N° d'ordre : 29 / 2009 -M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

U S T H B

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres

Par

DEBBAH lynda

Sujet

Grandes valeurs de la fonction arithmétique de Kalmar

Soutenu publiquement le 02 / 07 / 2009, devant le jury composé de :

Mr.	**AIDER**	Meziane	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr.	**HERNANE**	Mohand Ouamar	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
Mr.	**ZITOUNI**	Mohamed	Professeur	U.S.T.H.B.	Examinateur.
Mr.	**KESSI**	Arezki	Professeur	U.S.T.H.B.	Examinateur.
Mr	**HACHAICHI**	Mohamed Salah	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examinateur.
Mr	**BENSEBAA**	Boualem	Docteur	U.S.T.H.B.	Examinateur.

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur le Professeur Aider Meziane pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Je remercie vivement Monsieur le Professeur Zitouni Mohamed, d'avoir accepté d'examiner ce travail en consacrant son temps à lire cette thèse.

Je voudrais aussi sincèrement exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur Mohand Ouamar Hernane mon Directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Sa disponibilité alliée à sa gentillesse et ses conseils ont été des éléments décisifs dans l'aboutissement de cette thèse. Je lui dois toute ma reconnaissance. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.

Je remercie aussi Monsieur Mohamed Salah Hachaïchi, Maître de conférences d'avoir accepté d'examiner ce travail . Que Monsieur le Professeur Arezki Kessi et Monsieur Bensebaa Boualem Maître de conférences, qui ont bien voulu faire partie du jury, trouvent ici mes remerciements les plus sincères.

Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents et mes-beaux parents pour leur soutien et leur confiance en moi à mon mari Mehrez et mes enfants Rahil, Ikram Et Abederahmane, ainsi qu'au reste de la famille, sans oublier mes amis spécialement Boukedjani Fatiha et tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin à ma formation.

Table des matières

Notations :

Nous utiliserons les notations suivantes :

$f(x) \sim g(x)$ signifie que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

log, le logarithme Népérien.

$\mathcal{P} = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13, ...\}$, l'ensemble des nombres premiers.

p_k le $k-ième$ nombre premier tel que $p_1 = 2$, $p_2 = 3$,

p un nombre premier.

$\pi(x)$ la fonction qui compte le nombre de nombres premiers plus petits que x,

$$\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1.$$

Li, le logarithme intégral :

$$Li(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\epsilon}^{x} \frac{dt}{\log t}\right), \qquad x > 0$$

$\theta(x) = \sum\limits_{p\leq x} \log p$, la fonction de Chebyshev, $\theta(x) \sim x$.

$\tau(n)$, la fonction arithmétique, qui compte le nombre de diviseurs de l'entier n,

$$\tau(n) = \sum_{d\backslash n} 1.$$

$\omega(n)$, la fonction arithmétique qui compte le nombre de facteurs premiers distincts de l'entier n.

$\Omega(n)$, le nombre de facteurs premiers de l'entier n, comptés avec multiplicité.

$\mu(n)$, la fonction arithmétique de Möbius.

$\zeta(s)$, la fonction Zéta de Riemann.

$\lfloor x \rfloor$: la partie entière du nombre réel x

Pour toute suite $\underline{x} = (x_i)_{1\leq i\leq \nu}$ de réels de longueur $\overline{\omega}$, finie ou infinie $\Omega(\underline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{\overline{\omega}} x_i$ (lorsque cette somme a un sens) et $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{\overline{\omega}} |x_i|$. Si $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}_+^k$ et $\underline{y} = (y_1, y_2, ..., y_k) \in \mathbb{R}_+^\ell$ on définit $x' = \left(x'_1, x'_2, ...\right)$ par $x'_i = x_i$ pour $1 \leq i \leq k$ et $x'_i = 0$

pour $i > k$ et $\underline{y}^{'} = \left(y_1^{'}, y_2^{'}, ...\right)$ par $y_i^{'} = y_i$ pour $1 \leq i \leq \ell$ et $y_i^{'} = 0$ pour $i > \ell$. $\left\|\underline{x} - \underline{y}\right\| = \left\|\underline{x}^{'} - \underline{y}^{'}\right\|$.

A l'essemble des suites de réels positives où nuls tel que $0 \leq \Omega\left(\underline{x}\right) < +\infty$, $\underline{0} = (0, 0, 0, ...)$ et $A^* = A \backslash \{0\}$.

Si $\underline{x} \in A^*$ on note $\overline{\omega}\left(\underline{x}\right) = \sup\left\{j \in \mathbb{N}; x_j \neq 0\right\}$.

Pour n entier, de décomposition en facteurs premiers $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} ... q_k^{\alpha_k}$, $\omega\left(n\right) = k$ et

$$\Omega\left(n\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i.$$

$f\left(x\right) \asymp g\left(x\right)$, s'il existe $x_0 > 0$, $a > 0$, $b > 0$ tels que: $\forall x > x_0$, $af\left(x\right) \leq g\left(x\right) \leq bg\left(x\right)$.

Grandes valeurs de La fonction arithmétique de Kalmar

Introduction

La fonction de Kalmar compte les solutions de l'équation diophantienne

$$x_1 x_2 \ldots x_r = n,$$

c'est aussi le nombre de factorisations de l'entier n en produit de r facteurs entiers $x_i \geq 2$, $1 \leq i \leq r$.

L'étude des grandes valeurs de la fonction $K(n)$ est un sujet qui a été déja étudié par L. Kalmar, P. Erdös, E. Hille, R. Evans, M. Klazar et F. Luca. Les resultats de ces derniers ont étés améliorés par M. Deleglise, M. O. Hernane et J. L. Nicolas (cf [5]) où ils ont montré qu'il existe deux constantes C_5 et C_6 tels que, pour tout entier n suffisament grand on a

$$\log K(n) \leq \rho \log n - C_5 \frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log \log n} \qquad \text{où } \rho \text{ est solution de} \quad \zeta(s) = 2,$$

et pour tout n suffisament grand il existe $m \leq n$ tel que :

$$\log K(m) \geq \rho \log n - C_6 \frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log \log n} \geq \rho \log m - C_6 \frac{(\log m)^{1/\rho}}{\log \log m}.$$

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude des résultats récents dûs notamment à M. Deleglise, M. O. Hernane et J. L. Nicolas, nous détaillons les principales démonstrations et nous donnerons quelques résultats et propriétés des nombres $K-$champions.

Ce présent mémoire est constitué de trois chapitres :
Le premier chapitre, est consacré aux rappels sur les fonctions de factorisation d'un entier n ainsi que quelques propriétés de la fonction de Kalmar et les grandes valeurs de cette fonction.

Dans le deuxième chapitre, nous exposons un théorème d'Evans (cf [6]) qui donne une estimation de la fonction $K(n)$, nous exploitons ce théorème pour étudier les grandes valeurs de la fonction de Kalmar.

Nous approchons la foncion $K(n)$ par la fonction F définie par :

$$F(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{k} x_j \log\left(1 + \frac{c(\underline{x})}{x_j}\right) = \sum_{j=1}^{k} \left(x_j \log\left(x_j + c(\underline{x})\right) - x_j \log x_j\right),$$

puis nous résolvons le problème d'optimisation suivant :

$$(P) \begin{cases} \underline{x} \in \mathcal{D}(A) \\ \max F(\underline{x}) \end{cases},$$

où $\mathcal{D}(A) \subset \mathbb{R}_+^{*k}$ est le domaine défini par

$$x_1 \log 2 + x_2 \log 3 + ... + x_k \log p_k \leq A, \text{ où } \quad A \; est \text{ un nombre réel positif.}$$

Le problème d'optimisation (P) a été résolu par Evans (*cf* [6] *Lemme* 6), à l'aide des multipicateurs de Lagrange.

Dans le troisième chapitre, nous étudions l'ordre maximum de la fonction de Kalmar et nous donnons quelques propriétés des nombres $K-$champions, ainsi qu'une estimation du nombre de champions inférieurs à une borne X.

Chapitre 1

Fonctions de factorisation

1.1 Définitions et propriétés

La fonction de factorisation la plus classique est le nombre de diviseurs de l'entier n :

$$\tau(n) = \sum_{d \backslash n} 1,$$

elle est aussi le nombre de solutions de l'équation diophantienne $x_1 x_2 = n$ en nombres entiers positifs x_1 et x_2. On a :

$$\tau_2(n) = \tau(n) = \sum_{d|n} 1.$$

Pour $r = 0$

$$\tau_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}.$$

Pour $r = 1$

$$\tau_1(n) = 1.$$

Pour $r \geq 2$, $\tau_r(n)$ est le nombre de solutions de l'équation diophantienne

$$x_1 x_2 ... x_r = n, \tag{1.1.1}$$

C'est aussi le nombre de représentations de l'entier n en produit de r facteurs entiers. Sa série génératrice est donnée par la relation :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_r(n)}{n^s} = \zeta(s)^r, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1. \tag{1.1.2}$$

en effet, on a

$$\begin{aligned}
\zeta(s)^r &= \left(\sum_{x_1\geq 1}\frac{1}{x_1^s}\right)\left(\sum_{x_2\geq 1}\frac{1}{x_2^s}\right)\cdots\left(\sum_{x_r\geq 1}\frac{1}{x_r^s}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{x_1x_2...x_r=n}\frac{1}{(x_1x_2...x_r)^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x_1x_2...x_r)^s}\sum_{x_1x_2...x_r=n}1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_r(n)}{n^s}
\end{aligned}$$

où $\zeta(s)$ est la fonction Zeta de Riemann définie par

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}, p\in\mathcal{P} \text{ et } \operatorname{Re}(s)>1$$

L'équation $\zeta(s)=2$, admet une seule solution positive ρ tel que $\frac{3}{2}<\rho<2$.
la valeur approchée de ρ est $\rho=1.728..$,

La fonction de factorisation d'Oppenheim notée $O(n)$ compte les factorisations d'un nombre entier n, mais sans tenir compte de l'ordre des facteurs.
Exemple : $n=12$ admet $O(12)=4$, ces factorisations sont: $12=2\times 6=3\times 4=2\times 2\times 3$.

Elle a pour série génératrice,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{O(n)}{n^s}=\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n^s}\right)^{-1}.$$

Soit $\mathcal{A}\subset\{2,3,...\}$; E. Hill et P. Erdös ont généralisé le problème du nombre de factorisation en introduisant la fonction $K_{\mathcal{A}}(n)$ qui compte le nombre de solutions de (1.1.1) pour tout r et $x_i \in\mathcal{A}$.
Dans le cas particulier $\mathcal{A}=\mathcal{P}$, la fonction $K_{\mathcal{P}}$ compte le nombre de solution de (1.1.1) en nombres premiers $p_1,p_2,...,p_k$.
Soit $n=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}...q_k^{\alpha_k}$ où les q_i sont des nombres premiers distincts on a : $\Omega(n)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i$.
La seule possibilité d'écrire n sous la forme (1.1.1) avec x_1, x_2, ..., x_k premiers est de prendre $\Omega(n)=r$ et de choisir α_1 variables x_i égales à q_1, α_2 égales à q_2, ..., α_k égales à q_k.

Le nombre de façons de faire ces choix est le coefficient multinomial,

$$K_{\mathcal{P}}(n) = \binom{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k}{\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_k} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k)!}{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_k!}. \tag{1.1.3}$$

1.2 La fonction de Kalmar

En 1931 L. Kalmar a étudié le cas particulier du nombre de solutions de (1.1.1) avec la condition $x_i \geq 2$ et en tenant compte de l'ordre des facteurs. Il a défini la fonction $K(n)$ et a montré que , lorsque $x \longrightarrow \infty$

$$\sum_{n \leq x} K(n) \backsim \frac{-1}{\rho\zeta'(\rho)} x^{\rho}. \tag{1.2.1}$$

La majoration du reste dans la formule (1.2.1) a été précisée par Ikehara [10] et H.-K. Hwang [9] .

Soit $\lambda > 1$, R. Evans a dans [6] considéré une fonction plus générale $K_\lambda(n)$ dont la série génératrice est

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda - \zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_\lambda(n)}{n^s}., \text{ avec } \zeta(s) \neq \lambda \tag{1.2.2}$$

Lorsque $\lambda = 2$, on obtient la fonction $K(n)$ de Kalmar.

Définition 1.2.1 *La fonction de Kalmar compte les solutions de l'équation diophantienne* (1.1.1) *pour tout* r*, mais avec la condition que chaque facteur* x_i *doit vérifier* $x_i \geq 2$.

Exemple 1.2.1 *Les factorisations de* $n = 12$ *sont :* $12 = 6 \times 2 = 3 \times 4 = 4 \times 3 = 2 \times 6 = 2 \times 3 \times 2 = 3 \times 2 \times 2 = 2 \times 2 \times 3$
donc $K(12) = 8$.

La formule (1.1.3) , ne s'applique pas à la fonction de Kalmar. Cependant il existe une formule dûe à Mac- Mahon (*cf* [15]) aussi (*cf* [14]) pour $K(n)$.
Si la décomposition de n en produit de facteurs premiers est $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} ... q_k^{\alpha_k}$, alors

$$K\left(q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} ... q_k^{\alpha_k}\right) = \sum_{j=1}^{\alpha_1+\alpha_2+...\alpha_k} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^j \binom{j}{i} \prod_{h=1}^{k} \binom{\alpha_h + j - i - 1}{\alpha_h} \tag{1.2.3}$$

La formule (1.2.3) , ne permet pas d'étudier les grandes valeurs de $K(n)$, cependant a partir de (1.2.2), Evans a donné dans [6] une formule asymptotique pour $K\left(q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha 2} ... q_k^{\alpha_k}\right)$ lorsque $\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k$ tend vers l'infini. C'est cette formule que nous utiliserons pour étudier les grandes valeurs de la fonction de Kalmar.

Dans certains cas particuliers la formule (1.2.3) se simplifie, en effet,

si $n = q^\alpha$, q premier et $\alpha \geq 1$ alors

$$K(q^\alpha) = 2^{\alpha-1}$$

si $n = q_1^i q_2^j$, et si $i \geq j$ on a,

$$K\left(q_1^i q_2^j\right) = 2^{i+j-1} \sum_{k=0}^{j} \binom{i}{k} \binom{j}{k} 2^{-k}.$$

Exemple 1.2.2 *Pour* $n = 100 = 2^2 5^2$,

$$\begin{aligned}
K\left(2^2 5^2\right) &= 2^{2+2-1} \sum_{k=0}^{j} \binom{2}{k} \binom{2}{k} 2^{-k} \\
&= 2^3 \left(\binom{2}{0}\binom{2}{0} 2^{-0} + \binom{2}{1}\binom{2}{1} 2^{-1} + \binom{2}{2}\binom{2}{2} 2^{-2}\right) \\
&= 8\left(1 + 2 + \frac{1}{2^2}\right) \\
&= 26
\end{aligned}$$

les 26 *factorisations de* $n = 100$, *sont :* $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 5 \times 5 \times 2 = 5 \times 5 \times 2 \times 2 = 5 \times 2 \times 5 \times 2 = 5 \times 2 \times 2 \times 5 = 4 \times 5 \times 5 = 5 \times 4 \times 5 = 5 \times 5 \times 4 = 10 \times 2 \times 5 = 2 \times 10 \times 5 = 2 \times 5 \times 10 = 5 \times 2 \times 10 = 10 \times 5 \times 2 = 5 \times 10 \times 2 = 10 \times 10 = 25 \times 2 \times 2 = 2 \times 25 \times 2 = 2 \times 2 \times 25 = 4 \times 25 = 25 \times 4 = 20 \times 5 = 5 \times 20 = 50 \times 2 = 2 \times 50$,

Exemple 1.2.3 *Pour* $n = 729 = 3^6$, *on a*

$$K(729) = K\left(3^6\right) = 2^{6-1} = 2^5 = 32,$$

il y a donc 32 façons de représenter 729 *comme produit d'entiers* ≥ 2.

1.2.1 Propriétés de la fonction de Kalmar

Pour $n \geq 2$ la fonction de Kalmar vérifie les propriétées suivantes,

1)

$$K(n) = \sum_{d|n, d>1} K\left(\frac{n}{d}\right) = \frac{1}{2} \sum_{d|n} K\left(\frac{n}{d}\right) \tag{1.2.4}$$

2)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K(n)}{n^s} &= \frac{1}{2-\zeta(s)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\zeta(s) - 1)^k \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Preuve. La première égalité dans 2) s'obtient à partir de la relation d'Evans (1.2.2) pour $\lambda = 2$. Comme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-\zeta(s)} &= \frac{1}{1-(\zeta(s)-1)} \\ &= 1 + (\zeta(s)-1) + (\zeta(s)-1)^2 + ... + (\zeta(s)-1)^k + ... \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\zeta(s)-1)^k . \end{aligned}$$

la deuxième égalité est établie. ■

La fonction de Kalmar K est reliée aux fonctions τ_r par la relation,

$$K(n) = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\tau_r(n)}{2^r}.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-\zeta(s)} &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{\zeta(s)}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{\zeta(s)}{2}\right) + \left(\frac{\zeta(s)}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\zeta(s)}{2}\right)^k + ...\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\zeta(s)^r}{2^r} = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_r(n)}{n^s}}{2^r} = \frac{1}{2}\left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\tau_r(n)}{2^r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\tau_r(n)}{2^r}}{n^s}. \end{aligned}$$

la propriété précédente permet de déduire

$$K(n) = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\tau_r(n)}{2^r}$$

■

1.3 Grandes valeurs des fonctions de factorisation

S. Ramanujan fut le premier, dans [18] à étudier de façon extensive les grandes valeurs de la fonction $\tau_2 = \tau$. Pour cela, il a introduit les nombres hautements composés (un nombre N est dit hautement composé si $M < N \Longrightarrow \tau(M) < \tau(N)$), et a donné de nombreuses propriétés de ces nombres. Les idées de S. Ramanujan ont été généralisées et développées, essentiellement en remplaçant la fonction τ par d'autres fonctions arithmetiques.

Les grandes valeurs de la fonction d'Oppenheim ont été etudiées dans [1] et [11]. Oppenheim, (1927) a montré que l'ordre maximum de la fonction d'Oppenheim $O(n)$ est

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} O(n) \sim \frac{e^{2\sqrt{\log x}}}{2\sqrt{\pi}(\log x)^{3/4}}.$$

E. R. Canfield, P. Erdös et C. Pomerance, (1983) ont démontré (cf [1]):

Théorème 1.3.1 *Il existe deux constantes D_1, D_2 avec $0 < D_1 < D_2$ tel que on ait*

1) Pour tout n assez grand,

$$O(n) \leq ne^{\left\{-\frac{\log n}{\log_2}\left(\log_3 n + \log_4 n + \frac{\log_4 n - 1}{\log_3 n} + D_1\frac{\log_4^2 n}{\log_3^2 n}\right)\right\}}.$$

et

2) Pour tout n,

$$O(n) \geq ne^{\left\{-\frac{\log n}{\log_2}\left(\log_3 n + \log_4 n + \frac{\log_4 n - 1}{\log_3 n} + D_2\frac{\log_4^2 n}{\log_3^2 n}\right)\right\}}.$$

Les grandes valeurs de la fonction de Kalmar ont été étudiées par P. Erdös (cf [7]), qui a enoncé le :

Théorème 1.3.2 *Il existe deux constantes $f_1$et f_2, $0 < f_1 < f_2 < 1$, tel que,*

1) Pour tout n,

$$K(n) > \frac{n^\rho}{e^{(\log n)^{f_1}}},$$

2) Pour tout $n > n_0$,

$$K(n) < \frac{n^\rho}{e^{(\log n)^{f_2}}}$$

La majoration $K(n) < n^\rho$ obtenue dans [3] par B. Chor, P. Lemeke et Z. Mador a été améliorée en 2007 par M. Klazar et F. Luca, qui ont démontré (cf [13]) grâce à l'inégalité $K(nn') \geq 2K(n)K(n')$ valable pour tout couple d'entiers (n, n'),

1) Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $\varepsilon > 0$:

$$K(n) < \frac{n^\rho}{\exp\left((\log n)^{1/\rho} / (\log\log n)^{1+\varepsilon}\right)}.$$

2) Il existe une constante $c'_5 > 0$ et n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$

$$K(n) > \frac{n^\rho}{\exp\left(c'_5 (\log n) / (\log\log n)^{1/\rho}\right)}$$

Ces derniers résultats ont été améliorés par M. Deleglise, M. O. Hernane et J. L. Nicolas.(cf [5]).

