats concernant les opérateurs non linéaires dans les espaces de Banach qui seront utilisés dans l'étude des équations de Von Karman par la suite.

Opérateurs monotones

Il y a plusieurs techniques développées pour les EDP qui sont utilisées pour démontrer l'existence et l'unicité des solutions pour les équations non linéaires. Dans le cas des modèles de Von Karman les deux approches les plus utilisées sont : La théorie des opérateurs monotones et la Méthode de Galerkin. Pour une présentation détaillée de ces deux méthodes on renvoie le lecteur à [40, 36, 45].

On considère les opérateurs agissant de V dans V', où V est un espace de Banach reflexif et V' son dual. On suppose aussi que l'on a les inclusions suivantes:

$$V \subset H \equiv H' \subset V',$$

où H est un espace de Hilbert.

On notera par $(v, v^*)_{V.V'}$ la valeur de la fonctionnelle $v^* \in V'$ sur l'élément $v \in V$. Si V est un espace de Hilbert, on peut identifier V' avec V et supposer que $(v, v^*)_{V.V'} = (v, v^*)_{V.V}$ est un produit scalaire dans V.

Définition 2.2.1 *L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subseteq V \longrightarrow V'$ et dit monotone si*

$$(v_1 - v_2, Av_1 - Av_2)_{V.\ V} \geq 0 \quad \textit{pour tout } v_1, v_2 \in D(A).$$

on dit que A est maximal monotone (m-monotone) si A est monotone et la relation

$$(v - u, Av - u^*)_{V.\ V} \geq 0$$

pour $u \in V$ et $u^* \in V'$ et pour tout $v \in D(A)$ implique que $u \in D(A)$ et $u^* = Au$.

Remarque 2.2.1 *Notons que si V est un espace de Hilbert et V' est identifié à V, alors les opérateurs monotones sont appelés accrétifs.*

On rappelle aussi plusieurs notions de majorations et de continuité (voir, [36, 40, 45]).

Définition 2.2.2 *Soit $A : V \mapsto V$ ' un opérateur agissant sur un espace de Banach réflexif V.*

- *l'opérateur A est dit* localement borné *en $v_0 \in V$ s' il existe un voisinage $U(v_0)$ tel que $A(U) = \{Av : v \in U\}$ soit un ensemble borné de V'.*
- *L'opérateur A est dit* borné *s'il applique chaque sous ensemble borné de V dans un sous ensemble borné de V'.*
- *A est dit* continu *si $Au_n \to Au$ fortement dans V' pour toute suite $\{u_n\} \subset V$ telle que $u_n \to u$ fortement dans V.*

• *L'opérateur A est dit* compact *si A est continu et applique les sous ensemble bornés de V en des sous ensembles relativement compacts de V'.*

• *A est* fortement continu *si $Au_n \to Au$ fortement dans V' pour chaque suite $\{u_n\} \subset V$ telle que $u_n \to u$ faiblement dans V.*

• *A est dit* hémicontinu *si pour chaque $u, v \in V$ la fonction à valeure relle $t \to (v, A(u+tv))_{V,V'}$ est continue.*

On note que la monotonie et l'hémicontinuité impliquent les majorations locales.

Définition 2.2.3 *On dit que $A : V \mapsto V'$ est coercif si*

$$\frac{(v, Av)_{V.\ V'}}{|v|_V} \to \infty \ \textit{quand}\ |v|_V \to \infty,$$

où $|.|_V$ représente la norme dans l'espace V.

On rappelle aussi quelques propriétés pour les opérateurs monotones tels que $\mathcal{D}(A) \equiv V$ (voir, [36, 18, 45]).

Proposition 2.2.1 *Soit $A : V \mapsto V'$ où V est un espace de Banach reflexif.*

• *Si A est monotone et hémicontinu, alors il est m-monotone.*

• *Si A est linéaire et monotone, alors il est continu.*

• *Si A est monotone, alors A est localement borné en tout point de V.*

• *Si A est monotone et hémicontinu, alors il est semi continu.*

• *soient A et B des opérateurs m-monotones de $V \to V$'. Alors $A+B$ est m-monotone.*

• *Si A est monotone, hémicontinu et coercif et l'espace V est séparable, alors $R(A) = V'$; c'est à dire que l'équation $Au = f$ a des solutions pour tout $f \in V'$.*

• *Sopposons que A est m-monotone et que B est monotone et hémicontinu de $V \to V$'. Alors $A+B$ est m-monotone. Supposons de plus que $A+B$ est coercif, on a $R(A+B) = V'$.*

Le résultat de convergence faible suivant est fondamental dans le contexte des opérateurs m monotones [40].

Proposition 2.2.2 *Supposons que V est un espace de Banach reflexif. Soit $A : \mathcal{D}(A) \subseteq V \mapsto V'$ un opérateur monotone maximal et $\{v_n\}$ une suite dans $\mathcal{D}(A)$ telle que $v_n \to v$ faiblement dans V et $Av_n \to f$ faiblement dans V'.*

- *Si*

$$\limsup_{n\to\infty}(v_n - v, Av_n - f)_{V,V'} \leq 0, \tag{2.2.1}$$

alors $v \in \mathcal{D}(A)$, $\ f = Av$ *et*

$$\lim_{n\to\infty}(v_n, Av_n)_{V,V'} = (v, Av)_{V,V'}. \tag{2.2.2}$$

- *La même conclusion reste vraie, si au lieu de (2.2.1) on suppose que*

$$(v_n - v_m, Av_n - Av_m)_{V,V'} \to 0 \quad \textit{quand} \quad n, m \to \infty. \tag{2.2.3}$$

Preuve. Partie 1*: On peut voir que (2.2.1) est équivalente à*

$$\limsup_{n\to\infty}(v_n, Av_n)_{V.\ V'} \leq (v, f)_{V,V'}, \tag{2.2.4}$$

Alors, puisque

$$(v_n - w, Av_n - Aw)_{V.\ V'} \geq 0 \ \textit{pour tout}\ w \in D(A), \tag{2.2.5}$$

en prenant lim sup, *on obtient* $(v - w, f - Aw)_{V,V'} \geq 0$. *Donc la maximalité de* A *implique que* $v \in \mathcal{D}(A)$ *et* $f = Av$.

Prenons maintenant la lim inf *dans la relation (2.2.5) avec* $w = v$, *on obtient que* $\liminf_{n\to\infty}(v_n, Av_n)_{V.V'} \geq (v, f)_{V.V'}$ *qui, avec (2.2.4), implique (2.2.2).*

Partie 2*: Supposons (2.2.3) au lieu de (2.2.1). On démontre premièrement que*

$$\lim_{n\to\infty}(v_n, Av_n)_{V.\ V'} = (v, f)_{V.\ V'}. \tag{2.2.6}$$

Il s'ensuit d'après (2.2.3) pour tout $\varepsilon > 0$, *qu'il existe* N *tel que*

$$0 \leq (v_n - v_m, Av_n - Av_m)_{V.\ V'} \leq \varepsilon \ \textit{pour tout}\ n, m \geq N. \tag{2.2.7}$$

Soit a *un point limite de la suite* $\{(v_n, Av_n)_{V.V'}\}$. *Alors* $a = \lim_{k\to\infty}(v_{n_k}, Av_{n_k})_{V.V'}$ *pour une suite* $\{n_k\}$. *D'après (2.2.7) on a*

$$0 \leq (v_{n_k}, Av_{n_k})_{V.V'} + (v_{n_l}, Av_{n_l})_{V.V'} - (v_{n_k}, Av_{n_l})_{V.V'} - (v_{n_l}, Av_{n_k})_{V.V'} \leq \varepsilon$$

pour tout $k, l \geq \widetilde{N}$. *Donc, si on fait tendre* l *vers* ∞ *dans la dernière relation, on obtient*

$$0 \leq (v_{n_k}, Av_{n_k})_{V.V'} + a - (v, Av_{n_k})_{V.V'} - (v_{n_k}, f)_{V.V'} \leq \varepsilon$$

pour tout $k \geq \widetilde{N}$*. En faisons tendre* $k \to \infty$*, on obtient*

$$0 \leq 2a - 2(v, f)_{V.V'} \leq \varepsilon \quad \textit{pour tout} \quad \varepsilon > 0.$$

Ainsi $a = (v, f)_{V.V'}$ *et donc (2.2.6) est vérifiée.*

Maintenant utilisant (2.2.6), après un passage à la limite dans (2.2.5), on trouve que $(v-w, f-Aw)_{V.V'} \geq 0$ *pour chaque* $w \in \mathcal{D}(A)$ *et donc, d'après la maximalité de* $A, v \in D(A)$ *et* $f = Av$*. La relation (2.2.2) découle de (2.2.6).* ■

2.3 L'opérateur Biharmonique

On introduit ici plusieurs résultats concernant l'opérateur biharmonique Δ^2 et les problèmes aux limites définis sur un domaine régulier borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. On considère plusieurs types de conditions aux limites associés au Δ^2.

Les conditions aux limites considérées—encastrement (clamped) , "hinged", simplement supporteés et libres— ont une grande motivation physique. On renvoie le lecteur à [42] et [43 , Chapitre 3] pour la signification physique (du point de vue mécanique) des conditions aux limites considérées.

On introduit un certain nombre de formules "de type Green" qui donnent une connection entre l'opérateur biharmonique et les différentes conditions aux limites. Afin d'accomplir ceci, on commence premièrement par expliquer la signification des opérateurs aux bords et des traces associées.

Soit $\Gamma := \partial\Omega$ une courbe de classe C^1. Alors , pour tout $\eta \in \Gamma$, on peut définir le vecteur unitaire normal extérieur $\nu = \nu(\eta) = (\nu_1(\eta); \nu_2(\eta))$ et le vecteur unitaire tangent correspondant $\tau = \tau(\eta) = (-\nu_2(\eta), \nu_1(\eta))$. De plus, pour tout $\eta_0 \in \Gamma$, il existe un voisinage (tubulaire) $\mathcal{U} \ni \eta_0$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que chaque $x \in \mathcal{U} \cap \Omega$ peut être représenté d'une manière unique sous la forme

$$x = \eta - \delta\nu(\eta) \text{ pour } \eta \in \mathcal{U} \cap \Gamma \text{ et } \delta > 0. \tag{2.3.1}$$

Ceci rend possible le prolongement des champs vectoriels ν et τ définis sur Γ à l'intérieur de Ω par les formules

$$\nu(x) = \nu(\eta) \text{ et } \tau(x) = \tau(\eta), \; x \in U \cap \Omega,$$

où x est donné par (2.3.1). Par conséquent, on peut définir les dérivées normale et tangentielle à l'intérieur de $\mathcal{U} \cap \Omega$ par les formules

$$\frac{\partial \omega}{\partial \nu\,(x)} = (\nabla \omega(x), \nu(x))_{\mathbb{R}^2} \ \text{ et } \ \frac{\partial \omega}{\partial \tau\,(x)} = (\nabla \omega(x), \tau(x))_{\mathbb{R}^2}, \quad x \in \mathcal{U} \cap \Omega,$$

où $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^2}$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2.3.1 *pour chaque ω et v de $C^3(\overline{\Omega})$, on a l'identité suivante*

$$\int_\Omega [\omega, v] dx = \int_\Gamma \left[(\mathcal{B}_1 \omega) \frac{\partial v}{\partial \nu} - (\mathcal{B}_2 \omega) v \right] d\Gamma.$$

Ici

$$[\omega, v] = \partial^2_{x_1} \omega \cdot \partial^2_{x_2} v + \partial^2_{x_2} \omega \cdot \partial^2_{x_1} v - 2 \cdot \partial^2_{x_1 x_2} \omega \cdot \partial^2_{x_1 x_2} v \tag{2.3.2}$$

est le crochet de Von Karman, les opérateurs aux bords $\mathcal{B}_1$ and $\mathcal{B}_2$ sont définis par les relations (1.1.4)-(1.1.5)

Preuve. Voir [43, Chaptitre 3, Lemme3C.2, p.300]. ∎

La proposition 2.3.1 et la formule de Green pour l'opérateur de Laplace impliquent (voir, [14]) la Proposition suivante

Proposition 2.3.2 *Pour tout $\omega \in H^4(\Omega)$, $v \in H^2(\Omega)$, et $\mu \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int_\Omega \Delta^2 \omega v dx = a_0(\omega, v) + \int_\Gamma \left[\left(\frac{\partial\,(\Delta \omega)}{\partial \nu} + (1-\mu) \mathcal{B}_2 \omega \right) v - (\Delta \omega + (1-\mu) \mathcal{B}_1 \omega) \frac{\partial v}{\partial \nu} \right] d\Gamma \tag{2.3.3}$$

où

$$\begin{aligned} a_0(\omega, v) &= \int_\Omega (\Delta \omega \Delta v - (1-\mu)[\omega, v]) dx \\ &= \int_\Omega (\mu \Delta \omega \Delta v + (1-\mu)(\omega_{x_1 x_1} v_{x_1 x_1} + 2 \omega_{x_1 x_2} v_{x_1 x_2} + \omega_{x_2 x_2} v_{x_2 x_2})) dx. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

voir le lemme 4.0.1 (stabilisation)

Conditions aux limites d'encastrement (Clamped (Dirichlet))

On note par $\Delta^2_D : L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ l'opérateur biharmonique avec des conditions aux limites d'encastrement nulles:

$$\omega|_{\partial\Omega} = \nabla \omega|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.3.5}$$

C'est à dire que

$$\Delta_D^2 \omega \equiv \Delta^2 \omega, \quad \omega \in \mathcal{D}(\Delta_D^2) \equiv H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega). \tag{2.3.6}$$

L'opérateur Δ_D^2 est auto-adjoint et strictement positif. Il possède aussi un spèctre discret. On rappelle la définition suivante.

Définition 2.3.1 *Un opérteur auto-adjoint A dans un espace de Hilbert H est dit un opérateur avec un spectre discret si et seulement si il existe une base orthonormale $\{e_k\}$ dans H se composant des vecteurs propres de l'opérateur A :*

$$Ae_k = \lambda_k e_k, \quad e_k \in \mathcal{D}(A), k = 1, 2, ...,$$

et les valeurs propres correspondantes $\{\lambda_k\}$ ont les propriétés $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$, et $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$.

L'opérateur Δ_D^2 engendre sur $H_0^2(\Omega)$ la forme bilinéaire

$$a(\omega, v) = \int_\Omega \Delta\omega \Delta v dx = \left(\left(\Delta_D^2\right)^{1/2} \omega, \left(\Delta_D^2\right)^{1/2} v \right)_{L^2(\Omega)}, \quad \omega, v \in H_0^2(\Omega).$$

Remarque 2.3.1 *On note que $(\Delta_D^2)^{1/2} \neq \Delta_D$. Ceci est due aux conditions aux limites qui sont utilisées dans la définition de Δ_D^2. Seulement dans le cas commutatif (les conditions aux limites " hinged "; voir (2.3.7) ci-dessous) on a l'équivalence $(\Delta_D^2)^{1/2} = \Delta_D$.*

On note que d'après la Proposition 2.3.1 la forme $a(\omega, v)$ admet aussi la représentation suivante

$$a(\omega, v) = a_0(\omega, v), \ \omega, v \in H_0^2(\Omega),$$

où $a_0(\omega, v)$ est définie par (2.3.4) avec la constante $0 < \mu < 1$, et μ est le module de Poisson. La représentation précédente est importante dans le contexte de l'analyse des conditions aux limites mixtes.

Il est nécessaire, par la suite, d'introduire les applications de Green qui donnent des extensions des valeurs aux bords à l'intérieur du domaine.

Dans le cas des conditions aux limites d'encastrement " clamped " (Dirichlet) (2.3.5), l'application de Green est donnée par $\omega = G_D g$ si et seulement si ω vérifie

$$\Delta^2 \omega = 0 \ \text{ pour } x \in \Omega, \omega|_{\partial\Omega} = 0, \left.\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = g.$$

La théorie elliptique classique implique que

$$G_D : L^2(\partial\Omega) \mapsto H^{3/2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ est continue}$$

et donc

$$G_D : L^2(\partial\Omega) \mapsto \mathcal{D}\left(\left(\Delta_D^2\right)^{3/8-\varepsilon}\right) \equiv H^{3/2-4\varepsilon}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

est continu pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit.

Conditions aux limites " hinged "

Les conditions aux limites de type " hinged ", du point de vue mathématique, sont les plus simples à traiter. Ceci est due au fait que l'opérateur biharmonique devient juste un carré de l'opérateur de Dirichlet–Laplace. En effet, les conditions aux limites de type "hinged " sont de la forme suivante

$$\omega|_{\partial\Omega} = \Delta\omega|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.3.7}$$

Comme avant, l'opérateur $\Delta_H^2 : L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ est défini par les relations

$$\Delta_H^2\omega \equiv \Delta^2\omega,\ \omega \in \mathcal{D}(\Delta_H^2) \equiv \left\{\omega \in H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : \Delta\omega|_{\partial\Omega} = 0\right\} \tag{2.3.8}$$

est un opérateur auto-adjoint, positif, avec un spèctre discret. Il est clair que $\Delta_H^2 = \Delta_D^2$, où Δ_D est l'opérateur de Laplace avec les conditions aux limites de Dirichlet, $\mathcal{D}(\Delta_D) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Donc $\left(\Delta_H^2\right)^{1/2} = -\Delta_D$.

L'opérateur de Green associé aux conditions aux limites " hinged " est défini par la $u = G_H g$, où u vérifie le problème aux limites suivant

$$\Delta^2\omega = 0 \text{ for } x \in \Omega, \omega|_{\partial\Omega} = 0, \Delta\omega|_{\partial\Omega} = g.$$

Dans ce cas, G_H peut être identifié avec $-A_D^{-1}D$, où $A_D = -\Delta_D$ et D est l'application classique de Dirichlet (définie comme une extension harmonique de g du bord $\partial\Omega$ à l'intérieur de Ω) . C'est à dire, $w = Dg$, où

$$\Delta\omega = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \omega|_{\partial\Omega} = g.$$

Puisque D est borné de $L^2(\partial\Omega)$ dans $H^{1/2}(\Omega) \subset \mathcal{D}(A_D^{1/4-\varepsilon})$, on conclut que $G_H = -A_D^{-1}D$ est une application continue de $L^2(\partial\Omega)$ dans $\mathcal{D}(A_D^{5/4-\varepsilon}) = \mathcal{D}\left((\Delta_H^2)^{5/8-\varepsilon/2}\right)$.

