

N° d'ordre : 12/2013-M/MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté de Mathématiques



MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

En Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle (Méthodes Stochastiques)

Par : Nacer DEMMOUCHE

Étude probabiliste des équations aux récurrences
stochastiques et applications statistiques

Soutenu publiquement le 09/01/2013, devant le jury composé de :

Mohamed BENTARZI	Professeur	U S T H B	Président
Youcef BERKOUN	Maître de conférences	U M M T O	Directeur de mémoire
Hafida GUERBYENNE	Maître de conférences	U S T H B	Examinatrice
Fayçal HAMDI	Maître de conférences	U S T H B	Examinateur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma plus profonde gratitude envers Monsieur Youcef Berkoun qui a accepté de m'encadrer. Il m'a beaucoup aidé au travers de ses précieux conseils et sa disponibilité tout au long de son travail. Durant les cinq années que j'ai passés à l'université de Oued Aissi, il m'a aidé à dépasser les moments difficiles que j'ai vécu et j'ai appris de ses conseils et des discussions que nous avons pu avoir à apprécier la recherche dans le domaine des probabilités. Ses compétences, sa personnalité et surtout sa pédagogie m'ont permis de faire progresser mes efforts et mes connaissances.

Un grand merci à mon enseignant le professeur Mohamed Bentarzi pour la qualité de ses cours, le grand sérieux et l'importance qu'il donne à son travail. Son expérience, ses compétences, sa conception de la recherche, sa sévérité scientifique et son sacrifice à la science m'ont motivé à suivre le chemin de la recherche.

Je remercie chaleureusement mon enseignant Monsieur Abdelhakim Aknouche pour m'avoir proposé ce sujet. Je tiens à le remercier pour les encouragements qu'il m'a apportés pour travailler sur ce sujet d'actualité et la documentation intéressante qu'il m'a fournie. Je n'oublierai pas les efforts et le temps qu'il a consacrés pour nous donner une base théorique.

Mon profond respect et ma gratitude se dirigent aussi vers mon enseignante Madame Guerbyenne pour son aptitude dans l'enseignement et les conseils que j'ai tirés de sa longue expérience.

Je tiens à remercier mon enseignant Monsieur Fayçal Hamdi qui est remarquable de gentillesse et de sympathie. Personnellement je le trouve une bonne référence pour la maîtrise de son domaine.

Je remercie tous les professeurs qui m'ont enseigné au long de mon cursus universitaire. Je pense notamment à Mohamed Morsli qui m'a toujours encouragé, c'est lui qui m'a conseillé de rejoindre l'équipe du grand Monsieur le professeur Mohamed Bentarzi. Je saisis cette occasion favorable pour remercier mon ancien enseignant le professeur Mohamed Ibazizen. Je remercie Messieurs les professeurs Mohamed Ouanes, Hocine Fellague, Mohamed Aiden, Sadi Bachir et Mohamed Djedour.

Un merci du fond de cœur à mes parents, en particulier ma mère qui m'a poussé à reprendre mes études après quatre années d'arrêt d'études.

Je n'oublie pas mon frère Hakim pour son aide financier durant toutes ces années.

J'ai une pensée toute particulière pour ma future femme Nassima Feid qui m'a soutenu pendant la préparation de ce mémoire.

Je remercie mes amis que j'ai trouvés à mes côtés, en particulier : Youcef Guerab, Sedik Kheffeché, Moh amechetouh Sedki, Naime Aoudjit, Abdenour Chehboub, Aziz Chellal, Bouzid Chellal, Farid Chibane, Abdou Niandou Daouda.

Je dédie ce mémoire à Nassima Feid.

Table des matières

Introduction générale	3
1 Outils préliminaires	6
1.1 Processus aléatoires	6
1.1.1 Processus strictement stationnaire	7
1.1.2 Processus faiblement stationnaire	10
1.2 Chaînes de Markov à espace d'états continu	11
1.2.1 Noyau de transition et définition d'une chaîne de Markov	11
1.2.2 Irréductibilité et apériodicité	12
1.2.3 Chaînes récurrentes, chaînes transitoires	14
1.2.4 Existence de mesures invariantes	15
1.2.5 Ergodicité, Ergodicité géométrique	16
2 Équations aux récurrences stochastiques	20
2.1 Définition du modèle	20
2.2 Solution stationnaire	22
2.3 Moments de la loi stationnaire	35
2.4 Solution géométriquement ergodique	37
3 Variation régulière et valeurs extrêmes	40
3.1 Variation régulière dans \mathbb{R}	40
3.1.1 fonctions à variations régulières	40
3.1.2 Somme de variables aléatoires à variations régulières	41
3.1.3 Variation régulière du produit de deux variables	45
3.2 Variation régulière dans \mathbb{R}^d	46
3.2.1 Transformations de vecteurs aléatoires à variations régulières	51
3.2.2 Somme de vecteurs aléatoires à variations régulières	53

3.3	Variation régulière des solutions des équations aux récurrences stochastiques	56
3.3.1	Variation régulière de la distribution stationnaire	56
3.3.2	Variation régulière des distributions fini-dimensionnelles de la solution stationnaire	66
3.3.3	Variation régulière de la somme des variables de la solution stationnaire	68
4	Modèles ARCH/GARCH	71
4.1	Introduction	71
4.2	Solutions stationnaires	74
4.2.1	Étude d'un modèle GARCH(1,1)	74
4.2.2	Modèle GARCH(p,q)	79
4.3	Processus ARCH(∞)	84
4.3.1	Représentation ARCH(∞) d'un processus GARCH(p,q)	86
4.4	Moments d'ordres supérieurs et kurtosis	87
4.4.1	Moments d'ordres supérieurs	87
4.4.2	Coefficient d'aplatissement (Kurtosis)	88
4.5	Ergodicité géométrique et β -mélange des processus ARCH/GARCH . . .	89
5	Larges déviations et probabilité de ruine	96
5.1	Introduction	96
5.2	Large déviation dans le cas d'une suite de variables aléatoires <i>i.i.d.</i>	96
5.3	Principes de larges déviations pour la solution de l'équation aux récurrences stochastique	103
5.4	Probabilité de ruine	113
5.4.1	Probabilité de ruine multivariée	116
5.4.2	Probabilité de ruine pour les processus linéaires	119
5.4.3	Probabilité de ruine pour la solution de l'équation aux récurrences stochastique	122
	Conclusion et Perspectives	124
	Bibliographie	125

Introduction générale

L'analyse des séries chronologiques a pour but, la mise en œuvre et l'évaluation des modèles mathématiques adéquats pour la description des phénomènes aléatoires évolutifs dans le temps. On comprend du modèle mathématique une représentation simplifiée d'un phénomène aléatoire sous étude ; cette représentation est soumise à des hypothèses qui simplifient l'étude de la série chronologique pour un objectif préalablement fixé. L'élaboration d'un modèle mathématique est basé sur des outils mathématiques, c'est-à-dire des méthodes et des techniques qui sont fondées sur l'observation du phénomène, la mise en œuvre du modèle correspondant et en terminant par la validation de ce modèle. Une fois ce modèle est mis en œuvre, on peut l'exploiter en vue de résoudre différentes problématiques posées au préalable. Le modèle mathématique le plus utilisé pour représenter une série chronologique est le processus aléatoire qui s'agit d'une famille de variables aléatoires caractérisées par une structure de dépendance stochastique et provenant d'une distribution spécifique. La qualité de la représentation du phénomène aléatoire par un modèle mathématique dépend de ce que la structure de dépendance du processus puisse le mieux prendre la structure de dépendance du phénomène observé. L'objectif de ce mémoire est l'étude des équations aux récurrences stochastiques. Les domaines d'application de ce type d'équations sont multiples entre autres : l'économétrie financière, l'actuariat (modèle de risque) etc. Les processus non-linéaire, en particulier les processus autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (*ARCH*) proposés par Engle [27] portant sur le problème de modélisation du phénomène du regroupement de la volatilité caractérisant les séries chronologiques financières et les modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques généralisés (*GARCH*) proposés par Bollerslev [12], peuvent être inclus dans l'équation aux récurrences stochastique. Ceci implique que le comportement extrémal de ces processus peut être étudié via l'étude de l'équation aux récurrences stochastique et son comportement extrémal. Une question importante pour l'étude de l'équation aux récurrences stochastique est de trouver des hypothèses sur les coefficients aléatoires assurant l'existence et l'unicité de la solution

non-anticipative ayant les propriétés suivantes : stationnarité stricte, stationnarité au second ordre, ergodicité, existence des moments d'ordres supérieurs, ergodicité géométrique, (β, α) -mélange, comportement des queues de la distribution stationnaire et des distributions fini-dimensionnelles. De nombreux auteurs se sont intéressés à l'étude de l'équation aux récurrences stochastique, en particulier Vervaat [74], Brandt [15], Bougerol et Picard [13] pour l'existence et l'unicité de la solution non-anticipative strictement stationnaire et ergodique, Goldie [36] et Grey [37] pour le comportement des queues de la distribution stationnaire de la solution strictement stationnaire, Basrak [5] pour l'ergodicité géométrique et les propriétés (α, β) -mélanges, Konstantinides et Mikosch [49] sur les principes de larges déviations et la probabilité de ruine associés à la solution non-anticipative strictement stationnaire.

Ce mémoire est composé de 5 chapitres.

Le chapitre 1 présente les concepts théoriques de base : Dans la section 1.1, on présente quelques propriétés des processus aléatoires telles que la stationnarité stricte, la stationnarité au second ordre, les transformations préservant la mesure de probabilité, l'ergodicité, le mélange et la régularité. Dans la section 1.2, on présente la chaîne de Markov à espace d'états continu et leurs propriétés telles que l'irréductibilité, l'apériodicité, la récurrence, la transition, l'existence de mesures invariantes, l'ergodicité, l'ergodicité géométrique et les propriétés (α, β) -mélanges.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude de l'équation aux récurrences stochastique : Dans la section 2.1, on définit l'équation aux récurrence stochastique et les notions de solutions non-anticipatives et l'exposant de Lyapounov. Dans la section 2.2, on donne les différentes conditions nécessaires et suffisantes assurant l'existence et l'unicité de la solution non-anticipative strictement stationnaire et ergodique. Dans la section 2.3, on définit les moments d'ordres supérieurs de la loi stationnaire. Dans la section 2.4, on donne des conditions suffisantes assurant l'ergodicité géométrique et les propriétés (α, β) -mélanges de la solution non-anticipative strictement stationnaire.

Le chapitre 3 présente la variation régulière de la solution strictement stationnaire de l'équation aux récurrences stochastique : Dans la section 3.1, on définit la notion de variation régulière d'une variable aléatoire et les différentes transformations d'une suite de variables aléatoires à variations régulières telles que la somme et le produit. Dans la section 3.2, on prolonge la notion de variation régulière au cas multidimensionnel. Dans la section 3.3, on applique les résultats des deux sections précédentes pour étudier le comportement de la queue de la distribution stationnaire de la solution de l'équation aux récurrences

stochastique ainsi que le comportement des queues de ses distributions fini-dimensionnelles et les sommes de ses composantes.

Le chapitre 4 est consacré aux processus *ARCH* et *GARCH*. Dans la section 4.1, on donne les définitions précises des processus *ARCH* et *GARCH*. On montre que le carré du processus *ARCH* satisfait un modèle autorégressif *AR* et le carré du processus *GARCH* satisfait le modèle autorégressif moyenne mobile *ARMA*. Dans la section 4.2, on donne les conditions nécessaires et suffisantes de stationnarité stricte et de stationnarité au second ordre du processus *GARCH*(1,1) qui peut être écrit sous forme d'équation aux récurrences stochastique. Sous les conditions de stationnarité stricte du processus *GARCH*(1,1), on précise le comportement de ses queues. Dans la section 4.3, on définit le processus *ARCH*(∞) et on montre que le processus *GARCH*(p,q) peut être écrit sous forme d'un processus *ARCH*(∞). Dans la section 4.4, on donne les conditions suffisantes assurant l'existence des moments d'ordres supérieurs du processus *GARCH*(p,q) et on définit le coefficient d'aplatissement (kurtosis). Dans la section 4.5, on montre l'ergodicité géométrique et les propriétés (α, β)-mélanges de ces processus.

Dans le chapitre 5, on s'intéresse aux principes de grandes déviations et la probabilité de ruine. Le principe des grandes déviations concerne le comportement asymptotique des queues de suites de variables aléatoires et a pour objet l'étude de la vitesse de convergence vers zéro d'événements rares. Le cas typique est celui de grandes déviations par rapport à la moyenne dans les théorèmes ergodiques. Dans la section 5.2, on définit le principe de grande déviation dans le cas d'une suite de variables aléatoires *i.i.d* à variation régulière d'indice α et on montre que la probabilité de large déviation dépend de la valeur de α . Dans la section 5.3, On calcule la probabilité de large déviation de la solution strictement stationnaire de l'équation aux récurrences stochastique. Dans la section 5.4, on définit les notions de processus de risque et la probabilité de ruine dans les assurances. On montre que la probabilité de ruine dépend de la distribution de la suite de variables aléatoires *i.i.d* qui modélisent les coûts individuels des sinistres. Finalement, on calcule la probabilité de ruine pour les processus linéaires et pour la solution strictement stationnaire de l'équation aux récurrences stochastique.

Chapitre 1

Outils préliminaires

Pour une meilleure compréhension de notre travail, on donne quelques outils qui seront nécessaires par la suite.

1.1 Processus aléatoires

Définition 1.1.1. *Un processus aléatoire \mathbb{X} de domaine d'évolution T défini sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ est une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in T)$, i.e.,*

$$\begin{aligned}\mathbb{X} &= (X_t, t \in T) : T \rightarrow \mathcal{D}((\Omega, \mathcal{F}), (\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))) \\ & \quad t \mapsto X_t\end{aligned}$$

avec $\mathcal{D}((\Omega, \mathcal{F}), (\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X})))$ est l'ensemble des variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$.

Remarque 1.1.

1. Pour ω fixé, la fonction

$$\begin{aligned}\mathbb{X}(\omega) : T &\rightarrow \mathcal{X} \\ & \quad t \mapsto \mathbb{X}(\omega, t) = X_t(\omega)\end{aligned}$$

définit la trajectoire du processus.

2. Si T et \mathcal{X} sont discrets (resp. continus), le processus est dit à temps discret et à espace d'états discret (resp. à temps continu et à espace d'états continu).

3. Si T est discret (resp. continu) et \mathcal{X} est continu (resp. discret), le processus est dit à temps discret et à espace d'états continu (resp. à temps continu et à espace d'états discret).

Comme pour les vecteurs aléatoires, on peut définir la distribution d'un processus aléatoire de la façon suivante.

Définition 1.1.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, la distribution fini-dimensionnelle du processus $\mathbb{X} = (X_t, t \in T)$ est la distribution de toute sous-suite finie $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ de \mathbb{X} , définie de $\mathcal{B}(\mathcal{X})^{\otimes n}$ dans $[0, 1]$, i.e.,*

$$P_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}(\cdot) : \mathcal{B}(\mathcal{X})^{\otimes n} \rightarrow [0, 1]$$

$$B \mapsto P_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}(B) = P\left\{\omega : \bigcap_{j=1}^n X_{t_j}(\omega) \in B_{t_j}\right\}$$

$$\text{où } B = \prod_{j=1}^n B_{t_j} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})^{\otimes n}$$

La fonction moyenne, la fonction variance et la fonction d'autocovariance de la distribution d'un processus aléatoire sont définies comme suit.

Définition 1.1.3. *Soit $X = (X_n, n \in T)$ un processus aléatoire défini sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, alors*

1. $\forall t \in T, \mu(t) = E(X_t),$
2. $\forall t \in T, \sigma^2(t) = \text{var}(X_t),$
3. $\forall (t, s) \in T \times T, \gamma(t, s) = \text{cov}(X_t, X_s).$

1.1.1 Processus strictement stationnaire

La structure de dépendance la plus simple que peut avoir un processus aléatoire est la propriété d'indépendance stochastique. Cette propriété est adaptée aux processus aléatoires à partir de la propriété d'indépendances d'une suite finie de variables aléatoires. On dit dans un premier temps qu'un processus aléatoire est stationnaire si la distribution de X_t est invariante dans le domaine d'évolution T . On peut généraliser cette propriété de stationnarité marginale à la propriété de stationnarité des distributions fini-dimensionnelles.

Définition 1.1.4. *Un processus aléatoire $\mathbb{X} = (X_t, t \in T)$ défini sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ est dit strictement stationnaire, si*

$$P(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_k} \in B_k) = P(X_{t_1+h} \in B_1, \dots, X_{t_k+h} \in B_k), \quad \forall B_i \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \quad \forall t_i, h \in T$$

avec $t_i + h \in T, i = 1, \dots, k$.

Maintenant, on définit les transformations préservant la mesure P qui sont liées étroitement aux processus strictement stationnaires.

Définition 1.1.5. *Une transformation préservant la mesure P est une fonction mesurable T , définie de (Ω, \mathcal{F}) dans (Ω, \mathcal{F}) , telle que $\forall B \in \mathcal{F}, P(T^{-1}B) = P(B)$.*

Proposition 1.1.1. [50] *Soient T une transformation préservant la mesure P et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, alors on peut définir un processus strictement stationnaire $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :*

$$X_n(\omega) = X(T^n(\omega)), \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (1.1)$$

Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité et T une transformation préservant la mesure P . Pour $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on définit la fonction UX par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad UX(\omega) = X(T(\omega)).$$

On s'intéresse au comportement des moyennes empiriques $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X + UX + \dots + U^{n-1}X)$.

Théorème 1.1.1 (Birkhoff). [50] *Soit T une transformation préservant la mesure P , alors pour $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, il existe $\bar{X} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que :*

1. $\bar{X}_n \rightarrow \bar{X}$ p.s. si $n \rightarrow +\infty$.
2. $U\bar{X} = \bar{X}$ p.s.
3. $\int_{\Omega} \bar{X}(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$.

Soient T une transformation préservant la mesure P et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} = (X(T^n))_{n \in \mathbb{N}}$ un processus strictement stationnaire où $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Un résultat du théorème de Birkhoff est la loi forte des grands nombres.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U^i X = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_n = \bar{X}.$$

Dans le cas où les variables X_n sont indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d*), \bar{X} est une constante, $\bar{X} = E(X_n)$.

Définition 1.1.6. Soit T une transformation préservant la mesure P , alors

1. Une variable aléatoire X définie sur (Ω, \mathcal{F}, P) est dite T -invariante, si

$$X(T(\omega)) = X(\omega) \quad \text{p.s}$$

2. Un évènement $B \in \mathcal{F}$ est dit T -invariant, si la fonction indicatrice \mathbb{I}_B est T -invariante.
3. T est dite ergodique, si chaque fonction mesurable T -invariante est une constante presque sûrement.
4. T est ergodique ssi chaque évènement T -invariant a une probabilité égale à un ou zéro.

Une autre propriété importante des transformations préservant la mesure P est la propriété du mélange.

Définition 1.1.7. Une transformation T préservant la mesure P est dite mélangeante si,

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{F}, \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_1 \cap T^{-n}B_2) = P(B_1)P(B_2).$$

Le mélange implique l'ergodicité. En effet, si B est T -invariant, alors $P(B) = P(B \cap T^{-n}B) = P^2(B)$, ce qui implique que $P(B) = 0$ ou 1 .

A partir des définitions précédentes, on peut formuler des définitions correspondantes pour des processus strictement stationnaires.

Définition 1.1.8. Soit $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un processus aléatoire strictement stationnaire défini sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) , alors

1. Le processus $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dit ergodique, si la transformation préservant la mesure P correspondante est ergodique.
2. Le processus $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dit mélangeant si la transformation préservant la mesure P correspondante est mélangeante.

On définit maintenant la notion de la régularité. Pour $-\infty \leq k_1 \leq k_2 \leq +\infty$, soit $\mathcal{F}_{k_1}^{k_2} \subseteq \mathcal{F}$ la plus petite tribu contenant tous les ensembles cylindriques de la forme

$$C = \{\omega : X_{n_1}(\omega) \in B_1, \dots, X_{n_k}(\omega) \in B_k\},$$

avec $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$, $k_1 \leq n_1, \dots, n_k \leq k_2$ et $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Définition 1.1.9. Un processus strictement stationnaire $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dit régulier, si la tribu $\cap_k \mathcal{F}_{-\infty}^k$ contient seulement les évènements de mesure 0 et 1.

Une conséquence importante de la régularité est le lien avec le mélange.

Théorème 1.1.2. [8] *Si le processus strictement stationnaire $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est régulier, alors il est mélangeant et par conséquent ergodique.*

1.1.2 Processus faiblement stationnaire

La stationnarité stricte exige la connaissance des distributions fini-dimensionnelles du processus qui ne sont pas toujours connues explicitement. Toutefois, plusieurs propriétés essentielles du processus aléatoire peuvent être déduites à partir des deux premiers moments. La stationnarité de la variance peut être suffisante pour expliquer la stationnarité dans la distribution du processus.

Définition 1.1.10. *Un processus aléatoire $\mathbb{X} = (X_t, t \in T)$ défini sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ est dit faiblement stationnaire, si*

1. $\sigma^2(t) = \text{var}(X_t) = \sigma^2 < +\infty, \forall t \in T,$
2. $\mu(t) = E(X_t) = \mu, \forall t \in T$
3. $\gamma(t, t+h) = \text{cov}(X_t, X_{t+h}) = \text{cov}(X_0, X_h), \forall t, h \in T.$

Sous des conditions supplémentaires sur le processus faiblement stationnaire, la moyenne empirique converge vers la moyenne théorique.

Théorème 1.1.3. [45] *Soit $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus faiblement stationnaire non corrélé, alors*

$$\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \xrightarrow{m.q} E(X_1) \quad m.q : \text{moyenne quadratique.}$$

Définition 1.1.11. *On dit qu'un processus faiblement stationnaire de fonction d'autocovariance $\gamma(h)$ est asymptotiquement non corrélé, si*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{h=0}^{k-1} \gamma(h) = 0.$$

On a immédiatement le résultat suivant.

Théorème 1.1.4. [45] *Soit $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus faiblement stationnaire de fonction d'autocovariance $\gamma(h)$, alors*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{h=0}^{k-1} \gamma(h) = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} E(\bar{X}_k - \mu)^2 = 0.$$

Le théorème 1.1.4 peut se généraliser à des processus faiblement stationnaire quelconques, c'est-à-dire même dans la présence de la corrélation.

Théorème 1.1.5. [45] *Soit $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus faiblement stationnaire défini sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) , alors il existe une variable aléatoire X définie sur le même espace de probabilité telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \|\bar{X}_n - X\| = 0.$$

1.2 Chaînes de Markov à espace d'états continu

Une chaîne de Markov est un type particulier de processus aléatoires. Les chaînes de Markov à espaces d'états continus est une généralisation des chaînes de Markov à espaces d'états dénombrables.

1.2.1 Noyau de transition et définition d'une chaîne de Markov

La définition suivante introduit la notion de noyau de transition sur un espace d'états continu \mathcal{X} .

Définition 1.2.1. *On appelle noyau de transition ou fonction de transition de Markov, toute famille $\mathcal{P} = \{P(x, B), x \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\}$ telle que :*

1. *Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $P(\cdot, B)$ est une fonction mesurable non négative sur \mathcal{X} .*
2. *Pour chaque $x \in \mathcal{X}$, $P(x, \cdot)$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.*

Maintenant, on peut définir un processus aléatoire qui vérifie les propriétés markoviennes et pour lequel \mathcal{P} servira de décrire les lois de transitions en une seule étape.

Théorème 1.2.1. [54] *Pour toute mesure initiale μ sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ et pour tout noyau de transition $\mathcal{P} = \{P(x, B), x \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\}$, il existe un processus aléatoire $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\Omega = \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{B}(\mathcal{X})^{\otimes \mathbb{N}}$ -mesurable, et une mesure de probabilité \mathbb{P}_μ sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})^{\otimes \mathbb{N}}$ telle que*

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})^{\otimes \mathbb{N}}, \mathbb{P}_\mu(\mathbb{X} \in B) = \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) \mathbb{P}_\mu(\mathbb{X} \in B | X_0 = x) \text{ et } \forall (B_i)_{i=0}^n; B_i \subseteq \mathcal{X},$$

$$\mathbb{P}_\mu(X_0 \in B_0, \dots, X_n \in B_n) = \int_{x_0 \in B_0} \dots \int_{x_{n-1} \in B_{n-1}} \mu(dx_0) P(x_0, dx_1) \dots P(x_{n-1}, B_n) \quad (1.2)$$

La définition d'une chaîne de Markov homogène repose sur les distributions (1.2).

Définition 1.2.2. *Un processus aléatoire $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dit une chaîne de Markov homogène avec un noyau de transition \mathcal{P} et une distribution initiale μ , si les distributions fini-dimensionnelles satisfont (1.2) pour tout n .*

Le noyau de transition en n étapes est défini itérativement. On pose $P^0(x, B) = \delta_x(B)$ où $\delta_x(B)$ est la mesure de Dirac définie par

$$\delta_x(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $n \geq 1$, on écrit

$$P^n(x, B) = \int_{\mathcal{X}} P(x, dy) P^{n-1}(y, B), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

Ainsi, le noyau de transition en n étapes est

$$\mathcal{P}^n = \{P^n(x, B), x \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\}.$$

On vérifie que $P^n(x, B)$ s'interprète comme la probabilité conditionnelle de l'événement $\{X_n \in B\}$ par rapport à $X_0 = x_0$.

1.2.2 Irréductibilité et apériodicité

L'irréductibilité signifie qu'une chaîne de Markov démarrante d'un état initial $X_0 = x_0$, avec une probabilité positive visite n'importe quel ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ de mesure positive. On définit d'abord quelques éléments essentiels.

Définition 1.2.3. *Soit $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov et $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, alors*

1. *Le temps de séjour dans B est :*

$$\eta_B = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{X_n \in B}$$

avec \mathbb{I}_B désigne la variable indicatrice d'un événement B .

2. *La durée moyenne de séjour dans B partant de $x \in \mathcal{X}$ est donnée par :*

$$E(\eta_B | X_0 = x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P^n(x, B).$$

3. Le temps de premier passage dans B à partir de l'instant 1 est donné par :

$$\tau_B = \min\{n \geq 1 : X_n \in B\}.$$

4. La probabilité de passage dans B partant de $x \in \mathcal{X}$:

$$\mathbb{P}(\tau_B < +\infty | X_0 = x).$$

On définit maintenant le concept d'irréductibilité.

Théorème 1.2.2. [54] *Soit φ une mesure non identiquement nulle définie sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, on dit que φ est une mesure d'irréductibilité, si*

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \quad \varphi(B) > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} P^n(x, B) > 0$$

On dit alors que la chaîne $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est φ -irréductible.

L'existence de la mesure d'irréductibilité maximale est assurée par la proposition suivante.

Proposition 1.2.1. [54] *Si $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est φ -irréductible, il existe une mesure ψ sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ telle que :*

1. $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ψ -irréductible.
2. Pour toute autre mesure φ' sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est φ' -irréductible si et seulement si φ' est absolument continue par rapport à ψ ($\psi \succ \varphi'$).
3. Si $\psi(A) = 0$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, alors $\psi(\bar{A}) = 0$ où $\bar{A} = \{x : \mathbb{P}(\tau_B < +\infty | X_0 = x) > 0\}$.

La mesure ψ est alors dite mesure d'irréductibilité maximale.

Pour une chaîne de Markov de mesure d'irréductibilité maximale ψ , on définit l'ensemble $\mathcal{B}^+(\mathcal{X})$ défini par : $\mathcal{B}^+(\mathcal{X}) = \{B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) : \psi(B) > 0\}$. L'existence d'une mesure d'irréductibilité est compatible avec le comportement périodique de la chaîne. Dans le cas où \mathcal{X} est dénombrable et la chaîne est irréductible (tous les états communiquent), il suffit que $P(x, x) > 0$ pour que la chaîne soit apériodique. La définition est moins immédiate pour un espace d'états continu. On commence à définir la notion de "small set".

Définition 1.2.4. *On appelle ν_m -small set tout ensemble $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tel qu'il existe un $m > 0$ et une mesure non triviale ν_m sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ tels que :*

$$\forall x \in C, \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \quad P^m(x, B) \geq \nu_m(B).$$

Soit C un ν_M -small set tel que $\nu_M(C) > 0$. On considère l'ensemble des entiers n tels que C est ν_n -small set par rapport à la mesure ν_n proportionnelle à ν_M :

$E_C = \{n \geq 1 : \text{l'ensemble } C \text{ est un } \nu_n\text{-small set, avec } \nu_n = \delta_n \nu_M \text{ pour } \delta_n > 0\}$.

Définition 1.2.5. Soient $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne ψ -irréductible et $C \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, alors $p = \text{pgcd}(E_C)$ est dit période de le chaîne. Si $p = 1$, la chaîne est dite apériodique. Si $1 \in E_C$, alors la chaîne est dite fortement apériodique.

1.2.3 Chaînes récurrentes, chaînes transitoires

La classification d'un ensemble $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ dans la classe des ensembles récurrents ou dans la classe des ensembles transitoires repose sur le temps moyen de séjour dans B .

Définition 1.2.6. Un ensemble $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ est dit :

1. récurrent, si $\forall x \in B, \sum_{n=1}^{+\infty} P^n(x, B) = \infty$;
2. uniformément transitoire, si $\exists M < +\infty$ t.q $\sum_{n=1}^{+\infty} P^n(x, B) < M, \forall x \in B$;
3. transitoire, s'il existe une famille (B_n) d'ensembles uniformément transitoires telle que $B = \bigcup_n B_n$.

Les chaînes de Markov se répartissent en deux classes, à savoir la classe des chaînes de Markov récurrentes et la classe des chaîne transitoires.

Théorème 1.2.3. [54] Supposons que la chaîne $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ψ -irréductible, alors

1. La chaîne est récurrente ssi $\sum_{n=1}^{+\infty} P^n(x, B) = \infty, \forall x \in \mathcal{X}, \forall B \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$.
2. La chaîne est transitoire ssi $\exists (B_n), \mathcal{X} = \bigcup_n B_n, \sum_{n=1}^{+\infty} P^n(x, B_n) \leq M_n < \infty, \forall x \in \mathcal{X}$.

Une notion de récurrence un peu plus forte, mais permettant d'obtenir des résultats également plus forts est celle de Harris-récurrence. Au lieu d'être fondée sur l'espérance du temps de séjour, la définition repose sur la probabilité que ce temps de séjour soit infini.

Définition 1.2.7. Soit $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov ψ -irréductible, alors la chaîne est dite Harris-récurrent, si

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall B \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X}), \quad \mathbb{P}(\eta_B = \infty | X_0 = x) = 1.$$

1.2.4 Existence de mesures invariantes

La stabilité la plus forte pour une chaîne de Markov est que les variable X_n soient toutes de même loi, dans ce cas la propriété de Markov assure que les distributions finidimensionnelles de la chaîne $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont invariantes par translation dans le temps. De telles considérations nous mènent à introduire la notion de mesure invariante.

Définition 1.2.8. *Une mesure non nulle σ -finie π avec la propriété*

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \pi(B) = \int_{\mathcal{X}} \pi(dx)P(x, B) \quad (1.3)$$

est dite invariante.

Remarque 1.2. Lorsqu'une chaîne récurrente admet une mesure invariante finie, on peut toujours la normaliser pour obtenir une mesure de probabilité invariante et elle représente dans la pratique la situation de stabilité.

L'existence d'une mesure de probabilité invariante nous mène à définir deux classes différentes de chaînes de Markov récurrentes.

Définition 1.2.9. *Supposons que la chaîne $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ψ -irréductible et récurrente, alors*

1. *La chaîne est dite positive, si elle admet une mesure de probabilité invariante.*
2. *La chaîne est dite nulle, si elle n'admet pas une telle mesure.*

Si une chaîne récurrente positive est Harris-récurrente, on dit que la chaîne est Harris positive.

En général la chaîne de Markov n'est pas strictement stationnaire. Néanmoins, si on fixe une distribution initiale invariante, la chaîne de Markov devient un processus strictement stationnaire. Soit μ une mesure de probabilité initiale invariante telle que :

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \int_{\mathcal{X}} \mu(dx)P(x, B) = \mathbb{P}_{\mu}(X_1 \in B) \\ &= \int_{\mathcal{X}} \left(\int_{\mathcal{X}} \mu(dy)P(y, dx) \right) P(x, B) \\ &= \int_{\mathcal{X}} \mu(dy) \int_{\mathcal{X}} P(y, dx)P(x, B) \\ &= \int_{\mathcal{X}} \mu(dy)P^2(y, B) \\ &\vdots \\ &= \int_{\mathcal{X}} \mu(dy)P^n(y, B) = \mathbb{P}_{\mu}(X_n \in B), \forall n \in \mathbb{N}, \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}). \end{aligned}$$

En utilisant la propriété de Markov, cela est équivalent à la stationnarité stricte de la chaîne et μ sa loi stationnaire. En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\mu(X_n \in B_0, \dots, X_{n+k} \in B_k) &= \int_{x_0 \in B_0} \dots \int_{x_{k-1} \in B_{k-1}} \mu(dx_0) P(x_0, dx_1) \dots P(x_{k-1}, B_k) \\ &= \mathbb{P}_\mu(X_0 \in B_0, \dots, X_k \in B_k), \quad \forall n \geq 0, \quad \forall k \geq 0. \end{aligned}$$

Inversement si $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov strictement stationnaire, X_0 et X_1 ont la même loi, alors $\forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $\mu(B) = \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P(x, B)$, où μ désigne la distribution initiale. On a donc la proposition suivante.

Proposition 1.2.2. [54] *La chaîne de Markov $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement stationnaire si et seulement si sa distribution initiale est invariante.*

Les mesures de probabilités invariantes sont aussi importantes pour définir le comportement à long terme ou le comportement ergodique de la chaîne. Pour comprendre pourquoi ceci est plausible, considérant $\mathbb{P}_\mu(X_n \in \cdot)$ pour n'importe quelle mesure initiale μ . Si une mesure de probabilité limite γ_μ existe sur l'espace des mesures de probabilités telle que : $\forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \mathbb{P}_\mu(X_n \in B) \rightarrow \gamma_\mu(B)$ si $n \rightarrow \infty$, alors

$$\begin{aligned} \gamma_\mu(B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P^n(x, B) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) \int_{\mathcal{X}} P^{n-1}(x, dy) P(y, B) \\ &= \int_{\mathcal{X}} P(y, B) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \mu(dx) P^{n-1}(x, dy) \\ &= \int_{\mathcal{X}} \gamma_\mu(dy) P(y, B), \end{aligned}$$

donc γ_μ est une mesure de probabilité invariante. De plus, s'il y a une unique mesure de probabilité invariante, alors s'il existe une mesure de probabilité limite γ_μ , elle est indépendante de μ .

1.2.5 Ergodicité, Ergodicité géométrique

Si on commence la chaîne de Markov par n'importe quelle distribution de probabilité initiale μ sur \mathcal{X} , on se demande si la distribution de X_n converge vers une distribution de probabilité invariante π . On a déjà vu que l'existence d'une mesure de probabilité invariante est une condition nécessaire pour qu'une telle convergence ait lieu.

Définition 1.2.10. Soit $\mathcal{G} = \{g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}, |g(x)| \leq 1\}$ l'ensemble des fonctions mesurables, alors la norme en variation totale d'une mesure μ est définie par

$$\|\mu\| = \sup_{g \in \mathcal{G}} \int_{\mathcal{X}} \mu(dx)g(x). \quad (1.4)$$

Pour les chaînes de Markov récurrentes positives, la convergence de la distribution de X_n vers la distribution invariante π est assurée en utilisant la norme en variation totale.

Théorème 1.2.4. [59] Si $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov Harris-récurrente positive, fortement apériodique de mesure invariante π , alors pour toute mesure initiale μ

$$\left\| \int_{\mathcal{X}} P^n(x, \cdot) \mu(dx) - \pi(\cdot) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty$$

et la chaîne est dite ergodique.

Si une telle convergence par rapport à la norme en variation totale se produit avec un taux géométrique fixe, on dit que la chaîne de Markov est géométriquement ergodique. En d'autres termes, ceci signifie qu'il existe un ρ , $0 < \rho < 1$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{X}, \rho^{-n} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\| \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

Afin d'énoncer des résultats sur l'ergodicité géométrique, on définit les notions de chaîne de Feller et de T -chaîne.

Définition 1.2.11. [67] Une chaîne de Markov $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite une chaîne de Feller, si pour toute fonction f continue et bornée sur \mathcal{X} ,

$$E(f(X_1)|X_0 = x) \quad \text{est continue sur } \mathcal{X}.$$

Le théorème suivant donne les conditions suffisantes pour que la chaîne de Feller soit géométriquement ergodique.

Théorème 1.2.5. [5] Supposons que $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Feller telle que :

1. La chaîne est φ -irréductible pour une certaine mesure d'irréductibilité φ sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$.
2. Ils existent un compact $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ avec $\varphi(C) > 0$ et une fonction $f : \mathcal{X} \rightarrow [0, +\infty[$ tels que :

$$f(x) \geq 1, \quad \forall x \in C, \quad (1.6)$$

$$\exists \delta > 0, \quad E(f(X_1)|X_0 = x) \leq (1 - \delta)f(x), \quad \forall x \in C^c, \quad (1.7)$$

alors la chaîne est géométriquement ergodique.

Définition 1.2.12. La fonction $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite semi-continue inférieurement, si

$$\forall c \in \mathbb{R}, \{x : h(x) > c\} \text{ est un ouvert.}$$

Définition 1.2.13. S'ils existent une application $T : X \times \mathcal{B}(\mathcal{X}) \rightarrow [0, +\infty[$ et une distribution de probabilité $a = (a(n))$ sur \mathbb{N} telles que :

1. $T(\cdot, B)$ est semi-continue inférieurement, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$,
2. $T(x, \cdot)$ est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$,
3. $K_a(x, B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P^n(x, B) a(n) \geq T(x, B), \forall x \in X, \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$,

alors la chaîne $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite T -chaîne et T est dite un composant continu de $K_a(x, B)$.

Le résultat suivant donne la propriété de la T -chaîne.

Théorème 1.2.6. [54] Si $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est φ -irréductible T -chaîne, alors chaque compact est un small set.

On donne maintenant des conditions suffisantes de l'ergodicité géométrique pour une chaîne de Markov T -chaîne.

Théorème 1.2.7. [67] Soit $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov telle que :

1. La chaîne est φ -irréductible pour une certaine mesure d'irréductibilité φ sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$,
2. La chaîne est apériodique T -chaîne,
3. Ils existent un small set (un compact) $C \in \mathcal{B}^+(\mathcal{X})$, un entier $m \geq 1$ et une fonction continue $f : \mathcal{X} \rightarrow [0, +\infty[$ tels que :

$$E(f(X_{t+m}|X_t = x)) \leq \begin{cases} (1 - \beta)f(x) - \beta, & x \in C^c, \\ b, & x \in C, \end{cases}$$

$$\text{avec } \beta > 0 \text{ et } b > 0,$$

alors la chaîne est géométriquement ergodique. De plus $E_\pi(f(X_n))$ est fini, où E_π désigne l'espérance mathématique prise sous la distribution stationnaire π .

L'ergodicité géométrique implique que la chaîne $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométriquement β -mélangeante et par conséquent géométriquement fortement mélangeante.

Définition 1.2.14. Soit $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un processus strictement stationnaire, alors les coefficients β -mélanges sont donnés par :

$$\beta_{\mathbb{X}}(k) = E \left(\sup_{B \in \mathcal{F}_k^{+\infty}} |P(B|\mathcal{F}_{-\infty}^0) - P(B)| \right) \quad (1.8)$$

$$\text{avec } \mathcal{F}_k^{+\infty} = \sigma(X_k, X_{k+1}, \dots) \quad \text{et } \mathcal{F}_{-\infty}^0 = \sigma(\dots, X_{-1}, X_0)$$

Le processus est dit β -mélangeant, si $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{\mathbb{X}}(k) = 0$

Les coefficients α -mélange d'un processus strictement stationnaire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont donnés par la définition suivante.

