



N^o d'ordre : 03/2003-M/MT

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
(U.S.T.H.B)

FACULTE DE MATHEMATIQUES
DEPARTEMENT DE RECHERCHES OPERATIONNELLES

THESE

Présentée
Pour l'obtention du grade de

MAGISTER

EN MATHEMATIQUE
Spécialité : RECHERCHES OPERATIONNELLES

Méthodes stochastiques

Par

BOUSLAH AICHA

THEME

**Les équations différentielles stochastiques en finance :
Conception d'une règle de décision pour un investissement productif**

SOUTENUE LE : 17/02/2003

DEVANT LE JURY COMPOSE DE :

BENTARZI M	: Professeur	USTHB	, Président.
BOUKHETALA K	: Maître de conférence	USTHB	, Directeur de thèse.
AISSANI A	: Professeur	USTHB	, Examineur.
AISSANI D	: Professeur	USTHB	, Examineur.

TABLE DES MATIERES

Introduction.....	Erreur ! Signet non défini.
Chapitre I: Rappel et notion de base	
I. Intégrale stochastique et Equation Différentielle stochastique :..	Erreur ! Signet non défini.
1. Théorie de la mesure :	Erreur ! Signet non défini.
Définition 1 : (espace mesurable).....	Erreur ! Signet non défini.
Définition 2 : (application mesurable)	Erreur ! Signet non défini.
Définition 3 : (mesure)	Erreur ! Signet non défini.
2. Intégrales:	Erreur ! Signet non défini.
2.1. Intégrale de Riemann ordinaire :	Erreur ! Signet non défini.
Définition 4 :	Erreur ! Signet non défini.
2.2. Intégrale de Riemann-Stieltjes :	Erreur ! Signet non défini.
Définition 5 :	Erreur ! Signet non défini.
3. Généralité sur les processus à temps continus :	Erreur ! Signet non défini.
3.1. Processus stochastique :	Erreur ! Signet non défini.
Définition 6 : (processus aléatoire à temps continue)	Erreur ! Signet non défini.
3.2. Exemple de processus aléatoires continus :	9
Définition 7 : (filtration).....	Erreur ! Signet non défini.
Définition 8 :	Erreur ! Signet non défini.
4. Mouvement Brownien :	Erreur ! Signet non défini.
Définition 9 :	Erreur ! Signet non défini.
Définition 10 :	Erreur ! Signet non défini.
5. martingales :	Erreur ! Signet non défini.
6. Temps d'arrêt :	Erreur ! Signet non défini.2
Définition 11 :	Erreur ! Signet non défini.2
proposition 1:.....	Erreur ! Signet non défini.
7. Intégrale stochastique :	Erreur ! Signet non défini.
Définition 12 :	Erreur ! Signet non défini.3
proposition 2 :	Erreur ! Signet non défini.
proposition 3:.....	Erreur ! Signet non défini.
8. processus de diffusion :	Erreur ! Signet non défini.5
9. calcul d'Itô :	Erreur ! Signet non défini.
Définition 13 :	Erreur ! Signet non défini.
proposition 4:.....	Erreur ! Signet non défini.
Théorème 1:.....	Erreur ! Signet non défini.
Exemple d'utilisation de la formule d'Itô :	Erreur ! Signet non défini.
10. Solution faible et forte d'une E.D.S :	Erreur ! Signet non défini.
Théorème 2:.....	Erreur ! Signet non défini.0
Exemple :	Erreur ! Signet non défini.
II. Approche numérique et simulation des EDS :	Erreur ! Signet non défini.
1. Méthode de discrétisation :	Erreur ! Signet non défini.2
2. critère de convergence :	Erreur ! Signet non défini.
2.1. Critère de convergence fort :	Erreur ! Signet non défini.3
Théorème 1:.....	Erreur ! Signet non défini.3

2.2. Critère de convergence faible :	Erreur ! Signet non défini.
3. La formule stochastique de TAYLOR :	Erreur ! Signet non défini.
4. Approximation forte des processus d'Itô :	Erreur ! Signet non défini.8
4.1. Approximation forte de Taylor :	Erreur ! Signet non défini.8
Lemme1	29
Lemme2	29
Proposition 1 :	29
Proposition 2 :	30
Proposition 3 :	31
4.2. Approximation forte de Runge-kutte :	32
5. Approximation faible des processus d'Itô :	33
5.1. Approximation faible de Taylor :	33
5.2. Approximation faible de Runge-Kutta :	33
6. Simulation :	34
7. Algorithmes et simulation d'une variable aléatoire :	35
7.1. Simulation d'une loi uniforme sur [0,1] :	35
7.2. Simulation des variables gaussiennes :	36
8. Simulation de processus stochastique :	37
8.1. Simulation d'un mouvement brownien :	37
8.2. Simulation des équations différentielles stochastiques :	38
Exemple d'application :	39
CONCLUSION :	40

Chapitre II : Calcul stochastique appliqué à la finance

I. calcul stochastique appliqué à la finance :	43
1.modèles discret :	43
Définition 1:(option)	43
Définition 2 : (Les actifs financiers)	44
Définition 3 : (Les stratégies financières)	45
Définition 4 : (stratégie admissible)	46
Définition 5 : (stratégie d'arbitrage).	46
1.1. Martingales et arbitrages :	46
Définition 6 : (Martingales).	46
Définition 7 : (marché viable)	47
Théorème 1 :	47
1.2. Marché complet et évaluation des options :	47
1.Marché complet :	47
Définition 8 :	47
Définition 9 : (marché complet)	48
Théorème 2 :	48
2.Modèles à temps continu :	49
2.1-Martingales à temps continus :	49
Proposition 1:	49
Théorème 3 :	Erreur ! Signet non défini.
2.2- Modèle de Black et Scholes :	51
2.2.1- Description du modèle :	51
2.3- Modèles de taux d'intérêt :	53
Conclusion :	54

Chapitre III: détermination de l'investissement productif

I. description du modèle étudié :	57
1. Investissement incertain irréversible d'incertitude technique :	57
1.1. Investissement incertain:	57
1.2. Investissement irréversible :	57
1.3. Investissement incertain technique :	58
Problématique :	58
2. description du modèle de base :	58
3. Investissement productif :	59
II . Détermination de la loi de Probabilité des Instants de Premier Passage :	60
Définition 1 :	Erreur ! Signet non défini. 0
Théorème 1 : (pour la démonstration voir [11]).	61
Proposition 1 :	64
conclusion :	64
III. Détermination de la forme explicite de l'investissement productif :	65
Définition 2 :	65
Lemme 1 :	65
Lemme 2 :	66
Lemme 3 :	69
Proposition 2 :	70
Lemme 4 :	72
Lemme 5:	73
Proposition 3 :	74
conclusion :	75
IV - Estimation du paramètre β par la méthode du maximum de vraisemblance :	75
4.1 constructions de la structure statistique :	75
Définition 3 :	76
Définition 4 :	76
Théorème 2 :	76
Théorème 3 :	77
4.2- Existence et unicité de la solution du système (I) :	77
4.3- Structure statistique et problème d'estimation :	79
Proposition 4 :	79
4.4 – Estimation du paramètre β par la méthode du maximum de vraisemblance :	80
Proposition 5 :	81
conclusion :	Erreur ! Signet non défini.

Chapitre IV: simulation de l'investissement productif et application

1. Estimation de l'investissement productif :	Erreur ! Signet non défini.
Proposition 1 :	Erreur ! Signet non défini.
Remarque 1 :	Erreur ! Signet non défini.
2.Programme de simulation :	Erreur ! Signet non défini. 8
étape (1) : (détermination de la solution de l'équation $F(x)=0$) ..	Erreur ! Signet non défini. 8
Etape 2 : (simulation des trajectoires X_t) ..	88
Etape 3 : (simulation des temps d'arrêt).....	Erreur ! Signet non défini. 0
estimation non paramétrique des instants de premier passage.....	90
Etape 4 : (simulation de l'estimateur de l'investissement productif).....	91
Etape 5 : (simulation de l'investissement productif théorique).....	Erreur ! Signet non défini. 3
Commentaire 1 :	Erreur ! Signet non défini. 4
3.estimation de l densité du noyau pour l'I.P estimé et théorique :	94
Commentaire 2 :	95

4.Application des tests :	96
Commentaire 3 :	97
Conclusion.....	98
Annexe :	99
1/fonctions cylindriques :.....	99
a/fonction de BESSEL :	99
b/ équation de LOMMEL :.....	99
Relations entre les fonctions de Bessel modifiées :	99
Développements en séries :.....	99
Relations de récurrence et formules de dérivation :.....	100
Comportement asymptotique pour $x \rightarrow \infty$:	100
2/ test de Komogorov-Smirnov :.....	100
3. méthode du noyau :	Erreur ! Signet non défini.1
BIBLIOGRAPHIE :	Erreur ! Signet non défini.2

Introduction

Beaucoup de phénomènes physiques peuvent être décrits mathématiquement par des équations différentielles. Pourquoi n'en serait-il pas le cas en finance ou en gestion ?

C'est ainsi que les spécialistes de la finance ont en effet eu recours, depuis quelques années, à des outils mathématiques plus sophistiqués pour la modélisation de différents phénomènes économiques tels que : obligation, action, option, taux d'investissement...etc.

Ces modèles économiques sont exprimés sous forme d'équations différentielles stochastiques (EDSs). Jusqu'à présent, aucun modèle, dans le monde de la finance n'a pu s'imposer à l'exception du modèle de Black Sholes qui utilise le calcul stochastique, en l'occurrence les EDSs, pour modéliser le prix d'une option européenne.

C'est ainsi que les équations différentielles stochastiques ont trouvé, dans le domaine de l'économie et de la gestion un champ d'application plus vaste, étant donné qu'elles contiennent un terme aléatoire qui exprime l'imprévisibilité de l'univers économique, reflétant au mieux le phénomène modélisé, Et cela à l'aide du processus mouvement brownien, considéré comme un processus à accroissement indépendant, stationnaire, à trajectoires continues.

Les taux d'investissements à court terme sont aussi modélisés à l'aide des EDSs. Dans cette thèse nous développons une règle de décision pour un investisseur afin qu'il puisse décider de continuer ou d'abandonner son projet d'investissement à un certain temps 't', sachant que le coût actualisé de son projet X_t est un processus de diffusion solution d'une EDS exprimée en fonction du taux interne d'investissement I_t . Cette règle s'effectue en calculant la valeur de l'investissement productif noté $F(x)$ ($X_0=x$), qui est définie en fonction du taux d'investissement I_t et de la variable aléatoire τ « temps d'arrêt ».

La détermination de l'investissement productif est d'une grande importance, car elle permet à l'investisseur de calculer à n'importe quel

instant la valeur qu'il doit ajouter pour achever son projet, et de pouvoir décider de continuer ou d'abandonner le projet selon la règle tirée.

Dans le premier chapitre, nous commençons par présenter, par l'usage des définitions et des démonstrations théoriques les principaux concepts mathématiques abordés tout au long de notre étude, à savoir : mouvement brownien, processus de diffusion, martingale, temps d'arrêt, intégrales stochastiques, calcul d'Itô.

En plus des définitions, nous essayerons d'expliquer et d'éclaircir au mieux ces outils mathématiques, et ce en les illustrant éventuellement par différents exemples d'application, afin de rendre plus facile la compréhension et l'assimilation de ces concepts. Notons juste qu'au début de cette partie, il sera question de quelques notions élémentaires de la théorie de la mesure. Cela se justifie du fait que, la construction de l'intégrale stochastique fait appel à un changement de la mesure d'intégration habituelle par une nouvelle mesure.

La détermination de la solution exacte X_t d'une EDS est très difficile à déterminer surtout lorsque la partie aléatoire est exprimée en fonction du processus X_t , c'est ainsi qu'on se tourne vers la résolution numérique de l'EDS dont la base est fondée sur la discrétisation du temps. Nous présenterons, alors, l'approche numérique, en citant les principaux schémas qui la concernent et qui permettent d'approcher les solutions exactes de ces EDSs. Nous illustrerons par un exemple d'application.

Dans la deuxième partie, nous introduirons plusieurs notions financières nécessaires pour la modélisation des différents modèles de taux d'investissement. Nous aborderons en outre, tout d'abord les modèles financiers discrets qui reposent sur la théorie des options, ensuite les modèles continus. En particulier le modèle de Black et Sholes.

Dans le troisième chapitre, nous introduirons le modèle principal de notre recherche qui est sous forme d'une EDS admettant le processus X_t (ce processus représente le coût actualisé à l'instant 't') comme solution. Cette équation est exprimé en fonction du taux interne d'investissement I_t supposée déterministe prenant des valeurs dans l'intervalle $[0,1]$ qui est incertain irréversible d'incertitude technique (ces notions seront bien expliqué dans ce chapitre). Nous aborderons en outre, l'investissement productif qui est une fonction du taux d'investissement et de la variable aléatoire temps d'arrêt.

La détermination d'une forme explicite de l'investissement productif, nécessite la détermination de la loi de probabilité de la variable aléatoire temps d'arrêt « τ », ainsi que l'estimateur du paramètre β de l'EDS par la méthode du maximum de vraisemblance.

Enfin, dans le quatrième chapitre, nous utiliserons la forme explicite $F(x)$ trouvé dans le chapitre 3 pour l'implémentation d'un programme informatique constitué de plusieurs étapes. Nous utiliserons des tests statistiques pour ajuster les résultats trouvés par simulation. La méthode non paramétrique de l'estimation de densité, dite « méthode du noyau », est utilisée pour estimer la densité de la variable aléatoire τ . Il est à noter que pour tous nos programmes, nous utiliserons le logiciel MATLAB, les tests seront effectués par le logiciel SPSS.

Le but de ce chapitre est de donner, en première partie une brève présentation des notions élémentaires de la théorie de la mesure, nécessaires à la construction de la notion «intégrale». Plusieurs intégrales parmi les plus courantes, seront donc définies, et ce en présentant leur mesure associée.

Ceci aboutira à la construction de l'intégrale stochastique (I.S), qui sera développée et explicitée. Mais avant d'entamer l'I.S, il sera question de plusieurs concepts mathématiques tels que : Processus aléatoires (à temps continus), martingales et, mouvement brownien qui est incontournable pour l'introduction aux processus de diffusion et aux processus d'itô (qui sont des processus aléatoires, dont la construction est basée sur les martingales). Ces processus interviennent souvent dans l'approche de plusieurs phénomènes réels, en particulier dans le monde de la finance.

La construction de l'intégrale stochastique implique la construction des «équations différentielles stochastiques » (EDS) admettant sous certaines conditions le processus d'itô solution unique. Bien sûr tout cela sera bien détaillé dans la première partie de ce chapitre.

Dans la deuxième partie, on exposera l'approche numérique des EDSs en citant les principaux schémas qui la concerne et qui permettent justement d'approcher les solutions de ces EDSs lorsque la solution exacte est difficile à déterminer. A la fin, on traitera un exemple par simulation sur ordinateur, concernant un modèle de taux interne d'investissement.

I. Intégrale stochastique et Equation Différentielle stochastique :

L'intégrale stochastique est la base des modèles d'actifs financiers et de taux d'investissement en finance.

Dans ce but nous exposons tout d'abord quelques notions élémentaires de la théorie de la mesure nécessaire à la conception de la notion mathématique dite « intégrale ».

1. Théorie de la mesure :

Le paragraphe qui suit est une présentation de la théorie dite : «Théorie de la mesure et de l'intégration ». Nous passerons en revue, dans ce même paragraphe, par les définitions des outils élémentaires relatifs à la notion d'intégrale, munies, quand cela est nécessaire, de justification théorique.

L'intégrale sera donc définie au sens large, afin d'aboutir à la construction de l'intégrale stochastique, qui constitue le but ultime de ce chapitre.

Définition 1 : (espace mesurable)

Soit E un espace quelconque d'éléments et soit ξ une tribu des parties de E, alors la structure (E, ξ) est dite **espace mesurable**.

Définition 2 : (application mesurable)

Soit (E, ξ) et (F, ζ) deux espaces mesurables, une application :

$X : (E,\xi) \rightarrow (F,\zeta)$ est dite mesurable (ou encore ξ -mesurable) si :

$$\forall b \in \zeta, X^{-1}(b) \in \xi$$

ou : $X^{-1}(b) = \{e \in E / X(e) \in F\}$

Définition 3 : (mesure)

Soit E un espace quelconque d'éléments x, supposons qu'au sous-ensemble variable $A \subset E$, on fait correspondre un nombre réel $m(A)$ de telle sorte que :
Si $\{A_1, A_2, \dots, A_k, \dots\}$ est une famille finie ou dénombrable de sous-ensembles disjoints de E, on a :

$$m\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k m(A_k)$$

On dit alors que la fonction $m(\cdot)$ est **complètement additive**.