Donc

$$G_H : L^2(\partial\Omega) \mapsto \mathcal{D}\left(\left(\Delta_H^2\right)^{5/8-\varepsilon}\right) \equiv H^{5/2-4\varepsilon}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

est continu pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit. On note aussi que comme dans le cas d'encastrement (clamped) on peut faire tendre $\varepsilon \to 0$ et obtenir la relation

$$G_H : L^2(\partial\Omega) \mapsto H^{5/2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ est continue.}$$

Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [44, Chapitre 3, Section 3.6] et les références dedans.

On note aussi que

$$\int_\Omega \Delta^2 \omega G_H g dx = \int_\Gamma \frac{\partial \omega}{\partial \nu} g d\Gamma \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{D}\left(\Delta_H^2\right),\ g \in L^2(\Gamma). \tag{2.3.9}$$

En effet, on peut voir que la formule de Green (2.3.3), avec $\mu = 1$ peut être écrite sous la forme

$$\int_\Omega \Delta^2 \omega v dx - \int_\Omega \omega \Delta^2 v dx = \int_\Gamma \left[\frac{\partial \Delta\omega}{\partial \nu} v - \Delta\omega \frac{\partial v}{\partial \nu}\right] d\Gamma - \int_\Gamma \left[\frac{\partial \Delta v}{\partial \nu} \omega - \Delta v \frac{\partial \omega}{\partial \nu}\right] d\Gamma \tag{2.3.10}$$

Substituonst $\omega \in \mathcal{D}(\Delta_H^2)$ et $v = G_H g$ dans (2.3.10) et tenons compte des conditions aux limites pour ω et v, on obtient (2.3.9).

Il est aussi important de mentionner que G_H est un cas particulier de l'application de Green G_S considéré dans la sous section suivante ($G_H = G_S$ quand $\mu = 1$).

Conditions aux limites de type libres

Les conditions aux limites libres sont définies vue les moments et les forces de cisaillement imposés sur le bord [14]:

$$[\Delta\omega + (1-\mu)\mathcal{B}_1\omega]|_{\partial\Omega} = \left[\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta\omega) + (1-\mu)\mathcal{B}_2\omega\right]\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.3.11}$$

où, comme avant, les opérateurs aux bords $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ définis par les relations (1.1.4)-(1.1.5)

On définit l'opérateur $\Delta_F^2 : L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ par la formule $\Delta_F^2\omega \equiv \Delta^2\omega$ pour $\omega \in \mathcal{D}(\Delta_F^2)$, où le domaine $\mathcal{D}(\Delta_F^2)$ se compose de fonctions ω de $H^4(\Omega)$ vérifiant (2.3.11). On peut voir que Δ_F^2 est un opérateur elléptique régulier . Par conséquent pour tout $0 < \mu < 1$ l'opérateur Δ_F^2 est un opérateur auto adjoint et positif avec un spèctre discret.

La forme bilinéaire correspondante $a_F(w,v)$ est défini sur $\mathcal{D}\left((\Delta_F^2)^{1/2}\right) \equiv H^2(\Omega)$ et la relation

$$a_F(\omega,v) = \left(\left(\Delta_F^2\right)^{1/2}\omega, \left(\Delta_F^2\right)^{1/2}v\right)_{L^2(\Omega)} = a_0(\omega,v)$$

est vérifiée pour tout $\omega, v \in H^2(\Omega)$ avec $a_0(\omega,v)$ donnée par (2.3.4).

2.3.1 Opérateurs de Green

Les opérateurs de Green G_1 et G_2 associés aux conditions aux limites libres sont définis de la manière suivante : $\omega = G_1 g$ et $w = G_2 h$, où ω et w sont solutions des problèmes

$$G_1 g = \omega \iff \begin{cases} \Delta^2\omega = 0 & \text{dans } \Omega\times(0,\infty) \\ \begin{cases} \Delta\omega + (1-\mu)\mathcal{B}_1\omega = g \\ \dfrac{\partial\Delta\omega}{\partial\nu} + (1-\mu)\dfrac{\partial\mathcal{B}_2\omega}{\partial\tau} = 0 \end{cases} & \text{sur } \Gamma\times(0,\infty) \end{cases} \tag{2.3.12}$$

$$G_2 h = w \iff \begin{cases} \Delta^2 w = 0 & \text{dans } \Omega\times(0,\infty) \\ \begin{cases} \Delta w + (1-\mu)\mathcal{B}_1 w = 0 \\ \dfrac{\partial\Delta w}{\partial\nu} + (1-\mu)\dfrac{\partial\mathcal{B}_2 w}{\partial\tau} = h \end{cases} & \text{sur } \Gamma\times(0,\infty) \end{cases} \tag{2.3.13}$$

$$Dh = v \iff \begin{cases} \Delta v = 0 & \text{dans } \Omega\times(0,\infty) \\ v|_\Gamma = h & \text{sur } \Gamma\times(0,\infty) \end{cases} \tag{2.3.14}$$

La théorie elleptique standard (voir [43, Chapitre 3] et les références dedans) implique le résultat de régularité suivant.

Proposition 2.3.3 *soient*

$$G_1 : L^2(\partial\Omega) \mapsto H^{5/2}(\Omega) \subset \mathcal{D}\left(\left(\Delta_F^2\right)^{(5/8-\varepsilon)}\right) \equiv H^{5/2-4\varepsilon}(\Omega)$$

et

$$G_2 : L^2(\partial\Omega) \mapsto \left\{u \in H^{7/2}(\Omega) : [\Delta u + (1-\mu)\mathcal{B}_1 u]|_{\partial\Omega} = 0\right\}$$

continument.

En particulier

$$G_2 : L^2(\partial\Omega) \mapsto \mathcal{D}\left(\left(\Delta_F^2\right)^{(7/8-\varepsilon)}\right),$$

où

$$\mathcal{D}\left(\left(\Delta_F^2\right)^{(7/8-\varepsilon)}\right) = \left\{u \in H^{7/2-4\varepsilon}(\Omega) : \left[\Delta u + (1-\mu)\mathcal{B}_1 u\right]\big|_{\partial\Omega} = 0\right\}$$

Ici $\varepsilon > 0$ *est assez petit. De plus, on a aussi*

$$D : H^S(\Gamma) \mapsto H^{S+1/2}(\Omega),\ \ s \geq 0,$$

$$G_1 : H^s(\Gamma) \mapsto H^{s+5/2}(\Omega),\ \ s \geq 0,$$

$$G_2 : H^s(\Gamma) \mapsto H^{s+7/2}(\Omega),\ \ s \geq 0, \tag{2.3.15}$$

On note aussi que l'on a

$$\int_\Omega \Delta^2 \omega G_1 g dx = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial\nu}\omega g d\Gamma, \quad \omega \in \mathcal{D}\left(\Delta_F^2\right), \quad g \in L^2\left(\Gamma\right), \tag{2.3.16}$$

et

$$\int_\Omega \Delta^2 \omega G_2 g dx = -\int_\Gamma \omega g d\Gamma, \quad \omega \in \mathcal{D}\left(\Delta_F^2\right), \quad g \in L^2\left(\Gamma\right), \tag{2.3.17}$$

En effet, la formule de Green (2.3.3) peut être écrite comme

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \Delta^2 \omega v dx - \int_\Omega \omega \Delta^2 v dx = \\ &-\int_\Gamma \left[\left(\frac{\partial\left(\Delta\omega\right)}{\partial\nu} + (1-\mu)\frac{\partial\mathcal{B}_2 w}{\partial\tau}\right) v - \left(\Delta\omega + (1-\mu)\mathcal{B}_1\omega\right)\frac{\partial v}{\partial\nu}\right] d\Gamma \\ &-\int_\Gamma \left[\left(\frac{\partial\left(\Delta v\right)}{\partial\nu} + (1-\mu)\frac{\partial\mathcal{B}_2 v}{\partial\tau}\right) \omega - \left(\Delta v + (1-\mu)\mathcal{B}_1 v\right)\frac{\partial \omega}{\partial\nu}\right] d\Gamma \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Par conséquent, en substituant $\omega \in \mathcal{D}(\Delta_F^2)$ *et* $v = G_i g$ *dans (2.3.18) et en tenant compte des conditions aux limites pour* ω *et* v *, alors on obtient (2.3.16) et (2.3.17).*

2.4 Les équations d'évolution

Dans cette partie, on introduit un rappel sur la théorie des équations d'évolution abstraites qui servent comme un prototype pour les équations d'évolutions de Von Karman. Une attention speciale sera faite concernant l'existence et l'unicité des solutions des équations d'évolution non linéaires. Les méthodes utilisées sont basées sur la théorie des opérateurs monotones et leur adaptation aux problèmes non monotones. On énonce aussi des résultats pour les équations des plaques qui seront utilisées dans les chapitres suivants.

2.4.1 Les opérateurs accrétifs dans les espaces de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert. On considère les opérateurs (non linéaires) A dans H définis sur un sous ensemble $\mathcal{D}(A)$ de H avec l'image $R(A) = \{Ax : x \in \mathcal{D}(A)\} \subseteq H$.

On commence par donner des définitions.

Définition 2.4.1 *un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \mapsto H$ est appelé $accrétif$ si on a*

$$(A(x_1 - x_2), x_1 - x_2)_H \geq 0 \quad pour\ tout \quad x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A).$$

Un opérateur $accrétif$ A est dit maximal accrétif $(m - accrétif)$ si la relation

$$(Av - u^*, v - u)_H \geq 0$$

pour $u,\ u^* \in H$ et pour tout $v \in \mathcal{D}(A)$ implique que $u \in \mathcal{D}(A)$ et $u^* = Au$.

On note que l'opérateur accrétif est un cas particulier d'un opérateur monotone (voir, Définition 2.2.1).

Une caractérisation des opérateurs $m - accrétifs$ est donnée par le résultat suivant; voir [31] ou [36, Chapitre IV].

Théorème 2.4.1 *Un opérateur $accrétif$ $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \mapsto H$ sur l'espace de Hilbert H est $m - accrétif$ si et seulement si $R(\lambda I + A) = H$ pour tout $\lambda > 0$.*

Ici $R(B)$ représente l'image de l'opérateur B.

Le résultat de perturbation suivant est fréquemment utilisé dans le contexte des EDPs (voir, [36, Section IV.2]).

Proposition 2.4.1 . *Soit $A : D(A) \subseteq H \mapsto H$ un opérateur $m - accrétif$ sur l'espace de Hilbert H. Alors*

- *Si $B : H \mapsto H$ est $accrétif$ et Lipschitzien; c'est à dire,*

$$\|B(u_1) - B(u_2)\| \leq L \|u_1 - u_2\|, u_1, u_2 \in H,$$

alors $A + B$ est $m - accrétif$.

- *Si $B : H \mapsto H$ est Lipschitzien, alors pour tout $\omega \geq L$ l'opérateur $A + B + \omega I$ est $m - accrétif$.*

Le résultat suivant présente quelques propriétés de continuité des opérateurs $m-accrétifs$ dans le sens de la Proposition 2.2.2.

Proposition 2.4.2 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \mapsto H$ un opérateur $m - accrétif$ sur l'espace de Hilbert H. Soit $\{v_n\}$ une suite dans $\mathcal{D}(A)$. Supposons qu'il existe des éléments v et f de H tels que $v_n \to v$ et $Av_n \to f$ faiblement dans H et*

$$(Av_n - Av_m, v_n - v_m)_H \to 0 \text{ quand } n, m \to \infty.$$

Alors, $v \in \mathcal{D}(A), f = Av$ et $\lim_{n\to\infty}(Av_n, v_n)_H = (Av, v)_H$.

Preuve. On applique la seconde partie de Proposition 2.2.2 avec $V = V' = H$. ■

Définition 2.4.2 *On dit qu'un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \mapsto H$ est coercif si*

$$\lim_{\|u\|_H\to\infty} \frac{(Au, u)_H}{\|u\|_H} \to \infty, \quad u \in \mathcal{D}(A).$$

On a la proposition suivante (voir, [36, Section IV.2, p. 170]).

Proposition 2.4.3 *Soit A un opérateur $m - accrétif$. Si $\lim_{\|u\|_H\to\infty} \|A(u)\|_H = \infty$, alors A est surjectif; c'est à dire $R(A) = H$. Si A est coercif alors $R(A) = H$.*

Exemple 2.4.1 *Tout opérateur auto-adjoint non négatif sur un espace de Hilbert est un opérateur $m - accrétif$.*

2.4.2 Equations différentielles abstraites

Equation différentielle abstraite

Soit A un opérateur $m - accrétif$ sur un espace de Hilbert H. On considère l'équation différentielle abstraite suivante:

$$\frac{du}{dt} + Au = f; \quad 0 < t < T, \quad u|_{t=0} = u_0 \in H, \tag{2.4.1}$$

où $0 < T \leq \infty$.

Solution forte

Définition 2.4.3 ***Une solution forte*** *de (2.4.1) est une fonction continue u de $[0,T)$ dans H qui est absolument continue sur chaque sous intervalle $[a,b], 0 < a < b < T$,*

donc u est différentiable presque partout avec $\frac{du}{dt} \in L^1(a,b;H)$, et pour *p.p.* $t > 0$ on a $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ et vérifie (2.4.1).

Un résultat fondamental qui affirme l'existence de solutions fortes pour les opérateurs $m-accrétifs$ est due à Kato (voir [36, p. 180]).

Théorème 2.4.2 *Soit A un opérateur $m-accrétif$ sur un espace de Hilbert H. Supposons que $u_0 \in D(A)$ et $f : [0,T] \mapsto H$ est absolument continue. Alors, il existe une unique solution forte de (2.4.1). De plus, u est Lipschitzienne continue de $[0,T]$ dans H et differentiable dans H pour $t \geq 0$. De plus $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour tout $t \geq 0$ et $u' \in L^\infty(0,T;H)$.*

On note que dans certains cas, les solutions fortes peuvent être construites par la méthode de Galerkin .

Solution généralisée

Définition 2.4.4 ***Une solution généralisée*** *de (2.4.1) sur un intervalle (fermé) $[0,T]$ est une fonction continue $u \in C(0,T;H)$ telle que $u(0) = u_0$ et pour laquelle il existe une suite de solutions fortes u_n définies sur $[0,T]$ pour le problème*

$$\begin{aligned} \frac{du_n}{dt} + Au_n &= f_n; \quad n = 1,2,.. \\ u_n(0) &= u_{n_0}. \end{aligned}$$

avec $f_n \to f$ dans $L^1(0,T;H)$ et $u_n \to u$ dans $C(0,T;H)$. Une fonction $u(t)$ de $C([0,T);H)$ est une solution généralisée du problème (2.4.1) sur un semi-intervalle $[0,T)$, ssi u est une solution généralisée de (2.4.1) sur chaque intervalle fermé $[0,T']$ avec $T' < T$.

Le résultat d'existence des solutions généralisées est donné ci-dessous [46, p. 183].

Théorème 2.4.3 *Soit A un opérateur $m-accrétif$ sur l'espace de Hilbert H, $f \in L^1(0,T;H)$ et $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, où $\overline{\mathcal{D}(A)}$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(A)$ dans H. Alors, il existe une unique solution généralisée de (2.4.1). De plus, toutes solutions généralisée $u_1(t)$ et $u_2(t)$ avec données*

$\{u_{10}, f_1\}$ et $\{u_{20}, f_2\}$ vérifiant l'estimation de stabilité suivante avec $0 \leq s < t \leq T$

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_H^2 \leq \|u_1(s) - u_2(s)\|_H^2 + 2\int_0^T (f_1(z) - f_2(z), u_1(z) - u_2(z))_H dz \qquad (2.4.2)$$

et

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_H^2 \leq \|u_1(s) - u_2(s)\|_H^2 + 2\int_0^T \|f_1(z) - f_2(z)\|_H^2 \, dz \qquad (2.4.3)$$

Equation différentielle abstraite perturbée

On rappelle aussi dans cette section plusieurs résultats concernant les problèmes perturbés.

Soit $B : \overline{\mathcal{D}(A)} \mapsto H$ un opérateur telle que

$$\|B(u) - B(v)\|_H \leq L \|u - v\|_H \, ; \; u, v \in \overline{\mathcal{D}(A)}. \qquad (2.4.4)$$

On considère l'équation perturbée

$$\frac{du}{dt} + (A + B)\, u = f; \; 0 < t < T, \quad u|_{t=0} = u_0. \qquad (2.4.5)$$

Théorème 2.4.4 *On suppose que A est un opérateur $m-accr\acute{e}tif$ et B vérifie (2.4.4).*

- ***Solutions fortes**: pour chaque $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ et f absolument continue de $[0, T]$ dans H, il existe une unique solution forte $u(t)$ du problème (2.4.5). La fonction $t \mapsto u(t)$ est lipschitzienne et continue de $[0, T]$ dans H et différentiable dans H avec $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour tout $t \geq 0$. De plus , on a*

$$u_t \equiv \frac{du}{dt} \in L^\infty(0, T; H), \;\; A(u) \in L^\infty(0, T; H) \qquad (2.4.6)$$

et les fonctions $t \mapsto u_t(t)$ et $t \mapsto A(u(t))$ sont faiblement et fortement continues comme applications de $[0, T]$ dans H.

- ***Solutions généralisées:** pour chaque $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ et $f \in L^1(0, T; H)$ il existe une unique solution généralisée pour le problème (2.4.5) sur $[0, T]$.*

De plus, toutes solutions généralisées $u_1(t)$ et $u_2(t)$ du problème (2.4.5) avec données $\{u_{10}, f_1\}$ et $\{u_{20}, f_2\}$ vérifient l'estimation de stabilité suivante avec $0 \leq s < t \leq T$

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_H^2 \leq e^{2L(t-s)} \|u_1(s) - u_2(s)\|_H^2 + 2\int_0^T e^{2L(t-z)}(f_1(z) - f_2(z), u_1(z) - u_2(z))_H dz \qquad (2.4.7)$$

et

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_H^2 \leq e^{L(t-s)} \|u_1(s) - u_2(s)\|_H^2 + 2\int_0^T e^{L(t-z)} \|f_1(z) - f_2(z)\|_H^2 \, dz \qquad (2.4.8)$$

Pour la démonstration des estimations (2.4.7) et (2.4.8) (voir [36, p. 183]).