Chapitre 2

L'éstimation d'Evans et le problème d'optimisation

2.1 L'éstimation d'Evans

2.1.1 La fonction c

Définition 2.1.1 *(cf [6]) .Soit $\underline{x} \in \mathcal{A}^*$ et $\overline{\omega} = \overline{\omega}(\underline{x})$;et $c = c(\underline{x})$ l'unique solution positive de l'équation :*

$$2t^r - \prod_{j=1}^{\overline{\omega}} (t + x_j) = 0$$

Proposition 2.1.1 *c vérifie la relation suivante :*

$$\prod_{j=1}^{\overline{\omega}} \left(1 + \frac{x_j}{c}\right) = 2 \tag{2.1.1}$$

de plus, pour tout $\lambda > 0$,

$$c(\lambda x_1, \lambda x_2, ...) = \lambda c(x_1, x_2, ...) \tag{2.1.2}$$

et

$$\Omega(\underline{x}) \leq c(\underline{x}) \leq \frac{\Omega(\underline{x})}{\log 2} \leq \frac{3\Omega(\underline{x})}{2}. \tag{2.1.3}$$

Preuve. Pour tout $t > 0$ posons,

$$\varphi(t) = H(\underline{x}, t) = \sum_{j=1}^{\varpi} \log\left(1 + \frac{x_j}{t}\right)$$

φ étant dérivable pour $t > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \left(\sum_{j=1}^{\varpi} \log\left(1 + \frac{x_j}{t}\right)\right)' = \sum_{j=1}^{\varpi} \log\left(1 + \frac{x_j}{t}\right)' \\
&= \sum_{j=1}^{\varpi} \frac{\left(1 + \frac{x_j}{t}\right)'}{1 + \frac{x_j}{t}} = \sum_{j=1}^{\varpi} \frac{-\frac{x_j}{t^2}}{\frac{t + x_j}{t}} \\
&= -\sum_{j=1}^{\varpi} \frac{x_j}{t(t + x_j)}
\end{aligned}$$

comme $t > 0$ et $x_j > 0$, pour $1 \leq j \leq \omega$ alors $\varphi'(t) < 0$ et la fonction φ est donc strictement décroissante, comme le montre le tableau des variations de φ suivant :

t	0	c	$+\infty$
φ'		$-$	
φ	$+\infty$ $\searrow$		
		$\log 2$ $\searrow$	0

Et comme φ est continue, le théorème des valeurs intermediaires implique qu'il existe $c > 0$, tel que $\varphi(c) = \log 2$. L'unicité de c découle du fait que φ est strictement décroissante. Comme

$$\begin{aligned}
\varphi(c) &= \log 2 \iff H(c, x_j) = \log 2 \\
&\iff \sum_{j=1}^{\varpi} \log\left(1 + \frac{x_j}{c}\right) = \log 2 \\
&\iff \log \prod_{j=1}^{\varpi} \left(1 + \frac{x_j}{c}\right) = \log 2 \\
&\iff \prod_{j=1}^{\varpi} \left(1 + \frac{x_j}{c}\right) = 2.
\end{aligned}$$

L'existence et l'unicité de $c > 0$, sont donc démontrées.

Vérifions maintenant la propriété (2.1.2) . Soit $\lambda > 0$, on a d'une part

$$\prod_{j=1}^{\varpi}\left(1+\frac{\lambda x_j}{\lambda c\left(x_1, x_2, \ldots\right)}\right)=2 \tag{1}$$

et d'autre part on a

$$\prod_{j=1}^{\varpi}\left(1+\frac{\lambda x_j}{c\left(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots\right)}\right)=2 \tag{2}$$

on déduit alors de (1) et (2) que

$$\lambda c\left(x_1, x_2, \ldots\right)=c\left(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots\right)$$

d'où la propriété (2.1.2).

Pour démontrer l'encadrement (2.1.3), montrons d'abord le lemme suivant

Lemme1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\left(x_j\right)_{1 \leq j \leq k}$ une suite de nombres réels positifs où nuls et soit $a \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{x_j}{a}\right) \geq 1+\sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{a}.$$

Preuve du lemme. par récurrence sur l'entier k

pour $k=1$, on a l'égalité

pour $k=2$, on a

$$\prod_{j=1}^{2}\left(1+\frac{x_j}{a}\right)=1+\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{a}+\frac{x_1 x_2}{a^2} \geq 1+\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{a}, \text{ car } \frac{x_1 x_2}{a^2} \geq 0$$

donc

$$\prod_{j=1}^{2}\left(1+\frac{x_j}{a}\right) \geq 1+\sum_{j=1}^{2} \frac{x_j}{a}.$$

Supposons que l'on a

$$\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{x_j}{a}\right) \geq 1+\sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{a}$$

Montrons alors que

$$\prod_{j=1}^{k+1}\left(1+\frac{x_j}{a}\right) \geq 1+\sum_{j=1}^{k+1} \frac{x_j}{a}$$

on a

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{k+1}\left(1+\frac{x_j}{a}\right) &= \prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{x_j}{a}\right)\left(1+\frac{x_{k+1}}{a}\right) \geq \left(1+\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j}{a}\right)\left(1+\frac{x_{k+1}}{a}\right),\\ \left(1+\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j}{a}\right)\left(1+\frac{x_{k+1}}{a}\right) &= 1+\frac{x_{k+1}}{a}+\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j}{a}+\sum_{j=1}^{k}\frac{x_jx_{k+1}}{a^2} \geq 1+\sum_{j=1}^{k+1}\frac{x_j}{a},\\ \text{car la somme}\sum_{j=1}^{k}\frac{x_jx_{k+1}}{a^2} &\geq 0.\end{aligned}$$

d'où $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{x_j}{a}\right) \geq 1+\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j}{a}$$

d'où le lemme ■

Retour à la preuve de (2.1.3) .

Pour $t = \Omega\left(\underline{x}\right) = \Omega$, on obtient

$$H\left(\underline{x},\Omega\right) = \sum_{j=1}^{\varpi}\log\left(1+\frac{x_j}{\Omega}\right) = \log\prod_{j=1}^{\varpi}\left(1+\frac{x_j}{\Omega}\right)$$

En utilisant le lemme 1 précédent, on obtient

$$H\left(\underline{x},\Omega\right) = \log\prod_{j=1}^{\varpi}\left(1+\frac{x_j}{\Omega}\right) \geq \log\left(1+\sum_{j=1}^{\varpi}\frac{x_j}{\Omega}\right)$$

comme, $\Omega = \sum_{j=1}^{\varpi} x_j$, il vient alors

$$H\left(\underline{x},\Omega\right) \geq \log 2$$

or on sait que,

$$H\left(\underline{x},c\right) = \log\prod_{j=1}^{\varpi}\left(1+\frac{x_j}{c}\right) = \log 2$$

cela donne donc

$$H\left(\underline{x},\Omega\right) \geq H\left(\underline{x},c\right)$$

la fonction $H\left(\underline{x},t\right)$ étant décroissante cela implique alors $\Omega \leq c$ (3) .

Montrons que l'on a la majoration

$$c\left(\underline{x}\right) \leq \frac{\Omega\left(\underline{x}\right)}{\log 2}$$

Pour $u > -1$, on a $\log(1+u) \leq u$, d'où

$$\log 2 = \sum_{j=1}^{\overline{\omega}} \log\left(1 + \frac{x_j}{c}\right) \leq \sum_{j=1}^{\overline{\omega}} \frac{x_j}{c} = \frac{\Omega}{c}$$

ce qui implique

$$\Omega(\underline{x}) \geq c(\underline{x}) \log 2 \text{ si et seulement si } c(\underline{x}) \leq \frac{\Omega(\underline{x})}{\log 2} \qquad (4)$$

comme, $\log 2 < \dfrac{3}{2}$, on obtient

$$c(\underline{x}) \leq \frac{3\Omega(\underline{x})}{2} \qquad (5)$$

Enfin $(3), (4)$ et (5) entrainent alors

$$\Omega(\underline{x}) \leq c(\underline{x}) \leq \frac{\Omega(\underline{x})}{\log 2} \leq \frac{3\Omega(\underline{x})}{2}.$$

ceci achève la preuve de $(2.1.3)$. ■

Si $\overline{\omega}$ est fini alors,

$$c(x_1, x_2, ..., x_{\overline{\omega}}, 0, ...) = c(x_1, x_2, ..., x_{\overline{\omega}}) \qquad (2.1.4)$$

et la suite infinie $\underline{x}'$ définie par $x_i' = x_i$ pour $i \leq \overline{\omega}$ et $x_i' = 0$ pour $i > \overline{\omega}$ est un élément de A et $c(\underline{x}') = c(x_1, x_2, ...x_{\overline{\omega}})$. Par convention, on pose $c(\underline{0}) = 0$.

c est une fonction symétrique de ses arguments. il suffit de vérifier que l'on a

$$c(x_1, x_2, ..., x_k, ...) = c(x_2, x_1, ..., x_k, ...)$$

Posons $x_1' = x_2$, $x_2' = x_1$ et $x_j' = x_j$ pour tout $j \geq 3$, alors

$$\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{x_j'}{c(x_1', x_2', ..., x_k', ...)}\right) = \prod_{j=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{x_j}{c(x_1, x_2, ...x_k, ...)}\right) = 2$$

donc $c(x_1', x_2', ..., x_k', ...) = c(x_2, x_1, ...x_k, ...) = c(x_1, x_2, ...x_k, ...)$ d'où c est symétrique. c est une fonction croissante de chaque variable de x_i.en effet on a :

$$\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{x_j}{c}\right) = 2$$

Soit $x_1' > x_1$ et $x_j' = x_j$ pour $j \geq 2$, alors

$$\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x_j'}{c}\right) = \left(1+\frac{x_1'}{c}\right)\prod_{j=2}^{+\infty}\left(1+\frac{x_j'}{c}\right) > \prod_{j=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x_j}{c}\right) = 2$$

donc

$$\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x_j'}{c}\right) > 2 = \prod_{j=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x_j'}{c'}\right)$$

ce qui implique $c < c'$, autrement dit, on a

$$c' = c\left(x_1', x_2', ...\right) = c\left(x_1', x_2, ...\right) > c\left(x_1, x_2, ...\right)$$

d'où $c\left(x_1, x_2, ...\right)$ est croissante en la variable x_1. Comme c est symétrique de ses variables, alors c est croissante par rapport à chacune des variables.

Lemme 2.1.1 *Soit* $\underline{x} = \left(x_1, x_2, ...\right) \in A^*$, $c = c\left(\underline{x}\right)$ *et, pour tout* $k \geq 1$, *on pose,*

$$c_k = c\left(x_1, x_2, ..., x_k, 0, 0, 0, ...\right).$$

Alors

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} c_k = c$$

Preuve. Montrons que la suite (c_k), est croissante.
on a $c_k = c\left(x_1, x_2, ..., x_k, 0, 0, ...\right)$ et

$$\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x_j}{c}\right) = 2.$$

considérons la fonction φ définie par

$$\varphi\left(t\right) = \prod_{j=1}^{k+1}\left(1+\frac{x_j}{t}\right), \text{ pour } t > 0.$$

On a

$$\varphi\left(c_k\right) = \prod_{j=1}^{k+1}\left(1+\frac{x_j}{c_k}\right) = \prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{x_j}{c_k}\right)\left(1+\frac{x_{k+1}}{c_k}\right) = 2\left(1+\frac{x_{k+1}}{c_k}\right) > 2$$

donc

$$\varphi\left(c_k\right) > 2 \tag{2.1.5}$$

Par ailleurs on a:

$$\varphi(c_{k+1}) = \prod_{j=1}^{k+1}\left(1+\frac{x_j}{c_{k+1}}\right) = 2 \tag{2.1.6}$$

de (2.1.5) et (2.1.6) on déduit alors que

$$\varphi(c_k) > \varphi(c_{k+1}) \tag{2.1.7}$$

comme φ est décroissante, cela entraine que

$$c_k < c_{k+1},\ \forall k \geq 1 \tag{2.1.8}$$

donc la suite $(c_k)_{k\geq 1}$ est coissante de plus pour tout $k \geq 1$, on a $c_k < c$. La suite $(c_k)_{k\geq 1}$ est donc croissante est majorée par c, elle est donc convergente. Soit $\hat{c}$ la limite de la suite $(c_k)_{k\geq 1}$, alors $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} c_k = \hat{c}$. Montrons que $\hat{c} = c$.

Nous allons montrer d'abord que $\prod\limits_{j=1}^{k}\left(1+\frac{x_j}{t}\right)$ converge uniformément vers $\prod\limits_{j=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x_j}{t}\right)$, pour cela le lemme suivant nous sera utile.

Lemme*. Pour tout x tel que $|x| < \frac{1}{2}$, on a

$$|e^x - 1| < \frac{3}{2}|x|.$$

Preuve. On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

d'où

$$\frac{e^x-1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + ...$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{e^x-1}{x}\right| &= \left|1+\frac{x}{2}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{12}+...\right)\right| \leq 1 + \frac{|x|}{2}\left(1+|x|+|x|^2+...\right) \\
\left|\frac{e^x-1}{x}\right| &\leq 1 + \frac{|x|}{2}\left(\frac{1}{1-|x|}\right) < \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

d'où on a l'inégalité :

$$|e^x - 1| < \frac{3}{2}|x| \tag{2.1.9}$$

ce qui prouve le lemme. ■

Montrons que le produit $\prod\limits_{j=1}^{k}\left(1+\frac{x_j}{t}\right)$ converge uniformément vers $\prod\limits_{j=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x_j}{t}\right)$ sur tout intervalle $[u, +\infty[$, $u > 0$.

Posons,

$$f_k(t) = \prod_{j=1}^{k}\left(1 + \frac{x_j}{t}\right) \text{ et } f(t) = \prod_{j=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{x_j}{t}\right) \tag{2.1.10}$$

majorons $|f(t) - f_k(t)|$ par un nombre α_k independant de t tel que $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$.

On a

$$|f(t) - f_k(t)| = |f(t)|\left|1 - \frac{f_k(t)}{f(t)}\right| \tag{2.1.11}$$

comme $t > u$, alors

$$|f(t) - f_k(t)| \leq f(u)\left|1 - \frac{1}{\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x_j}{t}\right)}\right| \tag{2.1.12}$$

puisque f est décroissante. Posons

$$R_k(t) = \frac{1}{\prod_{j=k+1}^{+\infty}\left(1 + \frac{x_j}{t}\right)} > 0, \text{ car } x_j \geq 0 \text{ et } t > u > 0 \tag{2.1.13}$$

alors

$$|\log R_k(t)| = \left|\sum_{j=k+1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{x_j}{t}\right)\right| \leq \frac{1}{t}\sum_{j=k+1}^{+\infty} x_j \leq \frac{1}{u}\sum_{j=k+1}^{+\infty} x_j \tag{2.1.14}$$

comme la série $\frac{1}{u}\sum_{j=1}^{k} x_j$ est convergente alors $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{u}\sum_{j=k+1}^{+\infty} x_j = 0$.

Il existe donc k_0 suffisamment grand tel que pour tout $k \geq k_0$, on ait

$$\left|\frac{1}{u}\sum_{j=k+1}^{+\infty} x_j\right| < \frac{1}{2} \tag{2.1.15}$$

Pour ce k_0, on a $\forall\ k \geq k_0$

$$|\log R_k(t)| < \frac{1}{2} \tag{2.1.16}$$

écrivons que

$$R_k(t) - 1 = \exp(\log R_k(t)) - 1. \tag{2.1.17}$$

Par le lemme *, on obtient pour $k \geq k_0$:

$$|R_k(t) - 1| = |\exp(\log R_k(t)) - 1| \leq \frac{3}{2}|\log R_k(t)| \tag{2.1.18}$$

puisque $|\log R_k(t)| < \dfrac{1}{2}$, pour $k \geq k_0$ et de $(2.1.16), (2.1.17), (2.1.18)$, on en déduit que

$$\begin{aligned} |f(t) - f_k(t)| &\leq f(u)\left(\frac{3}{2}\right)\frac{1}{u}\sum_{j=k+1}^{+\infty} x_j \\ &\leq \frac{3}{2}\frac{f(u)}{u}\frac{1}{u}\sum_{j=k+1}^{+\infty} x_j \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

on a donc

$$|f(t) - f_k(t)| \leq \alpha_k,\ \text{où } \alpha_k = \frac{3}{2}\frac{f(u)}{u}\frac{1}{u}\sum_{j=k+1}^{+\infty} x_j. \tag{2.1.20}$$

comme la série $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j$ est convergente, cela entraine que $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$. Donc
$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\ k_0, \forall\ k \geq k_0, \forall t \in [u, +\infty[\ : |f(t) - f_k(t)| < \varepsilon$
par suite la suite de fonctions $(f_k(t))_k$ converge uniformément vers

$$f(t) = \prod_{j=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{x_j}{t}\right)$$

La suite $(f_k(t))_k$ est une suite de fonctions continues puisque $f_k(t) = \prod_{j=1}^{k}\left(1 + \frac{x_j}{t}\right)$ est continue sur $[u, +\infty[$, donc sa limite $f(t) = \prod_{j=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{x_j}{t}\right)$ est une fonction continue car $(f_k(t))_k$ converge uniformément vers $f(t), \forall t \in [u, +\infty[$.
Montrons que l'on a:

$$\lim_{k\to\infty} f_k(c_k) = f(\hat{c})$$

c'est à dire $\forall\varepsilon > 0, \exists k_0,$ tel que $\forall k \geq k_0 : |f(\hat{c}) - f_k(c_k)| < \varepsilon$
écrivons,

$$\begin{aligned} |f(\hat{c}) - f_k(c_k)| &= |f(\hat{c}) - f(c_k) + f(c_k) - f_k(c_k)| \\ &\leq |f(\hat{c}) - f(c_k)| + |f(c_k) - f_k(c_k)| \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

comme $(f_k(t))_k$ converge uniformément vers $f(t)$, $\forall t \in [u, +\infty[$, alors

$$\forall\varepsilon > 0, \exists k_1, \text{tel que } \forall k \geq k_1 : |f(c_k) - f_k(c_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1.22}$$

ceci est d'une part d'autre part, on a $f(t)$ continue sur $[u, +\infty[$ donc continue en c_k, $\forall k > 0, (\text{car } c_k > 0)$, par suite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_2, \text{tel que } \forall k \geq k_2 : |f(\hat{c}) - f(c_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.1.23}$$

choisissons $k_0 = \max(k_1, k_2)$, les inégalités (2.1.21), (2.1.22) et (2.1.23) impliquent alors

$$\forall k > k_0, |f(\hat{c}) - f_k(c_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{2.1.24}$$

ainsi on a,

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{x_j}{c_k}\right) = \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x_j}{\hat{c}}\right) = 2$$

comme on a aussi

$$\prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x_j}{c}\right) = 2$$

alors

$$\prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x_j}{\hat{c}}\right) = \lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{x_j}{c_k}\right) = 2 = \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x_j}{c}\right) \tag{2.1.25}$$

d'où l'on déduit que

$$\hat{c} = c$$

■

Lemme 2.1.2 *Soit $\underline{x} \in A^*$. Pour tout entier $i \geq 1$, c admet une dérivée partielle par rapport à x_i, donnée par*

$$\frac{\partial c(\underline{x})}{\partial x_i} = \frac{1}{T(\underline{x})} \frac{c(\underline{x})}{c(\underline{x}) + x_i}, \quad \textit{avec} \;\; T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{c(\underline{x}) + x_i} \tag{2.1.26}$$