Supposons que la fonction d'ensemble est complètement additive et en outre que :

1- le nombre $m(A)$ est positif ou nul pour $A \subset E$.

$m(\emptyset)=0$. (où \emptyset désigne le sous-ensemble vide de E)

On dit alors que $m(\cdot)$ est une **mesure** sur E .

Si $m(E) < +\infty$, la mesure $m(\cdot)$ est bornée.

Remarque :

1) Pour $E = \mathfrak{R}$ l'ensemble des nombres réels, supposons que pour toute partie $A=[a,b]$ de \mathfrak{R} avec a, b sont des nombres réels tels que $a \leq b$, on fait correspondre une mesure sur \mathfrak{R} .

Cette mesure est souvent connue sous le nom de mesure de « lebegue ».

2) Soit A une partie de E telle que $m(A)=0$, alors A est dit de mesure nulle (ou encore un ensemble négligeable).

3) Soit $f(\cdot)$ une relation (ou propriété) quelconque relative aux éléments de E , si cette propriété est vérifiée, excepté sur des ensembles de mesure nulle, on dit alors que la propriété $f(\cdot)$ est vérifiée **presque partout** et on écrit

$$f(\cdot) \quad \mathbf{m.p.p}$$

dans le cas d'une mesure P de probabilité définie sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}) on dit que la propriété est vérifiée en **probabilité presque sûrement** et on écrit :

$$f(\cdot) \quad \mathbf{P.ps}$$

Cette notion de mesurabilité, nous emmène à définir la notion d'intégrale, en particulier l'intégrale dite « Riemann », que nous introduirons dans le paragraphe suivant :

2. Intégrales:

2.1. Intégrale de Riemann ordinaire :

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle x , définie sur l'espace des nombres réels \mathfrak{R} et munie de la mesure de lebegue. Considérons un intervalle fini $[a,b]$ de \mathfrak{R} . On peut donc associer à celle-ci un nombre réel I qu'on appelle intégrale de f par rapport à la mesure de lebegue sur $[a,b]$ et qu'on définit à travers la construction suivante :

Soit $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ en $n+1$ points équidistants, i.e. $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$; $x_i - x_{i-1} = (b-a)/n$ soit ξ_i un point arbitraire de

$[x_i, x_{i+1}]$ et posons :

$$I(n) = \sum_{i=0}^n f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Si f satisfait à certaines conditions mais assez larges, en particulier si f est continue sur $[a,b]$ on dit alors dans ce cas que f est intégrable, et on démontre qu'il existe un nombre réel I , indépendant de la subdivision choisie tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I(n) = I$$

Définition 4 :

Le nombre I est dit intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$ et on note :

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

2.2. Intégrale de Riemann-Stieltjes :

Soit $f(\cdot)$ une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ et $\lambda(\cdot)$ Une fonction numérique réelle de $x \in \mathfrak{R}$, on définit dans la suite l'intégrale de Riemann-Stieltjes de $\lambda(\cdot)$ par rapport à la fonction $f(\cdot)$.

La construction de cette intégrale, très analogue à celle de l'intégrale de Riemann ordinaire s'obtient de la manière suivante :

Soit d'abord $[a,b]$ un intervalle finie, fermé, soit aussi H une subdivision de $[a,b]$ En un nombre finie, soit n , intervalle partiel délimité par $n+1$ points de division x_0, x_1, \dots, x_n distincts et supposés numérotés par valeurs croissantes, avec $x_0=a$ et $x_n=b$, appelons modul de H le nombre μ définie par :

$$\mu = \sup_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{j-1}) \quad \text{Pour chaque } j (1 \leq j \leq n).$$

Choisissant arbitrairement sur l'intervalle $[x_{j-1}, x_j]$ une abscisse ζ_j , et posons

$$I(H) = \sum_{j=1}^n \lambda(\zeta_j) [f(x_j) - f(x_{j-1})]$$

on suppose que $\lambda(\cdot)$ est continue, on démontre alors qu'il existe I indépendant de $I(H)$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \eta > 0, \forall \mu < \eta : |I(H) - I| < \varepsilon$$

Définition 5 :

Le nombre I ainsi obtenu, est par définition l'intégrale de Riemann-Steilejis noté :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x) df(x)$$

Après avoir brièvement abordé l'idée essentielle concernant la notion d'intégrale et de la mesure, on introduit, la notion d'IS dont la construction est basée sur le processus mouvement brownien. Mais tout d'abord nous définissons les processus aléatoires à temps continus.

3. Généralité sur les processus à temps continus :

3.1. Processus stochastique :

Définition 6 : (processus aléatoire à temps continue)

On appelle processus stochastique à temps continu et à valeurs dans un espace muni d'une tribu \mathcal{F} , une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans (E, \mathcal{F}) [dans la pratique l'indice t représente le temps] donc $T = \mathcal{R}^+$.

Un processus stochastique peut être vu aussi comme une fonction aléatoire mesurable définie comme suit :

$$\begin{aligned} X &: \mathcal{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathcal{R} \\ (t, \omega) &\rightarrow X(t, \omega) \end{aligned}$$

Le processus $X(t, \omega)$ décrit l'évolution chronologique du comportement aléatoire d'un phénomène. Abusivement, il est parfois noté $X(t)$ ou X_t .

3.2. Exemple de processus aléatoires continus :

Processus de POISSON :

Un processus X_t est de poisson de paramètre $\lambda > 0$ s'il vérifie :

- * $X_0 = 0$ P.p.S.
- * $X_t - X_s$ suit une loi de poisson de paramètre $\lambda(t-s)$ $t > s$.

$$P(X_t = k) = \frac{(\lambda(t-s))^k e^{-\lambda(t-s)}}{k!} \dots\dots(1.1)$$

- $E(X_t) = \lambda t$; $\text{var}(X_t) = \lambda t$
- $\forall t_i < t_j < t_k < t_l$: $X_{t_j} - X_{t_i}$; $X_{t_l} - X_{t_k}$: sont indépendants

Par ailleurs, on peut définir les processus aléatoires en faisant appel à la notion dite «filtration».

Définition 7 : (filtration)

Soit (Ω, A, P) un espace de probabilité, une filtration $(F_t)_{t \geq 0}$ est une famille croissante de sous tribu de A . la tribu F_t représente l'information dont on dispose à l'instant 't'.

Définition 8 :

On dit qu'un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est adapté à F_t si pour chaque t , X_t est F_t -mesurable.

D'une autre façon : la filtration est la description mathématique de l'ensemble d'information dont l'observateur dispose à l'instant t . cette information permet à cet observateur d'attribuer des probabilités de manière cohérente aux événements susceptibles.

La construction de la notion d'intégrale stochastique a pour fondement le processus mouvement brownien comme on l'a déjà cité. Ce processus exprime l'imprévisibilité de l'univers économique, car il est considéré comme processus à accroissement indépendant stationnaire, à trajectoires continues. Que nous introduirons dans le paragraphe suivant :

4.Mouvement Brownien :

L'origine du mouvement brownien a été l'observation de la part du botaniste *Brown* (d'origine britannique), du mouvement perpétuel et irrégulier des petites particules colloïdales plongées dans un liquide chauffé à une température normale.

Le mouvement chaotique engendré par ces particules a été nommé « Mouvement Brownien » Cette dynamique est le résultat de la collision des particules avec les molécules du fluide en question. L'effet de chaque collision est négligeable, mais la superposition de plusieurs petites interactions produit un effet observable.

La fréquence des collisions est tellement élevée que suivre la trajectoire des particules ne peut être décrite que statistiquement.

Ce qui a donné naissance au processus stochastique relatif au phénomène du *mouvement brownien*. La découverte de ce processus s'est fait durant la période 1900-1930 et à laquelle sont attachés les noms de Bachelier, Einstein, Wiener et Kolmogorov, ce fut le premier cas où le calcul des probabilités s'applique à la description d'un phénomène physique. Le mouvement brownien est considéré comme un objet mathématique remarquable, sur lequel s'accumulent un nombre considérable de propriétés : c'est un processus à accroissements indépendants, stationnaires, et à trajectoires presque sûrement continues.

Étudions le mouvement d'une particule assez petite dans un liquide en agitation thermique. On conviendra dans l'étude probabiliste du phénomène (cité ci-dessus) que dans les milieux homogènes, la partition de la vitesse ne dépend pas de la position de la particule (mais seulement de la température qui est partout la même). Si l'on admet ensuite que la vitesse des molécules est indépendante entre elle, et que l'on néglige l'inertie de la particule, le déplacement de la particule d'un point à un autre (pendant un certain intervalle de temps), ne dépendra ni de la position de la particule ni de son mouvement passé. Donc le processus $\xi(t)$ qui décrit la position de celle-ci à l'instant 't' sera un processus à accroissement indépendant.

D'autre part des considérations d'ordre physique font ressortir manifestement que ce processus sera gaussien, continu et homogène dans le temps.

Wiener a donné un sens mathématique à ce processus, voici sa définition :

Définition 9 :

On appelle mouvement brownien un processus gaussien à valeurs réelles $(X_t)_{t \geq 0}$ qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues (p.p.s).

Ce qui veut dire :

- Indépendance des accroissements : Si $s < t$; la loi de $X_t - X_s$ est indépendante de la tribu $\sigma(X_u)_{u < s}$.
- Continuité p.p.s : La fonction $s \rightarrow X_s(\omega)$ est une fonction continue.
- Stationnarité des accroissements : si $s < t$; la loi de $X_t - X_s$ est identique à celle de $X_{t-s} - X_0$.

Cette définition permet de caractériser la loi de la variable X_t (pour la démonstration nous renvoyons à [8]).

Définition 10 : un mouvement brownien est dit standard si :

$$\begin{aligned} X_0 &= 0. \\ E(X_t) &= 0 \\ E(X_t^2) &= t \end{aligned}$$

Dans la suite lorsqu'on parlera d'un mouvement brownien, sans autre précision, il s'agira d'un mouvement brownien standard.

Finalement le mouvement brownien intervient souvent dans la modélisation mathématique de nombreux phénomènes réels, grâce aux propriétés importantes suivantes :

- C'est un processus à accroissements indépendants et stationnaires.
- C'est un processus gaussien.
- C'est une **martingale**.

La notion de martingale joue un rôle important dans la construction des intégrales stochastiques, nous l'introduirons dans le paragraphe ci-après :

5. martingales :

Soit (X_t) , $t \in [0, T]$, un processus stochastique adapté à la filtration (F_t) , $t \in [0, T]$, et tel que, pour tout $t \in [0, T]$, X_t sera intégrable, c'est à dire : $E(|X_t|) < \infty$

On dit que (X_t, F_t) est une martingale si, quels que soit $s, t \in [0, T]$, avec $s \leq t$ on a :

$$E(X_t / F_s) = X_s \quad \text{p.p.s}$$

Si l'égalité est remplacée par :

$$E(X_t / F_s) \geq X_s \quad (\text{res } E(X_t / F_s) \leq X_s)$$

On dit que (X_t, F_t) est une sous-martingale (respectivement : sur-martingale).

Un autre objet, lié à la notion de processus aléatoire est le « **temps d'arrêt** ».
Que nous exploiterons dans la suite.

6. Temps d'arrêt :

Définition 11 :

On appelle temps d'arrêt par rapport à une filtration (F_t) une variable aléatoire τ à valeur dans $\mathfrak{R}^+ \cup \{+\infty\}$ telle que, pour tout $t \geq 0$: $\{\tau \leq t\} \in F_t$.

On associe à un temps d'arrêt τ une tribu que l'on note F_t définie par :

$$F_t = \{A \in \mathcal{A}, \text{ pour tout } t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in F_t\}$$

Cette tribu représente les informations disponibles avant l'instant aléatoire τ .

Nous admettons sans démonstration la proposition suivante et nous renvoyons à [1].

proposition 1:

- Si S est un temps d'arrêt, S est F_S -mesurable.
- Si S est un temps d'arrêt fini presque sûrement, et (X_t) est un processus adapté alors X_S est F_S -mesurable.
- Si S et T sont deux temps d'arrêt tel que $S \leq T$ p.p.s alors $F_S \subset F_T$
- Si S et T sont deux temps d'arrêt alors, $S \wedge T = \inf(S, T)$ est un temps d'arrêt.

Nous passons maintenant au but essentiel de cette partie à savoir l'intégrale stochastique, que nous introduirons dans le paragraphe suivant :

7. Intégrale stochastique :

Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un F_t mouvement brownien sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \geq 0}, P)$. on cherche à donner un sens à :

$$\int_0^t f(s, w) dW_s$$

Pour une classe de processus $f(s, w)$ adapté à la filtration $(F_t)_{t \geq 0}$. On commence par construire l'intégrale stochastique sur un ensemble dit **élémentaire** (processus dont les trajectoires sont simples).

Pour tout ce qui suit, on fixe T réel strictement positif et fini.

Définition 12 :

On appelle processus élémentaire, $(H_t)_{t \geq 0}$ un processus de la forme :

$$H_t(w) = \sum_{i=1}^p \phi(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i]}(t)$$

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T$ et ϕ_i est F_{t_i} -mesurable et borné.

L'intégrale stochastique d'un processus élémentaire H est alors, par définition le processus continu $(I(H)_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini, pour $t \in]t_k, t_{k+1}]$ par :

$$I(H)_t = \sum_{1 \leq i \leq k} \phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \phi(W_t - W_{t_k})$$

Notons que $I(H)_t$, peut s'écrire :

$$I(H)_t = \sum_{1 \leq i \leq k} \phi(W_{t_i \wedge t} - W_{t_{i-1} \wedge t}) \quad (\text{avec } t_i \wedge t = \min(t_i, t))$$

Ce qui prouve la continuité de la fonction $t \rightarrow I(H)_t$. on notera pour $I(H)_t$:

$$I(H)_t = \int_0^t H_s dw_s$$

On a alors le résultat suivant où pour la démonstration nous renvoyons à [1].

propriétés : si $(H_t)_{t \geq 0}$ est un processus élémentaire :

- a) $\left(\int_0^t H_s dw_s \right)_{0 \leq t \leq T}$ est une F_t -martingale continue.
- b) $E \left(\left(\int_0^t H_s dw_s \right)^2 \right) = E \left(\int_0^t H_s^2 ds \right)$

Remarque :

1) On pose par définition :

$$\int_t^T H_s dw_s = \int_0^T H_s dw_s - \int_0^t H_s dw_s$$

2) d'après a) il est claire que :

$$E \left(\int_0^t H_s dW_s \right) = 0$$

On vient de définir et de donner des propriétés de l'intégrale stochastique pour les processus élémentaires, nous allons maintenant étendre cette intégrale à une classe de processus adapté :

$$H = \{ ((H_t))_{0 \leq t \leq T}, \text{ processus adapté à } (F_t)_{t \geq 0}, \text{ tq } E \left(\int_0^T H_s^2 ds \right) < +\infty \}$$

proposition 2 :

Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un F_t -mouvement brownien. Alors il existe une unique application linéaire J de H dans l'espace des F_t -martingales continues définies sur $[0, T]$ telle que :

- 1) si $(H_t)_{t \geq 0}$ est un processus élémentaire, p.p.s pour tout $0 \leq t \leq T : J(H)_t = I(H)_t$.
- 2) si $t \leq T, \int_0^t H_s dW_s = J(H)_t$

Nous aurons besoin d'un résultat permettant de relaxer l'hypothèse d'intégralité portant sur (H_s) . posons :

$$\tilde{H} = \{ ((H_s))_{0 \leq s \leq T}, \text{ processus adapté à } (F_t)_{t \geq 0}, \left(\int_0^T H_s^2 ds \right) < +\infty \text{ .P.p.s} \}$$

La proposition suivante permet de prolonger l'intégrale H à \tilde{H} .

proposition 3:

Il existe une unique application linéaire \tilde{J} de l'espace \tilde{H} dans l'espace vectoriel des processus continus définie sur $[0, T]$ telle que :

- 1) Propriété de prolongement : si $(H_t)_{t \geq 0}$ est un processus élémentaire, P.p.s pour tout t tel que $0 \leq t \leq T$ on a : $\tilde{J}(H)_t = I(H)_t$
- 2) Propriétés de continuité : si $(H^n_t)_{t \geq 0}$ est une suite de processus de \tilde{H} telle que :

$$\left(\int_0^T (H_s^n)^2 ds \right)$$

tend vers 0 en probabilité alors $\sup_{0 \leq t \leq T} |J(H^n)_t|$ tend vers 0 en probabilité .

Pour la démonstration voir [1]. Ainsi l'intégrale stochastique est bien définie.