Les propriétés de régularités des solutions fortes découlent de l'argument donné dans [36, p.175].

Dans ce qui suit, on donne une généralisation du résultat aux perturbations localement Lipschitziennes B. Ce résultat est un élément principal dans la démonstration de l'existence globale pour les EDPs semi linéaires avec des estimations à priori semblables à celles obtenues par les méthodes d'énergie.

Définition 2.4.5 *Un opérateur localement Lipschitzien $B : \mathcal{D}(A) \mapsto H$ est une fonction telle que pour tout $K > 0$, il existe une constante positive $L(K)$ telle que*

$$\|B(u) - B(v)\|_H \leq L(K) \|u - v\|_H \qquad (2.4.9)$$

pour tout $u, v \in \mathcal{D}(A)$ telle que $\|u\|_H \leq K$ et $\|v\|_H \leq K$.

Théorème 2.4.5 *Soit $A + \lambda I$ un opérateur $m - accrétif$ pour $\lambda \geq 0$. On suppose que B vérifie (2.4.9).*

- ***Solutions locales fortes:*** *Pour chaque élément $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ et toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \to H$ qui est absolument continue sur tout intervalle fini $[0, T]$, il existe $t_{max} \leq \infty$ tel qu'il existe une unique solution forte $u(t)$ du problème (2.4.5) définie sur $[0, tmax)$. La fonction $t \mapsto u(t)$ est Lipschitzienne continue et différentiable avec $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour tout $t \in [0, t_{max})$. De plus, la relation (2.4.6) est vérifiée pour tout $T < t_{max}$ et les fonctions $t \mapsto u_t(t)$ et $t \mapsto A(u(t))$ sont fortement et faiblement continues comme applications de $[0, t_{max})$ dans H.*
- ***Solutions locales généralisées:*** *Pour chaque élément u_0 de la l'adhérence de $\overline{\mathcal{D}(A)}$ de $\mathcal{D}(A)$ dans H et pour chaque fonction $f \in L^1_{loc}([0, +\infty); H)$, il existe une unique solution généralisée pour le problème (2.4.5) définie sur $[0, t_{max})$.*
- *Dans les deux cas, on a $\lim\limits_{t \to t_{max}} \|u(t)\|_H = \infty$, tant que $t_{max} < \infty$.*

• ***Solutions globales:*** *Soit $u(t)$ une solution forte (ou généralisée) avec donnée $\{u_0, f\}$. Supposons qu'il existe $T > 0$ et $C_T(u_0, f)$ tels que*

$$\sup_{[0,T^*)} \|u(t)\|_H \leq C_T(u_0, f) \tag{2.4.10}$$

pour tout intervalle $[0, T^*) \subset [0, T]$ de l'existence de la solution $u(t)$. Alors la solution $u(t)$ existe sur $[0, T]$. De plus,, si pour tout $T > 0$ il existe $C_T(u_0, f)$ telle que (2.4.10) est vérifiée, alors la solution $u(t)$ peut être prolongée sur $[0, +\infty)$; c'est à dire, $t_{max} = \infty$.

2.5 Modèle des plaques Linéaires

On donne dans cette section quelques resultats concernant l'équation des plaques linéaires avec différentes conditions aux limites. Certaines estimations seront utilisées dans la suite pour le modèle des plaques non linéaires.

2.5.1 Conditions aux limites Homogènes

Les conditions aux limites considérées sont de type: libres-encastrement (clamped) (Dirichlet).

Conditions aux limites libres–encastrement (clamped)

On considère

$$\begin{cases} \omega_{tt} - \alpha\Delta\omega_{tt} + \Delta^2\omega = f(x,t) \ \text{ dans } \ Q \equiv \Omega \times (0,T), \\ \omega = \nabla\omega = 0 \ \text{ sur } \ \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T), \\ \Delta\omega + (1-\mu)\mathcal{B}_1\omega = 0 \ \text{ sur } \ \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T), \\ \qquad \frac{\partial\Delta\omega}{\partial\nu} + (1-\mu)\frac{\partial\mathcal{B}_2\omega}{\partial\tau} - \alpha\frac{\partial\omega_{tt}}{\partial\nu} = 0 \ \text{ sur } \ \Sigma_1, \\ \omega|_{t=0} = \omega_0(x), \quad \omega_t|_{t=0} = \omega_1(x), \end{cases} \tag{2.5.1}$$

où $\mathcal{B}_1$ and $\mathcal{B}_2$ sont définis par les relations (1.1.4)-(1.1.5), $0 < \mu < 1$, et Γ_0, Γ_1 sont deux parties disjointes du bord Γ telles que

$$\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma.$$

Pour reformuler le problème (2.5.1) dans la forme abstraite (2.4.1), on prend en compte l'observation formelle suivante.

Multiplions l'équation dans (2.5.1) par une fonction régulière φ telle que $\varphi = \nabla\varphi = 0$ sur Γ_0 et en intégrant sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega \omega_{tt}\varphi dx - \alpha \int_\Omega \Delta\omega_{tt}\varphi dx + \int_\Omega \Delta^2\omega\varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx$$

L'intégration par parties, la formule (2.3.3), et les conditions aux limites dans (2.5.1) nous permettent d'obtenir la relation suivante

$$\int_\Omega \omega_{tt}\varphi dx + \alpha \int_\Omega \nabla\omega_{tt}\nabla\varphi dx + a_0(\omega,\varphi) = \int_\Omega f\varphi dx \tag{2.5.2}$$

pour tout $\varphi \in H^2_{\Gamma_0}(\Omega)$, où $H^2_{\Gamma_0}(\Omega)$ est défini par

$$H^2_{\Gamma_0}(\Omega) = \big\{u \in H^2(\Omega), \quad u = 0, \quad \nabla u = 0 \;\text{ sur } \Gamma_0\big\}$$

et

$$a_0(\omega, v) = \int_\Omega \Delta\omega\Delta v dx + (1-\mu)\int_\Omega (\omega_{x_1x_1}v_{x_1x_1} + 2\omega_{x_1x_2}v_{x_1x_2} + \omega_{x_2x_2}v_{x_2x_2})dx \tag{2.5.3}$$

La forme $a_0(\omega, v)$ considérée sur $H^2_{\Gamma_0}(\Omega)$ est engendrée par l'opérateur $\mathcal{A}$ donné dans $L^2(\Omega)$ par les relations

$$\mathcal{A}\omega = \Delta^2\omega,\ \omega \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{\omega \in H^4\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} [\Delta\omega + (1-\mu)\mathcal{B}_1\omega]\big|_\Gamma = 0, \\ [\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta\omega + (1-\mu)\frac{\partial \mathcal{B}_2\omega}{\partial\tau}]\big|_\Gamma = 0, \\ \omega = \nabla\omega = 0 \;\text{ sur }\; \Gamma_0 \end{array}\right. \tag{2.5.4}$$

Donc

$$a_0(\omega, v) = (\mathcal{A}^{1/2}\omega, \mathcal{A}^{1/2}v)_\Omega = (\mathcal{A}\omega, v)_{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}),[\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}]'}$$

avec $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}) = H^2_{\Gamma_0}(\Omega)$. De la même manière,

$$\int_\Omega \omega_{tt}\varphi dx + \alpha\int_\Omega \nabla\omega_{tt}\nabla\varphi dx = (M^{1/2}\omega, M^{1/2}\varphi)_\Omega = (M\omega_{tt},\varphi)_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega),[H^1_{\Gamma_0}(\Omega)]'} + (\mathcal{A}\omega,\varphi)_{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}),[\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}]'},$$

où $M = I - \alpha\Delta_{N,D}$ et $\Delta_{N,D}$ est l'opérateur de Laplace muni des conditions aux limites de Neumann sur Γ_1 et de Dirichlet sur Γ_0. Donc (2.5.2) peut être écrite sous la forme

$$(M\omega_{tt},\varphi)_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega),[H^1_{\Gamma_0}(\Omega)]'} + (\mathcal{A}\omega,\varphi)_{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}),[\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}]'} = \int_\Omega f\varphi dx,$$

où

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \left\{\omega \in H^1(\Omega),\ \omega = 0 \text{ on } \Gamma_0\right\}$$

et le problème (2.5.1) peut être présenté sous la forme (2.4.1) avec $\mathcal{H} \equiv L^2(\Omega)$, $V_\alpha \equiv H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ pour $\alpha > 0$, $D \equiv 0$, et $\mathcal{A}$ et M décrit avant.

L'application du Théorème 2.4.3 donne la proposition suivante.

Proposition 2.5.1 *Soit $\alpha > 0$. Alors, on a le résultat suivant.*

- ***Solutions fortes:*** *pour $f \in W^{1,1}(0,T;[H^1_{\Gamma_0}(\Omega)]')$ et $(\omega_0;\omega_1) \in W \times H^2_{\Gamma_0}(\Omega)$, où*

$$W = \left\{\omega \in H^2_{\Gamma_0}(\Omega) : \mathcal{A}\omega \in [H^1_{\Gamma_0}(\Omega)]'\right\}, \tag{2.5.5}$$

il existe une unique solution forte sur l'intervalle $[0,T]$ telle que

$$\begin{aligned} (\omega;\omega_t) &\in C(0,T;H^2_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1_{\Gamma_0}(\Omega)), \\ \omega_{tt} &\in C(0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \quad et \quad \mathcal{A}\omega(t) \in C(0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)'). \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

- ***Solutions généralisées (faibles):*** *Soit $f \in L^1(0,T;\left[H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\right]')$ et $\omega_0 \in H^2_{\Gamma_0}(\Omega)$, $\omega_1 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. Alors, il existe une unique solution généralisée qui vérifie (2.5.6). De plus, chaque solution généralisée est faible et vice versa.*

Les deux solutions, forte et généralisée, vérifient la relation de l'énergie suivante

$$E_0^{(\alpha)}(\omega(t),\omega_t(t)) = E_0^{(\alpha)}(\omega_0,\omega_1) + \int_0^t \int_\Omega f(\tau,x)\omega_t(\tau,x)dxd\tau. \tag{2.5.7}$$

Ici

$$E_0^{(\alpha)}(\omega_0,\omega_1) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\omega_1(x)|^2 + \alpha|\nabla\omega_1(x)|^2\right)dx + \frac{1}{2}a(\omega_0,\omega_0),$$

où $a(\omega,v)$ est donnée par (2.5.3).

Remarque 2.5.1 *Puisque $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/4}) = \mathcal{D}(M^{1/2}) = V = H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, on peut voir que $W = \mathcal{D}(\mathcal{A}^{3/4})$, où W est donné par (2.5.5). Donc, la théorie de régularité elliptique (voir ,[44, Proposition 3A.1, p.283] et les références dedans) implique*

$$W = \left\{u \in (H^3 \cap H^2_{\Gamma_0}(\Omega)),\quad \Delta\omega + (1-\mu)\mathcal{B}_1\omega = 0 \ sur\ \Gamma_1\right\} \subset H^3(\Omega).$$

Donc, une solution forte du problème (2.5.1) avec $\alpha > 0$ possède la propriété

$$\omega \in C(0,T;\ H^3(\Omega)) \cap C^1(0,T;H^2(\Omega))$$

et vérifie les conditions aux limites $\omega = 0$, $\nabla\omega = 0$ *sur* Γ_0 *et* $\Delta\omega + (1-\mu)\mathcal{B}_1\omega = 0$ *sur* Γ_1.

Remarque 2.5.2 *Comme avant (cf. Théorème 2.4.3 et Propositions 2.5.1) on peut obtenir les assertions concernant la régularité des solutions faibles. En particulier, si*

$$f \in W^{2,1}(0,T;(H^2_{\Gamma_0}(\Omega)') \cap C(0,T;L^2(\Omega))$$

et les conditions de compatibilité

$$\omega_0, \quad \omega_1 \in W, \; u^{(2)}(0) = M^{-1}(-\mathcal{A}\omega_0 + f(0)) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}) = H^2_{\Gamma_0}(\Omega),$$

$$\omega^{(3)}(0) = M^{-1}(-\mathcal{A}\omega_1 + f'(0)) \in V = H^1_{\Gamma_0}(\Omega),$$

sont vérifiées, alors une solution faible $\omega(t)$ *du problème (2.5.1) avec* $\alpha > 0$ *possède la propriété*

$$\omega \in C^k(0,T;H^{4-k}(\Omega)), \; k = 0,1,2,3. \tag{2.5.8}$$

En effet, d'après le théorème 2.4.3, on a (2.5.8) qui est vérifiée pour $k = 1,2,3$. *Utilisons la relation (2.5.2) et intégrons par parties, on obtient*

$$(\mathcal{A}\omega,\varphi)_{H^2_{\Gamma_0}(\Omega),\left[H^2_{\Gamma_0}(\Omega)\right]'} + \alpha\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\omega_{tt}}{\partial\nu}\varphi d\Gamma = \int_\Omega (f - \omega_{tt} + \alpha\Delta\omega_{tt})\varphi dx$$

pour tout $\varphi \in H^2_{\Gamma_0}(\Omega)$. *Soit* G_2 *un opérateur de Green donnée par* $v \equiv G_2 g$, *où* v *est solution du problème*

$$\begin{aligned} \Delta^2 v &= 0 \; dans\; \Omega, \quad v = \frac{\partial v}{\partial\nu} = 0 \; sur\; \Gamma_0, \\ \Delta v + (1-\mu)\mathcal{B}_1 v &= 0, \; et\; \frac{\partial}{\partial\nu}\Delta v + (1-\mu)\mathcal{B}_2 v = g \quad sur \quad \Gamma_1, \end{aligned}$$

Alors, en utilisant (2.3.3), on obtien pour tout $\varphi \in H^2_{\Gamma_0}(\Omega)$,

$$\left(\mathcal{A}G_2\frac{\partial\omega_{tt}}{\partial\nu},\varphi\right)_{H^2_{\Gamma_0}(\Omega),\left[H^2_{\Gamma_0}(\Omega)\right]'} = a\left(G_2\frac{\partial\omega_{tt}}{\partial\nu},\varphi\right) = -\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\omega_{tt}}{\partial\nu}\varphi d\Gamma$$

Donc, on obtient

$$\left(\mathcal{A}\left(\omega - \alpha G_2\frac{\partial\omega_{tt}}{\partial\nu}\right),\varphi\right)_{H^2_{\Gamma_0}(\Omega),\left[H^2_{\Gamma_0}(\Omega)\right]'} = \int_\Omega (f - \omega_{tt} + \alpha\Delta\omega_{tt})\varphi dx$$

pour tout $\varphi \in H^2_{\Gamma_0}(\Omega)$. Ceci implique

$$\mathcal{A}\left(\omega - \alpha G_2 \frac{\partial \omega_{tt}}{\partial \nu}\right) \in C(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.5.9}$$

*Par conséquent, d'après la théorie de régularité elliptique, on a $\omega - \alpha G_2(\frac{\partial \omega_{tt}}{\partial \nu})$ appartient à $C(0,T;H^4(\Omega))$. La relation (2.5.8) pour $k = 2$ et le théorème des traces impliquent $\frac{\partial \omega_{tt}}{\partial \nu} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Donc, puisque $G_2 : H^{1/2}(\Gamma_1) \mapsto H^4(\Omega)$ est un opérateur borné (voir (**??**) dans le cas où $\Gamma_0 = \varnothing$), il s'ensuit que $\alpha G_2(\frac{\partial \omega_{tt}}{\partial \nu}) \in C(0,T;H^4(\Omega))$. Par conséquent $\omega \in C(0,T;H^4(\Omega))$. Donc on obtient (2.5.8).*

On note aussi que la relation (2.5.9) et la structure de opérateur $\mathcal{A}$ impliquent que la solution $\omega(t)$ vérifie les conditions aux limites dans (2.5.1).

Dans le cas $\alpha = 0$, on a l'assertion suivante.

Proposition 2.5.2 *Soit $\alpha = 0$. Alors, on a le résultat suivant.*

- ***Solutions fortes**: pour chaque $f \in W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$ et $(\omega_0,\omega_1) \in W \times H^2_{\Gamma_0}(\Omega)$, où*

$$W = \left\{\omega \in H^2_{\Gamma_0}(\Omega) : \mathcal{A}\omega \in L^2(\Omega)\right\} \equiv \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

avec $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ donnée par (2.5.4), il existe une unique solution forte sur l'intervalle $[0,T]$ telle que

$$\begin{aligned} (\omega;\omega_t) &\in C(0,T;H^2_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^2(\Omega)), \qquad (2.5.10)\\ \omega_{tt} &\in C(0,T;L^2(\Omega)) \quad et \quad \mathcal{A}\omega(t) \in C(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

- ***Solutions généralisées (faibles)**: pour chaque $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ et $\omega_0 \in H^2_{\Gamma_0}(\Omega)$, $\omega_1 \in L^2(\Omega)$ il existe une unique solution généralisée qui vérifie (2.5.10).*

De plus chaque solution généralisée est faible et vice versa.

Les solutions fortes et généralisées vérifient la relation de l'énergie (2.5.7) avec $\alpha = 0$.

Remarque 2.5.3 *Dans le cas $\alpha = 0$, on a $W \subset H^4(\Omega)$.*

Chapitre 3

Existence, unicité et régularité des solutions du système thermoélastique

Dans ce chapitre, on étudie l'existence, l'unicité et la régulatité des solutions pour le modèle des plaques themoélastiques (1.1.1)-(1.1.6). Le modèle des équations aux dérivées partielles est un couplage d'une équation du second ordre (plaques) et d'une équation du premier ordre (chaleur). C'est pour cette raison, que le traitement des modèles thermoélastiques ne se fait pas de la même manière que pour les équations abstraites du second ordre. Dans ce chapitre on entreprend une étude des solutions associées aux équations d'évolution de von Karman avec une dissipation thermique. On considère les modèles avec et sans termes d'inertie rotationnelle. C'est à dire

Cas $\alpha = 0$: **absence d'inertie rotationnelle**

Cas $\alpha > 0$: **présence d'inertie rotationnelle**

3.1 Le modèle

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^2$ de frontière $\partial\Omega = \Gamma$, Δ désigne l'opérateur de Laplace, et F est une fonction avec des régularités qui seront spécifiées plus tard.

Comme avant, on pose

$$[\omega, v] = \partial^2_{x_1}\omega\cdot\partial^2_{x_2}v + \partial^2_{x_2}\omega\cdot\partial^2_{x_1}v - 2\cdot\partial^2_{x_1x_2}\omega\cdot\partial^2_{x_1x_2}v, \tag{3.1.1}$$

dont l'expression définit le crochet de Von Karman.