Définition 1.2.15. Soit $\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un processus strictement stationnaire, alors les coefficients α -mélange sont donnés par :

$$\alpha_{\mathbb{X}}(k) = \sup_{A \in \mathcal{F}_{-\infty}^0, B \in \mathcal{F}_{+\infty}^k} |P(A \cap B) - P(A)P(B)|. \quad (1.9)$$

Le processus \mathbb{X} est dit α -mélange (ou fortement mélangeant), si $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{\mathbb{X}}(k) = 0$.

Remarque 1.3. Notons que $\alpha_{\mathbb{X}}(k) \leq \beta_{\mathbb{X}}(k)$ et si un processus strictement stationnaire et β -mélangeant, alors il est α -mélangeant.

Les coefficient β -mélange pour une chaîne de Markov ergodique sont donnés par le théorème suivant.

Théorème 1.2.8. [67] Pour une chaîne de Markov ergodique de distribution invariante π ,

$$\beta_{\mathbb{X}}(k) = \int_{\mathcal{X}} \|P^k(x, \cdot) - \pi(\cdot)\| \pi(dx)$$

Notons que dans (1.5), le taux ρ peut être choisi indépendamment de l'état initial x , par conséquent $\beta_{\mathbb{X}}(k) = O(\rho^k)$ si (1.5) est vérifiée. La chaîne est stationnaire et géométriquement ergodique, par conséquent la chaîne est géométriquement β -mélangeante.

Le résultat suivant donne les conditions suffisantes du théorème central limite pour un processus strictement stationnaire et fortement mélangeant.

Théorème 1.2.9. [44] Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un processus centré strictement stationnaire et fortement mélangeant. Supposons que $\exists \delta > 0$ tel que $E(|X_n|^{2+\delta}) < \infty$ et $\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_{\mathbb{X}}(k))^{\delta/(2+\delta)} < \infty$, alors

$$\sigma^2 = E(X_1^2) + 2 \sum_{n=2}^{\infty} E(X_1 X_n) < \infty$$

$$\text{et } n^{-1/2} S_n \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2).$$

Chapitre 2

Équations aux récurrences stochastiques

2.1 Définition du modèle

On considère un espace vectoriel \mathbb{R}^d muni de la norme euclidienne notée $|\cdot|$ et $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre d muni d'une norme euclidienne matricielle notée $\|\cdot\|$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$|x| = \left(\sum_{k=1}^d x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Pour toute matrice $a \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on a :

$$\|a\| = \sup\{|ax| : x \in \mathbb{R}^d, |x| = 1\}$$

Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité et $((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.*, où a_n est une matrice aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et b_n un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d .

On définit maintenant l'équation aux récurrences stochastique.

Définition 2.1.1. *On dit qu'un processus aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ défini sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans \mathbb{R}^d satisfait ou est une solution de l'équation aux récurrences stochastiques, s'il existe une suite de variables aléatoires $((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{Z}}$ *i.i.d.* définie sur le même espace de probabilité à valeurs dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$ telle que*

$$X_{n+1} = a_n X_n + b_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Il est clair que l'équation (2.1) définit un processus autorégressif avec des coefficients qui sont des matrices aléatoires. Dans le cas particulier où les matrices aléatoires a_n sont déterministes, $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un processus autorégressif d'ordre 1, $AR(1)$. Par conséquent, les processus aléatoires satisfaisant l'équation aux récurrences stochastique (2.1) sont dits processus autorégressifs généralisés.

Il serait intéressant de voir pour quelles conditions sur $((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{Z}}$, la solution non-anticipative strictement stationnaire de l'équation (2.1) existe.

Définition 2.1.2. *Une solution non-anticipative de l'équation aux récurrences stochastique (2.1) est un processus aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tel que*

$$\forall h \in \mathbb{N}, X_n \text{ et } (a_{n+h}, b_{n+h}) \text{ sont indépendants,}$$

ou encore si

$$X_n = f((a_{n-1}, b_{n-1}), (a_{n-2}, b_{n-2}), \dots).$$

Avant qu'on puisse formuler les résultats sur l'existence d'une telle solution, on définit la notion d'exposant de Lyapounov.

Définition 2.1.3. *Pour une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices aléatoires i.i.d, la constante*

$$\gamma = \inf \left\{ \frac{1}{n} E \log \|a_1 \dots a_n\|, n \in \mathbb{N} \right\} \quad (2.2)$$

est dite exposant de Lyapounov.

Remarque 2.1.

1. L'exposant de Lyapounov ne dépend pas de la norme choisie.
2. Supposons que la partie positive du logarithme de a_0 est intégrable, $E \log^+ \|a_0\| < \infty$, alors une application du théorème ergodique subadditif de Kingman [47] ou des résultats de Furstenberg et Kesten [32] donnent

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|a_1 \dots a_n\|, \quad p.s \quad (2.3)$$

Une autre définition de l'exposant de Lyapounov est basée sur l'ensemble des vecteurs positifs dans \mathbb{R}^d de norme égale à 1 et l'ensemble des matrices positives dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Soit \mathbb{S}^{d-1} une sphère dans \mathbb{R}^d de rayon 1 et \mathbb{S}_+ l'ensemble de ses éléments positifs.

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}, \quad \mathbb{S}_+ = \{x \in \mathbb{S}^{d-1} : x \geq 0\}$$

Si la condition $E(\log^+ \|a_n\|) < \infty$ est satisfaite, alors

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|a_1 \dots a_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |x a_1 \dots a_n|$$

2.2 Solution stationnaire

Dans cette partie, on décrit des résultats généraux sur les équations aux récurrences stochastique. Premièrement, on étudie les équations aux récurrences stochastiques multi-dimensionnelles. Après qu'on ait défini l'exposant de Lyapounov, on donne les conditions suffisantes sur $((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{Z}}$ pour l'existence d'une solution non-anticipative strictement stationnaire pour l'équation aux récurrences stochastique (2.1).

Théorème 2.2.1. [15] *Supposons que $E(\log^+ |b_0|) < \infty$, $E(\log^+ \|a_0\|) < \infty$. Si $\gamma < 0$, alors*

$$X_n = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^m a_{n-j} \right) b_{n-m-1} \quad (2.4)$$

converge presque sûrement et le processus $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est l'unique solution non-anticipative strictement stationnaire et ergodique de (2.1).

Preuve. Soit X une variable initiale à l'instant $n = 0$. Après n itérations dans l'équation (2.1), on obtient

$$X_n(X) = \sum_{m=0}^{n-1} \left(\prod_{j=1}^m a_{n-j} \right) b_{n-m-1} + \left(\prod_{m=1}^n a_{n-m} \right) X.$$

Considérons la norme du terme général de la série du côté droit de (2.4).

$$|a_{n-1} \dots a_{n-m} b_{n-m-1}| = \exp \left(m \frac{1}{m} \log |a_{n-1} \dots a_{n-m} b_{n-m-1}| \right)$$

Comme $\log |a_{n-1} \dots a_{n-m} b_{n-m-1}| \leq \log \|a_{n-1} \dots a_{n-m}\| + \log |b_{n-m-1}|$, alors

$$|a_{n-1} \dots a_{n-m} b_{n-m-1}| \leq \exp \left(m \left(\frac{1}{m} \log \|a_{n-1} \dots a_{n-m}\| + \log^+ |b_{n-m-1}| \right) \right)$$

En utilisant la condition $E \log^+ |b_n| < \infty$ et la loi forte des grands nombres, il est clair que

$$E \log^+ |b_{n-m-1}| / m \xrightarrow{p.s.} 0, \quad \text{si } m \rightarrow \infty.$$

De plus, par la loi forte des grands nombres, on a

$$\frac{1}{m} \log \|a_{n-1} \dots a_{n-m}\| \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \log \|a_{n-j}\| \xrightarrow{p.s.} \gamma, \quad \text{si } m \rightarrow \infty.$$

Par conséquent,

$$\exp\left(m\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \log \|a_{n-j}\| + \frac{1}{m} \log^+ |b_{n-m-1}|\right)\right) \xrightarrow{p.s} 0 \quad \text{si } m \rightarrow \infty$$

donc $|a_{n-1} \dots a_{n-m} b_{n-m-1}|$ converge presque sûrement vers zéro et par conséquent la série (2.4) converge absolument presque sûrement.

Maintenant, on montre que $|X_n(X) - X_n|$ converge presque sûrement vers 0. En effet,

$$\begin{aligned} |X_n(X) - X_n| &= \left| \sum_{m=0}^{n-1} \left(\prod_{j=1}^m a_{n-j} \right) b_{n-m-1} + \left(\prod_{m=1}^n a_{n-m} \right) X - \sum_{m=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^m a_{n-j} \right) b_{n-m-1} \right| \\ &= \left| - \sum_{m=n}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^m a_{n-j} \right) b_{n-m-1} + \left(\prod_{m=1}^n a_{n-m} \right) X \right| \\ &= \left| \left(\prod_{m=1}^n a_{n-m} \right) (-X_0 + X) \right| \leq \left(\prod_{m=1}^n \|a_{m-1}\| \right) (|X_0| + |X|). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Par la loi forte des grands nombres, on en déduit que

$$\prod_{m=1}^n \|a_{m-1}\| = \exp\left(n\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^n \log \|a_{m-1}\|\right)\right) \xrightarrow{p.s} 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Par conséquent, $|X_n(X) - X_n|$ converge presque sûrement vers 0.

La solution (2.4) est strictement stationnaire. En effet, $(a_n, b_n) \stackrel{D}{=} (a_{n+i}, b_{n+i})$, $\forall i \in \mathbb{Z}$, où $\stackrel{D}{=}$ désigne l'égalité en distribution, alors le décalage dans les indices de a_n et b_n de la série infinie (2.4) implique le décalage dans X_n , ce qui signifie que $X_{n+1} \stackrel{D}{=} X_n$.

Considérons l'équation aux récurrences stochastique (2.1) pour $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$X_{n+1} = a_n X_n + b_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad X_n \in \mathbb{R}^d. \quad (2.6)$$

La solution unique étant donné une variable initiale X_0 , s'écrit

$$X_n = \left(\prod_{m=0}^{n-1} a_m \right) X_0 + \sum_{m=0}^{n-1} \left(\prod_{j=m+1}^{n-1} a_j \right) b_m. \quad (2.7)$$

Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(X_0, (a_k, b_k)_{0 \leq k \leq n-1} \right) \stackrel{D}{=} \left(X_0, (a_{n-k-1}, b_{n-k-1})_{0 \leq k \leq n-1} \right),$$

ceci implique que

$$X_n \stackrel{D}{=} \left(\prod_{m=0}^{n-1} a_m \right) X_0 + \sum_{m=0}^{n-1} \left(\prod_{j=1}^m a_{j-1} \right) b_m.$$

Les propriétés de la solution (2.7) sont données par le résultat suivant.

Théorème 2.2.2. [74] Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par (2.7). Supposons que $E(\log^+ |b_n|) < \infty$, $E(\log^+ \|a_0\|) < \infty$ et $\gamma < 0$, alors

1. $X_n \xrightarrow{D} X$ si $n \rightarrow \infty$, X satisfait l'équation stochastique

$$X \stackrel{D}{=} aX + b, \quad X \text{ et } (a, b) \text{ sont indépendantes.} \quad (2.8)$$

2. X est donnée par :

$$X = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^m a_{j-1} \right) b_m, \quad (2.9)$$

où le côté droit converge presque sûrement.

3. Si on choisit $X_0 \stackrel{D}{=} X$ comme dans (2.9), alors le processus $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini par (2.7) est strictement stationnaire.

Supposons que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une solution non-anticipative strictement stationnaire de (2.6), alors il est clair que $(X_n, (a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement stationnaire. Ce processus peut être prolongé au processus strictement stationnaire $(X_n, (a_n, b_n))_{n \in \mathbb{Z}}$ qui vérifie l'équation aux récurrences stochastique

$$X_{n+1} = a_n X_n + b_n, \text{ p.s. } \forall n \in \mathbb{Z},$$

et le processus $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est l'unique solution stationnaire de cette équation.

Remarque 2.2. On peut remplacer la condition $E(\log^+ |b_0|) < \infty$ par une condition plus faible $E(|b_0|^\beta) < \infty$ pour $\beta > 0$. Notons que l'exposant de Lyapounov de $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est inférieur à zéro dès que $E(\log \|a_0\|) < 0$ (prenant $n = 1$ dans la définition 2.1.3).

Définition 2.2.1. Soit $a = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ et $b = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ deux matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, alors le produit de Kronecker noté \otimes de a et b est une matrice carrée d'ordre d^2 qui s'écrit comme suit :

$$a \otimes b = \begin{pmatrix} a_{11}b & \cdots & a_{1d}b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}b & \cdots & a_{dd}b \end{pmatrix}$$

Définition 2.2.2. Soit $a \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On appelle valeur propre de a tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel qu'il existe $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 0$ tel que $ax = \lambda x$. On appelle rayon spectral de a la quantité $\rho(a) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \text{ valeur propre de } a\}$

On a aussi une autre condition assurant la négativité de l'exposant de Lyapounov.

Proposition 2.2.1. [24] *Si le rayon spectral de la matrice $E(a_1 \otimes {}^t a_1)$ est de module strictement inférieur à 1, alors l'exposant de Lyapounov est négatif.*

Preuve. De la remarque 2.1, γ ne dépend pas de la norme matricielle. On considère les matrices a_1, \dots, a_n comme des matrices constantes dans $\mathbb{R}^{d \times d}$ muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|$. On a alors

$$\|a\|^2 = \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d a_{ij}^2 = \text{trace}(a {}^t a)$$

On pose $S_n = a_1 \times \dots \times a_n$ et $F_n = E(S_n {}^t S_n)$. On a alors

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= E(S_{n+1} {}^t S_{n+1}) \\ &= E(a_{n+1} S_n {}^t S_n {}^t a_{n+1}) \\ &= E(a_{n+1} E(S_n {}^t S_n) {}^t a_{n+1}) \end{aligned}$$

grâce à l'indépendance de S_n et a_{n+1} . Ainsi, on a la relation suivante

$$F_{n+1} = T F_n$$

où T est définie de $\mathbb{R}^{d \times d}$ dans $\mathbb{R}^{d \times d}$ qui associe à chaque matrice A la matrice $E(a_1 A {}^t a_1)$. En particulier, on a

$$\begin{aligned} E\|a_1 \dots a_n\|^2 &= E\|a_n \dots a_1\|_{d \times d}^2 \\ &= \text{trace}(F_n) = \text{trace}(T^n I) \\ &\leq d^2 \rho(T)^n, \end{aligned}$$

où I est la matrice identité. Il est clair que dès que $\rho(T)$ est strictement inférieur à 1, l'exposant de Lyapounov est négatif. Soit maintenant E_{ij} la matrice dont tous ses éléments sont nuls sauf l'élément (e_{ij}) qui vaut 1, alors dans la base $(E_{11}, E_{12}, \dots, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{dd})$ de $\mathbb{R}^{d \times d}$, T s'écrit comme $E(a_1 \otimes {}^t a_1)$. Cette condition ainsi que $E(\log^+ \|b_0\|) < \infty$ assurent l'existence d'une solution non-anticipative strictement stationnaire

Les conditions du théorème 2.2.1 sont simples dans le cas d'une équation aux récurrence stochastiques unidimensionnelle puisque

$$\gamma = \frac{1}{n} E(\log |a_1 \dots a_n|) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E(\log |a_j|) = E(\log |a_1|)$$

On donne maintenant les conditions suffisantes pour l'existence d'une solution non-anticipative strictement stationnaire pour l'équation aux récurrences stochastique suivante

$$X_{n+1} = a_n X_n + b_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad X_n \in \mathbb{R}, \quad (2.10)$$

où $((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite de couples de variables aléatoires *i.i.d* à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

Théorème 2.2.3. [15] *Si une des conditions, $-\infty \leq E(\log |a_0|) < 0$ et $E(\log^+ |b_0|) < \infty$ ou $P(a_0 = 0) > 0$ est vérifiée, alors la série infinie (2.4) converge presque sûrement et le processus $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est l'unique solution non-anticipative strictement stationnaire de (2.10).*

Preuve. Pour la première condition, la preuve de la convergence de la série (2.4) est similaire à celle dans le cas $d > 1$. Si $P(a_0 = 0) > 0$, la série (2.4) a seulement un nombre fini de termes non nuls, ainsi la série converge presque sûrement. De plus $\prod_{m=1}^n |a_{m-1}| = 0$ presque sûrement lorsque n est suffisamment grand. Ceci et l'inégalité dans (2.5) impliquent que $|X_n(X) - X_n| \xrightarrow{p.s} 0$ si $n \rightarrow \infty$

On montre maintenant que si $P(a_0 = 0) > 0$ est satisfaite, le processus $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ défini par (2.4) est l'unique solution non-anticipative strictement stationnaire pour l'équation (2.10). En effet, si $(X'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une autre solution pour (2.10), alors par l'inégalité triangulaire, on en déduit que

$$\begin{aligned} |X'_n - X_n| &= |a_{n-1}| \cdot |X'_{n-1} - X_{n-1}| \\ &\vdots \\ &= \left| \prod_{j=1}^k a_{n-j} \right| \cdot |X'_{n-k} - X_{n-k}| \\ &\leq \left| \prod_{j=1}^k a_{n-j} \right| \cdot |X'_{n-k}| + \left| \prod_{j=1}^k a_{n-j} \right| \cdot |X_{n-k}| \end{aligned}$$

Du fait que $P(a_0 = 0) > 0$ et la série (2.4) contient un nombre fini de termes non nuls, on en déduit que $\prod_{j=1}^k |a_{n-j}| \xrightarrow{p.s} 0$ si $k \rightarrow \infty$. De plus, comme $(X'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont strictement stationnaires, alors

$$\left| \prod_{j=1}^k a_{n-j} \right| \cdot |X'_{n-k}| \xrightarrow{p.s} 0 \text{ et } \left| \prod_{j=1}^k a_{n-j} \right| \cdot |X_{n-k}| \xrightarrow{p.s} 0 \text{ si } k \rightarrow \infty$$

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad X'_n = X_n$ p.s, c'est-à-dire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est l'unique solution non-anticipative strictement stationnaire de (2.10).

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus aléatoire satisfaisant l'équation aux récurrences stochastique (2.6). On définit un processus $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par :

$$Y_k = X_{Mk}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad M > 1. \quad (2.11)$$

Il est intéressant de vérifier si le processus $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfait l'équation aux récurrences stochastique.

Proposition 2.2.2. [69] *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus aléatoire satisfaisant l'équation aux récurrences stochastique (2.6), alors le processus $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfait l'équation aux récurrences stochastique suivante.*

$$Y_k = a_k^y Y_{k-1} + b_k^y, \quad k \geq 1. \quad (2.12)$$

où $((a_k^y, b_k^y))_{k \geq 1}$ est une suite de couples de variables aléatoires *i.i.d* définie par.

$$a_k^y = \prod_{i=1}^M a_{Mk-i} \quad (2.13)$$

et

$$b_k^y = \sum_{j=0}^{M-1} \left(\prod_{i=1}^j a_{Mk-i} \right) b_{Mk-j-1} \quad (2.14)$$

Preuve. On fixe $M > 1$.

$$\begin{aligned} X_{Mk} &= a_{Mk-1} X_{Mk-1} + b_{Mk-1} \\ &= a_{Mk-1} (a_{Mk-2} X_{Mk-2} + b_{Mk-2}) + b_{Mk-1} \\ &= a_{Mk-1} a_{Mk-2} X_{Mk-2} + a_{Mk-1} b_{Mk-2} + b_{Mk-1} \\ &\vdots \\ &= a_{Mk-1} \dots a_{Mk-M} X_{Mk-M} + a_{Mk-1} \dots a_{Mk-(M-1)} b_{Mk-M} + \dots + a_{Mk-1} b_{Mk-2} + b_{Mk-1} \\ &= \left(\prod_{i=1}^M a_{Mk-i} \right) X_{M(k-1)} + \sum_{j=0}^{M-1} \left(\prod_{i=1}^j a_{Mk-i} \right) b_{Mk-j-1} \\ X_{Mk} &= a_k^y X_{M(k-1)} + b_k^y. \end{aligned}$$

Par définition, on a $Y_{k-1} = X_{M(k-1)}$, donc l'équation aux récurrences stochastique (2.12) est vérifiée. Il est clair que $((a_k^y, b_k^y))_{k \geq 1}$ forme une suite de variables aléatoires *i.i.d*. On vérifie facilement que (a_{k+1}^y, b_{k+1}^y) et (a_k^y, b_k^y) n'ont pas des termes communs. En effet,

$$a_{k+1}^y = \prod_{i=1}^M a_{M(k+1)-i} = a_{Mk+M-1} a_{Mk+M-2} \dots a_{Mk}.$$

Par comparaison à a_k^y défini par (2.13), on vérifie que a_{k+1}^y et a_k^y n'ont pas des termes communs.

$$\begin{aligned} b_{k+1}^y &= \sum_{j=0}^{M-1} \left(\prod_{i=1}^j a_{M(k+1)-i} \right) b_{M(k+1)-j-1} \\ &= b_{Mk+M-1} + a_{Mk+M-1} b_{Mk+M-2} + \cdots + a_{Mk+M-1} a_{Mk+M-2} \cdots a_{Mk+1} b_{Mk}. \end{aligned}$$

Par comparaison à b_k^y défini par (2.14), on vérifie que b_{k+1}^y et b_k^y n'ont pas des termes communs. Par conséquent, on a vérifié que (a_k^y, a_k^y) et (a_k^y, a_k^y) n'ont pas des termes communs.

Le résultat suivante donne les conditions suffisantes pour que l'équation aux récurrences stochastique (2.12) admet une unique solution non-anticipative strictement stationnaire.

Corollaire 2.2.1. [69] *Supposons que $E(\log \|a_1\|^+) < \infty$, $E(\log^+ |b_1^y|) < \infty$ et l'exposant de Lyapounov est négatif ($\gamma < 0$), alors la série définie par*

$$Y = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{l-1} a_i^y \right) b_l^y \quad (2.15)$$

converge presque sûrement et l'équation (2.12) a une unique solution non-anticipative strictement stationnaire qui vérifie

$$Y_k \stackrel{D}{=} Y, \quad k \geq 1. \quad (2.16)$$

Dans le cas où $d = 1$, on a le résultat suivant.

Corollaire 2.2.2. [69] *Si une des conditions, $-\infty \leq E(\log |a_1|) < 0$ et $E(\log^+ |b_1^y|) < \infty$ ou $P(a_1 = 0) > 0$ est satisfaite, alors la série définie par (2.15) converge presque sûrement et l'équation aux récurrences stochastique (2.12) a une unique solution non-anticipative strictement stationnaire donnée par (2.16).*

Notons qu'on peut associer à l'équation aux récurrences stochastique (2.6) une chaîne de Markov. En effet, si on pose $X_0 = x$, alors à l'instant n la chaîne sera à l'état X_n .

Par conséquent, la chaîne $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une solution de l'équation (2.6) de noyau de transition

$$\mathcal{P} = \{P(x, B) = \mathbb{P}_x(a_0 x + b_0 \in B), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}\}$$

et de distribution invariante

$$\pi(B) = \int_{\mathbb{R}^d} P(x, B) \pi(dx), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}.$$

La solution non-anticipative strictement stationnaire de l'équation aux récurrences stochastique (2.6) est équivalente à la distribution invariante d'une chaîne de Markov. En effet, soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une solution non-anticipative strictement stationnaire de l'équation (2.6) de loi stationnaire π , alors X_0 est indépendante de $((a_n, b_n))_{n \geq 1}$ et

$$\begin{aligned} \pi(B) &= \mathbb{P}(X_1 \in B) = P(a_0 X_0 + b_0 \in B) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}(a_0 x + b_0 \in B) d\mathbb{P}_{X_0}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} P(x, B) \pi(dx) \end{aligned}$$

Inversement, soit π une distribution invariante, $\pi(B) = \int_{\mathbb{R}^d} P(x, B) \pi(dx)$, on considère une variable aléatoire X_0 indépendante de $((a_n, b_n), n \geq 1)$ de loi π .

Pour $n \geq 1$, on pose $X_n = a_{n-1} X_{n-1} + b_{n-1}$, ainsi $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de noyau de transition \mathcal{P} . Comme la loi π de X_0 est invariante, alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement stationnaire et est une solution non-anticipative strictement stationnaire de l'équation (2.6). Par prolongement, elle est solution de l'équation (2.1).

Notons que l'inverse du théorème 2.2.1 n'est pas toujours vrai, en d'autres termes si l'équation aux récurrences stochastiques (2.1) admet une solution non-anticipative strictement stationnaire, l'exposant de Lyapounov n'est pas forcément négatif. Néanmoins, la condition d'irréductibilité de l'équation aux récurrences stochastique semble une condition suffisante pour que l'inverse du théorème 2.2.1 soit vrai. Rappelons la définition d'un sous-espace vectoriel affine sur laquelle repose la notion d'irréductibilité de l'équation (2.1).

Définition 2.2.3. *Un sous-espace vectoriel $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^d$ est dit affine, s'il existe un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et un sous espace vectoriel $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^d$ tels que $\mathcal{H} = x_0 + \mathcal{E}$*

On donne maintenant la condition suffisante pour l'irréductibilité de l'équation aux récurrences stochastique (2.1).

Définition 2.2.4. *Un sous-espace vectoriel $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^d$ est dit invariant sous l'équation (2.1), si*

$$\{a_0 x + b_0, x \in \mathcal{H}\} \subset \mathcal{H} \quad p.s$$

L'équation aux récurrences stochastique (2.1) est dite irréductible, si l'espace vectoriel \mathbb{R}^d est le seul sous-espace vectoriel affine invariant sous l'équation (2.1).

Proposition 2.2.3. *Soient π une distribution invariante et \mathcal{H} un sous-espace vectoriel affine minimal de \mathbb{R}^d contenant une solution de l'équation aux récurrences stochastique (2.1) tel que $\pi(\mathcal{H}) = 1$, alors \mathcal{H} est invariant sous l'équation (2.1).*

Preuve. Soit $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ une solution non-anticipative strictement stationnaire de l'équation aux récurrences stochastique (2.1) appartenant à \mathcal{H} ,

$$\begin{aligned} \pi(\mathcal{H}) &= 1 = \mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{H}) \\ &= \mathbb{P}(a_0 X_0 + b_0 \in \mathcal{H}) \\ &= E\left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{I}_{\mathcal{H}}(a_0 x + b_0) \pi(dx)\right). \end{aligned}$$

Si $L = \{x \in \mathbb{R}^d : a_0 x + b_0 \in \mathcal{H} \text{ p.s.}\}$, alors $\pi(L) = 1$ et le sous-espace vectoriel affine $L \cap \mathcal{H}$ est tel que $\pi(L \cap \mathcal{H}) = 1$. Par minimalité de \mathcal{H} , on a $\mathcal{H} \subseteq L$. Ceci montre que $\{a_0 x + b_0 : x \in \mathcal{H}\} \subset \mathcal{H}$ p.s. Par conséquent, \mathcal{H} est invariant.

Définition 2.2.5. *Une application affine f est une fonction définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :*
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

Sous la condition d'irréductibilité de l'équation aux récurrences stochastique (2.1), le premier résultat qui n'exige aucune condition sur l'espérance du logarithme de a_0 et de b_0 est le théorème du Bougerol et Picard [13].

Théorème 2.2.4. [13] *Supposons que l'équation aux récurrences stochastique (2.1) est irréductible et admet une solution non-anticipative strictement stationnaire, alors*

1. $\left(\prod_{i=1}^k a_{n-i}\right) \xrightarrow{p.s.} 0$ si $k \rightarrow \infty$
2. La série (2.4) converge p.s et le processus $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est l'unique solution non-anticipative strictement stationnaire de l'équation aux récurrences stochastique (2.1).

Preuve. Soit \mathcal{G} un espace vectoriel d'applications affines définies de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, g(x) = ax + b \text{ avec } a \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^d$$

On a $\dim(\mathcal{G}) = d(d+1)$ et il existe une bijection entre \mathcal{G} et $\mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$

On munit \mathcal{G} par une loi de composition interne noté \circ définie comme suit :

$$\forall f, g \in \mathcal{G} / f(x) = ax + b, g(x) = cx + d,$$

on a $(fog)(x) = a(cx + d) + b = acx + ad + b$

Par conséquent, \mathcal{G} est un groupe semi-topologique. Soient F_n et Γ_n deux ensembles d'applications affines aléatoires définies par :

$$F_n(x) = a_{n-1}x + b_{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad n \in \mathbb{Z}$$

et

$$\Gamma_k = F_n \circ F_{n-1} \circ \dots \circ F_{n-k}$$

Soit μ la loi de F_n , μ_k la loi de Γ_k et $\nu = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k-1} \mu_k$ qui sont des mesures de probabilités sur \mathcal{G} . Notons par S , le support de ν qui est un sous-groupe semi-topologique de \mathcal{G} .

Par hypothèse, l'équation aux récurrences stochastique (2.1) est irréductible et qu'elle a une solution non-anticipative strictement stationnaire. Par conséquent, on déduit de la proposition 2.2.3 qu'elle existe une distribution invariante π qui n'est pas portée par un sous-espace vectoriel affine \mathcal{H} .

π est μ -invariante, c'est-à-dire $\pi(B) = \int \mu(x, B) \pi(dx)$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Par conséquent, il existe un sous-ensemble Ω_0 de Ω tel que $P(\Omega_0) = 1$ et tel que $\forall \omega \in \Omega$, il existe une mesure de probabilité π_ω sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

Pour toute fonction bornée et continue $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\Gamma_n^\omega(x)) \pi(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \pi_\omega(dx) \quad (2.17)$$

et $\forall g \in \mathcal{G}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi((\Gamma_n^\omega \circ g)(x)) \pi(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \pi_\omega(dx) \quad (2.18)$$

Soit \mathcal{H}_ω un sous-espace vectoriel affine minimal de \mathbb{R}^d tel que

$$\pi_\omega(\mathcal{H}_\omega) = 1.$$

Comme, la distribution invariante π n'est pas portée par un sous-espace vectoriel affine, alors $\forall \omega \in \Omega_0$, on a :

- La suite $(\Gamma_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée sur l'espace vectoriel affine \mathcal{G} .
- Pour Γ_∞^ω , la limite de la suite $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a
 1. L'ensemble $\{\Gamma_\infty^\omega \circ f, f \in S\}$ est borné.
 2. $\forall f \in S, (\Gamma_\infty^\omega \circ f)(\mathbb{R}^d) = \Gamma_\infty^\omega(\mathbb{R}^d) = \mathcal{H}_\omega$.

En effet, soit $\omega \in \Omega_0$ et supposons que la suite $(\Gamma_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, alors on peut trouver une sous-suite $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et une application affine Γ^ω telles que :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} |\Gamma_{n_i}^\omega| = +\infty$$

et

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma_{n_i}^\omega}{|\Gamma_{n_i}^\omega|} = \Gamma^\omega$$

avec $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne sur l'espace vectoriel \mathcal{G} .

Soient $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^d; \Gamma^\omega(x) = 0\}$ et $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Si x n'est pas dans \mathcal{H} , alors

$$|\Gamma_{n_i}^\omega(x)| \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \varphi(\Gamma_{n_i}^\omega(x)) \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad i \rightarrow +\infty$$

Ceci implique que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\Gamma_{n_i}^\omega(x)) \pi(dx) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{I}_{\mathcal{H}}(x) \varphi(\Gamma_{n_i}^\omega(x)) \pi(dx)$$

En utilisant (2.17), on obtient

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \pi_\omega(dx) \right| \leq \pi(\mathcal{H}) \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\varphi(x)|$$

avec π_ω est une mesure de probabilité et $\pi(\mathcal{H}) = 1$.

Puisque π n'est pas portée par un sous-espace vectoriel affine, alors \mathcal{H} est égal à \mathbb{R}^d . on a aussi $\Gamma^\omega = 0$ qui contredit $|\Gamma^\omega| = 1$. Par conséquent, la suite $(\Gamma_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Soit maintenant Γ_∞^ω la limite de la suite $(\Gamma_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}}$, alors par (2.18) on en déduit que

$$\forall f \in S, \int_{\mathbb{R}^d} \varphi((\Gamma_\infty^\omega \circ f)(x)) \pi(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \pi_\omega(dx) \quad (2.19)$$

pour toute fonction continue et bornée φ .

L'ensemble des applications affines f pour les quelles l'égalité (2.19) est vérifiée est fermé et toute fonction dans le support S de ν vérifie l'égalité (2.19). Ces propriétés montrent que $\{\Gamma_\infty^\omega \circ f, f \in S\}$ est borné.

De l'égalité (2.19), on déduit que

$$\forall f \in S, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \pi_\omega(B) = \pi\{x \in \mathbb{R}^d : (\Gamma_\infty^\omega \circ f)(x) \in B\}. \quad (2.20)$$

En remplaçant B par \mathcal{H}_ω dans cette relation, ceci montre que la distribution π est portée par l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^d : (\Gamma_\infty^\omega \circ f)(x) \in \mathcal{H}_\omega\}$$

Par hypothèse, π n'est pas portée par un sous-espace vectoriel affine, ceci montre que

$$(\Gamma_\infty^\omega \circ f)(\mathbb{R}^d) \in \mathcal{H}_\omega$$

Utilisant encore une fois la relation (2.20) en posant $B = (\Gamma_\infty^\omega \circ f)(\mathbb{R}^d)$, alors du fait que \mathcal{H}_ω est minimal, on en déduit que

$$(\Gamma_\infty^\omega \circ f)(\mathbb{R}^d) = \mathcal{H}_\omega$$

Maintenant, puisque les relations (2.17) et (2.19) sont vérifiées pour une application identité, alors on a :

$$\Gamma_\infty^\omega = \mathcal{H}_\omega$$

Ceci montre (2).

Soit $\Omega = \{\omega \in \Omega_0 : \Gamma_n^\omega \in S, n \in \mathbb{N}\}$, alors $P(\Omega_1) = 1$.

Soient $\omega \in \Omega_1$ et Γ_∞^ω la limite de la suite $\{\Gamma_n^\omega, n \in \mathbb{N}\}$, alors par (1) on en déduit que $\{\Gamma_n^\omega \circ f, f \in S\}$ est borné.

On a $\Gamma_\infty^\omega \in S$ et S est un sous-semi groupe de \mathcal{G} , alors $\{\Gamma_n^\omega \circ g, g \in S\}$ est un semi-groupe et sa fermeture K est un semi-groupe compact. Ceci implique que $\exists h \in K / h \circ h = h$ et

$$G = \{h \circ f \circ h, f \in K\}$$

est un groupe compact.

Soient λ une mesure sur G telle que $\lambda(G) = 1$ et $z \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$z = \int_G g(0) d\lambda(g)$$

la mesure λ est invariante sous la transformation $g(z) = z, \forall g \in G$, en particulier, on a

$$\forall f \in S, (h \circ \Gamma_\infty^\omega \circ f \circ h)(z) = z$$

Soient $g = h \circ \Gamma_\infty^\omega$ et l'ensemble affine $V = \{f(h(z)), f \in S\}$, alors

$$\forall f \in S, f(V) \in V$$

L'irréductibilité de l'équation (2.1) implique que $V = \mathbb{R}^d$ et par conséquent, $g(\mathbb{R}^d) = \{z\}$. Comme $g \in S$, alors à partir de (2) on déduit que

$$\mathcal{H}_\omega = (\Gamma_\infty^\omega \circ g)(\mathbb{R}^d) = \Gamma_\infty^\omega(\{z\})$$

Soit $Z(\omega) = \Gamma_\infty^\omega(\{z\})$, alors de (2) on en déduit que $\Gamma_\infty^\omega(\mathbb{R}^d) = \{Z(\omega)\}$, c'est-à-dire Γ_∞^ω est une application affine qui satisfait

$$\Gamma_\infty^\omega(x) = Z(\omega), \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Ceci montre que $\{\Gamma_n^\omega, n \in \mathbb{N}\}$ converge vers $Z, \forall \omega \in \Omega_1$ et

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n-1}a_{n-2} \dots a_{n-k}x &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \{F_n \circ F_{n-1} \circ \dots \circ F_{n-k}(x) - F_n \circ F_{n-1} \circ \dots \circ F_{n-k}(0)\} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \{\Gamma_k(x) - \Gamma_k(0)\} \quad p.s., \forall x \in \mathbb{R}^d \end{aligned} \quad (2.21)$$

et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{k-1} a_{n-1}a_{n-2} \dots a_{n-i}b_{n-i-1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Gamma_k(0) = Z_n \quad p.s. \quad (2.22)$$

Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une solution non-anticipative strictement stationnaire de l'équation (2.1), alors

$$\begin{aligned} Y_n &= a_{n-1}a_{n-2} \dots a_{n-k}Y_{n-k} + a_{n-1}a_{n-2} \dots a_{n-k+1}b_{n-k} + \dots + a_{n-1}b_{n-2} + b_{n-1} \\ &= F_n \circ F_{n-1} \circ \dots \circ F_{n-k}(Y_{n-k}) = \Gamma_k(Y_{n-k}), \forall n \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |\Gamma_k(Y_{n-k}) - \Gamma_k(0)| &= |a_{n-1}a_{n-2} \dots a_{n-k}Y_{n-k}| \\ &\leq \|a_{n-1}a_{n-2} \dots a_{n-k}\| \cdot |Y_{n-k}| \end{aligned} \quad (2.23)$$

comme la loi de $|Y_{n-k}|$ ne dépend pas de k et $|\Gamma_k(Y_{n-k}) - \Gamma_k(0)| \xrightarrow{P} 0$ si $k \rightarrow \infty$, alors $Y_n = Z_n, \forall n \in \mathbb{Z}$ et $\|a_{n-1}a_{n-2} \dots a_{n-k}\| \xrightarrow{p.s.} 0$. $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est l'unique solution non-anticipative strictement stationnaire.

La proposition suivante donne la première vue pour le cas de la non-irréductibilité de l'équation aux récurrences stochastiques (2.1).

Proposition 2.2.4. [13] *Supposons que l'équation (2.1) a une solution non-anticipative strictement stationnaire et notons \mathcal{H} un sous-espace vectoriel affine minimal de \mathbb{R}^d tel que $P(X_0 \in \mathcal{H}) = 1$, alors \mathcal{H} est invariant sous l'équation (2.1) et chaque sous-espace invariant sous l'équation (2.1) de \mathcal{H} contient une solution non-anticipative strictement stationnaire.*

Les hypothèses d'irréductibilité et l'intégrabilité des parties positives des logarithmes de a_0 et b_0 sont des conditions suffisantes pour que l'inverse du théorème 2.2.1 soit vrai.

Théorème 2.2.5. [13] *Supposons que l'équation aux récurrences stochastique (2.1) soit irréductible, $E(\log^+ \|a_0\|) < \infty$ et $E(\log^+ |b_0|) < \infty$, alors l'équation (2.1) a une solution non-anticipative strictement stationnaire ssi l'exposant de Lyapounov γ est négatif.*

De la proposition 2.2.4 et du théorème 2.2.5 on a le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.3. [13] *Supposons que $E(\log^+ \|a_0\|) < \infty$, $E(\log^+ |b_0|) < \infty$ et qu'il existe une solution non-anticipative strictement stationnaire de l'équation (2.1) qui n'est pas portée par un sous-espace vectoriel affine $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^d$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'exposant de Lyapounov est négatif.*
2. *L'équation (2.1) est irréductible.*
3. *L'équation (2.1) a une seule solution non-anticipative strictement stationnaire.*

2.3 Moments de la loi stationnaire

Dans cette partie, on s'intéresse aux moments d'ordres supérieurs de la loi stationnaire de la solution non-anticipative strictement stationnaire de l'équation aux récurrences stochastique. Le lemme suivant est utile pour les prochains résultats.