Après avoir défini l'intégrale stochastique qui est le support essentiel des processus d'Itô et les processus de diffusion que nous allons introduire dans le paragraphe suivant :

8. processus de diffusion :

Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier la notion de processus générale de diffusion, précisons ceci sur l'exemple d'un processus unidimensionnelle. Soit X_t les coordonnées d'une particule assez petite en suspension dans un liquide à l'instant

't' (exemple analogue à celui déjà présenté dans le paragraphe du mouvement brownien) . On peut admettre que le déplacement de la particule est la résultante de deux composantes :

- Un déplacement dû à la vitesse macroscopique du liquide.
- Les fluctuations provoquées par l'agitation thermique chaotique des molécules du milieu.

Soit $a(x,t)$ la vitesse du mouvement macroscopique du liquide au point 'x' à l'instant 't'. la fluctuation est supposée comme variable aléatoire avec une répartition qui dépend de la position 'x', à l'instant 't', et de l'intervalle Δt pendant lequel est effectué le déplacement. Ce déplacement s'écrit approximativement par:

$$X_{t+\Delta t}-X_t = a(t,X_t) \Delta t + \xi_{t,x,\Delta t} \dots\dots\dots(1.2)$$

où $\xi_{t,x,\Delta t}$ est une perturbation aléatoire.

Le processus est homogène, puisque qu'il semble naturel d'admettre que les petites variations de 't' et de 'x' sont pratiquement sans effet sur les propriétés du milieu. On supposera par conséquent :

$$\xi_{t,x,\Delta t} = \sigma(t,x) * \xi_{t,\Delta t}$$

où : $\sigma(t,x)$ caractérise les propriétés du milieu au point 'x' et à l'instant 't', et $\xi_{t,\Delta t}$ est la valeur de l'accroissement en milieu homogène.

De là, $\xi_{t,\Delta t}$ est un processus à accroissements du mouvement brownien (la différence entre deux états du processus). On écrit :

$$W(t+\Delta t)- W(t).$$

De là, l'accroissement du déplacement du processus dite de diffusion s'écrit :

$$X_{t+\Delta t}-X_t = a(t,X_t) \Delta t + \sigma(t, X_t)[W(t+\Delta t)-W(t)] \dots\dots\dots(1.3)$$

Pour que cette formule soit exacte, il faut comme on le fait ordinairement en analyse, remplacer les accroissements par des différentielles. ainsi on obtient la forme différentielle :

$$\begin{cases} dX_t = a(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t; & \text{pour } t \in [0, T] \dots \dots \dots (1.4) \\ X_0 = x \end{cases}$$

Cette dernière équation a la forme générale d'une équation différentielle stochastique (EDS). Ce calcul différentiel diffère du cas ordinaire vu que le mouvement brownien est à variation non bornée. ($\text{var}(W_t) = t$).

On peut écrire l'équation (1.4) sous forme d'intégrale sur l'intervalle $[0, T]$ par la forme suivante :

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s \dots \dots \dots (1.5)$$

qui a un sens, vu que l'intégrale stochastique $\int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s$ est bien définie.

Cette différence dans le calcul différentielle, nous amène à introduire un calcul dit « **calcul d'Itô** » que nous introduisons dans la suite :

9. calcul d'Itô :

La formule d'Itô donne, en particulier, la façon de différentier $t \rightarrow f(W_t)$. si f est une fonction deux fois continûment différentielles. L'exemple suivant prouve que le calcul usuel mène à l'échec. Supposons qu'on veuille différentier $t \rightarrow W_t^2$ et l'exprimer en fonction de dW_t .

Pour une fonction $f(t)$ différentielle nulle en 0, on a :

$$f^2(t) = \int_0^t f(s)f'(s)ds = 2 \int_0^t f(s)df(s)$$

Dans le cas du mouvement brownien et de l'intégrale stochastique on ne peut avoir une formule du même type, et : $W_t^2 = 2 \int_0^t W_s dW_s$.

En effet d'après ce qui précède $\int_0^t W_s dW_s$ est une martingale, nulle en zéro. Si elle était égale à W_t^2 elle serait positive, et une martingale nulle en 0 ne peut être positive que si elle est nulle.

Commençons par préciser la définition de la classe de processus pour lequel on peut énoncer la formule d'Itô.

Définition 13 :

soit $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration (\mathcal{F}_t) , et soit (w_t) un \mathcal{F}_t -mouvement brownien standard. On appelle processus d'Itô (X_t) à valeurs dans \mathfrak{R} le processus dont la forme est :

$$p.p.s \quad \forall t \leq T \quad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dw_s$$

Avec :

- X_0 est \mathcal{F}_0 - mesurable

- $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ des processus adaptés à \mathcal{F}_t , vérifiant :

$$- \int_0^t |K_s| ds < +\infty \quad \text{P.p.s}$$

$$- \int_0^t |H_s|^2 ds < +\infty \quad \text{P.p.s}$$

le résultat suivant précise l'unicité de la décomposition précédente :
proposition 4:

Soit $(M_t)_{t > 0}$ une martingale continue telle que :

$$M_t = \int_0^t K_s dw_s \quad , \text{avec P.p.s} \quad , \int_0^t |K_s| ds < +\infty$$

alors :

$$P.p.s \quad \forall t \leq T, \quad M_t = 0$$

ceci entraîne que :

La décomposition d'un processus d'Itô unique. Ce qui signifie que si :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dw_s = X'_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dw_s$$

alors :

$$X_0 = X'_0 \quad \text{p.p.s}$$

$$H_s = H'_s \quad \text{p.p.s}$$

$$K_s = K'_s \quad \text{p.p.s}$$

si $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale de la forme $X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dw_s$

$$\text{alors : } K_t = 0 \quad \text{p.p.s}$$

La formule d'Itô prend la forme suivante (nous admettons sans démonstration et nous renvoyons à [15])

Théorème 1:

Soit $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus d'Itô :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dw_s$$

et f est une fonction deux fois continûment différentiable, on a:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

où par définition :

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$$

et:

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dw_s$$

De même si $(t,x) \rightarrow f(x,t)$ est une fonction deux fois différentiel en t , ces dérivées étant continues en (x,t) (on dit dans ce cas que f est de classe $C^{1,2}$, on a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_t(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

La formule d'Itô joue un rôle très important dans la théorie des EDSs. On illustre par l'exemple suivant l'une de ces utilités.

Exemple d'utilisation de la formule d'Itô :

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est la solution unique de l'équation suivante :

$$\begin{cases} dX_t = -cX_t dt + \sigma dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

c est un paramètre inconnu.

On peut chercher la solution de cette équation en utilisant la formule d'Itô :

En effet, on pose le changement de variable :

$$Y_t = X_t e^{ct}$$

i.e.:

$$\frac{dY_t}{dt} = cX_t e^{ct} \quad ; \quad \frac{dY_t}{dx} = e^{ct} \quad ; \quad \frac{d^2 Y_t}{dx^2} = 0$$

utilisons la formule d'Itô:

$$dY_t = \left[f'_t(x,t) + a(x,t) f'_x(x,t) + \frac{1}{2} b^2(x,t) f''_{xx}(x,t) \right] dt + b(x,t) f'_x(x,t) dw_t$$

mais $dY_t = \sigma e^{ct} dw_t$ par intégration:

$$Y_t - Y_0 = \sigma \int_0^t e^{cs} dW_s$$

donc : $X_t e^{ct} = Y_0 + \sigma \int_0^t e^{cs} dw_s \Rightarrow$

$$X_t = e^{-ct} Y_0 + e^{-ct} \sigma \int_0^t e^{cs} dw_s$$

APPLICATION : On peut calculer la moyenne et la variance de X_t :

$$E(X_t) = x e^{-ct} + e^{-ct} \sigma E\left(\int_0^t e^{cs} dw_s\right) = x e^{-ct}$$

en effet:

$E\left(\int_0^t (e^{cs})^2 ds\right) < +\infty$ et donc $\int_0^t e^{cs} dw_s$ est une martingale nulle à l'instant 0, donc sa moyenne est nulle de même :

$$\begin{aligned} \text{var}(X_t) &= E\left(\left(X_t - E(X_t)\right)^2\right) \\ &= \sigma^2 E\left(e^{-2ct} \left(\int_0^t e^{cs} dw_s\right)^2\right) \\ &= \sigma^2 E\left(e^{-2ct} \left(\int_0^t e^{2cs} ds\right)\right) \\ &= \sigma^2 \frac{(1 - e^{-2ct})}{2c} \end{aligned}$$

Les équations du type (1.4) admet-elles toujours une solution ? est-elle unique ? et sous quelles conditions existe-il une solution ?...le paragraphe suivant répondra à toutes ces questions :

10. Solution faible et forte d'une E.D.S :

on indique d'abord un théorème d'existence et d'unicité de la solution des EDS :

Théorème 2:

soit X_t un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, (F_t)_{t \geq 0}, P)$ solution de l'EDS défini par:

$$\begin{cases} dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dw_t \\ X_0 = x_0 \end{cases} \dots\dots\dots(1.6)$$

On suppose que les applications $a(\cdot)$ et $b(\cdot)$ vérifient :

$\exists k > 0$ tel que :

$$1- \forall x, y \in \mathfrak{R} : |a(x, t) - a(y, t)| + |b(x, t) - b(y, t)| \leq k|x - y|$$

$$2- \forall x, y \in \mathfrak{R} : |a(x, t)| + |b(x, t)| \leq k(1 + |x|)$$

alors :

L'équation (1.6) admet une solution forte unique presque sûrement à trajectoires continues.

Remarques :

- La recherche de la solution explicite d'une EDS n'est pas aussi simple mais au moins le théorème (2) assure l'unicité et l'existence de cette solution.

Exemple :

On a vu que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck admet une solution. en effet :

$$dX_t = -c X_t dt + \sigma dw_t .$$

$$1) \quad \exists k > 0 : |-cx + cy| \leq k|x - y|$$

on a :

$$|-cx + cy| = |c| \times |y - x| = |c| \times |x - y| \leq |c + 1| \times |x - y|$$

$$\text{donc } k = |c + 1|$$

$$2) \quad \exists k > 0 : |-cx| \leq k(1 + |x|)$$

en effet :

$$\begin{aligned} |-cx| &= |c| \times |x| \leq |c| \times |x| + |c| \\ &\leq |c|(1 + |x|) \\ &\leq |c + 1|(1 + |x|) \end{aligned}$$

$$\text{donc } k = |c + 1|$$

Sachant que de nombreux modèles de taux d'investissements à court terme sont conçus sur la base des EDSs, il est souvent très utile de mettre en œuvre ces modèles sur ordinateur, afin d'observer graphiquement la structure du taux, permettant souvent l'interprétation économique par les experts.

Nous estimons impératif d'introduire quelques techniques permettant une discrétisation en temps discret de ces modèles. Les méthodes statistiques sont souvent nécessaires pour la validation des simulateurs réalisés.

Ces méthodes présentées sous forme de schéma itératives, permettant la simulation des trajectoires du processus du modèle considéré.

Les simulations par trajectoires sont alors utilisées pour estimer des grandeurs liées aux modèles étudiés, comme la loi du processus en tout instant t , le temps d'arrêt du processus, et toutes grandeurs exprimées en fonction du processus lui-même.

II. Approche numérique et simulation des EDSs :

L'approche la plus efficace et la plus largement répandue pour la résolution des EDSs, semble être la simulation des trajectoires par discrétisation. Cette approche par simulation est basée sur une discrétisation finie de l'intervalle $[0, T]$, consiste à générer ensuite pas à pas des valeurs qui seront des valeurs approchées de la solution exacte.

Essayons maintenant de développer ces méthodes de discrétisation. Pour cela nous présenterons, dans ce qui suit, plusieurs schémas qui proposent des approximations à des degrés de précision différents. Nous décrivons en bref la procédure de discrétisation :

1. Méthode de discrétisation :

On considère une discrétisation équidistant du temps avec : $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ dans l'intervalle $[0, T]$, avec un pas de taille $\Delta t = T/n$, pour une équation différentielle de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = a(X_t) dt + b(X_t) dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \dots\dots\dots(1.7)$$

où:

$a(\cdot)$, $b(\cdot)$:doivent vérifier les conditions de Lipchitze surtout lorsqu'il est question d'un problème de simulation trajectoire par trajectoire.

La méthode la plus simple de l'approche basée sur la discrétisation est la généralisation de l'approximation d'Euler, pour le cas stochastique souvent appelée : approximation de Euler-Maruyama, qui a la forme suivante :

$$Y_{i+1} = Y_i + a(Y_i)\Delta_i + b(Y_i) \Delta W_i$$

Avec une valeur initiale : $Y_0 = x_0$

et :

$$\Delta_i = t_{i+1} - t_i, \quad \Delta W_i = W_{i+1} - W_i \quad \text{pour } i = 0, \dots, n-1$$

La variable aléatoire ΔW_i suit une distribution de loi normale de moyenne nulle et de variance Δ_i .

Comme pour l'analyse numérique déterministe, la notion d' «ordre de convergence» joue un rôle important dans la construction d'algorithmes stochastiques efficaces pour la résolution numérique des EDSs. Dans le cas stochastique, il existe plusieurs types de convergences. Le choix du critère de convergence dépend du problème à traiter.

2- critère de convergence :

Selon la nature du problème et les objectifs fixés, on construit des schémas, sous des critères adéquats. On donne ici, les critères les plus connus et les plus utilisés en pratique :

Nous allons répertorier ces critères de convergences en deux classes :

2.1. Critère de convergence fort :

Dans les problèmes de simulation directe ou bien une opération de filtre ou de test des estimateurs statistiques, il est important que les trajectoires approximatives observées soient proches de celles du processus d'itô, ce qui implique l'utilisation du critère de convergence fort.

Théorème 1: (voir [5])

Soit $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ le processus stochastique solution de l'EDS (1.7). On dira que la trajectoire du processus approximatif Y approche celle de la solution exacte du processus d'itô X au sens fort si on a :

$$E \left(\sup_{t \leq T} |X_t - Y_{[t/\Delta t]}|^2 \right) \leq C_T \Delta t$$

C_T étant une constante dépendant uniquement de T .

Remarque :

Ce théorème, fait apparaître une propriété de convergence forte sur le maximum des écarts absolu, entre la trajectoire obtenue par la simulation et la valeur qui correspond à la trajectoire de la solution exacte.

D'un point de vue mathématique, il est avantageux de chercher l'erreur absolue au dernier instant, c'est à dire lorsque $t = T$, car c'est au temps T que l'erreur est cumulée le plus.

Pour un processus d'itô X_t solution de l'EDS (1.7) et Y_i processus approximatif du processus X_t . on pose à l'instant $t=T$ et $i=n$:

$$A_\Delta = E |X_T - Y_n|$$

Ici, A_Δ peut être estimée par la racine carrée de l'erreur, d'après l'inégalité de *Lyapunov* :

$$A_\Delta = E |X_T - Y_n| \leq E \left(|X_T - Y_n|^2 \right)^{1/2}$$

Cette erreur absolue est certainement un critère important pour pouvoir apprécier la proximité de la trajectoire de l'EDS avec le processus de diffusion approximatif Y , au temps T . Dans ce qui suit, nous dirons (par analogie avec le cas déterministe) que le processus Y converge au sens fort avec un ordre de convergence $\gamma \in (0, \infty]$, s'il existe une constante K telle que :

$$E |X_T - Y_n| \leq K \Delta^\gamma$$

Pour toute discrétisation du temps avec un pas de taille maximale $\Delta \in (0, 1]$.

L'ordre d'approximation est parfois plus petit dans le cas stochastique par rapport au cas déterministe correspondant, ceci à cause des accroissements ΔW_i qui ont une erreur d'ordre d'approximation $\Delta^{1/2}$ (l'intégrale d'itô a un ordre d'erreur de $\Delta^{1/2}$) au lieu de Δ . En effet l'approximation d'Euler pour les EDSs d'Itô ont un ordre fort de $\gamma = 0.5$ au lieu de $\gamma = 1$ qui est l'ordre des équations différentielles ordinaires. Nous pouvons donc dire que, l'approximation des trajectoires du mouvement brownien constitue la principale différence entre les approximations des équations différentielles ordinaires et celle du cas stochastique, car approcher ces trajectoires

provoque des erreurs supplémentaires qui fait que les ordres de convergences sont différents.

En générale, dans la pratique, il n'est pas nécessaire d'avoir une approximation forte des processus d'Itô, c'est à dire une approximation de la trajectoire complète. Souvent, on n'est intéressé que par une approximation en quelques points du processus. Ce qui nous conduit à introduire les critères de convergence faible. Ces cas se présentent lorsqu'on désire estimer par exemple la loi du processus à un instant $t = T$ donné.

2.2. Critère de convergence faible :

Il n'est donc pas nécessaire d'approcher la trajectoire exacte du processus de diffusion. Il est plutôt intéressant d'approcher la distribution de probabilité du processus à un instant donné. Par conséquent, nous avons besoin d'une approximation plus faible que celle décrite plus haut.