Preuve. Puisque c est une fonction symétrique de ses arguments on peut supposer $i = 1$. Fixons $x_2, x_3, ..., x_k$, et supposons les d'abord non tous nuls. Posons $\underline{x} = (x_1, x_2, ...x_k, ...)$. L'application $x_1 \longmapsto c(\underline{x})$ est une bijection croissante de $[0, +\infty[$ sur $[c_0, +\infty[$ avec $c_0 = (0, x_2, x_3, ...) > 0$, car par définition, x_1 s'explicite en fonction de c, puisque,

$$\prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x_j}{c}\right) = \left(1 + \frac{x_1}{c}\right) \prod_{j=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{x_j}{c}\right) = 2 \tag{2.1.27}$$

posons

$$\Pi = \prod_{j=2}^{+\infty}\left(1+\frac{x_j}{c}\right) \tag{2.1.28}$$

les relations (2.2.27) et (2.2.28) impliquent

$$x_1 = \frac{2c}{\Pi} - c \tag{2.1.29}$$

la convergence de la série $\sum_{j=2}^{+\infty} x_j$ entraine que

$$\log \Pi = \sum_{j=2}^{+\infty} \log\left(1+\frac{x_j}{c}\right)$$

est dérivable de c sur $[c_0, +\infty[$ et que l'on a

$$\begin{aligned}
\frac{d\Pi}{dc} &= \frac{d}{dc}\left(e^{\log \Pi}\right) = \Pi\left(\frac{d}{dc}\log \prod\right) = \Pi\left(\sum_{j=2}^{+\infty}\frac{d}{dc}\log\left(1+\frac{x_j}{c}\right)\right) \\
&= \Pi\left(-\frac{1}{c}\sum_{j=2}^{+\infty}\left(\frac{x_j}{c+x_j}\right)\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d\Pi}{\Pi dc} = -\frac{1}{c}\left(T\left(x\right) - \frac{x_1}{c+x_1}\right). \tag{2.1.30}$$

Il en resulte que $c \longmapsto x_1$ est une bijection croissante et continûment dérivable de $[c_0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ et que l'on a, puisque $\Pi = \dfrac{2c}{c+x_1}$, d'aprés (2.2.29)

$$\frac{dx_1}{dc} = \frac{d}{dc}\left(\frac{2c}{\Pi} - c\right) = \frac{d}{dc}\left(\frac{2c}{\Pi}\right) - 1 = \frac{2}{\Pi} - \left(\frac{2c}{\Pi^2}\frac{d\Pi}{dc}\right) - 1$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dc} &= \frac{2}{\Pi} - \left\{\frac{2c}{\Pi^2}\Pi\left[-\frac{1}{c}\left(T\left(\underline{x}\right) - \frac{x_1}{c+x_1}\right)\right]\right\} - 1 \\
&= \frac{2}{\Pi}\left\{1 + T\left(\underline{x}\right) - \frac{x_1}{c+x_1}\right\} - 1 = \frac{2}{\Pi}\left\{\frac{c + x_1 + (c+x_1)\,T\left(\underline{x}\right) - x_1}{c+x_1}\right\} - 1 \\
&= \frac{2}{\Pi}\left\{\frac{c}{c+x_1} + \frac{c+x_1}{c}T\left(x_1\right)\left(\frac{c}{c+x1}\right)\right\} - 1
\end{aligned}$$

sachant que $x_1 = \dfrac{2c}{\Pi} - c$ implique $\dfrac{x_1+c}{c} = \dfrac{2}{\Pi}$ alors

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dc} &= \frac{2}{\Pi}\left\{\frac{\Pi}{2}+\left(\frac{c+x_1}{c}\right)T\left(\underline{x}\right)\right\}-1 \\ &= \left(\frac{c+x_1}{c}\right)T\left(\underline{x}\right) \end{aligned} \tag{2.1.31}$$

par le théorème d'inversion c est une fonction continûment dérivable de x_1 et la relation (2.1.26) implique

$$\frac{\partial c\left(\underline{x}\right)}{\partial x_1}=\frac{1}{\dfrac{\partial x_1}{\partial c\left(\underline{x}\right)}}=\frac{1}{\left(\dfrac{c+x_1}{c}\right)T\left(\underline{x}\right)}=\frac{c}{c+x_1}\frac{1}{T\left(\underline{x}\right)}. \tag{2.1.32}$$

si $0=x_2=x_3=...$, la définition (2.1.1) donne $c\left(\underline{x}\right)=x_1$ et le resultat est encore vrai. ■

Lemme 2.1.3 *Soit* (γ_i) *une suite de nombres réels verifiant* $0\leq\gamma_i\leq 1$ *et* $\sum_{i=1}^{+\infty}\gamma_i<+\infty$. *Alors*

$$\prod_{i=1}^{+\infty}\left(1-\gamma_i\right)\geq 1-\sum_{i=1}^{+\infty}\gamma_i.$$

Preuve. On a

$$\left(1-\gamma_1\right)\left(1-\gamma_2\right)=1-\gamma_1-\gamma_2+\gamma_1\gamma_2$$

puis par recurrence, supposons que la propriété suivante est vrai

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1-\gamma_i\right)\geq 1-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i$$

et montrons que l'on a

$$\prod_{i=1}^{n+1}\left(1-\gamma_i\right)\geq 1-\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i$$

on a

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n+1}\left(1-\gamma_i\right) &= \prod_{i=1}^{n}\left(1-\gamma_i\right)\left(1-\gamma_{n+1}\right)\geq\left(1-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\right)\left(1-\gamma_{n+1}\right) \\ &\geq 1-\gamma_{n+1}-\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\right)+\gamma_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\right)\geq 1-\gamma_{n+1}-\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\prod_{i=1}^{n+1}\left(1-\gamma_i\right)\geq 1-\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i$$

et enfin en passant à la limite

$$\prod_{i=1}^{+\infty}(1-\gamma_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{+\infty}\gamma_i.$$

■

Lemme 2.1.4 *Pour tout* $\underline{x} \in A^*$, *on pose*

$$T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{x_i}{c(\underline{x}) + x_i} \quad \textit{alors} \quad \frac{1}{2} \leq T(\underline{x}) \leq 1$$

et chaque dérivée partielle de c vérifie

$$0 \leq \frac{\partial c(\underline{x})}{\partial x_i} \leq \frac{1}{T(\underline{x})} \leq 2.$$

Preuve. L'encadrement (2.1.3) donne la majoration

$$T(\underline{x}) \leq \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{x_i}{c + x_i} \leq \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{x_i}{c} = \frac{\Omega}{c} \leq 1$$

pour la minoration notons $\gamma_i = \dfrac{x_i}{c + x_i}$ par la définition (2.1.1) de c on a

$$\prod_{i=1}^{+\infty}(1-\gamma_i) = \prod_{i=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x_i}{c + x_i}\right) = \prod_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{c}{c + x_i}\right) = \prod_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{c + x_i}{c}\right)} = \frac{1}{2} \tag{2.1.33}$$

d'aprés le lemme (2.1.3) on a

$$\prod_{i=1}^{+\infty}(1-\gamma_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{+\infty}\gamma_i \text{ cela implique } \sum_{i=1}^{+\infty}\gamma_i \geq 1 - \prod_{i=1}^{+\infty}(1-\gamma_i) \tag{2.1.34}$$

les relations (2.1.33) et (2.1.34) donnent

$$T(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{+\infty}\gamma_i \geq 1 - \prod_{i=1}^{+\infty}(1-\gamma_i) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Pour le deuxième point, le lemme (2.1.2) entraine

$$0 \leq \frac{\partial c(\underline{x})}{\partial x_i} = \frac{1}{T(\underline{x})}\frac{c(\underline{x})}{c(\underline{x}) + x_i} \leq \frac{1}{T(\underline{x})} \leq 2.$$

■

Lemme 2.1.5 *Soit $\underline{x}$ et $\underline{x}' \in A$ alors*

$$\left|c\left(\underline{x}\right)-c\left(\underline{x}'\right)\right| \leq 2\sum_{i=1}^{+\infty}\left|x_i^{'}-x_i\right| = 2\left\|\underline{x}'-\underline{x}\right\|$$

Preuve. 1.Si $\underline{x}'$ et $\underline{x}$ sont de même longueur finie k, on pose

$$G\left(t\right) = c\left(\underline{x}+t\left(\underline{x}'-\underline{x}\right)\right)$$

alors

$$c\left(\underline{x}'-\underline{x}\right) = G\left(1\right)-G\left(0\right)$$

G est dérivable sur l'intervalle $]0,1[$ de dérivée

$$G'\left(t\right) = \sum_{i=1}^{k}\left(x_i'-x_i\right)\frac{\partial c}{\partial x_i}\left(\underline{x}+t\left(\underline{x}'-\underline{x}\right)\right).\left(*\right)$$

En effet,

$$\begin{aligned} G\left(t\right) &= c\left(\underline{x}+t\left(\underline{x}'-\underline{x}\right)\right) = c\left(\left(x_1,x_2,...,x_k\right)+t\left(x_1'-x_1,x_2'-x_2,...,x_k'-x_k\right)\right) \\ &= c\left(x_1+t\left(x_1'-x_1\right),x_2+t\left(x_2'-x_2\right),...,x_k+t\left(x_k+t\left(x_k'-x_k\right)\right)\right) \end{aligned}$$

posons $X_i = x_i+t\left(x_i'-x_i\right)$, on a

$$G\left(t\right) = c\left(X_1,X_2,...,X_k\right)$$

donc,

$$\begin{aligned} G'\left(t\right) &= \frac{\partial c}{\partial X_1}\left(\underline{x}+t\left(\underline{x}'-\underline{x}\right)\right)\frac{\partial X_1}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial X_2}\left(\underline{x}+t\left(\underline{x}'-\underline{x}\right)\right)\frac{\partial X_2}{\partial t}+... \\ &\quad +\frac{\partial c}{\partial X_k}\left(\underline{x}+t\left(\underline{x}'-\underline{x}\right)\right)\frac{\partial X_k}{\partial t} \\ &= \frac{\partial c}{\partial x_1}\left(x_1+t\left(x_1'-x_1\right)\right)\left(x_1'-x_1\right)+\frac{\partial c}{\partial x_2}\left(x_2+t\left(x_2'-x_2\right)\right)\left(x_2'-x_2\right)+... \\ &\quad +\frac{\partial c}{\partial x_k}\left(x_i+t\left(x_i'-x_i\right)\right)\left(x_k'-x_k\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k}\left(x_i'-x_i\right)\frac{\partial c}{\partial x_i}\left(\underline{x}+t\left(\underline{x}'-\underline{x}\right)\right) \end{aligned}$$

d'où $\left(*\right)$

Par le théorème des accroissements finis et le lemme 2.1.4, il vient

$$|c(\underline{x}) - c(\underline{x}')| = |G(1) - G(0)| \leq \sup_{0<t<1} \left|G'(t)\right| \leq 2\sum_{i=1}^{k} \left|x_i^{'} - x_i\right|$$

2. Revenons maintenant au cas général. Pour tout $k \geq 1$, notons

$$c_k = c(x_1, x_2, ..., x_k, 0, 0, ...) \quad \text{et} \quad c_k^{'} = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, 0, ...) .$$

d'après ce qui précède, on a

$$\left|c_k^{'} - c_k\right| \leq 2\sum_{i=1}^{k} \left|x_i^{'} - x_i\right| \leq 2\left\|\underline{x}^{'} - \underline{x}\right\| .$$

Avec le lemme 2.1.1 on en deduit

$$\left|c^{'} - c\right| = \lim_{k\to\infty} \left|c_k^{'} - c_k\right| \leq 2\left\|\underline{x}^{'} - \underline{x}\right\| .$$

■

Lemme 2.1.6 *Soit* $\underline{x}, \underline{x}' \in A$. *Notons* $\Omega = \Omega(\underline{x})$ *et* $\Omega^{'} = \Omega\left(\underline{x}^{'}\right)$ *et* T *défini en* $(2.1.26)$, *on a la majoration*

$$|T(\underline{x}') - T(\underline{x})| \leq \frac{3}{\max(\Omega, \Omega')} \|\underline{x}' - \underline{x}\|$$

Preuve. *Notons* $c = c(\underline{x})$ *et* $c^{'} = c^{'}(\underline{x}')$ *et supposons* $\Omega^{'} \geq \Omega$. *Alors*

$$\begin{aligned}
T(\underline{x}') - T(\underline{x}) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{x_i'}{c' + x_i'} - \frac{x_i}{c + x_i}\right] = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{cx_i' - c'x_i}{(c' + x_i')(c + x_i)} = \\
\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{cx_i' - c'x_i + cx_i - cx_i}{(c' + x_i')(c + x_i)} &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{c(x_i' - x_i)}{(c' + x_i')(c + x_i)} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(c - c')x_i}{(c' + x_i')(c + x_i)}
\end{aligned}$$

et en utilisant le lemme 2.1.5 *et la relation* (2.1.3)

$$\begin{aligned}
|T(x_i') - T(\underline{x})| &\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|x_i' - x_i|}{(c' + x_i')} + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i(c' - c)}{(c' + x_i')(c + x_i)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|x_i' - x_i|}{\Omega} + |c' - c| \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{\Omega\Omega'} = \frac{\|\underline{x}' - \underline{x}\|}{\Omega} + \frac{|c' - c|}{\Omega'} . \leq \frac{3}{\Omega'} \|\underline{x}' - \underline{x}\| .
\end{aligned}$$

■

2.1.2 Approximation de $\mathbf{K}(n)$

Les définitions suivantes ont été introduites par Evans (cf.[6]).

Définition 2.1.2 *Pour* $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}_+^{*k}$. *On définit*

$$\mathbf{A}\left(\underline{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\Omega(\underline{x})} \prod_{i=1}^{k} \frac{\left(c\left(\underline{x}\right) + x_i\right)^{x_i}}{\Gamma\left(x_i + 1\right)} \tag{2.1.35}$$

où Γ *est la fonction Gamma définie par :*

$$\Gamma\left(x\right) = \int_0^x e^{-t} t^n dt$$

Définition 2.1.3 *Pour* $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}_+^{*k}$. *On définit*

$$\mathbf{B}\left(\underline{x}\right) = \left\{ \frac{1}{2c\left(\underline{x}\right)} \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{c\left(\underline{x}\right) + x_i} \right\}^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2c\left(\underline{x}\right)}{T\left(\underline{x}\right)}} \tag{2.1.36}$$

Lemme 2.1.7 *Pour* $\underline{x} \in \mathbb{R}_+^{*k}$, *on a*

$$\sqrt{2c\left(\underline{x}\right)} \leq \mathbf{B}\left(\underline{x}\right) \leq 2\sqrt{c\left(\underline{x}\right)} \tag{2.1.37}$$

Preuve. Nous utilisons le lemme (2.1.4) on a :

$$\frac{1}{2} \leq T\left(\underline{x}\right) \leq 1$$

cela implique

$$1 \leq \frac{1}{T\left(\underline{x}\right)} \leq 2$$

alors

$$2c\left(\underline{x}\right) \leq \frac{2c\left(\underline{x}\right)}{T\left(\underline{x}\right)} \leq 4c\left(\underline{x}\right)$$

puis

$$\sqrt{2c\left(\underline{x}\right)} \leq \sqrt{\frac{2c\left(\underline{x}\right)}{T\left(\underline{x}\right)}} \leq \sqrt{4c\left(\underline{x}\right)}$$

d'où la relation (2.1.37) ∎

Théorème 2.1.1 *(Evans). Pour tout η, $0 \leq \eta < \frac{1}{2}$, il existe Ω_0 et c_0 tels que, pour tout entier n dont la décomposition en facteurs premiers $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} ... q_k^{\alpha_k}$ satisfait*
$\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k \geq \Omega_0$, on a , en posant $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$,

$$K(n) = \sqrt{\pi}\mathbf{A}(\underline{\alpha})\mathbf{B}(\underline{\alpha})(1 + R(\underline{\alpha})) \quad avec \quad |R(\alpha)| \leq c_0 (\Omega(\alpha))^{-\eta}.$$

Lemme 2.1.8 *Il existe deux constantes absolues C_1 et C_2 telles que, pour tout entier $n \geq 2$, de décomposition en facteurs premiers $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} ... q_k^{\alpha_k}$, on ait avec $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$*

$$C_1\sqrt{\pi}\mathbf{A}(\underline{\alpha})\mathbf{B}(\underline{\alpha}) \leq K(n) \leq C_2\sqrt{\pi}\mathbf{A}(\underline{\alpha})\mathbf{B}(\underline{\alpha}) \tag{2.1.38}$$

Preuve. *cf(*[7]) ■

Pour chaque $r \in \{1, 2, ..., 20\}$, et pour tout n tel que $\Omega(n) = r$, le rapport

$$\frac{K(n)}{\sqrt{\pi}\mathbf{A}(\underline{\alpha})\mathbf{B}(\underline{\alpha})}$$

a été évalué par M. Deléglise. Il a vérifié que celui-ci est minimum lorsque $\underline{\alpha} = (r)$, c'est à dire lorsque n est une puissance de nombre premier, $n = p^r$. Il atteint son maximum lorsque $\underline{\alpha} = (1, 1, 1, ..., 1)$, c'est à dire lorsque n est un produit de r facteurs premiers distincts.

2.1.3 Les constantes ρ, ρ_k, a, a_k

Les constantes ρ, ρ_k, a, a_k ont été introduites par E. Hille, R. Evans [6] et M. Klazar, F. Luca [13]. Dans ce qui suit nous les rappelons et précisons leur comportement.

Pour k entier , $k \geq 1$, on définit, pour $\mathrm{Re}(s) > 1$,

$$\zeta_k(s) = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - p_j^{-s}\right)^{-1}, \quad \text{et} \quad \zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}.$$

Définition 2.1.4 *On définit ρ et ρ_k pour tout $k \geq 1$, par*

$$\zeta_k(\rho_k) = 2, \qquad \zeta(\rho) = 2, \tag{2.1.39}$$

on a $\rho = 1.728647238998...$,

Pour $s > 1$, on pose

$$L(s) = -\log\zeta(s),$$

de sorte que

$$L^{'}(s) = -\frac{d}{ds}(\log\zeta(s)) = \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\log p_i}{p_i^{\rho}-1}$$

et

$$L_k(s) = -\log\zeta_k(s).$$

Définition 2.1.5 *Pour $k \geq 1$, les nombres réels a et a_k sont définis par :*

$$\frac{1}{a} = \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\log p_i}{p_i^{\rho}-1} = L'(\rho) \qquad et \qquad \frac{1}{a_k} = \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\log p_i}{p_i^{\rho_k}-1} = L_k^{'}(\rho_k)$$

le tableau suivant donne la valeur des premiers termes des suites (ρ_k) et (a_k).

k	1	2	3	10	100	1000	∞
ρ_k	1.00000	1.43527	1.56603	1.69972	1.72658	1.72843	1.72864
a_k	1.44269	1.44336	1.36287	1.19244	1.11279	1.10196	1.1000200

Lemme 2.1.9 *La suite (ρ_k) est une suite croissante et $\lim_{k\to\infty}\rho_k = \rho$.*

$$\rho_1 = 1 < \rho_2 = 1.43527... < ... < \rho = 1.72864.$$

De plus, lorsque k tend vers l'infini,

$$\rho - \rho_k \sim \frac{2}{\left(-\zeta^{'}(\rho)\right)(\rho-1)k^{\rho-1}(\log k)^{\rho}} = \frac{1.509...}{k^{\rho-1}(\log k)^{\rho}}. \tag{2.1.40}$$

Ce lemme est démontré dans [13].