Dans ce qui suit, on décrit le modèle sous considération qui est une plaque thermoélastique de Von Karman avec des forces externes et internes. Les équations correspondantes (voir, e.g., [14] et les références de dans) ont la forme suivante

$$\begin{cases} \omega_{tt} - \alpha\Delta\omega_{tt} + \gamma\Delta\theta + \Delta^2\omega + F(\omega) = 0, \qquad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \theta_t - \Delta\theta - \gamma\Delta\omega_t = 0, \qquad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{3.1.2}$$

La température θ vérifie une condition aux limites de type Robin de la forme:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\nu} + \lambda\theta = 0 \text{ sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+. \tag{3.1.3}$$

Les conditions aux limites imposées sur le déplacement ω sont de type libres:

$$\Delta\omega + (1-\mu)\mathcal{B}_1\omega + \gamma\theta = 0 \text{ sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+,$$
$$\frac{\partial(\Delta\omega)}{\partial\nu} + (1-\mu)\frac{\partial\mathcal{B}_2\omega}{\partial\tau} - \eta\omega - \alpha\frac{\partial\omega_{tt}}{\partial\nu} + \gamma\frac{\partial\theta}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+,$$

Les paramètres μ est positif et α est non négatif. le cas $\alpha > 0$ correspond à la prise en compte de l'inertie rotationnelle des filaments de la plaque.

3.2 La formulation abstraite

Dans la suite, on suppose que le domaine Ω est soit régulier , soit rectangulaire.

On définit les opérateurs suivants:

- $\mathcal{A} : L^2(\Omega) \supset D(\mathcal{A}) \longrightarrow L^2(\Omega)$, où $\mathcal{A} = \Delta^2$ et son domaine :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \omega \in H^4\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} [\Delta\omega + (1-\mu)\mathcal{B}_1\omega]|_\Gamma = 0, \\ [\frac{\partial\Delta\omega}{\partial\nu} + (1-\mu)\dfrac{\partial\mathcal{B}_2\omega}{\partial\tau}]\Big|_\Gamma = 0, \end{array} \right. \tag{3.2.1}$$

$\mathcal{A}$ est défini positif, auto-adjoint, de plus, en utilisant la formule de Green (voir [14]), on a

$$\left\langle \mathcal{A}\omega, \widetilde{\omega} \right\rangle_{[\mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})]' \times \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})} = \left\langle \mathcal{A}^{1/2}\omega, \mathcal{A}^{1/2}\widetilde{\omega} \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \widetilde{a}(\omega, \widetilde{\omega})_{L^2(\Omega)}, \ \forall \omega, \ \widetilde{\omega} \in \mathcal{D}\left(\mathcal{A}^{1/2}\right), \tag{3.2.2}$$

où $\widetilde{a}(\omega,\overline{\omega})$ est la forme bilinéaire définie par (voir [14])

$$\widetilde{a}(\omega,\varpi)=\int_{\Omega}\left[\omega_{xx}\varpi_{xx}+\omega_{yy}\varpi_{yy}+\mu(\omega_{xx}\varpi_{yy}+\omega_{yy}\varpi_{xx})+2(1-\mu)\omega_{xy}\varpi_{xy}\right]d\Omega+\eta\int_{\Gamma}\omega\varpi d\Gamma. \tag{3.2.3}$$

et de plus, on a

$$\|\,\omega\,\|^2_{\mathcal{D}\left(\mathcal{A}^{1/2}\right)}=\|\,\mathcal{A}^{1/2}\omega\,\|^2_{L^2(\Omega)}=\widetilde{a}(\omega,\omega) \tag{3.2.4}$$

• A_D :$L^2(\Omega)\supset D(A_D)\longrightarrow L^2(\Omega)$, où $A_D=-\Delta$, avec les conditions aux bord de Dirichlet, c'est à dire

$$\mathcal{D}(A_D)=H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega) \tag{3.2.5}$$

A_D est aussi défini positif, auto adjoint , est

$$\mathcal{D}(A_D^{1/2})=H^1_0(\Omega) \tag{3.2.6}$$

• A_R : $L^2(\Omega)\supset\mathcal{D}(A_R)\longrightarrow L^2(\Omega)$ indiquera l'opérateur elleptique de seconde ordre suivant:

$$A_R=-\Delta, \tag{3.2.7}$$

$$\mathcal{D}(A_R)=\left\{\theta\in H^2(\Omega):\ \frac{\partial\theta}{\partial\upsilon}+\lambda\theta=0\right\}, \tag{3.2.8}$$

A_R est définie positif , auto adjoint, et on a

$$(\nabla\theta,\nabla\widetilde{\theta})_{L^2(\Omega)}+\lambda(\theta,\widetilde{\theta})_{L^2(\Gamma)}=(A_R^{1/2}\theta,A_R^{1/2}\widetilde{\theta})_{L^2(\Omega)}. \tag{3.2.9}$$

D'autre part, si $\lambda>0$, on a l'equivalence topologique

$$(\theta,\widetilde{\theta})_{H^1(\Omega)}\cong(A_R^{1/2}\theta,A_R^{1/2}\widetilde{\theta})_{L^2(\Omega)} \tag{3.2.10}$$

• On désigne par (γ_0,γ_1) les applications traces, pour $f\in C^\infty(\overline{\Omega})$, par ,

$$\begin{aligned}\gamma_0 f &= f|_\Gamma\\ \gamma_1 f &= \left.\frac{\partial f}{\partial\nu}\right|_\Gamma\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

3.2.1 Opérateurs de Green

avec les opérateurs $\mathcal{A}$, G_i définis avant , on peut démontrer, d'après la formule de *Green* (2.3.3) que $\forall\ \omega \in \mathcal{D}\left(\mathcal{A}^{1/2}\right)$, les adjoints $G_i^*\mathcal{A} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{D}\left(\mathcal{A}^{1/2}\right); L^2(\Gamma)\right)$, $i = 1, 2$, vérifient respectivement :

$$\begin{aligned} G_1^*\mathcal{A}\omega &= \left.\frac{\partial\omega}{\partial\upsilon}\right|_\Gamma \text{sur } \Gamma \times (0,\infty), \\ G_2^*\mathcal{A}\omega &= -\left.\omega\right|_\Gamma \text{sur } \Gamma \times (0,\infty). \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

3.2.2 Opérateur de masse M_α

- On définit l'opérateur de mase M_α par :

$$M_\alpha = I + \alpha A_D. \tag{3.2.13}$$

et

(i) Dans le Cas : $\alpha > 0$, on définit l'espace $H^1_{0,\alpha}(\Omega)$ équivalent à $H^1_0(\Omega)$ avec son produit scalaire

$$(u_1, u_2)_{H^1_{\Gamma,\alpha}(\Omega)} \equiv (u_1, u_2)_{L^2(\Omega)} + \alpha(\nabla u_1, \nabla u_2)_{L^2(\Omega)} \quad \forall u_1, u_2 \in H^1_0(\Omega). \tag{3.2.14}$$

et son dual noté par $H^{-1}_\alpha(\Omega)$. La (3.2.6) , donne alors

$$M_\alpha \in \mathcal{L}\left(H^1_{0,\alpha}(\Omega); H^{-1}_\alpha(\Omega)\right). \tag{3.2.15}$$

avec

$$\langle M_\alpha u_1, u_2\rangle_{H^{-1}_\alpha(\Omega)\times H^1_{0,\alpha}(\Omega)} = (u_1, u_2)_{H^1_{0,\alpha}(\Omega)} \tag{3.2.16}$$

De plus, la $H^1_{0,\alpha}(\Omega)-$ellipticité de M_α et *Lax Milgram* nous donnent que M_α est inversible, ie

$$M_\alpha^{-1} \in \mathcal{L}\left(H^{-1}_\alpha(\Omega); H^1_{0,\alpha}(\Omega)\right). \tag{3.2.17}$$

Finalement, M_α étant défini positif, auto-adjoint en tant qu'opérateur.

$$M_\alpha : L^2(\Omega) \supset \mathcal{D}(M_\alpha) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

(comme A_D l'est), la racine carrée $M_\alpha^{1/2}$et bien définie avec

$$\mathcal{D}(M_\alpha^{1/2}) = H^1_{0,\alpha}(\Omega)$$

Utilisant le théorème d'interpolation (voir [39] , p. 10), il s'ensuit alors d'après (3.2.16) que pour ω et $\widetilde{\omega} \in H^1_{0,\alpha}(\Omega)$,

$$\left\|M_\alpha^{1/2}\omega\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha \|\nabla\omega\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\omega\|^2_{H^1_{0,\alpha}(\Omega)} . \tag{3.2.18}$$

$$(M_\alpha^{1/2}\omega, M_\alpha^{1/2}\widetilde{\omega})_{L^2(\Omega)} = (\omega, \widetilde{\omega})_{H^1_{0,\alpha}(\Omega)}. \tag{3.2.19}$$

(ii) Dans le cas $\alpha = 0$, la (3.2.13) donne

$$M_0 = I \tag{3.2.20}$$

et on pose simplement les espaces

$$H^1_{0,0}(\Omega) \equiv L^2(\Omega). \tag{3.2.21}$$

• On définit aussi $L^2_\lambda(\Omega)$ définit par

$$L^2_\lambda(\Omega) = \begin{cases} L^2(\Omega) \text{ si } \lambda > 0 \\ L^2_0(\Omega) \text{ si } \lambda = 0. \end{cases} \tag{3.2.22}$$

où

$$L^2_0(\Omega) = \left\{\theta \in L^2(\Omega), \quad \int_\Omega \theta dx = 0\right\}.$$

On définit l'espace de hilbert $H_\alpha(\Omega)$ par

$$H_\alpha(\Omega) \equiv H^2(\Omega) \times H^1_\alpha(\Omega) \times L^2(\Omega), \tag{3.2.23}$$

où

$$H^1_\alpha(\Omega) = \begin{cases} H^1(\Omega) \text{ si } \alpha > 0 \\ L^2(\Omega) \text{ si } \alpha = 0 \end{cases}$$

avec le produit scalaire

$$\left(\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \widetilde{\omega}_1 \\ \widetilde{\omega}_2 \\ \widetilde{\theta} \end{bmatrix} \right)_{H_\alpha} = (\mathcal{A}^{1/2}\omega_1, \mathcal{A}^{1/2}\widetilde{\omega}_1)_{L^2(\Omega)} + (M_\alpha^{1/2}\omega_2, M_\alpha^{1/2}\widetilde{\omega}_2)_{L^2(\Omega)} + (\theta, \widetilde{\theta})_{L^2(\Omega)}. \tag{3.2.24}$$

Avec les définitions précédentes , on pose alors $A_\alpha : H_\alpha(\Omega) \supset D(A_\alpha) \longrightarrow H_\alpha(\Omega)$ comme étant

$$A_\alpha \equiv \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -M_\alpha^{-1}\mathcal{A} & 0 & \gamma M_\alpha^{-1}(A_R(I-D\gamma_0) - \mathcal{A}G_1\gamma_0 + \lambda \mathcal{A}G_2\gamma_0) \\ 0 & -\gamma A_D & -A_R(I-D\gamma_0) \end{pmatrix}. \tag{3.2.25}$$

avec

$$\mathcal{D}(A_\alpha) = \begin{cases} [\omega_1, \omega_2, \theta] \in \mathcal{D}\left(\mathcal{A}^{1/2}\right) \times \mathcal{D}\left(\mathcal{A}^{1/2}\right) \times \mathcal{D}(A_R) \cap L^2_\lambda(\Omega), \\ \text{telle que,} \\ \mathcal{A}\omega_1 + \gamma\mathcal{A}G_1\gamma_0\theta - \gamma\lambda\mathcal{A}G_2\gamma_0\theta \in H_\alpha^{-1}(\Omega) \text{ et } \gamma\Delta\omega_2 + \Delta\theta \in L^2_\lambda(\Omega) \end{cases}$$

D'après [38], on a les caractérisations suivantes

$$\mathcal{D}\left(\mathcal{A}^{1/2}\right) = H^{\,2}(\Omega), \tag{3.2.26}$$

$$\mathcal{D}\left(\mathcal{A}^{1/4}\right) = H^1(\Omega), \tag{3.2.27}$$

$$\mathcal{D}\left(\mathcal{A}^{3/4}\right) = \left\{\omega \in H^3(\Omega) \cap H^2(\Omega),\ \Delta\omega + (1-\mu)\mathcal{B}_1\omega = 0 \text{ sur } \Gamma\right\} \tag{3.2.28}$$

On note que $[A_D(I - D\gamma_0)\theta] = -\Delta\theta = A_R\theta$ pour $\theta \in \mathcal{D}(A_R)$.

Si on prend la donnée initiale $[\omega_0, \omega_1, \theta_0]$ dans H_α, alors le système couplé (3.1.2) s'écrit sous la forme.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \omega \\ \omega_t \\ \theta \end{bmatrix} = A_\alpha \begin{bmatrix} \omega \\ \omega_t \\ \theta \end{bmatrix} + F(\omega) \tag{3.2.29}$$

$$F(\omega) \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ M_\alpha^{-1}F(\omega) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Remarque 3.2.1 *Avec les notations précédentes, les équations (3.1.2), avec les conditions aux limites considérées, peuvent aussi être écrites dans la forme*

$$\begin{cases} M_\alpha\omega_{tt} - \gamma A_R\theta + \mathcal{A}\omega = F(\omega), \\ \kappa\theta_t + \eta A_R\theta + \gamma A_D\omega_t = 0. \end{cases} \tag{3.2.30}$$

(3.2.30) est muni des conditions initiales

$$\omega|_{t=0} = \omega_0,\ \ \omega_t|_{t=0} = \omega_1,\ \ \theta|_{t=0} = \theta_0. \tag{3.2.31}$$

3.3 Le problème linéaire

On commence par étudier les propriétés du système thermoélastique linéaire. Ceci conduit à considérer le système

$$\begin{cases} M_\alpha \omega_{tt} + \mathcal{A}\omega - \gamma A_R \theta = 0, \\ \theta_t + \gamma A_D \omega_t + A_R \theta = 0. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

On introduit l'espace approprié des phases (énergie) H_α qui dépend des paramètres $0 \leq \alpha \leq m_\alpha$ et pour une constante positive (fixée) m_α (ci dessous , on prend $m_\alpha = 1$ pour des raisons de simplicité)

Pour chaque $\alpha \in \Lambda \equiv \{0 \leq \alpha \leq 1\}$ on introduit l'espace de Hilbert

$$H_\alpha = \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}) \times V_\alpha \times \mathcal{H} \tag{3.3.2}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2}) &= H^2(\Omega), \\ V_\alpha &\equiv \mathcal{D}(M_\alpha^{1/2}) = \begin{cases} H^1(\Omega) \text{ pour } \alpha > 0 \\ L^2(\Omega) \text{ pour } \alpha = 0. \end{cases} \\ \mathcal{H} &= L^2(\Omega), \end{aligned}$$

L'espace H_α est muni de la norme

$$|U|_\alpha^2 = \left\| \mathcal{A}^{1/2}\omega_0 \right\|^2 + \left\| M_\alpha^{1/2}\omega_1 \right\|^2 + \|\theta\|^2, \ U = (\omega_0; \omega_1; \theta),$$

pour $\alpha \in \Lambda$.

Dans l'espace H_α, le problème (3.3.1) peut être vu comme une équation d'évolution abstraite du premier ordre sous la forme

$$\frac{dU(t)}{dt} = A_\alpha U(t), \tag{3.3.3}$$

où l'on a $U \equiv U(t) = (\omega(t); \omega_t(t); \theta(t))$ et l'opérateur $A_\alpha : \mathcal{D}(A_\alpha) \subset H_\alpha \mapsto H_\alpha$ donné par

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -M_\alpha^{-1}\mathcal{A} & 0 & \gamma M_\alpha^{-1} A_R \\ 0 & -\gamma A_D & -A_R \end{pmatrix} \tag{3.3.4}$$

3.4 Génération d'un semi groupe fortement continu

On a le résultat suivant concernant l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.3.1).

Proposition 3.4.1 *Pour chaque $\alpha \in \Lambda$, le système défini par (3.3.1) (ou par (3.3.3)) engendre un semi groupe linéaire de contractions $e^{-A_\alpha t}$ fortement continu dans H_α.*

De plus, le semi groupe $e^{-A_\alpha t}$ est exponentiellement stable,

$$|e^{-A_\alpha t}|_{\mathcal{L}(H_\alpha)} \leq Ce^{-\delta t}, t \geq 0,$$

où les constantes positives C et δ ne dépendent pas de $\alpha \in \Lambda$.

Preuve. Il est suffisant de montrer que l'opérateur A_α et son adjoint A_α^* sont tous les deux accrétifs (voir [48, Corollary 4.4, p. 15]).

On peut voir que

$$(A_\alpha U, \widehat{U})_\alpha = -(Av, \widehat{\omega}) + (A\omega - \gamma A_R\theta, \widehat{v}) + \gamma(A_D v, \widehat{\theta}) + (A_R\theta, \widehat{\theta}) \tag{3.4.1}$$

pour tout $U = (\omega; v; \theta) \in \mathcal{D}(A_\alpha)$ et $\widehat{U} = (\widehat{\omega}; \widehat{v}; \widehat{\theta}) \in H_\alpha$. Par conséquent

$$(A_\alpha U, U)_\alpha = \left\| A_R^{1/2}\theta \right\|^2 \geq 0 \ \text{ pour } U = (\omega; v; \theta) \in \mathcal{D}(A_\alpha).$$

c'est à dire que, A_α est accrétif.

Il s'ensuit aussi d'après (3.4.1) que l'opérateur adjoint A_α^* a la forme

$$A_\alpha^* = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -M_\alpha^{-1}\mathcal{A} & 0 & \gamma M_\alpha^{-1}A_R \\ 0 & -\gamma A_D & A_R \end{pmatrix} \tag{3.4.2}$$

et $\mathcal{D}(A_\alpha^*) = \mathcal{D}(A_\alpha)$. Les mêmes calculs qu'avant, montrent que A_α^* est aussi accrétif:

$$(A_\alpha^* U, U)_\alpha = \left\| A_D^{1/2}\theta \right\|^2 \geq 0 \ \text{ pour } U = (u; v; \theta) \in \mathcal{D}(A_\alpha^*) = \mathcal{D}(A_\alpha).$$

Donc, la théorie des semi groupes (voir [47, Corollary 4.4, p. 15]) appliquée conduit à la conclusion que les deux opérateurs A_α et A_α^* engendrent sur H_α des semi groupes de contractions continus $e^{-A_\alpha t}$ et $e^{-A_\alpha^* t}$.