Nous dirons que l'approximation du temps discret du processus converge au sens faible avec un ordre $\gamma \in (0, \infty[$ si pour tout polynôme g il existe une constante K telle que :

$$\left| E(g(X_T)) - E(g(Y_n)) \right| \leq K \Delta^\gamma$$

Pour toute discrétisation du temps avec un pas maximum $\Delta \in (0, 1[$.

Dans les derniers paragraphes, nous avons classé les méthodes numériques d'approximation pour les EDSs d'après les critères d'ordres de convergences.

Un autre moyen de classification, consiste à distinguer les différentes approches en les comparant à la forte et faible approximation de *Taylor*. Cette approximation à été élaborée grâce à la formule stochastique de *Taylor*, nous présentons une telle formule dans le paragraphe suivant :

3. La formule stochastique de TAYLOR :

La formule stochastique de *Taylor* conçue et généralisée par *Platen* et *Wagner*, et ce en appliquant la formule d'Itô sur le développement déterministe de *Taylor* (pour la justification voir [5]).

La formule stochastique de *Taylor* permet à une fonction du processus d'Itô $f(X_t)$ d'être développée à partir de $f(X_{t_0})$ en termes d'intégrales stochastiques pondérées par des coefficients qui sont évalués à partir de X_{t_0} . Le terme du reste

dans la formule contient des intégrales stochastiques d'ordre de multiplicité supérieure, munies d'intégrants non constants.

Dans le cas unidimensionnel, le développement de *Taylor* pour $f(X_t)$ à partir de $f(X_{t_0})$ avec $t_0 \in [t_0, T]$ et $t \in [t_0, T]$, a la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 f(X_t) = & f(X_{t_0}) + \left[a(X_{t_0}) f'(X_{t_0}) + \frac{1}{2} (b(X_{t_0}))^2 f''(X_{t_0}) \right] \int_{t_0}^t ds + b(X_{t_0}) f'(X_{t_0}) \int_{t_0}^t dW_s \\
 & + b(X_{t_0}) \left\{ b(X_{t_0}) f''(X_{t_0}) + b'(X_{t_0}) f'(X_{t_0}) \right\} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_2} dW_{s_1} dW_{s_2} + R \quad \dots\dots\dots(1.8)
 \end{aligned}$$

Ici le terme du reste « R » est constitué d'intégrales stochastiques, qui ont un ordre de multiplicité (pour les intégrales stochastiques) supérieur à celui apparu dans le développement, c'est à dire le deuxième ordre. Nous présenterons dans la suite, les intégrales qui constituent le reste « R » sous forme de suite $(Z_{in})_{1 \leq i \leq 31}$, et qui ne sont pas faciles à calculer.

$$Z_{1n} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} dW(t)$$

$$Z_{2n} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{S_2} dW(s) dt$$

$$Z_{3n} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{S_2} (W_s - W_n) ds dW(t)$$

$$Z_{4n} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (W_t - W_n) dW(t)$$

$$Z_{5n} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_n) dW(t)$$

$$Z_{6n} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (W_t - W_n)^2 dt$$

$$Z_{7n} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (W_t - W_n)^2 dW(t)$$

$$Z_{8n} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_n) (W_t - W_n) dt$$

$$Z_{9n} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{S_2} (s - t_n) dW(s) dW(t)$$

$$Z_{10n} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (W_t - W_n)^3 dW(t)$$

$$\begin{aligned}
 Z_{11n} &= \int_{t_{i+1}}^{t_i} \int_{S_2}^{S_2} (W_s - W_n)^2 dW(s) dW(t) \\
 Z_{12n} &= \int_{t_{i+1}}^{t_i} \int_{S_2}^{S_2} (W_s - W_n) dW(s) dt \\
 Z_{13n} &= \int_{t_{i+1}}^{t_i} \int_{S_2}^{S_2} (W_s - W_n) dW(s) dW(t) \\
 Z_{14n} &= \int_{t_{i+1}}^{t_i} \int_U^U \int_{S_2}^{S_2} (W_u - W_n) dW(u) dW(s) dW(t) \\
 Z_{15n} &= \int_{S_2}^{S_2} \int_{t_i}^{t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (W_t - W_n) \int_{t_i}^{t_{i+1}} (W_s - W_n) dW(s) dW(t) \\
 Z_{16n} &= \int_{t_{i+1}}^{t_i} (t - t_n)^2 dW(t) \\
 Z_{17n} &= \int_{t_{i+1}}^{t_i} \int_{S_2}^{S_2} (s - t_n) dW(s) dt \\
 Z_{18n} &= \int_{t_{i+1}}^{t_i} \int_{S_2}^{S_2} (W_s - W_n) ds dt \\
 Z_{19n} &= \int_{t_{i+1}}^{t_i} (t - t_n) (W_t - W_n) dt \\
 Z_{20n} &= \int_{t_{i+1}}^{t_i} \int_U^U \int_{S_2}^{S_2} (u - t_n) dW(u) dW(s) dW(t) \\
 Z_{21n} &= \int_{t_{i+1}}^{t_i} \int_{S_2}^{S_2} (s - t_n)^2 dW(s) dW(t) \\
 Z_{22n} &= \int_{t_{i+1}}^{t_i} \int_{S_2}^{S_2} (s - t_n) (W_s - W_n) dW(s) dW(t) \\
 Z_{23n} &= \int_{t_{i+1}}^{t_i} \int_{S_2}^{S_2} (t - t_n) (s - t_n) dW(s) dW(t) \\
 Z_{24n} &= \int_{t_{i+1}}^{t_i} \int_{S_2}^{S_2} (t - t_n) (W_s - W_n) dW(s) dW(t) \\
 Z_{25n} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\int_{S_2}^{S_2} (s - t_n) dW(s) \right]^2 dW(t) \\
 Z_{26n} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\int_{S_2}^{S_2} (W_s - W_n) dW(s) \right]^2 dW(t)
 \end{aligned}$$

$$Z_{27n} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\int_{t_i}^{s_2} (s-t_n) dW(s) \right] \left[\int_{t_i}^{u_2} (W_u - W_n) dW(u) \right] dW(t)$$

$$Z_{28n} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_i} (W_t - W_n)(s-t_n) dW(s)dW(t)$$

$$Z_{29n} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t-t_n)^3 dW(t)$$

$$Z_{30n} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t-t_n)^2 (W_t - W_n) dW(t)$$

$$Z_{31n} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t-t_n) (W_t - W_n)^2 dW(t)$$

Les variables aléatoires Z_{in} constituent le reste « R » du développement stochastique de Taylor. Pour plus de précision et afin d'aboutir à des schémas d'ordre de convergence important, nous devons rajouter à chaque fois une variable Z_{in} au développement. Ces variables possèdent des propriétés qui facilitent leur calcul, que nous présenterons dans la suite.

En tronquant le développement stochastique de Taylor sur des points discrets successifs, on peut former un schéma d'approximation de base pour des EDSs.

4. Approximation forte des processus d'Itô :

Dans cette partie nous allons nous intéresser à certaines approximations fortes des processus d'Itô.

4.1. Approximation forte de Taylor :

La plus simple des approximations fortes, issues du développement de Taylor, pour les processus d'Itô est le schéma d'Euler. Ce schéma a la forme suivante :

$$Y_{i+1} = Y_i + a(Y_i) \Delta_i + b(Y_i) \Delta W_i$$

Avec une valeur initiale : $Y_0 = x_0$.

et:

$$\Delta_i = t_{i+1} - t_i \quad , \quad \Delta W_i = W_{i+1} - W_i \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n-1$$

La variable aléatoire ΔW_i suit une distribution de loi normale $N(0, \Delta_i)$ de moyenne nulle et de variance Δ_i .

Il est à noter que, sous la condition que a et b soient des fonctions lipchitziennes, et selon le critère de convergence fort : $\gamma = 0.5$.

Un autre schéma plus précis de celui d'Euler, est le schéma de Milstein, obtenu en rajoutant un terme provenant du développement stochastique de Taylor, ce schéma à la forme suivant :

$$Y_{i+1} = Y_i + a\Delta_i + b \Delta W_i + \frac{1}{2} b b' \left\{ (\Delta W_i)^2 - \Delta_i \right\} \dots \quad \text{pour } i=0,1,\dots,n-1$$

Ce terme ajouté provient du double intégrale stochastique de (1.8), qui peut être facilement démontré, mais pour cela on énonce deux lemmes indispensables pour la démonstration :

soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité de base, W_t un mouvement brownien définie sur cet espace.

Lemme1 : Pour toute fonction f, g mesurable on a :

$$\left(\int_t^v f(s) dW(s) \right) \left(\int_t^v g(s) dW(s) \right) = \int_t^v f(s) G(s) dW(s) + \int_t^v g(s) F(s) dW(s) + \int_t^v f(s) g(s) dW(s)$$

avec:

$$F(s) = \int_t^s f(y) dW(y) \quad \text{et} \quad G(s) = \int_t^s g(y) dW(y)$$

Lemme2 : pour toute fonction f, g mesurable on a :

$$\left(\int_t^v f(s) dW(s) \right) \left(\int_t^v g(s) ds \right) = \int_t^v f(s) G(s) dW(s) + \int_t^v g(s) F(s) ds$$

avec:

$$F(s) = \int_t^s f(y) dW(y) \quad \text{et} \quad G(s) = \int_t^s g(y) dy$$

Proposition 1 :

La double intégrale stochastique dans la formule de Taylor, a la forme suivante :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{S_2} dW_{S_1} dW_{S_2} = \frac{1}{2} \left\{ (\Delta W_i)^2 - \Delta_i \right\}$$

démonstration 1 :

dans le lemme 1 pour $f = g = 1$ et $t=t_i, v=t_{i+1}, s=S_2$ on a :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dW_{S_1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} dW_{S_2} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{S_2} dW_{S_1} dW_{S_2} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{t_i} dW_{S_1} dW_{S_2} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} dt$$

$$(\Delta W_i) \times (\Delta W_i) = 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{S_2} dW_{S_1} dW_{S_2} + \Delta_i \quad (\Delta W_i)^2 - \Delta_i = 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{S_2} dW_{S_1} dW_{S_2}$$

donc:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{S_1}^{S_2} dW_{S_1} dW_{S_2} = \frac{1}{2} \left((\Delta W_i)^2 - \Delta_i \right)$$

Notons que le schéma de *Milstein* possède un ordre de convergence $\gamma=1.0$ sous les hypothèses que $E(X_0)^4 < \infty$, a , b sont continûment différentiables et que a, b, a', b' sont uniformément lipchitziennes (voir [12]).

D'une façon générale, nous pouvons obtenir une approximation forte de Taylor plus précise que celle déjà présentée, en incluant dans le développement plus d'intégrales stochastiques multiples qui proviennent de la formule stochastique de Taylor (ce genre de calcul contient plus d'informations sur les trajectoires du mouvement brownien).

La présence de ces termes constitue une différence fondamentale entre l'analyse numérique des EDSs et celles des équations différentielles ordinaires. Nous obtenons donc le schéma suivant, qui est une approximation forte de Taylor avec un ordre d'approximation $\gamma=1.5$:

$$Y_{i+1} = Y_i + a\Delta_i + b\Delta W_i + \frac{1}{2}bb' \left\{ (\Delta W_i)^2 - \Delta_i \right\} + ba'\Delta Z_i + \frac{1}{2} \left\{ aa' + \frac{1}{2}b^2a'' \right\} \Delta_i^2 + \left\{ ab' + \frac{1}{2}b^2b'' \right\} \left\{ \Delta W_i \Delta_i - \Delta Z_i \right\} + \frac{1}{2}b \left\{ bb' + (b')^2 \right\} \left\{ \frac{1}{2} (\Delta W_i)^2 - \Delta_i \right\} \Delta W_i; \quad \text{pour } i=0,1,\dots,n-1 \dots \dots \dots (1.9)$$

Proposition 2 : pour la démonstration voir [6]

dans la formule (1.9) la variable aléatoire ajoutée ΔZ_i représente la double intégrale :

$$\Delta Z_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{S_1}^{S_2} dW_{S_1} dS_2 = Z_{2n}$$

Z_{2n} est la variable aléatoire présenté auparavant.

Cette variable est normalement distribuée avec : une moyenne $E(\Delta Z_i)=0$, et une variance égale à $1/3 (\Delta_i)^3$, et une corrélation $E(\Delta Z_i \Delta W_i) = 1/2 (\Delta_i)^2$ (voir [6]).

Il est à préciser qu'on peut générer la paire $(\Delta Z_i, \Delta W_i)$, qui est une paire de deux variables aléatoires normalement distribuées et corrélées, par la transformation suivante :

$$\Delta W_i = \xi_i \sqrt{\frac{1}{2} \Delta_i} \quad \Delta Z_i = \frac{1}{2} \left(\xi_i + \frac{1}{\sqrt{3}} \xi_i \right) \sqrt{\frac{1}{2} \Delta_i^3}$$

Où ξ_i et ξ_i sont deux variables indépendantes de loi $N(0,1)$.

Il est facile de vérifier que la construction précédente respecte la corrélation entre les deux variables.

La précision de l'approximation devient plus importante et l'ordre de convergence augmente, en incluant plus d'intégrale stochastique qui proviennent de la formule de Taylor (1.8). Ces intégrales stochastiques ont été présenté sous forme de variable aléatoires (Z_{in}). Nous donnons dans la proposition suivante un algorithme permettant de calculer ces intégrales stochastiques qui ne sont pas faciles à calculer.

Proposition 3 : (pour la démonstration voir [5])

* pour la variable aléatoire Z_{3n} :

$$Z_{3n} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{s_2} \int_{t_i}^u dW(u) ds dW(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_{2n} dW(t)$$

Z_{3n} est une variable aléatoire de distribution normale dont les moments sont donnés par :

$$E[Z_{3n}] = 0; \quad E[Z_{3n}^2] = \frac{\Delta_i^4}{12}; \quad E[Z_{3n}^4] = \frac{61\Delta_i^8}{1680}$$

$$E[Z_{3n}^{2k+1}] = 0$$

donc :

$$Z_{3n} \text{ est une loi normale } N(0, \frac{\Delta_i^4}{12}).$$

$$E(Z_{1n} Z_{3n}) = 0; \quad E(Z_{2n} Z_{3n})$$

* pour la variable aléatoire Z_{4n} :

pour Z_{4n} jusqu'à Z_{15n} en utilise lemme 1 et lemme 2 pour les calculer :

pour $f(t) = 1$ et $g(t) = 1$ dans le lemme 1 on trouve que :

$$Z_{4n} = \frac{1}{2}(Z_{1n}^2 - \Delta_i)$$

* pour la variable aléatoire Z_{5n} :

pour $f(t) = 1$ et $g(t) = 1$ dans le lemme 2 on trouve que :

$$Z_{5n} = (Z_{1n} \Delta_i - Z_{2n}).$$

* pour la variable aléatoire Z_{6n} :

pour $f(t) = 1$ et $g(t) = (W_t - W_n)$ dans le lemme 2 on trouve que :

$$Z_{6n} = Z_{1n} Z_{2n} - Z_{3n}.$$

* pour la variable aléatoire Z_{7n} :

pour $f(t) = 1$ et $g(t) = (W_t - W_n)$ dans le lemme 1 on trouve que :

$$Z_{7n} = \frac{1}{3} Z_{1n}^3 - Z_{2n}.$$

*pour la variable aléatoire Z_{8n} :

pour $f(t)=(W_t - W_n)$ et $g(t)=1$ dans le lemme 2 on trouve que:

$$Z_{8n} = \frac{1}{2} \left(Z_{1n}^2 \Delta_i - \frac{1}{2} \Delta_i^2 + Z_{3n} - Z_{1n} Z_{2n} \right)$$

*pour la variable aléatoire Z_{9n} :

pour $f(t)=(t-t_n)$ et $g(t)=1$ dans le lemme 1 on trouve que :

$$Z_{9n} = \frac{1}{2} \left(Z_{1n}^2 \Delta_i - \frac{1}{2} \Delta_i^2 - Z_{3n} - Z_{1n} Z_{2n} \right)$$

*pour la variable aléatoire Z_{10n} :

pour $f(t)=(W_t - W_n)$ et $g(t)=(W_t - W_n)$ dans le lemme 1 on trouve que :

$$Z_{10n} = \left(\frac{1}{4} Z_{1n}^4 - \frac{3}{2} Z_{1n} Z_{2n} + \frac{3}{2} Z_{3n} \right)$$

*pour la variable aléatoire Z_{11n} :

pour $f(t)=(W_t - W_n)^2$ et $g(t)=1$ dans le lemme 1 on trouve que:

$$Z_{11n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} Z_{1n}^4 - \frac{3}{2} Z_{1n} Z_{2n} + \frac{3}{2} Z_{3n} \right)$$

*pour la variable aléatoire Z_{12n} :

$$Z_{12n} = \frac{1}{2} \left(Z_{1n} Z_{2n} - Z_{3n} \right) - \frac{\Delta_i^2}{4}$$

*pour la variable aléatoire Z_{13n} :

$$Z_{13n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} Z_{1n}^3 - Z_{2n} \right) - \frac{1}{2} \left(Z_{1n} \Delta_i - Z_{2n} \right) \dots\dots\dots$$

L'inconvénient de l'approximation de Taylor présenté ci-dessus réside dans le fait que, les différentes dérivées (de la dérivé de la diffusion), doivent être évaluées à chaque étape. Il existe des schémas de discrétisation pour résoudre ce problème en évitant le calcul des dérivées. Nous appelons ces schémas : schéma d'approximation de Runge-Kutta. Que nous présentons dans ce qui suit :

4.2. Approximation forte de Runge-kutta : (voir [5])

Pour le cas unidimensionnel, nous avons le schéma suivant de Runge-Kutta avec un ordre de convergence $\gamma=1.0$:

$$Y_{i+1} = Y_i + a\Delta_i + b\Delta W_i + \frac{1}{2} \Delta_i^{-\frac{1}{2}} \left\{ b(\hat{Y}_i) - b \right\} \left\{ (\Delta W_i)^2 - \Delta_i \right\}$$

avec:

$$\hat{Y}_i = Y_i + b\Delta_i^{\frac{1}{2}} \quad , \text{pour } i=0,1,\dots,n-1$$

Comme on peut obtenir une approximation forte des processus d'Itô, on peut aussi obtenir une approximation faible que nous introduisons dans le paragraphe suivant.