Lemme 2.3.1 (Inégalité de Jensen). [50] *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction convexe, alors pour toute variable aléatoire X telle que $E(X) < \infty$,*

$$E(f(X)) \geq f(E(X)).$$

Le résultat suivant donne les moments d'ordre supérieurs de la loi stationnaire de l'équation aux récurrences stochastique suivante

$$X_n = a_{n-1}X_{n-1} + b_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \quad X \in \mathbb{R}.$$

Théorème 2.3.1. [74] *Supposons qu'il existe $p \in [1, +\infty[$ tel que $E(|a_0|^p) < 1$ et $E(|b_0|^p) < \infty$, alors $E(|X|^p) < \infty$ et la série infinie (2.9) converge en moment d'ordre p . Si la variable initiale X_0 est telle que $E(|X_0|^p) < \infty$, alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par (2.7) converge vers X*

en moment d'ordre p , en particulier $E(|X_n|^p) \rightarrow E(|X|^p)$ si $n \rightarrow \infty$. Les moments $E(X^m)$ sont déterminés par :

$$E(X^m) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} E(a^k b^{m-k}) E(X^k), \quad m = 1, 2, \dots, [p], \quad (2.24)$$

où $[p]$ est la partie entière de p .

Preuve. Puisque $(E(|a_0|^p))^{1/p} < 1$ et $(E(b_0^p))^{1/p} < \infty$, alors par l'inégalité de Jensen, on en déduit que $E(\log |a_0|) < 0$ et $E(\log^+ |b_0|) < \infty$ et par conséquent X_n définie par (2.7) converge vers X , donnée par (2.9), qui satisfait l'équation aux récurrence (2.8). De plus

$$\begin{aligned} (E(|X|^p))^{1/p} &= \left(E \left| \sum_{m=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^m a_{j-1} \right) b_m \right|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \left(E \left| \left(\prod_{j=1}^m a_{j-1} \right) b_m \right|^p \right)^{1/p} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (E(|a_0|^p)^{m/p}) (E|b_0|^p)^{1/p} < \infty. \end{aligned}$$

Par conséquent $E(|X|^p) < \infty$ et la série (2.9) converge en moment d'ordre p .

Soit $X'_0 = 0$ et $X'_n = \sum_{m=0}^{n-1} \left(\prod_{j=1}^m a_{j-1} \right) b_m$, alors

$$X_n \stackrel{D}{=} X'_n + \left(\prod_{j=1}^n a_{j-1} \right) X_0.$$

X'_n converge presque sûrement vers X , donnée par (2.9), et $E(|X'_n|^p) \rightarrow E(|X|^p)$. Ainsi, pour $X_0 = 0$ p.s, en utilisant le fait que $X_n(0) \stackrel{D}{=} X'_n$, on en déduit que $E(|X_n|^p) \rightarrow E(|X|^p)$. Pour X_0 quelconque, on obtient

$$E(|X_n(X_0) - X_n(0)|^p) = E \left(\left| \left(\prod_{m=0}^{n-1} a_m \right) X_0 \right|^p \right) \leq (E(|a_0|^p))^n E(|X_0|^p) \rightarrow 0.$$

Par conséquent, $E(X_n(X_0))^p - E(X_n(0))^p \rightarrow 0$ et $E(X_n(X_0))^p - E(X^p) \rightarrow 0$

Par l'équation stochastique (2.8), il est clair que la relation (2.24) est vérifiée à chaque fois que les espérances d'occurrences existent. $E(X^m)$ se calcule successivement pour $m = 1, \dots, [p]$.

Remarque 2.3. Pour l'équation aux récurrences multivariées, si $\exists p \in [1, \infty[$ tel que $E(\|a_0\|^p) < 1$ et $E(\|b_0\|^p) < \infty$, alors les moments de la loi stationnaire vérifient

$$(E(|X|^k))^{1/k} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \left(E \left\| \prod_{j=1}^m a_{j-1} \right\|^k \right)^{1/k} E(\|b_0\|^k)^{1/k}, \quad k \geq 1.$$

2.4 Solution géométriquement ergodique

Dans le théorème 1.2.5 et le théorème 1.2.7, on a donné des conditions suffisantes pour qu'une chaîne de Markov soit géométriquement ergodique et par conséquent fortement mélangante avec un taux géométrique. Maintenant, on adapte ces propriétés à la solution de l'équation aux récurrences stochastique. Le lemme suivant donne la convergence dominée de Lebesgue.

Lemme 2.4.1 (Convergence dominée de Lebesgue). [2] *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires μ -intégrables (Lebesgue intégrables), convergeant presque partout vers une variable aléatoire X et il existe une variable aléatoire Y à valeurs positives, Lebesgue-intégrable telle que $|X_n| \leq Y, \forall n \in \mathbb{N}$, alors X est Lebesgue-intégrable et*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} X_n(\omega) \mu(d\omega) = \int_{\Omega} X(\omega) \mu(d\omega)$$

Rappelons que la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométriquement ergodique s'il existe une constante $\rho \in]0, 1[$ telle que

$$\rho^{-n} \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\| \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme en variation totale et π est une mesure de probabilité invariante de la chaîne de Markov.

Pour une matrice aléatoire a , on définit la fonction suivante

$$h_a(y) = E(\|a\|^y), \quad y \geq 0.$$

Si $\exists z > 0$ tel que $E(\|a\|^z) < \infty$, alors h_a définit une fonction réelle sur $[0, z]$. Cette fonction est deux fois dérivable.

$$h'_a(y) = E(\|a\|^y \log \|a\|)$$

et

$$h''_a(y) = E(\|a\|^y \log^2 \|a\|).$$

Lorsque $h''_a > 0$, alors la fonction $h_a(\cdot)$ est convexe sur $[0, z]$.

Lemme 2.4.2. [5] *La condition $h_a(\varepsilon) < 1$ est vérifiée pour $\varepsilon > 0$ ssi $E(\log \|a\|) < 0$ et $h_a(\delta) < \infty$ pour un certain $\delta > 0$.*

Preuve. Supposons que $E(\log \|a\|) < 0$ et $E(\|a\|^\delta) < \infty$, alors $h_a(\cdot)$ est une fonction définie sur $[0, \delta]$ qui est dérivable à droite de zéro, $h'_a(0^+) < 0$. On remarque que $h_a(y)$ est décroissante au voisinage de zéro et comme $h_a(0) = 1$, alors $h_a(\varepsilon) < 1$ pour un petit $\varepsilon > 0$. D'autre part, on a $h_a(\varepsilon) < 1$ pour un certain $\varepsilon > 0$, h_a est convexe sur $[0, \varepsilon]$ et $\log \|a\|$ est intégrable, alors par l'inégalité de Jensen, on a $E(\log \|a\|) < 0$.

Théorème 2.4.1. [5] *Supposons que la distribution de a ou de b admet une densité et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$h_a(\varepsilon) < 1 \text{ et } E(|b|^\varepsilon) < \infty \quad (2.25)$$

alors il existe une unique solution strictement stationnaire de (2.1) et la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est géométriquement ergodique et géométriquement β -mélangeante et par conséquent géométriquement fortement mélangeante (α -mélangeante).

Preuve. L'existence et l'unicité de la solution non-anticipative strictement stationnaire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de l'équation aux récurrences stochastique (2.1) est une conséquence directe du lemme 2.4.2 et le théorème 2.2.1 où $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est donnée par (2.4). Pour montrer que cette solution est géométriquement ergodique, on applique le théorème 1.2.5. En effet, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, pour n'importe quelle fonction continue bornée f , on a $E(f(X_1)/X_0 = x)$ est continue en x et par conséquent la chaîne de Markov est une chaîne de Feller. La μ -irréductibilité pour une certaine mesure μ est garantie du fait que a ou b a une densité.

Supposons que $\varepsilon \in]0, 1]$ et soit

$$f(x) = |x|^\varepsilon + 1, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

S'il existe un compact C tel que

$$E(f(X_n)/X_{n-1} = x) \leq (1 - \delta)f(x), \quad x \in C^c, \quad (2.26)$$

alors du théorème 1.2.5, on en déduit que la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est géométriquement ergodique et géométriquement β -mélangeante et par conséquent géométriquement fortement mélangeante. En effet, on a

$$\begin{aligned} E(f(X_n)/X_{n-1} = x) &\leq E(|ax|^\varepsilon) + E(|b|^\varepsilon) + 1 \\ &\leq E(\|a\|^\varepsilon)|x|^\varepsilon + E(|b|^\varepsilon) + 1 = E(\|a\|^\varepsilon)f(x) + L \end{aligned}$$

On choisit C comme une boule fermée dans \mathbb{R}^d de centre $(0, 0, \dots, 0)^t$ et de rayon $M > 0$ aussi grand de telle sorte que

$$E(f(X_n)/X_{n-1} = x) \leq (1 - \delta)f(x), \quad |x| > M,$$

pour une certaine constante δ telle que $(1 - \delta) > E(\|a\|^\varepsilon)$.

Ce ci montre la relation (2.26).

Chapitre 3

Variation régulière et valeurs extrêmes

3.1 Variation régulière dans \mathbb{R}

La notion de variation régulière apparait dans différents domaines de probabilités appliquées, ainsi que la théorie des files d'attente, la théorie de renouvellement et la théorie des processus ponctuels. Les variables aléatoires et les distributions avec des queues qui varient régulièrement sont étudiées de point de vue théorique et pratique. Une grande variété de résultats sur le développement de la théorie des valeurs extrêmes et la variation régulière se trouvent dans Bingham et al [11], Resnick [63] ou Embrechts et al [26]. La classe de distributions avec des queues qui varient régulièrement est utile pour étudier des événements extrêmes dans les finances et les assurances. En fin, la variation régulière a une interprétation mathématique en termes de comportement asymptotique des sommes partielles et des maximums des suites stationnaires.

3.1.1 fonctions à variations régulières

On commence par définir la notion de variation régulière pour une fonction mesurable.

Définition 3.1.1. *On dit que la fonction mesurable $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est à variation régulière à l'infini d'indice $\rho \in \mathbb{R}$, si*

$$\forall x > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = x^\rho. \quad (3.1)$$

Remarque 3.1. Si $\rho = 0$, on dit que f est à variation lente et on la note par $L(x)$.

Si f est à variation régulière d'indice $\rho \neq 0$, alors $f(x)/x^\rho$ est à variation régulière d'indice

zéro et on pose $L(x) = f(x)/x^\rho$, c'est-à-dire on peut toujours représenter une fonction à variation régulière d'indice ρ par $x^\rho L(x)$.

Définition 3.1.2. *On dit que la fonction de distribution F de la variable aléatoire X est à variation régulière à l'infini (ou dans la queue droite) d'indice $\alpha \geq 0$, si*

$$\forall x > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{P(X > tx)}{P(X > t)} = x^{-\alpha}. \quad (3.2)$$

Remarque 3.2. L'indice de variation régulière de la distribution d'une variable aléatoire est différent de l'indice de variation régulière d'une fonction réelle mesurable, i.e., $\alpha = -\rho$.

Définition 3.1.3. *On dit qu'une variable aléatoire X est à variation régulière, si sa distribution est à variation régulière dans ses queues, i.e., si pour $p \in [0, 1]$ les deux limites suivantes existent*

$$\forall x > 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(X > tx)}{P(|X| > t)} = px^{-\alpha} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(X < -tx)}{P(|X| > t)} = qx^{-\alpha}, \quad (3.3)$$

avec $q = 1 - p$.

Par conséquent, $|X|$ est à variation régulière d'indice $\alpha \geq 0$ qui est l'indice de variation régulière de X , i.e.,

$$\forall x > 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(|X| > tx)}{P(|X| > t)} = x^{-\alpha}.$$

Le prochain résultat donne les propriétés d'intégration des fonctions à variations régulières.

Théorème 3.1.1 (Karamata). [11] *Soit f une fonction à variation régulière d'indice ρ et localement bornée sur \mathbb{R}^+ , alors*

1. $\forall \sigma \geq -(\rho + 1)$, $x^{\sigma+1} f(x) \left(\int_0^x t^\sigma f(t) dt \right)^{-1} \rightarrow \sigma + \rho + 1$ si $x \rightarrow \infty$.
2. $\forall \sigma < -(\rho + 1)$, $x^{\sigma+1} f(x) \left(\int_x^\infty t^\sigma f(t) dt \right)^{-1} \rightarrow -(\sigma + \rho + 1)$ si $x \rightarrow \infty$.

3.1.2 Somme de variables aléatoires à variations régulières

Soit X_1, X_2, \dots, X_k des variables aléatoires non-négatives, pas nécessairement indépendantes ou identiquement distribuées, à variations régulières pas nécessairement de même indice de variation. On pose

$$S_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k, \quad k \geq 1.$$

Lemme 3.1.1. [20] *Supposons que X_1 est à variation régulière d'indice $\alpha \geq 0$ et de distribution F . Si X_1, X_2, \dots, X_k satisfont les conditions suivantes :*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_i > x)}{1 - F(x)} = c_i, \quad i = 1, \dots, k \quad (3.4)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_i > x, X_j > x)}{1 - F(x)} = 0, \quad i \neq j, \quad (3.5)$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(S_k > x)}{1 - F(x)} = c_1 + \dots + c_k. \quad (3.6)$$

Preuve. Soit $k = 2$, on définit une suite (b_n) qui satisfait la relation suivante

$$n(1 - F(b_n)) \rightarrow 1, \quad \text{si } n \rightarrow \infty$$

et sur intervalle $]0, \infty]$, on définit la mesure ν par $\nu(]x, \infty]) = x^{-\alpha}$.

La définition de la suite (b_n) nous donne la convergence vague suivante

$$nP(X_i/b_n \in \cdot) \xrightarrow{v} c_i \nu$$

dans l'espace des mesures ν définies sur $]0, \infty]$. La relation (3.4) implique que

$$nP(b_n^{-1}(X_1, X_2) \in]dx, dy]^2) \xrightarrow{v} c_1 \nu(dx) \varepsilon_0(dy) + c_2 \varepsilon_0(dx) \nu(dy) \quad (3.7)$$

dans l'espace des mesures définies sur $[0, \infty]^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Remarque 3.3. La condition (3.4) avec les constantes c_i non toutes nulles est nécessaire afin d'assurer qu'au moins une variable X_i est à variation régulière.

L'inverse de ce résultat est dû à Embrechts et al [25].

Lemme 3.1.2. [25] *Supposons que $S_n = X_1 + \dots + X_n$ est à variation régulière d'indice $\alpha \geq 0$ et les variables aléatoires X_i sont i.i.d non-négatives, alors les variables aléatoires X_i sont à variation régulière d'indice α et*

$$P(S_n > x) \sim nP(X_1 > x), \quad n \geq 1. \quad (3.8)$$

Remarque 3.4.

1. La relation (3.8) est une définition d'une distribution sous-exponentielle. En effet, une fonction de distribution F d'une variable aléatoire non négative X est sous-exponentielle, si

$$\forall n \geq 1, \quad P(S_n > x) \sim nP(X > x) \sim P(M_n > x) \quad \text{si } x \rightarrow \infty,$$

où X_1, \dots, X_n sont indépendantes de même distribution F et $M_n = \max_{i=1, \dots, n} X_i$.

2. Le lemme 3.1.2 reste valide pour les distributions sous-exponentielles dans le sens que la sous-exponentialité de S_n implique la sous-exponentialité de X_1 (voir [55]).

Supposons que $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables *i.i.d* à variation régulière d'indice $\alpha \geq 0$ et vérifie la condition (3.3), alors il se suit du lemme 3.1.1 que pour toute suite de nombres réels (ψ_i)

$$P(\psi_1 Y_1 + \dots + \psi_m Y_m > x) \sim P(\psi_1 Y_1 > x) + \dots + P(\psi_m Y_m > x). \quad (3.9)$$

En posant $P(\psi_i Y_1 > x) = P(\psi_i^+ Y_i^+ > x) + P(\psi_i^- Y_i^- > x)$, où $\psi^\pm = \max(0, \pm\psi)$, on déduit le résultat suivant.

Lemme 3.1.3. [43] *Soit $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d* à variation régulière d'indice α satisfaisant la condition (3.3), alors $\forall \psi_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m, m \geq 1$*

$$P(\psi_1 Y_1 + \dots + \psi_m Y_m > x) \sim P(|Y_1| > x) \sum_{i=1}^m [p(\psi_i^+)^{\alpha} + q(\psi_i^-)^{\alpha}]. \quad (3.10)$$

Remarque 3.5. En général l'inverse du lemme 3.1.3 n'est pas vrai, c'est-à-dire la variation régulière de $\psi_1 Y_1 + \dots + \psi_m Y_m$ d'indice $\alpha > 0$ pour une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *i.i.d* n'implique pas que Y_1 est à variation régulière, excepté le cas $m = 2$ avec $\psi_i > 0, Y_i > 0$ p. s, $i = 1, 2$ (voir Jessen et Mikosch [43]).

Le comportement de la queue de la série infinie

$$X = \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i Y_i \quad (3.11)$$

pour une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires *i.i.d* à variation régulière d'indice $\alpha > 0$ apparait dans la théorie des valeurs extrêmes pour les processus bilinéaires (voir Davis et Resnick [20]) et les processus linéaires *ARMA* (voir Resnick [63]). La variation régulière de X sera possible, si la série (3.11) converge presque sûrement. Par exemple, si $\alpha > 2$, ce qui implique $\text{var}(Y_i) < \infty$, les conditions $E(Y_1) = 0$ et $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$ sont nécessaires et suffisantes pour que la série (3.11) converge presque sûrement (voir Mikosch [55]).

Théorème 3.1.2. [43] *Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d à variation régulière d'indice $\alpha > 0$ satisfaisant la condition (3.3). Soit (ψ_i) une suite de nombres réels telle que l'une des conditions suivantes est vérifiée.*

1. $\alpha > 2$, $E(Y_1) = 0$ et $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$.
2. $\alpha \in]1, 2]$, $E(Y_1) = 0$ et $\exists \epsilon > 0$ tel que $\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i|^{\alpha-\epsilon} < \infty$.
3. $\alpha \in]0, 1]$ et $\exists \epsilon > 0$ tel que $\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i|^{\alpha-\epsilon} < \infty$.

alors

$$P(X > x) \sim P(|Y_1| > x) \sum_{i=0}^{\infty} [p(\psi_i^+)^{\alpha} + q(\psi_i^-)^{\alpha}] \quad (3.12)$$

Remarque 3.6. La relation (3.10) est un résultat de (3.12) pour une série tronquée. La preuve de (3.12) est basée sur la relation (3.10) et le fait que la limite du reste est négligeable par rapport $P(|Y_1| > x)$ si x et m tendent vers l'infini (voir Jessen et Mikosch [43]).

Proposition 3.1.1. [43] *Soit X et Y deux variables aléatoires positives avec X à variation régulière d'indice $\alpha \geq 0$. Supposons que $\forall m \geq 0$ il existe une constante $c_m > 0$ et les variables aléatoires Y_m, Z_m qui vérifient $Y \stackrel{D}{=} Y_m + Z_m$ et les trois conditions suivantes*

1. $P(Y_m > x) \sim c_m P(X > x)$ si $x \rightarrow \infty$,
2. $c_m \rightarrow c_0$ si $m \rightarrow \infty$,
3. $\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Z_m > x)}{P(X > x)} = 0$ et Y_m, Z_m sont indépendantes
ou bien $\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(|Z_m| > x)}{P(X > x)} = 0$,

alors

$$P(Y > x) \sim c_0 P(X > x) \quad (3.13)$$

Preuve. pour $m \geq 1$ et $\epsilon \in]0, 1]$, on a :

$$P(Y > x) \leq P(Y_m > x(1 - \epsilon)) + P(Z_m > \epsilon x)$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Y > x)}{P(X > x)} &\leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Y_m > x(1 - \epsilon))}{P(X > x)} + \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Z_m > \epsilon x)}{P(X > x)} \\ &= c_m (1 - \epsilon)^{-\alpha} + \epsilon^{-\alpha} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Z_m > \epsilon x)}{P(X > x)} \\ &\rightarrow c_0 (1 - \epsilon)^{-\alpha} \quad \text{si } m \rightarrow \infty \\ &\rightarrow c_0 \quad \text{si } \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Si Y_m et Z_m sont indépendantes, alors

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Y > x)}{P(X > x)} &\geq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Y_m > x(1 + \epsilon), Z_m \geq -\epsilon x)}{P(X > x)} \\ &= \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Y_m > x(1 + \epsilon))}{P(X > x)} P(Z_m \geq -\epsilon x) \\ &= c_m(1 + \epsilon)^{-\alpha} \rightarrow c_0 \quad \text{si } m \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Si Y_m et Z_m ne sont pas indépendantes, alors

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Y > x)}{P(X > x)} &\geq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Y_m > x(1 + \epsilon), |Z_m| \leq \epsilon x)}{P(X > x)} \\ &\geq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Y_m > x(1 + \epsilon))}{P(X > x)} - \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(|Z_m| > \epsilon x)}{P(X > x)} \\ &= c_m(1 + \epsilon)^{-\alpha} \rightarrow c_0 \quad \text{si } m \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a :

$$c_0 \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Y > x)}{P(X > x)} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Y > x)}{P(X > x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Y > x)}{P(X > x)} \leq c_0$$

Par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Y > x)}{P(X > x)} = c_0, \text{ i.e., } P(Y > x) \sim c_0 P(X > x)$$

3.1.3 Variation régulière du produit de deux variables

Dans cette partie, on s'intéresse au comportement de la queue du produit de deux variables aléatoires indépendantes non-négatives. Le théorème de Breiman (1965) [16] donne la variation régulière du produit de deux variables aléatoires X_1 et X_2 en supposant que la queue de l'une des deux variables domine la queue de l'autre.

Théorème 3.1.3. [16] *Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes non-négatives avec X_1 à variation régulière d'indice $\alpha > 0$, alors*

1. *Si $\exists \epsilon > 0$ tel que $E(X_2^{\alpha+\epsilon}) < \infty$, alors*

$$P(X_1 X_2 > x) \sim E(X_2^\alpha) P(X_1 > x). \quad (3.14)$$

2. *Si $\exists \epsilon > 0$ tel que $E(X_2^{\alpha+\epsilon}) < \infty$, alors pour toute suite (x_n) telle que $x_n \rightarrow \infty$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} \left| \frac{P(X_1 X_2 > x)}{P(X_1 > x)} - E(X_2^\alpha) \right| = 0. \quad (3.15)$$

3.2 Variation régulière dans \mathbb{R}^d

Dans cette partie, on généralise la notion de variation régulière au cas multivarié.

Définition 3.2.1. Soit $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}^d$ muni de la tribu \mathcal{E} et notons par \mathcal{B} la classe des ensembles bornés de \mathcal{E} , alors la mesure m définie sur $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$ est dite de Radon (ou localement finie), si

$$\forall B \in \mathcal{B}, m(B) < \infty.$$

Soit \mathcal{F} l'ensemble des fonctions mesurables $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$, on définit

$$mf = \int_{\mathbb{E}} f(x)m(dx). \quad (3.16)$$

On dit que la suite de mesures de Radon $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge vaguement vers une mesure de Radon m et on écrit $m_n \xrightarrow{v} m$, si

$$\forall f \in \mathcal{F}_c, m_n f \rightarrow mf \quad \text{si } n \rightarrow \infty, \quad (3.17)$$

avec $\mathcal{F}_c = \{f \in \mathcal{F}; f \text{ continue}\}$

Définition 3.2.2. Soit $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures finies, on dit que $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers la mesure finie m et l'on écrit $m_n \xrightarrow{f} m$, si

$$\forall f \in \mathcal{F}_c^b, m_n f \rightarrow mf \quad \text{si } n \rightarrow \infty, \quad (3.18)$$

avec $\mathcal{F}_c^b = \{f \in \mathcal{F}; f \text{ continue et bornée}\}$

Proposition 3.2.1. [5] Soient $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et m des mesures finies bornées sur \mathbb{E} , alors

$$m_n \xrightarrow{f} m \Leftrightarrow m_n \xrightarrow{v} m \quad \text{et} \quad m_n(\mathbb{E}) \rightarrow m(\mathbb{E}).$$

Si $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de mesures de Radon, alors on dit que $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge vaguement, si les deux conditions suivantes sont vérifiées

$$1. \quad \forall B \in \mathcal{B}, \sup_{n \in \mathbb{N}} m_n(B) < \infty \quad (3.19)$$

2. Pour toutes suites réelles (a_n) et (b_n) telles que $a_n, b_n \rightarrow \infty$, on a

$$m_{a_n} \xrightarrow{v} m_1 \quad \text{et} \quad m_{b_n} \xrightarrow{v} m_2$$

implique que $m_1 = m_2$

Pour montrer la condition (2), on utilise souvent le résultat suivant.

Lemme 3.2.1. [5] *Supposons que les deux mesures m_1 et m_2 sont définies sur $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$ et soit \mathcal{P} la classe des sous-ensembles de \mathbb{E} qui forme une partition de \mathbb{E} telle que $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{E}$. Si tout ensemble de \mathcal{P} est mesurable par rapport à m_1 et m_2 , alors il en est de même pour tout ensemble de \mathcal{E} .*

Soit \mathbb{E} un ensemble de $\overline{\mathbb{R}}^d$ et on note par $|\cdot|$ la norme sur \mathbb{R}^d . Pour une mesure de Radon μ sur $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$, on définit

$$\mathcal{B}_\mu = \{B \in \mathcal{B} : \mu(\partial B) = 0\}.$$

Notons par $S(\mathbf{0}, \delta)$ et $B(\mathbf{0}, \delta)$ une sphère et une boule ouverte dans \mathbb{R}^d de centre $\mathbf{0}$ et de rayon δ , respectivement. On définit le complémentaire de la boule fermée par

$$B_\delta^c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x}| > \delta\} = (S(\mathbf{0}, \delta) \cup B(\mathbf{0}, \delta))^c.$$

Notons par $\mathbb{S}^{d-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x}| = 1\}$, la sphère centrée dans \mathbb{R}^d .

Théorème 3.2.1. [5] *Soient X un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d et μ une mesure de Radon sur $\overline{\mathbb{R}}^d \setminus \{0\}$ telle que $\mu(\overline{\mathbb{R}}^d \setminus \mathbb{R}^d) = 0$.*

Supposons que $\exists E \subset \overline{\mathbb{R}}^d \setminus \{0\}$ tel que $tE \in \mathcal{B}_\mu$, $\forall t \in T$, où $T \subseteq]0, +\infty[$, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes

$$\mu_t(\cdot) = \frac{P(X \in t\cdot)}{P(X \in tE)} \xrightarrow{v} \mu(\cdot) \quad \text{si } t \rightarrow \infty, \quad (3.20)$$

où \xrightarrow{v} désigne la convergence vague sur la tribu de $\overline{\mathbb{R}}^d \setminus \{0\}$.

$$\forall \delta > 0, \mu_t(\cdot) = \frac{P(X \in t\cdot)}{P(X \in tE)} \xrightarrow{f} \mu(\cdot) \quad \text{si } t \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

où \xrightarrow{f} désigne la convergence faible sur la tribu de B_δ^c . Si la condition (3.20) ou (3.21) est satisfaite, alors

$$\exists! \alpha \geq 0, \mu(xB) = x^{-\alpha} \mu(B), \quad \forall x \in T, \forall B \in \mathcal{B}_\mu. \quad (3.22)$$

Preuve. On montre d'abord le dernier résultat de ce théorème, c'est-à-dire si (3.20) ou (3.21) est vérifiée, alors

$$\exists! \alpha \geq 0, \mu(xB) = x^{-\alpha} \mu(B), \quad \forall x \in T, \forall B \in \mathcal{B}_\mu.$$

Notons que $\forall x, y \in T$,

$$\mu(xyE) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(X \in txyE)}{P(X \in tE)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(X \in txyE)}{P(X \in txE)} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(X \in txE)}{P(X \in tE)} = \mu(yE)\mu(xE).$$

Par conséquent, $\mu(xE) = x^{-\alpha}$ est la seule solution de l'équation $\mu(xyE) = \mu(yE)\mu(xE)$. Soit $B \in \mathcal{B}_\mu$ et notons que

$$\mu(xB) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(X \in txB)}{P(X \in tE)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(X \in txB)}{P(X \in txE)} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(X \in txE)}{P(X \in tE)} = x^{-\alpha}\mu(B).$$

(3.20) \Rightarrow (3.21) : pour $\delta > 0$ et $B_\delta^c \subset \overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{\mathbf{0}\}$, on a

$$\mu_t \xrightarrow{v} \mu \quad \text{sur } B_\delta^c.$$

Notons que $B_\delta^c \in \mathcal{B}_\mu$, donc

$$\mu_t(B_\delta^c) \rightarrow \mu(B_\delta^c).$$

De cette convergence et du fait que μ_t converge vers μ sur B_δ^c , on déduit de la proposition 3.2.1 que

$$\mu_t \xrightarrow{f} \mu \quad \text{sur } B_\delta^c.$$

(3.21) \Rightarrow (3.20) : On prolonge la mesure μ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ à $\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{\mathbf{0}\}$ en utilisant le fait que $\mu(\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \mathbb{R}^d) = 0$. Ceci implique que

$$\mu_t \xrightarrow{f} \mu \quad \text{sur } \overline{\mathbb{R}^d} \setminus B(\mathbf{0}, \delta).$$

Notons que pour chaque ensemble borné $B \in \overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\exists \delta > 0$ tel que $B \in \overline{\mathbb{R}^d} \setminus B(\mathbf{0}, \delta)$. Cependant, $\overline{\mathbb{R}^d} \setminus B(\mathbf{0}, \delta) \in \mathcal{B}_\mu$ et que $\exists t_0 > 0$,

$$\sup_{t \geq t_0} \mu_t(B) \leq \sup_{t \geq t_0} \mu_t(\overline{\mathbb{R}^d} \setminus B(\mathbf{0}, \delta)) < \infty,$$

donc il existe au moins une limite. L'unicité de la limite est une conséquence directe de la proposition 3.2.1 et du fait que si une mesure μ définie sur E_n avec $E_n \rightarrow E$, alors μ est définie sur E .

Remarque 3.7. Pour $d = 1$, il est clair que la condition (3.3) est équivalente à la condition (3.20), avec $\mathbb{E} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$. En effet, si on prend par exemple $0 < a < b$, alors pour l'intervalle $]a, b]$ et $t \rightarrow \infty$ on a :

$$\mu_t(]a, b]) = \frac{P(X \in]ta, tb])}{P(X \in tE)} = \frac{P(X > ta) - P(X > tb)}{P(|X| > t)} \rightarrow p(a^{-\alpha} - b^{-\alpha}) = \mu(]a, b]).$$

On a immédiatement la définition suivante.

Définition 3.2.3. *On dit qu'un vecteur aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}^d est à variation régulière, si l'une des conditions (3.20) et (3.21) est satisfaite. On dit qu'un processus aléatoire $(X_t)_{t \in T}$ est à variation régulière, si les distributions fini-dimensionnelles sont à variations régulières.*

La notion du processus aléatoire à variation régulière sera employée par la suite pour les solutions de l'équation aux récurrences stochastique. Un autre aspect de la variation régulière et la forme de la queue de la distribution d'un vecteur aléatoire est donné par le théorème suivant.

Théorème 3.2.2. [5] *Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d , alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le vecteur aléatoire X est à variation régulière.*
2. *Il existe un vecteur aléatoire θ à valeurs dans \mathbb{S}^{d-1} tel que $\exists \alpha \geq 0$,*

$$\forall u > 0, \frac{P(|X| > tu, X/|X| \in \cdot)}{P(|X| > t)} \xrightarrow{v} u^{-\alpha} P(\theta \in \cdot) \quad \text{si } t \rightarrow \infty \quad (3.23)$$

avec \xrightarrow{v} désigne la convergence vague sur la tribu de \mathbb{S}^{d-1} .

3. *Il existe un vecteur aléatoire θ à valeurs dans \mathbb{S}^{d-1} et une suite de nombres positifs (a_n) , $a_n \rightarrow \infty$ tels que $\exists \alpha \geq 0$,*

$$\forall u > 0, n P(|X| > ua_n, X/|X| \in \cdot) \xrightarrow{v} u^{-\alpha} P(\theta \in \cdot) \quad \text{si } n \rightarrow \infty \quad (3.24)$$

Remarque 3.8. la relation (3.23) est souvent employée comme définition de la variation régulière d'un vecteur aléatoire (voir par exemple Davis et Mikosch [21], Resnick [63]).

Un résultat du théorème 3.2.2 est donné par le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.1. [3] *Soit X un vecteur aléatoire à variation régulière d'indice $\alpha \geq 0$, alors il existe une mesure de Radon μ_1 sur $\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{\mathbf{0}\}$ et une suite à termes positifs (a_n) , $a_n \rightarrow \infty$ telles que*

$$nP(X \in a_n \cdot) \xrightarrow{v} \mu_1(\cdot). \quad (3.25)$$

La mesure μ_1 satisfait

$$\forall u > 0, \mu_1(\{\mathbf{x} : \mathbf{x}/|\mathbf{x}| \in \cdot \text{ et } |\mathbf{x}| > u\}) = u^{-\alpha} P(\theta \in \cdot), \quad (3.26)$$

où θ est un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{S}^{d-1} .

Remarque 3.9.

1. Si X est à variation régulière d'indice $\alpha > 0$ et de mesure limite de Radon μ_1 vérifiant (3.25), alors $\exists c > 0$ tel que $\mu_1 = c\mu$, où μ est la mesure de Radon qui satisfait (3.20).
2. Si la suite (a_n) est choisie de telle sorte que $nP(|X| > a_n) \rightarrow 1$, alors dans ce cas $\mu_1 = \mu$ et la relation (3.24) est vérifiée.

On a immédiatement la définition suivante.

Définition 3.2.4. Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d , à variation régulière d'indice $\alpha \geq 0$ et de mesure limite de Radon μ vérifiant la relation (3.26), alors la mesure de probabilité $P(\theta \in \cdot)$ est dite mesure spectrale de la variation régulière du vecteur X .

Remarque 3.10. Dans le cas où $d = 1$, la condition (2) du théorème 3.2.2 est équivalente à la condition (3.3) qui est une définition de la variation régulière de X dans \mathbb{R} . La mesure spectrale dans ce cas est donnée par $P(\theta = 1) = p$ et $P(\theta = -1) = q$.

Maintenant, on définit la variation régulière des vecteurs aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}_+^d . On note par $\mathbf{1}$ le vecteur ${}^t(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$ et \mathbb{S}_+^{d-1} est l'intersection de la sphère unité \mathbb{S}^{d-1} avec \mathbb{R}_+^d .

Théorème 3.2.3. [5] Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}_+^d , alors X est à variation régulière ssi la limite suivante existe et est finie.

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d / \{\mathbf{0}\}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - P(X \leq t\mathbf{x})}{1 - P(X \leq t\mathbf{1})}. \quad (3.27)$$

La condition (3.27) est équivalente à la condition de Kesten (voir Kesten [46]) donnée par le théorème suivant.

Théorème 3.2.4. [46] Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}_+^d , alors X est à variation régulière d'indice $\alpha > 0$ si et seulement si

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d / \{\mathbf{0}\}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P((X, \mathbf{x}) > t)}{P((X, \mathbf{1}) > t)} = w(\mathbf{x}), \quad (3.28)$$

où $w(\mathbf{x})$ est une fonction à valeurs finies vérifiant

$$\forall t > 0, \quad w(t\mathbf{x}) = t^{-\alpha}w(\mathbf{x}).$$

3.2.1 Transformations de vecteurs aléatoires à variations régulières

Dans cette partie, on donne une généralisation du résultat (3.14) du théorème 3.1.3 de Breiman. On note par $|\cdot|$ la norme sur \mathbb{R}^d et par $\|\cdot\|$ la norme matricielle définie par : Pour toute matrice A de taille $p \times d$, on a

$$\|A\| = \sup_{|\mathbf{x}|=1} |A\mathbf{x}|, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Proposition 3.2.2. [4] *Soit A une matrice aléatoire de taille $p \times d$, indépendante du vecteur aléatoire X à variation régulière d'indice $\alpha > 0$ et de mesure limite de Radon μ . Supposons que $\exists \varepsilon > 0$ tel que $E(\|A\|^{\alpha+\varepsilon}) < \infty$, alors*

$$\frac{P(AX \in t\cdot)}{P(X \in tE)} \xrightarrow{v} \nu(\cdot) = E(\mu \circ A^{-1}(\cdot)), \quad (3.29)$$

où \xrightarrow{v} désigne la convergence vague sur la tribu de $\overline{\mathbb{R}^p}/\{\mathbf{0}\}$ et E vérifie les conditions du théorème 3.2.1.

Preuve. On fixe $B \in \mathcal{B}_\nu$ et qui est contenu dans B_δ^c . On pose

$$A_t(B) = \{AX \in tB\},$$

alors $\forall 0 < \varepsilon < M < \infty$, on a

$$\begin{aligned} P(A_t(B)) &= P(A_t(B) \cap \{\|A\| \leq \varepsilon\}) + P(A_t(B) \cap \{\varepsilon < \|A\| \leq M\}) + \\ &P(A_t(B) \cap \{\|A\| > M\}) = p_1 + p_2 + p_3. \end{aligned}$$

Par la relation (3.14) et du fait que $B \subseteq B_\delta^c$, on a

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{p_3}{P(X \in tE)} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(|X|\|A\|I_{]M, \infty[}(\|A\|) > t\delta)}{P(X \in tE)} = \delta^{-\alpha} E(\|A\|^\alpha I_{]M, \infty[}(\|A\|)).$$

Puisque $E(\|A\|^\alpha) < \infty$, on conclut par le théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{p_3}{P(X \in tE)} = 0.$$

Pour p_2 , on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p_2}{P(X \in tX)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon < \|A\| \leq M} \frac{P(A_t(B) \setminus A)}{P(X \in tE)} P(dA) = E(I_{] \varepsilon, M]}(\|A\|) \mu(A^{-1}B))$$

Le côté droit converge vers $E(\mu(A^{-1}B))$ si $M \rightarrow \infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$.

La limite obtenue est finie, en effet

$$\begin{aligned} E(I_{[\varepsilon, M]}(\|A\|)\mu(A^{-1}B)) &= E(I_{[\varepsilon, M]}(\|A\|)\mu\{x : Ax \in B\}) \\ &\leq E(I_{[\varepsilon, M]}(\|A\|)\mu\{x : \|A\||x| > \delta\}) \\ &\leq E(\|A\|^\alpha)\mu(\{x : |x| > \delta\}) < \infty. \end{aligned}$$

Finalement, pour p_1 , on a

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{p_1}{P(X \in tE)} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(\varepsilon|X| > t\delta)}{P(X \in tE)} = (\delta^{-1}\varepsilon)^\alpha.$$

On déduit que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{p_1}{P(X \in tE)} = 0.$$

En combinant toutes les limites pour p_1 , p_2 et p_3 , la preuve est achevée.

Une conséquence de la proposition précédente est le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.2. [5] *Soit A une matrice aléatoire de taille $p \times d$, indépendante du vecteur aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}^d , à variation régulière d'indice $\alpha > 0$ et de mesure limite de Radon μ telle que*

$$\exists C \subseteq \overline{\mathbb{R}^d} / \{\mathbf{0}\}, E(\mu \circ A^{-1}(C)) > 0 \quad \text{et} \quad \exists \epsilon > 0, E(\|A\|^{\alpha+\epsilon}) < \infty,$$

alors AX est à variation régulière dans \mathbb{R}^p d'indice α .