L'exponentielle stabilité du semi groupe, avec l'uniforme contrôle (en α) des constantes découle de la Proposition 3.1.3 [43, p.229]. ■

On considère ensuite le problème thermoélastique non homogène

$$\begin{cases} M_\alpha \omega_{tt} - \gamma A_D \theta + \mathcal{A}\omega = f(t), \\ \theta_t + A_D \theta + \gamma A_D \omega_t = g(t). \end{cases} \tag{3.4.3}$$

avec donnée initiale

$$\omega|_{t=0} = \omega_0, \quad \omega_t|_{t=0} = \omega_1, \theta|_{t=0} = \theta_0, \tag{3.4.4}$$

et on suppose que $f \in L^1(\mathbb{R}+; V'_\alpha)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}+; \mathcal{H})$. Ici, on note par V'_α le dual (par rapport à $\mathcal{H}$) de V_α. Dans l'espace H_α, le problème (3.4.3) et (3.4.4) peut être écrit sous la forme

$$\frac{dU(t)}{dt} + A_\alpha U(t) = F(t), \quad U(0) = U_0, \tag{3.4.5}$$

où l'on a $U \equiv U(t) = (\omega(t); \omega_t(t); \theta(t))$, $U_0 = (\omega_0; \omega_1; \theta_0)$, et $F(t) = (0; M_\alpha^{-1} f(t); g(t))$.

D'après la Proposition 3.4.1, A_α engendre un semi groupe fortement continu, qui nous permet alors d'appliquer la théorie développée dans [47]

Proposition 3.4.2 *Pour le problème (3.4.3) et (3.4.4), on a les assertions suivantes.*

- ***Solutions fortes:*** *Soit $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}+; V'_\alpha)$ et $g(t) \in W^{1,1}(R+; \mathcal{H})$. Supposons que $U_0 = (u_0; u_1; \theta_0) \in \mathcal{D}(A_\alpha)$.*

Alors, il existe une unique solution forte (dans le sens de la Définition 2.4.3) $U(t) = (\omega(t); \omega_t(t); \theta(t))$. Cette solution vérifie l'équation de l'énergie

$$\begin{aligned} & |U(t)|^2_{\alpha,\eta} + 2\int_s^t ||A_D^{1/2}\theta(\tau)||^2 d\tau \\ = \quad & |U_0|^2_\alpha + 2\int_0^t [(f(\tau), \omega_t(\tau)) + (g(\tau), \theta(\tau))] d\tau, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

- ***Solutions généralisées:*** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}+; V'_\alpha)$ et $g(t) \in L^1(\mathbb{R}+; \mathcal{H})$. Supposons que $U_0 = (\omega_0; \omega_1; \theta_0) \in H_\alpha$.*

Alors, il existe une unique solution généralisée (dans le sens de la Définition 2.4.4) $U(t) = (\omega(t); \omega_t(t); \theta(t))$ telle que $\theta(t) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}+; \mathcal{D}(A_R^{1/2}))$ et la relation de l'énergie dans (3.4.6) est vérifiée. Cette solution est aussi mild; c'est à dire, elle peut être présenter dans la forme

$$U(t) = e^{-A_\alpha t} U(0) + \int_0^t e^{-A_\alpha (t-\tau)} F(\tau) d\tau,$$

et vérifie aussi l'inégalité variationnelle correspondante (i.e., $U(t)$ est aussi faible).

Preuve. Puisque A_α est un générateur d'un semi groupe fortement continu (voir Proposition 3.4.1), pour obtenir l'existence et l'unicité d'une solution forte on peut appliquer [47, Corollaire 2.10, p. 109]. Comme les solutions fortes de l'équation (3.4.3) sont vraies dans $\mathcal{H}$ pour presque tout $t > 0$, on peut utiliser la procédure standard pour obtenir la relation d'énergie (3.4.6). Il suffit de multiplier la première équation de (3.4.3) par ω_t, la seconde par θ, et d'intégrer par partie. L'existence des solutions généralisées et leurs propriétés découle des considérations données dans [47 , Section 4.2]. Elles peuvent aussi être obtenues d'après le Théoreme 2.4.3 général abstrait. ■

3.5 Analyticité du semi groupe pour le modèle sans inertie rotationnelle

Dans le cas où $\alpha = 0$, on a

Théorème 3.5.1 *Soit $\alpha = 0$. Alors le semi groupe de contractions $e^{-A_0 t}$ donnée par la Proposition 3.4.1 et défini par l'équation (3.3.3) est analytique sur H_0.*

Pour la définition et les propriétés d'un semi groupe analytique, voir [47].

Preuve. Voir [48] ■

3.6 Génération d'un semi groupe non linéaire

Notre but ici est de démontrer l'existence, l'unicité, et la dépendence des solutions par rapport aux données initiales du problème correspondant au modèle (3.2.30) et (3.3.4) considéré sur l'espace des phases H_α donné par (3.3.2).

Le résultat d'existence et d'unicité suivant découle de la régularité du crochet de von Karman (3.1.1) (voir Section 1.4) et des propriétés du semi groupe linéaire correspondant.

Théorème 3.6.1 ***(Existence, unicité et énergie finie des solutions)**. Supposons que F vérifie les hypothèses* 1.4 . *Soit $\alpha \in \Lambda \equiv \{0 \le \alpha \le 1\}$.*

Alors pour toute donnée initiale $U_0 = (\omega_0; \omega_1; \theta_0) \in H_\alpha$ le problème (3.2.30) et (3.2.31) possède une unique solution (généralisée)

$$U(t) \equiv (\omega(t); \omega_t(t); \theta(t)) \in C([0, \infty); H_\alpha)$$

qui dépend continument de la donnée initiale. Cette solution est aussi faible; c'est à dire, vérifie l'équation variationnelle appropriée. De plus, on a l'égalité de l'énergie suivante

$$\mathcal{E}_\alpha(\omega\,(t)\,, \omega_t\,(t)\,, \theta\,(t)) + \int_s^t ||A_D^{1/2}\theta(\tau)||^2 d\tau = \mathcal{E}_\alpha(\omega\,(s)\,, \omega_t\,(s)\,, \theta\,(s)) \tag{3.6.1}$$

pour tout $t \geq s \geq 0$, où $\mathcal{E}_{\alpha,\kappa}(\omega, \omega_t, \theta)$ est l'énergie associée au modèle (3.2.30) qui est donnée par la formule

$$\mathcal{E}_\alpha(\omega\,(t)\,, \omega_t\,(t)\,, \theta\,(t)) = E_\alpha(\omega\,(t)\,, \omega_t\,(t)\,, \theta\,(t)) + \frac{1}{2}\int_\Omega ([F, \omega]\omega) dx \tag{3.6.2}$$

avec

$$E_\alpha(\omega\,(t)\,, \omega_t\,(t)\,, \theta\,(t)) = \frac{1}{2}\left[||A_D\omega||^2 + ||M_\alpha^{1/2}\omega_t||^2 + \frac{1}{2}||\Delta v(\omega)||^2 + ||\theta||^2\right]. \tag{3.6.3}$$

De plus, quand $\alpha = 0$, on a

$$U(t) = (\omega(t); \omega_t(t); \theta(t)) \in C\left((0, T]; H^3(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)\right) \tag{3.6.4}$$

pour tout $T > 0$, et

$$\|\omega(t)\|_3^2 + \|\omega_t(t)\|_1^2 + \|\theta(t)\|_1^2 \leq \frac{C_\kappa(T, R)}{t}, \quad t \in (0, T], |U|_0 \leq R. \tag{3.6.5}$$

La démonstration du théorème d'existence et d'unicité est classique. L'idée principale est de considérer l'équation d'évolution non linéaire comme une perturbation locallement lipschitzienne d'un semi groupe linéaire sur H_α . En effet, le terme non linéaire $F(u)$ est locallement lipschitzien. Donc, les résultats abstraits (voir [47 , Chapter 6]) sur la génération de semi groupes non linéaires s'appliquent, afin de conclur l'existence des semi groupes non linaires S_t^α sur H_α .

Preuve. du Théorème 3.6.1 (Existence et Unicité). Le point de départ est la partie linéaire qui peut être représéntée par l'opérateur $A_\alpha : H_\alpha \to H_\alpha$ donné par (3.3.4) et muni du domaine naturel $\mathcal{D}(A_\alpha)$. D'après la Proposition 3.4.1 A_α engendre un semi groupe

$e^{-A_{\alpha,\kappa}t}$ de contractions fortement continu sur H_α . Maintenant, on réécrit le problème non linéaire (3.2.30) et (3.2.31) comme un problème du premier ordre sous la forme

$$\frac{dY(t)}{dt} + A_\alpha Y(t) = \mathcal{B}(Y(t)), t > 0, Y(0) = Y_0 = (\omega_0; \omega_1; \theta_0) \tag{3.6.6}$$

où $Y(t) \equiv (\omega(t); \omega_t(t); \theta(t))$ et $\mathcal{B}(Y) = (0; M_\alpha^{-1}F(\omega); 0)$ avec $F(\omega)$ donnée par (3.2.29). Il s'ensuit, d'après le Corollaire 1.4.5 , que le terme non linéaire $\mathcal{B}(Y)$ est locallement lipschitzien sur H_α . En effet, pour $Y_i = (\omega_i; v_i; \theta_i), i = 1, 2$, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(Y_1) - \mathcal{B}(Y_2)|_\alpha &= \left\| M_\alpha^{-1/2}(F(\omega_1) - F(\omega_2)) \right\| \leq F(\omega_1) - F(\omega_2)) \\ &\leq C(\|[\omega_1, v(\omega_1)] - [\omega_2, v(\omega_2)]\| + \|[\omega_1 - \omega_2, F_0]\|). \end{aligned} \tag{3.6.7}$$

Par conséquent

$$||\mathcal{B}(Y_1) - \mathcal{B}(Y_2)|_\alpha \leq C\left(\|\omega_1\|_2^2 + \|\omega_2\|_2^2 + \|F_0\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}\right)\|\omega_1 - \omega_2\|^2, \tag{3.6.8}$$

où C ne dépend pas de α. Ceci signifie que $\mathcal{B}(Y)$ est localement lipschitzienne sur H_α .

Etape 1: Solutions locales. Donc, on peut appliquer le Théorème 2.4.3 du Chapitre 2, qui implique l'existence locale de solutions généralisées $Y(t) = (\omega(t); \omega_t(t); \theta(t))$ pour toute donnée initiale $Y_0 = (\omega_0; \omega_1; \theta_0) \in H_\alpha$. Si $Y_0 \in \mathcal{D}(A_\alpha)$, alors la solution $Y(t)$ est forte et possède la propriété

$$Y(t) \in C_r([0,T); \mathcal{D}(A^{1/2})) \subset C_r\left([0,T); W_\alpha \times H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)\right)$$

for some $T > 0$, où C_r is the corresponding space of right-continuous functions et

$$W_\alpha = \left\{u \in \mathcal{D}(A^{1/2}) : M_\alpha^{-1/2}A\omega \in L^2(\Omega)\right\} \subset H^3(\Omega).$$

La fonction $t \mapsto Y(t)$ est faiblement continue dans $W_\alpha \times H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$.

Etape 2: Egalité d'énergie et Solutions globales. Les propriétes de régularité des solutions fortes , nous permettent d'obtenir par les méthodes standards d'énergie , la relation énonce dans (3.6.1) sur l'intervalle d'existence . Il suffit de multiplier la première équation de (3.1.2) par u_t, la seconde par θ, d'intégrer par parties et d'ajouter les deux équations. Cette relation de l'énergie et aussi les inégalités de la forme

$$c_1E_\alpha(\omega(t), \omega_t(t), \theta(t)) - C_F \leq \mathcal{E}_\alpha(\omega(t), \omega_t(t), \theta(t)) \leq c_2E_\alpha(\omega(t), \omega_t(t), \theta(t)) + C_F \tag{3.6.9}$$

impliquent une estimation a priori pour les solutions dans H_α qui sont uniformes par rapport au paramètre α:

$$||A_D\omega||^2 + ||M_\alpha^{1/2}\omega_t||^2 + ||\theta||^2 \leq C(r, |F|_{W^{2,\infty}}). \tag{3.6.10}$$

sous la condition $||A_D\omega_0||$, $||M_\alpha^{1/2}\omega_1||$, $||\theta_0|| \leq r$. De plus, la constante C dans (3.6.10) ne dépend pas de t (et de l'intervalle d'existence). Donc, on applique de nouveau le **Théorème** 2.4.2 pour montrer que les solutions locales (en temps) sont globales et globalement bornées sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans H_α.

Afin d'obtenir des relations d'énergie valables pour les solutions généralisées (limites fortes dans H_α des solutions régulières), il suffit d'écrire les relations d'énergie pour la différence de deux solutions régulières Y_n et Y_m. Puisque les termes non linéaires sont localements Lipschitziens, on obtient la convergence forte supplémentaire

$$\theta_n \to \theta \ \text{ dans } \ L^2\left(0, T; \mathcal{D}(A_D^{1/2})\right).$$

Ceci, nous permet de passer à la limite dans les relations d'énergie qui nous permettent d'obtenir des relations de l'énergie valables pour toutes les solutions généralisées. Cet argument peut aussi être utiliser pour montrer que toute solution généralisée est aussi faible et vice versa.

Etape 3: Régularité supplémentaire. Afin d'obtenir l'égalité dans (3.6.4), on utilise l'analyticité du semi groupe linéaire $e^{A_{-\alpha}t}$ qui est vrai pour $\alpha = 0$, comme il a été démontré dans le **Théorème** 5.3.3, et pour lequel la Proposition 3.4.1 est valable. En effet, utilisant la formule de variation des constantes

$$Y(t) = e^{-A_0 t}Y(0) + \int_0^t e^{-A_0(t-\tau)}B(Y(\tau))d\tau$$

d'après la méthode standard (voir, [16, Chapter 2]) on peut obtenir (3.6.4). $\blacksquare$

Chapitre 4

Stabilisation exponentielle

On démontre que la solution du problème (1.1.1)-(1.1.6) donnée par le **Théorème 3.6.1** décroit uniformément vers 0 quand le temps t tend vers ∞.

Afin d'obtenir nos résultats , on definit la fonctionnelle énergie pour le modèle(1.1.1) , par ::

$$E(t) \equiv E_\alpha \left(\begin{bmatrix} \omega(t) \\ \omega_t(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \right) + E_F(\omega(t)) \tag{4.0.1}$$

où E_F est la fonctionnelle qui a été considérée dans l'hypothése 2, on pose

$$E_\alpha \left(\begin{bmatrix} \omega(t) \\ \omega_t(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \right) \equiv \widehat{a}(\omega(t), \omega(t)) + \|\omega_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha \|\nabla\omega_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\theta(t)\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{4.0.2}$$

où la forme bilineaire $\widehat{a}(.,.)$ est définie par (voir [14])

$$\widehat{a}(\omega(t), \omega(t)) = a(\omega, \varpi) + \eta \int_\Gamma \omega\varpi d\Gamma. \tag{4.0.3}$$

et où $a(\omega, \varpi)$ est donnée par

$$a(\omega, \varpi) = \int_\Omega \left[\omega_{xx}\varpi_{xx} + \omega_{yy}\varpi_{yy} + \mu(\omega_{xx}\varpi_{yy} + \omega_{yy}\varpi_{xx}) + 2(1-\mu)\omega_{xy}\varpi_{xy}\right] d\Omega \tag{4.0.4}$$

4.0.1 Formule de Green

Utilisant la forme bilinéaire précédente, on obtient le lemme suivant (voir [14])

Lemme 4.0.1 *Si les fonctions ω et ϖ sont assez réguliéres, on a*

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Delta^2\omega\varpi d\Omega + \eta\int_\Gamma \omega\varpi d\Gamma \\ = \;\; &\widehat{a}(\omega(t),\overline{\omega}(t)) + \int_\Gamma (\frac{\partial\Delta\omega}{\partial\nu} + (1-\mu)\frac{\partial\mathcal{B}_2\omega}{\partial\tau})\varpi d\Gamma - \int_\Gamma (\Delta\omega + (1-\mu)\mathcal{B}_1\omega)\frac{\partial\varpi}{\partial\nu}d\Gamma.\end{aligned} \tag{4.0.5}$$

on peut aussi écrire

$$\int_\Omega \Delta^2\omega\varpi d\Omega + \eta\int_\Gamma \omega\varpi d\Gamma = \widetilde{a}(\omega,\varpi) + \int_\Gamma \left\{(\mathbf{B}_2\omega)\varpi - (\mathbf{B}_1\omega)\frac{\partial\varpi}{\partial\nu}\right\} d\Gamma \tag{4.0.6}$$

(on note que si $\eta > 0$, alors $\widehat{a}(.,.)$ est $H^2(\Omega)$-elliptique).