Lemme 2.1.10 *La suite (a_k) est décroissante et, lorsque k tend vers l'infini, on a,*

$$a_k - a \sim \frac{a^2}{\rho-1}\frac{1}{(k\log k)^{\rho-1}}.$$

Preuve. La décroissance de la suite (a_k) résulte de la croissance de (ρ_k) (lemme 2.1.9) lorsque $k \longrightarrow \infty$, il résulte de (2.1.40) et de $\lim_{k\to\infty}\rho_k = \rho$ et que $\lim_{k\to\infty}a_k = a$ et

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a}{aa_k} \sim \frac{a_k - a}{a^2} \tag{2.1.41}$$

calculons un équivalent de $\frac{1}{a}-\frac{1}{a_k}$. Les définitions (2.1.40) donnent

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a_k}=L^{'}(\rho)-L_k^{'}(\rho_k)=L^{'}(\rho)-L_k^{'}(\rho)+L_k^{'}(\rho)-L_k^{'}(\rho_k) \tag{2.1.42}$$

.Estimation de $L'(\rho)-L_k'(\rho)$. On a,

$$L'(\rho)-L_k'(\rho)=\sum_{i=k+1}^{+\infty}\frac{\log p_i}{p_i^{\rho}-1} \tag{2.1.43}$$

en utilisant l'estimation

$$p_k=k\log k+k\log\log k+O(k)$$

(cf., [4], (3.11.10), (3.11.6) et (3.10.5)), on obtient,

$$\begin{aligned}\sum_{i=k+1}^{+\infty}\frac{\log p_i}{p_i^{\rho}-1} &\sim \sum_{i=k+1}^{+\infty}\frac{\log(i\log i)}{(i\log i)^{\rho}}\sim\sum_{i=k+1}^{+\infty}\frac{1}{i^{\rho}(\log i)^{\rho-1}}\sim\int_k^{\infty}\frac{dt}{t^{\rho}(\log t)^{\rho-1}}\\ &\sim \frac{1}{(\rho-1)}\frac{1}{k^{(\rho-1)}(\log k)^{\rho-1}}\end{aligned}$$

donnent avec (2.1.43)

$$L_k'(\rho)-L'(\rho)\sim\frac{1}{(\rho-1)}\frac{1}{k^{(\rho-1)}(\log k)^{\rho-1}} \tag{2.1.44}$$

Estimation de $L_k^{'}(\rho)-L_k^{'}(\rho_k)$. La définition de la dérivée et (2.1.41) donnent

$$\begin{aligned}L_k'(\rho)-L_k'(\rho_k) &\sim (\rho-\rho_k)L_k''(\rho)\sim-\frac{2L_k''(\rho)}{(\rho-1)\zeta'(\rho)}\frac{1}{k^{\rho-1}(\log k)^{\rho}}\\ &\sim -\frac{2L''(\rho)}{(\rho-1)\zeta'(\rho)}\frac{1}{k^{\rho-1}(\log k)^{\rho}}\end{aligned} \tag{2.1.45}$$

(2.1.43), (2.1.44), et (2.1.46) donnent $\frac{1}{a}-\frac{1}{a_k}\sim\frac{1}{(\rho-1)(k\log k)^{(\rho-1)}}$, ce qui avec (2.1.42) termine la preuve. ■

Lemme 2.1.11 *Il existe une constante positive C_9 telle que, pour tout $k\geq 2$, et tout nombre premier p, on ait*

$$\left|\frac{a_k}{p^{\rho_k}-1}-\frac{a}{p^{\rho}-1}\right|\leq C_9\frac{\log p}{p^{\rho_2}(k\log k)^{\rho-1}} \tag{2.1.46}$$

Preuve. Par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $t \longmapsto 1/(p^t - 1)$, il existe θ, $\rho_k < \theta < \rho$, tel que

$$\frac{1}{p^{\rho_k} - 1} - \frac{1}{p^{\rho} - 1} = (\rho - \rho_k)\left(-\frac{p^{\theta}\log p}{(p^{\theta} - 1)^2}\right) \tag{2.1.47}$$

comme

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_k}{p^{\rho_k} - 1} - \frac{a}{p^{\rho} - 1}\right| &= \left|\frac{a_k}{p^{\rho_k} - 1} - \frac{a}{p^{\rho} - 1} + \frac{a_k}{p^{\rho} - 1} - \frac{a_k}{p^{\rho} - 1}\right| \\ &= \left(\frac{1}{p^{\rho_k} - 1} - \frac{1}{p^{\rho} - 1}\right) a_k + \frac{a_k - a}{p^{\rho} - 1} \end{aligned} \tag{2.1.48}$$

en utilisant la relation (2.1.47) dans (2.1.48), on obtient

$$\left|\frac{a_k}{p^{\rho_k} - 1} - \frac{a}{p^{\rho} - 1}\right| = \frac{p^{\theta}\log p}{(p^{\theta} - 1)^2}(\rho - \rho_k)\, a_k + \frac{a_k - a}{p^{\rho} - 1} \tag{2.1.49}$$

Comme on a $1 < \rho_2 \le \rho_k \le \theta \le \rho \le 2$. La décroissance de $x \longmapsto x/(x-1)^2$ donne

$$\frac{p^{\theta}}{(p^{\theta} - 1)^2} \le \frac{p^{\rho_2}}{(p^{\rho_2} - 1)^2} \le \frac{C}{p^{\rho_2}}$$

où C ne dépend ni p ni de k. De même il existe D tel que

$$\frac{1}{p^{\rho} - 1} \le \frac{1}{p^{\rho_2} - 1} \le \frac{D}{p^{\rho_2}} \le \frac{D\log p}{p^{\rho_2}\log 2} \le \frac{3D\log p}{2p^{\rho_2}}$$

Et donc, puisque la suite (a_k) est majorée par $\frac{3}{2}$, par (2.1.49) on a

$$\left|\frac{a_k}{p^{\rho_k} - 1} - \frac{a}{p^{\rho} - 1}\right| \le \frac{3\log p}{2p^{\rho_2}}\left(C(\rho - \rho_k) + D(a_k - a)\right)$$

et l'on conclut en utilisant les lemmes 2.1.9, 2.1.10 ■

2.2 Un problème d'optimisation

On considère le problème d'optimisation

$$(P)\begin{cases} \underline{x} \in \mathcal{D}(A) \\ \max F(\underline{x}) \end{cases},$$

où F est la fonction de k variables définie ci-dessous.

2.2.1 La fonction F

Définition 2.2.1 *Pour* $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}_+^{*k}$ *on définit*

$$F(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{k} x_j \log\left(1 + \frac{c(\underline{x})}{x_j}\right) = \sum_{j=1}^{k} \left(x_j \log\left(x_j + c(\underline{x})\right) - x_j \log x_j\right). \tag{2.2.1}$$

Remarque 2.2.1 *La fonction* F *se prolonge par continuité sur* $\mathbb{R}_+^k$ *en posant* $0 \log 0 = 0$. *Notons que,*

$$c(x_1, x_2, ..., x_{\varpi}, 0, ...) = c(x_1, x_2, ..., x_{\varpi})$$

on a

$$F(\underline{x}) = F(x_1, x_2, ..., x_k, 0) = F(x_1, x_2, ..., x_k) \text{ et } F(\underline{0}) = 0.$$

Définition 2.2.2 *Soit une fonction* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f *est au moins deux fois continûment différentiable sur* E *ensemble ouvert convexe de* $\mathbb{R}^n$ *est concave si les dérivées secondes de* f *sont négatives.*

Lemme 2.2.1 *La fonction* F *est concave dans* $\mathbb{R}_+^k$

Preuve. Par (2.2.1),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{k} \left(x_j \log\left(x_j + c(\underline{x})\right) - x_j \log x_j\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i \log\left(x_i + c(\underline{x})\right) - x_i \log x_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1, j\neq i}^{k} \left(x_j \log\left(x_j + c(\underline{x})\right) - x_j \log x_j\right) \\
&= \log\left(x_i + c(\underline{x})\right) + \frac{x_i}{c(\underline{x}) + x_i} + \frac{\partial c}{\partial x_i}(\underline{x}) \left(\frac{x_i}{c(\underline{x}) + x_i}\right) - \log x_i - 1 + \\
&\quad \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{k} \frac{x_j}{c(\underline{x}) + x_j}\right) \frac{\partial c}{\partial x_i}(\underline{x}) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{c(\underline{x}) + x_j}\right) \frac{\partial c}{\partial x_i}(\underline{x}) + \log\left(c(\underline{x}) + x_i\right) + \frac{x_i}{c(\underline{x}) + x_i} - \log x_i - 1 \\
&= \frac{c(x)}{c(\underline{x}) + x_i} + \frac{x_i}{c(\underline{x}) + x_i} + \log\left(\frac{c(\underline{x}) + x_i}{x_i}\right) - 1 \\
&= \log\left(\frac{c(\underline{x}) + x_i}{x_i}\right)
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

on a ensuite

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}\left(\underline{x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\log\left(\frac{c\left(\underline{x}\right)+x_i}{x_i}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\log\left(c\left(\underline{x}\right)+x_i\right)-\log x_i\right) \\
&= \left(\frac{1}{c\left(\underline{x}\right)+x_i}\right)\left(\frac{\partial c}{\partial x_i}\left(\underline{x}\right)+1\right)-\frac{1}{x_i}
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

et, pour $j \neq i$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\log\left(c\left(\underline{x}\right)+x_i\right)-\log x_i\right) \\
&= \left(\frac{1}{c\left(\underline{x}\right)+x_i}\right)\frac{\partial c}{\partial x_j}\left(\underline{x}\right) \\
&= \frac{c\left(\underline{x}\right)}{\left(c\left(\underline{x}\right)+x_i\right)\left(c\left(\underline{x}\right)+x_j\right)T\left(\underline{x}\right)}
\end{aligned}$$

La forme quadratique des dérivées secondes de F s'écrit donc, pour $\underline{x} \in \mathbb{R}_+^{*k}$,

$$F''\left(h_1, h_2, ..., h_k\right) = \frac{c\left(\underline{x}\right)}{T\left(\underline{x}\right)}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{h_i}{\left(c\left(\underline{x}\right)+x_i\right)}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{k}\frac{c\left(\underline{x}\right)h_i^2}{x_i\left(c\left(\underline{x}\right)+x_i\right)}\right) \tag{2.2.4}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{h_i}{\left(c\left(\underline{x}\right)+x_i\right)}\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{k}\sqrt{\frac{x_i}{c\left(\underline{x}\right)+x_i}}\frac{h_i}{\sqrt{x_i\left(c\left(\underline{x}\right)+x_i\right)}}\right)^2 \\
&\leq T\left(\underline{x}\right)\sum_{i=1}^{k}\frac{h_i^2}{x_i\left(c\left(\underline{x}\right)+x_i\right)}
\end{aligned}$$

ce qui, avec(2.2.4), la concavité de F dans l'adhérence $\mathbb{R}_+^k$ de $\mathbb{R}_+^{*k}$. ■

2.2.2 Proximité de $\mathbf{A}(\underline{x})$ et de $\exp\left(F\left(\underline{x}\right)\right)$

Le lemme suivant montre que F est une assez bonne approximation de $\log \mathbf{A}$.

Lemme 2.2.2 *Soit $\underline{x} \in \mathbb{R}_+^{*k}$; on a*

$$\mathbf{A}\left(\underline{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\exp\left(F\left(\underline{x}\right)\right)\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{s\left(x_i\right)}, \qquad \text{où } s\left(x_i\right) = \frac{\Gamma\left(x_i+1\right)}{x_i^{x_i}e^{-x_i}} \tag{2.2.5}$$

est le terme correctif de la formule de Stirling $\Gamma(x+1) = x^x e^{-x} s(x)$, *de l'ordre de grandeur de* $\sqrt{2\pi x}$. *De plus précisément on a l'encadrement*

$$\sqrt{2\pi x} \leq s(x) \leq e\sqrt{x}, \quad x \geq 1 \tag{2.2.6}$$

Preuve. D'aprés la définition (2.1.36) on a

$$\mathbf{A}(\underline{x}) = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\Omega(\underline{x})} \prod_{i=1}^{k} \frac{(c(\underline{x}) + x_i)^{x_i}}{\Gamma(x_i+1)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \prod_{i=1}^{k} \frac{(c(\underline{x}) + x_i)^{x_i}}{x_i^{x_i}} \frac{x_i^{x_i} e^{x_i}}{\Gamma(x_i+1)}$$

La formule (2.2.6) se réduit à l'encadrement classique de $\Gamma(x+1)$

$$x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} \leq \Gamma(x+1) \leq x^x e^{-x} e\sqrt{x}.$$

■

De la définition de $s(j)$ résulte immédiatement le lemme suivant

Lemme 2.2.3 *Pour tout* $j \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\frac{s(j+1)}{s(j)} = e\left(\frac{j}{j+1}\right)^j, \tag{2.2.7}$$

et lorsque j *tend vers l'infini*

$$\frac{s(j+1)}{s(j)} = 1 + \frac{1}{2j} + O\left(\frac{1}{j^2}\right).$$

2.2.3 Maximisation de F

Soit $k \geq 2$, et p_k le $k^{ième}$nombre premier. Soit $A > 0$, réel, on considère le domaine $\mathcal{D}(A) \subset \mathbb{R}_+^{*k}$, défini par

$$x_1 \log 2 + x_2 \log 3 + ... + x_k \log p_k \leq A \tag{2.2.8}$$

on a

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \log\left(\frac{c(\underline{x}) + x_i}{x_i}\right),$$

alors la fonction F définie par (2.2.1) est croissante par rapport à chaque variable, le problème d'optimisation

$$(P)\begin{cases} \underline{x}\in\mathcal{D}(A) \\ \max F(\underline{x}) \end{cases} \tag{2.2.9}$$

a donc même solution que le problème

$$(P')\begin{cases} x_1\log 2+x_2+\log 3+...+x_k\log p_k=A \\ \max F(x_1,x_2,...,x_k) \end{cases} \tag{2.2.10}$$

Ce problème a été résolu dans [6], lemme 6, par la méthode des multipicatieurs de Lagrange. Le multiplicateur de Lagrange correspondant est la constante ρ_k défini par $\zeta_k(\rho_k)=2$.

Théorème 2.2.1 *L'unique solution $\underline{x}^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_k^*)$ du problème (2.2.10) satisfait*

$$x_1^*\log 2+x_2^*\log 3+...+x_k^*\log p_k=A \tag{2.2.11}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}^*)=\rho_k\log p_{i,} \tag{2.2.12}$$

$$c(\underline{x}^*)=a_kA \tag{2.2.13}$$

$$x_i^*=\frac{a_kA}{p_i^{\rho_k}-1},\qquad i=1,2,...,k \tag{2.2.14}$$

$$F(\underline{x}^*)=\rho_kA. \tag{2.2.15}$$

Lemme 2.2.4 *Soit $k\geq 2$, $\underline{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k)\in\mathcal{D}(A)$ définie par (2.2.9), $\underline{x}^*$ définie par (2.2.15) et F définie par (2.2.1) . Alors on a*

$$\begin{aligned} F(\underline{\alpha}) &\leq F(\underline{x}^*)-\frac{1}{4A\log p_k}\left(\sum_{i=1}^{k-1}|\alpha_i-x_i^*|\log p_i\right)^2 && (2.2.16)\\ &\leq F(\underline{x}^*)-\frac{1}{4A\log p_k}\sum_{i=1}^{k-1}(\alpha_i-x_i^*)^2(\log p_i)^2 && (2.2.17)\end{aligned}$$

Preuve. Définissons $\underline{y}=(y_1,y_2,...,y_k)$ par

$$y_1=\alpha_1,\quad y_2=\alpha_2,\quad ,\quad y_{k-1}=\alpha_{k-1},\quad \text{et}\quad \sum_{i=1}^{k}y_i\log p_i=A. \tag{2.2.18}$$

comme $\underline{\alpha}\in\mathcal{D}(A)$, on a $\alpha_k\leq y_k$ et la croissance de F par rapport à chacune des variables entraine

$$F(\underline{\alpha})\leq F(\underline{y}) \tag{2.2.19}$$

Posons $h_i = y_i - x_i^*$. On a par $(2.2.19)$, $(2.2.15)$ et $(2.1.40)$,

$$\sum_{i=1}^{k} h_i \log p_i = \sum_{i=1}^{k} y_i \log p_i - \sum_{i=1}^{k} x_i^* \log p_i = A - A = 0 \tag{2.2.20}$$

La formule de Taylor appliquée à F entre les points $\underline{y}$ et $\underline{x}^*$ donne

$$F\left(\underline{y}\right) - F\left(\underline{x}^*\right) = \sum_{i=1}^{k} h_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\underline{x}^*\right) + \frac{1}{2} F''\left(\underline{\xi}\right) \cdot \underline{h}, \tag{2.2.21}$$

avec $\underline{\xi} = \theta \underline{y} + (1-\theta)\underline{x}^*$ et $0 < \theta < 1$. On a donc $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k) \in \mathbb{R}_+^{*k}$. Par $(2.2.13)$, $(2.2.21)$ il vient

$$\sum_{i=1}^{k} h_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\underline{x}^*\right) = \rho_k \sum_{i=1}^{k} h_i \log p_i = 0 \tag{2.2.22}$$

Ecrivons,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{h_i}{c\left(\underline{\xi}\right) + \xi_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{h_i}{c\left(\underline{\xi}\right) + \xi_i} - \frac{1}{2c\left(\underline{\xi}\right) \log p_k} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{c\left(\underline{\xi}\right) + \xi_i}{c\left(\underline{\xi}\right) + \xi_i} h_i \log p_i \right)$$

alors,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{h_i}{c\left(\underline{\xi}\right) + \xi_i} \right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{h_i}{c\left(\underline{\xi}\right) + \xi_i} \left(1 - \frac{\left(c\left(\underline{\xi}\right) + \xi_i\right) \log p_i}{2c\left(\underline{\xi}\right) \log p_k} \right) \right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k} \sqrt{\frac{\xi_i}{c\left(\underline{\xi}\right) + \xi_i}} \frac{h_i}{\sqrt{\xi_i \left(c\left(\underline{\xi}\right) + \xi_i\right)}} \left(1 - \frac{\left(c\left(\underline{\xi}\right) + \xi_i\right) \log p_i}{2c\left(\underline{\xi}\right) \log p_k} \right) \right)^2
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\left(\sum_{i,j} a_i bj \right)^2 \leq \left(\sum_i a_i^{\frac{1}{2}} \right)^2 \left(\sum_j b_j^{\frac{1}{2}} \right)^2 \right)$$

Alors, on obtient:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{h_i}{c\left(\underline{\xi}\right) + \xi_i} \right)^2 \leq T\left(\underline{\xi}\right) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{h_i^2}{\xi_i \left(c\left(\underline{\xi}\right) + \xi_i\right)} \left(1 - \frac{\left(c\left(\underline{\xi}\right) + \xi_i\right) \log p_i}{2c\left(\underline{\xi}\right) \log p_k} \right)^2 \right) \tag{2.2.23}$$

Par (2.1.3), pour tout i, $1 \leq i \leq k$, on a $0 < \xi_i \leq \Omega\left(\underline{\xi}\right) \leq c\left(\underline{\xi}\right)$. Notons
$t_i = \dfrac{\left(c\left(\underline{\xi}\right) + \xi_i\right) \log p_i}{2c\left(\underline{\xi}\right) \log p_k}$, on a donc $0 < t_i \leq 1$, puis $(1 - t_i)^2 \leq 1 - t_i$.