Remarque 3.11. La proposition 3.2.2 implique que $AX + B$ est à variation régulière de même indice et de même mesure limite ν que AX , où B est un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^p et de queue légère, i.e., $P(|B| > x) \sim o(P(|X| > x))$ si $x \rightarrow \infty$. Le résultat de la proposition 3.2.2 peut être prolongé pour une somme infinie de vecteurs aléatoires non-négatifs à variations régulières multipliés par des matrices aléatoires positives A_i , c'est-à-dire, $\sum_{i=1}^{\infty} A_i X_i$ est à variation régulière.

Corollaire 3.2.3. [5] *Soit A une matrice aléatoire de taille $p \times d$, indépendante du vecteur aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}^d , à variation régulière d'indice $\alpha > 0$ et de mesure limite μ . Supposons que $\exists \varepsilon > 0 / E(\|A\|^{\alpha+\varepsilon}) < \infty$ et soit B un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^p , à variation régulière d'indice α et indépendant de AX , alors $AX + B$ est à variation régulière d'indice α .*

Preuve. La variation régulière de $AX + B$ est une conséquence directe du fait que (AX, B) est à variation régulière.

La variation régulière est aussi préservée sous la transformation puissance. En effet, si le vecteur (X_1, \dots, X_d) est à variation régulière d'indice α , alors le vecteur (X_1^p, \dots, X_d^p) est à variation régulière d'indice de variation différent de α . On a le résultat suivant.

Lemme 3.2.2. [5] *Soit (X_1, \dots, X_d) un vecteur aléatoire non-négatif à variation régulière d'indice $\alpha > 0$, alors pour $p > 0$, (X_1^p, \dots, X_d^p) est à variation régulière d'indice α/p .*

Preuve. soit f une application continue définie de \mathbb{R}_+^d dans \mathbb{R}_+^d par

$$f : X = (X_1, \dots, X_d) \rightarrow (X_1^p, \dots, X_d^p).$$

Notons que $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$, $|f(\mathbf{x})| = |\mathbf{x}|^p$, avec $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ désigne la norme maximale sur \mathbb{R}_+^d . En utilisant le fait que X est à variation régulière et on applique la caractérisation de la variation régulière donnée par (3.24) du théorème 3.2.2, on déduit qu'il existe une suite (a_n) , $a_n \rightarrow \infty$ et une mesure de probabilité P_θ sur une sphère unité \mathbb{S}^{d-1} dans \mathbb{R}_+^d telles que

$$\forall x > 0, nP(|X| > xa_n, X/|X| \in \cdot) \xrightarrow{v} x^{-\alpha} P_\theta(\cdot) \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} nP(|f(X)| > xa_n^p, f(X)/|f(X)| \in S) &= nP(|X| > x^{1/p}a_n, f(X)/|X|^p \in S) \\ &= nP(|X| > x^{1/p}a_n, X/|X| \in f^{-1}(S)) \\ &\xrightarrow{v} x^{-\alpha/p} P_\theta(f^{-1}(S)) \quad \text{si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Cependant, f est une application de \mathbb{S}^{d-1} dans \mathbb{S}^{d-1} , alors

$$P_{f,\theta}(S) = P_\theta(f^{-1}(S))$$

est une autre mesure de probabilité sur la sphère unité \mathbb{S}^{d-1} . Par conséquent, $f(X)$ est à variation régulière d'indice α/p et de mesure spectrale $P_{f,\theta}$.

3.2.2 Somme de vecteurs aléatoires à variations régulières

Dans cette partie, on étudie les applications de la notion de variation régulière dans les théorèmes limites des sommes des suites $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs aléatoires *i.i.d.* On pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $n \geq 1$.

Définition 3.2.5. *On dit qu'un vecteur aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}^d est stable, si $\forall a > 0, \forall b > 0,$*

$$\exists c > 0, \exists \mathbf{d} \in \mathbb{R}^d; aX_1 + bX_2 \stackrel{D}{=} cX + \mathbf{d},$$

où X_1 et X_2 sont deux vecteurs aléatoires indépendants de même loi que X .

Le résultat suivant donne une condition suffisante en terme du théorème central limite pour qu'un vecteur aléatoire est de distribution stable.

Théorème 3.2.5. [5] *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs aléatoires i.i.d, si*

$$\frac{S_n - \mathbf{b}_n}{a_n} \xrightarrow{D} Y, \quad (3.30)$$

où (a_n) est une suite de nombres réels et (\mathbf{b}_n) est une suite de vecteurs dans \mathbb{R}^d , alors la distribution de Y est stable et les vecteurs X_i sont dits dans le domaine d'attraction de Y .

La définition 3.2.5 est équivalente à la définition suivante.

Définition 3.2.6. *On dit qu'un vecteur aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}^d est stable, si $\exists \alpha \in]0, 2]$ tel que*

$$\forall n \geq 2, \exists \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d, X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{D}{=} n^{1/\alpha} X + \mathbf{b}, \quad (3.31)$$

où X_1, X_2, \dots, X_n sont des vecteurs aléatoires i.i.d de même loi que X . On appelle le nombre α , l'indice de stabilité.

Remarque 3.12. Dans le cas où $\alpha = 1$, X est de distribution de Cauchy. Pour $\alpha = 2$, X est un vecteur Gaussien (voir Embrechts et al [26]).

En général, la densité d'un vecteur α -stable ne peut être écrite en termes de fonctions élémentaires. Cependant, sa fonction caractéristique peut être écrite explicitement.

Théorème 3.2.6. [5] *Soit $\alpha \in]0, 2[$, alors un vecteur aléatoire X est dit α -stable dans \mathbb{R}^d ssi sa fonction caractéristique φ_X a la forme suivante*

$$\varphi_X(\mathbf{t}) = \exp \left(i(\mathbf{t}, \mathbf{a}) + \int (e^{i(\mathbf{t}, \mathbf{x})} - 1 - ig(\mathbf{t}, \mathbf{x})) d\mu(\mathbf{x}) \right), \quad (3.32)$$

où $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, g est définie par $g(\mathbf{t}, \mathbf{x}) = (1 \wedge |\mathbf{x}|)(\mathbf{t}, \mathbf{x}/|\mathbf{x}|)$ et μ une mesure sur $\mathbb{R}^d/\{\mathbf{0}\}$.

Notons qu'un vecteur aléatoire α -stable est à variation régulière et la mesure μ de la relation (3.32) correspond à la mesure donnée dans le Corollaire 3.2.1. Par conséquent, il existe une suite de nombres réels (a_n) telle que

$$nP(X \in a_n \cdot) \xrightarrow{v} \mu(\cdot). \quad (3.33)$$

Théorème 3.2.7. [5] *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs aléatoires i.i.d, à variation régulière d'indice $\alpha < 2$ et de mesure limite μ satisfaisant (3.33). Supposons que*

$$\exists \delta > 0, \mathbf{b}_n = \mathbf{a} a_n + nE(X_1 I_{|X_1| \leq a_n \delta}),$$

où $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, (a_n) une suite de nombres réels et (\mathbf{b}_n) une suite de vecteurs dans \mathbb{R}^d , alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le théorème limite (3.30) dont le vecteur limite Y est stable et de fonction caractéristique donnée par (3.32).

L'inverse du théorème 3.2.7 est vrai. Si le théorème central limite (3.30) est vérifié pour une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs aléatoires i.i.d, alors X_1 est à variation régulière d'indice $\alpha < 2$. On a ainsi le résultat suivant.

Théorème 3.2.8. [5] *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs aléatoires i.i.d, alors X_1 est à variation régulière d'indice $\alpha \in]0, 2[$ ssi il existe une suite de nombres positifs (a_n) et une suite de vecteurs (\mathbf{b}_n) dans \mathbb{R}^d telles que*

$$\frac{S_n - \mathbf{b}_n}{a_n} \xrightarrow{D} Y_\alpha, \quad (3.34)$$

où Y_α est un vecteur α -stable.

On définit maintenant la notion de valeurs extrêmes qui est liée à la variation régulière. On se limite dans cette partie aux valeurs extrêmes unidimensionnelles qui se généralisent au cas multidimensionnel. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. On s'intéresse au comportement asymptotique du maximum partiel suivant :

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pour formuler des résultats de base de la théorie des valeurs extrêmes, on a besoin des distributions des valeurs extrêmes suivantes.

1. Fonction de distribution de Fréchet : $\phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$

2. Fonction de distribution Weibull : $\psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{-\alpha}) & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$
3. Fonction de distribution de Gumbel : $\vartheta(x) = \exp(-e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 3.2.9. [26] *Supposons qu'il existe une suite de nombres positifs (a_n) et une suite de nombres réels (b_n) telles que*

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{D} \xi,$$

alors ξ a une des distributions des valeurs extrêmes, c'est-à-dire il existe $c > 0$ et $d \in \mathbb{R}$ tels que $c\xi + d$ a une des distributions $\phi_\alpha(x)$, $\psi_\alpha(x)$ ou $\vartheta(x)$.

3.3 Variation régulière des solutions des équations aux récurrences stochastiques

Dans le chapitre précédent, on a déterminé des conditions suffisantes pour l'existence de solutions stationnaires non-anticipatives des équations aux récurrences stochastiques. On a déterminé aussi quelques conditions suffisantes pour la propriété du mélange. Pour l'analyse asymptotique, il est intéressant d'étudier les propriétés distributionnelles. Il s'avère que dans des conditions générales, la solution non-anticipative strictement stationnaire est à variation régulière. Ce résultat permet d'étudier les extrémités de la solution de l'équation aux récurrences stochastique (par exemple Goldie [36], Grey [37] et Scotto [69]).

3.3.1 Variation régulière de la distribution stationnaire

Soit une équation aux récurrences stochastique unidimensionnelle

$$X_{n+1} = a_n X_n + b_n \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.35}$$

où $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires *i.i.d.*

On a vu dans le théorème 2.2.2 que si $E(\log |a_0|) < 0$ et $E(\log^+ |b_0|) < \infty$, alors X_n converge vers X lorsque n tend vers l'infini avec X satisfait l'équation stochastique

$$X \stackrel{D}{=} aX + b, \quad X \text{ et } (a, b) \text{ sont indépendantes.}$$

Goldie [36] a étudié le comportement des queues de la distribution de X , c'est-à-dire le comportement asymptotique de $P(X > x)$ et $P(X < -x)$ quand x tend vers l'infini.

Théorème 3.3.1. [36] *S'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$E(|a|^\alpha) = 1,$$

$$E(|a|^\alpha \log^+ |a|) < \infty,$$

$$E(|b|^\alpha) < \infty,$$

et que la loi conditionnelle de $\log |a|$ sachant $a \neq 0$ est non-arithmétique, alors

1. *si a est positive presque sûrement, alors*

$$P(X > x) \sim c_+ x^{-\alpha} \quad \text{si } x \rightarrow \infty, \quad (3.36)$$

$$P(X < -x) \sim c_- x^{-\alpha} \quad \text{si } x \rightarrow \infty, \quad (3.37)$$

où c_+ et c_- sont des constantes positives.

2. *si $P(a < 0) > 0$, alors les limites (3.36) et (3.37) sont aussi vraies avec $c_+ = c_- \geq 0$.*

3. *Dans les deux cas, la somme $c_+ + c_-$ est strictement positive si et seulement si l'application affine $y \mapsto ay + b$ n'a pas de point fixe presque sûrement :*

$$\forall y \in \mathbb{R}, P(b = y(1 - a)) < 1.$$

Sous les hypothèses du théorème 3.3.1, $E(|a|^\alpha \log |a|)$ est strictement positive et les constantes c_+ et c_- sont données comme suit :

- Dans le premier cas, on a

$$c_+ = (E(|a|^\alpha \log |a|))^{-1} \int_0^\infty (P(X > x) - P(aX > x)) x^{\alpha-1} dx,$$

$$c_- = (E(|a|^\alpha \log |a|))^{-1} \int_0^\infty (P(X < -x) - P(aX < -x)) x^{\alpha-1} dx.$$

- Dans le deuxième cas, on a

$$c_+ = c_- = \frac{1}{2} (E(|a|^\alpha \log |a|))^{-1} \int_0^\infty (P(|X| > x) - P(|aX| > x)) x^{\alpha-1} dx.$$

Le théorème de Grincevičius [38] traite le cas où α n'existe pas en montrant que lorsque a est non-négatif, ils existe β et γ , ($\beta > \gamma > 0$) tels que $E(a^\gamma) < 1$, $E(a^\beta) < \infty$ et la distribution de b est à variation régulière à l'infini d'indice γ (α ne peut exister parce que pour satisfaire $E(a^\alpha) = 1$, α doit être plus grand que γ et dans ce cas $E(|b|^\alpha) < \infty$ n'est pas vérifiée), alors la distribution de X est à variation régulière à l'infini d'indice γ . Par conséquent, la distribution de b est importante pour déterminer le comportement asymptotique de la queue de la distribution de X .

Théorème 3.3.2. [38] *Soit (a, b) un couple de variables aléatoires avec $E(\log^+ |b|) < \infty$, $P(a \geq 0) = 1$, $E(a^\alpha) < 1$ et $E(a^\beta) < \infty$ pour $\beta > \alpha > 0$, alors l'équation stochastique*

$$X \stackrel{D}{=} aX + b$$

admet une unique solution avec X est indépendante de (a, b) .

Si L est une fonction à variation lente à ∞ , alors les deux conditions suivantes sont équivalentes

$$P(b > x) = x^{-\alpha}L(x), \quad x > 0. \quad (3.38)$$

$$P(X > x) = \frac{1}{1 - E(a^\alpha)} x^{-\alpha}L(x), \quad x > 0. \quad (3.39)$$

Lemme 3.3.1. [38] *Soit X une variable aléatoire avec*

$$\forall x > 0, \quad P(X > x) = x^{-\alpha}L_1(x), \quad (3.40)$$

où L_1 est une fonction à variation lente à ∞ , alors $\forall \delta > 0, \exists k > 1$ tel que

$$\forall x > 0, \forall \lambda > 0, \quad \frac{L_1(\lambda x)}{L_1(x)} \leq \max(\lambda^\alpha, k\lambda^{-\delta}). \quad (3.41)$$

Preuve. Si $\lambda \geq 1$, alors le fait que $P(X > x)$ est non croissante, on a $L_1(\lambda x) \leq \lambda^\alpha L_1(x)$. Soit $A > 1$ et $\delta > 0$, alors $\exists x_0$ tel que, si $\lambda < 1$, on a

$$\frac{L_1(\lambda x)}{L_1(x)} \leq A\lambda^{-\delta} \quad \text{si } \lambda x \geq x_0. \quad (3.42)$$

De plus, puisque $1 \geq x^{-\alpha}L_1(x) \geq x_0^{-\alpha}L_1(x_0)$, $\forall x \in]0, x_0]$, alors si $0 < \lambda x < x \leq x_0$, on a

$$\frac{L_1(\lambda x)}{L_1(x)} \leq \frac{\lambda^\alpha x^\alpha}{x_0^{-\alpha}L_1(x_0)x^\alpha} = B\lambda^\alpha \leq B\lambda^{-\delta}. \quad (3.43)$$

Finalement, si $\lambda x < x_0 < x$, alors

$$\frac{L_1(\lambda x)}{L_1(x)} = \frac{L_1(\lambda x)}{L_1(x_0)} \cdot \frac{L_1(x_0)}{L_1(x)} \leq B \left(\frac{\lambda x}{x_0}\right)^{-\delta} A \left(\frac{x_0}{x}\right)^{-\delta} = AB\lambda^{-\delta}. \quad (3.44)$$

Lemme 3.3.2. [38] *Soit Y une variable aléatoire à variation régulière d'indice $\alpha > 0$ telle que*

$$P(Y > y) = cy^{-\alpha}L(y), \quad y > 0, \quad (3.45)$$

où $c > 0$ et L est une fonction à variation lente à l'infini. Soit (a, b) un couple de variables aléatoires indépendant de Y avec $E(\log^+ |b|) < \infty$, $P(a \geq 0) = 1$, $E(a^\alpha) < 1$ et $E(a^\beta) < \infty$ pour $\beta > \alpha > 0$, alors

$$P(b > y) = y^{-\alpha} L(y), \quad y > 0 \quad (3.46)$$

ssi

$$P(aY + b > y) = (1 + cE(a^\alpha))y^{-\alpha} L(y), \quad y > 0 \quad (3.47)$$

Preuve. En posant

$$P(Y > y) \sim y^{-\alpha} L_2(y), \quad y \rightarrow \infty,$$

avec L_2 est à variation lente et $L_2(y) \sim cL(y)$.

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} P(aY + b > y) &= P(b > (1 + \varepsilon)y) - P(b > (1 + \varepsilon)y, aY + b \leq y) \\ &\quad + P((1 - \varepsilon)y < b \leq (1 + \varepsilon)y, aY + b > y) \\ &\quad + P(b \leq (1 - \varepsilon)y, aY + b > y) \end{aligned}$$

et on écrit $J(y) = I_1(y) - I_2(y) + I_3(y) + I_4(y)$. On a

$$\begin{aligned} 0 &\leq I_2(y) \leq P(b > (1 + \varepsilon)y, aY < -\varepsilon y) \\ &\leq P(a > y^{(\alpha+\beta)/2\beta}) + P(b > (1 + \varepsilon)y)P(Y < -\varepsilon y^{(\beta-\alpha)/2\beta}) \\ &= o(y^{-(\alpha+\beta)/2}) + o(P(b > (1 + \varepsilon)y)), \end{aligned}$$

$P(a > y^{(\alpha+\beta)/2\beta}) = o(y^{-(\alpha+\beta)/2})$ se déduit de $E(a^\beta) < \infty$ qui implique $P(a > m) = o(m^{-\beta})$.

Pour I_4 , on a

$$I_4(y) = cy^{-\alpha} L(y) E\left(\frac{P(Y > a^{-1}(y - b))}{cy^{-\alpha} L(y)}; a > 0, b \leq (1 - \varepsilon)y\right)$$

avec l'espérance est prise sur les deux variables aléatoire a et b .

On note que $P(Y > a^{-1}(y - b))/cy^{-\alpha} L(y)$ converge vers a^α et

$$\frac{P(Y > a^{-1}(y - b))}{cy^{-\alpha} L(y)} \leq \frac{P(Y > a^{-1}\varepsilon y)}{cy^{-\alpha} L(y)}.$$

Par le lemme 3.3.1 avec $\delta = \beta - \alpha$, $\exists k > 0$ tel que

$$P(Y > a^{-1}\varepsilon y)/cy^{-\alpha} L(y) \leq \frac{1}{c} \max(1, k\varepsilon^{-\beta} a^\beta).$$

Par la convergence dominée de Lebesgue, on a

$$I_4(y) \sim cE(a^\alpha)y^{-\alpha}L(y) \sim E(a^\alpha)y^{-\alpha}L_2(y) \quad \text{si } y \rightarrow \infty.$$

1) Supposons que $P(b > y) = y^{-\alpha}L(y)$, alors

$$I_1(y) = (1 + \varepsilon)^{-\alpha}y^{-\alpha}L(y) \sim c^{-1}(1 + \varepsilon)^{-\alpha}y^{-\alpha}L_2(y),$$

$$I_2(y) = o(y^{-\alpha}L(y)) \quad \text{puisque } y^{-(\alpha+\beta)/2} = o(y^{-\alpha}L(y)),$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq I_3(y) \leq P((1 - \varepsilon)y < b \leq (1 + \varepsilon)y) \\ &= ((1 - \varepsilon)y)^{-\alpha}L((1 - \varepsilon)y) - ((1 + \varepsilon)y)^{-\alpha}L((1 + \varepsilon)y) \\ &\sim c^{-1}((1 - \varepsilon)^{-\alpha} - (1 + \varepsilon)^{-\alpha})y^{-\alpha}L_2(y). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{J(y)}{y^{-\alpha}L_2(y)} \leq c^{-1}(1 + \varepsilon)^{-\alpha} - 0 + c^{-1}((1 - \varepsilon)^{-\alpha} - (1 + \varepsilon)^{-\alpha}) + E(a^\alpha)$$

et

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{J(y)}{y^{-\alpha}L_2(y)} \geq c^{-1}(1 + \varepsilon)^{-\alpha} - 0 + 0 + E(a^\alpha).$$

On fait tendre ε vers zéro, d'où le résultat.

2) Inversement, supposons que $J(y) = (1 + cE(a^\alpha))y^{-\alpha}L(y)$, alors

$$I_1(y) - I_2(y) + I_3(y) \sim y^{-\alpha}L(y) \sim c^{-1}y^{-\alpha}L_2(y).$$

Puisque $I_1(y) + I_3(y) \geq P(b > (1 + \varepsilon)y)$ et $I_2(y) \leq o(y^{-\alpha}L(y)) + o(P(b > (1 + \varepsilon)y))$, alors ceci implique que

$$I_1(y) + I_3(y) \sim c^{-1}y^{-\alpha}L_2(y).$$

De plus, on a

$$P(b > (1 + \varepsilon)y) \leq I_1(y) + I_3(y) \leq P(b > (1 - \varepsilon)y).$$

Par conséquent,

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{P(b > (1 + \varepsilon)y)}{c^{-1}y^{-\alpha}L_2(y)} \leq 1 \quad \text{et} \quad \liminf_{y \rightarrow \infty} \frac{P(b > (1 - \varepsilon)y)}{c^{-1}y^{-\alpha}L_2(y)} \geq 1.$$

Par un changement de variable, on obtient

$$(1 - \varepsilon)^\alpha \leq \liminf_{y \rightarrow \infty} \frac{P(b > y)}{c^{-1}y^{-\alpha}L_2(y)} \leq \limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{P(b > y)}{c^{-1}y^{-\alpha}L_2(y)} \leq (1 + \varepsilon)^\alpha.$$

On fait tendre ε vers zéro, d'où le résultat.

Lemme 3.3.3. [38] *Soit (a, b) un couple de variables aléatoires tel que $E(\log^+ |b|) < \infty$, $P(a \geq 0) = 1$, $E(a^\alpha) < 1$ et $E(a^\beta) < \infty$ pour $\beta > \alpha > 0$. Si b est à variation régulière d'indice α , alors il existe une variable aléatoire Z indépendante de (a, b) telle que*

$$\exists c > 0, \quad P(Z > z) = cz^{-\alpha}L(z), \quad z > 0 \quad (3.48)$$

et

$$aZ + b \leq_D Z \quad (3.49)$$

où \leq_D désigne l'inégalité stochastique.

Preuve. On choisit $c' > (1 - E(a^\alpha))^{-1}$ et soit Y une variable aléatoire qui satisfait

$$P(Y > y) = c' y^{-\alpha} L(y), \quad y > 0,$$

alors par le lemme 3.3.2, on a

$$P(aY + b > y) = (1 + c' E(a^\alpha)) y^{-\alpha} L(y), \quad y > 0.$$

Par conséquent, puisque $c' > 1 + c' E(a^\alpha)$, alors

$$\forall y > 0, \quad P(aY + b > y) \leq P(Y > y).$$

Soit Z une variable aléatoire ayant une distribution de Y conditionnellement à $Y \geq 0$, alors Z est à variation régulière d'indice α , où $c = c'/P(Y \geq 0)$.

De plus, pour $t \geq 0$

$$\begin{aligned} P(aZ + b > y) &= P(aY + b > y / Y \geq 0) \leq \frac{P(aY + b > y)}{P(Y \geq 0)} \\ &\leq \frac{P(Y > y)}{P(Y \geq 0)} = P(Z > y). \end{aligned}$$

Cette inégalité est vérifiée pour $y < 0$, ceci implique que $P(Z > y) = 1$.

Preuve du théorème 3.3.2. Sous les conditions du théorème, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par l'équation (3.35) converge en distribution vers X qui est l'unique solution de l'équation stochastique

$$X \stackrel{D}{=} aX + b.$$

Par conséquent l'unique solution strictement stationnaire de l'équation (3.35) est telle que $X_n \stackrel{D}{=} X$, $\forall n \in \mathbb{N}$. La variation régulière de X implique la variation régulière de b en

posant $Y = X$ et $c = (1 - E(a^\alpha))^{-1}$ dans le lemme 3.3.2. Pour montrer que la variation régulière de b implique celle de X , il suffit de trouver une borne inférieure et une borne supérieure de la queue de X . En effet, si on choisit une variable aléatoire initiale X_0 telle que $X_0 \geq_D X_1$, alors la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par (3.35) est stochastiquement non croissante et $X_n \geq_D X$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On choisit une variable aléatoire Z qui vérifie la condition du lemme 3.3.3 et soit $X_0 = Z$, alors

$$X_1 = a_1 X_0 + b_1 \leq_D X_0$$

et la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc stochastiquement non-croissante.

Par le lemme 3.3.2, on a

$$P(X_n > x) = c_n x^{-\alpha} L(x), \quad x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

avec $c_0 = c$ et $\{c_n\}$ est une suite qui satisfait la relation suivante

$$c_{n+1} = 1 + c_n E(a^\alpha), \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.50)$$

et de limite

$$c^* = \frac{1}{1 - E(a^\alpha)}. \quad (3.51)$$

On pose $L_2(x) \sim c^* L(x)$, l'inégalité $P(X > x) \leq P(X_n > x)$ implique que

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X > x)}{x^{-\alpha} L_2(x)} \leq 1. \quad (3.52)$$

Pour obtenir la borne inférieure de la queue de la distribution de X , on utilise un raisonnement semblable. En effet, Si $X_0 \leq_D X$, alors $X_n \leq_D X$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Notons que $P(X > 0) > 0$ parce que si cette relation n'est pas vérifiée, puisque X est différent de zéro, alors il doit exister $x < 0$ tel que $P(ax + b \leq 0) = 1$, ceci contredit le fait que la queue de b est plus épaisse que la queue de a . Par conséquent,

$$P(X > x) = P(b + aX > x) \geq P(X > 0)P(b > x).$$

Si on choisit X_0 telle que

$$P(X_0 > x) = P(X > 0)P(b > x), \quad \forall x \geq 0$$

et

$$P(X_0 > x) = P(X > x), \quad \forall x < 0,$$

alors $X_0 \leq_D X$. Par le lemme 3.3.2, on a

$$P(X_n > x) = c_n x^{-\alpha} L(x), \quad x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

avec $c_0 = P(X > 0)$, la suite $\{c_n\}$ est définie par (3.50) et de limite donnée par (3.51).

L'inégalité $P(X > x) \geq P(X_n > x)$ implique que

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X > x)}{x^{-\alpha} L_2(x)} \geq 1. \quad (3.53)$$

Les inégalités (3.52) et (3.53) impliquent que

$$P(X > x) \sim x^{-\alpha} L_2(x) \quad \text{si } x \rightarrow \infty.$$

Par conséquent, la relation (3.39) est vérifiée, c'est-à-dire

$$P(X > x) = \frac{1}{1 - E(a^\alpha)} x^{-\alpha} L(x), \quad x > 0.$$

Le résultat de Kesten (1973) [46] montre que sous certaines conditions sur les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la distribution stationnaire de la solution de l'équation aux récurrences stochastique (3.35) est à variation régulière.

Théorème 3.3.3. [46] *Soit $(a_n, a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d non-négatives. Supposons que la suite i.i.d $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est de distribution marginale P_a telle que*

1. *Il existe $\delta > 0$ tel que $E(a^\delta) < 1$,*
2. *L'ensemble*

$$\{\log(a_n \dots a_1) : n \geq 1, a_n \dots a_1 > 0 \text{ et } a_n, \dots, a_1 \in \text{support de } P_a\} \quad (3.54)$$

engendre un groupe dense dans \mathbb{R} ,

3. *Il existe $\alpha_0 > 0$ tel que*

$$E(a^{\alpha_0}) \geq 1 \quad \text{et} \quad E(a^{\alpha_0} \log^+ a) < \infty, \quad (3.55)$$

alors il existe une unique solution $\alpha \in]0, \alpha_0[$ pour l'équation

$$E(a^\alpha) = 1 \quad (3.56)$$

De plus, si $E(b^\alpha) < \infty$, alors il existe une unique solution strictement stationnaire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ pour l'équation (3.35) et la distribution stationnaire est à variation régulière d'indice α , en particulier, il existe $c > 0$ tel que

$$P(X > x) \sim cx^{-\alpha} \quad \text{si } x \rightarrow \infty. \quad (3.57)$$

Rappelons que la solution non-anticipative strictement stationnaire de l'équation

$$X_{n+1} = a_n X_n + b_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad X_n \in \mathbb{R} \quad (3.58)$$

a la représentation suivante

$$X_n = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^m a_{n-k} \right) b_{n-m-1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.59)$$

Par la suite, on suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont deux suites de variables aléatoires non-négatives telles que b est à variation régulière d'indice $\alpha > 0$ et la queue de la distribution de a est plus légère par rapport à la queue de la distribution de b . Dans ce cas, les conditions du théorème 3.3.3 ne sont pas satisfaites. En particulier, on suppose que $E(a^\alpha) < 1$. A cet effet, on verra que la distribution stationnaire de la solution (3.59) de l'équation (3.58) est à variation régulière de même indice α . Soit X_0 une variable initiale, alors après n itérations dans l'équation (3.58) on obtient

$$X_n = \left(\prod_{m=0}^{n-1} a_m \right) X_0 + \sum_{m=0}^{n-1} \left(\prod_{k=m+1}^{n-1} a_k \right) b_m. \quad (3.60)$$

De plus, supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $E(a^{\alpha+\delta}) < \infty$, alors par le théorème 3.1.3, on en déduit que

$$\frac{P\left(b_m \prod_{k=1}^{m-1} a_k > x\right)}{P(b > x)} \sim (E(a^\alpha))^{m-1} \quad \text{si } x \rightarrow \infty. \quad (3.61)$$

Le résultat suivant est important pour la propriété de variation régulière des distributions fini-dimensionnelles de la solution strictement stationnaire (3.59) de l'équation (3.58). En effet, on pose $X_0 = c$ dans (3.60) où c est une constante et notons par $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite obtenue qui n'est pas une solution stationnaire de l'équation (3.58).

Proposition 3.3.1. [49] *Supposons que b est à variation régulière d'indice $\alpha > 0$ et il existe $\delta > 0$ tel que $E(a^{\alpha+\delta}) < \infty$, alors $\forall n \geq 1$,*

$$P(X_n > x) \sim P(b > x) \sum_{m=0}^{n-1} (E(a^\alpha))^m \quad \text{si } n \rightarrow \infty \quad (3.62)$$

où X_n est défini par (3.60) pour $X_0 = c$.

Preuve. On pose $Y_0 = c \prod_{m=0}^{n-1} a_m$, $Y_m = b_{m-1} \prod_{k=1}^{m-1} a_{k-1}$, $m = 1, \dots, n$.

Il est clair que

$$X_n = \left(\prod_{m=0}^{n-1} a_m \right) c + \sum_{m=0}^{n-1} \left(\prod_{k=m+1}^{n-1} a_k \right) b_m \stackrel{D}{=} \left(\prod_{m=0}^{n-1} a_m \right) c + \sum_{m=0}^{n-1} \left(\prod_{k=1}^m a_{k-1} \right) b_m = \sum_{m=0}^n Y_m.$$

Pour $1 \leq k < m \leq n$, on a

$$P(Y_k > x, Y_m > x) \leq P\left(\prod_{i=1}^{k-1} a_{i-1} \min(b_{k-1}, \prod_{i=k}^{m-1} a_{i-1} b_{m-1}) > x \right).$$

Puisque $E(a^{\alpha+\delta}) < \infty$ et b est à variation régulière d'indice α , alors on peut trouver une fonction $g(x) \rightarrow \infty$ telle que $g(x)/x \rightarrow 0$ et $P\left(\max(a_k, \prod_{i=1}^k a_{i-1}) > g(x) \right) = o(P(b > x))$.

Par conséquent, pour $k < m$

$$\begin{aligned} & \frac{P(Y_k > x, Y_m > x)}{P(b > x)} \\ & \leq \frac{P\left(\prod_{i=1}^{k-1} a_{i-1} \min\left(b_{k-1}, \prod_{i=k}^{m-1} a_{i-1} b_{m-1}\right) > x, \max\left(a_k, \prod_{i=1}^k a_{i-1}\right) > g(x) \right)}{P(b > x)} \\ & \quad + \frac{P\left(\prod_{i=1}^{k-1} a_{i-1} \min\left(b_{k-1}, \prod_{i=k}^{m-1} a_{i-1} b_{m-1}\right) > x, \max\left(a_k, \prod_{i=1}^k a_{i-1}\right) \leq g(x) \right)}{P(b > x)} \\ & \leq \frac{P\left(\max\left(a_k, \prod_{i=1}^k a_{i-1}\right) > g(x) \right)}{P(b > x)} + \frac{P\left(\prod_{i=1}^{k-1} a_{i-1} b_{k-1} > x, \prod_{i=k+1}^{m-1} a_{i-1} b_{m-1} > x/g(x) \right)}{P(b > x)} \\ & = o(1) + E(a^\alpha)^{m-2} P(b > x/g(x))(1 + o(1)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dans la dernière étape, on a utilisé le résultat du théorème 3.1.3 et l'indépendance de $\left(\prod_{i=1}^{k-1} a_{i-1} \right) b_{k-1}$ et $\left(\prod_{i=k+1}^{m-1} a_{i-1} \right) b_{m-1}$. Par l'inégalité de Markov, pour $1 \leq k \leq n$,

$$\frac{P(Y_0 > x, Y_k > x)}{P(b > x)} \leq \frac{P(Y_0 > x)}{P(b > x)} \leq c^n \frac{(Ea^{\alpha+\delta})^n x^{-\alpha-\delta}}{P(b > x)} \rightarrow 0. \quad (3.63)$$

Il est clair que les relations (3.61) et (3.63) sont équivalentes aux conditions du lemme 3.1.1, avec $c_0 = 0$ et $c_i = (E(a^\alpha))^{i-1}$, $i = 1, \dots, n$. Par conséquent, (3.62) est vérifiée.

Maintenant, on s'intéresse au comportement de la queue de la distribution stationnaire de la solution de l'équation aux récurrences stochastique (3.58). De la proposition 3.3.1 et la représentation de la solution strictement stationnaire non-anticipative (3.59), on en déduit que

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X > x)}{P(b > x)} \geq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P\left(\sum_{m=0}^{n-1} b_m \prod_{k=1}^m a_{k-1} > x\right)}{P(b > x)} = \sum_{m=0}^{n-1} (E(a^\alpha))^m. \quad (3.64)$$

En faisant tendre n vers l'infini, ceci nous donne une borne inférieure pour $P(X > x)$ et par conséquent, la relation (3.64) suggère que

$$P(X > x) \sim P(b > x) \sum_{i=0}^{\infty} (E(a^\alpha))^i \quad \text{si } x \rightarrow \infty \quad (3.65)$$

est vérifiée sous les conditions que b est à variation régulière d'indice $\alpha > 0$ et $E(a^\alpha) < 1$.

Théorème 3.3.4. [49] *Supposons que b est à variation régulière d'indice $\alpha > 0$, $E(a^\alpha) < 1$ et il existe $\delta > 0$ tel que $E(a^{\alpha+\delta}) < \infty$, alors l'équation aux récurrences stochastique (3.58) admet une unique solution strictement stationnaire non-anticipative $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, donnée par (3.59) et qui satisfait*

$$P(X > x) \sim P(b > x)(1 - E(a^\alpha))^{-1}. \quad (3.66)$$

Preuve. La fonction $g(h) = E(a^h)$ satisfait $g(0) = 1$, $g(\alpha) < 1$, continue et convexe sur $[0, \alpha]$. On a $g'(0^+) = E(\log a) < 0$, alors $-\infty \leq E(\log a) < 0$ et $E(\log^+ a) < \infty$. De plus, puisque $E(b^\delta) < \infty$ pour $\delta < \alpha$, alors $E(\log^+ b) < \infty$. Par conséquent, l'équation aux récurrences stochastique (3.58) a une unique solution strictement stationnaire non-anticipative. La relation (3.66) est une conséquence directe du théorème 3.3.2.

3.3.2 Variation régulière des distributions fini-dimensionnelles de la solution stationnaire

Dans ce qui suit, on suppose que les conditions du théorème 3.3.4 sont satisfaites. Le théorème 3.3.4 nous a montré que la distribution stationnaire de la solution de l'équation aux récurrences stochastique (3.58) est à variation régulière de même indice α que b . Maintenant, on prolonge ce résultat aux distributions fini-dimensionnelles de la solution $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$. Dans ce cas, on utilise les résultats du théorème 3.2.2 et le Corollaire 3.2.1 pour la variation régulière du vecteur aléatoire \mathbf{X}_m à valeurs dans \mathbb{R}^m .

Proposition 3.3.2. [49] *Supposons que les conditions du théorème 3.3.4 sont satisfaites, alors les distributions fini-dimensionnelles de la solution strictement stationnaire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de l'équation (5.58) sont à variations régulières de même indice α .*

Preuve. Soit $m \geq 1$, alors par la représentation (3.60) de la solution non-anticipative strictement stationnaire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_m &= (X_1, \dots, X_m)' \\
 &= \left(\prod_{k=0}^0 a_k, \prod_{k=0}^1 a_k, \dots, \prod_{k=0}^{m-1} a_k \right)' X_0 + \left(b_0, b_1 + a_1 b_0, \dots, b_{m-1} + \sum_{j=0}^{m-2} \left(\prod_{k=j+1}^{m-1} a_k \right) b_j \right)' \\
 &= \left(\prod_{k=0}^0 a_k, \prod_{k=0}^1 a_k, \dots, \prod_{k=0}^{m-2} a_k, \prod_{k=0}^{m-1} a_k \right)' X_0 + \left(1, \prod_{k=1}^1 a_k, \prod_{k=1}^2 a_k, \dots, \prod_{k=1}^{m-2} a_k, \prod_{k=1}^{m-1} a_k \right)' b_0 \\
 &\quad + \left(0, 1, \prod_{k=2}^2 a_k, \dots, \prod_{k=2}^{m-2} a_k, \prod_{k=2}^{m-1} a_k \right)' b_1 + \dots + \left(0, 0, 0, \dots, 0, 1 \right)' b_{m-1} \\
 &= A_0 X_0 + A_1 b_0 + \dots + A_m b_{m-1}.
 \end{aligned}$$

Notons que A_0 et X_0 sont indépendantes et que A_i et b_{i-1} sont indépendantes pour chaque $i > 0$. Puisque $\exists \delta > 0$ tel que $E(|A|^{\alpha+\delta}) < \infty$, alors on peut appliquer le résultat du théorème 3.1.3 dans un cas multidimensionnel et on conclut que les vecteurs aléatoires $A_0 X_0, A_1 b_0, \dots, A_m b_{m-1}$ sont à variations régulières d'indice α et de mesures limites correspondantes μ_0, \dots, μ_m . Par le théorème 3.1.3 et le théorème 3.3.4, on déduit que

$$P(|A_0 X_0| > x) \sim E(|A_0|^\alpha) P(X_0 > x) \sim E(|A_0|^\alpha) (1 - E(a^\alpha))^{-1} P(b > x) \quad \text{si } x \rightarrow \infty$$

et

$$P(|A_i b_{i-1}| > x) \sim E(|A_i|^\alpha) P(b > x) \quad \text{si } x \rightarrow \infty, \quad i = 1, \dots, m.$$

On choisit pour tous les vecteurs précédents une suite de nombres positifs (a_n) telle que

$$nP(|A_0| X_0 > a_n) \sim 1,$$

alors on peut caractériser la mesure μ_i par la distribution spectrale (voir le Corollaire 3.2.1). En effet, pour tout ensemble $S \subset \mathbb{S}^{m-1}$, on a :

$$\begin{aligned}
 nP(|A_i| b_{i-1} > t a_n, A_i / |A_i| \in S) &= nP\left(\frac{1}{t} |A_i| b_{i-1} > a_n, A_i / |A_i| \in S\right) \\
 &\sim nE\left(|A_i|^{\alpha} t^{-\alpha} I_S(A_i / |A_i|)\right) P(b_{i-1} > a_n) \\
 &= n t^{-\alpha} E\left(|A_i|^\alpha I_S(A_i / |A_i|)\right) P(b_{i-1} > a_n).
 \end{aligned}$$

La mesure spectrale $P(\theta \in \cdot)$ de $A_i b_{i-1}$ est donnée par

$$\frac{P(|A_i|b_{i-1} > ta_n, A_i/|A_i| \in S)}{P(|A_i|b_{i-1} > a_n)} = t^{-\alpha} P(\theta \in S), \quad S \in \mathbb{S}^{m-1}.$$

On a :

$$\frac{P(|A_i|b_{i-1} > ta_n, A_i/|A_i| \in S)}{P(|A_i|b_{i-1} > a_n)} \sim \frac{t^{-\alpha} E\left(|A_i|^\alpha I_S(A_i/|A_i|)\right) P(b_{i-1} > a_n)}{P(|A_{i+1}|b_i > a_n)}.$$

Comme $P(|A_i|b_{i-1} > a_n) \sim E(|A_i|^\alpha) P(b_{i-1} > a_n)$, alors

$$\frac{P(|A_i|b_{i-1} > ta_n, A_i/|A_i| \in S)}{P(|A_i|b_{i-1} > a_n)} \sim \frac{t^{-\alpha} E\left(|A_i|^\alpha I_S(A_i/|A_i|)\right) P(b_{i-1} > a_n)}{E(|A_i|^\alpha) P(b_{i-1} > a_n)}.$$

Par conséquent la mesure spectrale $P(\theta \in \cdot)$ de $A_i b_{i-1}$ est définie par

$$P(\theta \in S) = \frac{E\left(|A_i|^\alpha I_S(A_i/|A_i|)\right)}{E(|A_i|^\alpha)}, \quad S \in \mathbb{S}^{m-1}.$$

En utilisant la preuve du lemme 3.1.1 pour le cas multidimensionnel, on déduit que \mathbf{X}_m est à variation régulière d'indice α et de mesure limite

$$\mu(dx) = \mu_0(dx) + c_1 \mu(dx) + \cdots + c_m \mu_m(dx), \quad (3.67)$$

avec $c_i = [E(|A_i|^\alpha)/E(|A_0|^\alpha)](1 - E(a^\alpha))$, $i = 1, \dots, m$.