Preuve. En posant le changement de variable suivant

$$\Delta\omega = \varphi$$

on obtient

$$\int_\Omega \Delta^2\omega\varpi d\Omega = \int_\Omega \Delta(\Delta\omega)\varpi d\Omega = \int_\Omega \Delta\varphi\varpi d\Omega$$

d'où l'on a, d'aprés la formule de Green,

$$\int_\Omega \nabla\varpi\nabla\omega d\Omega = -\int_\Omega \Delta\varpi\omega d\Omega + \int_\Gamma \frac{\partial\varpi}{\partial\nu}\omega d\Gamma$$

c'est à dire

$$\int_\Omega \Delta\omega\varpi d\Omega = \int_\Omega \Delta\varpi\omega d\Omega - \int_\Gamma \frac{\partial\varpi}{\partial\nu}\omega d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial\omega}{\partial\nu}\varpi d\Gamma$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta\varphi\varpi d\Omega &= \int_\Omega \varphi\Delta\varpi d\Omega - \int_\Gamma \frac{\partial\varpi}{\partial\nu}\varphi d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\varpi d\Gamma \\ &= \int_\Omega \Delta\omega\Delta\varpi d\Omega - \int_\Gamma \frac{\partial\varpi}{\partial\nu}\Delta\omega d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial\Delta\omega}{\partial\nu}\varpi d\Gamma \\ &= \int_\Omega \Delta^2\omega\varpi d\Omega.\end{aligned} \tag{4.0.7}$$

De plus

$$\int_\Omega \Delta\omega\Delta\varpi d\Omega = \int_\Omega (\omega_{xx}\varpi_{xx} + \omega_{yy}\varpi_{yy} + \omega_{xx}\varpi_{yy} + \omega_{yy}\varpi_{xx})d\Omega$$

en ajoutant et en retranchant les deux termes $\omega_{xx}\varpi_{yy}$, $\omega_{yy}\varpi_{xx}$ a $a(\omega,\varpi)$, on trouve

$$a(\omega,\varpi)=\int_\Omega \Delta\omega\Delta\varpi d\Omega+\mu(\omega_{xx}\varpi_{yy}+\omega_{yy}\varpi_{xx})+2(1-\mu)\omega_{xy}\varpi_{xy}-\omega_{xx}\varpi_{yy}-\omega_{yy}\varpi_{xx}$$

ce qui donne

$$a(\omega,\varpi)=\int_\Omega \Delta\omega\Delta\varpi d\Omega+(\mu-1)\omega_{xx}\varpi_{yy}+(\mu-1)\omega_{yy}\varpi_{xx}+2(1-\mu)\omega_{xy}\varpi_{xy}$$

et donc :

$$\int_\Omega \Delta\omega\Delta\varpi d\Omega=a(\omega,\varpi)+(1-\mu)\omega_{xx}\varpi_{yy}+(1-\mu)\omega_{yy}\varpi_{xx}-2(1-\mu)\omega_{xy}\varpi_{xy} \tag{4.0.8}$$

en substituant cette derniére égalité dans (4.0.7) , on trouve

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta^2\omega\varpi d\Omega &= a(\omega,\varpi)+\int_\Omega(1-\mu)\left[\omega_{xx}\varpi_{yy}+\omega_{yy}\varpi_{xx}-2\omega_{xy}\varpi_{xy}\right]d\Omega\\ &\quad+\int_\Gamma\frac{\partial\Delta\omega}{\partial\nu}\varpi d\Gamma-\int_\Gamma\frac{\partial\varpi}{\partial\nu}\Delta\omega d\Gamma.\end{aligned}$$

En remarquant, de plus que

$$\int_\Omega(\omega_{xx}\varpi_{yy}+\omega_{yy}\varpi_{xx}-2\omega_{xy}\varpi_{xy})d\Omega=\int_\Gamma\left[\frac{\partial B_2\omega}{\partial\tau}\varpi-B_1\omega\frac{\partial\varpi}{\partial\nu}\right]d\Gamma \tag{4.0.9}$$

alors, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta^2\omega\varpi d\Omega &= a(\omega,\varpi)+\int_\Gamma\left[\frac{\partial\Delta\omega}{\partial\nu}+(1-\mu)\frac{\partial B_2\omega}{\partial\tau}\right]\varpi-\int_\Gamma\left[\Delta\omega+(1-\mu)B_1\omega\right]\frac{\partial\varpi}{\partial\nu}d\Gamma\\ &= a(\omega,\varpi)+\int_\Gamma\left\{(\mathbf{B}_2\omega)\varpi-(\mathbf{B}_1\omega)\frac{\partial\varpi}{\partial\nu}\right\}d\Gamma\end{aligned}$$

et en ajoutant aux deux membres de l'égalité précédente $\eta\int_\Gamma\omega\varpi d\Gamma$, on obtient le résultat. ■

Nous somme maintenant dans une position d'annoncer notre resultat principal.

Théorème 4.0.2 *Soient les hypothéses* 1.4 *sur* F *, et supposons que les paramétres* η, λ *sont positifs .*

Alors, pour des données initiales $[\omega_0,\omega_1,\theta_0]\in H_\alpha$ *, il existe deux constantes positives* C *et* ρ, *qui peuvent dépendre de* α *et* $E(0)$, *telles que*

$$E(t)\le\ Ce^{-\rho t}E(0)\ pour\ t\ge 0 \tag{4.0.10}$$

Remarque 4.0.1 *La prétention que* η , λ *sont positive n'est pas essentielle*

C'est simplement une convenance ici, afin d'éviter les états d'équilibre pour le problème.

Des résultats presque identiques pourraient être obtenus en imposant des conditions aux bord "*clamped*" homogènes sur la partie non vide Γ_0 de Γ, de plus les conditions aux bord (1.1.2) sur $\Gamma \setminus \Gamma_0$. Ces nouvelles spécifications des valeurs bornées ne présenteraient aucune difficulté additionnelle .

Commentaire sur le Théorème 4.0.2

Cas $\alpha = 0$

Ce théorème, (cas $\alpha = 0$) , généralise le résultat du modèle linéaire au modèle non linéaire.

Dans le cas linéaire, la preuve de l'analyticité du semi groupe du Théorème 4.0.2 implique aisément sa stabilité uniforme [20] (Chapitre 3, Annexe 1) pour $\eta > 0$.

Cas $\alpha > 0$

Quand le paramètre α est positif, le Théorème 4.0.2 a été démontré dans le cas lineaire dans [3] , et la technique utilisée a servi comme base pour prouver son extension au cas non lineaire dans [5].

4.1 Cas $\alpha = 0$

4.1.1 Les estimations des muliplicateurs

4.1.2 Une identité fondamentale

On commence avec une relation fondamentale de l'énergie qui montre que notre problème est dissipatif

Lemme 4.1.1 *Supposons que* $[\omega, \omega_t, \theta]$ *est la solution du problème (1.1.1)-(1.1.2) . Alors pour tout* $t, s \geq 0$, *l'énergie* $E(t)$ *associée au problème donnée par la relation (4.0.1) vérifie*

$$2\int_s^t \| \nabla\theta \|^2_{L^2(\Omega)} d\tau + 2\lambda \int_s^t \| \theta \|^2_{L^2(\Gamma)} d\tau = E(s) - E(t) \tag{4.1.1}$$

$$E(t) \leq E(s) \quad \textit{pour tout} \quad t \geq s.$$

Preuve. La démonstration de ce lemme est classique: On multiple la première équation de notre problème par ω_t et la seconde par θ. On obtient le résultat en intégrant en temps . après une inégration par parties par rapport à la variable d'espace et l'utilisation des relations (4.1.1) et (1.4.1). ■

L'estimation préliminaire suivante est un résultat très important pour la suite.

Lemme 4.1.2 *Supposons que* $[\omega, \omega_t, \theta]$ *est la solution de (1.1.1)-(1.1.2) . Alors, pour tout* $T > 0$,*on a*

$$\int_0^T E(t)dt \leq C(E(0)) \left[E(T) + E(0) \ + \int_0^T \| \theta \|^2_{H^1(\Omega)} dt + \int_0^t \| \omega_t \|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} dt \right] \quad (4.1.2)$$

Preuve. On commence par rappeler les opérateurs suivants (voir les chapitres précédent)

$$A_D : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega), \quad A_D \equiv -\Delta; \quad \mathcal{D}(A_D) \equiv H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega);$$

$$\begin{aligned} D \quad &: \quad D \in H^s(\Gamma) \longrightarrow H^{s+\frac{1}{2}}(\Omega), \text{ pour } s \in \mathbb{R}. \qquad (4.1.3) \\ h \quad &= \quad Dg \Longleftrightarrow \Delta h = 0 \text{ sur } \Omega \text{ et } h = g \text{ sur } \Gamma, \end{aligned}$$

"Δ"est un isomorphisme et donc son inverse existe et d'après la théorie elliptique on a $A_D^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), \mathcal{D}(A_D))$ et $D \in \mathcal{L}(H^s(\Gamma), H^{s-\frac{1}{2}}(\Omega))$. De plus, on a le lemme suivant

★ *lemme* (1) :Les opérateurs A_D et D définis par les relations précédentes vérifient les égalités suivantes

$$\Delta u = \Delta(u - Du \mid_\Gamma) = -A_D(u - Du|_\Gamma), \qquad (4.1.4)$$

$$A_D^{-1} \Delta u = -u + Du|_\Gamma \forall u \in H^2(\Omega). \qquad (4.1.5)$$

• Pr*euve* : Pour démontrer la relation (4.1.4), on a en tenant compte du fait que :

$$\Delta \ Du|_\Gamma = 0$$

car

$$\Delta h = \Delta Dg = \Delta \ Du|_\Gamma$$

puisque,

$$\Delta h = 0 \ \text{ sur } \ \Omega,$$

d'où

$$\Delta \ Du|_{\Gamma} = 0.$$

En remplaçant g par u, il vient alors

$$\Delta u = \Delta(u - \ Du|_{\Gamma}) = -A_D(u - \ Du|_{\Gamma})$$

ce qui implique

$$A_D^{-1}\Delta u = -u + Du|_{\Gamma}\,, \forall u \in H^2(\Omega)$$

d'ou la relation (4.1.5) .

Ce qui achève la démonstration du *lemme* (1).

Etape 1 . Le point principal ici est d'appliquer le multiplicateur $A_D^{-1}\ \theta$ à la première équation de (1.1.1). On note que le même multiplicateur a été utilisé dans [3] , [4] et [5] .

Premièrement, on a :

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_0^T (\omega_{tt}\ , A_D^{-1}\theta)_{L^2(\Omega)}dt = \left[(\omega_t\ , A_D^{-1}\theta)_{L^2(\Omega)}\right]_0^T + \\ &\int_0^T \left[\alpha \left\|\omega_t\right\|^2_{L^2(\Omega)} + (\omega_t, \theta - D\ \left[\ \theta|_{\Gamma} + \alpha\omega_t|_{\Gamma}\right])_{L^2(\Omega)}\right] dt, \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

où ici on a utilisé l'équation de la chaleur dans (1.1.1) et les relations (4.1.4) et (4.1.5) appliquées à θ et ω_t. En plus, on note d'après la régularité de l'application D de (4.1.3) pour $s = -\dfrac{1}{2}$, que

$$\begin{aligned} &\left|\left[(\omega_t, \theta - \ D\ \theta|_{\Gamma})_{L^2(\Omega)} - \alpha(\omega_t, \ D\omega_t|)_{L^2(\Omega)}\right]\right| \\ &\leq \varepsilon \textstyle\int_0^t \parallel \omega_t \parallel^2_{L^2(\Omega)} dt + C_\varepsilon \int_0^T \parallel \theta \parallel^2_{H^1(\Omega)} dt + C_\varepsilon \int_0^t \parallel \omega_t \parallel^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)} d\tau. \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Deuxièment, en utilisant la formule de *Green* (4.1.1) (avec $\widehat{\omega} = A_D^{-1}\theta$, où $A_D^{-1}\theta = 0$ puisque $A_D^{-1}\theta \in \mathcal{D}(A_D)$, et la première condition aux limites de (1.1.2), on obtient

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_0^T (\Delta^2\omega\ , A_D^{-1}\theta)_{L^2(\Omega)}dt = \int_0^T \left[a(\omega, A_D^{-1}\theta) + \alpha(\theta, \dfrac{\partial A_D^{-1}\theta}{\partial\nu})_{L^2(\Omega)}\right] dt \\ &\leq \varepsilon \textstyle\int_0^t \parallel \omega_t \parallel^2_{H^2(\Omega)} dt + C_\varepsilon \int_0^T \parallel \theta \parallel^2_{H^1(\Omega)} dt. \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

où dans la dernière étape, nous avons aussi utilisé la continuité de $a(.,.)$ dans la topologie $H^2(\Omega)\times\ H^2(\Omega)$, aussi bien que la théorie des traces. Donc, en appliquant (4.1.4) et (4.1.5) à θ, on trouve aussi que

$$\begin{aligned}&\int_0^T\ \alpha(\Delta\ \theta, A_D^{-1}\theta)_{L^2(\Omega)}dt = \int_0^T \alpha(\theta, -\theta + D\ \theta\ |_\Gamma)_{L^2(\Omega)}dt\\&\leq C\int_0^T \parallel \theta \parallel^2_{H^1(\Omega)}\ dt\ .\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

D'après la continuité de F de l'hypothése 1, et comme $E(t) \leq E(0)$ pour tout t positive (d'après le *lemme* 4.1.1) , on a pour tout $t \geq 0$

$$\|F(\omega(t))\|^2_{[H^1(\Omega)]'} \leq C(\|\omega(t)\|^2_{H^2(\Omega)})\ \|\omega(t)\|^2_{H^2(\Omega)} \leq C(E(0))\ \|\omega(t)\|^2_{H^2(\Omega)}\ . \tag{4.1.10}$$

Avec cette inégalité et d'après le *lemme* 4.1.1, on obtient alors

$$\begin{aligned}\int_0^T\ (F(\omega), A_D^{-1}\theta)_{L^2(\Omega)}dt &\leq C\int_0^T \parallel F(\omega)\parallel_{[H^1(\Omega)]'}\parallel \theta\parallel^2_{H^1(\Omega)}\ dt\\&\leq \int_0^T C(E(0))\parallel \omega(t)\parallel^2_{H^2(\Omega)}\parallel \theta\parallel^2_{H^1(\Omega)}\ dt\\&\leq \varepsilon\int_0^T \parallel \omega(t)\parallel^2_{H^2(\Omega)}\ dt + C_\varepsilon(E(0))\int_0^T \parallel \theta\parallel^2_{H^1(\Omega)}\ dt\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

Utilisons les relations (4.1.7)-(4.1.12), les majorations précédentes, la théorie des traces et la régularité de l'application D, on obtient

$$\begin{aligned}(\varepsilon-\varepsilon_0)\int_0^T\ \parallel \omega_t\parallel^2_{L^2(\Omega)}\ dt &\leq C\,[E(0)+E(T)] + \varepsilon\int_0^T \parallel \omega(t)\parallel^2_{H^2(\Omega)}\ dt\\&\leq C_{\varepsilon,\varepsilon_0}\int_0^T \parallel \theta\parallel^2_{H^1(\Omega)}\ dt\ + C_{\varepsilon_0}\quad \int_0^t \parallel \omega_t\parallel^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)}\ d\tau.\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

Etape 2 Maintenant on applique le multiplicateur "classique" ω. La multiplication de la première équation dans (1.1.1) par ω, suivie d'une intégration en temps et en espace, et d'une intégration par parties et l'utilisation de la formule de *Green* (4.1.1) (compte tenu des conditions aux limites dans (1.1.2)) donne

$$\begin{aligned}\int_0^T\ \left[a(\omega,\omega) + (F(\omega),\omega)_{L^2(\Omega)}\right] dt = -\left[(\omega_t,\omega)\right]_0^T + \int_0^T \parallel \omega_t\parallel^2_{L^2(\Omega)}\ dt -\\ \int_0^T \alpha(\theta, \frac{\partial\omega}{\partial\nu})_{L^2(\Gamma)}dt + \alpha\int_0^T(\nabla\theta,\nabla\omega)_{L^2(\Omega)}dt\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

$$\begin{aligned}\leq C\,[E(0)+E(T)] + \varepsilon\int_0^T \parallel \omega(t)\parallel^2_{H^2(\Omega)}\ dt\\ + C_\varepsilon\int_0^T \parallel \theta\parallel^2_{H^1(\Omega)}\ dt\ + \int_0^t \parallel \omega_t\parallel^2_{L^2(\Omega)}\ d\tau.\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Etape 3 On ajoute maintenant le terme $\int_0^t \parallel \omega_t \parallel^2_{L^2(\Omega)} dt$ aux deux membres de (4.1.14); et on applique l'estimation (4.1.12) au membre de droite de l'inégalité obtenue pour obtenir (puisque $(F(\omega), \omega)_{L^2(\Omega)} \geq 0$, d'après l'hypothése 1)

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left[a(\omega,\omega)+ \parallel \omega_t \parallel^2_{L^2(\Omega)}\right] dt &\leq \int_0^T \left[a(\omega,\omega)+ \parallel \omega_t \parallel^2_{L^2(\Omega)} +(F(\omega),\omega)_{L^2(\Omega)}\right] dt \qquad (4.1.15)\\
&\leq C\left[E(0)+E(T)\right] + C(E(0)) \int_0^T \parallel \theta \parallel^2_{H^1(\Omega)} dt + \\
\varepsilon \int_0^T \parallel \omega(t) \parallel^2_{H^2(\Omega)} dt + C_{\varepsilon_0} \int_0^t \parallel \omega_t \parallel^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} d\tau
\end{aligned}$$

Rappelons la $H^2(\Omega)-$ellipticité de $a(.,.)$ dans (4.1.1), quand le paramétre η de (1.1.2) et strictement positif, et prendre ε et assez petit dans (4.1.15) alors, on obtient

$$\int_0^T \left[a(\omega,\omega)+ \parallel \omega_t \parallel^2_{L^2(\Omega)}\right] dt \leq C\left[E(0)+E(T)\right] +C(E(0)) \int_0^T \parallel \theta \parallel^2_{H^1(\Omega)} dt +C \int_0^t \parallel \omega_t \parallel^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} d\tau \tag{4.1.16}$$

tant que (1.4.2) et le fait que $E(t) \leq E(0)$ (d'après le lemme 4.1.1) impliquent que

$$\int_0^T E_F(\omega)dt \leq C(E(0)) \int_0^T \parallel \omega(t) \parallel^2_{H^2(\Omega)} dt \leq C(E(0)) \int_0^T a(\omega,\omega)dt \tag{4.1.17}$$

On peut alors coupler cette inégalité avec (4.1.16) et arriver à l'inégalité

$$\begin{aligned}
\int_0^T E(t)dt &= \int_0^T E_0(t)dt + \int_0^T E_F(t)dt \qquad (4.1.18)\\
&\leq C(E(0)) \left[E(0)+E(T) + \int_0^T \parallel \theta \parallel^2_{H^1(\Omega)} dt + \int_0^T \parallel \omega_t \parallel^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} d\tau\right]
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du *lemme* 4.1.2. ∎

Ici, on note que le "mauvais" terme dans l' inegalite (4.1.2) est $\int_0^T \parallel \omega_t \parallel^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$, puisque qu'il ne peut pas étre majorée par l'énergie.). On note explicetement que ce terme se présente comme un résultat de l'expréssion (4.1.4) et (4.1.5) ($u = \omega_t$) dans la dérivation de l'estimation (4.1.7).