La majoration (2.2.24), et (2.2.5) donnent alors

$$\begin{aligned} F''\left(\underline{\xi}\right)\cdot\underline{h} &\leq \sum_{i=1}^{k}\frac{h_i^2 c\left(\underline{\xi}\right)}{\xi_i\left(c\left(\underline{\xi}\right)+\xi_i\right)}\left(1-\frac{\left(c\left(\underline{\xi}\right)+\xi_i\right)\log p_i}{2c\left(\underline{\xi}\right)\log p_k}-1\right) \\ &\leq -\sum_{i=1}^{k}\frac{\log p_i}{\log p_k}\frac{h_i^2}{2\xi_i}. \end{aligned}$$

Ecrivons,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{k}|h_i|\log p_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{k}\sqrt{\frac{\xi_i}{\xi_i}}\left(\sqrt{\log p_i}\right)^2|h_i|\right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k}\sqrt{\xi_i\log p_i}\frac{|h_i|\sqrt{\log p_i}}{\sqrt{\xi_i}}\right)^2 \end{aligned}$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient,

$$\left(\sum_{i=1}^{k}|h_i|\log p_i\right)^2 \leq A\sum_{i=1}^{k}\frac{h_i^2\log p_i}{\xi_i}$$

puisque (2.2.19) et (2.2.12) impliquent,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k}\xi_i\log p_i &= \sum_{i=1}^{k}\left(\theta y_i+(1-\theta)\,x_i^*\right)\log p_i \\ &= \theta\sum_{i=1}^{k}y_i\log p_i+(1-\theta)\sum_{i=1}^{k}x_i^*\log p_i \\ &= \theta A+(1-\theta)\,A=A. \end{aligned}$$

d'où

$$F''\left(\underline{\xi}\right)\cdot\underline{h}\leq-\frac{1}{2A\log p_k}\left(\sum_{i=1}^{k}|h_i|\log p_i\right)^2\leq-\frac{1}{2A\log p_k}\left(\sum_{i=1}^{k-1}|h_i|\log p_i\right)^2$$

ce qui avec (2.2.20), (2.2.22), (2.2.23) et (2.2.19), complète la preuve du lemme 2.2.4. ■

Théorème 2.2.2 *Il existe deux constantes C_3 et C_4 telle que, pour tout entier $n\geq 2$, avec $n=2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ et $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k\geq 1, \underline{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k)$ on ait*

$$C_3\frac{\exp\left(F\left(\underline{\alpha}\right)\right)}{e^k\sqrt{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k}}\leq K\left(n\right)\leq C_4\frac{\exp\left(F\left(\underline{\alpha}\right)\right)}{\pi^{k/2}}\leq C_4\frac{\exp\left(\rho_k\log n\right)}{\pi^{k/2}} \qquad (2.2.24)$$

Preuve. On part de l'encadrement donné par (2.1.38)

$$C_1\sqrt{\pi}\mathbf{A}\left(\underline{\alpha}\right)\mathbf{B}\left(\underline{\alpha}\right)\leq K\left(n\right)\leq C_2\sqrt{\pi}\mathbf{A}\left(\underline{\alpha}\right)\mathbf{B}\left(\underline{\alpha}\right)$$

En utilisant les inégalités,

$$\sqrt{2c\left(\underline{x}\right)}\leq\mathbf{B}\left(\underline{x}\right)\leq 2\sqrt{c\left(\underline{x}\right)}\quad\text{et}\quad\Omega\left(\underline{x}\right)\leq c\left(\underline{x}\right)\leq\frac{\Omega\left(\underline{x}\right)}{\log 2}\leq\frac{3\Omega\left(\underline{x}\right)}{2}$$

on obtient,

$$C_1\sqrt{2\pi\Omega\left(\underline{\alpha}\right)}\mathbf{A}\left(\underline{\alpha}\right)\leq K\left(n\right)\leq C_2\sqrt{6\pi}\sqrt{\Omega\left(\underline{\alpha}\right)}\mathbf{A}\left(\underline{\alpha}\right).$$

On remplace $\mathbf{A}\left(\underline{\alpha}\right)$ par le second membre de (2.2.5),

$$\frac{C_1}{2}\sqrt{\pi\Omega\left(\underline{\alpha}\right)}\exp\left(F\left(\underline{\alpha}\right)\right)\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{s\left(\alpha_j\right)}\leq K\left(n\right)\leq\frac{C_2\sqrt{3\pi}}{2}\sqrt{\Omega\left(\underline{\alpha}\right)}\exp\left(F\left(\underline{\alpha}\right)\right)\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{s\left(\alpha_j\right)}.$$

L'encadrement (2.2.7) de $s\left(x\right)$ donne alors,

$$\frac{C_1}{2}\sqrt{\pi\Omega\left(\underline{\alpha}\right)}\frac{1}{e^k\sqrt{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k}}\exp\left(F\left(\underline{\alpha}\right)\right)\leq K\left(n\right)\leq\frac{C_2\sqrt{3\pi}}{2}\sqrt{\frac{\Omega\left(\underline{\alpha}\right)}{\prod_{i=1}^{k}2\pi\alpha_i}}\exp\left(F\left(\underline{\alpha}\right)\right).\quad(2.2.25)$$

La première inégalité dans (2.2.25) est obtenu en minorant $\Omega\left(\underline{\alpha}\right)$ par 1 et en posant $C_3=\frac{C_1\sqrt{\pi}}{2}$. Puis chacun des entiers $2\alpha_i$ est supérieur ou égal à 2, leur somme $2\Omega\left(n\right)$ est majorée par leur produit $\prod_{i=1}^{k}\left(2\alpha_i\right)$. On obtient donc la deuxième inégalité de (2.2.24) en choisissant $C_4=\frac{C_2\sqrt{3\pi}}{2}$. La dernière inégalité dans (2.2.5) se réduit à $F\left(\underline{\alpha}\right)\leq\rho_k\log n$; elle s'obtient en appliquant le Théorème 2.2.1, avec $A=\log n$, ce qui assure l'appartenance de $\underline{\alpha}$ au domaine $\mathcal{D}\left(A\right)$. ■

Chapitre 3

Grandes valeurs de la fonction K et Propriétés des nombres K-champions

3.1 Introduction

Les grandes valeurs de la fonction $K(n)$, ont été déja étudiées par L. Kalmar, P. Erdös et M. Klazar et F. Luca et tout récemment par M. Deleglise, M. O. Hernane et J. L Nicolas, qui ont amélioré ces résultats en montrant :

Théorème 3.1.1 *Il existe deux constantes positives C_5 et C_6 telles que :*

1. Pour tout entier n suffisament grand on a

$$\log K(n) \leq \rho \log n - C_5 \frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log \log n} \tag{3.1.1}$$

2. Pour tout n suffisament grand il existe $m \leq n$ tel que :

$$\log K(m) \geq \rho \log n - C_6 \frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log \log n} \geq \rho \log m - C_6 \frac{(\log m)^{1/\rho}}{\log \log m} \tag{3.1.2}$$

Preuve. Preuve de (3.1.1) Soit $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} ... q_k^{\alpha_1}$ la décomposition de n en produit de facteurs premiers distincts.

Lorsque $k = 1$, on calcule par recurrence à l'aide de la formule

$$K(n) = \sum_{d|n, d>1} K\left(\frac{n}{d}\right) = \frac{1}{2} \sum_{d|n} K\left(\frac{n}{d}\right),$$

$$K(n) = K\left(q_1^{\alpha_1}\right) = 2^{\alpha_1 - 1} \leq n$$

(3.1.1) est alors vérifiée pour toute constante C_5 et pour tout n.

Nous supposons maintenant $k \geq 2$. On pose $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_1} \leq n$. D'aprés la définition de K on a $K(n) = K(N)$.et $\alpha_1 \log 2 + \alpha_2 \log 3 + ... + \alpha_k \log p_k = \log N$. L'encadrement

$$C_3 \frac{\exp\left(F\left(\underline{\alpha}\right)\right)}{e^k \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k}} \leq K(n) \leq C_4 \frac{\exp\left(F\left(\underline{\alpha}\right)\right)}{\pi^{k/2}} \leq C_4 \frac{\exp\left(\rho_k \log n\right)}{\pi^{k/2}},$$

donne

$$\log K(N) \leq \rho_k \log N - \frac{k}{2} \log \pi + \log C_4,$$

La définition de K implique $K(n) = K(N)$ d'où,

$$\log K(n) = \log K(N) \leq \rho_k \log N - \frac{k}{2} \log \pi + \log C_4$$

qui avec $\log N \leq \log n$, donne

$$\begin{aligned} \log K(n) &\leq \rho_k \log n - \frac{k}{2} \log \pi + \log C_4 = \rho \log n - \rho \log n + \rho_k \log n - \frac{k}{2} \log \pi + \log C_4 \\ \log K(n) &\leq \rho \log n - \left[(\rho - \rho_k) \log n + \frac{k}{2} \log \pi - \log C_4\right] \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

supposons $n \geq 16$ ce qui assure $\log \log n > 1$. Comme

$$\rho - \rho_k \sim \frac{2}{\left(-\zeta'(\rho)\right)(\rho - 1) k^{\rho-1} (\log k)^{\rho}} = \frac{1.509...}{k^{\rho-1} (\log k)^{\rho}}$$

il existe une constante positive γ_1 telle que

$$\rho - \rho_k \geq \frac{\gamma_1}{\left(k^{\rho-1} (\log k)^{\rho}\right)}$$

Alors,

1. Si $2 \leq k \leq \dfrac{(\log n)^{1/\rho}}{\log \log n} < \log n$, on a

$$\rho - \rho_k \geq \frac{\gamma_1}{\left(k^{\rho-1} (\log k)^{\rho}\right)} \geq \frac{\gamma_1}{\left(\dfrac{(\log n)^{1/\rho}}{\log \log n}\right)^{\rho-1} (\log \log n)^{\rho}} = \gamma_1 \frac{(\log n)^{1/\rho - 1}}{\log \log n}.$$

2. Si $k > \dfrac{(\log n)^{1/\rho}}{\log \log n}$, on a alors

$$\frac{k}{2} \log \pi \geq \frac{k}{2} > \frac{1}{2} \frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log \log n}.$$

Dans les deux cas, on a :

$$\begin{aligned}\left[(\rho-\rho_k)\log n+\frac{k}{2}\log\pi-\log C_4\right] &\geq \left(\gamma_1\frac{(\log n)^{1/\rho-1}}{\log\log n}\right)\log n+\frac{1}{2}\frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log\log n}-\log C_4\\ &\geq \min\left(\gamma_1,\frac{1}{2}\right)\frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log\log n}-\log C_4,\ \text{on pose } C_5=\min\left(\gamma_1,\frac{1}{2}\right)\\ &\geq C_5\frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log\log n}\end{aligned}$$

Pour n assez grand, avec $C_5>0$. Ceci termine la démonstration de (3.1.1) . Pour démontrer (3.1.2) , nous utiliserons le lemme suivant (cf [8]).

Lemme1. Soit k un entier positif; on range les 2^k diviseurs de $n=p_1p_2...p_k$ par ordre croissant : $1=d_1<d_2<...<d_{2^k}=n$. Alors, pour tout i, $1\leq i\leq 2^k-1$, on a $d_{i+1}\leq 2d_i$.

Preuve de (2). On applique le théorème 2.2.1 avec $A=\log n$ et

$$k=\left\lfloor\kappa\frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log\log n}\right\rfloor \tag{3.1.4}$$

où κ est une constante positive satisfaisant

$$\kappa<\rho a^{1/\rho}=1.82... \tag{3.1.5}$$

et a est défini par

$$\frac{1}{a}=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\log p_i}{p_i^{\rho}-1}=L'(\rho).$$

où $\left\lfloor\kappa\frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log\log n}\right\rfloor$ est la partie entière du nombre réel $\left(\kappa\frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log\log n}\right)$.

Par le théorème 2.2.1, le maximum de F est atteint au point,

$$\underline{x}^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_k^*)\qquad\text{avec } x_i^*=\frac{a_k\log n}{p_i^{\rho_k}-1},\ i=1,2,...k, \tag{3.1.6}$$

où les a_k sont définis par

$$\frac{1}{a_k}=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\log p_i}{p_i^{\rho_k}-1}=L_k'(\rho_k).$$

comme,

$$\sum_{i=1}^{k}x_i^*\log p_i=\log n. \tag{3.1.7}$$

Lorsque $n \longrightarrow +\infty$, on a en utilisant la décroissance de (a_k) (cf. lemme 2.1.10) , puis (3.1.4) pour obtenir une équivalente de k,

$$x_1^* > x_2^* > ... > x_k^* = \frac{a_k \log n}{p_k^{\rho_k} - 1} > \frac{a \log n}{p_i^{\rho_k}} \sim \frac{a \log n}{(k \log k)^{\rho}} \sim \frac{a\rho^{\rho}}{\kappa} > 1, \tag{3.1.8}$$

la dernière inégalité provenant de (3.1.5) .

Construction de m. k étant défini par (3.1.4) et $\underline{x}^*$ par (3.1.6) on pose $m_0 = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\lfloor x_i^* \rfloor}$. Par (3.1.7) on a

$$\frac{n}{p_1 p_2 ... p_k} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{x_i^* - 1} < m_0 \leq \prod_{i=1}^{k} p_i^{x_i^*} = n.$$

Soit d le plus grand diviseur de $p_1 p_2 ... p_k$ vérifiant $d \leq n/m_0 < p_1 p_2 ... p_k$. On pose $m = m_0 d$. Par définition de d et par le lemme1 on a $n/m_0 < 2d$, et donc

$$1 \leq \frac{n}{m} = \frac{n}{m_0 d} < 2 \tag{3.1.9}$$

on écrit $d = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\varepsilon_i}$ avec $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$. On a alors

$$m = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \tag{3.1.10}$$

avec

$$\alpha_i = \lfloor x_i^* \rfloor + \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \in \{0, 1\} \tag{3.1.11}$$

Les relations (3.1.8), (3.1.11) impliquent,

$$1 \leq \lfloor x_i^* \rfloor \leq \alpha_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor + 1 \leq x_i^* + 1 \leq 2x_i^*, \qquad 1 \leq i \leq k, \tag{3.1.12}$$

et,par (3.1.9) , (3.1.7) et (3.1.10) il vient

$$-\log 2 \leq \log \frac{m}{n} = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - x_i^*) \log p_i \leq 0. \tag{3.1.13}$$

Poursuivons la preuve de (3.1.2) . La formule de Taylor et L'expréssion (1.3.6) de la forme quadratique dérivée seconde de F donnent

$$\begin{aligned} F(\underline{\alpha}) \quad &= \quad F(\underline{x}^*) + \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - x_i^*) \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}^*) + \frac{c(\xi)}{T(\underline{\xi})} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i - x_i^*}{c(\underline{\xi}) + \xi_i} \right)^2 \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k} \frac{c(\underline{\xi})(\alpha_i - x_i^*)^2}{\xi_i (c(\underline{\xi}) + \xi_i)} \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

avec, pour $1 \leq i \leq k$, $\xi_i = \theta\alpha_i + (1-\theta)\,x_i^*$, $0 < \theta < 1$ et $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)$. Par (3.1.13) on a

$$\xi_i \geq \theta \lfloor x_i^* \rfloor + (1-\theta) \lfloor x_i^* \rfloor = \lfloor x_i^* \rfloor \geq 1. \tag{3.1.15}$$

Par (3.1.11), le quatrième terme du second membre de (3.1.14) satisfait donc

$$-\sum_{i=1}^{k} \frac{c\left(\underline{\xi}\right)(\alpha_i - x_i^*)^2}{\xi_i\left(c\left(\underline{\xi}\right) + \xi_i\right)} \geq -\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - x_i^*)^2 \geq -k. \tag{3.1.16}$$

le troisième terme est positif. le second terme, par (2.2.12), (3.1.13) puis le lemme 2.1.2 satisfait

$$\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - x_i^*) \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}^*) = \rho_k \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - x_i^*) \log p_i = \rho_k \log \frac{m}{n} \geq -\rho_k \log 2. \tag{3.1.17}$$

De (3.1.14), (3.1.16) et (3.1.17) on déduit

$$F(\underline{\alpha}) \geq F(\underline{x}^*) - \rho \log 2 - k. \tag{3.1.18}$$

La relation (3.1.10), et l'encadrement (2.2.24) impliquent,

$$\log K(m) \geq F(\underline{\alpha}) - k - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \log \alpha_i + \log C_3 \tag{3.1.19}$$

Avec (3.1.18) cela donne

$$\log K(m) \geq F(\underline{x}^*) - 2k - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \log \alpha_i + \log C_3 - \rho \log 2. \tag{3.1.20}$$

Par (2.2.15) il vient

$$F(\underline{x}^*) = \rho \log n - (\rho - \rho_k) \log n, \tag{3.1.21}$$

d'où

$$\log K(m) \geq \rho \log n - (\rho - \rho_k) \log n - 2k - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \log \alpha_i + \log C_3 - \rho \log 2. \tag{3.1.22}$$

Il reste à montrer que, à part $\rho \log n$, les termes du second membre de (3.1.22) sont tous des $O\left(\log(n)^{1/\rho} / \log\log n\right) = O(k)$. Pour le terme $(\rho - \rho_k)\log n$ cela résulte de l'estimation

$$\rho - \rho_k \sim \frac{2}{\left(-\zeta'(\rho)\right)(\rho - 1)\, k^{\rho-1} (\log k)^{\rho}} = \frac{1.509...}{k^{\rho-1} (\log k)^{\rho}}$$

et de (3.1.4). Il reste donc à démontrer que $\sum_{i=1}^{k} \log \alpha_i$ est un $O(k)$ ie: $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \log \alpha_i$ est un $O(1)$ lorsque k tend vers l'infini. Par (3.1.12)

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \log \alpha_i \leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \log (2x_i^*) \leq \log 2 + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \log x_i^*.$$

L'utilisation du lemme suivant, termine la preuve de (3.1.2) et du théorème 3.1.1 ■

Lemme 3.1.1 *Avec le choix de k,*

$$k = \left\lfloor \kappa \frac{(\log n)^{1/\rho}}{\log \log n} \right\rfloor$$

On a, lorsque n tend vers l'infini

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \log x_i^* = O(1)$$

Preuve. Puisque $A = \log n$, la formule (3.1.6) avec $x_i^* = \dfrac{a_k \log n}{p_i^{\rho_k} - 1}$, $i = 1, 2, ..., k$, donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \log x_i^* &= \log a_k + \log\log n - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \log\left(p_i^{\rho_k} - 1\right) \\ &= \log a_k + \log\log n - \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\rho_k}}{k} \log p_i - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \log\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{a_k} = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\log p_i}{p_i^{\rho_k}}$, d'où $-\log a_k = \log \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\log p_i}{p_i^{\rho_k}}$ cela implique que

$$|\log a_k| = \left| -\log \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\log p_i}{p_i^{\rho_k}} \right| < 1$$

alors, $\log a_k = O(1)$.