3.3.3 Variation régulière de la somme des variables de la solution stationnaire

Dans cette partie, on s'intéresse au comportement asymptotique de la queue de la distribution de la somme

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad n \geq 2, \quad (3.68)$$

Pour une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ indépendantes et identiquement distribuées, on a le résultat suivant.

Théorème 3.3.5. *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d à variations régulières d'indice $\alpha > 0$, alors*

$$P(S_n > x) \sim nP(X > x), \quad n \geq 2, \quad \text{si } x \rightarrow \infty. \quad (3.69)$$

Dans les conditions du théorème 3.3.3 et les conditions du théorème 3.3.4, la solution strictement stationnaire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de l'équation aux récurrences stochastique (3.58) ne vérifie pas la relation (69). Cependant, sous les conditions du théorème 3.3.4, S_n est à variation régulière d'indice α . En effet, on a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{m=1}^n \left(\left(\prod_{k=0}^{m-1} a_k \right) X_0 + \sum_{j=0}^{m-1} \left(\prod_{k=j+1}^{m-1} a_k \right) b_j \right) = X_0 \sum_{m=1}^n \left(\prod_{k=0}^{m-1} a_k \right) + \sum_{m=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} \left(\prod_{k=j+1}^{m-1} a_k \right) b_j \\ &= X_0 \sum_{m=1}^n \left(\prod_{k=0}^{m-1} a_k \right) + \sum_{j=0}^{n-1} b_j \sum_{m=j+1}^{n-1} \left(\prod_{k=j+1}^m a_k \right), \end{aligned} \quad (3.70)$$

et on pose

$$Y_0 = X_0 \sum_{m=1}^n \left(\prod_{k=0}^{m-1} a_k \right), \quad Y_{j+1} = b_j \sum_{m=j+1}^{n-1} \left(\prod_{k=j+1}^m a_k \right), \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Théorème 3.3.6. [?] *Supposons que les conditions du théorème 3.3.4 sont satisfaites. Si $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est la solution non-anticipative strictement stationnaire de l'équation aux récurrences stochastique (3.58), alors*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(S_n > x)}{P(b > x)} = (1 - E(a^\alpha))^{-1} E \left(\sum_{m=1}^n \left(\prod_{k=0}^{m-1} a_k \right) \right)^\alpha + \sum_{j=0}^{n-1} E \left(\sum_{m=j+1}^{n-1} \left(\prod_{k=j+1}^m a_k \right) \right)^\alpha. \quad (3.71)$$

Preuve. On a : $S_n = \sum_{m=0}^n Y_m$.

La variable X_0 est indépendante de $\sum_{m=1}^n \left(\prod_{k=0}^{m-1} a_k \right)$, alors par le théorème 3.1.3 et la relation (3.66), on déduit que

$$P \left(X_0 \sum_{m=1}^n \left(\prod_{k=0}^{m-1} a_k \right) > x \right) \sim P(b > x) (1 - E(a^\alpha))^{-1} E \left(\sum_{m=1}^n \prod_{k=0}^{m-1} a_k \right)^\alpha.$$

La variable b_j est indépendante de $\sum_{m=j+1}^{n-1} \left(\prod_{k=j+1}^m a_k \right)$, alors par le théorème 3.1.3, on déduit que

$$P(Y_{j+1} > x) = P \left(b_j \sum_{m=j+1}^{n-1} \left(\prod_{k=j+1}^m a_k \right) > x \right) \sim P(b > x) E \left(\sum_{m=j+1}^{n-1} \left(\prod_{k=j+1}^m a_k \right) \right)^\alpha, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

En utilisant la preuve de la proposition 3.3.1, on déduit que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(Y_k > x, Y_m > x)}{P(Y_0 > x)} = 0, \quad 0 \leq k < m \leq n.$$

Les conditions du lemme 3.1.1 sont satisfaites, alors la relation (3.71) est vérifiée.

Remarque 3.13.

1. La relation (3.71) peut être écrite sous la forme suivante.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(S_n > x)}{P(X > x)} = E\left(\sum_{m=1}^n \left(\prod_{k=0}^{m-1} a_k\right)\right)^\alpha + (1 - E(a^\alpha)) \sum_{j=0}^{n-1} E\left(\sum_{m=j}^{n-1} \left(\prod_{k=j+1}^m a_k\right)\right)^\alpha \quad (3.72)$$

2. Sous les conditions du théorème 3.3.3 de Kesten, S_n est à variation régulière d'indice $\alpha > 0$. En effet, supposons que $\exists \delta > 0$ tel que $E(a^{\alpha+\delta}) < \infty$, alors par la représentation (3.70), le théorème 3.1.3 et le lemme 3.1.1, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(S_n > x)}{P(X > x)} = E\left(\sum_{m=1}^n \left(\prod_{k=0}^{m-1} a_k\right)\right)^\alpha. \quad (3.73)$$

Chapitre 4

Modèles ARCH/GARCH

4.1 Introduction

Les modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (*ARCH*) ont été proposés par Engle [27] pour capturer la volatilité instantanée caractérisant les séries financières. Leur extension aux modèles Autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques généralisés (*GARCH*) est due à Bollerslev [12]. Dans ces modèles, le concept principal est la variance conditionnelle, c'est-à-dire la variance conditionnée par le passé du processus (conditionnellement à l'ensemble d'informations fournies par le passé de la série chronologique). Dans les modèles classiques *GARCH*, la variance est exprimée comme une fonction linéaire du carré des valeurs passées de la série chronologique. Cette spécification particulière peut capturer les faits stylisés principaux caractérisant la série financière. La structure linéaire de ces modèles est exposée par plusieurs représentations qu'on étudiera dans cette partie. On présente d'abord des définitions et des représentations des modèles *GARCH*(p, q), puis on étudie les conditions de stationnarité forte ainsi que les conditions de stationnarité au second ordre.

Définition 4.1.1. Le processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfait un modèle $GARCH(p, q)$, si

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \quad (4.1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (4.2)$$

$$\text{avec } \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, q, \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, p \quad (4.3)$$

et $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d : $E(\eta_t) = 0, E(\eta_t^2) = 1$.

L'équation (4.2) peut être écrite sous la forme symbolique suivante :

$$\mathcal{B}(B)\sigma_t^2 = \alpha_0 + \mathcal{A}(B)\varepsilon_t^2, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.4)$$

où B est l'opérateur de retard ($B^i \varepsilon_t^2 = \varepsilon_{t-i}^2$ et $B^i \sigma_t^2 = \sigma_{t-i}^2, \forall i \in \mathbb{N}$) et \mathcal{A}, \mathcal{B} sont deux polynômes de degrés q et p , respectivement :

$$\mathcal{A}(B) = \sum_{i=1}^q \alpha_i B^i, \quad (4.5)$$

$$\mathcal{B}(B) = 1 - \sum_{j=1}^p \beta_j B^j. \quad (4.6)$$

Si $\mathcal{B}(z) = 1$, alors on a :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2$$

et le processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit processus $ARCH(q)$.

Remarque 4.1. Les inégalités dans (4.3) sont imposées pour garantir que :

$$\sigma_t^2 > 0, \quad p.s. \quad (4.7)$$

Dans le cas du modèle $GARCH(1, 1)$ avec

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2,$$

les conditions suffisantes, mais pas nécessaires pour (4.7) sont

$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \beta_j \geq 0. \quad (4.8)$$

En d'autres termes, par substitution on montre que

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1 \sigma_{t-2}^2) \\ &\vdots \\ &= \alpha_0 (1 - \beta_1)^{-1} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1 \beta_1 \sum_{j=0}^{\infty} \beta_1^j \varepsilon_{t-j-2}^2, \end{aligned}$$

avec $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $0 \leq \beta_1 < 1$ sont des conditions nécessaires et suffisantes pour (4.7) en supposant que la somme $\sum_{j=0}^{\infty} \beta_1^j \varepsilon_{t-j-2}^2$ est convergente.

Par définition, les innovations relatives au processus $(\varepsilon_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont données par le processus $(\xi_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, défini par :

$$\xi_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (4.9)$$

En remplaçant la variable σ_{t-j}^2 par $\varepsilon_{t-j}^2 - \xi_{t-j}$ dans l'équation (4.2), on obtient la représentation suivante :

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t-i}^2 + \xi_t - \sum_{j=1}^p \beta_j \xi_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.10)$$

avec la convention que $\alpha_i = 0$ ($\beta_j = 0$) si $i > q$ ($j > p$). Cette équation a la structure linéaire d'un modèle $ARMA(\max(p, q), p)$. Sous des conditions supplémentaires, incluant la stationnarité de second ordre du processus $(\varepsilon_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$, on peut dire que si $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfait un modèle $GARCH(p, q)$, alors le processus $(\varepsilon_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfait un modèle $ARMA(\max(p, q), p)$. En particulier, le carré du processus $ARCH(q)$ satisfait, s'il est stationnaire, un modèle autorégressif d'ordre q , $AR(q)$. La représentation $ARMA$ est utile pour l'estimation et l'identification des processus $GARCH$.

Remarque 4.2. L'innovation ξ_t est conditionnellement hétéroscédastique. En effet, si la loi conditionnelle de ε_t sachant \mathcal{F}_{t-1} , l'ensemble d'informations disponibles à l'instant $t-1$, suit une loi normale $N(0, \sigma_t^2)$, alors on a :

$$\begin{aligned} E(\xi_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) &= E\left(\left(\varepsilon_t^2 - E(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})\right)^2 | \mathcal{F}_{t-1}\right) \\ &= E\left(\left(\varepsilon_t^4 - 2\varepsilon_t^2 E(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) + (E(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}))^2\right) | \mathcal{F}_{t-1}\right) \\ &= E(\varepsilon_t^4 | \mathcal{F}_{t-1}) - 2(E(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}))^2 + (E(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}))^2 \\ &= E(\varepsilon_t^4 | \mathcal{F}_{t-1}) - (E(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}))^2 \\ &= 3\sigma_t^4 - \sigma_t^4 = 2\sigma_t^4. \end{aligned}$$

4.2 Solutions stationnaires

Dans cette partie, on s'intéresse aux solutions non-anticipatives stationnaires (solutions strictement stationnaires et solutions faiblement stationnaires) du modèle défini par (4.1) et (4.2). On considère d'abord le modèle $GARCH(1, 1)$ qui peut être étudié d'une manière explicite que le cas général.

4.2.1 Étude d'un modèle GARCH(1,1)

Soit un modèle $GARCH(1, 1)$ défini par :

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \quad (4.11)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (4.12)$$

avec $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$ et $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires *i.i.d* $(0, 1)$.

Le modèle $GARCH(1, 1)$ peut être écrit comme équation aux récurrences stochastiques

$$X_t = a_{t-1} X_{t-1} + b_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où $(a_t, b_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires *i.i.d*. $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de vecteurs aléatoires, $(a_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de matrices aléatoires *i.i.d* et $(b_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ une suite de vecteurs aléatoires *i.i.d* définis par

$$X_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_t^2 \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix}, \quad a_{t-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \eta_t^2 & \beta_1 \eta_t^2 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix}, \quad b_{t-1} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \eta_t^2 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Nelson [58] a démontré une condition suffisante pour que le modèle $GARCH(1, 1)$ défini par (4.11) et (4.12) admette une unique solution non-anticipative strictement stationnaire et ergodique.

Théorème 4.2.1. [58] *Soit un modèle $GARCH(1, 1)$ défini par (4.11) et (4.12). Supposons que*

$$-\infty \leq E(\log(\alpha_1 \eta_0^2 + \beta_1)) < 0, \quad (4.13)$$

alors

1. La série infinie suivante :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 \sum_{m=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m (\alpha_1 \eta_{t-j}^2 + \beta_1) \quad (4.14)$$

converge presque sûrement. Le processus $(\sigma_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire et ergodique et le processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par $\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t$ est l'unique solution non-anticipative strictement stationnaire et ergodique du modèle défini par (4.11) et (4.12).

2. Supposons que $(\sigma_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire. Soit $p \in [1, +\infty[$ tel que

$$E(\alpha_1 \eta_0^2 + \beta_1)^p < 1, \quad (4.15)$$

alors $\exists m : 1 \leq m \leq [p]$ tel que $E(\sigma^{2m}) < \infty$ et

$$E(\sigma^{2m}) = (1 - (\alpha_1 \eta_0^2 + \beta_1)^m)^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} E(\alpha_1 \eta_0^2 + \beta_1)^k \alpha_0^{m-k} E(\sigma^{2k}). \quad (4.16)$$

Preuve. De l'équation (4.12), on a :

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 \eta_{t-1}^2 + \beta_1) \sigma_{t-1}^2. \end{aligned}$$

On a ainsi la représentation de σ_t^2 sous l'équation aux récurrences stochastique :

$$X_t = a_{t-1} X_{t-1} + b_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.17)$$

avec $X_t = \sigma_t^2$, $a_{t-1} = \alpha_1 \eta_{t-1}^2 + \beta_1$ et $b_{t-1} = \alpha_0$.

On a $E(\log^+ |b_0|) < \infty$ et par hypothèse $E(\log |a_0|) = E(\log(\alpha_1 \eta_0^2 + \beta_1)) < 0$. Ainsi, par le théorème 2.2.3, la série (4.14) converge presque sûrement et $(\sigma_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ est l'unique solution non-anticipative strictement stationnaire et ergodique de l'équation aux récurrences stochastique (4.17). Par conséquent, le processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est défini par :

$$\varepsilon_t = \left(\alpha_0 \sum_{m=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m (\alpha_1 \eta_{t-j}^2 + \beta_1) \right)^{1/2} \eta_t \quad (4.18)$$

est l'unique solution non-anticipative strictement stationnaire et ergodique du modèle défini par (4.11) et (4.12). Supposons que $E(|a_0|^p) = E(\alpha_1 \eta_0^2 + \beta_1)^p < 1$, avec $p \in [1, +\infty[$, alors par le théorème 2.3.1, on déduit que

$$E(\sigma^{2m}) = (1 - E((\alpha_1 \eta_0^2 + \beta_1)^m))^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} E((\alpha_1 \eta_0^2 + \beta_1)^k) \alpha_0^{m-k} E(\sigma^{2k}), \quad (4.19)$$

avec $1 \leq m \leq [p]$.

Le résultat suivant montre la non-stationnarité du processus $GARCH(1, 1)$.

Corollaire 4.2.1. [31] *Soit un modèle GARCH(1,1) défini par (4.11) et (4.12) avec $t \geq 1$. Si $E(\log(\alpha_1 \eta_0^2 + \beta_1)) > 0$, alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_t^2 = +\infty, \quad \text{p.s.} \quad (4.20)$$

Si, en plus, $E(|\log(\eta_t^2)|) < \infty$, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_t^2 = +\infty, \quad \text{p.s.} \quad (4.21)$$

Preuve. On a :

$$\sigma_t^2 \geq \alpha_0 \sum_{m=1}^t \prod_{j=1}^{m-1} (\alpha_1 \eta_{t-j}^2 + \beta_1) \geq \alpha_0 (\alpha_1 \eta_{t-1}^2 + \beta_1) \dots (\alpha_1 \eta_1^2 + \beta_1),$$

alors

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \sigma_t^2 \geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{t-1} \log(\alpha_1 \eta_{t-j}^2 + \beta_1) = E(\log(\alpha_1 \eta_0^2 + \beta_1)).$$

Par conséquent $\log \sigma_t^2 \rightarrow +\infty$ et $\sigma_t^2 \rightarrow +\infty$, p.s.

De la même manière, on a :

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \varepsilon_t^2 &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\log \sigma_t^2 + \log \eta_t^2) \\ &\geq E(\log(\alpha_1 \eta_0^2 + \beta_1)) + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \eta_t^2 = E(\log(\alpha_1 \eta_0^2 + \beta_1)), \end{aligned}$$

alors $\log \varepsilon_t^2 \rightarrow +\infty$ et $\varepsilon_t^2 \rightarrow +\infty$, p.s

Bollerslev [12] a établi une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution stationnaire au second ordre du modèle GARCH(1,1).

Théorème 4.2.2. [12] *Le modèle GARCH(1,1) défini par (4.11) et (4.12) admet une unique solution non-anticipative stationnaire au second ordre donnée par (4.18), avec $E(\varepsilon_t) = 0$, $\text{var}(\varepsilon_t) = \alpha_0(1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1}$ et $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ pour $t \neq s$, ssi*

$$\alpha_1 + \beta_1 < 1. \quad (4.22)$$

Preuve. Si $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire au second ordre, alors on a :

$$E(\varepsilon_t^2) = E(E(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})) = E(\sigma_t^2) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)E(\varepsilon_{t-1}^2).$$

Par conséquent,

$$(1 - \alpha_1 - \beta_1)E(\varepsilon_t^2) = \alpha_0,$$

ce qui donne pour $1 - \alpha_1 - \beta_1 > 0$, $E(\varepsilon_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}$.

Inversement, supposons que $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. Par l'inégalité de Jensen, on a :

$$E(\log(\alpha_1 \eta_0^2 + \beta_1)) \leq \log E(\alpha_1 \eta_0^2 + \beta_1) = \log(\alpha_1 + \beta_1) < 0$$

c'est-à-dire la condition (4.13) est satisfaite. Il suffit alors de montrer que la solution $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ définie par (4.18) admet une variance finie. En effet, Notons que

$$\prod_{j=1}^{m+1} (\alpha_1 \eta_{t-j}^2 + \beta_1) = (\alpha_1 \eta_{t-1}^2 + \beta_1) \prod_{j=1}^m (\alpha_1 \eta_{t-1-j}^2 + \beta_1)$$

et puisque $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite *i.i.d.*, l'espérance de $\prod_{j=1}^m (\alpha_1 \eta_{t-j}^2 + \beta_1)$ ne dépend pas de t . Par conséquent,

$$\begin{aligned} E\left(\prod_{j=1}^m (\alpha_1 \eta_{t-j}^2 + \beta_1)\right) &= (\alpha_1 + \beta_1) E\left(\prod_{j=1}^{m-1} (\alpha_1 \eta_{t-j}^2 + \beta_1)\right) \\ &\vdots \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)^m. \end{aligned}$$

On a ainsi,

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t^2) = E(\eta_t^2) \cdot E(\sigma_t^2) &= E\left(\alpha_0 \sum_{m=0}^{\infty} \prod_{j=1}^m (\alpha_1 \eta_{t-j}^2 + \beta_1)\right) \\ &= \alpha_0 \sum_{m=0}^{\infty} E\left(\prod_{j=1}^m (\alpha_1 \eta_{t-j}^2 + \beta_1)\right) \\ &= \alpha_0 \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_1 + \beta_1)^m \\ &= \alpha_0 (1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1}. \end{aligned}$$

Ceci montre que la solution du modèle *GARCH*(1, 1) défini par (4.11) et (4.12) est stationnaire au second ordre. De plus cette solution est un bruit blanc parce que

$$E(\varepsilon_t) = E(E(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1})) = 0 \text{ et } \forall h > 0,$$

$$\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) = E(E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h} | \mathcal{F}_{t-1})) = E(\varepsilon_{t-h} E(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1})) = 0.$$

Notons que depuis les conditions du théorème 4.2.1, la stationnarité stricte de $(\sigma_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ implique la stationnarité stricte du processus $(\varepsilon_t^2, \sigma_t^2)_{t \in \mathbb{Z}} = (\sigma_t^2(\eta_t^2, 1))_{t \in \mathbb{Z}}$. Par la construction du processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, le processus $(\varepsilon_t, \sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire. Dans cette

partie, on étudie le comportement des queues des vecteurs aléatoires $(\varepsilon_t, \sigma_t)$ en utilisant la notion de la variation régulière des vecteurs aléatoires (voir théorème 3.2.2). On pose

$$a_{t-1} = \alpha_1 \eta_{t-1}^2 + \beta_1, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Théorème 4.2.3. [56] *Supposons que la loi de $(\log a)$ est non-arithmétique, $E(\log a) < 0$, $P(a > 1) > 0$ et il existe $h_0 \leq \infty$ tel que $E(a^h) < \infty$, $\forall h < h_0$ et $E(a^{h_0}) = \infty$, alors on a les résultats suivants*

1. *L'équation*

$$E(a^{k/2}) = 1 \tag{4.23}$$

admet une unique solution positive.

2. *Supposons que k satisfait l'équation (4.23), alors il existe une unique solution non-anticipative strictement stationnaire $(\sigma_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ de l'équation aux récurrences stochastique (4.17). Pour a indépendante de σ^2 , il existe une constante positive*

$$c_0 = \frac{E((\alpha_0 + a\sigma^2)^{k/2} - (a\sigma^2)^{k/2})}{(k/2)E(a^{k/2} \log a)}$$

telle que

$$P(\sigma > x) \sim c_0 x^{-k} \quad \text{si } x \rightarrow \infty \tag{4.24}$$

$$P(|\varepsilon| > x) \sim E(|\eta|^k)P(\sigma > x) \quad \text{si } x \rightarrow \infty. \tag{4.25}$$

Par conséquent, le vecteur (ε, σ) est à variation régulière d'indice k et de mesure spectrale définie sur \mathbb{S}^1 par :

$$P(\theta \in \cdot) = \frac{E(|(\eta, 1)|^k I_{\{(\eta, 1)/|(\eta, 1)| \in \cdot\}})}{E(|(\eta, 1)|^k)}. \tag{4.26}$$

Preuve. La fonction $E(a^h)$ est continue et convexe par rapport à h . Comme $E(\log a) < 0$, alors $E(a^h) < 1$ sur un voisinage de zéro. De plus, pour une valeur suffisamment grande pour h , puisque $P(a > 1) > 0$ et $E(a^{h_0}) = \infty$, alors $E(a^h) \geq 1$. Par conséquent, $E(a^{k/2}) = 1$ admet une unique solution positive. Puisque la condition (4.13) est satisfaite, alors l'équation (4.17) admet une unique solution non-anticipative strictement stationnaire $(\sigma_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$. La relation (4.24) est une conséquence directe du théorème 3.3.1. La relation (4.25) est une conséquence du théorème 3.1.3. De plus, pour $B \in \mathbb{S}^1$, on a

$$\begin{aligned} P(|(\varepsilon, \sigma)| > xt, (\varepsilon, \sigma)/|(\varepsilon, \sigma)| \in B) &= P(\sigma |(\eta, 1)| I_{\{(\eta, 1)/|(\eta, 1)| \in B\}} > xt) \\ &\sim E(|(\eta, 1)|^k I_{\{(\eta, 1)/|(\eta, 1)| \in B\}} x^{-k}) P(\sigma > t), \\ P(|(\varepsilon, \sigma)| > t) &= P(\sigma |(\eta, 1)| > t) \sim E(|(\eta, 1)|^k) P(\sigma > t). \end{aligned}$$

4.2.2 Modèle GARCH(p,q)

Dans le cas général d'un modèle $GARCH(p, q)$, défini par (4.1) et (4.2), on a la représentation vectorielle (équation aux récurrences stochastique multivariée) suivante :

$$X_t = a_{t-1}X_{t-1} + b_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.27)$$

avec

$X_t = (\varepsilon_t^2, \dots, \varepsilon_{t-q+1}^2, \sigma_t^2, \dots, \sigma_{t-p+1}^2)' \in \mathbb{R}^{p+q}$, $b_{t-1} = (\alpha_0\eta_t^2, 0, \dots, \alpha_0, 0, \dots, 0)' \in \mathbb{R}^{p+q}$ et

$$a_{t-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1\eta_t^2 & \alpha_2\eta_t^2 & \cdots & \alpha_{q-1}\eta_t^2 & \alpha_q\eta_t^2 & \beta_1\eta_t^2 & \beta_2\eta_t^2 & \cdots & \beta_{p-1}\eta_t^2 & \beta_p\eta_t^2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{q-1} & \alpha_q & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{p-1} & \beta_p \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

telle que $a_t \in \mathbb{R}^{p+q} \times \mathbb{R}^{p+q}$. Dans le cas d'un modèle $ARCH(q)$, le vecteur X_t se réduit à ε_t^2 et ses $(q-1)$ premières valeurs passées, la matrice a_t se réduit à une sous-matrice de la matrice définie par (4.28).

Le résultat suivant donne les conditions suffisantes pour que le modèle défini par (4.1) et (4.2) admette une unique solution non-anticipative strictement stationnaire et ergodique.

Théorème 4.2.4. [31] *L'équation aux récurrences stochastique (4.27) admet une unique solution non-anticipative, strictement stationnaire et ergodique définie par*

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^k a_{t-j} \right) b_{t-k-1}, \quad (4.29)$$

ssi l'exposant de Lyapounov γ de la suite $(a_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ définie par (4.28) est strictement négatif. Par conséquent le modèle (4.1) et (4.2) admet une unique solution non-anticipative strictement stationnaire et ergodique.

Preuve. On utilise la norme matricielle définie $\|a\| = \sum_{i,j} |a_{ij}|$. Notons que la suite $(a_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ vérifie la condition $E(\log^+ \|a_t\|) < \infty$. En effet, puisque $E(\eta_t^2) = 1$, alors les composantes

de la matrice a_t sont toutes intégrables et par conséquent, on a :

$$E(\log^+ \|a_t\|) \leq E(\|a_t\|) < \infty.$$

De plus, la suite $(b_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ vérifie la condition $E(\log^+ |b_t|) < \infty$. Les conditions du théorème 2.2.1 sont alors satisfaites.

Les conséquences de la condition de stationnarité stricte sont données dans la proposition suivante.

Proposition 4.2.1. [30] *Si l'exposant de Lyapounov γ de la suite $(a_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est strictement négatif, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\sum_{i=1}^p \beta_i < 1$.
2. Les racines de

$$1 - \beta_1 z - \dots - \beta_p z^p = 0$$

sont en dehors du disque unité.

3. $\rho(B_0) < 1$, avec $\rho(B_0)$ est le rayon spectral de la matrice

$$B_0 = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{p-1} & \beta_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve. Comme les éléments de la matrice a_t sont positifs, alors il est clair que l'exposant de Lyapounov de la suite $(a_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est plus grand que l'exposant de Lyapounov de la suite des matrices constantes obtenues en remplaçant par zéro les composantes des q premières lignes et les q premières colonnes de la matrice a_t . La matrice obtenue a les mêmes valeurs propres non nulles et le même rayon spectral que B_0 . Pour une matrice constante A , on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|A^t\| = \log \rho(A), \quad (4.30)$$

alors $\log \rho(B_0) \leq \gamma < 0$, ce qui implique que $\rho(B_0) < 1$.

En calculant le déterminant de $(\lambda \mathbb{I}_p - B_0)$ par rapport à la dernière colonne, on obtient

$$\det(\lambda \mathbb{I}_p - B_0) = \lambda^p - \lambda^{p-1} \beta_1 - \dots - \lambda \beta_{p-1} - \beta_p = \lambda^p \mathcal{B}\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

avec $\mathcal{B}(z) = 1 - \beta_1 z - \dots - \beta_p z^p$.

L'équivalence entre (2) et (3) est évidente. On montre maintenant que (1) \Leftrightarrow (2).

On a $\mathcal{B}(0) = 1$ et $\mathcal{B}(1) = 1 - \sum_{i=1}^p \beta_i$. Par conséquent, si $\sum_{i=1}^p \beta_i \geq 1$, alors $\mathcal{B}(1) \leq 0$ et par le théorème de Rolle, $\exists z_0 \in]0, 1[$ t.q $\mathcal{B}(z_0) = 0$. On a montré alors (2) \Rightarrow (1).

Inversement, si $\sum_{i=1}^p \beta_i < 1$ et $\mathcal{B}(z_0) = 0$ avec $|z_0| \leq 1$, alors

$$1 = \sum_{i=1}^p \beta_i z_0^i = \left| \sum_{i=1}^p \beta_i z_0^i \right| \leq \sum_{i=1}^p \beta_i |z_0|^i \leq \sum_{i=1}^p \beta_i < 1,$$

d'où la contradiction. On a montré alors (1) \Rightarrow (2).

Corollaire 4.2.2. [31] *Si l'exposant de Lyapounov γ de la suite $(a_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ définie par (4.28) est strictement négatif, alors*

$$\exists s > 0 \quad \text{tel que} \quad E(\sigma_t^{2s}) < \infty \quad \text{et} \quad E(\varepsilon_t^{2s}) < \infty.$$

Le résultat suivant donne une autre caractérisation de la stationnarité stricte des modèles *GARCH*.

Lemme 4.2.1. [31] *Soit $(a_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ une suite de matrices aléatoires i.i.d, alors l'exposant de Lyapounov γ de la suite $(a_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est strictement négatif, ssi*

$$\exists s > 0, \exists k_0 \geq 1 \quad \text{tels que} \quad \delta = E(\|a_{k_0} a_{k_0-1} \cdots a_1\|^s) < 1.$$

Preuve. Supposons que $\gamma < 0$. On a :

$$\gamma = \inf_k \frac{1}{k} E(\log \|a_k a_{k-1} \cdots a_1\|),$$

alors $\exists k_0 \geq 1$ tel que $E(\log \|a_{k_0} a_{k_0-1} \cdots a_1\|) < 0$.

De plus, en utilisant la norme $\|A\| = \sum_{i,j} |A_{ij}|$, on obtient

$$\begin{aligned} E(\|a_{k_0} a_{k_0-1} \cdots a_1\|) &= \|E(a_{k_0} a_{k_0-1} \cdots a_1)\| \\ &= \|(E(a_1))^{k_0}\| \\ &\leq (E\|a_1\|)^{k_0}. \end{aligned}$$

Rappelons que si $\exists r > 0$ tel que $E(X^r) < \infty$ et $E(\log X) < 0$, avec X est une variable aléatoire positive, alors $\exists s > 0$ tel que $E(X^s) < 1$.

En utilisant ce dernier résultat, on conclut que

$$\gamma < 0 \Rightarrow \exists s > 0, \exists k_0 \geq 1 \quad \text{tel que} \quad E(\|a_{k_0} a_{k_0-1} \cdots a_1\|^s) < 1.$$

Si $\exists s > 0, \exists k_0 \geq 1$ tel que $\delta < 1$, alors par l'inégalité de Jensen, on a :

$$\gamma \leq \frac{1}{k_0} E(\log \|a_{k_0} a_{k_0-1} \cdots a_1\|) \leq \frac{1}{s k_0} \log \delta < 0.$$

Preuve du corollaire 4.2.2. La preuve du lemme 4.2.1 montre que le nombre s peut être inférieur à 1. Soit $s \in]0, 1]$, alors la solution strictement stationnaire définie par (4.29) satisfait

$$\begin{aligned}
 E(\|X_t\|^s) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} E(\|a_{t-1} \cdots a_{t-k}\|^s) E(\|b_{t-k-1}\|^s) = E(\|b_0\|^s) \sum_{i=0}^{\infty} E(\|a_{t-1} \cdots a_{t-k}\|^s) \\
 &= E(\|b_0\|^s) \left(1 + \sum_{k=1}^{k_0} E(\|a_{t-1} \cdots a_{t-k}\|^s) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} E(\|a_{t-1} \cdots a_{t-k}\|^s) \right) \\
 &\leq E(\|b_0\|^s) \left(1 + \sum_{k=1}^{k_0} (E\|a_0\|^s)^k + \sum_{k=k_0+1}^{2k_0} E(\|a_{t-1} \cdots a_{t-k}\|^s) + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{k=2k_0+1}^{\infty} E(\|a_{t-1} \cdots a_{t-k}\|^s) \right) \\
 &\leq E(\|b_0\|^s) \left(1 + \sum_{k=1}^{k_0} (E\|a_0\|^s)^k + \delta \sum_{k=1}^{k_0} (E\|a_0\|^s)^k + \sum_{k=2k_0+1}^{\infty} E(\|a_{t-1} \cdots a_{t-k}\|^s) \right) \\
 &\quad \vdots \\
 &\leq E(\|b_0\|^s) \left(1 + \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j \sum_{k=1}^{k_0} (E\|a_0\|^s)^k \right) < \infty.
 \end{aligned}$$

On en déduit que $\sigma_t^{2s} \leq \|X_t\|^s$ et $\varepsilon_t^{2s} \leq \|X_t\|^s$ et par conséquent $E(\sigma_t^{2s}) < \infty$ et $E(\varepsilon_t^{2s}) < \infty$.

Le théorème suivant donne les conditions nécessaires et suffisantes de stationnarité du second ordre des processus $GARCH(p, q)$.

Théorème 4.2.5. [12] *Si un processus $GARCH(p, q)$ est stationnaire au second ordre, alors*

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1. \tag{4.31}$$

Inversement, si la condition (4.31) est satisfaite, alors l'unique solution non-anticipative strictement stationnaire du modèle défini par (4.1) et (4.2) est un bruit blanc faible (stationnaire au second ordre).

Preuve. On montre d'abord que la condition (4.31) est nécessaire. Soit $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus $GARCH(p, q)$ stationnaire au second ordre, alors

$$E(\varepsilon_t^2) = E(E(\varepsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})) = E(\sigma_t^2)$$

ne dépend pas de t . En prenant l'espérance mathématique des deux cotés de (4.2), on obtient

$$E(\varepsilon_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i E(\varepsilon_t^2) + \sum_{j=1}^p \beta_j E(\varepsilon_t^2),$$

c'est-à-dire

$$\left(1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j\right) E(\varepsilon_t^2) = \alpha_0,$$

ce qui montre (4.31).

Maintenant, on montre la condition suffisante. Supposons que la condition (4.31) est satisfaite et on construit une solution stationnaire satisfaisant un modèle $GARCH(p, q)$.

Pour $t, k \in \mathbb{Z}$, on définit le vecteur $X_k(t)$ comme suit

$$X_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0, \\ a_{t-1}X_{k-1}(t-1) + b_{t-1} & \text{si } k \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{et } X_k(t) - X_{k-1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0, \\ b_{t-1} & \text{si } k = 0, \\ a_{t-1}(X_{k-1}(t-1) - X_{k-2}(t-1)) & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Par itération, on obtient pour $k > 0$,

$$X_k(t) - X_{k-1}(t) = a_{t-1}a_{t-2} \cdots a_{t-k}b_{t-k-1}.$$

Par conséquent,

$$E(\|X_k(t) - X_{k-1}(t)\|) = \|E(a_{t-1}a_{t-2} \cdots a_{t-k}b_{t-k-1})\|.$$

Notons que tous les termes de $a_{t-1}a_{t-2} \cdots a_{t-k}b_{t-k-1}$ sont indépendants parce que $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires *i.i.d.* En posant $a = E(a_t)$ et $b = E(b_t)$, on obtient pour $k > 0$,

$$E(\|X_k(t) - X_{k-1}(t)\|) = \|a^k b\| = (1, 1, \dots, 1)a^k b.$$

La condition (4.31) implique que les valeurs propres de a sont strictement inférieures à 1 en valeur absolue. En effet, on peut vérifier que

$$\det(\lambda I_{p+q} - a) = \lambda^{p+q} \left(1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i \lambda^{-i} - \sum_{j=1}^p \beta_j \lambda^{-j}\right).$$

Si $|\lambda| \geq 1$, alors

$$|\det(\lambda I_{p+q} - a)| \geq \left| 1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i \lambda^{-i} - \sum_{j=1}^p \beta_j \lambda^{-j} \right| \geq 1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j > 0,$$

donc $\rho(a) < 1$. En utilisant le résultat (4.30), on déduit que $a^k \rightarrow 0$ si $k \rightarrow \infty$. De plus, pour t fixé, $X_k(t)$ converge presque sûrement lorsque $k \rightarrow \infty$. Soit X_t la limite de $(X_k(t))_k$. Pour k fixé, le processus $(X_k(t))_{t \in \mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire. Le processus limite $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire et est une solution de l'équation aux récurrences stochastique (4.27).

Remarque 4.3.

1. Sous la condition (4.31) du théorème 4.2.5, l'unique solution du modèle défini par (4.1) et (4.2) est un bruit blanc de variance

$$\text{var}(\varepsilon_t) = \alpha_0 \left(1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j \right)^{-1}.$$

2. Sous la condition (4.31) du théorème 4.2.5, on a nécessairement

$$\left(1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j < 1 \right) \Rightarrow \gamma < 0$$

parce que la solution stationnaire au second ordre donnée par le théorème 4.2.5 est aussi strictement stationnaire. En effet, si la condition (4.31) est satisfaite, alors le rayon spectral $\rho(E(a_t))$ est strictement inférieur à 1. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} E(\log \|a_k \cdots a_1\|) &\leq \frac{1}{k} \log E(\|a_k \cdots a_1\|) \\ &= \frac{1}{k} \log \|(E(a_1))^k\| \rightarrow \log \rho(E(a_1)) < 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\gamma < 0$.

4.3 Processus ARCH(∞)

Définition 4.3.1. *Un processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit un processus ARCH(∞), s'il existe une suite de variables aléatoires $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ i.i.d avec $E(\eta_t) = 0$, $\text{var}(\eta_t) = 1$ et une suite de constantes non négatives $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$, avec $\phi_0 > 0$ telles que*

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \tag{4.32}$$

$$\sigma_t^2 = \phi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \varepsilon_{t-i}^2. \tag{4.33}$$

Cette classe de processus contient les processus ARCH(q) et les processus GARCH(p, q).

La stationnarité d'un processus ARCH(∞) exige des conditions sur les suites $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Théorème 4.3.1. [31] *Soit*

$$A_s = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^s \quad \text{et} \quad \mu_{2s} = E(|\eta_t|^{2s}), \quad s \in]0, 1],$$

si $\exists s \in]0, 1]$ tel que $A_s \mu_{2s} < 1$, alors il existe une unique solution non-anticipative strictement stationnaire du modèle défini par (4.32) et (4.33), donnée par $\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t$, avec

$$\sigma_t^2 = \phi_0 + \phi_0 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k \geq 1} \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_k} \eta_{t-i_1}^2 \eta_{t-i_1-i_2}^2 \cdots \eta_{t-i_1-\dots-i_k}^2, \quad (4.34)$$

telle que $E(\varepsilon_t^{2s}) < \infty$.