5. Approximation faible des processus d'Itô :

commençons tout d'abord par l'approximation faible de Taylor :

5.1. Approximation faible de Taylor :

A partir du moment où nous nous intéressons à l'approximation faible des processus d'itô, nous avons plus de degré de liberté comparé à l'approximation forte. En effet ceci présente plus de flexibilité en pratique. Par exemple, il suffit d'utiliser une valeur initiale $Y_0 = \hat{X}_0$ avec une probabilité convenable qui approche dans un sens approprié, la valeur de X_0 . De même pour les accroissements aléatoires ΔW_i du mouvement brownien, qui peuvent être remplacé par les accroissements $\Delta \hat{W}_i$, ces nouveaux accroissements (plus intéressant parfois pour l'approximation) ont des propriétés similaires à celle de ΔW_i .

En utilisant le développement stochastique de Taylor, nous pouvons construire une approximation de la façon suivante avec un ordre $\gamma=2.0$:

$$Y_{i+1} = Y_i + a\Delta_i + b\Delta\hat{W}_i + \frac{1}{2}bb'(\Delta\hat{W}_i)^2 - \Delta_i + ba'\Delta\hat{Z}_i + \frac{1}{2}\{aa' + \frac{1}{2}b^2b''\}(\Delta\hat{W}_i\Delta_i - \Delta\hat{Z}_i)$$

pour $i=0,1,\dots,n-1$

Ici $\Delta\hat{W}_i$ approche ΔW_i , et $\Delta\hat{Z}_i$ approche l'intégrale stochastique multiple :

$$\Delta Z_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{S_1}^{S_2} dW_{S_1} dS_2$$

Comme nous l'avons vu dans l'approximation forte, les deux variables $\Delta\hat{W}_i$ et $\Delta\hat{Z}_i$ ont approximativement les mêmes propriétés que ΔW_i et ΔZ_i .

Comme pour le cas d'approximation forte, il est intéressant d'avoir une approximation faible des processus d'itô, en l'occurrence l'approximation de Runge-Kutta, qui évite le calcul des dérivées plus particulièrement les dérivés d'un ordre élevé du coefficient et de la diffusion.

5.2. Approximation faible de Runge-Kutta :

Un des premiers schémas relatif à cette approximation est l'approximation faible du second ordre de Runge-Kutta proposé par Milstein (1986), ce schéma a la forme suivante :

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{2} \{a - bb'\} \Delta_i + \frac{1}{2} b W_i + \frac{1}{2} bb' (\Delta W_i)^2 + \frac{1}{2} a(\hat{Y}_i) \Delta_i + \frac{1}{4} \{b(\hat{Y}_i^+) + b(\hat{Y}_i^-)\} \Delta W_i$$

avec :

$$\hat{Y}_i = Y_i + a \Delta_i + b \Delta W_i \quad \text{et} \quad \hat{Y}_i^\pm = Y_i + a \Delta_i \pm \frac{1}{3} b \Delta W_i \quad \text{pour } i=0,1,\dots,n-1$$

Un autre schéma d'approximation faible du second ordre de Runge-Kutta a été proposé par Talay (1984) :

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{2} \{a(\bar{Y}_i) - \frac{1}{2} b(\bar{Y}_i) b'(\bar{Y}_i)\} \Delta_i + b \{A_i - B_i\} \left[\frac{1}{2} \Delta_i \right]^{1/2} + b(\bar{Y}_i) B_i (2\Delta_i)^{1/2} \\ + \frac{1}{2} \{b(\bar{Y}_i) b'(\bar{Y}_i) - bb'\} \Delta_i B_i^2 - \frac{1}{2} b b' A_i B_i \Delta_i$$

avec :

$$\bar{Y}_i = Y_i + \frac{1}{2} \{a - bb'\} \Delta_i + b A_i \left[\frac{1}{2} \Delta_i \right]^{1/2} + \frac{1}{4} bb' A_i^2 \Delta_i \quad \text{pour } i=0,1,\dots,n-1$$

Ici A_i et B_i sont deux variables aléatoires, qui ont eux aussi une loi de distribution normale.

Notons juste que dans les deux schémas précédents, la dérivée (ici : b') reste toujours utilisée, mais seulement dans le produit ($\frac{1}{2}bb'$) (le calcul des dérivés d'ordre supérieur reste à éviter), et ce pour une meilleure approximation. Cela veut dire, qu'il est toujours possible d'utiliser des schémas qui évitent le calcul de b' .

Après avoir parlé, de l'approche numérique des EDSs par la méthode de discrétisation, il reste à montrer la nécessité, de la simulation dans la résolution numérique de EDSs. Nous allons nous intéresser, dans ce qui suit, aux principales techniques ainsi qu'aux principaux outils incontournables pour la mise en œuvre de cette simulation.

Nous présenterons, par conséquent, les multiples constructions qui permettent de reproduire sur un ordinateur, des variables aléatoires qui suivent différentes loi de probabilité. Et ce, afin d'aboutir à la simulation des EDSs, qui se fait tantôt en générant la solution exacte du processus de diffusion, quand celle-ci possède une expression analytique, tantôt en faisant appel au schéma de discrétisation exposé auparavant.

6. Simulation :

La simulation est une technique de modélisation par imitation du monde réel. Elle permet de représenter le fonctionnement d'un système composé de différents centres d'activité, de mettre en évidence leurs caractéristiques de ceux-ci et les interactions entre eux, de décrire la circulation des différents objets traités par ces processus et enfin d'observer le comportement du système dans son évolution dans le temps.

Nous commencerons dans ce qui suit par aborder le problème de la simulation des variables aléatoires, dite simulation de type Monté-Carlo, suivant essentiellement des lois gaussiennes. Nous allons donc montrer comment l'on peut construire des générateurs de nombres aléatoires efficace. Commençons d'abord par expliquer comment peut-on générer une variable uniforme sur $[0,1]$:

7. Algorithmes et simulation d'une variable aléatoire :

7.1. Simulation d'une loi uniforme sur $[0,1]$:

Nous allons montrer à titre d'illustration, comment on peut construire des générateurs de nombres aléatoires au cas où les générateurs de la machine offrirait une période insuffisante à l'étude souhaité.

La méthode la plus simple est la plus utilisée est la méthode des congruences linéaires. On génère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de nombres entiers compris entre 0 et $m-1$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} X_0 = \text{valeur initiale} & \{0,1,\dots,m-1\} \\ X_{n+1} = a * X_n + b \text{ (modulo } m) \end{cases}$$

a, b et m , étant des entiers qu'il faut choisir soigneusement si l'on veut que les caractéristiques statiques de la suite soient satisfaisantes. Par exemple Sedgwick préconise le choix suivant (voir [16]) :

$$\begin{cases} a = 31415821 \\ b = 1 \\ m = 10^8 \end{cases}$$

Cette méthode permet de simuler des nombres pseudo-aléatoires entre 0 et $m-1$, pour obtenir une valeur entre 0 et 1, on divise par m . A titre d'exemple nous donnons ce programme qui permet d'implémenter un générateur congruent. Ce programme est écrit en langage pascal.

programme :

Const

M=100000000 ;

M1=10000 ;

B=3145821 ;

Var a :integer ;

Function multiple (p,q : integer):integer;

(*multiplier p par q en évitant les "overflow"*)

```
var p1,p0,q1,q0 : integer ;
begin
  p1:=p div m1; p0:=p mod m1;
  q1:=q div m1; q0 :=q mod m1;
  multiple :=(((p0*q1+p1*q0)mod m1)*m1+p0*q0)mod m ;
end ;

function random : real ;

begin
  a:=(multiple (a,b)+1)mod m;
  a:=a/m;
end
```

Le générateur précédent fournit des résultats acceptables dans les cas courants. Cependant sa période (ici comme exemple $m=10^8$) peut se révéler parfois insuffisante.

Les ordinateurs qui se trouvent aujourd'hui sur le marché utilisent des générateurs plus sophistiqués. Résidants dans la mémoire de l'ordinateur.

Les modèles financiers que nous allons présenter et pour lesquels nous effectuerons des simulations de trajectoires, sont essentiellement les processus d'Itô, où il est nécessaire d'engendrer des approximations d'un mouvement brownien. Ce qui nécessite donc, la simulation des lois gaussiennes.

La nature du processus étudié «processus d'Itô» nécessite des générateurs performants, de qualités meilleurs, pour les deux critères «conservation de la loi du processus» et «indépendances des valeurs simulées ».

7.2. Simulation des variables gaussiennes :

L'une des méthodes, efficaces pour simuler une variable aléatoire gaussienne est, connue sous le nom de Box-Muller, repose sur la transformation trigonométrique de deux variables uniforme indépendantes sur $[0,1]$, pour engendrer deux valeurs gaussiennes ; où centrées réduites.

Si (U_1, U_2) sont deux variables aléatoires uniforme sur $[0,1]^2$, et U_1, U_2 sont indépendantes stochastiquement alors :

$$N_1 = \sqrt{-2 \log(U_1)} \cos(2\pi U_2) \quad \text{et} \quad N_2 = \sqrt{-2 \log(U_1)} \sin(2\pi U_2)$$

Alors les v.a N_1, N_2 sont gaussiennes centrées réduites indépendantes. Cette méthode est l'objet d'un théorème qui peut être facilement démontré (voir [15]).

Remarque :

Pour simuler des variables gaussiennes de moyenne m et de variance σ il suffit de poser :

$$X = m + \sigma * g$$

Où g est une gaussienne centrée réduite et indépendante.

Ceci peut se traduire par la procédure suivante, écrite en langage pascal :

Programme :

Function gaussienne (m,sigma : real) :real ;

Begin

Gaussienne := m+sigma*sqrt(-2.0*log(random))*cos(2.0*pi*random) ;

End ;

On a parfois besoin de savoir simuler toute la trajectoire d'un processus stochastique. Le paragraphe suivant propose quelques procédures pour la simulation des trajectoires de différents processus commençant tout d'abord par la simulation d'un mouvement brownien :

8. Simulation de processus stochastique :

la simulation des processus d'itô est basée surtout sur la simulation du mouvement brownien que nous introduisons dans le paragraphe suivant :

8.1. Simulation d'un mouvement brownien :

On peut citer plusieurs méthodes permettant de simuler un mouvement brownien $(W_t)_{t \geq 0}$ (pour la justification voir [6]). Le choix de la méthode à utiliser est souvent lié à la nature du problème traité et les objectifs fixés par l'utilisateur.

-La première consiste à *renormaliser* une marche aléatoire. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées de loi :

$$P(X_i=1) = \frac{1}{2}, P(X_i=-1) = \frac{1}{2}$$

On a alors $E(X_i)=0$ et $E(X_i^2)=1$.

On pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ on peut alors approcher asymptotiquement le mouvement brownien par le processus $(W_t^{(n)})_{t \geq 0}$ où :

$$W_t^{(n)} \cong \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x .

- dans la deuxième méthode On remarque que, si $(g_i)_{i \geq 0}$ est une suite de gaussiennes centrées réduites indépendantes, si Δt la variation du temps et si l'on pose :

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_{n+1} - S_n = g_n \end{cases}$$

alors la loi de $(\sqrt{\Delta t} S_0, \sqrt{\Delta t} S_1, \dots, \sqrt{\Delta t} S_n)$ est identique à celle de :

$$(W_0, W_{\Delta t}, W_{2\Delta t}, \dots, W_{n\Delta t})$$

on peut donc approcher le mouvement brownien W_t^n par $S_{[t/\Delta t]}$.

8.2. Simulation des équations différentielles stochastiques :

Il existe de nombreuses méthodes, certaines très sophistiquées, pour simuler la solution d'une EDS on parlera ici que de la méthode élémentaire d'Euler aléatoire. Le principe en est le suivant : considérons une EDS :

$$\begin{cases} X_0 = x \\ dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t \end{cases}$$

on fixe un pas de discrétisation temps Δt . on peut alors construire à temps discret $(S_n)_{n \geq 0}$.

Approchant la solution de l'EDS aux instant $n\Delta t$, en posant :

$$\begin{cases} S_0 = x. \\ S_{n+1} - S_n = b(S_n)\Delta t + \sigma(S_n)(W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t}) \end{cases}$$

si $X_t^n = S_{[t/\Delta t]}$, $(X_t^n)_{t \geq 0}$ approche $(X_t)_{t \geq 0}$ au sens du critère de convergence forte (voir

2.1)

la loi de la famille $(W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t})_{n \geq 0}$ est identique à celle d'une famille de gaussienne indépendantes centrées et de variance Δt . Dans une simulation, on remplace $(W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t})$ par $\sqrt{\Delta t} g$ où $(g_n)_{n \geq 0}$ une suite gaussienne centrée réduite indépendante. La suite approximative $(S'_n)_{n \geq 0}$ est dans ce cas définie par :

$$\begin{cases} S'_0 = x \\ S'_{n+1} - S'_n = b(S'_n)\Delta t + \sigma(S'_n)g_n \sqrt{\Delta t} \end{cases}$$

Exemple d'application :

il s'agit de simuler la solution de l'équation :

$$\begin{cases} X_0 = x \\ dX_t = X_t (adt + bdW_t) \end{cases}$$

Ce modèle est connu par le nom de Black et Sholes pour le calcul de prix d'option sur une obligation (ce modèle sera étudié en détail dans le chapitre 2).

Comme on a déjà vu, on utilise la méthode d'Euler aléatoire :

On pose :

$$\begin{cases} Y_0 = x \\ Y_{i+1} = Y_i + Y_i * a * \Delta_i + Y_i * b * \sqrt{\Delta_i} * g_{i+1} \end{cases}$$

avec :

$$Y_0 = 0.08$$

$$\Delta_i = t_{i+1} - t_i$$

g_i : est une loi gaussienne centrée réduite ce qui entraîne que $\sqrt{\Delta_i}g_i$, est de distribution gaussienne centré de variance Δ_i

Le graphe et les résultats du programme par le logiciel MATLAB sont donnés dans la suite :

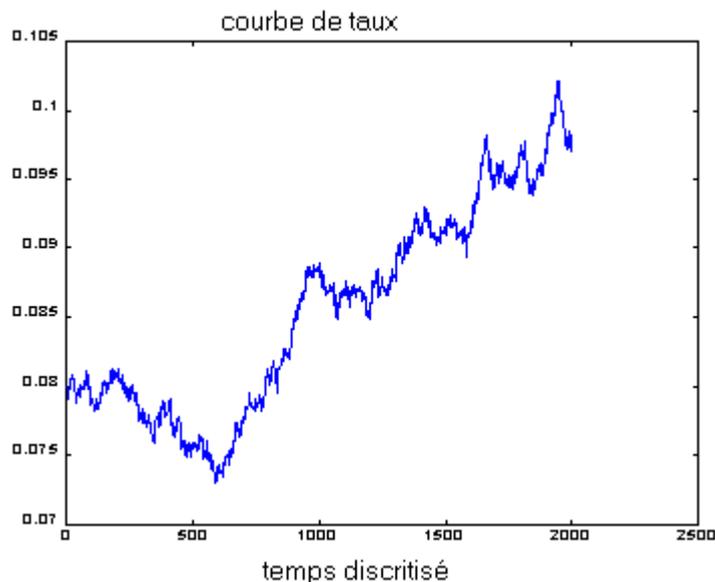


Figure1. Simulation du modèle de Black et Sholes. Par l'usage du schéma de discrétisation, avec les paramètres : $a=0.01$, $b=0.12$, la valeur initiale est égale à 0.08. Le pas est égale à 0.0005.