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \log\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = O(1), car \left|\sum_{i=1}^{k} \log\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right| < 1$$

d'où

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \log x_i^* = \log\log n - \frac{\rho_k}{k}\sum_{i=1}^{k} \log p_i + O(1) \tag{3.1.23}$$

en utilisant le développement asymtotique de p_k

$$p_k = k\left(\log k + \log\log k + O(1)\right).$$

et le théorème des nombres premiers sous la forme $\sum_{p\leq x} \log p = x + O\left(x/\log x\right),$

$\sum_{i=1}^{k} \log p_i = p_k + O\left(\dfrac{p_k}{\log p_k}\right) = k\left(\log k + \log\log k + O\left(1\right)\right)$

D'où

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \log x_i^* = \log\log n - \rho_k\left[\log k + \log\log k\right] + O\left(1\right)$$

on notons $\log_3 x = \log\log\log x$, il résulte de la définition (3.1.4)de k que

$$\log k = \frac{1}{\rho}\log\log n - \log_3 n + O\left(1\right), \qquad \log\log k = \log_3 n + O\left(1\right),$$

et

$$\rho\left(\log k + \log\log k\right) = \log_2 n + O\left(1\right).$$

Avec (3.1.23) cela donne

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \log x_i^* = \left(\rho - \rho_k\right)\left(\log k + \log\log k\right) + O\left(1\right) = O\left(1\right)$$

car, par l'équivalence $\left(\rho - \rho_k \sim \dfrac{2}{\left(-\zeta'\left(\rho\right)\right)\left(\rho-1\right)k^{\rho-1}\left(\log k\right)^{\rho}} = \dfrac{1.509...}{k^{\rho-1}\left(\log k\right)^{\rho}}\right)$
$\left(\rho - \rho_k\right)\left(\log k + \log\log k\right)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. ■

3.2 Les nombres K-champions

Définition 3.2.1 *Soit f une fonction arithmétique réelle, on dit qu'un entier N est un $f-$champion si pour tout n on a*

$$n < N \Rightarrow f(n) < f(N)$$

Comme la fonction K ne dépend que des exposants de la décomposition en facteurs premiers de n, tout nombre $K-$champion $N > 1$ est de la forme donnée par :

Proposition 3.2.1 *Soit N un nombre champion alors*

$$N = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}, \quad avec \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_k \geq 1.$$

Proposition 3.2.2 *Soit N un nombre champion. Alors il existe un entier $m \leq N$ tel que*

$$\log K(m) \geq \rho \log N - C_6 \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N} \geq \rho \log m - C_6 \frac{(\log m)^{1/\rho}}{\log\log m}$$

Le théorème (3.1.1), $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sup K(n) = +\infty$, donc il existe une infinité de nombres $K-$champions

$K(n)$ est le nombre de solutions l'équation $n = d_1 d_2 ... d_r$, aux inconnus $d_1, d_2, ..., d_r$ plus grandes que 1. Chaque telle factorisation de n donne une factorisation non triviale de $2n$, $2n = 2d_1 d_2 ... d_r$. Comme $2n$ admet la factorisation triviale $2n = (2n)$, on a, pour $n \geq 2$, $K(2n) > K(n)$.

Il en résulte que si l'on range les nombres $K-$champions dans l'ordre croissant, on obtient la suite,$N_1 = 1 < N_2 = 4 < N_3 = 6 < ... < N_i < N_{i+1} < ...$

Proposition 3.2.3 *Pour tout $i \geq 1$, on a,*

$$N_{i+1} < 2N_i. \tag{3.2.1}$$

3.3 Encadrement de $\omega(N)$

Théorème 3.3.1 1. *Soit N un $K-$champion assez grand. Alors:*

$$\log K(N) \geq \rho \log N - C_6 \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N}, \tag{3.3.1}$$

2. De plus, il existe trois constantes positives C_7, C_8 et N_0 telle que, pour tout $K-$champion $N \geq N_0$,on ait

$$C_7 \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N} \leq \omega(N) \leq C_8 \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N}. \tag{3.3.2}$$

Preuve. preuve de (3.3.1). Pour le premier point, on utilise l'inégalité (3.1.2) du théorème (3.1.1).

$$\text{Il existe } m \leq N \quad \text{vérifiant } \; logK(m) \geq \rho \log N - C_6 \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N}$$

. Puisque N est un $K-$chompion, on a $K(N) \geq K(m)$, alors

$$\log K(N) \geq \log K(m) \geq \rho \log N - C_6 \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N}$$

preuve de (3.3.2). Posons $k = \omega(N)$, l'inégalité

$$C_3 \frac{\exp(F(\underline{\alpha}))}{e^k \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k}} \leq K(n) \leq C_4 \frac{\exp(F(\underline{\alpha}))}{\pi^{k/2}} \leq C_4 \frac{\exp(\rho_k \log n)}{\pi^{k/2}}$$

implique,

$$\begin{aligned} \log K(N) &\leq \log C_4 + \rho_k \log N - k \frac{\log \pi}{2} \\ &\leq \rho \log N - \rho \log N + \log C_4 + \rho_k \log N - k \frac{\log \pi}{2} \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

alors

$$\log K(N) \leq \rho \log N - (\rho - \rho_k) \log N - k \frac{\log \pi}{2} + \log C_4.$$

d'où

$$(\rho - \rho_k) \log N \leq \rho \log N - \log K(N) - k \frac{\log \pi}{2} + \log C_4$$

Grâce à la relation (3.3.1) on obtient,

$$\begin{aligned} (\rho - \rho_k) \log N &\leq \rho \log N - + \rho \log N + C_6 \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N} - k \frac{\log \pi}{2} + \log C_4 \\ &\leq C_6 \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N} + \log C_4 \end{aligned}$$

quand $N \longrightarrow +\infty$,

$$(\rho - \rho_k) \log N \leq C_6 \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N} + \log C_4 \leq C_6 (1 + o(1)) \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N} \tag{3.3.4}$$

Par l'estimation,

$$\rho - \rho_k \sim \frac{2}{\left(-\zeta'(\rho)\right)(\rho-1)\, k^{\rho-1}(\log k)^{\rho}}$$

il existe donc $C > 0$, tel que ,

$$k^{\rho-1}(\log k)^{\rho} \geq C (\log N)^{1-1/\rho} \log\log N \tag{3.3.5}$$

Mais la fonction $y = f(t) = t^{\rho-1}(\log t)^{\rho}$ tend vers l'infini avec t, et elle est croissante pour $t \geq 1$.

donc,

$$\begin{aligned} \log y &= \log f(t) = \log\left(t^{\rho-1}(\log t)^{\rho}\right) \\ &= (\rho-1)\log t + \rho \log(\log t) \end{aligned}$$

d'où,

$$\log y \sim (\rho-1)\log t$$

celà implique que

$$y \sim t^{\rho-1}\frac{1}{(\rho-1)^{\rho}}(\log y)^{\rho}$$

par conséquent on a

$$t^{\rho-1} \sim \frac{y}{\frac{1}{(\rho-1)^{\rho}}(\log y)^{\rho}} = (\rho-1)^{\rho}\frac{y}{(\log y)^{\rho}}$$

or

$$t \sim (\rho-1)^{\frac{\rho}{\rho-1}}\left(\frac{y}{(\log y)^{\rho}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \qquad (y \to +\infty)$$

d'où la fonction réciproque $f(t)$ satisfait:

$$f^{-1}(y) \sim (\rho-1)^{\frac{\rho}{\rho-1}}\left(\frac{y}{(\log y)}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \asymp \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N}.$$

Ceci donne la minoration de $k = \omega(N)$ dans $(3.3.2)$. ∎

Lemme 3.3.1 *Soit N un nombre $K-$champion dont la décomposition en facteurs premiers est $N = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$, avec $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_k \geq 1$, et $k = \omega(N)$. Alors, lorsque $N \longrightarrow +\infty$, on a*

$$\log p_k \sim \frac{1}{\rho}\log\log N, \text{ où } \rho \text{ est la racine positive de l'équation } \zeta(\rho) = 2 \tag{3.3.6}$$

et

$$\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i - x_i^*| \log p_i = O\left((\log N)^{\delta} \right) \qquad \textit{avec } \delta = (1 + 1/\rho)/2 = 0.789243... \tag{3.3.7}$$

où x_i^* est défini par (2.2.14).

Preuve. L'énigalité $\log K(N) \geq \rho \log N - C_6 \dfrac{(\log N)^{1/\rho}}{\log \log N}$ et $\rho \geq \rho_k$, impliquent qu' il existe $m \leq N$ telle que

$$\log K(N) \geq \log K(m) \geq \rho \log N - C_6 \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log \log N} \geq \rho_k \log N - C_6 \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log \log N} \tag{3.3.8}$$

l'équation (2.2.15) du théorème 2.2.1 donne $F(\underline{x}^*) = \rho_k \log N$. En appliquant le lemme 2.2.4 avec $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$, la majoration (2.2.16)

$$F(\underline{\alpha}) \leq F(\underline{x}^*) - \frac{1}{4A \log p_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} |\alpha_i - x_i^*| \log p_i \right)^2$$

s'écrit,

$$F(\underline{\alpha}) \leq \rho_k \log N - \frac{1}{4A \log p_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} |\alpha_i - x_i^*| \log p_i \right)^2. \tag{3.3.9}$$

Par l'encadrement (3.3.2) du théorème 3.3.1, $k = \omega(N)$ tend vers l'infini avec N. En utilisant (2.2.24), il en résulte, que pour N assez grand,

$$\log K(N) \leq F(\underline{\alpha}) + \log C_4 - \frac{k}{2} \log \pi \leq F(\underline{\alpha}).$$

cette inégalité avec (3.3.8) et (3.3.9) donnent,

$$\frac{1}{4 \log N \log p_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} |\alpha_i - x_i^*| \log p_i \right)^2 \leq C_6 \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log \log N} \tag{3.3.10}$$

Par l'inégalité (3.3.2) du théorème 3.3.1, $k = \omega(N) \asymp \dfrac{(\log N)^{1/\rho}}{\log \log N}$, ce qui entraine, lorsque $N \longrightarrow +\infty$,

$$\log p_k \sim \log(k \log k) \sim \log k \sim \frac{1}{\rho} \log \log N$$

et cela prouve (3.3.6). De (3.3.10) et (3.3.6) on déduit la relation,

$$\sum_{i=1}^{k-1} |\alpha_i - x_i^*| \log p_i = O\left((\log N)^{\delta} \right) \tag{3.3.11}$$

où δ donné par (3.3.7) .Pour prouver que $\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i - x_i^*|\log p_i = O\left((\log N)^\delta\right)$, ce qui terminera la preuve du lemme, il reste à vérifier que $|(\alpha_k - x_k^*)\log p_i| = O\left((\log N)^\delta\right)$. La définition $A = \log N$ et (2.2.4) donnent

$$\log N = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i \log p_i = \sum_{i=1}^{k} x_i^* \log p_i.$$

Il en résulte

$$\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i - x_i^*)\log p_i = 0 \tag{3.3.12}$$

et donc, avec (3.3.11) , on obtient, $|(\alpha_k - x_k^*)\log p_i| \leq \sum_{i=1}^{k-1}|\alpha_i - x_i^*|\log p_i = O\left((\log N)^\delta\right)$.

■

3.4 Exposants des petits facteurs premiers

Théorème 3.4.1 *Soit N un nombre $K-$champion dont la décomposition en facteurs premiers est*

$$N = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}, \qquad avec\ \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_k \geq 1,$$

et ρ est la racine positive de l'équation $\zeta(\rho) = 2$, et $\frac{1}{a} = \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\log p_i}{p_i^\rho - 1} = L'(\rho)$. Lorsque $N \longrightarrow +\infty$, on a

$$\Omega(N) = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = b\log N + O\left((\log N)^\delta\right), \tag{3.4.1}$$

avec δ défini en (3.3.7),

$$\beta_i = \frac{a}{p_i^\rho - 1} \qquad et \qquad b = \sum_{i=1}^{+\infty}\beta_i = 0.8612985... \tag{3.4.2}$$

De plus, pour $1 \leq i \leq k$, on a uniformément en i,

$$\alpha_i = \beta_i \log N + O\left(\frac{(\log N)^\delta}{\log p_i}\right). \tag{3.4.3}$$

Preuve. Démonstration de (3.4.1) . Pour cela il suffit de démontrer la majoration,

$$\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i - \beta_i \log N| + \sum_{i=k+1}^{+\infty} \beta_i \log N = O\left((\log N)^{\delta}\right). \tag{3.4.4}$$

On applique le théorème (2.2.1) avec $k = \omega(N)$ et $A = \log N$. On écrit alors,

$$\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i - \beta_i \log N| \leq \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i - x_i^*| + \sum_{i=1}^{k} |x_i^* - \beta_i \log N|$$

. Le lemme 3.3.1 donne

$$\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i - x_i^*| \leq O\left((\log N)^{\delta}\right) \tag{3.4.5}$$

En utilisant le lemme 2.1.11 (car, par (3.3.2), $k \geq 2$)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} |x_i^* - \beta_i \log N| &= \log N \sum_{i=1}^{k} \left| \frac{a_k}{p_i^{\rho_k} - 1} - \frac{a}{p_i^{\rho} - 1} \right| \\ &\leq C_9 \frac{\log N}{(k \log k)^{\rho-1}} \sum_{i=1}^{k} \frac{\log p_i}{p_i^{\rho_2}} = O\left(\frac{\log N}{k^{\rho-1}}\right) \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Par la minoration (3.3.2) de $\omega(N) = k$,il vient

$$\frac{\log N}{k^{\rho-1}} = O\left((\log N)^{1/\rho} (\log\log N)^{\rho-1}\right) = O\left((\log N)^{\delta}\right) \tag{3.4.7}$$

car $1/\rho < \delta$. Il vient ensuite

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} \beta_i = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{a}{p_i^{\rho} - 1} \leq \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{2a}{p_i^{\rho}} \leq \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{2a}{i^{\rho}} \leq \int_k^{\infty} \frac{2a}{t^{\rho}} dt = \frac{2a}{(\rho - 1) k^{\rho-1}} \tag{3.4.8}$$

ce qui avec (3.4.6) et (3.4.7) complète la preuve de (3.4.4) et de (3.4.1) Démonstration de (3.4.3). Pour tout i, $1 \leq i \leq k$, on a

$$|\alpha_i - \beta_i \log N| \leq |\alpha_i - x_i^*| + |x_i^* - \beta_i \log N|. \tag{3.4.9}$$

Par le lemme 3.3.1 on a

$$|\alpha_i - x_i^*| \ll \frac{1}{\log p_i} (\log N)^{\delta}. \tag{3.4.10}$$

Les définitions (2.2.14) et (3.4.2) de β_i et x_i^* et le lemme 2.1.11, donnent, pour tout i,

$$|\alpha_i - \beta_i \log N| \leq C_9 \frac{\log p_i}{p_i^{\rho_2}} \frac{\log N}{(k \log k)^{\rho-1}} = \frac{1}{\log p_i} O\left(\frac{\log N}{k^{\rho-1}}\right).$$

En utilisant (3.4.7), il vient

$$|\alpha_i - \beta_i \log N| \ll \frac{1}{\log p_i} (\log N)^{\delta},$$

et avec (3.4.10) et (3.4.9) , on termine la preuve de (3.4.3) . ∎

3.5 Exposants des grandes facteurs premiers

Lemme 3.5.1 *Soit* $N = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ *un* $K-$*champion tendant vers l'infini,* $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$, *et* δ *est défini par* (3.3.7) .

1. Soit $a = 1.100020011...$*la constante définie par* $\frac{1}{a} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\log p_i}{p_i^\rho}$*; alors*

$$c(\underline{\alpha}) = a \log N + O\left((\log N)^\delta\right). \tag{3.5.1}$$

2. Soit $T_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_j^\rho} = 0.62035....$*Alors on a*

$$T(\underline{\alpha}) = T_0 + O\left((\log N)^{\delta-1}\right). \tag{3.5.2}$$

3. Soit $B_0 = \sqrt{\frac{2a}{T_0}} = 1.883....$*Alors on a*

$$\mathbf{B}(\underline{\alpha}) = B_0\sqrt{\log N}\left(1 + O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right) \tag{3.5.3}$$

4.

$$K(N) = B_0\sqrt{\pi}\sqrt{\log N}\mathbf{A}(\underline{\alpha})\left(1 + O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right). \tag{3.5.4}$$

Preuve. du lemme 3.5.1 Démonstration de (3.5.1). Soit $\underline{\beta} = (\beta_i)_{i\geq 1}$ où les β_i sont définis en (3.4.2) . L'égalité

$$c(\lambda x_1, \lambda x_2, ...) = \lambda c(x_1, x_2, ...),$$

le lemme 2.1.5 et la majoration (3.4.4) donnent

$$\begin{aligned} \left|c(\underline{\alpha}) - c\left(\underline{\beta}\right)\log N\right| &= \left|c(\underline{\alpha}) - c\left(\underline{\beta}\log N\right)\right| \\ &\leq 2\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i - \beta_i \log N| + 2\sum_{i=k+1}^{+\infty}|\beta_i \log N| = O\left((\log N)^{\delta-1}\right). \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que $c\left(\underline{\beta}\right) = a$. Or, par définition de ρ, on a

$$2 = \zeta(\rho) = \prod_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{1 - p_i^{-\rho}} = \prod_{i=1}^{+\infty}\frac{p_i^\rho}{p_i^\rho - 1} = \prod_{i=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{p_i^\rho - 1}\right).$$

En utilisant la formule

$$\prod_{j=1}^{+\varpi}\left(1 + \frac{x_j}{c}\right) = 2.$$

qui définit c, cela s'écrit

$$\prod_{i=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{p_i^\rho-1}\right)=\prod_{i=1}^{+\infty}\left(1+\frac{\left(\frac{1}{p_i^\rho-1}\right)}{1}\right)=\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x_j}{c}\right)$$

d'où

$$c\left(\frac{1}{2^\rho-1},\frac{1}{3^\rho-1},...\right)=1.$$

Puisque $\beta_i=\dfrac{a}{p_i^\rho-1}$, on obtient $c\left(\underline{\beta}\right)=a$ en multipliant les deux termes de cette égalité par a .