Preuve. Considérons la variable aléatoire suivante

$$S_t = \phi_0 + \phi_0 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k \geq 1} \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_k} \eta_{t-i_1}^2 \eta_{t-i_1-i_2}^2 \cdots \eta_{t-i_1-\dots-i_k}^2. \quad (4.35)$$

Soit $s \in]0, 1]$, alors

$$S_t^s \leq \phi_0^s + \phi_0^s \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k \geq 1} \phi_{i_1}^s \cdots \phi_{i_k}^s \eta_{t-i_1}^{2s} \eta_{t-i_1-i_2}^{2s} \cdots \eta_{t-i_1-\dots-i_k}^{2s} \quad (4.36)$$

En prenant l'espérance des deux cotés de (4.36), on obtient :

$$\begin{aligned} E(S_t^s) &\leq \phi_0^s + \phi_0^s \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k \geq 1} \phi_{i_1}^s \cdots \phi_{i_k}^s E(\eta_{t-i_1}^{2s} \eta_{t-i_1-i_2}^{2s} \cdots \eta_{t-i_1-\dots-i_k}^{2s}) \\ &= \phi_0^s \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_s \mu_{2s})^k \right) = \phi_0^s (1 - A_s \mu_{2s})^{-1}, \end{aligned}$$

ceci prouve que S_t est fini presque sûrement. De l'équation (4.35), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i S_{t-i} \eta_{t-i}^2 &= \phi_0 \sum_{i_0=1}^{\infty} \phi_{i_0} \eta_{t-i_0}^2 + \phi_0 \sum_{i_0=1}^{\infty} \phi_{i_0} \eta_{t-i_0}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k \geq 1} \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_k} \eta_{t-i_0-i_1}^2 \cdots \eta_{t-i_0-i_1-\dots-i_k}^2 \\ &= \phi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_0, \dots, i_k \geq 1} \phi_{i_0} \cdots \phi_{i_k} \eta_{t-i_0}^2 \eta_{t-i_0-i_1}^2 \cdots \eta_{t-i_0-\dots-i_k}^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, $(S_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ vérifie l'équation aux récurrences stochastique suivante.

$$S_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i S_{t-i} \eta_{t-i}^2.$$

La solution non-anticipative strictement stationnaire $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ du modèle défini par (4.32) et (4.33) est donnée par $\varepsilon_t = S_t^{1/2} \eta_t$. De plus,

$$E(\varepsilon_t^{2s}) = E((S_t^{1/2} \eta_t)^{2s}) = E((S_t \eta_t^2)^s) \leq E(S_t^s) E(\eta_t^2)^s \leq \mu_{2s} \phi_0^s (1 - A_s \mu_{2s})^{-1} < \infty.$$

4.3.1 Représentation $ARCH(\infty)$ d'un processus $GARCH(p, q)$

Il est utile de considérer la représentation $ARCH(\infty)$ d'un processus $GARCH(p, q)$. Par exemple, cette représentation permet d'écrire explicitement la variance conditionnelle σ_t^2 de ε_t en fonction de son passé infini. Il permet également aux conditions de positivité sur les paramètres (4.3) d'être affaiblies.

Théorème 4.3.2. [6] *Si $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une solution non-anticipative et strictement stationnaire du modèle défini par (4.1) et (4.2), alors ils existent une constante C et une suite de constantes $(\psi_t)_{t \in \mathbb{N}}$ telles que :*

$$\sigma_t^2 = C + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}^2, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (4.37)$$

Preuve. De la proposition 4.2.1, on a $\sum_{j=1}^p \beta_j < 1$ et les racines de $\mathcal{B}(z) = 0$ sont en dehors du disque unité. Par conséquent, on a :

$$\frac{1}{\mathcal{B}(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j, \quad |z| \leq 1, \quad \sum_{j=0}^{\infty} |d_j| < \infty.$$

On pose $\mathcal{B}^{-1}(B) = \frac{1}{\mathcal{B}(B)} = \sum_{j=0}^{\infty} d_j B^j$. En appliquant l'opérateur $\mathcal{B}^{-1}(B)$ à (4.4), on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \mathcal{B}^{-1}(1) \alpha_0 + \mathcal{B}^{-1}(B) \mathcal{A}(B) \varepsilon_t^2 \\ &= \alpha_0 \left(1 - \sum_{j=1}^p \beta_j \right)^{-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}^2, \end{aligned}$$

les coefficients ψ_j sont obtenus du développement en série de fonctions de $\mathcal{B}^{-1}(B) \mathcal{A}(B)$, i.e.,

$$\psi_j = \alpha_j + \sum_{k=1}^p \beta_k \psi_{j-k}, \quad j \geq 1,$$

avec $\alpha_j = 0, j > q$ et $\psi_j = 0, j \leq 0$.

4.4 Moments d'ordres supérieurs et kurtosis

4.4.1 Moments d'ordres supérieurs

Dans cette partie, on s'intéresse aux moments d'ordres supérieurs de la solution strictement stationnaire du modèle $GARCH(p, q)$. Le résultat suivant donne les conditions assurant l'existence des moments d'ordres $2m$, où m est un entier positif.

Théorème 4.4.1. [29] *Soit $a^{(m)} = E(a_t^{\otimes m})$, avec a_t définie par (4.28). Supposons que $E(\eta_t^{2m}) < \infty$ et $\rho(a^{(m)}) < 1$, alors la série (4.29) converge dans L^m et le processus $(\varepsilon_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire admettant des moments jusqu'à l'ordre m .*

Preuve. Soit $k > 0$, alors après k itérations dans l'équation aux récurrences (4.27), on obtient :

$$X_t = \prod_{i=1}^k a_{t-i} X_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \left(\prod_{i=1}^j a_{t-i} \right) b_{t-j-1}.$$

On pose $a_{t-1,k} = \prod_{i=1}^k a_{t-i}$ et $X_{t,k} = a_{t-1,k} b_{t-k-1}$, avec $a_{t-1,0} = I_{p+q}$ et $X_{t,0} = b_{t-1}$. Notons que

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^k a_{t-i} \right) b_{t-k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} X_{t,k}. \quad (4.38)$$

En utilisant la norme $\|A\| = \sum_{i,j} |A_{ij}|$ et l'égalité $\|A\| \cdot \|B\| = \|A \otimes B\|$, on obtient :

$$E(\|X_{t,k}\|^m) = E(\|a_{t-1,k} b_{t-k-1} \otimes \cdots \otimes a_{t-1,k} b_{t-k-1}\|) = \|E(a_{t-1,k} b_{t-k-1} \otimes \cdots \otimes a_{t-1,k} b_{t-k-1})\|.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^{p+q}$, alors $(ax)^{\otimes m} = a^{\otimes m} \times x^{\otimes m}$. En utilisant ce résultat, on obtient :

$$E(\|X_{t,k}\|^m) = \|E(a_{t-1,k}^{\otimes m} b_{t-k-1}^{\otimes m})\| = \|E(a_{t-1}^{\otimes m} \cdots a_{t-k}^{\otimes m} b_{t-k-1}^{\otimes m})\|. \quad (4.39)$$

On pose $b^{(m)} = E(b_t^{\otimes m})$. De (4.39) et du fait que les matrices a_{t-i} sont indépendantes, on obtient :

$$E(\|X_{t,k}\|^m) = \|(a^{(m)})^k b^{(m)}\|.$$

En utilisant ce dernier résultat et la relation (4.38), on obtient :

$$\begin{aligned} \|X_t\|_m &= (E(\|X_t\|^m))^{1/m} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|X_{t,k}\|_m \\ &\leq \|b^{(m)}\|^{1/m} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|(a^{(m)})^k\|^{1/m} \right). \end{aligned}$$

Si $\rho(a^{(m)}) < 1$, alors $\|(a^{(m)})^k\|$ converge vers zéro. Dans ce cas, X_t est finie presque sûrement, le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est la solution strictement stationnaire de (4.27) et il appartient à L^m . Il est clair que $\|\varepsilon_t^2\|_m \leq \|X_t\|_m$. Par conséquent, la condition suffisante pour l'existence de $E(\varepsilon_t^{2m})$ est alors $\rho(a^{(m)}) < 1$.

4.4.2 Coefficient d'aplatissement (Kurtosis)

Dans cette partie, on s'intéresse au coefficient d'aplatissement de la distribution marginale de la solution strictement stationnaire du modèle $GARCH(p, q)$. Premièrement, on annonce ce résultat qui est une conséquence du théorème 4.3.2.

Corollaire 4.4.1. [51] *Soit $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus $GARCH(p, q)$ stationnaire, alors pour le processus $(\varepsilon_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfaisant le modèle $ARMA(\max(p, q), q)$, il existe une constante C et une suite de constantes $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ données par :*

$$C = \alpha_0 \left(1 - \sum_{i=1}^{\max(p, q)} (\alpha_i + \beta_i) \right)^{-1} \quad \text{et}$$

$$\psi_j = -\beta_j + \sum_{k=1}^{\max(p, q)} (\alpha_k + \beta_k) \psi_{j-k}, \quad j \geq 0, \quad (4.40)$$

avec $\beta_0 = -1$, $\beta_j = 0$, $j > p$ et $\psi_j = 0$, $j < 0$, $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$, telles que :

$$\varepsilon_t^2 = C + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \xi_{t-j}. \quad (4.41)$$

Pour le coefficient d'aplatissement du processus $GARCH(p, q)$, on a le résultat suivant.

Proposition 4.4.1. [31] *Soit $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus $GARCH(p, q)$ possédant un moment d'ordre 4. On pose $\theta = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2$, avec $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est définie par (4.40), alors la kurtosis de $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est donnée par :*

$$k_\varepsilon = k_\eta (k_\eta - \theta(k_\eta - 1))^{-1},$$

avec k_η est la kurtosis de $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Preuve. Notons que le processus $(\xi_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance

$$\text{var}(\xi_t) = E(\sigma_t^4 (\eta_t^2 - 1)^2) = (k_\eta - 1) E(\sigma_t^4).$$

En utilisant la relation (4.41), on obtient :

$$\begin{aligned} \text{var}(\varepsilon_t^2) &= \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 \text{var}(\xi_{t-i}) = \theta(k_\eta - 1)E(\sigma_t^4) \\ &= E(\varepsilon_t^4) - (E(\varepsilon_t^2))^2 = k_\eta E(\sigma_t^4) - (E(\varepsilon_t^2))^2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$E(\sigma_t^4) = (E(\varepsilon_t^2))^2 (k_\eta - \theta(k_\eta - 1))^{-1}$$

et

$$k_\varepsilon = \frac{k_\eta E(\sigma_t^4)}{(E(\varepsilon_t^2))^2} = \frac{k_\eta}{k_\eta - \theta(k_\eta - 1)}.$$

4.5 Ergodicité géométrique et β -mélange des processus ARCH/GARCH

Pour une bonne compréhension, on définit d'abord l'ergodicité géométrique et la propriété du mélange pour un processus ARCH(1) qui est le seul cas où $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est Markovien. Considérons le modèle ARCH(1) suivant :

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \quad (4.42)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2. \quad (4.43)$$

avec $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$ et $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite *i.i.d* : $E(\eta_t) = 0$, $E(\eta_t^2) = 1$.

Hypothèse (1) : la loi P_η de la suite $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est absolument continue de densité g par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Supposons que :

$$\inf\{\eta : \eta > 0, g(\eta) > 0\} = \inf\{-\eta : \eta < 0, g(\eta) > 0\} = \eta^* \quad (4.44)$$

$$\text{et } \exists \epsilon > 0 :] -\eta^* - \epsilon, -\eta^*[\cup] \eta^*, \eta^* + \epsilon[\subset \{g > 0\}.$$

L'égalité (4.44) implique une certaine symétrie de la loi de $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Le résultat suivant établit l'ergodicité géométrique et la propriété de mélange.

Théorème 4.5.1. [67] *Supposons que la suite $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ vérifie l'hypothèse (1) et que*

$$-\infty \leq E(\log \alpha_1 \eta_0^2) < 0, \quad (4.45)$$

alors l'unique solution non-anticipative strictement stationnaire du modèle défini par (4.42) et (4.43) est géométriquement ergodique et par conséquent géométriquement β -mélangeante et aussi géométriquement fortement mélangeante (α -mélangeante).

Preuve. Le processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfait

$$\varepsilon_t = (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)^{1/2} \eta_t, \quad t \geq 1,$$

avec η_t est indépendante de ε_{t-i} , $i > 0$. Il est clair que $(\varepsilon_t)_{t \geq 1}$ est une chaîne de Markov homogène sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de probabilités de transitions

$$\begin{aligned} P(x, B) &= \mathbb{P}(\varepsilon_1 \in B | \varepsilon_0 = x) = \mathbb{P}((\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_0^2)^{1/2} \eta_1 \in B | \varepsilon_0 = x) \\ &= \mathbb{P}(\eta_1 \in (\alpha_0 + \alpha_1 x^2)^{-1/2} B | \varepsilon_0 = x) = \int_{(\alpha_0 + \alpha_1 x^2)^{-1/2} B} dP_\eta(y). \end{aligned}$$

On montre que les conditions du théorème 1.2.5 sont satisfaites. Pour une fonction mesurable h de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on a :

$$E(h(\varepsilon_t) | \varepsilon_{t-1} = x) = E\left(h\left((\alpha_0 + \alpha_1 x^2)^{1/2} \eta_t\right)\right). \quad (4.46)$$

Si h est continue et bornée, alors la fonction $x \rightarrow h((\alpha_0 + \alpha_1 x^2)^{1/2} y)$, $y \in \mathbb{R}$ est continue et bornée. Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit que $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une chaîne de Feller.

Pour montrer la φ -irréductibilité, on suppose que $\eta^* = 0$ dans l'hypothèse (1). Soit φ une mesure de Lebesgue sur $[0, \sqrt{\alpha_0} \epsilon[$. Comme $(\alpha_0 + \alpha_1 x^2)^{1/2} > \sqrt{\alpha_0}$, alors on peut vérifier que

$$\varphi(B) > 0 \Rightarrow \lambda((\alpha_0 + \alpha_1 x^2)^{-1/2} B \cap [0, \epsilon]) > 0 \Rightarrow P(x, B) > 0$$

et par conséquent, la chaîne est φ -irréductible. En particulier, $\varphi = \lambda$ si la densité de η_t est positive sur \mathbb{R} .

Si $\eta^* > 0$. Notons que

$$E(\log \alpha_1 \eta_t^2) = \int_{]-\infty, -\eta^*] \cup [\eta^*, +\infty[} \log(\alpha_1 x^2) g(x) dx \geq \log \alpha_1 (\eta^*)^2.$$

De la condition (4.45), on déduit que :

$$\omega = \alpha_1 (\eta^*)^2 < 1.$$

Soit $\epsilon' \in]0, \epsilon[$ tel que :

$$\omega_1 = \alpha_1 (\eta^* + \epsilon')^2 < 1.$$

De modèle $ARCH(1)$ défini par (4.42) et (4.43), on obtient pour $\varepsilon_0 = x$,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_t^2 &= \sigma_t^2 \eta_t^2 = (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2) \eta_t^2 = \alpha_0 \eta_t^2 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \eta_t^2 \\
 &= \alpha_0 \eta_t^2 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 \eta_{t-1}^2 \eta_t^2 = \alpha_0 \eta_t^2 + \alpha_1 (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-2}^2) \eta_{t-1}^2 \eta_t^2 \\
 &= \alpha_0 \eta_t^2 + \alpha_0 \alpha_1 \eta_{t-1}^2 \eta_t^2 + \alpha_1^2 \varepsilon_{t-2}^2 \eta_{t-1}^2 \eta_t^2 \\
 &\quad \vdots \\
 &= \alpha_0 (\eta_t^2 + \alpha_1 \eta_t^2 \eta_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_1^{t-1} \eta_t^2 \cdots \eta_1^2) + \alpha_1^t \eta_t^2 \cdots \eta_1^2 x^2.
 \end{aligned}$$

On définit ainsi la fonction suivante :

$$Y_t = (\eta_1^2, \dots, \eta_t^2) \rightarrow Z_t = (\eta_1^2, \dots, \eta_{t-1}^2, \varepsilon_t^2)$$

De plus, par l'hypothèse (1), les vecteurs Y_t et Z_t ont des densités par rapport à la mesure de Lebesgue λ . Par conséquent, pour $\varepsilon_0 = x$, ε_t^2 a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue λ .

Soit l'évènement suivant :

$$\Sigma_t = \bigcap_{s=1}^t \left(\eta_s \in]-\eta^* - \epsilon', -\eta^*[\cup[\eta^*, \eta^* + \epsilon'] \right)$$

L'hypothèse (1) implique que $\mathbb{P}(\Sigma_t) > 0$. Conditionnellement à Σ_t , on a :

$$\varepsilon_t^2 \in I_t = [\alpha_0 (\eta^*)^2 (1 - \omega^t) (1 - \omega)^{-1} + \omega^t x^2, \alpha_0 (\eta^*)^2 (1 - \omega_1^t) (1 - \omega_1)^{-1} + \omega_1^t x^2].$$

Puisque I_t est un intervalle fermé, alors en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que ε_t^2 a une densité, on déduit que pour $\varepsilon_0 = x$, la distribution conditionnelle de ε_t^2 par rapport à Σ_t a une densité positive sur I_t . Par conséquent, la distribution conditionnelle de ε_t par rapport à Σ_t a une densité positive sur J_t avec $J_t = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in I_t\}$.

Soit $I = [\alpha_0 (\eta^*)^2 (1 - \omega)^{-1}, \alpha_0 (\eta^* + \epsilon')^2 (1 - \omega_1)^{-1}]$, $J = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in I\}$ et λ_J est une mesure de Lebesgue sur J . On a :

$$\lambda_J(B) > 0 \Rightarrow \exists t, \lambda(B \cap J_t) > 0 \Rightarrow \exists t, \mathbb{P}(\varepsilon_t \in B | \varepsilon_0 = x) \geq \mathbb{P}(\varepsilon_t \in B | (\varepsilon_0 = x) \cap \Sigma_t) \mathbb{P}(\Sigma_t) > 0,$$

alors la chaîne est φ -irréductible avec $\varphi = \lambda_J$.

La variable aléatoire $\alpha_1 \eta_t^2$ est positive presque sûrement satisfaisant $E(\alpha_1 \eta_t^2) = \alpha_1 < \infty$ et $E(\log \alpha_1 \eta_t^2) < 0$, alors $\exists s > 0$ t.q $E(\alpha_1 \eta_t^2)^s = \alpha_1^s \mu_{2s} < 1$.

Comme dans la preuve du corollaire 4.2.2, on suppose que $s \leq 1$ et soit $f(x) = 1 + x^{2s}$,

alors la condition (1.6) du théorème 1.2.5 est satisfaite pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soient $0 < \delta < 1 - \alpha_1^s \mu_{2s}$ et un ensemble compact C ,

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \alpha_0^s \mu_{2s} + \delta + (\alpha_1^s \mu_{2s} - 1 + \delta)x^{2s} \geq 0\}.$$

Puisque C est un intervalle fermé et non vide, alors $\varphi(C) > 0$. De plus, pour $x \in C^c$,

$$\begin{aligned} E(f(\varepsilon_t) | \varepsilon_{t-1} = x) &= E(1 + \varepsilon_t^{2s} | \varepsilon_{t-1} = x) = 1 + E(\varepsilon_t^{2s} | \varepsilon_{t-1} = x) \\ &= 1 + E((\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)^s \eta_t^{2s} | \varepsilon_{t-1} = x) \\ &\leq 1 + E((\alpha_0^s + \alpha_1^s \varepsilon_{t-1}^{2s}) \eta_t^{2s} | \varepsilon_{t-1} = x) = 1 + (\alpha_0^s + \alpha_1^s x^{2s}) \mu_{2s} \\ &= (1 - \delta)f(x) + \alpha_0^s \mu_{2s} + \delta + (\alpha_1^s \mu_{2s} - 1 + \delta)x^{2s} < (1 - \delta)f(x). \end{aligned}$$

Ceci montre la relation (1.7) du théorème 1.2.5, c'est-à-dire la chaîne est géométriquement ergodique et par conséquent géométriquement β -mélangeante.

Soit un modèle $GARCH(1, 1)$ défini par (4.11) et (4.12). Dans ce cas, le processus $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus Markovien, mais $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ n'est pas un processus Markovien si $\beta_1 > 0$. Le résultat suivant donne les conditions de l'ergodicité géométrique de la chaîne de Markov $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et la propriété de β -mélange du processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Théorème 4.5.2. [31] *Supposons que la suite $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfait l'hypothèse (1) et que*

$$-\infty \leq E(\log(\alpha_1 \eta_0^2 + \beta_1)) < 0, \quad (4.47)$$

alors la solution non-anticipative strictement stationnaire du modèle $GARCH(1, 1)$ est telle que la chaîne de Markov $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est géométriquement ergodique et $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est géométriquement β -mélangeant et par conséquent géométriquement fortement mélangeant (α -mélangeante).

Preuve. Le processus $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ vérifie

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 \eta_{t-1}^2 + \beta_1) \sigma_{t-1}^2, \quad t \geq 1,$$

$(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une chaîne de Markov homogène définie sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ et de probabilités de transitions

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), \mathbb{P}(\sigma_1 \in B | \sigma_0 = x) &= \mathbb{P}((\alpha_0 + (\alpha_1 \eta_0^2 + \beta_1) \sigma_0^2)^{1/2} \in B | \sigma_0 = x) \\ &= \int_{B_x} dP_\eta(y), \end{aligned}$$

avec $B_x = \{\eta : (\alpha_0 + (\alpha_1\eta^2 + \beta_1)x^2)^{1/2} \in B\}$.

Comme dans le cas d'un modèle $ARCH(1)$, pour une fonction mesurable $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une chaîne de Feller, avec

$$E(h(\sigma_t) | \sigma_{t-1} = x) = E\left(h((\alpha_0 + (\alpha_1\eta_{t-1}^2 + \beta_1)x^2)^{1/2})\right).$$

Pour montrer la φ -irréductibilité, remarquons d'abord que la condition (4.47) implique que

$$\omega = \alpha_1\eta^{*2} + \beta_1 < 1.$$

Soit $\epsilon' \in]0, \epsilon[$ tel que

$$\omega_1 = \alpha_1(\eta^* + \epsilon')^2 + \beta_1 < 1.$$

Si $\sigma_0 = x \in \mathbb{R}^+$, alors pour $t > 0$, on a :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0(1 + (\alpha_1\eta_{t-1}^2 + \beta_1) + \dots + (\alpha_1\eta_{t-1}^2 + \beta_1) \cdots (\alpha_1\eta_1^2 + \beta_1)) + (\alpha_1\eta_{t-1}^2 + \beta_1) \cdots (\alpha_1\eta_0^2 + \beta_1)x^2.$$

Conditionnellement à Σ_t , on a :

$$\sigma_t^2 \in I_t = \left[\frac{\alpha_0}{1-\omega} + \omega^t \left(x^2 - \frac{\alpha_0}{1-\omega}\right), \frac{\alpha_0}{1-\omega_1} + \omega_1^t \left(x^2 - \frac{\alpha_0}{1-\omega_1}\right) \right].$$

Soit

$$I = \lim_{t \rightarrow \infty} I_t = \left[\frac{\alpha_0}{1-\omega}, \frac{\alpha_0}{1-\omega_1} \right],$$

alors conditionnellement à Σ_t , σ_t^2 a une densité positive sur J_t avec $J_t = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 \in I_t\}$.

Soit λ_J une mesure de Lebesgue sur $[\sqrt{\alpha_0}(1-\omega)^{-1/2}, \sqrt{\alpha_0}(1-\omega_1)^{-1/2}]$, alors on a :

$$\begin{aligned} \lambda_J(B) > 0 &\Rightarrow \exists t, \lambda(B \cap J_t) > 0 \\ &\Rightarrow \exists t, \mathbb{P}(\sigma_t \in B | \sigma_0 = x) \geq \mathbb{P}(\sigma_t \in B | (\sigma_0 = x) \cap \Sigma_t) \mathbb{P}(\Sigma_t) > 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire la chaîne $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est φ -irréductible avec $\varphi = \lambda_J$.

La variable aléatoire $(\alpha_1\eta_{t-1}^2 + \beta_1)$ est positive presque sûrement satisfaisant

$$E(\alpha_1\eta_{t-1}^2 + \beta_1) < \infty \text{ et } E(\log(\alpha_1\eta_{t-1}^2 + \beta_1)) < 0, \text{ alors } \exists s > 0 \text{ t.q. } \varrho = E(\alpha_1\eta_{t-1}^2 + \beta_1)^s < 1.$$

Supposons que $s \leq 1$ et soit $f(x) = 1 + x^{2s}$, alors la condition (1.6) du théorème 1.2.5 est satisfaite pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Soient $0 < \delta < 1 - \varrho$ et un ensemble compact C ,

$$C = \{x \in \mathbb{R}^+ : \alpha_0^s + \delta + (\varrho - 1 + \delta)x^{2s} \geq 0\}.$$

Pour $x \in C^c$, on a :

$$\begin{aligned} E(f(\sigma_t)|\sigma_{t-1} = x) &= E(1 + \sigma_t^{2s}|\sigma_{t-1} = x) = E(1 + (\alpha_0 + (\alpha_1\eta_{t-1}^2 + \beta_1)\sigma_{t-1}^2)^s|\sigma_{t-1} = x) \\ &\leq E(1 + \alpha_0^s + (\alpha_1\eta_{t-1}^2 + \beta_1)^s\sigma_{t-1}^{2s}|\sigma_{t-1} = x) = 1 + \alpha_0^s + \varrho x^{2s} \\ &= (1 - \delta)f(x) + \alpha_0^s + \delta + (\varrho - 1 + \delta)x^{2s} < (1 - \delta)f(x), \end{aligned}$$

ceci montre que la condition (1.7) du théorème 1.2.5 est satisfaite. Il reste à montrer que $\varphi(C) > 0$ pour pouvoir appliquer le théorème 1.2.5. En effet, en notant par C° l'intérieur de l'ensemble C , on a :

$$\varphi(C) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\alpha_0}{1 - \omega}} \in C^\circ \Leftrightarrow \alpha_0^s + \delta + (\varrho - 1 + \delta)\left(\frac{\alpha_0}{1 - \omega}\right)^s > 0,$$

alors il suffit de choisir δ suffisamment proche de $1 - \varrho$ de sorte que la dernière inégalité soit satisfaite. Les conditions du théorème 1.2.5 sont satisfaites, alors la solution non-anticipative strictement stationnaire $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une chaîne de Markov géométriquement ergodique et par conséquent géométriquement β -mélangeante.

On a $\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t$, alors il suffit de montrer que le processus $Y_t = (\sigma_t, \eta_t)'$ vérifie la propriété de mélange pour que le processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ soit mélangeant. Notons que $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ muni de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. De plus, $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire et Y_t est une fonction de $\eta_t, \eta_{t-1} \dots$. Pour $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$, $B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $t > 0$, les probabilités de transition de $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont données par :

$$\begin{aligned} P^t(y, B_1 \times B_2) &= \mathbb{P}(\sigma_t \in B_1, \eta_t \in B_2 | \sigma_0 = y_1, \eta_0 = y_2) \\ &= \mathbb{P}_\eta(B_2) \mathbb{P}(\sigma_t \in B_1 | \sigma_0 = y_1, \eta_0 = y_2) \\ &= \mathbb{P}_\eta(B_2) \mathbb{P}(\sigma_t \in B_1 | \sigma_1 = \alpha_0 + (\alpha_1 y_2^2 + \beta_1) y_1) \\ &= \mathbb{P}_\eta(B_2) P^{t-1}(\alpha_0 + (\alpha_1 y_2^2 + \beta_1) y_1, B_1), \end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{aligned} \|P^t(y, \cdot) - \mathbb{P}_Y(\cdot)\| &= \|\mathbb{P}_\eta(\cdot) \cdot P^{t-1}(\alpha_0 + (\alpha_1 y_2^2 + \beta_1) y_1, \cdot) - \mathbb{P}_\eta(\cdot) \cdot \mathbb{P}_\sigma(\cdot)\| \\ &= \|P^{t-1}(\alpha_0 + (\alpha_1 y_2^2 + \beta_1) y_1, \cdot) - \mathbb{P}_\sigma(\cdot)\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

par conséquent $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est géométriquement ergodique et aussi β -mélangeant. Puisque ε_t est une fonction mesurable de Y_t , alors le processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est β -mélangeant.

Dans le cas d'un processus $ARCH(q)$, la propriété du mélange ne se déduit pas par l'extension des résultats de la propriété du mélange d'un processus $ARCH(1)$.

Soit le modèle $ARCH(q)$ suivant :

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \quad (4.48)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-1}^2 \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.49)$$

avec $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1 \cdots q$ et $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite *i.i.d* : $E(\eta_t) = 0$, $E(\eta_t^2) = 1$.

Le modèle $ARCH(q)$ peut être représenté par l'équation aux récurrences stochastique suivante :

$$X_t = a_{t-1} X_{t-1} + b_{t-1},$$

avec $X_t = (\varepsilon_t^2, \dots, \varepsilon_{t-q+1}^2)'$, $b_{t-1} = (\alpha_0 \eta_t^2, 0, \dots, 0)'$ et

$$a_{t-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \eta_t^2 & \alpha_2 \eta_t^2 & \cdots & \alpha_{q-1} \eta_t^2 & \alpha_q \eta_t^2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Théorème 4.5.3. [31] *Si η_t a une densité sur un voisinage de zéro et l'exposant de Lyapounov de la suite $(a_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ définie par (4.50) est négatif, alors l'unique solution non-anticipative strictement stationnaire $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ du modèle défini par (4.48) et (4.49) est géométriquement β -mélangeante et par conséquent géométriquement fortement mélangeante.*

Remarque 4.4. La preuve détaillée du théorème 4.5.3 se trouve dans C. Francq et J. M. and Zakoïan [31].

Dans le cas d'un modèle $GARCH(p, q)$, on a le résultat suivant.

Théorème 4.5.4. [31] *Si η_t a une densité sur un voisinage de zéro et l'exposant de Lyapounov de la suite $(a_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ définie par (4.28) est négatif, alors l'unique solution non-anticipative strictement stationnaire $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ du modèle défini par (4.1) et (4.2) est β -mélangeante.*

Remarque 4.5. La preuve détaillée du théorème 4.5.4 se trouve dans C. Francq et J. M. and Zakoïan [31].

Chapitre 5

Larges déviations et probabilité de ruine

5.1 Introduction

Dans le chapitre 3, on a montré que la solution strictement stationnaire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de l'équation aux récurrences stochastique $X_n = a_{n-1}X_{n-1} + b_{n-1}$, avec (a_n, b_n) est une suite de variables aléatoires non négatives *i.i.d.*, est à variation régulière d'indice $\alpha > 0$ sous les conditions que $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est à variation régulière d'indice α et que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ satisfait la condition $E(a_t^\alpha) < 1$. On a vu aussi que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des sommes partielles de la solution $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est à variation régulière de même indice de variation α . Dans cette partie, on s'intéresse aux larges déviations des S_n et aux probabilités de larges déviations, c'est-à-dire aux probabilités $P((S_n - E(S_n)) > x_n)$ pour une suite (x_n) croissante vers l'infini. On applique le principe de large déviation pour étudier la probabilité de ruine de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, c'est-à-dire $P(\sup_{n \geq 1} ((S_n - E(S_n)) - n\mu) > u)$, $\mu > 0$, $u > 0$. On s'intéresse au comportement asymptotique de cette probabilité de ruine quand u tend vers l'infini.

5.2 Large déviation dans le cas d'une suite de variables aléatoires *i.i.d.*

La notion de variation régulière comme définie dans le chapitre 3 est liée étroitement aux principes de larges déviations pour les processus stochastiques. De tels résultats ont été prouvés depuis les années 1960 par plusieurs auteurs en citant Nagaev, V. S [57] qui a étudié les larges déviations de la suite des sommes partielles d'une suite de variables aléatoires *i.i.d.* à variations régulières.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d* telle que $\text{var}(X) = \sigma^2$.

Par le théorème central limite, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) - \Phi(x) \right| = 0, \quad (5.1)$$

où $\Phi(x)$ est la distribution de la loi normale. On s'intéresse au comportement asymptotique de $P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma\sqrt{n}} > x_n\right)$ pour une suite (x_n) avec x_n tend vers l'infini. Le théorème de Cramer [26] donne la première vue de la probabilité de large déviation.

Théorème 5.2.1. [23] *Supposons que la fonction génératrice des moments $M(h) = E(\exp(hX))$ existe sur un voisinage de zéro, alors*

$$\frac{P(S_n - E(S_n)/\sigma\sqrt{n} > x)}{1 - \Phi(x)} = \exp\left(\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{n}\right)\right)\left(1 + O\left(\frac{x+1}{\sqrt{n}}\varphi(x)\right)\right), \quad (5.2)$$

$$\frac{P(S_n - E(S_n)/\sigma\sqrt{n} \leq -x)}{\Phi(-x)} = \exp\left(\frac{-x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{-x}{n}\right)\right)\left(1 + O\left(\frac{x+1}{\sqrt{n}}\varphi(x)\right)\right), \quad (5.3)$$

uniformément pour $x \geq 0$, $x = o(\sqrt{n})$. $\varphi(x)$ est la densité de la loi normale et $\lambda(z)$ est une série de fonctions dont les coefficients dépendent des moments de X et convergente dans un voisinage de zéro.

Preuve. Pour la preuve, voir Dembo et Zeitouni [23].

Notons qu'il est difficile de déterminer les coefficients de la série de Cramer $\lambda(z)$. Cependant, on peut considérer un cas particulier de ce théorème.

Corollaire 5.2.1. [23] *Supposons que la fonction génératrice des moments $M(h) = E(\exp(hX))$ existe sur un voisinage de zéro, alors*

$$P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma\sqrt{n}} > x\right) = (1 - \Phi(x)) \exp\left(\frac{x^3}{6\sqrt{n}} \frac{E(X - E(X))^3}{\sigma^3}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(x)\right), \quad (5.4)$$

$$P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma\sqrt{n}} \leq -x\right) = \Phi(-x) \exp\left(\frac{-x^3}{6\sqrt{n}} \frac{E(X - E(X))^3}{\sigma^3}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(x)\right), \quad (5.5)$$

uniformément pour $x \geq 0$, $x = O(n^{1/6})$. En particulier, si $E(X - E(X))^3 = 0$, alors

$$P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) - \Phi(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(x)\right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.6)$$

Remarque 5.1. Les résultats de larges déviations peuvent être interprétés comme une amélioration de taux de convergence dans le théorème central limite. En effet, soit $x = x_n$ tel que x_n tendant vers l'infini et $x_n = o(n^{1/6})$, alors on déduit du corollaire 5.2.1 que

$$P\left(\left|\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma\sqrt{n}}\right| > x_n\right) = 2(1 - \Phi(x_n)) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{x_n^2}{2}\right)\right). \quad (5.7)$$

De la même manière, on peut envisager les larges déviations de (S_n) pour une suite de variables aléatoires centrées $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à variations régulières d'indice $\alpha < 2$.

Théorème 5.2.2. [26] *Supposons que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à variation régulière d'indice $\alpha < 2$ et soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que $b_n \rightarrow \infty$ et $P(X > b_n) \sim 1/n$, alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(S_n > b_n x_n)}{nP(X > b_n x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(S_n > b_n x_n)}{P(M_n > b_n x_n)} = 1, \quad (5.8)$$

pour toute suite (x_n) telle que x_n tend vers l'infini.

L'objectif dans cette partie est la probabilité de large déviation $P(S_n > x_n)$ pour la solution strictement stationnaire à variation régulière d'indice $\alpha > 1$ de l'équation aux récurrences stochastique. On donne d'abord quelques résultats pour une suite de variables aléatoires *i.i.d* à variation régulière d'indice $\alpha > 1$. Pour $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *i.i.d* à variation régulière d'indice $\alpha < 2$, on a vu dans le théorème 5.2.2 que la condition $nP(X > x_n) \rightarrow 1$ implique

$$P(S_n > x_n) = nP(X > x_n)(1 + o(1)) = P(M_n > x_n). \quad (5.9)$$

Notons qu'une variable aléatoire à variation régulière est de distribution sous-exponentielle qui est définie par

$$P(S_n > x) = P(M_n > x)(1 + o(1)), \quad n \geq 1, \quad x \rightarrow \infty.$$

Ainsi, la relation (5.9) est une extension de la limite précédente pour le cas où n et x tendent vers l'infini simultanément. Nagaev, S. V [57] a montré que la relation (5.9) reste valide pour une suite centrées *i.i.d* à variation régulière d'indice $\alpha > 2$.

Théorème 5.2.3. [57] *Supposons que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à variation régulière d'indice $\alpha > 2$ et $\exists \delta > 0$ tel que $E(|X|^{2+\delta}) < \infty$ avec $\text{var}(X) = 1$, alors*

$$P(S_n > x) = \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)(1 + o(1)) + nP(X > x)(1 + o(1)), \quad (5.10)$$

uniformément pour $x \geq \sqrt{n}$. En particulier,

$$P(S_n > x) = \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)(1 + o(1)), \quad (5.11)$$

uniformément pour $\sqrt{n} \leq x \leq \gamma(n \log n)^{1/2}$, avec $\gamma < \sqrt{\alpha - 2}$ et

$$P(S_n > x) = nP(X > x)(1 + o(1)) = P(M_n > x), \quad (5.12)$$

uniformément pour $x > \gamma(n \log n)^{1/2}$, avec $\gamma > \sqrt{\alpha - 2}$.

Le théorème suivant donne le principe de larges déviations dans le cas d'une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires centrées *i.i.d* à variation régulière d'indice $\alpha > 1$.

Théorème 5.2.4. [26] *Supposons que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à variation régulière d'indice $\alpha > 1$, avec $E(X) = 0$, alors*

$$P(S_n > x) = nP(X > x)(1 + o(1)), \quad (5.13)$$

uniformément pour $x \geq \tau n$.

Un résultat qui découle du théorème 5.2.4 est donné par le corollaire suivant.

Corollaire 5.2.2. [42] *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d* à variations régulières d'indice $\alpha > 1$, avec $E(X) = 0$, alors*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1} \left| \frac{P(x_n^{-1} S_n \in]x, \infty[)}{nP(X > x_n)} - x^\alpha \right| = 0, \quad (5.14)$$

x_n tendant vers l'infini.

Hult et al [42] ont démontré des résultats de larges déviations dans les cas des suites de vecteurs aléatoires *i.i.d* à variations régulières. Rappelons qu'un vecteur aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}^d est à variation régulière d'indice $\alpha > 0$, s'il existe une suite à termes positifs $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \rightarrow \infty$ et une mesure de Radon μ sur $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\})$, avec $\mu(\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \mathbb{R}^d) = 0$, telle que

$$nP(x_n^{-1} X \in B) \xrightarrow{v} \mu(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\})$$

et la mesure μ satisfait $\mu(uB) = u^{-\alpha} \mu(B)$, $\forall u > 0$, $\forall B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\})$.

Définition 5.2.1. *Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d , avec $E(X) = 0$, satisfait le principe de large déviation, s'il existe deux suite (x_n) , (y_n) de nombres positifs*

croissantes vers l'infini et une mesure de Radon μ sur $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^d \setminus \{0\})$, avec $\mu(\overline{\mathbb{R}}^d \setminus \mathbb{R}^d) = 0$, telle que

$$x_n P(y_n^{-1} X_n \in B) \xrightarrow{v} \mu(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^d \setminus \{0\}). \quad (5.15)$$

et on écrit,

$$\frac{P(y_n^{-1} X_n \in B)}{nP(|X| > y_n)} \xrightarrow{v} \mu(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^d \setminus \{0\}). \quad (5.16)$$

Le résultat suivant donne une condition suffisante pour le principe de large déviation de la suite (S_n) des sommes partielles de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs aléatoires *i.i.d* à variation régulière.