Remarque :

Les paramètres a et b qui interviennent dans le modèle peuvent être estimés en utilisant la méthode paramétrique comme la méthode du maximum de vraisemblance (voir [13]), ou la méthode non paramétrique.

CONCLUSION :

Le contenu de ce chapitre présente l'outil essentiel nécessaire pour traiter notre sujet. La partie théorique sur les équations différentielles du type Itô est donnée pour permettre aux lecteurs de se familiariser avec les objets mathématiques utilisés dans les modèles financiers.

Le concept de simulation introduit dans ce chapitre, est l'outil essentiel pour les études de simulations que nous effectuerons sur le modèle financier étudié, en l'absence de résultats théoriques concernant certaines grandeurs d'intérêts pratiques.

Dans ce chapitre il sera question des champs d'application du calcul stochastique en finance. Plusieurs notions financières seront introduites sous forme de définitions telle que : instruments financiers, stratégies financières, options,....etc.

Nous présenterons les principes de bases de la théorie nécessaire à la modélisation du taux d'investissement. Ces modèles seront présentés sous forme de formules mathématiques exprimés à l'aide des équations différentielles stochastiques (EDSs). On commence dans la première partie par les principales idées de la théorie des options dans le cadre mathématique des modèles discrets, ensuite la deuxième partie sera consacré aux modèle continues, en particuliers les modèles de taux d'investissement, dont la construction et le raisonnement découlent de celui des modèles d'option, en l'occurrence le modèle de Black et Sholes. Le modèle de Black et Sholes est un modèle de référence pour d'autre modèles plus sophistiqués. Ce modèle conduit à une formule mathématique explicite pour le prix d'une option européenne.

Pour des considérations économiques, nous mettrons en œuvre ces modèles sur ordinateur, pour observer graphiquement la structure du taux d'investissement, pour aide à la décision.

I. calcul stochastique appliqué à la finance :

Le principe de modélisation des modèles financiers est l'objectif principal de cette partie. L'idée essentielle est d'aboutir à une formule mathématique explicite qui décrit le modèle financier sous forme d'une EDS pour des considérations économiques.

La modélisation des modèles continues découle de celle des modèles à temps discret qui repose sur la théorie des options.

1.modèles discret :

Le but de cette partie est de donner les principales idées de la théorie des options dans le cadre mathématique très simple des modèles discrets. Nous introduisons dans la suite la définition d'une option.

Définition 1:(option)

Une option est un titre donnant à son détenteur le droit, et non l'obligation d'acheter ou de vendre (selon qu'il s'agisse d'une option d'achat ou de vente) une certaine quantité d'un actif financier, à une date convenue et à un prix fixé d'avance.

La description précise d'une option se fait à partir des éléments suivant :

- La nature de l'option : on parle, suivant la terminologie anglo-saxonne ,de «call » pour une option d'achat, de « put » pour une option de vente.
- L'échéance ou date d'expiration, qui limite la durée de vie de l'option ; si l'option ne peut être exercée qu'à l'échéance, on parle d'option européenne, dans le cas contraire nous parlerons d'option américaine
- Le prix d'exercice, qui est le prix (fixé d'avance) auquel se fait la transaction en cas d'exercice de l'option.

L'option, elle-même, à un prix appelé «la prime» . Lorsque l'option est cotée sur un marché organisé, la prime est donnée par le marché. En l'absence de cotation, le problème du calcul de la prime se pose. Et même pour une option cotée il peut être intéressant de disposer d'une formule ou d'un modèle permettant de détecter d'éventuelle anomalie de marché. Une de ces formules, par exemple, est le modèle de «Black et Sholes».

La théorie financière élémentaire suppose que les marchés financiers sont efficaces, c'est à dire que les prix des titres reflètent à chaque instants toutes les informations pertinentes disponibles. Sur un tel marché, toute nouvelle information est incorporée dans les prix. Ceci veut dire que l'anticipation d'un événement futur fait bouger les prix des actifs financiers à l'instant ou cette anticipation apparaît, et non à l'instant ultérieur où l'événement se réalise

Il est donc totalement impossible de prévoir les variations des prix futurs du prix d'un actif financier, puisque ces variations dépendent de modifications, inconnues aujourd'hui, des informations qui concourent à la formation de ce prix. Si ces modifications étaient connues, elle serait déjà incorporée dans le prix, et ne pourraient donc pas le bouger dans le futur.

Ceci implique que les prix des actifs financiers suivent des marchés au hasard. En terme mathématique nous dirons que les prix des actifs financiers sont des martingales.

Nous trouverons donc, dans le paragraphe qui suit, un cheminement logique, qui démarre de la description des aspects essentiels des actifs financiers (actifs sans risque / actif risqué), et aboutit à la liaison entre les deux notions, l'une économique et l'autre mathématique. Qui sont : arbitrage et martingales.

Un modèle de marché financier discret est construit sur un espace de probabilité fini (Ω, \mathcal{F}, P) , muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$, c'est à dire une suite croissante de sous tribus de \mathcal{F} : \mathcal{F}_n représente les informations disponibles à l'instant n et est appelé, 'tribu' des événements antérieurs à l'instant 'n'. L'horizon N sera le plus souvent dans la pratique, d'échéance des options

On donnera dans la suite des définitions nécessaire à la construction des modèles d'options. On commence par la définition des actifs financiers.

Définition 2 : (Les actifs financiers)

On suppose qu'il y a sur le marché $d+1$ actifs financiers, dont les prix à l'instant 'n' sont donnés par les variables aléatoires S_0, S_1, \dots, S_d , à valeurs strictement positives, mesurables, par rapport à la tribu \mathcal{F}_n (les investisseurs connaissent les coûts actuels et passés, mais pas le coût futur).

Le vecteur $S_n = (S_0, S_1, \dots, S_d)$ est le vecteur des prix à l'instant n . Si le taux d'intérêt des placements sans risque sur une période et constant est égal à r on a $S_n^0 = (1+r)^n$. Le coefficient $B_n = 1/S_n^0$ apparaît comme le coefficient d'actualisation (de la date n à la date 0) : C'est la somme d'argent qui, investi à

l'instant 0 sans risque, permet de disposer de 1 (unité monétaire). Les actifs numérotés de 1 à d seront appelés actifs à 'risque'.

Nous introduirons dans la suite la définition des stratégies financières.

Définition 3 : (Les stratégies financières)

Une stratégie de gestion est définie par un processus aléatoire (simplement par une suite dans le cas discret) $\Phi = (\Phi_n^0, \Phi_n^1, \dots, \Phi_n^d)$ à valeurs dans \mathbb{R}^+ , donnant à chaque instant n les quantités $\Phi_n^0, \Phi_n^1, \dots, \Phi_n^d$ des divers actifs, détenus en portefeuille. On impose au processus Φ d'être prévisible au sens suivant.

$$\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, d\} \quad \begin{cases} \Phi_0^i & \text{est } F_0 \text{ mesurable} \\ \Phi_n^i & \text{est } F_{n-1} \text{ mesurable pour } n \geq 1 \end{cases}$$

La signification de cette hypothèse est la suivante : le portefeuille à la date n $\Phi = (\Phi_n^0, \Phi_n^1, \dots, \Phi_n^d)$ est constitué au vu de l'information disponible à l'instant (n-1) et conservé tel quel au moment des cotations à la date n. la valeur du portefeuille est donnée par le produit scalaire :

$$V_n(\Phi) = \Phi_n \cdot S_n = \sum_{i=0}^d \Phi_n^i S_n^i$$

La valeur actualisée est :

$$\tilde{V}_n(\Phi) = \beta_n(\Phi_n \cdot S_n) = \Phi_n \cdot \tilde{S}_n$$

Où : $\beta_n = 1/S_n^0$ et $\tilde{S}_n = (1, \beta_n S_n^1, \dots, \beta_n S_n^d)$ est le vecteur des prix actualisés.

On dira qu'une stratégie est autofinancée si la relation suivante est réalisée pour tout $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$:

$$\Phi_n \cdot S_n = \Phi_{n+1} \cdot S_n$$

Cette relation s'interprète de la façon suivante : à l'instant n, après avoir pris connaissance des cours $S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d$, l'investisseur réajuste son portefeuille pour le faire passer de la composition Φ_n à la composition Φ_{n+1} le réajustement se faisant au cours de la date n et en réinvestissant la valeur du portefeuille et rien de plus. Il n'y a ni apport ni retrait de fonds (en particulier il n'y a pas de consommation).

On introduit dans la suite la définition d'une stratégie admissible.

Définition 4 : (stratégie admissible)

Une stratégie Φ est admissible si elle est autofinancé et si :

$$V_n(\Phi) \geq 0 \quad \text{pour tout } n \in \{0, 1, \dots, N\}$$

l'investisseur doit donc être en mesure de rembourser ses emprunts à tout instant.

La notion d'arbitrage (réalisation d'un profit sans prendre de risques) est alors formalisée de la façon suivante :

Définition 5 : (stratégie d'arbitrage)

Une stratégie d'arbitrage est une stratégie admissible de valeur initiale nulle et de valeur finale non nulle

La plupart des modèles excluant toute possibilité d'arbitrage est l'objet de la section suivante. On donne une caractérisation de ces modèles grâce à la notion de martingale.

1.1. Martingales et arbitrages :

Afin d'examiner les liens entre martingales et arbitrage, nous allons tout d'abord introduire la notion de martingale sur un espace de probabilité fini. Pour cela, l'usage de l'espérance conditionnelle est indispensable. nous renvoyons le lecteur au chapitre précédent pour plus de détail pour cet outil.

Dans ce qui suit, on considère un espace de probabilité fini (Ω, \mathcal{F}, P) muni de filtration $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$. on dit qu'une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires, est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ si pour tout 'n', X_n est \mathcal{F}_n -mesurable.

Définition 6 : (Martingales)

Dans un modèle financier, dire que le cours $(S_n^i)_{0 \leq n \leq N}$ de l'actif 'i' est une martingale revient à dire que, à tout instant 'n', la meilleure estimation que l'on puisse faire de S_{n+1}^i à partir des informations disponibles à partir de la date 'n', est donnée par S_n^i . Au sens de la moyenne quadratique.

Les propriétés suivantes, se déduisent aisément de la définition des martingales présentées au premier chapitre :

Propriétés :

1) $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale si et si seulement si :

$$E(M_{n+j}/F_n) = M_n \quad \forall j \geq 0$$

2) la somme de deux martingales est une martingale.

3) On a évidemment des propriétés analogues pour les sous –martingales et sur martingales.

Revenons maintenant aux modèles de marchés discrets introduits au paragraphe 1. on aboutira à la liaison entre les deux notions, l'une économique et l'autre mathématique. Qui sont : arbitrage et martingales.

Définition 7 : (marché viable)

On dit que le marché est viable s'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage.

Théorème 1 : (voir [3])

Le marché est viable si et seulement si, il existe une probabilité P^* équivalente à P sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.

1.2. Marché complet et évaluation des options :

1.2.1. Marché complet :

Nous définirons une option européenne N par la donnée d'une variable aléatoire $h \geq 0$, F_N -mesurable, représentant le profit que permet l'exercice de l'option. Ainsi, on a :

- $h = (S_N - K)$ pour une option d'achat ou « call » sur une unité d'actif 1, au prix d'exercice K .
- $h = (K - S_N)$ pour une option de vente ou « put » sur une unité d'actif 1, au prix d'exercice K .

dans ces deux exemples (les plus importants dans la pratique), la variable 'h' est une fonction de S_N . Il existe des options pour lesquelles h dépend de toutes les valeurs des cours jusqu'à l'échéance : S_0, S_1, \dots, S_N . c'est le cas des options dites « asiatiques ».

Définition 8 : on dit que l'actif conditionnel défini par h est simulable (ou atteignable) s'il existe une stratégie admissible dont la valeur à l'instant N est égale à h .

Définition 9 : (marché complet)

On dit que le marché est complet si tout actif conditionnel est simulable.

Théorème 2 :

Un marché viable est complet si, et seulement si, il existe une seule probabilité \mathbf{P}^* équivalente à \mathbf{P} sous laquelle les prix actualisés des actifs soient des martingales.

On suppose que le marché est viable et complet et on note \mathbf{P}^* l'unique probabilité sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales. Soit un actif conditionnel défini par une variable aléatoire h qui est F_N -mesurable $h \geq 0$ et soit Φ une stratégie admissible simulant h , c'est à dire vérifiant :

$$V_N(\Phi) = h$$

La suite $(\tilde{V}_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une martingale sous \mathbf{P}^* et par conséquent, $V_0(\Phi) = E^*(\tilde{V}_N(\Phi))$, d'où $V_0(\Phi) = E^*\left(\frac{h}{S_N^0}\right)$ et plus généralement :

$$V_n(\Phi) = S_N^0 E^*\left(\frac{h}{S_N^0} / F_n\right), \quad n=0,1,\dots,N$$

La valeur à tout instant de toute stratégie admissible simulant h est donc complètement déterminée par h . il est naturel d'appeler $V_n(\Phi)$ la valeur de l'option : c'est la richesse qui, détenue à l'instant n , permet, en suivant la stratégie à partir de l'instant n , de produire exactement la richesse h à l'instant N .

Si, à l'instant 0, un investisseur vend l'option au prix : $E^*\left(\frac{h}{S_N^0}\right)$, Il a la possibilité en suivant une stratégie simulante Φ , de restituer la richesse promise h à l'instant N ; c'est-à-dire qu'il peut se couvrir parfaitement.

Dans la première partie de ce chapitre, on s'est consacré à l'étude des modèles à temps discrets. Nous allons étendre ces notions au cas du temps continue. Nous présenterons dans la suite les modèles financiers à temps continues exprimés en fonction des équations différentielles stochastiques.

2. Modèles à temps continu :

Les outils techniques sont plus délicats à utiliser en temps continu mais les idées essentielles diffèrent peu de celles du temps discret. Pourquoi considère-t-on des modèles à temps continu ? La première motivation vient des phénomènes que l'on veut modéliser : les variations des cotations sur les marchés organisés sont en pratique tellement fréquentes qu'un modèle à temps discret peut difficilement en rendre compte.

D'autre part les modèles continus conduisent à des méthodes de calcul plus explicites que les modèles discrets, même s'il faut parfois avoir recours à des méthodes numériques.

Le modèle le plus utilisé dans la pratique le modèle de Black et Scholes est un modèle à temps continu qui conduit à une formule simple. Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, les liens entre processus stochastique et finance ne sont pas nouveaux : en 1901, Bachelier dans une mémoire intitulée «théorie de la spéculation» est, non seulement l'un des premiers à s'intéresser mathématiquement aux propriétés du mouvement brownien, mais aussi a donné des formules de calcul de prix pour certaines options.

Nous appliquerons donc les éléments mathématiques déjà définis, aux modèles financiers continus. Nous nous intéresserons, par conséquent, aux équations différentielles stochastiques d'Itô, qui servent à construire la plus part des modèles en finance. On commence d'abord par définir une martingale à temps continu :

2.1-Martingales à temps continu :

Donnons des exemples de quelques martingales que l'on peut construire à partir du mouvement brownien.

Proposition 1:

Si $(X_t)_{t>0}$ est un mouvement brownien standard :

- 1) X_t est une F_t – martingale.
- 2) $X_t - t$ est une F_t – martingale.
- 3) $\exp(\sigma X_t - (\sigma^2/2)t)$ est une F_t - martingale.

Démonstration 1 :

- 1) Si $s \leq t$ alors $X_t - X_s$ est indépendante de la tribu F_s .

Donc : $E(X_t - X_s / F_s) = E(X_t - X_s)$. Mais un mouvement brownien standard est centré, donc :

$$E(X_t - X_s) = 0.$$

On en déduit le premier point.

2) Pour démontrer la deuxième propriété, remarquons que :

$$\begin{aligned} E(X_t^2 - X_s^2 / F_s) &= E((X_t - X_s)^2 + 2X_s(X_t - X_s) / F_s) \\ &= E((X_t - X_s)^2 / F_s) + 2X_s E(X_t - X_s / F_s) \end{aligned}$$

Mais comme $(X_t)_{t \geq 0}$ est une martingale $E(X_t - X_s / F_s) = 0$, et donc :

$$E(X_t^2 - X_s^2 / F_s) = E((X_t - X_s)^2 / F_s)$$

La stationnarité et l'indépendance des accroissements du mouvement brownien permette de plus d'affirmer que :

$$E((X_t - X_s)^2 / F_s) = E((X_{t-s}^2)) = t - s.$$

3) La dernière égalité est due au fait que X_t suit une loi gaussienne centré de variance t .