Démonstration de (3.5.2). Par la définition (3.4.2) , on a $\beta_i=\dfrac{a}{p_i^\rho-1}$ cela implique $\beta_i/\left(a+\beta_i\right)=1/p_i^\rho$. L'estimation (3.4.3) où le $O\left((\log N)^{\delta-1}\right)$ est uniforme en i, et (3.5.1) donnent alors

$$\begin{aligned}
T\left(\underline{\alpha}\right) &= \sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{c\left(\underline{\alpha}\right)+\alpha_i}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\beta_i\log N\left(1+O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right)}{\left(a+\beta_i\right)\log N\left(1+O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right)}\\
&= \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i^\rho}\left(1+O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i^\rho}+O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\\
&= T_0-\sum_{i=k+1}^{+\infty}\frac{1}{p_i^\rho}+O\left((\log N)^{\delta-1}\right),
\end{aligned}$$

ce qui prouve (3.5.2), car , par (3.4.7) et (3.4.8) on a

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty}\frac{1}{p_i^\rho}=O\left(\frac{1}{k^{\rho-1}}\right)=O\left((\log N)^{\delta-1}\right).$$

Démonstration de (3.5.3) . La formule (3.5.3) est une conséquence

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}\left(\underline{\alpha}\right) &= \left\{\frac{1}{2c\left(\underline{\alpha}\right)}\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{c\left(\underline{\alpha}\right)+\alpha_i}\right\}^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2c\left(\underline{\alpha}\right)}{T\left(\underline{\alpha}\right)}}\\
&= \sqrt{\frac{2\left(a\log N+O\left((\log N)^{\delta}\right)\right)}{T_0+O\left((\log N)^{\delta-1}\right)}}=\sqrt{\frac{2a\log N}{T_0}}\left(1+O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right)\\
&= B_0\sqrt{\log N}\left(1+O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right).
\end{aligned}$$

Démonstration de (3.5.3) . Choisissant $\eta=1-\delta$ dans le théorème 2.2.1 (théorème de Evans) on obtient

$$K\left(N\right)=\sqrt{\pi}\mathbf{B}\left(\underline{\alpha}\right)\mathbf{A}\left(\underline{\alpha}\right)\left(1+O\left(\Omega\left(N\right)\right)^{\delta-1}\right).$$

On conclut avec (3.5.3) et (3.4.1)

$$\begin{aligned} K(N) &= \sqrt{\pi}B_0\sqrt{\log N}\left(1+O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right)\mathbf{A}(\underline{\alpha})\left(1+O\left(\Omega(N)\right)^{\delta-1}\right) \\ &= B_0\sqrt{\pi}\sqrt{\log N}\mathbf{A}(\underline{\alpha})\left(1+O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right) . \end{aligned}$$

■

Définition 3.5.1 *Soit $N = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ un $K-$champion tendant vers l'infini, et M un entier dépendant de N, $M = 2^{\alpha'_1}3^{\alpha'_2}...p_{k'}^{\alpha'_k}$, avec $\alpha'_i \geq 1$, pour $1 \leq i \leq k'$. On pose $\underline{\alpha'} = (\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_k)$, et $\mu = \delta - 1/\rho = 0.210....$ On dira que M est voisin de N si,*

$$\|\underline{\alpha'} - \underline{\alpha}\| = O\left((\log N)^{\mu}\right) = O\left((\log N)^{\delta-1/\rho}\right).$$

Lemme 3.5.2 *Si $M = 2^{\alpha'_1}3^{\alpha'_2}...p_{k'}^{\alpha'_k}$ est un voisin de N, on a*

$$\log M = \log N + O\left((\log N)^{\delta}\right). \tag{3.5.5}$$

$$\Omega(M) = b\log N + O\left((\log N)^{\delta}\right), \qquad \alpha'_i = \beta_i \log N + O\left((\log N)^{\delta}\right) \qquad (1 \leq i \leq k'). \tag{3.5.6}$$

Preuve. Démonstration de $(3.5.5)$. Posons $k_1 = \max(k', k)$. On

$$\begin{aligned} |\log M - \log N| &= \left|\sum_{i=1}^{k_1} (\alpha'_i - \alpha_i)\log p_i\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{k_1} |(\alpha'_i - \alpha_i)|\log p_i \leq \|\underline{\alpha'} - \underline{\alpha}\| \log p_{k_1}. \end{aligned}$$

Par (3.3.2), $k = \omega(N) = O\frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N}$. Puisque M est voisin de N, on a $0 \leq k_1 - k \ll (\log N)^{\mu}$. Par (3.3.2)

$$\begin{aligned} k_1 &= \omega(N) + O\left((\log N)^{\mu}\right) = O\left(\frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N}\right) + O\left(\left(\frac{\log N}{(\log N)^{1/\rho}}\right)^{\delta}\right) = O\left(\frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N}\right). \\ &= O\left((\log N)^{1/\rho}\right) \end{aligned}$$

Par le théorème des nombres premiers

$$p_{k_1} \sim k_1 \log k_1 = O\left((\log N)^{1/\rho}\right)\log\left(O\left((\log N)^{1/\rho}\right)\right) = O\left((\log N)^{1/\rho}\right)$$

et, par hypothèse $\|\underline{\alpha}' - \underline{\alpha}\| = O\left((\log N)^{\delta - 1/\rho}\right)$, d'où (3.3.5).

Démonstration de (3.5.7). L'égalité (3.4.1)

$$\Omega(N) = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = b\log N + O\left((\log N)^{\delta}\right),$$

et la majoration évidente

$$|\Omega(M) - \Omega(N)| \leq \|\underline{\alpha}' - \underline{\alpha}\| \, O\left((\log N)^{\delta}\right) =$$

donnent

$$\begin{aligned} \Omega(M) &= \Omega(N) + O\left((\log N)^{\delta}\right) \\ &= b\log N + O\left((\log N)^{\delta}\right). \end{aligned}$$

Pour i satisfaisant $i \leq \min(k, k')$, l'éstimation (3.4.3)

$$\alpha_i = \beta_i \log N + O\left(\frac{(\log N)^{\delta}}{\log p_i}\right) \qquad \text{et} \qquad |(\alpha_i' - \alpha_i)| \leq \|\underline{\alpha}' - \underline{\alpha}\| = O\left((\log N)^{\delta}\right)$$

donnent

$$\begin{aligned} \alpha_i' &= \alpha_i + O\left((\log N)^{\delta}\right) = \beta_i \log N + O\left(\frac{(\log N)^{\delta}}{\log p_i}\right) + O\left((\log N)^{\delta}\right) \\ &= \beta_i \log N + O\left((\log N)^{\delta}\right). \end{aligned}$$

Lorsque $k < i \leq k'$, on écrit

$$|\alpha_i' - \beta_i \log N| \leq \alpha_i' + \beta_i \log N \leq \|\underline{\alpha}' - \underline{\alpha}\| + \beta_i \log N = \beta_i \log N + O\left((\log N)^{\delta}\right).$$

On termine en remarquons que $\beta_i = \dfrac{a}{p_k^{\rho} - 1} \leq \dfrac{2a}{p_k^{\rho}} = O\left(\dfrac{1}{(\log N)^{1+o(1)}}\right)$, vu (3.3.6). ■

Lemme 3.5.3 *Avec les notations de la définition* 3.5.1*, soit N un K-champion qui tend vers l'infini et $M = 2^{\alpha_1'}3^{\alpha_2'}...p_{k'}^{\alpha_k'}$ un voisin de N, et $\underline{\alpha}' = (\alpha_1', \alpha_2', ..., \alpha_k')$ (où plus généralement, $\underline{\alpha}' \in \mathbb{R}_+^{*k'}$ avec $\|\underline{\alpha}' - \underline{\alpha}\| = O\left((\log N)^{\mu}\right)$. Soit δ, a, T_0 et B_0 les constantes figurant dans le lemme* 3.5.1*, alors on a :*

$$c(\underline{\alpha}') = a\log N + O\left((\log N)^{\delta}\right), \tag{3.5.7}$$

$$T(\underline{\alpha}') = T_0 + O\left((\log N)^{\delta-1}\right), \tag{3.5.8}$$

$$\mathbf{B}(\underline{\alpha}') = B_0\sqrt{\log N} + \left(1 + O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right), \tag{3.5.9}$$

$$K(M) = B_0\sqrt{\pi}\sqrt{\log N}\mathbf{A}(\underline{\alpha}')\left(1 + O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right). \tag{3.5.10}$$

Preuve. du lemme 3.5.4 preuve de (3.5.7), comme on a par (3.5.1): $c(\underline{\alpha}) = a\log N + O\left((\log N)^{\delta}\right)$, il suffit de montrer que $|c(\underline{\alpha}') - c(\underline{\alpha})| = O\left((\log N)^{\delta}\right)$. Le lemme 3.5.2 et la définition 3.5.1

$$|c(\underline{\alpha}') - c(\underline{\alpha})| \leq 2\|\underline{\alpha}' - \underline{\alpha}\| = O\left((\log N)^{\delta}\right).$$

Démonstration de (3.5.8) , comme on a (3.5.2) il suffit de montrer que $|T(\underline{\alpha}') - T(\underline{\alpha})| = O\left((\log N)^{\delta-1}\right)$. Le lemme 3.5.5 donne

$$|T(\underline{\alpha}') - T(\underline{\alpha})| \leq 3\frac{\|\underline{\alpha}' - \underline{\alpha}\|}{\max(\Omega(N), \Omega(M))}.$$

Par (3.4.1) et (3.5.7) on a $\Omega(M) \sim \Omega(N) \sim a\log N$, et avec la définition 2.1,on en déduit

$$|T(\underline{\alpha}') - T(\underline{\alpha})| = O\left((\log N)^{\delta-1}\right).$$

d'où

$$T(\underline{\alpha}') = T_0 + O\left((\log N)^{\delta-1}\right)$$

démonstration de (3.5.8) , on a par définition de $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{B}(\underline{x}) = \left\{\frac{1}{2c(\underline{x})}\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{c(\underline{x}) + x_i}\right\}^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2c(\underline{x})}{T(\underline{x})}}$$

cela implique que

$$\mathbf{B}(\underline{\alpha}') = \sqrt{\frac{2c(\underline{\alpha}')}{T(\underline{\alpha}')}}$$

de (3.5.2) et de (3.5.3) .

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\underline{\alpha}') &= \sqrt{\frac{2\left(a\log N + O\left((\log N)^{\delta}\right)\right)}{T_0 + O\left((\log N)^{\delta-1}\right)}} = \sqrt{\frac{2a}{T_0}}\sqrt{\log N}\left(\frac{1 + \dfrac{O\left((\log N)^{\delta}\right)}{2a\log N}}{1 + \dfrac{O\left((\log N)^{\delta-1}\right)}{T_0}}\right) \\
&= B_0\sqrt{\log N}\left(1 + O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right)
\end{aligned}$$

Démonstration de (3.5.9). En choisissant $\eta = 1-\delta$ dans théorème d'Evans dans la formule

$$K(n) = \sqrt{\pi}\mathbf{A}(\underline{\alpha})\mathbf{B}(\underline{\alpha})(1+R(\underline{\alpha})) \quad \text{avec} \quad |R(\underline{\alpha})| \le c_0(\Omega(\underline{\alpha}))^{-\eta}$$

on obtient

$$K(M) = \sqrt{\pi}\mathbf{A}(\underline{\alpha}')\mathbf{B}(\underline{\alpha}')\left(1+\Omega(M)^{\delta-1}\right)$$

on conclut avec (3.5.8) et (3.5.6)

$$K(M) = B_0\sqrt{\pi}\sqrt{\log N}\mathbf{A}(\underline{\alpha}')\left(1+O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right).$$

■

Lemme 3.5.4 *Soit* $N = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ *un* $K-$*champion tendant vers l'infini et* $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$. *Soit alors* $\underline{x} \in \mathbb{R}_+^{*\ell}$ *dépendant de* N, *tel que* $\|\underline{x}-\underline{\alpha}\| = O\left((\log N)^{\delta}\right)$. *Alors, pour tout* i *tel que* $p_i^{\rho} = o\left((\log N)^{1-\delta}\right)$ *on a*

$$\frac{\partial F(\underline{x})}{\partial x_i} = \rho \log p_i + O\left(p_i^{\rho}(\log N)^{1-\delta}\right). \tag{3.5.11}$$

Preuve. D'aprés la démonstration du lemme 1.3.1

$$\frac{\partial F(\underline{x})}{\partial x_i} = \log\left(\frac{c(\underline{x})+x_i}{x_i}\right).$$

Par (3.4.2), on a $\beta_i \asymp \dfrac{1}{p_i^{\rho}}$. Par le lemme.3.5.2 , on a

$$|c(\underline{x}) - c(\underline{x}')| \le 2\sum_{i=1}^{+\infty}\left|x_i^{'} - x_i\right| = 2\|\underline{x}-\underline{x}'\|$$

des relations (3.4.3.) , (3.5.1) et de la définition de β_i, on déduit

$$|c(\underline{x}) - c(\underline{\alpha})| \le 2\|\underline{x}-\underline{\alpha}\| \qquad \text{d'où} \qquad c(\underline{x}) = c(\underline{\alpha}) + O\left((\log N)^{\delta}\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{c(\underline{x})+x_i}{x_i} &= \frac{c(\underline{\alpha})+\alpha_i+O\left((\log N)^{\delta}\right)}{\alpha_i+O\left((\log N)^{\delta}\right)} \\
&= \frac{a\log N+\beta_i\log N+O\left((\log N)^{\delta}\right)}{\beta_i\log N+O\left((\log N)^{\delta}\right)} \\
&= p_i^{\rho}\left(1+O\left(p_i^{\rho}(\log N)^{\delta-1}\right)\right)
\end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(\underline{x})}{\partial x_i} &= \log\left(\frac{c(\underline{x})+x_i}{x_i}\right) = \log\left(p_i^{\rho}\left(1+\left(1+O\left(p_i^{\rho}(\log N)^{\delta-1}\right)\right)\right)\right)\\ &= \rho\log p + O\left(p_i^{\rho}(\log N)^{\delta-1}\right).\end{aligned}$$

■

Le lemme précédent précise la variation de $F(\underline{\alpha})$ lorsque on multiplie un champion $N = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ par un petit facteur premier. Le lemme suivant précise la variation de $F(\underline{\alpha}')$ lorsque l'on multiplie $M' = 2^{\alpha'_1}3^{\alpha'_2}...p_{k'}^{\alpha'_{k'}}$, voisin d'un champion, par un grand facteur premier.

Lemme 3.5.5 *Soit $N = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ un $K-$champion tendant vers l'infini $M' = 2^{\alpha'_1}3^{\alpha'_2}...p_k^{\alpha'_{k'}}$ un voisin de N. Soit i un indice tel que $p_i^{\rho} \gg (\log N)^{\ 1-\delta}$ et $i \leq k'+1$. Soit $M'' = M'p_i = 2^{\alpha''_1}3^{\alpha''_2}...p_{k''}^{\alpha''_{k''}}$ $k'' = \max(i,k')$. En posant $\underline{\alpha}'' = (\alpha''_1, \alpha''_2, ...\alpha''_{k''})$ et $\underline{\alpha}' = (\alpha'_1, \alpha'_2, ...\alpha'_{k'})$. Lorsque $i = k'+1$, on pose $\alpha'_{k'+1} = 0$ et $\underline{\alpha}' = (\alpha'_1, \alpha'_2, ...\alpha'_{k'}0)$. On a alors*

$$\begin{aligned}F(\underline{\alpha}'') - F(\underline{\alpha}') &= 1+\log a+\log\log N\\ &\quad -(\alpha'_i+1)\log(\alpha'_i+1)+\alpha'_i\log\alpha'_i+O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\end{aligned} \tag{3.5.12}$$

en convenant que $\alpha'_i\log\alpha'_i = 0$ pour $\alpha'_i = 0$.

Preuve. Commençons par remarquer que M'' est aussi voisin de M.
1. Il resulte de $p_i^{\rho} \gg (\log N)^{\ 1-\delta}$, de (3.4.3) et de la définition 3.5.1 que l'on a

$$\alpha'_i = O\left((\log N)^{\delta}\ \right). \tag{3.5.13}$$

Posons $c'' = c(\underline{\alpha}'')$ et $c' = c(\underline{\alpha}')$. Montrons que

$$c''-c' = \frac{1}{T_0}+O\left((\log N)^{\delta-1}\right). \tag{3.5.14}$$

On considère la fonction $G(t) = c(\underline{\alpha}'+t(\underline{\alpha}''-\underline{\alpha}'))$. G est dérivable et, par le théoreme des accroissements finis , on a $c''-c' = G(1)-G(0) = G'(t)$ avec $t \in \,]0,1[$. Posons

$\underline{\gamma} = \underline{\alpha}' + t\left(\underline{\alpha}'' - \underline{\alpha}'\right)$. d'aprés le lemme 2.1.2, (3.5.7), (3.5.8) et (3.5.13), on a

$$\begin{aligned} G'(t) &= \frac{\partial c}{\partial x_i}\left(\underline{\gamma}\right) = \frac{1}{T\left(\underline{\gamma}\right)} \frac{c\left(\underline{\gamma}\right)}{c\left(\underline{\gamma}\right) + \alpha_i' + t} \\ &= \frac{1}{T_0 + O\left((\log N)^{\delta-1}\right)} \frac{a \log N + O\left((\log N)^{\delta}\right)}{a \log N + O\left((\log N)^{\delta}\right)} \\ &= \frac{1}{T_0} + O\left((\log N)^{\delta}\right) \end{aligned}$$

ce qui démontre (5.3.14).

2. Ecrivons,

$$F\left(\underline{x}\right) = \sum_{j=1}^{k} x_j \log\left(1 + \frac{c\left(\underline{x}\right)}{x_j}\right) = \sum_{j=1}^{k} \left(x_j \log\left(x_j + c\left(\underline{x}\right)\right) - x_j \log x_j\right)$$

$$\begin{aligned} F\left(\underline{\alpha}''\right) - F\left(\underline{\alpha}'\right) &= \sum_{j=1, j\neq i}^{k''} \alpha_j' \log \frac{c'' + \alpha_j'}{\alpha_j'} - \sum_{j=1, j\neq i}^{k''} \alpha_j' \log \frac{c' + \alpha_j'}{\alpha_j'} \\ &\quad + \left(\alpha_i' + 1\right) \log\left(\frac{c'' + \alpha_i' + 1}{\alpha_i' + 1}\right) - \alpha_i' \log\left(\frac{c' + \alpha_i'}{\alpha_i'}\right) \end{aligned}$$

soit

$$F\left(\underline{\alpha}''\right) - F\left(\underline{\alpha}'\right) = S_1 + S_2 + \alpha_i' \log \alpha_i' - \left(\alpha_i' + 1\right) \log\left(\alpha_i' + 1\right) \tag{3.5.15}$$

avec

$$S_1 = \sum_{j=1, j\neq i}^{k''} \alpha_j' \log\left(1 + \frac{c'' - c'}{c' + \alpha_j'}\right) \tag{3.5.16}$$

et

$$S_2 = \left(\alpha_i' + 1\right) \log\left(c'' + \alpha_i' + 1\right) - \alpha_i' \log\left(c' + \alpha_i'\right). \tag{3.5.17}$$

Par (3.5.6), (3.5.7), on a $c' + \alpha_j' \asymp \log N$, ce qui entraine par (3.5.14), la relation,

$$\log\left(1 + \frac{c'' - c'}{c' + \alpha_j'}\right) = \frac{c'' - c'}{c' + \alpha_j'} + \frac{O(1)}{(\log N)^2} = \frac{1}{T_0} \frac{1}{c' + \alpha_j'} + O\left((\log N)^{\delta-2}\right).$$

Il en resulte

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{j=1, j\neq i}^{k} \alpha_j' \log\left(1 + \frac{c'' - c'}{c' + \alpha_j'}\right) \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{j=1, j\neq i}^{k} \alpha_j' \log \frac{\alpha_j'}{c' + \alpha_j'} + \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{k} \alpha_j'\right) O\left((\log N)^{\delta-2}\right). \end{aligned}$$

Puis en utilisant le lemme , (3.5.7), (3.5.6) et (3.5.13)

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{T_0}\left(T(\underline{\alpha}') - \frac{\alpha_i'}{c'+\alpha_i'}\right) + (\Omega(M') - \alpha_i')\, O\left((\log N)^{\delta-2}\right) \\ &= 1 + O\left((\log N)^{\delta-1}\right). \end{aligned} \tag{3.5.18}$$

3. La définition (3.5.17) de S_2 donne,

$$\begin{aligned} S_2 &= \log(c'' + \alpha_i' + 1) + \alpha_i' \log \frac{c'' + \alpha_i' + 1}{c' + \alpha_i'} \\ &= \log(c'' + \alpha_i' + 1) + \alpha_i' \log\left(\frac{c'' + c' - c' + \alpha_i' + 1}{c' + \alpha_i'}\right) \\ &= \log(c'' + \alpha_i' + 1) + \alpha_i' \log\left(1 + \frac{c'' - c' + 1}{c' + \alpha_i'}\right). \end{aligned}$$