Théorème 5.2.5. [42] Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs aléatoires *i.i.d*, à valeurs dans \mathbb{R}^d , à variation régulière d'indice $\alpha > 0$ et de mesure limite de Radon μ sur $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^d \setminus \{0\})$, avec $\mu(\overline{\mathbb{R}}^d \setminus \mathbb{R}^d) = 0$. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs croissante vers l'infini vérifiant les conditions suivantes

$$\begin{aligned} y_n^{-1} S_n &\xrightarrow{P} 0, & \text{si } \alpha < 2 \\ y_n^{-1} S_n &\xrightarrow{P} 0, \quad \exists \gamma > 0 \text{ t.q. } y_n / \sqrt{n^{1+\gamma}} \rightarrow \infty, & \text{si } \alpha = 2 \\ y_n^{-1} S_n &\xrightarrow{P} 0, & y_n / \sqrt{n \log n} \rightarrow \infty, \text{ si } \alpha > 2, \end{aligned}$$

alors (S_n) satisfait le principe de large déviation et on écrit,

$$\frac{P(y_n^{-1} S_n \in B)}{nP(|X| > y_n)} \xrightarrow{v} \mu(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^d \setminus \{0\}). \quad (5.17)$$

Remarque 5.2. Sous les conditions du théorème 5.2.5, on peut choisir, comme dans le théorème 5.2.4, $y_n = \gamma n$ avec $\gamma > 0$, si $\alpha > 1$ et $E(X) = 0$. Si $\alpha \in]0, 2[$, alors les conditions $nP(|X| > y_n) \rightarrow 0$ et $ny_n^{-1} E(X I_{[0, y_n]}(|X|)) \rightarrow 0$ sont nécessaires et suffisantes pour $y_n^{-1} S_n \xrightarrow{P} 0$ (voir Petrov [60]). On peut choisir, comme dans le théorème 5.2.3, $y_n = \gamma \sqrt{n \log n}$ avec $\gamma > \sqrt{\alpha - 1}$, si $\alpha > 2$ et $E(X) = 0$ (voir Hult et al [42]).

La preuve du théorème 5.2.5 se base sur la convergence des distributions de la suite (S_n) .

Lemme 5.2.1. [42] Sous les conditions du théorème 5.2.5, on a

$$x_n P(y_n^{-1} S_n \in B) \xrightarrow{v} \mu(B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^d \setminus \{0\}). \quad (5.18)$$

où $x_n = (nP(|X| > y_n))^{-1}$.

Preuve. On cherche d'abord une borne supérieure de $x_n P(y_n^{-1} S_n \in A)$ pour tout ensemble de Borel borné $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^d \setminus \{0\})$. Pour tout ensemble de Borel $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^d \setminus \{0\})$ et $\epsilon > 0$, on pose $B_\epsilon = \{x \in \overline{\mathbb{R}}^d \setminus \{0\} : |y - x| \leq \epsilon, y \in B\}$, alors

$$\begin{aligned} P(y_n^{-1} S_n \in A) &\leq nP(y_n^{-1} X \in A_\epsilon) + P(y_n^{-1} S_n \in A, y_n^{-1} X_i \in A_\epsilon^c, i = 1, \dots, n) \\ &\leq nP(y_n^{-1} X \in A_\epsilon) + P(y_n^{-1} |S_n - X_i| > \epsilon, i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Par la variation régulière de X , on a

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n n P(y_n^{-1} X \in A_\epsilon) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mu(A_\epsilon) = \mu(A).$$

On montre que $\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n P(y_n^{-1} |S_n - X_i| > \epsilon, i = 1, \dots, n) = 0$.

Soit $\delta > 0$, on définit les ensembles suivants

$$\begin{aligned} B_1 &= \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{|X_i| > \delta y_n, |X_j| > \delta y_n\}, \quad B_2 = \bigcup_{i=1}^n \{|X_i| > \delta y_n, |X_j| \leq \delta y_n, i \neq j, j = 1, \dots, n\}, \\ B_3 &= \{\max_{i=1, \dots, n} |X_i| \leq \delta y_n\}. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que B_1, B_2 et B_3 forment un système complet d'événements. Il est clair que $x_n P(B_1) = o(1)$ et

$$\begin{aligned} &P(\{|S_n - X_i| > \epsilon y_n, i = 1, \dots, n\} \cap B_2) \\ &= \sum_{k=1}^n P(\{|S_n - X_i| > \epsilon y_n, i \leq n\} \cap \{|X_k| > \delta y_n, |X_j| \leq \delta y_n, j \neq k, j \leq n\}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n P(|S_n - X_k| > \epsilon y_n, |X_k| > \delta y_n) = P(|S_{n-1}| > \epsilon y_n) (nP(|X| > \delta y_n)) = o(x_n^{-1}). \end{aligned}$$

Pour B_3 , on a

$$\begin{aligned} &P(\{|S_n - X_i| > \epsilon y_n, i = 1, \dots, n\} \cap B_3) \\ &\leq P(|S_{n-1}| > \epsilon y_n, \max_{i=1, \dots, n-1} |X_i| \leq \delta y_n) = o(nP(|X| > y_n)). \end{aligned}$$

On a $y_n^{-1} S_n \xrightarrow{P} 0$ et $ny_n^{-1} E(XI_{[0, \delta y_n]}(|X|)) \rightarrow 0$ pour tout $\delta > 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} P(|S_n| > \epsilon y_n, \max_{i=1, \dots, n} |X_i| \leq \delta y_n) &\leq P\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i I_{[0, \delta y_n]}(|X_i|)\right| > \epsilon y_n\right) \\ &\leq P\left(\left|\sum_{i=1}^n (X_i I_{[0, \delta y_n]}(|X_i|) - E(XI_{[0, \delta y_n]}(|X|)))\right| > \frac{\epsilon y_n}{2}\right). \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Fuk et Nagaev [60] donnée par le lemme suivant.

Lemme 5.2.2. [60] Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d telle que $E(|X|) = 0$ et $\exists p \geq 2$ tel que $E(|X|^p) < \infty$, alors

$$P(S_n \geq x) \leq (1 + 2/p)^p n E(|X|^p) x^{-p} + \exp(-2(p+2)^{-2} e^{-p} x^2 (n \text{var}(X))^{-1}).$$

$$\begin{aligned} P\left(\left|\sum_{i=1}^n (X_i I_{[0, \delta y_n]}(|X_i|)) - E(X I_{[0, \delta y_n]}(|X|))\right| > \frac{\epsilon y_n}{2}\right) \\ \leq c_1 n y_n^{-p} E(|X|^p I_{[0, \delta y_n]}(|X|)) + \exp(-c_2 y_n^p (n \text{var}(X I_{[0, \delta y_n]}(|X|)))^{1-}), \end{aligned}$$

avec $c_1, c_2 > 0$.

Par le théorème 3.1.1 de Karamata, on a

$$\forall p > \alpha, \quad E(|X|^p I_{[0, \delta y_n]}(|X|)) \sim c(\delta y_n)^p P(|X| > \delta y_n) \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Par conséquent, pour $p > \max(2, \alpha)$,

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{E(|X|^p I_{[0, \delta y_n]}(|X|))}{y_n^p P(|X| > y_n)} = c \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(\delta y_n)^p P(|X| > \delta y_n)}{y_n^p P(|X| > y_n)} = c \lim_{\delta \downarrow 0} \delta^{p-\alpha} = 0.$$

Si $\text{var}(X) < \infty$, alors du fait que $y_n / \sqrt{n \log n} \rightarrow \infty$, on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(-c_2 y_n^p (n \text{var}(X I_{[0, \delta y_n]}(|X|)))^{1-})}{n P(|X| > y_n)} = 0. \quad (5.19)$$

Si $\alpha \in]0, 2[$, alors par le théorème 3.1.1 de Karamata, on a

$$n y_n^{-2} \text{var}(X I_{[0, \delta y_n]}(|X|)) \sim c n P(|X| > y_n),$$

Par conséquent, la relation (5.19) est vérifiée.

Si $\alpha = 2$ et $\text{var}(X) = \infty$, alors les fonctions $y_n^2 P(|X| > y_n)$ et $\text{var}(X I_{[0, \delta y_n]}(|X|))$ sont à variations lentes. Par hypothèse, $\exists \gamma > 0$ tel que $y_n / \sqrt{n^{1+\gamma}} \rightarrow \infty$, alors on déduit que (5.19) est vérifiée. Finalement, on conclut que

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n P(y_n^{-1} S_n \in A_\epsilon) \leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mu(A_\epsilon) = \mu(A). \quad (5.20)$$

Notons que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\})$ est engendrée par la classe de tous les intervalles semi-ouverts de la forme $[a, b[$, alors pour trouver une borne inférieure à $x_n P(y_n^{-1} S_n \in A)$, $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\})$,

il suffit de considérer $A = [a, b[$. Pour $\epsilon > 0$, on définit $a^{+\epsilon} = (a_1 + \epsilon, \dots, a_d + \epsilon)$, $b^{-\epsilon} = (b_1 - \epsilon, \dots, b_d - \epsilon)$ et $A_{-\epsilon} = [a^{+\epsilon}, b^{-\epsilon}[$ qui est un ensemble de continuité de μ , alors

$$\begin{aligned} P(y_n^{-1}S_n \in A) &\geq P(y_n^{-1}S_n \in A, y_n^{-1}X_i \in A_{-\epsilon}) \\ &\geq P(y_n^{-1}X_i \in A_{-\epsilon}, y_n^{-1}|S_n - X_i| < \epsilon) \\ &\geq nP(y_n^{-1}X \in A_{-\epsilon})P(y_n^{-1}|S_{n-1}| < \epsilon) - \frac{n(n-1)}{2}(P(y_n^{-1}X \in A_{-\epsilon}))^2. \end{aligned}$$

Par hypothèse, $y_n^{-1}S_n \xrightarrow{P} 0$, alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n P(y_n^{-1}S_n \in A) \geq \lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(y_n^{-1}X \in A_{-\epsilon})}{P(|X| > y_n)} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mu(A_{-\epsilon}) = \mu(A). \quad (5.21)$$

De (5.20) et (5.21), on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n P(y_n^{-1}S_n \in A) = \mu(A),$$

ce qui donne $x_n P(y_n^{-1}S_n \in A) \xrightarrow{v} \mu(A)$, $\forall A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^d} \setminus \{0\})$.

Remarque 5.3. Le théorème 5.2.5 est un cas particulier du théorème 2.1 de Hult et all [42] pour le principe de large déviation de la suite $(S^n) = ((S_{[nt]})_{t \in [0,1]})$ de processus aléatoires à valeurs dans l'ensemble de fonctions $D([0,1], \mathbb{R}^d)$. La preuve du théorème 5.2.5 dans le cas général se trouve dans Hult et all [42].

5.3 Principes de larges déviations pour la solution de l'équation aux récurrences stochastique

La solution strictement stationnaire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de l'équation aux récurrences stochastique ne vérifie pas les résultats du théorème 5.2.2 et le théorème 5.2.3. Néanmoins, on peut définir d'une manière explicite, le comportement asymptotique de la probabilité de large déviation $P(S_n - E(S_n) > x_n)$, où $x_n \rightarrow \infty$. En effet, soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, avec

$$Y_n = \sum_{i=n}^{\infty} \left(\prod_{k=n+1}^i a_k \right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.22)$$

Le résultat suivant donne quelques propriétés de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ qui seront utiles pour étudier la probabilité de large déviation.

Proposition 5.3.1. [49] *Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d non négatives telle qu'il existe $\alpha > 0$ satisfaisant $E(a^\alpha) < 1$, alors*

1. La suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire.
2. Les variables Y_n satisfont $E(Y_n^p) < \infty$, $p > 0$ ssi $E(a^p) < \infty$.
3. Si a admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0, x_0]$, avec $x_0 \leq \infty$, alors la suite $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est géométriquement fortement mélangeante.

Preuve. 1) La suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est égale en distribution à la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par :

$$Z_n = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{i-1} a_{n-k-1} \right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.23)$$

Par conséquent, on a l'équation aux récurrences stochastique suivante

$$Z_n = 1 + a_{n-1} Z_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La condition $E(a^\alpha) < 1$ implique que $E(\log a) < 0$ et $E(\log^+ a) < \infty$, alors $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par (5.23) est l'unique solution non-anticipative strictement stationnaire.

2) On a

$$E(Z_n^p) = E((1 + a_{n-1} Z_{n-1})^p) = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} E(a_{n-1}^{p-i} Z_{n-1}^{p-i}).$$

La variable aléatoire a_{n-1} est indépendante de z_{n-1} , alors

$$E(Z_n^p) = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} E(a_{n-1}^{p-i}) E(Z_{n-1}^{p-i}).$$

Par la stationnarité de $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, on déduit que $E(Z^p) < \infty$ ssi $E(a^p) < \infty$.

3) On a $E(a^\alpha) < 1$, c'est-à-dire les conditions du théorème 2.4.1 sont satisfaites, alors la solution strictement stationnaire $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est géométriquement fortement mélangeante. Par conséquent $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est géométriquement fortement mélangeante.

Le théorème suivant donne le comportement asymptotique de la probabilité de large déviation pour la solution strictement stationnaire de l'équation aux récurrences stochastique.

Théorème 5.3.1. [49] *Supposons que $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont deux suites indépendantes de variables aléatoires i.i.d non négatives telles que b est à variation régulière d'indice $\alpha > 1$, $E(a^\alpha) < 1$ et $E(a^{2\alpha}) < \infty$. Soit (x_n) une suite de nombre positifs croissante vers l'infini telle que $nP(b > x_n) \rightarrow 0$ et $\forall c > 0$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} \left| \frac{P(\text{var}(bI_{[0,x]}(b)) \sum_{i=1}^n Y_i^2 > cx^2 / \log x) + P(|\sum_{i=1}^n (Y_i - E(Y_i))| > cx)}{nP(b > x)} \right| = 0 \quad (5.24)$$

alors,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} \left| \frac{P(S_n - E(S_n) > x)}{nP(b > x)} - E(Y^\alpha) \right| = 0, \quad (5.25)$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \left(\prod_{k=0}^{i-1} a_k \right) X_0 + \sum_{j=0}^{n-1} b_j \sum_{i=j}^{n-1} \left(\prod_{k=j+1}^i a_k \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\prod_{k=0}^{i-1} a_k \right) X_0 + \sum_{j=0}^{n-1} b_j \sum_{i=j}^{\infty} \left(\prod_{k=j+1}^i a_k \right) - \sum_{j=0}^{n-1} b_j \sum_{i=n}^{\infty} \left(\prod_{k=j+1}^i a_k \right) \\ &= S_{n,1} + S_{n,2} - S_{n,3}. \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$, alors

$$\begin{aligned} &P(S_n - E(S_n) > x) \\ &\leq P(S_{n,1} - E(S_{n,1}) > x\epsilon/2) + P(S_{n,2} - E(S_{n,2}) > x(1 - \epsilon)) + P(-S_{n,3} + E(S_{n,3}) > x\epsilon/2). \end{aligned}$$

On a :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} \frac{P(S_{n,1} - E(S_{n,1}) > x\epsilon/2)}{nP(b > x)} = 0. \quad (5.26)$$

En effet, par le Théorème 3.3.4, la variable X_0 est à variation régulière d'indice α . La solution strictement stationnaire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est non anticipative, alors X_0 est indépendante de $\prod_{k=0}^{i-1} a_k$. Puisque $E(a^\alpha) < 1$ pour $\alpha > 1$ et la fonction $g(h) = E(a^h)$ est convexe continue sur $[0, \alpha]$, alors $E(a) < 1$. Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{i-1} a_k \right) = Y_{-1} - 1 \stackrel{D}{=} Y - 1.$$

$$E(S_{n,1}) = E(X_0) \sum_{i=1}^n (E(a))^i \rightarrow E(X_0)E(a)(1 - E(a))^{-1} = r < \infty \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Par hypothèse, on a $E(a^{2\alpha}) < \infty$, alors $E(Y^{2\alpha}) < \infty$. Par conséquent, les conditions du théorème 3.1.3 sont satisfaites, c'est-à-dire X_0 est à variation régulière, indépendante de Y

et $\exists \delta > 0$ tel que $E(Y^{\alpha+\delta}) < \infty$. On a ainsi,

$$\begin{aligned}
 \sup_{x \geq x_n} \frac{P(S_{n,1} - E(S_{n,1}) > x\epsilon/2)}{nP(b > x)} &\leq \sup_{x \geq x_n} \frac{P(|S_{n,1} - E(S_{n,1})| > x\epsilon/2)}{nP(b > x)} \\
 &\leq \sup_{x \geq x_n} \frac{P(X_0(Y-1) > x\epsilon/2 - r)}{nP(b > x)} \\
 &\leq c \sup_{x \geq x_n} \frac{P(X_0 > x\epsilon/2)E(Y-1)^\alpha}{nP(b > x)} \\
 &\leq \frac{c(1 - E(a^\alpha))^{-1}(2/\epsilon)^\alpha E(Y-1)^\alpha}{n} \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 S_{n,3} &= \sum_{j=0}^{n-1} b_j \sum_{i=n}^{\infty} \left(\prod_{k=j+1}^i a_k \right) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j \left(\prod_{k=j+1}^n a_k \right) \sum_{i=n}^{\infty} \left(\prod_{k=n+1}^i a_k \right) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j \left(\prod_{k=j+1}^n a_k \right) Y_n \\
 &= Y_n a_n \sum_{j=0}^{n-1} b_j \left(\prod_{k=j+1}^{n-1} a_k \right) \xrightarrow{D} Y a X.
 \end{aligned}$$

De la même manière que $S_{n,1}$, on peut vérifier que $E(S_{n,3}) \rightarrow E(a) \cdot E(b)(1 - E(a))^{-2}$ et

$$\sup_{x \geq x_n} \frac{P(-S_{n,3} + E(S_{n,3}) > x\epsilon/2)}{nP(b > x)} \leq \sup_{x \geq x_n} \frac{P(|S_{n,3} - E(S_{n,3})| > x\epsilon/2)}{nP(b > x)} \rightarrow 0. \quad (5.27)$$

On a :
$$S_{n,2} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j Y_j.$$

On montre que

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} \left(\frac{P(S_{n,2} - E(S_{n,2}) > x(1 - \epsilon))}{nP(b > x)} - E(Y^\alpha) \right) \leq 0. \quad (5.28)$$

En effet, pour tout $\delta > 0$, on définit les événements suivants

$$Q_{n,1}(\delta) = \bigcup_{0 \leq j < s \leq n-1} \{b_j > \delta x, b_s > \delta x\}, \quad Q_{n,2}(\delta) = \{\max_{j \leq n-1} b_j \leq \delta x\},$$

$$Q_{n,3}(\delta) = \bigcup_{j=0}^{n-1} \{b_j > \delta x, b_s \leq \delta x, 0 \leq s \neq j \leq n-1\}.$$

On peut vérifier facilement que $Q_{n,1}(\delta)$, $Q_{n,2}(\delta)$ et $Q_{n,3}(\delta)$ forment un système complet

d'événements, prenons par exemple $n = 2$, on a ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{P(S_{n,2} - E(S_{n,2}) > x(1 - \epsilon))}{nP(b > x)} &= \frac{P((S_{n,2} - E(S_{n,2}) > x(1 - \epsilon)) \cap Q_{n,1}(\delta))}{nP(b > x)} \\ &+ \frac{P((S_{n,2} - E(S_{n,2}) > x(1 - \epsilon)) \cap Q_{n,2}(\delta))}{nP(b > x)} \\ &+ \frac{P((S_{n,2} - E(S_{n,2}) > x(1 - \epsilon)) \cap Q_{n,3}(\delta))}{nP(b > x)} \\ &= I_{2,1}(x) + I_{2,2}(x) + I_{2,3}(x). \end{aligned}$$

On peut vérifier facilement que $\forall \delta > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} I_{2,1}(x) = 0$.

Posons $b_{j,x} = b_j I_{[0,x]}(b_j)$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, $\forall x > 0$, alors

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq x_n} I_{2,2}(x) &\leq \sup_{x \geq x_n} \frac{P(\sum_{j=0}^{n-1} (b_{j,\delta x} Y_j - E(b_{0,\delta x}) E(Y)) > (1 - \epsilon)x)}{nP(b > x)} \\ &\leq \sup_{x \geq x_n} \frac{P(\sum_{j=0}^{n-1} (b_{j,\delta x} - E(b_{0,\delta x})) Y_j > (1 - \epsilon)x/2)}{nP(b > x)} \\ &+ \sup_{x \geq x_n} \frac{P(E(b_{0,\delta x}) \sum_{j=0}^{n-1} (Y_j - E(Y)) > (1 - \epsilon)x/2)}{nP(b > x)}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Fuk et Nagaev [60] donnée par lemme 5.2.2, avec $p = 2\alpha$ et $E(Y^{2\alpha}) < \infty$, on en déduit que

$$\begin{aligned} &E\left(P\left(\sum_{j=0}^{n-1} (b_{j,\delta x} - E(b_{0,\delta x})) Y_j > (1 - \epsilon)x/2 / (Y_j)\right)\right) \\ &\leq cE\left(\left((1 - \epsilon)x/2\right)^{-2\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} Y_j^{2\alpha} + c' \exp\left[-c''((1 - \epsilon)x/2)^2 (\text{var}(b_{0,\delta x}) \sum_{j=0}^{n-1} Y_j^2)^{-1}\right]\right) \\ &\leq cx^{-2\alpha} nE(Y^{2\alpha}) \\ &+ cc'E\left(\exp\left[-c''((1 - \epsilon)x/2)^2 (\text{var}(b_{0,\delta x}) \sum_{j=0}^{n-1} Y_j^2)^{-1}\right] I_{\{\text{var}(b_{0,\delta x}) \sum_{j=0}^{n-1} Y_j^2 \leq dx^2 / \log x\}}\right) \\ &+ P\left(\text{var}(b_{0,\delta x}) \sum_{j=0}^{n-1} Y_j^2 > dx^2 / \log x\right), \end{aligned}$$

où $c = (\alpha + 1)^{2\alpha} \alpha^{-2\alpha} E(b_{0,\delta x} - E(b_{0,\delta x}))^{2\alpha}$, $c' = \frac{1}{c}$, $c'' = 2(\alpha + 2)^{-2} e^{-2\alpha}$ et $d > 0$ satisfaisant

$$\begin{aligned} &\sup_{x \geq x_n} \frac{E\left(\exp\left[-c''((1 - \epsilon)x/2)^2 (\text{var}(b_{0,\delta x}) \sum_{j=0}^{n-1} Y_j^2)^{-1}\right] I_{\{\text{var}(b_{0,\delta x}) \sum_{j=0}^{n-1} Y_j^2 \leq dx^2 / \log x\}}\right)}{nP(b > x)} \\ &\leq \sup_{x \geq x_n} \frac{\exp\left(-c''((1 - \epsilon)/2)^2 \log x / d\right)}{nP(b > x)} = \sup_{x \geq x_n} \frac{x^{-c''((1 - \epsilon)/2)^2 / d}}{nP(b > x)} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Il est clair que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} \frac{cx^{-2\alpha} n E(Y^{2\alpha})}{nP(b > x)} = 0. \quad (5.30)$$

Par l'hypothèse (5.24), on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} \frac{P\left(\text{var}(b_{0,\delta x}) \sum_{j=0}^{n-1} Y_j^2 > dx^2 / \log x\right)}{nP(b > x)} = 0 \quad (5.31)$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} \frac{P(E(b_{0,\delta x}) \sum_{j=0}^{n-1} (Y_j - E(Y)) > (1 - \epsilon)x/2)}{nP(b > x)} = 0. \quad (5.32)$$

Par les relations (5.29), (5.30), (5.31) et (5.32), on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} I_{2,2}(x) = 0. \quad (5.33)$$

Pour $I_{2,3}(x)$, on a :

$$\begin{aligned} I_{2,3}(x) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{P(b_i Y_i + \sum_{s=0, s \neq i}^{n-1} (b_s Y_s - E(b)E(Y)) > x(1 - \epsilon), b_i > \delta x, \max_{0 \leq s \leq n-1, s \neq i} b_s \leq \delta x)}{nP(b > x)} \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{P(b_i \min(Y_i, \delta^{-1}(1 - 2\epsilon)) > (1 - 2\epsilon)x)}{nP(b > x)} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{P\left(\sum_{s=0, s \neq i}^{n-1} (b_s Y_s - E(b)E(Y)) > x\epsilon, b_i > \delta x, \max_{0 \leq s \leq n-1, s \neq i} b_s \leq \delta x\right)}{nP(b > x)} \\ &\leq \frac{P(b_0 \min(Y_0, \delta^{-1}(1 - 2\epsilon)) > (1 - 2\epsilon)x)}{P(b > x)} + \\ &\quad \sum_{i=0}^{n-1} \frac{P\left(\sum_{s=0, s \neq i}^{n-1} (b_s Y_s - E(b)E(Y)) > x\epsilon, \max_{0 \leq s \leq n-1, s \neq i} b_s \leq \delta x\right) P(b > \delta x)}{nP(b > x)} = f_1(x) + f_2(x). \end{aligned}$$

Par le théorème 3.1.3, on déduit que

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \\ &\sup_{x \geq x_n} \left(\left[f_1(x) - \frac{E((\min(Y, \delta^{-1}(1 - 2\epsilon)))^\alpha)}{(1 - 2\epsilon)^\alpha} \right] + \left[\frac{E((\min(Y, \delta^{-1}(1 - 2\epsilon)))^\alpha)}{(1 - 2\epsilon)^\alpha} - E(Y^\alpha) \right] \right) = 0 \end{aligned}$$

En utilisant la preuve de (5.33), on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} f_2(x) = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} (I_{2,3}(x) - E(Y^\alpha)) \leq 0.$$

Par les relations (5.26), (5.27) et (5.28), on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} \left(\frac{P(S_n - E(S_n) > x)}{nP(b > x)} - E(Y^\alpha) \right) \leq 0. \quad (5.34)$$

On a $\forall \delta > 0$,

$$\frac{P(S_n - E(S_n) > x)}{nP(b > x)} \sim \frac{P((S_{n,2} - E(S_{n,2}) > x) \cap Q_{n,2})}{nP(b > x)} + \frac{P((S_{n,2} - E(S_{n,2}) > x) \cap Q_{n,3})}{nP(b > x)},$$

uniformément pour $x \geq x_n$. En utilisant la preuve de (5.33), on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} \frac{P((S_{n,2} - E(S_{n,2}) > x) \cap Q_{n,2})}{(nP(b > x))^2} = 0.$$

Pour $\epsilon > 0$, soit $L_i = \{b_i \min(Y_i, \delta^{-1}(1 + \epsilon)) > (1 + \epsilon)x\}$, $i \in \mathbb{Z}$. On a ainsi,

$$\begin{aligned} & \frac{P((S_{n,2} - E(S_{n,2}) > x) \cap Q_{n,3})}{nP(b > x)} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{P(b_i Y_i + \sum_{s=0, s \neq i}^{n-1} b_s Y_s > x + nE(b)E(Y), b_i > \delta x, \max_{s \leq n-1, s \neq i} b_s \leq \delta x)}{nP(b > x)} \\ &\geq (P(b_0 \leq \delta x))^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{P(L_i)}{nP(b > x)} \\ &\quad - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{P((\sum_{s=0, s \neq i}^{n-1} (b_s Y_s - E(b)E(Y)) < -\epsilon x + E(b)E(Y)) \cap L_i \cap (\max_{s \leq n-1, s \neq i} b_s \leq \delta x))}{nP(b > x)} \\ &= K_1(x) - K_2(x). \end{aligned}$$

Il est clair que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} |(P(b \leq \delta x))^{n-1} - 1| = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} \left((1 + \epsilon)^{-\alpha} E(\min(Y, \delta^{-1}(1 + \epsilon)))^\alpha - K_1(x) \right) = 0.$$

Soit $T_{n,i} = \left\{ \sum_{s=0, s \neq i}^{n-1} (b_{s, \delta x} Y_s - E(b)E(Y)) \leq -\epsilon x + E(b)E(Y) \right\}$. Pour $0 < m < M < \infty$, on a

$$\begin{aligned} nP(b > x)K_2(x) &\leq \\ \sum_{i=0}^{n-1} P(T_{n,i} \cap L_i \cap (Y_i \leq m)) &+ \sum_{i=0}^{n-1} P(T_{n,i} \cap L_i \cap (Y_i > M)) + \sum_{i=0}^{n-1} P(T_{n,i} \cap L_i \cap (Y_i \in]m, M]) \\ &= K_{2,1}(x) + K_{2,2}(x) + K_{2,3}(x). \end{aligned}$$

$$\lim_{M \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} \frac{K_{2,1}(x)}{nP(b > x)} \leq \lim_{m \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} \frac{P(mb > (1 + \epsilon)x)}{P(b > x)} = \lim_{m \rightarrow 0} m^\alpha (1 + \epsilon)^{-\alpha} = 0.$$

De plus, par le théorème 3.1.3 et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} \frac{K_{2,2}(x)}{nP(b > x)} &= \lim_{M \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} \frac{P(Y I_{\{Y > M\}} b > (1 + \epsilon)x)}{P(b > x)} \\ &= \lim_{M \rightarrow 0} E(Y^\alpha I_{]M, \infty[}(Y)) (1 + \epsilon)^{-\alpha} = 0. \end{aligned}$$

En utilisant la preuve de (5.33), on peut vérifier que

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq x_n} \frac{K_{2,3}(x)}{nP(b > x)} &\leq \sup_{x \geq x_n} \frac{c}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P(T_{n,i}) \\ &\leq \sup_{x \geq x_n} P\left(\sum_{i=0}^{n-1} (b_{i, \delta x} Y_i - E(b)E(Y)) \leq -\epsilon x/2\right) + \sup_{x \geq x_n} P(b_{0, \delta x} Y > x\epsilon/2) \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} \left((1 + \epsilon)^{-\alpha} E(\min(Y, \delta^{-1}(1 + \epsilon)))^\alpha - \frac{P((S_{n,2} - E(S_{n,2}) > x) \cap Q_{n,3})}{nP(b > x)} \right) = 0.$$

On fait tendre ϵ et δ vers zéro, on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} \left(E(Y^\alpha) - \frac{P((S_n - E(S_n) > x) \cap Q_{n,3})}{nP(b > x)} \right) \geq 0.$$

Finalement, on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} \left(E(Y^\alpha) - \frac{P((S_n - E(S_n) > x))}{nP(b > x)} \right) \leq 0.$$

En général, il est difficile de vérifier la relation (5.24). Néanmoins, en imposant la condition du mélange sur la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, on obtient (5.24).

Proposition 5.3.2. [49] *Supposons que a admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0, x_0]$, avec $x_0 \leq \infty$, b est à variation régulière d'indice $\alpha > 1$ et $E(a^\alpha) < 1$.*

1. *Supposons que $\exists \gamma > 0$ tel que $\gamma + \alpha > 2$,*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} \frac{n^{(\alpha+\gamma)/2} \left(x / \sqrt{\text{var}(bI_{[0,x]}(b)) \log x} \right)^{-(\gamma+\alpha)}}{nP(b > x)} = 0 \quad (5.35)$$

et $E(a^{\gamma+\alpha}) < \infty$, alors la relation (5.24) est vérifiée.

2. *Supposons que $\exists c > 0$ tel que $Y \leq c$ p.s et $\exists d, \varepsilon > 0$ tels que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} \frac{e^{-d(x/\sqrt{n})^2 / (\log x \text{var}(bI_{[0,x]}(b)))}}{nP(b > x)} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \geq x_n} \frac{e^{(x/\sqrt{n})n^{-\varepsilon}}}{nP(b > x)} = 0, \quad (5.36)$$

alors la relation (5.24) est vérifiée.

Preuve. Par la proposition 5.3.1, la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est fortement mélangeante et par conséquent, pour une suite $(N_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi normale et indépendante de $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, la suite $(N_n Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est fortement mélangeante.

Par l'inégalité de Markov, $\forall y > 0$ et $\gamma > 0$ tel que $E(a^{\alpha+\gamma}) < \infty$, on a

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^n Y_i^2 > y\right) &\leq y^{-(\alpha+\gamma)/2} E\left(\sum_{i=1}^n Y_i^2\right)^{(\alpha+\gamma)/2} = \frac{y^{-(\alpha+\gamma)/2} E\left(\left|\sum_{i=1}^n N_i Z_i\right|^{(\alpha+\gamma)}\right)}{E(|N|^{(\alpha+\gamma)/2})} \\ &\leq c(n/y)^{(\alpha+\gamma)/2}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Dans la dernière inégalité, on a utilisé l'estimation de l'espérance de la somme des variables d'une suite fortement mélangeante (voir Francq et Zakoïan [31]). En utilisant l'inégalité (5.37) pour $x > 1$ et $d > 0$, on obtient

$$\frac{P(\text{var}(bI_{[0,x]}(b)) \sum_{i=1}^n Y_i^2 > dx^2 / \log x)}{nP(b > x)} \leq cn^{(\alpha+\gamma)/2} \frac{(x / \sqrt{\log x \text{var}(bI_{[0,x]}(b))})^{-(\alpha+\gamma)}}{nP(b > x)}.$$

Par l'hypothèse (5.35), on déduit que le coté droit de la dernière inégalité converge vers zéro uniformément pour $x \geq x_n$.

D'une manière équivalente, si $Y \leq c$ p.s, alors par l'inégalité exponentielle de Markov pour $h > 0$, on a

$$P\left(\sum_{i=1}^n Y_i^2 > y\right) \leq e^{-(h^2/2)(y/n)} E\left(e^{(h^2/2)n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i^2}\right) = e^{-(h^2/2)(y/n)} E\left(e^{hn^{-1/2} \sum_{i=1}^n N_i Z_i}\right).$$

Par le théorème central limite pour une suite fortement mélangeante (voir théorème 1.2.9), on en déduit que

$$n^{-1/2} \sum_{i=1}^n N_i Z_i \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2),$$

avec $\sigma^2 = \text{var}(Z)$. Par conséquent,

$$E\left(e^{(h^2/2)n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i^2}\right) \leq E\left(e^{(h^2/2)Y_1^2}\right) < \infty.$$

Par l'hypothèse (5.36), on en déduit que

$$\frac{P\left(\text{var}(bI_{[0,x]}(b)) \sum_{i=1}^n Y_i^2 > dx^2 / \log x\right)}{nP(b > x)} \leq c \frac{e^{-(h^2/2)d(x/\sqrt{n})^2 / (\log x \text{var}(bI_{[0,x]}(b)))}}{nP(b > x)} \rightarrow 0.$$

Comme $E(a^{\alpha+\gamma}) < \infty$, alors on a

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n (Y_i - E(Y))\right| > x\right) \leq x^{-(\alpha+\gamma)} E\left(\left|\sum_{i=1}^n (Y_i - E(Y))\right|^{\alpha+\gamma}\right) \leq cx^{-(\alpha+\gamma)} n^{(\alpha+\gamma)/2}.$$

Puisque $Y \leq c$ p.s. et $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est fortement mélangeante, alors on a le résultat suivant.

$$\forall \varepsilon < 1/2, \exists h > 0 \quad \text{tel que} \quad P\left(\sum_{i=1}^n (Y_i - E(Y)) > x\right) \leq e^{-h(x/\sqrt{n})n^{-\varepsilon}}.$$

Ceci complète la preuve de la proposition 5.3.2.

Remarque 5.4. La relation (5.24) est vérifiée pour une suite (x_n) satisfaisant (5.36), si b est à variation régulière d'indice $\alpha > 1$ et $\exists c_0 < 1$ tel que $a \leq c_0$. Par conséquent, $\forall d > 0$,

$$E(a^d) < 1 \text{ et } \sum_{i=0}^{\infty} c_0^2 = (1 - c_0)^{-1}.$$

Si $\alpha > 2$, $\text{var}(b) < \infty$ et b est à variation régulière d'indice $\alpha > 1$, c'est-à-dire il existe une fonction $L(x)$ à variation lente telle que $P(b > x) = x^{-\alpha}L(x)$, alors la condition (5.35) est satisfaite si

$$(n^{(\alpha+\gamma)/2-1} x_n^{-\gamma}) \sup_{x \geq x_n} ((\log x)^{(\alpha+\gamma)/2} / L(x)) \rightarrow 0.$$

Puisque $(\log x)^{(\alpha+\gamma)/2} / x^\varepsilon L(x) \leq 1$, $\forall \varepsilon > 0$ si $x \rightarrow \infty$, alors la relation précédente est vérifiée si $x_n = n^{1/2+\delta}$, avec $\delta > \gamma^{-1}(\alpha/2 - 1)$.

Si $\alpha \in]1, 2[$, alors on peut choisir $x_n = n^{(1/\alpha)+\delta}$ pour $\delta > 0$. Dans les deux cas, on peut choisir $x_n = cn$ comme dans le cas d'une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de variables aléatoires *i.i.d* à variation régulière d'indice $\alpha > 1$ (voir théorème 5.2.4).

5.4 Probabilité de ruine

La notion de probabilité de ruine est apparue pour la première fois dans les travaux de Filip Lundberg qui a donné son premier modèle dans les assurances et les finances ; il a développé la théorie du risque dans sa célèbre thèse en 1903. Le processus de risque $(R(t))_{t \geq 0}$ qui modélise les réserves d'une compagnie d'assurance est défini par :

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i.$$

1. $(Y_k)_{k \geq 1}$: suite de variables aléatoires non-négatives *i.i.d* modélisant les coûts individuels des sinistres.
2. c : taux de cotisations demandées aux assurés.
3. u : le capital initial de la compagnie d'assurance.
4. $(N_t)_{t \geq 0}$: processus de Poisson homogène de paramètre $\lambda > 0$ modélisant le nombre de sinistres, indépendant de $(Y_k)_{k \geq 1}$
5. $(\tau_k)_{k \geq 1}$: temps inter-sinistres *i.i.d* de loi $\exp(\lambda)$.

Le coût total de sinistres est modélisé par le processus de Poisson composé défini par $S_t = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$. Connaissant la distribution de Y en supposant que $E(Y) = \mu$, la question fondamentale pour le modèle de la théorie de ruine est le calcul de la probabilité de ruine en temps infini.

Définition 5.4.1. *La probabilité de ruine sur horizon infini, noté $\psi(u)$ correspond à la probabilité que les réserves deviennent strictement négatives à un instant $t < +\infty$. i.e.,*

$$\psi(u) = P(\inf_{t \geq 0} R(t) < 0 / R(0) = u) = P(\sup_{t \geq 0} (S_t - ct) > u).$$

Le découvert de la compagnie d'assurance est défini par le processus aléatoire $(D_t)_{t \geq 0} = (\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k - ct)_{t \geq 0}$. La constante $\beta = \lambda\mu$ est interprétée comme coût moyen des sinistres par unité de temps. Par conséquent, la constante $\gamma = c - \beta$ définit le chargement de sécurité de la compagnie d'assurance ; elle mesure la rentabilité de la compagnie d'assurance. En effet, il est clair que la ruine ne pouvant intervenir qu'à un instant d'arrivée T_n du $n^{\text{ème}}$ sinistre, alors il suffit de définir la suite de variables aléatoires $(\tilde{D}_n)_{n \geq 0}$ représentant $(D_t)_{t \geq 0}$ à ses temps d'arrivée de sinistres.

$$\tilde{D}_0 = 0 \quad \text{et} \quad n \geq 1, \quad \tilde{D}_n = D_{T_n} = \sum_{k=1}^n Y_k - cT_n.$$

Proposition 5.4.1. [7]

1. Si $\gamma < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{D}_n = +\infty$ p.s., par conséquent, $\psi(u) = 1$.
On dit que l'activité n'est pas rentable.
2. Si $\gamma = 0$, alors $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \tilde{D}_n = -\infty$ p.s. et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \tilde{D}_n = +\infty$ p.s., par conséquent, $\psi(u) = 1$. On dit que l'activité n'est pas rentable.
3. Si $\gamma > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{D}_n = -\infty$ p.s., par conséquent, $\psi(u) < 1$. On dit que l'activité est rentable.