4.1.3 Les estimations Analytiques

Le but de cette section et de démonter le résultat de régularité de la composante de la solution $[\omega, \omega_t]$ du problème probléme (1.1.1)- (1.1.6),

(La régularité$-(L^2(0,T,H^1(\Omega))$ de θ à été démontré déja dans le lemme 4.1.1)

Lemme 4.1.3 *Soit* $[\omega, \omega_t, \theta]$ *la solution de (1.1.1)-(1.1.6) , qui correspond aux donneés initiales* $[\omega_0, \omega_1, \theta_0] \in H_0(\Omega)$ *. Alors*

$$[\omega, \omega_t, \theta] \in L^2(0,T,H^3(\Omega)) \times L^2(0,T,H^1(\Omega)) \times L^2(0,T,H^1(\Omega)),$$

avec l'estimation suivante :

$$\int_0^T \left[\| \omega \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \omega_t \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \theta \|^2_{H^1(\Omega)}\right] dt \leq C(E(0)) + C(E(0)) \int_0^T \| \omega \|^2_{L^2(\Omega)} \, dt \tag{4.1.19}$$

où la constante ne dépend pas de T.

Preuve. On écrit la solution $[\omega, \omega_t, \theta]$ pour l'équation (1.1.1)-(1.1.6) vu la variation des formules des paramètres. Pour cela, soit A_0 *le générateur correspondant* à la partie lineaire de (1.1.1)-(1.1.6) ,.autrement dit ,

$$A_0 [\omega, \omega_t, \theta] = \left[\omega_t, -\Delta^2\omega - \gamma\Delta\theta_0, \quad \Delta\theta_0 + \gamma\Delta\omega_t\right],$$

avec

$$D(A_0) = \begin{cases} [\omega_0, \omega_1, \theta_0] \in H^{4}(\Omega) \times H^{2}(\Omega) \times H^{2}(\Omega), \text{ tel que les conditions aux limites dans} \\ \qquad (1.1.2) - (1.1.3) \text{ sont vérifiées} \end{cases}$$

Il est bien connu d'après [21] que A_0 *engendre un semi groupe* $\left\{e^{A_0 t}\right\}_{t \geq 0}$ de contraction analytique et continu sur H_0, et de plus inversible pour $\eta > 0$.

Etant données ces dynamiques, on peut alors écrire la solution du problème (1.1.1)-(1.1.6) explicitement comme

$$\begin{bmatrix} \omega(t) \\ \omega_t(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = e^{A_0 t} \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \theta_0 \end{bmatrix} + \int_0^T e^{A_0(t-s)} \begin{bmatrix} 0 \\ F(\omega) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.1.20}$$

Utilisant l'égalité

$$A_0^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \omega_t(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = A_0^{\frac{1}{2}} e^{A_0 t} \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \theta_0 \end{bmatrix} + \int_0^T A_0 e^{A_0(t-s)} A_0^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ F(\omega) \\ 0 \end{bmatrix} ds, \tag{4.1.21}$$

on obtient alors l'estimation

$$\left\| A_0^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \omega_t(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \right\|_{L^2(0,T,H_0(\Omega))} \leq C \left\| \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \theta_0 \end{bmatrix} \right\|_{H_0(\Omega)} + \left\| A_0^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ F(\omega) \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_{L^2(0,T,H_0(\Omega))} \tag{4.1.22}$$

La justification de l'estimation (4.1.22) découle des trois propriétés suivantes

(i) La quantité $\left\{ e^{A_0 t} \right\}_{t \geq 0}$ est un semi groupe de contraction continu sur H_0(donc que l'operateur -A_0 est acccrétif ici)

(ii) et est de plus analytique sur H_0 et

(iii) il est exponentiellement stable sur H_0(donc que, en particulier , A_0^{-1}est bornée sur H_0) .

En fait , le terme intégral dans (4.1.21) donne l'estimation correspondante dans (4.1.22) d'après une propriété standard de stabilité des semi groupes analytiques (voir [15]).

On note premiérement que puisque -A_0 est accrétif et A_0^{-1}est bornée , alors

$$\mathcal{D}((\text{-}A_0)^{\frac{1}{2}}) = [\mathcal{D}(A_0), H_0]_{\frac{1}{2}} = (D(A_0), H_0)_{n=\frac{1}{2}, p=2}$$

(voir e.g, [6] , Vol.1,proposition 6.1; où [28] , p.164). Avec cette caractérisation , on peut alors appliquer à l'estimation dans [28] , lemme 3.5 (voir [6] , Vol II) pour obtenir (4.1.22).

On sait d'après la définition de $\mathcal{D}(\mathcal{A})(= \mathcal{D}(\mathcal{A}^*))$ et l'interpolation que

$$\mathcal{D}((A_0^*)^{\frac{1}{2}}), \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}) \subset H^3(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \tag{4.1.23}$$

et ainsi d'après la dualite avec la topologique de H_0, on a

$$\left[H^3(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \right]' \subset \left[\mathcal{D}((A_0^*)^{\frac{1}{2}}) \right]' \tag{4.1.24}$$

En particulier , la deuxième composante d'espace de $\mathcal{D}((A_0^*)^{\frac{1}{2}}), \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})$ est égale à $H^1(\Omega)$, de sorte que la deuxième composante d'espace de $\left[\mathcal{D}((A_0^*)^{\frac{1}{2}}) \right]'$ soit égale à $[H^1(\Omega)]'$. (c'est ainsi, puisque les conditions aux limites dans (1.1.2) rassemblent la premières et troisième coordonnées seulement et pas la seconde .) ainsi (4.1.24) et le fait ce $F(\omega(t)) \in [H^1(\Omega)]'$ (de l'hypothése 1) cela

$$\begin{aligned} \left\| A_0^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ F(\omega(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_{H_0} &= \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ F(\omega(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_{\left[D((A_0^*)^{\frac{1}{2}})\right]'} \\ &\leq C \left\| F(\omega(t)) \right\|_{[H^1(\Omega)]'} \leq C(E(0)) \int_0^T \| \omega(t) \|_{H^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \tag{4.1.25}$$

où pour la dernière inégalité , nous avons employé (4.1.10). Epissant ensemble (4.1.23) avec les évaluations (4.1.22) et (4.1.25), nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[\| \omega \|_{H^3(\Omega)}^2 + \| \omega_t \|_{H^1(\Omega)}^2 + \| \theta \|_{H^1(\Omega)}^2 \right] dt &\leq \int_0^T \| [\omega, \omega_t, \theta] \|_{D(A_0^{\frac{1}{2}})}^2 \\ &\leq C(E(0)) + C(E(0)) \int_0^T \| \omega \|_{H^2(\Omega)}^2 \, dt \\ &\leq \begin{array}{l} C(E(0)) + \varepsilon \int_0^T \| \omega(t) \|_{H^3(\Omega)}^2 \, dt + \\ C_\epsilon(E(0)) \int_0^T \| \omega \|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt \end{array} \end{aligned} \tag{4.1.26}$$

la où en obtenant la troixiéme inégalite ci-dessus, nous avons employé une inégalité classique . Prendre Maintenant $\varepsilon > 0$ assez petit , donne

$$\int_0^T \left[\| \omega \|_{H^3(\Omega)}^2 + \| \omega_t \|_{H^1(\Omega)}^2 \, d\tau + \| \theta \|_{H^1(\Omega)}^2 \right] d\tau \leq C(E(0)) + C(E(0)) \int_0^T \| \omega \|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt \tag{4.1.27}$$

Auquel la démonstration du lemme 4.1.3 est complète . ■

[1]

D'après le lemme 4.1.3 et la théorie des traces , on a que $\omega_{t|\Gamma} \in L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$, ce terme est bornée par le coté droit de (4.1.19). Utilisant cette derniére et la relation de dissipativité de l'énergie (4.1.1) , et l'estimation (4.1.2) de lemme 4.1.2, on obtient

$$\begin{aligned} TE(T) \leq & \int_0^T E(t) dt \leq C(E(0)) \ [E(0) + E(T) + \\ & \int_0^T \| \theta \|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_0^T \| \omega \|_{L^2(\Omega)}^2 \, dt \Big] \end{aligned} \tag{4.1.28}$$

[1] Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

On peut éliminer le terme $E(0)$ par application de la relation (4.1.1) dans le lemme 4.1.1 une fois (avec $t = T$ et $s = 0$) au cotée droit de (4.1.29) .et prendre $T > 2T(E(0))$ pour observer l'inégalite priliminaire.

Lemme 4.1.4 *Soit $[\omega, \omega_t, \theta]$ la solution de (1.1.1)-(1.1.2), qui correspond aux données initiales $[\omega_0, \omega_1, \theta_0]$. Soit $T = T(E(0))$ assez grand . Alors on a l'estimation*

$$E(T) \quad \leq \quad C(E(0)) \left[\int_0^T \parallel \theta \parallel^2_{H^1(\Omega)} + \int_0^T \parallel \omega \parallel^2_{L^2(\Omega)} dt \right] \tag{4.1.29}$$

Notre derniére étape est d'èliminer le terme d'ordre inferieure $\int_0^T \parallel \omega \parallel^2_{L^2(\Omega)} dt$ pour l'inégalite (4.1.29). Ceci est impose dans la section suivante.

4.2 Absorption des termes d'ordre inférieur

Les arguments de Compacité/ unicité sont à nos jours maintenant standard dans l'étude de la stabilisation des problèmes lineaires. Cependant , la nature générale de la nonlinearité F présentée dans les EDP thermoélastiques sous considération ici nécéssitent une approche non standad dans lesquelles l'analyticité et la linéarisationà l'étude ici rend nécessaire une approche non standard , dans laquelle l'analyticité qui est à la base de la linéarisation élément fondamental.

Le résultat principal de cette section est le

Lemme 4.2.1 *Soit $[\omega, \omega_t, \theta]$ la solution de (1.1.1)-(1.1.6). Alors l'exsistence de l'inégalité (4.1.29) implique qu'il existe une constante $C(E(0))$ telle que l'estimation suivante est vérifiée*

$$\int_0^T \|\omega\|^2_{L^2(\Omega)} dt \quad \leq \quad C(E(0)) \int_0^T \|\theta\|^2_{H^1(\Omega)} dt \tag{4.2.1}$$

Preuve. Pour démontrer la relation (4.2.1), comme d'habitude, on raisonne par contradiction . Supposons que le lemme est faux, alors il existe une suite des données initiales $\left\{ \omega_0^{(n)}, \omega_1^{(n)}, \theta_0^{(n)} \right\}_{n=1}^{\infty} \in H_0$, qui correspondent à la suite de solutions $\left\{ \omega^{(n)}, \omega_t^{(n)}, \theta^{(n)} \right\}_{n=1}^{\infty}$ de (1.1.1)-(1.1.6) qui vérifient en commun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^T \parallel \omega^{(n)} \parallel_{L^2(\Omega)}^2 dt}{\int_0^T \parallel \theta^{(n)} \parallel_{H^1(\Omega)}^2 dt} = \infty, \quad E^{(n)}(0) \leq \text{constante}, \forall n \tag{4.2.2}$$

Comme $E^{(m)}(t) \leq E^{(m)}(0)$ d'après (4.1.1) et le lemme 4.1.1 , alors la suite $\left\{E^{(n)}(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$est uniformement bornée en n pour $0 \leq t \leq T$. Cette propriété de majoration et l'estimation (4.1.19) donnent la borne uniforme

$$\int_0^T \left[\parallel \omega^{(n)} \parallel_{H^3(\Omega)}^2 + \parallel \omega_t^{(n)} \parallel_{H^1(\Omega)}^2 d\tau + \parallel \theta^{(n)} \parallel_{H^1(\Omega)}^2\right] d\tau \quad \leq \quad C \tag{4.2.3}$$

où la dépendance de la constante C sur T n'est pas notée ici. Par conséquent il existe une sous suite , notée encore $\left\{\omega^{(n)}, \omega_t^{(n)}, \theta^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, et $[\omega, \omega_t, \theta] \in L^2(0, T, H^3(\Omega)) \times L^2(0, T, H^1(\Omega)) \times L^2(0, T, H^1(\Omega))$ tq

$$\begin{aligned} \omega^{(n)} &\longrightarrow \omega \text{ faiblement dans } L^2(0, T, H^3(\Omega)) \\ \omega_t^{(n)} &\longrightarrow \omega_t \text{ faiblement dans } L^2(0, T, H^1(\Omega)) \\ \theta^{(n)} &\longrightarrow \theta \text{ faiblement dans } L^2(0, T, H^1(\Omega)) \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

comme, on peut utiliser l'équation de la chaleur dans (1.1.1), le fait que $\Delta \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ et l'estimation (4.1.19) en $\theta^{(n)}$ pour déduire que $\left\{\theta^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite bornée dans $L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$. Par l'utilisation de l'équation de la plaque dans (1.1.1) et l'estimation (4.1.19), on conclue que $\left\{\omega_{tt}^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$est une suite bornée dans $L^2(0, T, H^{-1}(\Omega))$. Par conséquent , d'aprés un résultat de compacité d'Aubin dans [1] , on a que

$$\left[\omega^{(n)}, \omega_t^{(n)}, \theta^{(n)}\right] \quad \longrightarrow \quad [\omega, \omega_t, \theta] \text{ fortement dans } L^2(0, T, H_0(\Omega)) \tag{4.2.5}$$

(notons , qu'il est important ici de justifier la convergence forte de la suite $\omega^{(n)}$dans $L^2(0, T, H^2(\Omega))$.

On considère maintenant deux cas.

Cas I $\lim_{n\to\infty} \omega^{(n)} = \omega \neq 0$ (dans $L^2(0, T, H^2(\Omega))$. Dans ce cas, la limite (4.2.2) implique que $\left\|\theta^{(n)}\right\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))} \longrightarrow 0$. Avec cette convergence, et celles des relations (4.2.4) et (4.2.5), et de plus rappelons l'hypothése 1 , on peut passer à la limite dans le système couplé (1.1.1)-(1.1.2) pour trouver que la limite ω vérifie

$$\begin{cases} \omega_{tt} + \Delta^2\omega + F(\omega) = 0 \text{ sur } \Omega \times (0, \infty) \\ \qquad \lambda\Delta\omega_t = 0 \text{ sur } \Omega \times (0, \infty). \end{cases} \tag{4.2.6}$$

Ceci implique alors que ω_t vérifie

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta^2\omega_t = 0 \text{ sur } \Omega\times(0,\infty) \\ \Delta\omega_t + (1-\mu)\mathcal{B}_1\omega_t = 0, \\ \quad \frac{\partial\Delta\omega_t}{\partial\nu} + (1-\mu)\frac{\partial\mathcal{B}_2\omega_t}{\partial\tau} - \eta\omega_t = 0. \qquad \Gamma\times(0,\infty). \end{array}\right. \tag{4.2.7}$$

D'après la théorie des problèmes elliptiques, on a alors $\omega_t = 0$ (rappelons l'ellipticité de la forme bilineare $a(.,.)$ definie dans (4.0.5) , avec $\eta > 0$).

Retournons à la premiére équation de (4.2.6), on a

$$\Delta^2\omega + F(\omega) = 0.$$

Maintenant , rappelons l'hypothése 2 (avec $(F(\omega),\omega)_{L^2(\Omega)} \geq 0$) et l'ellipticité de $a(.,.)$, on déduit que $\omega = 0$, ce qui contredit notre hypothèse.

Cas II $\lim\limits_{n\to\infty}\omega^{(n)} = \omega = 0$ (dans $L^2(0,T,H^2(\Omega))$. Dans ce cas , posons

$$\begin{array}{c} C_n = \left\|\omega^{(n)}\right\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}; \\ \left[\widetilde{\omega}^{(n)},\widetilde{\theta}^{(n)}\right] \equiv \frac{1}{C_n}\left[\omega^{(n)},\theta^{(n)}\right], \end{array} \tag{4.2.8}$$

alors

$$\left\|\widetilde{\omega}^{(n)}\right\|_{L^2(0,T,H^2(\Omega))} = 1, \quad \forall n \tag{4.2.9}$$

$$C_n \longrightarrow 0 \text{ (d'après (4.2.5) et la condition présente dans cas II)} \tag{4.2.10}$$

$$\int_0^T \left\|\widetilde{\theta}^{(n)}\right\|^2_{H^1(\Omega)} dt \longrightarrow 0 \text{ (d'après (4.2.8) et (4.2.2))} \tag{4.2.11}$$

Par ailleurs ,$\left[\widetilde{\omega}^{(n)},\widetilde{\theta}^{(n)}\right]$ vérifie (aprés la division de (1.1.1)-(1.1.2) par C_n)

$$\left\{\begin{array}{ll} \widetilde{\omega_{tt}}^{(n)} + \Delta^2\widetilde{\omega}^{(n)} + \alpha\Delta\widetilde{\theta}^{(n)} + \dfrac{1}{C_n}F(\omega^{(n)}) = 0 \text{ sur } \Omega\times(0,\infty) & \\ \widetilde{\theta}_t^{(n)} - \Delta\widetilde{\theta}^{(n)} - \alpha\Delta\widetilde{\omega}_t^{(n)} \qquad = 0 \text{ sur } \Omega\times(0,\infty) & \end{array}\right. \tag{4.2.12}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta\widetilde{\omega}^{(n)} + (1-\mu)\mathcal{B}_1\widetilde{\omega}^{(n)} + \gamma\widetilde{\theta}^{(n)} = 0 & \\ \dfrac{\partial\Delta\widetilde{\omega}^{(n)}}{\partial\nu} + (1-\mu)\dfrac{\partial\mathcal{B}_2\widetilde{\omega}^{(n)}}{\partial\tau} - \eta\widetilde{\omega}^{(n)} + \gamma\dfrac{\partial\widetilde{\theta}^{(n)}}{\partial\nu} = 0 & \text{sur} \quad \Gamma\times(0,\infty) \\ \dfrac{\partial\widetilde{\theta}^{(n)}}{\partial\nu} + \lambda\widetilde{\theta}^{(n)} = 0 & \end{array}\right. \tag{4.2.13}$$

De plus , utilisons l'estimation analytique (4.1.19) et la relation d'énergie (4.1.1) .on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned}\int_0^T \left[\| \omega^{(n)} \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \omega_t^{(n)} \|^2_{H^1(\Omega)}\right] dt \quad &\leq \quad C(E^{(n)}(0)) \left[E^{(n)}(T) + \int_0^T \| \theta^{(n)} \|^2_{H^1(\Omega)} + \right. \\ &\left. \int_0^T \| \omega \|^2_{L^2(\Omega)}\right] dt\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