Avec (3.5.7), (3.5.14) et (3.5.14) on déduit

$$S_2 = \log\left(a \log N\left(1 + O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right)\right) + O\left((\log N)^{\delta}\right)\left((\log N)^{-1}\right).$$

Grâce aux relations (3.5.14) et (3.5.18) on déduit (3.5.12) . ■

Lemme 3.5.6 *Soit* $N = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ *un* $K-$*champion tendant vers l'infini et* $M' = 2^{\alpha_1'}3^{\alpha_2'}...p_k^{\alpha_{k'}'}$ *un voisin de* N*.*

1\. *Soit* p_i *un nombre premier tel que* $p_i = O((\log N)^{\eta})$*, avec*

$$0 \leq \eta \leq \frac{1-\delta}{\rho} = 0.12192... \tag{3.5.19}$$

Soit u *un petit entier,* $u = O((\log\log N))$*, et* $M'' = p_i^u M'$*. Alors lorsque* N *tend vers l'infini,*

$$\frac{K(M'')}{K(M')} = p_i^{\rho u}\left(1 + O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right). \tag{3.5.20}$$

2\. *Si* $p_i \gg (\log N)^{(1-\delta)/\rho}$ *et* $i \leq k'+1$ *alors, lorsque* $N \longrightarrow \infty$*, on a en posant* $\alpha_{k'+1}' = 0$*,*

$$\frac{K(M'')}{K(M')} = \frac{a \log N}{\alpha_i' + 1}\left(1 + O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right). \tag{3.5.21}$$

Preuve. 1. Posons $\alpha_j'' = \alpha_j'$ pour $j \neq i$, $\alpha_i'' = \alpha_i' + u$ et $\underline{\alpha}'' = (\alpha_1'', \alpha_2'', ..., \alpha_{k'}'')$. Comme M'' et M' sont des voisins de N, par (3.5.10) , on a

$$\frac{K(M'')}{K(M')} = \frac{B_0\sqrt{\pi}\sqrt{\log N}\mathbf{A}(\underline{\alpha}'')\left(1 + O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right)}{B_0\sqrt{\pi}\sqrt{\log N}\mathbf{A}(\underline{\alpha}')\left(1 + O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right)} = \frac{\mathbf{A}(\underline{\alpha}'')}{\mathbf{A}(\underline{\alpha}')}\left(1 + O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right)$$

et, on a

$$\frac{\mathbf{A}\left(\underline{\alpha}''\right)}{\mathbf{A}\left(\underline{\alpha}'\right)} = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\exp\left(F\left(\underline{\alpha}''\right)\right)\displaystyle\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{s\left(\alpha_j''\right)}}{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\exp\left(F\left(\underline{\alpha}'\right)\right)\displaystyle\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{s\left(\alpha_j'\right)}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{A}\left(\underline{\alpha}''\right)}{\mathbf{A}\left(\underline{\alpha}'\right)} &= \exp\left(F\left(\underline{\alpha}''\right)-F\left(\underline{\alpha}'\right)\right)\frac{s\left(\alpha_i'\right)}{s\left(\alpha_i''\right)}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\frac{s\left(\alpha_j'\right)}{s\left(\alpha_j''\right)} \qquad (3.5.22)\\ &= \exp\left(F\left(\underline{\alpha}''\right)-F\left(\underline{\alpha}'\right)\right)\frac{s\left(\alpha_i'\right)}{s\left(\alpha_i''\right)},\ \text{car}\ \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\frac{s\left(\alpha_j'\right)}{s\left(\alpha_j''\right)}=1\end{aligned}$$

où

$$s\left(\alpha_i''\right)=\frac{\Gamma\left(\alpha_i''+1\right)}{\alpha_i''e^{-\alpha_i''}} \quad \text{et} \quad s\left(\alpha_i''\right)=\frac{\Gamma\left(\alpha_i'+1\right)}{\alpha_i'e^{-\alpha_i'}}.$$

donc

$$\frac{\mathbf{A}\left(\underline{\alpha}''\right)}{\mathbf{A}\left(\underline{\alpha}'\right)}=\exp\left(F\left(\underline{\alpha}''\right)-F\left(\underline{\alpha}'\right)\right)\frac{s\left(\alpha_i'\right)}{s\left(\alpha_i'+u\right)}. \qquad (3.5.23)$$

Par (3.4.2) et l'hypothèse $p_i = O\left((\log N)^{\eta}\right)$ on a

$$\beta_i=\frac{a}{p_i^{\rho}-1}\geq\frac{a}{p_i^{\rho}}\gg\frac{a}{(\log N)^{\eta\rho}}.$$

Par (3.4.3) et (3.5.19), et la définition 3.5.1, pour j, $0\leq j\leq u$, on a $\alpha_i'+j+1\gg(\log N)^{1-\eta\rho}$, donc

$$\begin{aligned}\frac{s\left(\alpha_i'+j\right)}{s\left(\alpha_i'+j+1\right)} &= 1-\frac{1}{2\left(\alpha_i'+j+1\right)}+O\left(\left(\frac{1}{\alpha_i'+j+1}\right)^2\right)\\ &= 1+O\left(\frac{1}{(\log N)^{1-\eta\rho}}\right).\end{aligned}$$

De $u=O\left(\log\log N\right)$ il resulte alors

$$\frac{s\left(\alpha_i'\right)}{s\left(\alpha_i'+u\right)}=\prod_{j=0}^{u-1}\frac{s\left(\alpha_i'+j\right)}{s\left(\alpha_i'+j+1\right)}=1+O\left(\frac{\log\log N}{(\log N)^{1-\eta\rho}}\right)$$

quand N tend vers l'infini, et avec (3.5.23),

$$\frac{\mathbf{A}\left(\underline{\alpha}''\right)}{\mathbf{A}\left(\underline{\alpha}'\right)}=\exp\left(F\left(\underline{\alpha}''\right)-F\left(\underline{\alpha}'\right)\right)\left(1+O\left(\frac{\log\log N}{(\log N)^{1-\eta\rho}}\right)\right). \qquad (3.5.24)$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $t \in]0,1[$, tel que

$$F(\underline{\alpha}'') - F(\underline{\alpha}') = u\frac{\partial F(\underline{x})}{\partial x_i}(\underline{\alpha}' + t(\underline{\alpha}'' - \underline{\alpha}')).$$

Puisque $\|\underline{\alpha}'' - \underline{\alpha}'\| = |u| = O(\log\log N)$, on en deduit avec (3.5.11) que

$$\begin{aligned} F(\underline{\alpha}'') - F(\underline{\alpha}') &= u\rho\log p_i + O\left((\log\log N)\, p_i^{\rho}(\log n)^{\delta-1}\right) \\ &= u\rho\log p_i + O\left(\frac{\log\log N}{(\log N)^{1-\delta-\eta\rho}}\right), \end{aligned}$$

puis (3.5.20) à l'aide de (3.5.19).

2. Lorsque p_i est grand, on a, comme dans le point 1,

$$\frac{K(M'')}{K(M')} = \frac{\mathbf{A}(\underline{\alpha}'')}{\mathbf{A}(\underline{\alpha}')}\left(1 + O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right)$$

et par (3.5.12)

$$\begin{aligned} F(\underline{\alpha}'') - F(\underline{\alpha}') &= 1 + \log a + \log\log N \\ &\quad - (\alpha_i' + 1)\log(\alpha_i' + 1) + \alpha_i'\log\alpha_i' + O\left((\log N)^{\delta-1}\right). \end{aligned}$$

De cette égalité,et de (3.5.35) (avec $u = 1$), on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{A}(\underline{\alpha}'')}{\mathbf{A}(\underline{\alpha}')} &= \frac{a\log N}{\alpha_i' + 1} e\left(\frac{\alpha_i'}{\alpha_i' + 1}\right)^{\alpha_i'}\frac{s(\alpha_i')}{s(\alpha_i' + 1)}\left(1 + O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right) \\ &= \frac{a\log N}{\alpha_i' + 1}\left(1 + O\left((\log N)^{\delta-1}\right)\right). \end{aligned}$$

■

Théorème 3.5.1 *Soit $N = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ un $K-$champion.*

1. *Pour N suffisament grand, on a $\alpha_k = 1$*

2. *Pour $j \geq 1$, un entier fixé. On désigne par P_j le plus grand nombre premier tel que P_j^j divise N (en particulier $P_1 = p_k$). Lorsque N tend vers l'infini*

$$P_j \sim \left(\frac{a\log N}{j}\right)^{\frac{1}{\rho}} \sim j^{-1/\rho}P_1 \tag{3.5.25}$$

3. *Lorsque N tend vers l'infini,*

$$\omega(N) \sim \rho a^{1/\rho}\frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N}. \tag{3.5.26}$$

Preuve. Démonstration du point 1. On suppose $\alpha_k \geq 2$ et on pose

$$M = \frac{p_{k+1}p_{k+2}}{2p_{k-1}p_k}.$$

Lorsque N tend vers l'infini, k tend vers l'infini. Pour N suffisament grand on a donc

$$M < N,$$

et puisque N est un champion

$$K(M) < K(N).$$

On pose

$$M = M^{(0)},\ M^{(1)} = \frac{N}{p_k},\ M^{(2)} = \frac{N}{p_{k-1}p_k},\ M^{(3)} = \frac{Np_{k+1}}{p_{k-1}p_k},\ M^{(4)} = \frac{Np_{k+1}p_{k+2}}{p_{k-1}p_k} \text{ et } M^{(5)} = M.$$

Ces nombres sont des voisins de N, et par (3.3.2), on a $p_{k-1} > (\log N)^{(1-\delta)/\rho}$ pour N assez grand. En appliquant 5 fois le lemme 3.5.8, lorsque N tend vers l'infini, on a

$$1 > \frac{K(M)}{K(N)} = \prod_{i=1}^{4} \frac{K\left(M^{(i+1)}\right)}{K\left(M^{(i)}\right)} \sim \frac{\alpha_{k-1}\alpha_k}{2^\rho \times 1 \times 1}. \tag{3.5.27}$$

On a donc pour N assez grand

$$(\alpha_{k-1}\alpha_k)/2^\rho \lesssim 2^\rho = 3.314$$

.

Puisque α_k est un entier , il est plus petit que 2, il y a contradiction.

Démonstration de (3.5.25) . Soit i, dépendant de N, le plus grand indice tel que $\alpha_i \geq j$. Cet entier i est caractérisé par $\alpha_i \geq j \geq \alpha_{i+1}$.Notons $j' = \alpha_i$ et $j" = \alpha_{i+1}$. D'aprés (3.4.3) , il esxiste une constante C telle que

$$j > \alpha_{i+1} \geq \beta_{i+1} \log N - C(\log N)^\delta \geq \frac{a}{p_{i+1}^\delta} \log N - C(\log N)^\delta.$$

Cela implique

$$p_{i+1} \gg (\log N)^{(\delta-1)/\rho}, \text{ et donc aussi}$$

et donc aussi

$$p_i \gg (\log N)^{(\delta-1)/\rho}.$$

Le nombre $\dfrac{\log 3}{\log 2}$ étant irrationnel, si l'on ordonne l'enssemble des $2^u 3^v$en une suite croissante (x_n), on a $\lim x_{n+1}/x_n = 1$. En conséquence, pour tout $\epsilon > 0$, il existe N_ϵ tel que, pour tout champion $N \geq N_\epsilon$,il existe des entiers u', v', u", v" ≥ 0 avec

$$(1-\epsilon)\, p_i \leq 2^{u'} 3^{v\prime} < p_i < p_{i+1} < 2^{u"} 3^{v"} < p_{i+1}(1+\epsilon) < p_i(1+2\epsilon)\,. \tag{3.5.28}$$

De l'encadrement ci-dessus, de $p_i \leq p_k$ et de (3.3.6) il résulte que

$$u', v', u", v" = O(\log\log N)\,. \tag{3.5.29}$$

Soit

$$M' = N 2^{u'} 3^{v\prime}/p_i < N \qquad \text{et} \qquad M" = N\frac{p_{i+1}}{2^{u"} 3^{v"}} < N. \tag{3.5.30}$$

La majoration (3.5.29) avec (3.4.2) entraîne que, pour N assez grand, u" $< \alpha_1$ et v" $< \alpha_2$. Ainsi M' et M" son entiers. Comme N est un $K-$champion on a

$$K(M') < K(N) \text{ et } K(M") < K(N)\,.$$

Par le lemme 3.5.8 on a comme en (3.5.27)

$$\frac{K(M')}{K(N)} \sim \frac{2^{\rho u'} 3^{\rho v\prime} j'}{a \log N} \qquad \text{et} \qquad \frac{K(M")}{K(N)} \sim \frac{a \log N}{2^{\rho u"} 3^{\rho v"}(j"+1)}.$$

Et donc, puisque $2^{u'} 3^{v\prime} \geq (1-\epsilon)\, p_i$,

$$(1-\epsilon)^\rho\, p_i^\rho \frac{j'}{\log N} \lesssim \frac{K(M')}{K(N)} < 1$$

soit

$$P_j = p_i \lesssim \frac{1}{1-\epsilon}\left(\frac{a \log N}{j'}\right)^{\frac{1}{\rho}} \leq \frac{1}{1-\epsilon}\left(\frac{a \log N}{j}\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

De même, la majoration $K(M")/K(N) < 1$ avec $2^{u"} 3^{v"} \leq p_i(1+2\epsilon)$ donne

$$P_j = p_i \gtrsim \frac{1}{(1+2\epsilon)}\left(\frac{a \log N}{j}\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Démonstration de (3.5.26). Choisissant $j = 1$ dans (3.5.25) on obtient

$$p_k = P_1 \sim (a \log N)^{\frac{1}{\rho}}\,,$$

puis, par le théorème des nombres premiers, $k \log k \sim (a \log N)^{\frac{1}{\rho}}$ et $\log k \sim \frac{1}{\rho} \log\log N$ et cela donne

$$k = \omega(N) \sim \rho a^{1/\rho} \frac{(\log N)^{1/\rho}}{\log\log N}.$$

■

3.6 Estimation de $Q(X)$

Soit $Q(X)$ le nombre de $K-$champion au plus égaux à X. $N = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ un $K-$champion avec $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_k \geq 1$ et par cette propriété , on a comme en [3] paragraphe 6.4

$$\log X \ll Q(X) \ll \exp\left((1+o(1))\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\log X}{\log\log X}}\right)$$

Théorème 3.6.1 *1. Pour X assez grand, on a*

$$Q(X) \geq (\log X)^{1.07}.$$

2. Lorsque X tend vers l'infini

$$\log Q(X) = O\left((\log X)^{\delta/2}\right)$$

où $\delta = 0.788...$a été défini en $(3.3.7)$.

Preuve. cf([5]) ■

M. Deleglise a calculé tous les champions de Kalmar jusqu'à $X = 5579408301266989609674153\,90$. Il a obtenu 340884 nombres de la forme $N = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$. Mais seuls 761 sont de **véritables** champions.

On pourra consulter la table des 761 champions de la fonction de Kalmar sur le site http://math.univ-lyon1.fr/~deleglis/tables.html

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié essentiellement les grandes valeurs ainsi que les propriétés des nombres champions de la fonction de factorisation de Kalmar. Cette fonction a été étudiée par plusieurs auteurs, nous nous sommes intéressés aux derniers résultats obtenus et publiés dans ([5]), par M. Deleglise, M.O. Hernane et J.L. Nicolas.

Plusieurs problèmes ouverts ont été annoncés à la fin de leur article. Nous envisageons de continuer sur ce sujet et essayer d'y apporter des réponses. Il serait intéressant d'expliciter les constantes intervenant dans les théorèmes cités.

On pourrait aussi, essayer d'améliorer l'estimation $Q(X)$ du nombre de champions inférieurs à une certaine borne X.

Bibliographie

[1] **E. R. Canfield -** *On problem of Oppenheim conerning "Factorisasio Numerrorum". Journal of Number Theory 17, 1-28 (1983).*

[2] **L. Carlitz**, *Extended Bernoulli and Eulerian, numbers, Duke Math. J. 31 (1964) 667-689.*

[3] **B. Chor, P. Lemke, Z. Mador,** *On The numberof ordered Factorisations of natural numbers, Discrete Math. 214 (2000) 123-133.*

[4] **DIEUDONNE. J**. – *Calcul infinitésimal. Hermann, paris, 1968.*

[5] **M. Deléglise**, **M. O. Hernane**, **J-L. Nicolas**, *Grandes valeurs et nombres champions de la fonction arithmétique de Kalmar*, *J.Number Theory* 128 (2008). $1676 - 1716$.

[6] **R.Evans-** *An asymptotic formula for extented Eulerian numbers*, *DukeMaths.J.*(1974)$161 - 175$.

[7] **P. Erdös,** *On some asymptotic formula in the theory of the "Factorisatio numerorum".*

[8] **M. O. Hernane, J.-L. Nicolas-** *Grandes valeurs du nombre de factorisations d'un entier en produit ordonné de facteurs premiers*, *Ramanujan.J* (2007) 14; $277 - 304$.

[9] **E. Hille-** *A problem in"FactorisatioNumerorum*], *Acta Arith.*2(1937)$134 - 144$.

[10] **H. K. Hwang,** *Distributtion of number of factors in random ordered factorisations of integers, J. numberTheory 81 (2000) 61-92.*

[11] **Shikao Ikehara** - *On Kalmar's Problem in "Factorisation Numerorum".Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 21 (1939) 208-219; II 23 (1941) 767-774.*

[12] **Jun Kyo Kim** -*On Highly Factorable Numbers. Jpurnal of Number Theory 72, 76-91 (1998).*

[13] **M.Lazar, F.Luca,** *On the maximal order of numbers in the "Factorisatio numerorum" problem, J.Number Theory 124 (2) (2007) 470-490.*

[14] **A. Knopfmacher, J Knopfmacher, R. Warlimont,** *Ordered factorisations for integers and arithmetical semi-groups, in: Avanced in Number Théory, Kingston Ontario, 1991, Oxford Sci. Publ. Oxford Univ. Press, New York, 1993, pp. 151-165; Acta Arith . 61 (1992) 327-336.*

[15] **A. Knopfmacher, M.E Mays-** *A survey of factorisation counting function, Int. J. Number theory* 1 (4) (2005) 568 – 581.

[16] **P. A. Mac-Mahon,** *Memoir on theory of compositions of numbers, Philos. Trans. Roy. Soc. London. (1) 184 (1893) 835-901, Percy Alexander Mac-Mahon collected Papers, vol. 1, pp. 620-686.*

[17] **Jean -LOUIS-Nicolas** -*Algorithmes d'optimisation en nombres entiers. Spciété mathématique de France Astérique 36-39 (1976) p.169-182.*

[18] **A. Oppenheim,** *On an arithmetic function, J. London Math. Soc. 1 (1926) 205- 211; II* (1927) 123-130.

[19] **S. Ramanujan,** *Highly composite numbers, Proc. London Math. Soc. Serie 214 (1915) 347-409; Collected papers, Cambridge Univ. Press, 1927, pp. 78-129.*

[20] **Guy Robin** - *Sur un problème d'optimisation en nombres entiers. Math. Opertionsforsch. Statist. Ser. Optimization, Vol. 11 (1980) No. 3, 403-420.*

[21] **Guy Robin** - *Méthodes d'optimisartion pour un problème de théorie des nombres. R.A.I.R.O. Informatique théorique/ Theorical Informatics (vol. 17, n°*3, 1983, p. 239 à 247.