On en déduit que $E(X_t^2 - t / F_s) = X_s^2 - s$, si $s < t$

Pour démontrer le dernier point, rappelons, tout d'abord que, si g est une gaussienne centré réduite, on a :

$$E(e^{\lambda g}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda g} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

De plus si $s < t$:

$$E(e^{\sigma X_t - \sigma^2 t / 2} / F_s) = e^{\sigma X_s - \sigma^2 s / 2} E(e^{\sigma(X_t - X_s)} / F_s)$$

Car X_s est F_s -mesurable, et comme $X_t - X_s$ est indépendant de F_s , on a :

$$\begin{aligned} E(e^{\sigma(X_t - X_s)} / F_s) &= E(e^{\sigma(X_t - X_s)}) \\ &= E(e^{\sigma(X_t - s)}) = E(e^{\sigma g \sqrt{t-s}}) \\ &= e^{\frac{\sigma^2 (t-s)}{2}} \end{aligned}$$

Ce qui donne fin à notre démonstration.

Si $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale, la notion $E(M_t / F_s) = M_s$ peut être étendue à des temps aléatoires si ces temps sont des temps d'arrêts bornés. Nous admettons le théorème qui suit sans démonstration et nous renvoyons à [9] pour consultation.

Théorème 3 :

Si $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale continue par rapport à une filtration $(F_t)_{t \geq 0}$ et si Γ_1 et Γ_2 sont deux temps d'arrêt tels que $\Gamma_1 \leq \Gamma_2 \leq K$, K étant une constante réelle finie, alors, M_{Γ_2} est intégrable et :

$$E(M_{\Gamma_2} / F_{\Gamma_1}) = M_{\Gamma_1} \quad \text{P.p.s}$$

On introduit dans la suite le modèle stochastique le plus connu qui est le modèle de Black et Scholes. Et à partir de ce modèle que découle d'autre modèle de taux d'investissement à court terme plus sophistiqués.

2.2- Modèle de Black et Scholes :

Le problème traité par Black et Scholes est l'évaluation et la couverture d'une option de type européen (call ou put) sur une action ne distribuant pas de dividendes.

La méthode utilisée, qui repose sur des idées analogues à celle déjà présentées dans le cadre des modèles discrets, conduit à des formules aujourd'hui couramment utilisées par les praticiens, malgré le caractère simplificateur du modèle.

Dans ce paragraphe, nous donnons une présentation actualisée des travaux de Black et Scholes, le prix du call est, dans le modèle, la somme d'argent dont on doit disposer initialement pour pouvoir suivre la stratégie de couverture et produire ainsi exactement la richesse. De plus, la formule obtenue ne dépend que d'un paramètre, non directement observable sur le marché appelé « *volatilité* » par les praticiens.

2.2.1- Description du modèle :

A) L'évolution des cours :

Le modèle proposé par Black et Scholes pour décrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif risqué (une action de prix S_t^0 à l'instant t) et actif sans risque (de prix S_t^0 à l'instant t) on suppose l'évolution de S_t^0 régie par l'équation différentielle (ordinaire) suivante :

$$dS_t^0 = r S_t^0 dt \quad \dots\dots\dots(2.1)$$

Où r est une constante positive.

Cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché est constant et égal à r (noter que r est ici un taux d'intérêt instantané, a ne pas confondre avec le taux sur une période des modèles discrets) On posera $S_0^0=1$ de sorte que $S_t^0 = e^{rt}$, pour $t > 0$.

On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t) \dots\dots\dots(2.2)$$

Où μ et σ , sont deux constantes et (W_t) et un mouvement brownien standard.

Le modèle est étudié sur l'intervalle $[0, T]$ ou T est la date d'échéance de l'option à étudier. L'équation (2.2) se résout, explicitement, la solution est donné par :

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right)$$

Où S_0 est le cours observé à la date 0. Il en résulte en particulier que selon ce modèle, la loi de S_t est une loi log- normale (c'est à dire que son logarithme suit une loi normal).

Plus précisément, on voit que le processus $(\log-S_t)$ vérifie une équation du type (2.2) si et seulement si le processus $(\log S_t)$ est un mouvement brownien (non nécessairement standard). cela signifie que le processus (S_t) vérifie les propriétés suivantes :

- Continuité des trajectoires.
- Indépendance des accroissements relatifs : si $u \leq t$, S_t / S_u ou (ce qui revient au même), l'accroissements relatif $(S_t - S_u) / S_u$ est indépendante de la tribu $\sigma (S_v, v \leq u)$.
- Stationnarité des accroissements relatifs : si $u \leq t$, la loi de $(S_t - S_u) / S_u$ est identique à celle de $(S_{t-u} - S_0)$.

Ces trois propriétés traduisent de façon concrète les hypothèses de Black Scholes sur l'évolution du cours de l'action.

Le modèle de Black et Sholes est un modèle de référence pour d'autres modèles plus sophistiqués. Nous présenterons dans le paragraphe suivant des exemples de modèles financiers (modèles de taux d'intérêt) très connus exprimer à l'aide des EDSs.

2.3- Modèles de taux d'intérêt :

Les modèles de taux d'intérêt sont utilisés principalement pour couvrir des obligations et des options sur obligation, jusqu'à présent, aucun modèle n'a pu s'imposer comme modèle de référence au même titre que le modèle Black-scholes pour les options sur actions. Dans cette partie, nous illustrons la théorie par l'étude d'un modèle de taux connu dans la finance, qui est le modèle « *Vasicek* ».

Le modèle que nous allons examiner, décrit l'évolution de $r(t)$: taux d'intérêt paramétrés par des «paramètres de risques » difficile à estimer.

Dans ce modèle on suppose que $r(t)$ vérifie :

$$dr(t) = a(b-r(t))dt + \sigma dW_t$$

Où a, b, σ sont des paramètres positifs qui peuvent être estimés.

Donnons quelques conséquences de cette équation. si on pose :

$$X_t = r(t) - b$$

On voit que (X_t) est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck (voir chapitre précédent).

On déduit que $r(t)$ peut s'écrire :

$$r(t) = r(0)\exp(-at) + b(1 - \exp(-at)) + \sigma \exp\left(-at\right) \int_0^t e^{as} dW_s$$

Et que $r(t)$ suit une loi normale dont la moyenne est donnée par :

$$E(r(t)) = r(0) e^{-at} + b(1 - e^{-at})$$

Et la variance par :

$$\text{var}(r(t)) = \sigma^2 \left(\frac{1 - e^{-2at}}{2a} \right)$$

Il existe d'autre modèle de taux d'intérêt qu'on donne dans le tableau suivant :

Quelques modèles de taux classique :

Modèle de taux	Expression du modèle
Vasicek généralisé 1977	$dr_t = a (b - r_t) dt + \sigma dW_t$
Cox-Igrosoll-Ross 1985	$dr_t = (a - b r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$
Ho-Lee 1986	$dr_t = b dt + \sigma dW_t$
Hull-White 1990	$dr_t = (a - b r_t) dt + \sigma dW_t$

Ces modèles sont exprimés à l'aide de paramètres estimables par des méthodes paramétriques ou non paramétriques (voir [12]).

Remarque :

La solution exacte des EDSs donnés dans le tableau précédant n'est pas simple à trouver. Il existe des méthodes numériques qui rapprochent la solution exacte de ces équations. Ces méthodes présentées sous forme de schéma itératif, permettent la simulation des trajectoires du processus du modèle considéré. (pour plus d'information voir chapitre 1).

Conclusion :

Le contenu de ce chapitre présente les idées essentielles nécessaires pour écrire les modèles financiers sous formes d'équations différentielles stochastiques. Ecrire ces modèles sous forme d'EDS nous donne la possibilité de les mettre en œuvre sur ordinateur pour des considérations économiques.

Les modèles discrets présentés par la théorie des options sont le support des modèles continus, où Black et Sholes est le modèle de référence pour d'autres modèles plus compliqués.

Les concepts économiques de modélisation traités dans ce chapitre seront nécessaires pour le modèle de notre recherche qui est aussi écrit sous forme d'EDS exprimés à l'aide du taux d'investissement à court terme.

L'objet de chapitre est l'étude d'un type d'option particulier, dite « option réelle » ou d'investissement. On présentera au début de ce chapitre, le modèle de notre recherche écrit sous forme d'une équation différentielle stochastique exprimée à l'aide du taux d'investissement interne. Ce taux est assez particulier c'est un taux d'investissement incertain irréversible d'incertitude technique. On présentera en l'occurrence, la valeur de l'investissement productif qui est fonction du taux d'investissement et de la variable aléatoire « temps d'arrêt » relatif au modèle de notre recherche. Cette valeur joue un rôle très important dans l'investissement d'un projet à long terme. A la fin on présentera la problématique de notre sujet de recherche.

La deuxième partie de ce chapitre sera, consacrée à déterminer la loi de probabilité des instants de premiers passage connus sous le nom de « temps d'arrêt », une notion très utile dans l'étude statistique des phénomènes aléatoires en l'occurrence les marchés financiers.

Par la suite, on déterminera une forme explicite de l'investissement productif à l'aide des équations différentielles stochastiques (EDS) développées à travers les intégrales du type Itô. La forme complexe de l'investissement productif deviendra plus simple et facile à utiliser après la détermination de la forme explicite de cette dernière.

A la fin de ce chapitre on estimera le paramètre de l'EDS β par la méthode du maximum de vraisemblance. Mais pour cela la construction d'une structure statistique est nécessaire pour résoudre le problème d'estimation.

I. description du modèle étudié :

Le modèle principal de notre recherche est exprimé à l'aide d'un investissement à court terme. Mais pas n'importe quel taux!. C'est un modèle assez compliqué. Il est «incertain», «irréversible» et «d'incertitude technique». On expliquera mieux dans la suite ces notions qui caractérisent ce type d'investissement.

1. Investissement incertain irréversible d'incertitude technique :

1.1. Investissement incertain:

Dans la plupart des études d'investissement sous incertitude, c'est le coût total de l'investissement qui est incertain. En particulier pour les projets qui prennent un temps considérable pour se réaliser; par exemple :

- Une usine d'énergie nucléaire, les coûts de la construction totale sont difficiles à prévoir ou à estimer : Les coûts d'énergie, d'électricité sont incertains.
- Le développement d'un nouveau médicament sur le marché est un exemple dont le coût d'investissement est difficile à estimer.

En plus du fait que l'investissement est incertain il est irréversible. Or on verra plus de détails sur cette propriété dans la suite.

1.2. Investissement irréversible :

En plus des coûts incertains de l'investissement, il est à mentionner que l'investissement est «irréversible » c'est à dire :

Si on commence à investir dans un projet comme on a déjà commencé le développement d'un nouveau médicament par exemple, même si l'investissement tourne mal soit parce que la demande du produit est moins qu'on a anticipé ou alors le coût d'investissement s'avère plus important qu'on a anticipé. Quelle que soit la raison la compagnie ne peut arrêter l'investissement ou autrement dit «désinvestir » et reprendre l'argent dépensé. Donc un investissement irréversible et celui qu'on ne revient pas en arrière.

Il existe plusieurs types d'investissement sous incertitude. Pour nous nous intéresserons à l'incertitude «technique » de l'investissement. Qu'on verra dans le paragraphe suivant :

1.3. Investissement incertain technique :

L'investissement d'incertitude technique est relié à la difficulté physique de compléter un projet : comme on a déjà cité auparavant : pour la construction d'une usine nucléaire, Supposons que les prix de construction soient connus pour quelle durée et avec quels moyens le projet s'achèvera-t-il ?

Les coûts peuvent être plus ou moins importants qu'anticipés. Mais le coût total d'investissement reste toujours incertain et il n'est connu que lorsque le projet est achevé.

Ainsi, le taux d'investissement utilisé par la suite dans le modèle principal bien décrit. Cela nous donnera la possibilité d'introduire la problématique de notre sujet de recherche dans le paragraphe suivant :

Problématique :

Etant donné une compagnie qui investit dans un projet, il serait intéressant de calculer ou d'estimer un certain temps 't' de calculer ou d'estimer :

- Le coût qu'elle doit miser pour compléter le projet.
- Pouvoir décider de continuer ou arrêter le projet, selon une règle de décision établie, en calculant la valeur de «l'investissement productif » qui représente la vraie valeur pour entreprendre le projet.

Donc l'idée essentielle de notre recherche et de déterminer la valeur de l'investissement productif et de tirer la règle de décision qui donne la possibilité à l'investisseur de continuer ou abandonner son projet. Tous ces problèmes seront traités dans ce chapitre. Mais pour cela il nous faut un modèle économique qui reflète les propriétés de l'investissement déjà présent. Le modèle est écrit sous forme d'EDS qu'on introduira dans le paragraphe suivant.

2. description du modèle de base :

On considère un investissement dans un projet dont le coût actuel pour le compléter est un processus stochastique X_t régi par une équation différentielle stochastique, du type Itô, donnée par :

$$\begin{cases} dX_t = -I_t dt + \beta \sqrt{I_t X_t} dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \dots\dots\dots(I)$$

avec :

X_t : le coût actualisé du projet à l'instant 't'.

I_t : taux d'investissement interne ;(supposé ici une fonction déterministe)
 $\forall t \geq 0 : 0 \leq I_t \leq 1$.

W_t : mouvement brownien standard ; $t \geq 0$.

β : paramètre inconnu qui peut être estimé.

L'équation (I) est une généralisation du modèle de Robert et Wallace (1981) qui ont modélisé les coûts d'achèvement X_t par une EDS contrôlée par le taux d'investissement. (pour plus de détails voir [17]).

Ce modèle permettra à l'investisseur d'étudier le comportement du projet d'achèvement du projet pour des considérations économiques.

Dans la problématique, on parle d'une règle de décision qui permet à l'investisseur de continuer ou d'abandonner le projet. Cette règle de décision «l'investissement productif» qu'on introduit dans le paragraphe suivant.

3. Investissement productif :

l'investissement productif (la vraie valeur pour entreprendre le projet) est définie par :

$$F(x) = \max_{0 \leq I_t \leq 1} E_x \left(\int_0^{\tau} -I_t e^{-rt} dt + V e^{-r\tau} \right) \dots \dots (II)$$

avec :

E_x : espérance mathématique conditionnelle à $X_0 = x$.

$\tau = \inf \{ t \geq 0 ; X_t = 0 \}$: durée probable pour compléter le projet

r : taux d'investissement interne constant.

V : valeur de l'investissement initiale actualisée.

(II) est théoriquement difficile à exprimer sous une forme explicite, ceci d'une part à la forme de l'équation (I) et d'autre part au choix de la fonction I_t où comme nous l'avons indiqué auparavant, et pour une raison de simplicité telle fonction est supposé déterministe, pouvant prendre des valeurs dans l'intervalle [0,1]. La fonction I_t peut avoir une forme beaucoup plus complexe elle peut être même solution d'une EDS. Dans le cas d'un investissement économique viable.

En déterminant $F(x)$, l'investisseur connaît la vraie valeur pour entreprendre son projet à un instant donné t_0 . cette valeur ne peut être calculée que si son capital à cet instant ($X_{t_0} = x$) est inférieur à une valeur x^* qui est fixée à l'avance. Cette valeur (x^*) est le capital initial du projet

l'investissement démarre à $t=0$). Il faut que x soit inférieur à x^* pour calculer la valeur qui reste à l'investisseur pour compléter son projet. Dans le cas contraire c'est à dire lorsque x est supérieur à x^* l'investisseur décide de ne pas continuer son projet étant donné un capital supérieur à sa possession. x^* est appelée valeur critique.

Pour déterminer $F(x)$ on propose la règle de décision suivante :

$$\begin{cases} * F(x) > 0 \text{ la compagnie continue le projet, } F(x) > 0 \text{ si et seulement si } x \text{ est} \\ \text{inférieure à la valeur critique } x^* & \dots\dots(P) \\ * F(x) = 0 \text{ quand } x \text{ est supérieur à } x^*. \end{cases}$$

L'objectif essentiel de notre recherche est de déterminer $F(x)$. Etant donné le coût d'investissement actualisé qui est un processus de diffusion solution d'une EDS du type Itô contrôlée par I_t , et de construire ainsi la règle de décision.

Le paramètre τ intervenant dans l'équation (I) est une variable aléatoire on doit connaître sa loi de probabilité, nécessaire à la détermination de la fonction $F(x)$. Ceci peut se faire directement à partir de l'équation du processus (I). c'est l'objectif du paragraphe suivant :

II . Détermination de la loi de Probabilité des Instants de Premier Passage

Pour le modèle décrit par l'équation (I) nous avons la définition suivante

Définition 1 :

On définit la variable aléatoire temps d'arrêt du processus X_t solution de l'équation (I) par :

$$\tau = \inf \{ t \geq 0 / X_t = 0 \}$$

Cette variable représente le premier instant dont le coût d'aboutissement du projet devient nul.

Pour des raisons techniques, nous posons :

$$\tau = \inf \{ t \geq 0 : X_t = 0 \} \approx \inf \{ t \geq 0 : X_t \in [0, \varepsilon] \}$$

Tel que ε est proche de zéro.