Preuve. Si $\gamma < 0$, le résultat découle de la loi des grands nombres. Si $\gamma = 0$, on remarque que \tilde{D}_n est la somme des n variables aléatoires $(Y_k - c\tau_k)_{1 \leq k \leq n}$ qui sont indépendantes identiquement distribuées et centrées. Lorsque $\gamma > 0$, on introduit le temps d'arrêt $\tau_1 = \inf\{n > 0 : \tilde{D}_n > u\}$ qui est fini p.s. La marche aléatoire $(\tilde{D}_{n+\tau_1} - D_{\tau_1})_{n \geq 0}$ est de même loi que $(\tilde{D}_n)_{n \geq 0}$. Par conséquent, le temps d'arrêt $\tau_2 = \inf\{n > 0 : \tilde{D}_{n+\tau_1} - D_{\tau_1} > u\}$ est fini p.s. On poursuit ce procédé, on montre que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \tilde{D}_n \geq u$, d'où la contradiction.

Soit $\tau(u)$ l'instant de ruine de la compagnie, défini par $\tau(u) = \inf\{t \geq 0; R(t) < 0\}$, avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$, alors une autre fonction de risque qui fait l'objet de nombreux travaux s'agit de la fonction de pénalité de Gerber et Shiu [35]. Cette fonction est définie comme suit.

$$m(u) = E(e^{-\delta} f(R(\tau(u)^-, R(\tau(u)))) I_{\{\tau(u) < +\infty\}} / R(0) = u), \quad (5.38)$$

avec $\delta \geq 0$ est un facteur d'actualisation et $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesure la perte économique, par exemple une sanction financière, liée à la ruine à travers deux quantités : La valeur du processus juste avant la ruine $R(\tau(u)^-)$ et le déficit au moment de la ruine $R(\tau(u))$. Pour $\delta = 0$ et $f(x, y) = 1$, on retrouve la probabilité de ruine sur horizon infini.

Supposons que $\gamma > 0$ et on considère la variable aléatoire $X(u) = \sum_{i=1}^{N(\tau(u))} Y_i - c\tau(u) - u$ représentant la perte nette en cas de ruine. La probabilité de ruine s'exprime en fonction de la transformée de Laplace de la loi de $X(u)$.

Théorème 5.4.1. [53] *Supposons que la transformée de Laplace \mathcal{M}_Y de la loi de Y vérifie la propriété suivante : $\exists z > 0$ tel que $\mathcal{M}_Y(z) - cz/\lambda - 1 = 0$, alors*

$$\psi(u) = e^{-zu} (E(e^{zX(u)} / \tau(u) < +\infty))^{-1}. \quad (5.39)$$

Preuve. Si un tel z existe, alors $(e^{z\tilde{D}^n})_{n \geq 0}$ est une martingale. En particulier, $\forall n \geq 0, E(e^{z\tilde{D}^n}) = 1$. Soit $n > 0$, alors $\tau(u) \wedge n$ est un temps d'arrêt borné et

$$1 = E(e^{z\tilde{D}_{\tau(u) \wedge n}}) = E(e^{z\tilde{D}_{\tau(u)}} I_{\{\tau(u) < n\}}) + E(e^{z\tilde{D}^n} I_{\{\tau(u) \geq n\}}).$$

Par la convergence dominée, la seconde espérance converge vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent,

$$1 = E(e^{z\tilde{D}_{\tau(u)}} I_{\{\tau(u) < +\infty\}}) = e^{zu} E(e^{zX(u)} / \tau(u) < +\infty) P(\tau(u) < +\infty).$$

Dans le cas où les coûts individuels des sinistres $(Y_k)_{k \geq 1}$ sont *i.i.d* de loi exponentielle de paramètre $1/\mu$, la loi de perte nette en cas de ruine est donnée par le résultat suivant.

Lemme 5.4.1. [53] *Sachant que $\tau(u) < +\infty$, la variable $X(u) = \sum_{i=1}^{N(\tau(u))} Y_i - c\tau(u) - u$ représentant la perte nette suit la loi exponentielle de paramètre $1/\mu$.*

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. En utilisant l'indépendance des variables $(Y_k)_{k \geq 1}$ et la propriété de perte de mémoire de la loi exponentielle, on obtient le résultat

$$\begin{aligned} & P(X(u) > y / \tau(u) = n, D_{\tau(u)-1} = x, T_{\tau(u)} - T_{\tau(u)-1} = t) \\ &= P(D_n > y + u / D_0 < u, \dots, D_{n-1} < u, D_n > u, D_{n-1} = x, T_n - T_{n-1} = t) \\ &= P(Y_n > y + u - x + ct / D_0 < u, \dots, D_{n-1} < u, D_{n-1} = x, T_n - T_{n-1} = t, Y_n > u - x + ct) \\ &= P(Y_n > y + u - x + ct / Y_n > u - x + ct) = P(Y_n > y) = e^{-\frac{1}{\mu}y}. \end{aligned}$$

On déduit du théorème 5.4.1 et le lemme 5.4.1, la probabilité de ruine lorsque les coûts individuels des sinistres $(Y_k)_{k \geq 1}$ sont *i.i.d* de loi exponentielle de paramètre $1/\mu$.

Théorème 5.4.2. [53] *Si $(Y_k)_{k \geq 1}$ est de même loi exponentielle de paramètre $1/\mu$, alors la probabilité de ruine $\psi(u)$ sur horizon infini est donnée par*

$$\psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c} \exp \left\{ - \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c} \right) u \right\}. \quad (5.40)$$

Dans le cas où les coûts individuels $(Y_k)_{k \geq 1}$ sont *i.i.d* de même loi du type de Cramér, c'est-à-dire $\exists t > 0$ tel que $M_{X_1}(t) = E(\exp(tX_1)) < +\infty$, alors on a le résultat suivant.

Théorème 5.4.3. [26] *La probabilité de ruine sur horizon infini vérifie*

$$\psi(u) \leq \exp\{-\delta u\}, \quad (5.41)$$

où δ est l'unique solution strictement positive de l'équation $\lambda + ct = \lambda M_{X_1}(t)$.

En théorie de la ruine, on s'intéresse à des phénomènes qui engendrent des pertes extrêmes. Les variables aléatoires sous-exponentielles, en particulier à variations régulières, modélisent les phénomènes type catastrophe naturelle parce qu'il se peut qu'un sinistre met en danger la solvabilité d'une compagnie d'assurance. Supposons que les coûts individuels des sinistres $(Y_k)_{k \geq 1}$ sont *i.i.d* de distribution sous-exponentielle.

Proposition 5.4.2. [26] *Si $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est de distribution sous-exponentielle, alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1. $\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ est sous-exponentielle.
2. Y est sous-exponentielle.
3. $P(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i > x) (P(Y > x))^{-1} \rightarrow \infty$, si $x \rightarrow \infty$.

La proposition 5.4.2 nous permet d'obtenir le comportement asymptotique de la probabilité de ruine lorsque les coûts individuels des sinistres $(Y_k)_{k \geq 1}$ sont *i.i.d* et à variation régulière d'indice $\alpha > 1$.

Théorème 5.4.4. [26] *Si $(Y_k)_{k \geq 1}$ est à variation régulière d'indice $\alpha > 1$, alors la probabilité de ruine sur horizon infini vérifie*

$$\psi(u) \sim \frac{\lambda}{\gamma} \int_u^\infty P(Y > x) dx \sim \frac{\lambda}{\gamma} \frac{1}{\alpha - 1} u^{1-\alpha}, \quad \text{si } u \rightarrow \infty. \quad (5.42)$$

5.4.1 Probabilité de ruine multivariée

Dans certains cas, l'influence du climat, des marchés financiers, de la répression et de prévention routière, ou d'autres paramètres peuvent avoir un impact sur la fréquence de sinistres a priori indépendants les uns des autres. Cela correspond à la modulation du processus d'arrivée des sinistres par un processus représentant l'état de variables d'environnement commun aux branches d'activité. Dans d'autres cas, un événement unique peut induire des sinistres dans plusieurs branches d'activités différentes; ces branches peuvent représenter des filiales différentes, des secteurs d'activité différents (assurance santé, habitation, automobile, responsabilité civile) ou encore des activités, différentes ou identiques, dans différents continents, pays ou régions. Par exemple, pour un accident de voiture, il faut dans certains cas réparer la voiture (branche automobile), indemniser et réparer les dommages causés aux personnes touchées et indemniser le conducteur en cas d'invalidité ou prendre en charge des frais de santé. Ces considérations mènent à considérer l'évaluation

conjointe des richesses de $d > 1$ branches d'activité d'une compagnie d'assurance et donc d'un processus du risque multivarié $(\mathbf{R}(t))_{t \geq 0}$ défini comme suit :

$$\mathbf{R}(t) = u\mathbf{b} + \mathbf{c}t - \sum_{k=1}^{N(t)} \mathbf{Y}_k = u\mathbf{b} + \mathbf{c}t - \mathbf{S}_t. \quad (5.43)$$

1. $(\mathbf{Y}_k)_{k \geq 1}$ est une suite de vecteurs aléatoires *i.i.d* à valeurs dans \mathbb{R}^d représentant les montants des sinistres.
2. $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ modélisant le nombre de sinistres indépendant de $(\mathbf{Y}_k)_{k \geq 1}$.
3. u est le capital initial.
4. $\mathbf{b} : \mathbf{b} \in]0, 1]^d$ et $b^{(1)} + \dots + b^{(d)} = 1$.
5. $u\mathbf{b}$ détermine l'allocation de capital aux différentes branches (la branche j dispose du capital $ub^{(j)}$).
6. $\mathbf{c} \in]0, +\infty[^d$ est le taux de cotisation.

Cai et Li [17] ont donné une représentation de concepts principaux de la probabilité de ruine multivariée.

Définition 5.4.2. *La probabilité de ruine ψ_{sum} que la somme des richesses des branches d'activité devienne négative est définie par*

$$\psi_{sum}(u) = P\left(\inf_{t \geq 0} \sum_{j=1}^d R^{(j)}(t) < 0\right) = P\left(\sup_{t \geq 0} \left(\sum_{j=1}^d (S_t^{(j)} - c^{(j)}t)\right) > u\right). \quad (5.44)$$

La probabilité de ruine ψ_{or} qu'au moins une des branches soit ruinée est donnée par :

$$\psi_{or}(u) = P\left(\bigcup_{j=1}^d \left(\inf_{t \geq 0} R^{(j)}(t) < 0\right)\right) = P\left(\bigcup_{j=1}^d \left(\sup_{t \geq 0} (S_t^{(j)} - c^{(j)}t) > b^{(j)}u\right)\right). \quad (5.45)$$

La probabilité de ruine ψ_{and} que toutes les branches soient ruinées, mais pas forcément au même temps est définie par :

$$\psi_{and}(u) = P\left(\bigcap_{j=1}^d \left(\inf_{t \geq 0} R^{(j)}(t) < 0\right)\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^d \left(\sup_{t \geq 0} (S_t^{(j)} - c^{(j)}t) > b^{(j)}u\right)\right). \quad (5.46)$$

La probabilité de ruine ψ_{sim} que toutes les branches d'activité de la compagnie d'assurance soient dans le rouge à une certaine date est définie par :

$$\psi_{sim}(u) = P(\exists t \geq 0, \forall 1 \leq j \leq d, R^{(j)}(t) < 0). \quad (5.47)$$

Hult et Lindskog [40] ont étudié l'autre probabilité de ruine dans le cas où le transfert des capitaux entre les branches d'activité d'une compagnie d'assurance est autorisé, c'est-à-dire une branche d'activité qui se trouve dans une position confortable au regard de sa solvabilité peut transférer une fraction $\beta \in [0, 1]$ de ses réserves vers d'autres branches d'activités qui sont en position d'insolvabilité. La compagnie d'assurance tombe en ruine si la position d'insolvabilité d'une branche d'activité ne sera résolue par le transfert des capitaux d'autres branches d'activités. L'ensemble de ruine est défini par.

$$\mathcal{F}_\beta = \left\{ x : \beta \sum_{k=1}^d (x^{(k)} \vee 0) < - \sum_{k=1}^d (x^{(k)} \wedge 0) \right\},$$

avec $\vee = \min$ et $\wedge = \max$.

Définition 5.4.3. *La probabilité de ruine multivariée $\psi_{d,\beta}$ est définie comme la probabilité que le processus de risque multivarié $(\mathbf{R}(t))_{t \geq 0}$ appartient à \mathcal{F}_β .*

$$\psi_{d,\beta}(u) = P(\exists t \geq 0, \mathbf{R}(t) \in \mathcal{F}_\beta) = P(\exists t \geq 0, \mathbf{S}_t - \mathbf{c}t \in u\mathbf{b} - \mathcal{F}_\beta). \quad (5.48)$$

Remarque 5.5.

- Pour $\beta = 0$, les transferts des capitaux ne sont pas autorisés et donc $\psi_{d,0} = \psi_{or}$.
- Pour $\beta = 1$, les transferts sont autorisés sans aucune restriction et $\psi_{d,1} = \psi_{sum}$.

Le résultat suivant est important pour étudier le processus de Poisson composé multivarié $S_t = \sum_{k=1}^{N(t)} \mathbf{Y}_k$ et par conséquent le processus de risque multivarié $(\mathbf{R}(t))_{t \geq 0}$.

Proposition 5.4.3. [41] *Soit $(\mathbf{X}_k)_{k \geq 1}$ une suite vecteurs aléatoires i.i.d à valeurs dans \mathbb{R}^d , à variation régulière d'indice $\alpha > 0$ et de mesure limite de Radon μ . Soit $N > 0$ une variable aléatoire discrète indépendante de $(\mathbf{X}_k)_{k \geq 1}$ telle que $\exists \epsilon > 0, \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n)(1 + \epsilon)^n < \infty$, alors $\sum_{k=1}^N \mathbf{X}_k$ est à variation régulière d'indice $\alpha > 0$ et de mesure limite de Radon $\mu E(N)$.*

Hutl et Lindskog [40] ont démontré le résultat suivant pour le comportement asymptotique de la probabilité de ruine où la suite des montants de sinistres $(\mathbf{Y}_k)_{k \geq 1}$ est à variation régulière.

Théorème 5.4.5. [40] *Supposons que $(\mathbf{Y}_k)_{k \geq 1}$ est à variation régulière d'indice $\alpha > 1$, de mesure limite de Radon μ et satisfait $\mathbf{w} = \mathbf{c}/\lambda - E(\mathbf{Y}) \in]0, +\infty[^d$, alors*

$$\psi_{d,\beta}(u) \sim uP(|\mathbf{Y}| > u) \int_0^\infty \mu(v\mathbf{w} + \mathbf{b} - \mathcal{F}_\beta)dv. \quad (5.49)$$

Remarque 5.6. Notons que dans le cas univarié, on a $\mathbf{b} - \mathcal{F}_\beta =]1, +\infty[$. Par conséquent, on obtient facilement le résultat du théorème 5.4.4 pour le comportement asymptotique de la probabilité de ruine. En effet

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{uP(Y > u)} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P(\sup_{t \geq 0} (S_t - ct) > u)}{uP(Y > u)} = \int_0^\infty \mu(]vw + 1, \infty[) dv \\ &= \mu(]1, \infty[) \int_0^\infty (vw + 1)^{-\alpha} dv = \frac{1}{w(\alpha - 1)}. \end{aligned}$$

5.4.2 Probabilité de ruine pour les processus linéaires

Dans cette partie, on étudie le comportement asymptotique de la probabilité de ruine pour un processus linéaire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par

$$X_n = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varphi_{n-j} \varepsilon_j, \quad (5.50)$$

où $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires centrées *i.i.d.* De plus, on suppose que la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est à variation régulière d'indice $\alpha > 1$, c'est-à-dire qu'elle vérifie les conditions suivantes.

$$P(|\varepsilon| > x) \sim x^{-\alpha} \quad \text{si } x \rightarrow \infty, \quad (5.51)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\varepsilon > x)}{P(|\varepsilon| > x)} = p \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(\varepsilon < -x)}{P(|\varepsilon| > x)} = q, \quad (5.52)$$

avec $0 < p \leq 1$ et $p + q = 1$.

Les coefficients φ_j ne sont pas tous nuls et vérifient la condition suivante :

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |j\varphi_j| < \infty. \quad (5.53)$$

Le théorème suivant est une généralisation du résultat de lemme 3.1.3.

Théorème 5.4.6. [55] *Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires centrées i.i.d vérifiant les conditions (5.51) et (5.52). Supposons que les coefficients φ_j vérifient la condition (5.53), alors la série infinie (5.50) converge p.s et $X = X_0$ est à variation régulière d'indice $\alpha > 1$.*

$$\frac{P(X > x)}{P(|\varepsilon| > x)} \sim \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\varphi_j|^\alpha [pI_{\{\varphi_j > 0\}} + qI_{\{\varphi_j < 0\}}] = \|\varphi\|_\alpha^\alpha, \quad \text{si } x \rightarrow \infty. \quad (5.54)$$

Remarque 5.7. Pour une suite de variables aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ *i.i.d* de même comportement de queue que la variable X dans (5.54), on en déduit par le théorème 5.4.4 et le théorème 3.1.1 de Karamata, le comportement asymptotique de la probabilité de ruine comme suit

$$\psi(u) = P\left(\sup_{n \geq 1} (S_n - n\mu) > u\right) \sim \frac{1}{\mu(\alpha - 1)} u P(X > u) \sim \frac{\|\varphi\|_\alpha^\alpha}{\alpha - 1} \frac{1}{\mu} u P(|\varepsilon| > u). \quad (5.55)$$

En raison de la variation régulière de la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, on s'attend à la réalisation de l'événement $\{\sup_{n \geq 1} (S_n - n\mu) > u\}$ par une grande valeur positive ou une petite valeur négative de la variable ε_j . La grande contribution des variables importantes ε_j à l'état de la somme partielle S_n du processus $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ peut être vue de l'expression suivante.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varphi_{k-j} \varepsilon_j = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_j \sum_{k=1-j}^{n-j} \varphi_k.$$

Pour les grandes valeurs positives des variables $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, la contribution de ε_j^+ à la somme partielle S_n est multipliée par le facteur $\sum_{k=1-j}^{n-j} \varphi_k$. Lorsque j prend une petite valeur négative, alors ce facteur est très petit en raison de la condition (5.53). Notons qu'une seule variable ε_j^+ n'apporte pas une grande contribution considérable au comportement des queues des variables du processus $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. En effet, la queue $P(\varepsilon > u)$ de chaque variable ε_j^+ est d'ordre inférieur à celui de $\psi(u)$ dans (5.55), c'est-à-dire la queue $P(\varepsilon > u)$ de ε_j^+ est moins épaisse. De plus, puisque la marche aléatoire $(S_n - n\mu)_{n \geq 0}$ est de dérive négative, alors la contribution de chaque variable ε_j^+ disparaîtra avec le temps. Il est clair que, si les petites valeurs négatives de j ne jouent pas un rôle important, alors les variables importantes de $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont celles dont l'indice est très élevé et dans ce cas le facteur multiplicatif de ε_j^+ devient $\sum_{k=-\infty}^{n-j} \varphi_k$ et la plus grande valeur que peut atteindre ce facteur est

$$m_\varphi^+ = \sup_{-\infty < n < +\infty} \sum_{k=-\infty}^n \varphi_k.$$

On peut appliquer le même raisonnement pour les petites valeurs négatives des variables de la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ en utilisant la notation suivante.

$$m_\varphi^- = \sup_{-\infty < n < +\infty} \sum_{k=-\infty}^n (-\varphi_k),$$

Mikosch et Samorodnitsky [55] montrent que le comportement asymptotique de la proba-

bilité de ruine $\psi(u)$ lorsque u tend vers l'infini est donné par

$$\begin{aligned}
 \psi(u) = P\left(\sup_{n \geq 1} (S_n - n\mu) > u\right) &\sim \sum_{j=1}^{\infty} \left(P(m_{\varphi}^+ \varepsilon_j^+ > u + j\mu) + P(m_{\varphi}^- \varepsilon_j^- > u + j\mu) \right) \\
 &\sim \int_1^{\infty} P(m_{\varphi}^+ \varepsilon^+ > u + y\mu) dy + \int_1^{\infty} P(m_{\varphi}^- \varepsilon^- > u + y\mu) dy \\
 &\sim \frac{m_{\varphi}^+}{\mu} \int_{\frac{u}{m_{\varphi}^+}}^{\infty} P(\varepsilon > y) dy + \frac{m_{\varphi}^-}{\mu} \int_{\frac{u}{m_{\varphi}^-}}^{\infty} P(\varepsilon < -y) dy. \quad (5.56)
 \end{aligned}$$

De plus, une seule variable ε_j de la suite $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ ne joue aucun rôle important dans le comportement asymptotique de la probabilité de ruine $\psi(u)$, alors on peut commencer la sommation dans (5.56) à n'importe quelle valeur de j . En effet, il est clair que le comportement asymptotique de $\psi(u)$ ne dépend pas de la position du premier terme de la somme dans (5.56).

Théorème 5.4.7. [55] *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un processus linéaire défini par (5.50) et supposons que $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ satisfait les conditions (5.51) et (5.52) avec $\alpha > 1$. Supposons que les coefficients φ_n vérifient la condition (5.53), alors le comportement asymptotique de la probabilité de ruine $\psi(u)$ lorsque u tend vers l'infini est donné par*

$$\psi(u) = P\left(\sup_{n \geq 1} (S_n - n\mu) > u\right) \sim \frac{[p(m_{\varphi}^+)^{\alpha} + q(m_{\varphi}^-)^{\alpha}]}{\alpha - 1} \frac{1}{\mu} u P(|\varepsilon| > u) \quad (5.57)$$

$$\sim \frac{[p(m_{\varphi}^+)^{\alpha} + q(m_{\varphi}^-)^{\alpha}]}{\|\varphi\|_{\alpha}^{\alpha}} \frac{1}{\mu(\alpha - 1)} u P(X > u). \quad (5.58)$$

Dans le cas où $p = 1$, c'est-à-dire les queues droites des variables ε_n sont plus épaisses que les queues gauches, on a les résultats suivants.

Corollaire 5.4.1. [55] *Supposons que $p = 1$, $m_{\varphi}^+ > 0$ et posons $\beta_{nj} = \sum_{i=1-j}^{n-j} \varphi_i$, alors $\forall k > -\infty$,*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P\left(\sup_{n \geq 1} \left(\sum_{j=-\infty}^k \varepsilon_j \beta_{nj} - n\mu\right) > u\right)}{u P(\varepsilon > u)} = 0. \quad (5.59)$$

Preuve. Il est clair que

$$p_k = P\left(\sup_{n \geq 1} \left(\sum_{j=-\infty}^k \varepsilon_j \beta_{nj} - n\mu\right) > u\right) \leq P\left(\sum_{j=-\infty}^k |\varepsilon_k| \sum_{i=1-j}^{+\infty} |\varphi_i| > u\right).$$

On pose $\tilde{\varphi} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\varphi_j| < \infty$. Du fait que la condition (5.53) est vérifiée, alors par le théorème 5.4.6, on obtient

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{P_k}{P(\varepsilon > u)} \leq \sum_{j=-\infty}^k \left(\sum_{i=1-j}^{+\infty} |\varphi_i| \right)^\alpha \leq \tilde{\varphi}^\alpha \sum_{j=-\infty}^k \sum_{i=1-j}^{+\infty} [|\varphi_j|/\tilde{\varphi}] < \infty.$$

Ce qui montre le corollaire.

Corollaire 5.4.2. [55] *Supposons que $p = 1$ et $m_\varphi^+ > 0$, alors $\forall k > 0$,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{P\left(\sup_{n \geq 1} \left(-n\mu + \sum_{j=n+k}^{\infty} \varepsilon_j \beta_{nj}\right) > u\right)}{uP(\varepsilon > u)} = 0. \quad (5.60)$$

Preuve. Notons que

$$\begin{aligned} q_k &= P\left(\sup_{n \geq 1} \left(-n\mu + \sum_{j=n+k}^{\infty} \varepsilon_j \beta_{nj}\right) > u\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{j=n+k}^{\infty} |\varepsilon_j| \sum_{i=-\infty}^{n-j} |\varphi_i| > u + n\mu\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{j=k}^{\infty} |\varepsilon_j| \sum_{i=-\infty}^{-j} |\varphi_i| > u + n\mu\right). \end{aligned}$$

Du fait que la condition (5.53) est vérifiée, alors $\exists c > 0$ telle que

$$q_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{j=k}^{\infty} [|\varepsilon_j| - E|\varepsilon_1|] \sum_{i=-\infty}^{-j} |\varphi_i| > u + n\mu - c\right).$$

Par le théorème 5.4.6 et le théorème 3.1.1 de Karamata, on peut vérifier que

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{q_k}{uP(\varepsilon > u)} \leq c \sum_{j=-\infty}^{-k} |j\varphi_j|.$$

On fait tendre k à l'infini. Ceci montre le corollaire.

5.4.3 Probabilité de ruine pour la solution de l'équation aux récurrences stochastique

Rappelons que l'équation aux récurrences stochastique admet une unique solution non-anticipative strictement stationnaire sous les conditions que $(b_t)_{n \in \mathbb{Z}}$ est à variation régulière d'indice $\alpha > 0$ et que $(a_t)_{n \in \mathbb{Z}}$ satisfait la condition $E(a^\alpha) < 1$. En particulier, supposons que $\alpha > 1$, alors $E(b) < 1$, $E(a) < 1$ et $E(X) = E(b)(1 - E(a))^{-1}$. Par conséquent, la loi forte des grands nombre montre que la marche aléatoire $((S_n - E(S_n)) - n\mu)_{n \geq 0}$, avec

$\mu > 0$, a une dérive négative. Dans ces conditions, Konstantinides et Mikosch [49] ont étudié le comportement asymptotique de la probabilité de ruine

$$\psi(u) = P\left(\sup_{n \geq 0} ((S_n - E(S_n)) - n\mu) > u\right),$$

lorsque le capital initial u tend vers l'infini et $\mu > 0$.

Théorème 5.4.8. [49] *Supposons que les conditions du théorème 5.3.1 sont satisfaites et $x_n = nc$, avec $c > 0$ et que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, définie par (5.22), est fortement mélangée et $\exists \gamma > \alpha$ tel que $E(Y^{\gamma+\alpha}) < \infty$, alors $\forall \mu > 0$, on a*

$$P\left(\sup_{n \geq 0} ((S_n - E(S_n)) - n\mu) > u\right) \sim \frac{1}{\mu} \frac{1}{\alpha - 1} E(Y^\alpha) u P(b > u) \quad \text{si } u \rightarrow \infty. \quad (5.61)$$

Remarque 5.8. Le résultat du théorème 5.4.8 est identique au résultat du théorème 5.4.4. En effet, en utilisant le théorème 3.3.4, la relation (5.61) peut être écrite de la manière suivante

$$P\left(\sup_{n \geq 0} ((S_n - E(S_n)) - n\mu) > u\right) \sim (1 - E(a^\alpha)) E(Y^\alpha) \frac{1}{\mu} \frac{1}{\alpha - 1} u^{1-\alpha} \quad \text{si } u \rightarrow \infty. \quad (5.62)$$

Conclusion et Perspectives

Dans ce mémoire, nous avons étudié les équations aux récurrences stochastiques. Nous avons mis l'accent dans un premier temps sur certaines propriétés concernant l'existence de la solution non-anticipative strictement stationnaire à savoir : l'ergodicité, l'existence des moments de la loi stationnaire etc. Dans un second temps, on a donné les principaux résultats sur la variation régulière de la distribution stationnaire et de distributions fini -dimensionnelles. Les processus non linéaires de type ARCH et GARCH sont ensuite étudiées du fait de leur représentation par des équations aux récurrences stochastiques. La dernière partie du mémoire concerne une application à la théorie de la ruine et plus précisément au principe des grandes déviations. Le principe des grandes déviations est appliqué à la probabilité de ruine. La thématique abordée ouvre la voie à de nouvelles pistes de recherche, entre autres : Il serait intéressant, en utilisant les équations aux récurrences stochastiques, d'étudier les propriétés de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance pour des séries chronologiques conditionnellement hétéroscédastiques (normalité, convergence en probabilité), d'élargir l'étude à certains types de modèles spécifiques comme les modèles de branchement. Le principe des grandes déviations en théorie de la ruine est aussi une nouvelle piste de recherches : comme par exemple de déterminer des bornes de la probabilité de ruine convergent rapidement.

Bibliographie

- [1] Babillot, M., Bougerol, P., and Elie, L. (1997) The random difference equation $X_n = A_n X_{n-1} + B_n$ in the critical case. *Ann. Probab.* Vol. 25, No. 1, 478-493.
- [2] Barbe, Ph., and Ledoux, M. (2007) *Probabilité*. EDP sciences, Les Ulis Cedex A, France.
- [3] Basrak, B., Davis, R. A., and Mikosch, T. (2002) A characterization of multivariate regular variation. *Anna. Appl. Probab.* Vol. 12, No. 3, 908–920.
- [4] Basrak, B., Davis, R. A., and Mikosch, T. (2002) Regular variation of GARCH processes. *Stochastic. Process. Appl.*, Vol. 99, 95-115.
- [5] Basrak, B. (2000) *The sample autocorrelation function of non-linear time series*. PhD thesis, University of Groningen.
- [6] Berkes, I., Horvath, L., and Kokoszka, P. (2003a) GARCH processes : structure and estimation. *Bernoulli* 9, 201–227.
- [7] Biard, C. (2010) *Dépendance et événements extrêmes en théorie de la ruine : étude univariée et multivariée, problèmes d'allocation optimale*. PhD thesis, Université Claude Bernard Lyon I.
- [8] Billingsley, P. (1965) *Ergodic theory and information*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [9] Billingsley, P. (1968) *Convergence of probability measures*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [10] Billingsley, P. (1968) *Probability and Measure*, third edition. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [11] Bingham, N. H., Goldie, C. M., and Teugels, J. L. (1987) *Regular variation*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [12] Bollerslev, T. (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *J. Econometrics*. Vol. 31, No. 3, 307-327.

- [13] Bougerol, P., and Picard, N. (1992) Strict stationarity of generalized autoregressive processes. *Ann. Probab.* Vol. 20, No. 4, 1714-1730.
- [14] Bourbaki, N. (2007) *Éléments de mathématique, topologie générale*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [15] Brandt, A. (1986) The stochastic equation $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ with stationary coefficients. *Adv. in Appl. Probab.* 18, 211-220.
- [16] Breiman, L. (1965) On some limit theorems similar to the arc-sin law. *Theory Probab. Appl.* 10, 323-331.
- [17] Cai, J., and Li, H. (2005) Multivariate risk model of phase type. *Insurance : Mathematics and Economics*, 36(2) : 137-152.
- [18] Cai, J., and Li, H. (2007) Dependence properties and bounds for ruin probabilities in multivariate compound risk models. *Journal of Multivariate Analysis*, 98(4) :757-773.
- [19] Daley, D. J., and Vere-Jones, D. (2003) *An introduction to the theory of point processes : Elementary theory and methods*. Vol 1. Second edition. Springer-Verlag, New York.
- [20] Davis, R. A., and Resnick, S, I. (1996) Limit theory for bilinear processes with heavy-tailed noise. *Anna. Appl. Probab.* Vol. 6, No. 4, 1191-1210.
- [21] Davis, R. A., and Mikosch, T. (2005) *Limit theory for some non-linear times séries models including GARCH and stochastic volatility models*. Colorado state University and University of Copenhagen.
- [22] Davis, R. A., and Mikosch, T. (1998) The sample autocorrelations of heavy-tailed processes with applications to ARCH. *Annals of statistics*. Vol. 26, No. 5, 2049-2080.
- [23] Dembo, A., and Zeitouni, O. (2010) *Large deviations techniques and applications*, second edition. Springer-Verlag, New York.
- [24] De Saporta, B. (2004) *Étude de la solution stationnaire de l'équation $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ à coefficients aléatoires*. PhD thesis, Université de Rennes 1.
- [25] Embrechts, P., Goldie, C. M., and Veraverbeke, N. (1979) Subexponentiality and infinite divisibility. *Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* 49, 335-347.
- [26] Embrechts, P., Klüppelberg, C., and Mikosch, T. (1997) *Modelling extremal events for Insurance and Finance*. Springer-Verlag, New York.
- [27] Engle, R. F. (1982) Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*. Vol. 50, No. 4, 987-1008.

- [28] Foata, A., and Fuchs, A. (2003) *Calcul des probabilités. Cours, exercices et problèmes corrigés*. second edition. Dunod, Paris.
- [29] Francq, C., and Zakoïan, J, M. (2008) A tour in the asymptotic theory of GARCH estimation. In T.G. Andersen, R.A. Davis, J.P. Kreiss and T. Mikosch (eds), *Handbook of Financial Time Series*. Springer-Verlag, Berlin.
- [30] Francq, C., and Zakoïan, J, M. (2004) Maximum likelihood estimation of pure GARCH and ARMA-GARCH processes. *Bernoulli* 10(4), 605–637.
- [31] Francq, C., and Zakoïan, J, M. (2010) *GARCH Models, Structure, Statistical inference and financial applications*. John Wiley and Sons, Ltd, Publication.
- [32] Furstenberg, H., and Kesten, H. (1960) Products of random matrices. *Ann. Math. Statist.* Vol. 31, No. 2, 457-469.
- [33] Fryzlewicz, P., and Rao, S, S. (2011) Mixing properties of ARCH and time-varying ARCH processes. *Bernoulli* 17(1), 320–346.
- [34] Gaier, J., Grandits, P., and Schachermayer, W. (2003) asymptotic ruin probabilities and optimal investment. *Ann. Appl. Probab.* Vol. 13, No. 3, 1054–1076.
- [35] Gerber, H. U., and Shiu, E. S. W (2005) On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal* 2(1),48–78.
- [36] Goldie, C. M. (1991) Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations. *Ann. Appl. Probab.* Vol. 1, No. 1, 126-166.
- [37] Grey, D. R. (1994) Regular variation in the tail behaviour of solutions of random difference equations. *Anna. Appl. Probab.* Vol. 4, No. 1, 169-183.
- [38] Grincevičius, A. K. (1975) One limit distribution for a random walk on the line. *Lithuanian. Math.* Vol. 15, 580-589.
- [39] Hörmann, S. (2008) Augmented GARCH sequences : Dependence structure and asymptotics. *Bernoulli* 14(2), 543–561.
- [40] Hult, H., Lindskog, F. (2006) Heavy-tailed insurance portfolios : buffer capital and ruin probabilities. School of ORIE, Cornell University.
- [41] Hult, H., Lindskog, F. (2006) On regular variation for infinitely divisible random vectors and additive processes. *Adv. in Appl. Probab.* Vol. 38, No. 1, 134–148.
- [42] Hult, H., Lindskog, F., Mikosch, T ., and Samorodnitsky, G. (2005) Functional large deviations for multivariate regularly varying random walks. *Anna. Appl. Probab.* Vol. 15, No. 4, 2651–2680.

- [43] Jessen, A. H., and Mikosch, T. (2006) Regularly varying functions. Publications de l'institut Mathématique. Nouvelle série. Tome 80(94), 171-192.
- [44] Jones, G. L. (2004) On the Markov chain central limit theorem. *Probability Surveys*. Vol. 1, 299-320.
- [45] Karlin, S., and Taylor, H. (1975) *A first course in stochastic processes*, second edition. Academic press, New York.
- [46] Kesten, H. (1973) Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. *Acta Math.* 131, 207–248.
- [47] Kingman, J. F. C. (1973) Subadditive ergodic theory. *Ann. Probab.* Vol. 1, No. 6, 883-909.
- [48] Kirchgässner, G., and Wolters, J. (2007) *Introduction to modern time series analysis*. Springer-Verlag, Berlin.
- [49] Konstantinides, D., and Mikosch, T. (2005) Large deviations and ruin probabilities for solutions to stochastic recurrence equations with heavy-tailed innovations. *Ann. Probab.* Vol. 33, No. 5, 1992-2035.
- [50] Koralov, L. B., and Sinai, Y.G. (2000) *Theory of probability and random processes*, second edition. Springer-Verlag, New York.
- [51] Li, C. (2007) On estimation of GARCH models with an Application to nordea stock prices. Project Report.
- [52] Loisel, S. (2004) *Contribution à l'étude de processus univariées et multivariées de la théorie de la ruine*. PhD thesis, Université Lyon 1.
- [53] Loisel, S. (2010) *Contribution à la gestion quantitative des risques en assurance*. Habilitation, Université Lyon 1.
- [54] Meyn, S., and Tweedie, R. L. (2009) *Markov chains and stochastic stability*, second edition. Cambridge University Press, Cambridge.
- [55] Mikosch, T., and Samorodnitsky, G. (2000) The supremum of a negative drift random walk with dependent heavy-tailed steps. *Ann. Appl. Probab.* Vol. 10, No. 3, 1025-1064.
- [56] Mikosch, T., and Stărică, C. (2000) Limit theory for the sample autocorrelations and extremes of a GARCH(1,1) process. *Annals of statistics*. Vol. 28, No. 5, 1427–1451.
- [57] Nagaev, S. V. (1979) Large deviations of sums of independent random variables. *Ann. Probab.* Vol. 7, No. 5, 745-789.

- [58] Nelson, D. B. (1990) Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model. *Econometric Theory*. Vol. 6, 318-334.
- [59] Nummelin, E., and Tweedie, R. L. (1997) Geometric ergodicity and R -positivity for general markov chains. *Ann. Probab.* Vol. 6, No. 3, 404-420.
- [60] Petrov, V. V. (1995) *Limit theorems of probability theory*. Oxford University Press, Oxford.
- [61] Posedel, P. (2005) Properties and Estimation of GARCH(1,1) Model. *Metodološki zvezki*. Vol. 2, No. 2, 243-257.
- [62] Resnick, S. I. (1992) *Adventures in stochastic processes*. Birkhäuser, Boston.
- [63] Resnick, S. I. (1987) *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes*. Springer-Verlag, New York.
- [64] Resnick, S. I. (2006) *Probabilistic and Statistical Modeling of Heavy Tailed Phenomena*. Springer-Verlag, New York.
- [65] Rossi, E. (2006) *Lecture notes on GARCH models*. University of Pavia
- [66] Saidi, Y. (2003) *Étude probabiliste et statistique de modèles conditionnellement hétéroscédastiques non linéaires*. PhD thesis, Université Lille 3.
- [67] Saidi, Y., and Zakoian, J. M. (2006) Stationarity and geometric ergodicity of a class of non-linear ARCH models. *Ann. Appl. Probab.* Vol. 16, No. 4, 2256-2271.
- [68] Schmidli, H. (2002) On minimizing the ruin probability by investment and reinsurance. *Ann. Appl. Probab.* Vol. 12, No. 3, 890–907.
- [69] Scotto, M.G., and Turkman, K. F. (2002) On the extremal behavior of sub-sampled solutions of stochastic difference equations. *Portugaliae mathematica*. Vol. 59, 267-282.
- [70] Straumann, D., and Mikosch, T. (2006) Quasi-maximum-likelihood estimation in conditionally heteroscedastic times séries : A Stochastic recurrence equations approach. *Annals of statistics*. Vol. 34, No. 5, 2449-2495.
- [71] Straumann, D. (2004) *Estimation in Conditionally Heteroscedastic Time Series Models*. Springer-Verlag, Zürich, Switzerland.
- [72] Tsay, R. S. (2002) *Analysis of financial time series*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [73] Tsay, R. S. (2005) *Analysis of financial time series*, second edition. John Wiley and Sons, Inc., New Jersey.

- [74] Vervaat, W. (1979) On a stochastic difference equation and a representation of non-negative infinitely divisible random variables. *Adv. in Appl. Probab.* 11, 750-783.