Divisons les deux cotés de cette inégalité par C_n^2, rappelons l'estimation (4.1.29) de $\left\{E^{(n)}(T)\right\}_{n=1}^{\infty}$, la limite (4.2.11), et le fait que $\left\{E^{(n)}(0)\right\}_{n=1}^{\infty}$est uniformement bornée (voir (4.2.2)), alors, on obtient

$$\int_0^T \left[\| \widetilde{\omega}^{(n)} \|^2_{H^3(\Omega)} + \| \widetilde{\omega}_t^{(n)} \|^2_{H^1(\Omega)}\right] d\tau \leq C \quad \forall n \in N \tag{4.2.15}$$

Par conséquent , il existe une sous suite convergante $\left\{\left[\widetilde{\omega}^{(n)}, \widetilde{\omega}_t^{(n)}\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$ et $[\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}_t] \in L^2(0, T, H^3(\Omega)) \times L^2(0, T, H^1(\Omega))$ telleque

$$\left[\widetilde{\omega}^{(n)}, \widetilde{\omega}_t^{(n)}\right] \longrightarrow [\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}_t] \text{ faiblement dans } L^2(0, T, H^3(\Omega)) \times L^2(0, T, H^1(\Omega)) \tag{4.2.16}$$

D'aprés le résultat de compacité d'Aubin et (4.2.9), on a alors, comme pour le **cas I**,

$$\widetilde{\omega}^{(n)} \longrightarrow \widetilde{\omega} \text{ fortement dans } L^2(0, T, H^{3-\epsilon}(\Omega)) \tag{4.2.17}$$

$$\|\widetilde{\omega}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} = 1 \tag{4.2.18}$$

de plus, d'après la relation d'énergie (4.1.1) et l'estimation (4.1.29) ,

$$\begin{aligned} E^{(n)}(t) \quad &\leq \quad E^{(n)}(0) \\ &= \quad E^{(n)}(T) + 2\int_0^T \left\|\nabla\theta^{(n)}\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt + 2\lambda \int_0^T \left\|\theta^{(n)}\right\|^2_{L^2(\Gamma)} dt \\ &\leq \quad C(E^{(n)}(0)) \int_0^T \left\|\theta^{(n)}\right\|^2_{H^1(\Omega)} dt + \int_0^T \left\|\omega^{(n)}\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt \end{aligned} \tag{4.2.19}$$

Ceci et un argument identique à celui utilisé pour obtenir (4.2.15) donne alors

$$\left\|\widetilde{\omega}^{\ (n)}\right\|_{L^\infty(0,T,H^2(\Omega))} \leq C \ , \ \ \forall n \tag{4.2.20}$$

Maintenant notre intention est de passer a la limite dans l'équation (4.2.12)-(4.2.13), mais le terme qui pose problème dans ce cas est $\dfrac{1}{C_n}F(\omega^{(n)})$. Pour contouner ce problème, on utilise l'hypothése 1. D'après la définition de la différentiabilité de Frechet et le fait que $F(0) = 0$, on a pour presque tout $t \in (0, T)$

$$\frac{1}{C_n} F(\omega^{(n)}(t)) = \frac{1}{C_n} \left[F(\omega^{(n)}(t)) - F(0) \right] = F^{'}(0) \widetilde{\omega}^{(n)}(t) + \frac{1}{C_n} R(\omega^{(n)}(t)) \tag{4.2.21}$$

où $F^{'}(0) \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), [H^1(\Omega)]^{'})$ représente la dérivée de Frechet de F au point 0 , et l'application $R\ (.)$:$H^2(\Omega) \longrightarrow [H^1(\Omega)]^{'}$a une propriété que

$$\lim_{\|\Phi\|_{H^2(\Omega)} \longrightarrow 0} \frac{\|R(\varphi)\|_{[H^1(\Omega)]^{'}}}{\|\Phi\|_{H^2(\Omega)}} = 0 \tag{4.2.22}$$

D'après l'hypothèse du **Cas II**, $\omega^{(n)} \longrightarrow 0$ dans $L^2(0, T, H^2(\Omega))$; donc, d'après (4.2.22) et (4.2.20) , on a là presque partout convergence en temps

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{C_n} \left\| R(\omega^{(n)}(t)) \right\|_{[H^1(\Omega)]^{'}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\left\| R(\omega^{(n)}(t)) \right\|_{[H^1(\Omega)]^{'}}}{\|\omega^{(n)}(t)\|_{H^2(\Omega)}} . \left\| \widetilde{\omega}\ ^{(n)}(t) \right\|_{H^2(\Omega)} = 0. \tag{4.2.23}$$

De plus , d'après (4.2.21) et la continuité de Lipschitz de F dans l 'hypothése 1, on a présque partout en temps

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_n} \left\| R(\omega^{(n)}(t)) \right\|_{[H^1(\Omega)]^{'}} &= \frac{1}{C_n} F(\omega^{(n)}(t)) - F^{'}(0) \widetilde{\omega}^{(n)}(t) \\ &\leq C(E^{(n)}(0)) \frac{\|\omega^{(n)}(t)\|_{H^2(\Omega)}}{C_n} + \left\| F^{'}(0) \right\| \left\| \widetilde{\omega}\ ^{(n)}(t) \right\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C_T \ \ \forall n \end{aligned} \tag{4.2.24}$$

ou, dans la derniére étape, nous avons rappeler (4.2.20).

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et la convergence (4.2.17) au membre de droite de (4.2.21), pour obtenir

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{C_n} F(\omega^{(n)}(t)) = F^{'}(0) \widetilde{\omega} \qquad \text{dans } \ L^2(0, T, \left[H^1(\Omega) \right]^{'}) \tag{4.2.25}$$

utilisons les convergences données par (4.2.11), (4.2.16) et (4.2.25), on peut maintenant facilement passer à la limite dans (4.2.12)-(4.2.13), pour trouver que la limite $\widetilde{\omega}$ vérifie

$$\begin{cases} \widetilde{\omega}_{tt} + \Delta^2 \widetilde{\omega} + F^{'}(0) \widetilde{\omega} = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, \infty) \\ \Delta \widetilde{\omega}_t = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, \infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta \widetilde{\omega} + (1 - \mu) \mathcal{B}_1 \widetilde{\omega} = 0 \\ \dfrac{\partial \Delta \widetilde{\omega}^{(n)}}{\partial \nu} + (1 - \mu) \dfrac{\partial \mathcal{B}_2 \widetilde{\omega}}{\partial \tau} - \eta \widetilde{\omega} = 0. \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma \times (0, \infty) \tag{4.2.26}$$

Comme pour le **cas I**, on obtient à partir de ce système que $\widetilde{\omega}_t = 0$, ce qui implique que $\widetilde{\omega}$ vérifie

$$\Delta^2\widetilde{\omega} + F^{'}(0)\widetilde{\omega} = 0$$

$$\begin{cases} \Delta\widetilde{\omega} + (1-\mu)\mathcal{B}_1\widetilde{\omega} = 0 \\ \dfrac{\partial\Delta\widetilde{\omega}^{(n)}}{\partial\nu} + (1-\mu)\dfrac{\partial\mathcal{B}_2\widetilde{\omega}}{\partial\tau} - \eta\widetilde{\omega} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma\times(0,\infty) \tag{4.2.27}$$

Pour terminer la démonstration , la condition $\int_\Omega F(\omega^{(n)})\omega^{(n)}d\Omega \geq 0$, et les convergences données par (4.2.17) et (4.2.25) impliquent que $\int_\Omega F(0)\widetilde{\omega}\widetilde{\omega}d\Omega \geq 0$, qui combinée avec l'éllipticité de la forme bilineaire $a(.,.)$ donne $\widetilde{\omega} = 0$.mais ceci contredit l'égalité (4.2.18), ce qui achève la démonstration du lemme. ■

4.2.1 Fin de la preuve du théorème 4.0.2

Combinant les inégalités des lemmes 4.1.4 et 4.2.1, on obtient

$$E(T) \leq C(E(0))\int_0^T \|\theta\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt \tag{4.2.28}$$

Utilisons le relation de l'énergie (4.1.1), une fois de plus, alors on obtient

- pour $\lambda > 0$, on obtient à partir de la relation d'énergie (4.1.1) que

$$E(0) - E(T) = 2\left\{\int_0^T \|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \lambda\int_0^T \|\theta\|^2_{L^2(\Gamma)}\,dt\right\}$$

et d'après le lemme d'immersion, on trouve

$$E(0) - E(T) \geq \int_0^T \|\theta\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt \tag{4.2.29}$$

- pour $\lambda = 0$, on obtient à partir de la relation d'énergie (4.1.1) que

$$E(0) - E(T) = 2\left\{\int_0^T \|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt\right\}$$

après avoir rappeler que

$$\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx \geq C\int_\Omega \theta^2 dx, \quad \text{pour } \theta\in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad C>0$$

Remplacent ceci (les deux cas) dans l'inégalite précèdente (4.2.28), on trouve

$$E(T) \leq C(E(0))\,[E(0) - E(T)] \tag{4.2.30}$$

d'ou

$$E(T) \leq \frac{C(E(0))}{1 + C(E(0))} E(0) < 1.E(0) \tag{4.2.31}$$

Ceci et un argument classique des semi groupes achève la démonstration du théorème .

4.3 Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons montré: que le probléme thermoélastique non lineaire (P)

1) admet une unique solution

2) L'énergie associée au problème est stable uniformément (exponentiellement) pour le cas $\alpha = 0$,

3) L'opérateur non lineaire $F(.)$ traité, nous permet d'obtenir la stabilisation des système suivants:

a) Le système de " $Von\ karmen$ "

b) L'équation quasilinéaire de "$Berger\prime s$"

c) Le modèle d'une plaque semilineaire "$Euler\ Bernoulli$".

Le problème d'existence et d'unicité s'obtient par utilisation du théorème de Lummer Philips.

Pour la stabilisation, nous avons utilisé la méthode des multiplicateurs.

4.4 Perspectives

Il reste à étudier la stabilisation exponentielle du problème étudié avec divers conditions aux limites et des feedbacks linéaires et non linéaires :

1) Des dissipations internes

2) Des dissipations frontières

a) Sur une partie du bord

b) Sur tout le bord.

Bibliographie

Bibliographie

[1] **J.P. Aubin**, *Un théoréme de compacité,C.R. Asad. Sci.256 (1963), pp. 5042-5044*

[2] **G. Avalos,** *Well posedness and decay of nonlinear thermoelastic systems, preprint, 1999.*

[3] **G. Avalos and I.Laseicka,** *Exponential stability of a thermoelastic system with free bondary conditions without mechanical dissipation, SIAM Journal of mathmatical* Analysis, Vol.29, No 1 (January 1998), pp. 155-182

[4] **G. Avalos and I.Laseicka,** *Exponential stability of a thermoelastic system without* mechanical dissipation, Rendiconti Di Instituto Di Matematica Dell'Università di Trieste, Suppl. Vol. XXVIII (1997), pp.1-28.

[5] **G. Avalos and I.Laseicka,** Uniform decays in nonlinear thermoelastic systems,Optimal Control :Theory,Algorithms and Application, W.W.Hagar and *P.M.Pardalos* (Editor)*, Kluwer Academic Publshers, Boston (1998),pp.1-23.*

[6] **A. Bensoussan, G. Da Prato,M. C. Delfour and S. K. Mitter,** *Representation and* control of infinite dimentional system volumes I and II, Birkhàuser. Boston, 1992.

[7] **H. M. Berger,***A new approach to the analysis of large deflection of plates , J Appl.* Mech. Trans ASME 22 (1955), pp. 465-472.

[8] **E. Bisognisn, V. Bisognisn, P.Menzala and E. Zuazua**, On the *exponential stability for von kàrmàn quation in the presence of thermal effects, to appear in Mathematical* Models and methods in the Applied Sciences*.*

[9] **S.K.Chang and R. Triggiani,** Spectral Analysis of thermo-elastic plate with rotational forces, Optimal Control: Theory, Algorithms and applications, W.W Hager and P.Pardalos (Editors), Kluwer Academic Publishers, Boston (1998), pp. 84-113.

[10] **S. Chen and R.Triggiani,** Characterization of domains of fractional powers of certain operators arising in elastic systems, and applications, Journal of Differential Equations. Vol 64 (1990), pp. 26-42.

[11] **G. Duvant and J. L. Lions,** *les inéquations en mécanique et en phisique, Dunod,* Paris (1972).

[12] **T.Von Kàrmàn,** Festigkeitsprobleme im Maschinenbau, Encyklopedie der *Mathma* tischen *Wissenschaften, Vol. 4(1910), pp. 314-385.*

[13] **J. Kim,** *On the energy decay of a linear thermoelastic bar and plate, SIAM J. Math. Anal. 23 (1992), pp.889-899.*

[14] **J. Lagnese,** *Bondary stabilization of this plates, SIAM* Stud. Appl. Math. 10 (1989).

[15] **I**. **Laseicka**, *A unified theory for abstract parabolic boundary problems-a semigroup approach, Appl. Math. Optim., Vol.6 (1980), pp. 287-333.*

[16] **I**. **Laseicka,** *Control and stabilization of interactive structures, systems and Control in the Twenty. First Century , Birkhàuser, 1997 pp.245-263.*

[17] **I**. **Laseicka.and R.Triggiani,** *Sharp regularity results for mized second order hyperbolyc equations of Newmann type. Part I: The L^2 Boudary case, Annali di Matematica pura ed Applicata, Vol. 157 (1990), pp.285-367.*

[18] **I**. **Laseicka.and R.Triggiani,** *Sharp regularity results for mized second order hyperbolic equations of Neumann type. Part II: General boundary data, J Diff. Equations, Vol. 94 (1991), pp.112-164.*

[19] **I**. **Laseicka.and R.Triggiani,** Recent advances in regularity of second-order hyperbolic mized problems and applications, Dynamics Reported-*Expositions in Dynamical Systems, Vol. 3 (1994), pp. 25-104.*

[20] **I. Laseicka.and R.Triggiani,** Two direct proofs on the analyticity of the S.C.semi group arising in abstract thermo-elastic equations, to appear in Advances in Differential Equations(1998).

[21] **I. Laseicka.and R.Triggiani,** Analyticity of thermo-elastic semi *group with free boundary conditions, Annali di Scuola Normale Superiore di pisa, CI. Sci. (14), Vol. XXVII (1998).*

[22] **I. Laseicka.and R.Triggiani,** Structural decomposition of thermoelastic semigroups with rotational forces. To appear in Semigroup Forum.

[23] **J.L.Lions,** *Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires,* Dound, Paris (1969).

[24] **Z.Liu and M.Renardy,** *A note on the equations of thermoelastic plate, Appl. Math.* Lett , Vol. 8 no. 3 (1995), pp. 1-6.

[25] **Z. Liu and S. Zheng,** Exponential stability of semigroups associated with *thermoelastic systems, Quarterly of applied Mathematics, Vol. 52 (1993), pp. 535-545.*

[26] **Z. Liu and S. Zheng,** *Exponential stability of the Kirchoff plate with thermal or viscoelastic damping, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 55(1997), pp. 551-564.*

[27] **K. Liu and Z. Liu,** *Exponential stability and analyticity of abstract linear thermoelastic systems, ZAMP, 48, (1997) pp. 885-904.*

[28] **A. Luanardi**, *On the Ornestein-Uhlenbeck operator in L^2spaces with respect to invariant measures, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 349, No. 1,* January*(1997), pp. 155-169.*

[29] **J.R. Modeer and W. A. Nash,** *Certain approzimate analysis of the nonlinear be haviour of plates and shallow shells, in the Proceedings of the Symposium on the Theory of thin Elastic Shells, at the Technological University of Delft (1959), edited by W.T. koiter, North Holland, New York (1960).*

[30] **J. E. M. Rivera,** *Energy decay rates in linear thermoelastic, Funkcial. Ekvac, Vol. 35 (1992), pp. 19-30.*

[31] **T. Web**, *Large amptitude flexural vibrations of rectangular plate, Int. J. Mech. Sci. Vol. 5 (1963), pp. 425-438.*

[32] **D. Tataro**, *On the regularity of boundary traces for the wave equation, Annali di Scoula Normals di pisa, to appear.*

[33] **J.L.Lions , E.Magenes ,** *Probleme aux limites non homogene et application ,Volume1, Duond , Paris , (1968).*

[34] **K. Lemrabet**, *Étude de divers problèmes aux limites de Ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers, Thesis, U.S.T.H.B., Alger, 1987.*

[35] **Brezis H** , *Analyse fonctionnelle théorie et applications, Masson paris New York Barcelone Milan Mexico Sao paulo 1983.*

[36] **Showalter R.E.,** *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential euations, Math. Surveys and Monographs, 49, AMS, 1997*

[37] **G. Avalos and I.Laseicka and R.Triggiani ,** *Uniform Stability of Nonlinear Thermoelastic Platezs with Free Boundary Conditions , Numerical Mathematics,Vol. 133, 1999 .*

[38] **Grisvard P .,** *Caracterization de quelques espaces d'interpolation , Arch. Rational. Mech. Anal., 25 (1967), 40-63.*

[39] **J.L.Lions ,E.Magenes,** *Non-Homogeneous boundary value problems and applications , Vol.1. Springer-Verlag, New York, 1972.*

[40] **V. Barbu**, Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces, Noordhoff, Leyden, 1976.

[41] **H. Br ´ezis,** Op´erateurs Maximaux Monotones, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[42] **G. Duvaut and J.L.Lions**, Les Inequations en Mecaniques et en Physiques, Dunod, Paris,1972..

[43] **I. Lasiecka and R. Triggiani,** Control Theory for Partial Differential Equations, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[44] **I. Lasiecka,M.RenardyandR.Triggiani**,Back ward uniqueness of thermoelastic plates with rotational forces, Semigroup Forum, 62 (2001), 217–242.

[45] **E. Zeidler**, Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, vol.I-IV, Springer, Berlin, 1986–1995.

[46] **J. Lagnese and J.L.Lions** Modeling, Analysis and Control of Thin Plates, Masson, Paris, 1988.

[47] **A.Pazy**, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer, New York, 1986.

[48] **Igor Chueshov, Irena Lasciecka**, Von Karman, Evolution Equations, Well-posseness and long time dynamics, Springer New York Dordrecht Heidelberg London