Le théorème suivant assure l'existence de la loi de probabilité de la variable aléatoire τ .

Théorème 1 : (pour la démonstration voir [2])

On définit l'EDS générale :

$$dX_t = a(x,t) dt + b(x,t) dW_t$$

Le système défini à travers le domaine $D = [0, \varepsilon] \times [0, +\infty[$:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Mu & \text{si } (x,t) \in [0, \varepsilon] \times [0, +\infty[\\ u(\varepsilon, t) = u(0, t) = 1 & \text{si } x \in \{0, \varepsilon\}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & \text{si } x \in [0, \varepsilon] \end{cases}$$

admet une solution unique qui est :

$u(x,t) = P_x(\tau \leq t)$ ou τ est la variable aléatoire temps d'arrêt défini par :

$$\tau = \inf \{t \geq 0 : X_t \in D\}.$$

En posant $u(x,t) = P_x(\tau \leq t)$, on sait bien que $u(x,t)$ est solution du système suivant sur le domaine $D = [0, \varepsilon] \times [0, +\infty[$:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Mu & \text{si } (x,t) \in [0, \varepsilon] \times [0, +\infty[\\ u(\varepsilon, t) = u(0, t) = 1 & \text{si } x \in \{0, \varepsilon\}, t > 0 \dots\dots\dots(3.1) \\ u(x, 0) = 0 & \text{si } x \in [0, \varepsilon] \end{cases}$$

$u(x,t)$ est la solution du système (3.1) avec :

$$Mu = a(.,t) \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} b^2(.,t) \frac{d^2u}{dx^2}$$

où:

$$\begin{cases} a(.,t) = -I_t \\ b(.,t) = \beta \sqrt{I_t x} \end{cases}$$

calculons Mu l'opérateur du système (3.1)

$$Mu = \frac{du}{dt} \Leftrightarrow \frac{du}{dt} = -I_t \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \beta^2 I_t x \frac{d^2u}{dx^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dt} + I_t \frac{du}{dx} - \frac{1}{2} \beta^2 I_t x \frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

Résoudre le système (3.1), nous permettra de déterminer la loi de probab la variable aléatoire temps d'arrêt.

RESOLUTION DU SYSTEME (3.1) :

La fonction u(x,t) solution du système (3.1) peut être déterminée par la m de séparation de variables.

Soit : $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x) T_n(t)$

$\forall n, R_n(x), T_n(t)$ sont solutions du système (3.1) i.e:

$$\frac{d}{dt}(R_n(x)T_n(t)) = M(R_n(x)T_n(t)) \quad \text{où} \quad Mu = a(.,t) \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} b_2(.,t) \frac{d^2u}{dx^2}$$

donc:

$$\frac{d}{dt}(R_n(x)T_n(t)) = a(x,t) \frac{d}{dx}(R_n(x)T_n(t)) + \frac{1}{2} b_2(x,t) \frac{d^2}{dx^2}(R_n(x)T_n(t))$$

$$T_n(t)R_n'(x) = a(x,t)T_n(t)R_n'(x) + \frac{1}{2} b_2(x,t)T_n(t)R_n''(x)$$

$$T_n'(t)R_n(x) = (a(x,t)R_n'(x) + \frac{1}{2} b_2(x,t)R_n''(x))T_n(t)$$

$$\frac{T_n'(t)}{T_n(t)} = \frac{a(x,t)R_n'(x) + \frac{1}{2} b_2(x,t)R_n''(x)}{R_n(x)}$$

On remplace a(x,t), b(x,t) on obtient :

$$\frac{T_n'(t)}{T_n(t)} = \frac{-I_t R_n'(x) + \frac{1}{2} \beta^2 I_t x R_n''(x)}{R_n(x)}$$

pour $I_t = I^*$:

$$\frac{T_n'(t)}{T_n(t)} = C_n \quad \text{donc} \quad T_n(t) = \exp(C_n t)$$

d'autre part:

$$\frac{-I^* R_n'(x) + \frac{1}{2} \beta^2 I^* x R_n''(x)}{R_n(x)} = C_n \Leftrightarrow -I^* R_n'(x) + \frac{1}{2} \beta^2 I^* x R_n''(x) - R_n(x) C_n = 0$$

$$\Leftrightarrow xR''_n(x) - \frac{2}{\beta^2}R'_n(x) - \frac{2C_n}{\beta^2 I^*}R_n(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow R''_n(x) - \frac{2}{\beta^2 x}R'_n(x) - \frac{2C_n x}{\beta^2 I^* x^2}R_n(x) = 0 \dots \dots \dots (3.2)$$

Cette dernière équation s'exprime sous la forme d'une équation différentielle type BESSEL plus exactement :

(3.2) peut s'écrire sous la forme équivalente :

$$(3.2) \Leftrightarrow R''_n(x) + \frac{1-2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta^2}\right)}{x}R'_n(x) + \left[\left(\frac{1}{2} \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{8C_n}{I^*}} (x)^{\frac{1}{2}-1}\right)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\beta^2}\right)\right)^2}{x^2} \right] R_n(x) = 0 \dots (3.3)$$

on pose :

$$\alpha = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta^2}\right)$$

$$\beta' = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{8C_n}{I^*}}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}$$

$$v = 1 + \frac{2}{\beta^2}$$

$$(3.3) \Leftrightarrow R''_n(x) + \frac{1-2\alpha}{x}R'_n(x) + \left[(\gamma\beta x^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - (\gamma)^2}{x^2} \right] R_n(x) = 0 \dots \dots \dots (3.4)$$

(3.4) est l'équation de LOMMEL (voir annexe) qui admet la solution :

$$R_n(x) = x^\alpha (A I_\nu(\beta x^\gamma) + B K_\nu(\beta x^\gamma))$$

$$R_n(x) = x^{\nu/2} (A I_\nu(2\sqrt{bx}) + B K_\nu(2\sqrt{bx})) \quad tq:$$

$$b = \frac{2C_n}{I^* \beta^2}$$

$I_\nu(2\sqrt{bx}), K_\nu(2\sqrt{bx})$: sont les fonctions de BESSEL modifiées d'ordre ν , respectivement de première et seconde espèce.

A, B : sont des constantes.

ainsi on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 1 : la loi de probabilité de l'instant de premier passage est donnée par :

$$P_x(\tau \leq t) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(C_n t) \left(Ax^{v/2} I_v(2\sqrt{bx}) + Bx^{v/2} K_v(2\sqrt{bx}) \right)$$

avec :

A, B, C_n : Sont des constantes.

$I_v(2\sqrt{bx}), K_v(2\sqrt{bx})$: sont les fonctions de BESSELS modifiées d'ordre v , respectivement de première et seconde espèce.

A, B : sont des constantes.

$$v = 1 + \frac{2}{\beta^2}; b = \frac{2r}{\beta^2}; \gamma = \frac{1}{2}$$

conclusion :

Cette loi de probabilité est d'une très grande importance pour l'investisseur elle donne la possibilité de prévoir l'instant d'arrêt de l'investissement, étant donnée un capitale $X_0 = x$ (capitale de l'investissement).

Finalement cette loi sera un outil pour ceux qui investissent dans de grands projets à long terme.

Après la détermination de la loi de probabilité de la variable aléatoire d'arrêt, on présentera dans ce qui suit la détermination d'une forme explicite de la fonction «l'investissement productif» $F(x)$. (La vraie valeur pour entreprendre le projet) .

La valeur de cette fonction est d'une très grande importance dans le cas d'un investissement à long terme dont le projet démarre d'un capital assez important. Posons le problème de la façon suivante :

L'investisseur démarre un projet à $t=0$ avec un capital (x^*) assez important pour une durée inconnue. A un certain temps « t_0 » il veut savoir la valeur restante pour aboutir à la fin de son projet. Cette valeur dépend de l'argent que possède l'investisseur à cette instant qui est $X_{t_0} = x$, de la variable τ qui est le temps d'arrêt du projet et de la valeur critique x^* (déjà expliquée au début du chapitre). Cette valeur ne doit pas être inférieure à x pour continuer le projet.

En déterminant l'investissement productif l'investisseur décide de conti
 ou d'arrêter le projet. Dans le premier cas ($x < x^*$) il entame son projet ave
 somme $F(x)$, si non ($x \geq x^*$) il arrête son investissement.

III. DETERMINATION DE LA FORME EXPLICITE DE
 L'INVESTISSEMENT PRODUCTIF :

On voit bien qu'il est très intéressant de déterminer la valeur de
 l'investissement productif. on exposera tout au long de cette partie les
 démarches à suivre pour trouver une forme explicite de cette dernière.

Définition 2 :soit $F(x)$ la fonction de l'investissement donné par (II). On c
 la fonction :

$$F(x,I)=E_x\left(\int_0^\tau -I_t e^{-rt} dt + Ve^{-r\tau}\right) \dots\dots\dots(3.5)$$

On voit bien qu'on a supposé le taux d'investissement interne I_t comme t
 déterministe appartenant à $[0,1]$.

On a :

$$F(x) = \max_{0 \leq I_t \leq 1} F(x, I)$$

Lemme 1 : soit $F(x,I)$ la fonction donnée par (3.5).

Alors :

$$F(x)=\max_{0 \leq I_t \leq 1} F(x, I) = \begin{cases} \left(\left(\frac{1}{r}\right)E_x(e^{-r\tau}) - \frac{1}{r}\right) + VE_x(e^{-r\tau}) & \text{si } \left(\frac{1}{r}\right)E_x(e^{-r\tau}) - \frac{1}{r} \geq 0 \\ VE_x(e^{-r\tau}) & \text{si } \left(\frac{1}{r}\right)E_x(e^{-r\tau}) - \frac{1}{r} < 0 \end{cases}$$

preuve 1 : on sait bien que :

$$F(x) = \max_{0 \leq I_t \leq 1} F(x, I)$$

Il suffit de maximiser la fonction $F(x,I)$. développons $F(x,I)$:

$$\begin{aligned} F(x,I) &= E_x\left(\int_0^\tau -Ie^{-rt} dt + Ve^{-r\tau}\right) = E_x\left(\frac{I}{r}\int_0^\tau -re^{-rt} dt + Ve^{-r\tau}\right) \\ &= E_x\left(\frac{I}{r}[e^{-rt}]_0^\tau + Ve^{-r\tau}\right) = E_x\left(\frac{I}{r}[e^{-r\tau}] - \frac{I}{r} + Ve^{-r\tau}\right) \\ &= E_x\left(\left(\frac{I}{r} + V\right)e^{-r\tau} - \frac{I}{r}\right) = E_x\left(\left(\frac{I}{r} + V\right)e^{-r\tau}\right) - \frac{I}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{I+V}{r}\right) E_x(e^{-r\tau}) - \frac{I}{r} = \left(\frac{I}{r}\right) E_x(e^{-r\tau}) + V E_x(e^{-r\tau}) - \frac{I}{r} \\ &= I \left(\left(\frac{1}{r}\right) E_x(e^{-r\tau}) - \frac{1}{r} \right) + V E_x(e^{-r\tau}) \dots \dots \dots (3.6) \end{aligned}$$

cette fonction est linéaire en I donc :

$$F(x) = \max_{0 \leq I_t \leq 1} F(x, I) = \begin{cases} F(x, 1) & \text{si } \left(\frac{1}{r}\right) E_x(e^{-r\tau}) - \frac{1}{r} \geq 0 \\ F(x, 0) & \text{si } \left(\frac{1}{r}\right) E_x(e^{-r\tau}) - \frac{1}{r} < 0 \\ \left(\left(\frac{1}{r}\right) E_x(e^{-r\tau}) - \frac{1}{r} \right) + V E_x(e^{-r\tau}) & \text{si } \left(\frac{1}{r}\right) E_x(e^{-r\tau}) - \frac{1}{r} \geq 0 \\ V E_x(e^{-r\tau}) & \text{si } \left(\frac{1}{r}\right) E_x(e^{-r\tau}) - \frac{1}{r} < 0 \end{cases} \dots \dots (3.7)$$

Remarque 1:

L'équation (3.7) reste à mieux expliciter en calculant $E_x(e^{-r\tau})$.

On présentera dans le lemme suivant, les démarches à suivre pour calculer $E_x(e^{-r\tau})$.

Lemme 2 :

Soit τ la variable aléatoire « temps d'arrêt » définie par :

$$\tau = \inf \{ t \geq 0 : X_t = 0 \}$$

on a le résultat suivant :

$$E(e^{-r\tau}) = \left(C_1 x^{v/2} I_v(2\sqrt{bx}) + C_2 x^{v/2} K_v(2\sqrt{bx}) \right)$$

avec:

$$v = 1 + \frac{2}{\beta^2}$$

$$b = \frac{2r}{I\beta^2}$$

$I_v(\cdot)$, $K_v(\cdot)$: fonction de Bessel modifiée de premier et deuxième espèce d'ordre v (voir annexe).

C_1, C_2 : sont des constantes à déterminer.

Preuve 2 :

$E_x(e^{-r\tau})$: l'espérance mathématique conditionnelle sachant $X_0 = x$ de la variable aléatoire $e^{-r\tau}$ ou :

$$E_x(e^{-r\tau}) = \int_0^{+\infty} e^{-rt} P_x^\tau(dt)$$

$P_x^r(t)$: La loi de probabilité de la variable aléatoire τ .

On pose $P_x^r(t)=u(x,t)dt$ donc on obtient :

$$E_x(e^{-r\tau}) = \int_0^{+\infty} e^{-rt} u(x,t) dt \dots\dots\dots(3.8)$$

posons :

$$E_x(e^{-r\tau}) = \psi(x).$$

la loi de τ vérifie le système (3.1) déjà défini dans la première partie de ce chapitre (voir théorème 1) qui admet la solution $u(x,t)$, et vérifie :

$$\frac{du}{dt} = Mu$$

$$(3.8) \Leftrightarrow \Psi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-rt} u(x,t) dt$$

donc:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^{+\infty} e^{-rt} u(x,t) dt \right) = \int_0^{+\infty} \frac{d(e^{-rt})}{dt} u(x,t) dt + \int_0^{+\infty} e^{-rt} \frac{du}{dt} dt. \\ &= \int_0^{+\infty} -r e^{-rt} u(x,t) dt + \int_0^{+\infty} e^{-rt} M u dt. \end{aligned}$$

avec:

$$Mu = I \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\beta^2}{2} x I \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ alors on obtient:}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} &= -r \int_0^{+\infty} e^{-rt} u(x,t) dt + \int_0^{+\infty} e^{-rt} \left(I \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\beta^2}{2} x I \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dt. \\ &= -r \int_0^{+\infty} e^{-rt} u(x,t) dt + I \int_0^{+\infty} e^{-rt} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dt - \frac{\beta^2}{2} x I \int_0^{+\infty} e^{-rt} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dt. \\ &= -r\Psi(x) + I \frac{d\Psi}{dx} - \frac{\beta^2}{2} x I \frac{d^2\Psi}{dx^2}. \end{aligned}$$

mais $\frac{d\Psi}{dt} = 0$ donc:

$$-\frac{\beta^2}{2} x I \frac{d^2\Psi}{dx^2} + I \frac{d\Psi}{dx} - r\Psi(x) = 0 \dots\dots\dots(3.9)$$

(3.9) est une équation différentielle du second ordre du type Bessel qui se s'écrit sous la forme équivalente suivante :

$$x\Psi'' + \left(\frac{-2}{\beta^2} \right) \Psi' + \frac{2r}{\beta^2 I} \Psi = 0 \Leftrightarrow \Psi'' + \left(\frac{-2}{\beta^2 x} \right) \Psi' + \frac{2rx}{\beta^2 I x^2} \Psi = 0$$

$$\Psi'' + \frac{1-2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta^2}\right)}{x} \Psi' + \left[\left(\frac{1}{2\beta\sqrt{I}} x^{\frac{1}{2}-1} \right)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\beta^2}\right)\right)^2}{x^2} \right] \Psi = 0 \dots (3.10)$$

on pose:

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\beta^2}$$

$$\beta = \frac{1}{\beta\sqrt{I}}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}$$

$$\nu = 1 + \frac{2}{\beta^2}$$

$$(3.10) \Leftrightarrow \Psi'' + \frac{1-2\alpha}{x} \Psi' + \left[(\beta\gamma x^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - (\gamma)^2}{x^2} \right] \Psi = 0$$

cette équation est du type de Lommel (voir annexe) admet la solution :

$$\Psi(x) = x^\alpha Z_\nu(\beta x^\gamma)$$

$$\Psi(x) = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta^2}} Z_\nu \left(\frac{2}{\beta\sqrt{I}} x^{\frac{1}{2}} \right) = x^{\frac{\nu}{2}} Z_\nu(2\sqrt{bx})$$

avec :

$$b = \frac{2r}{I\beta^2}$$

$$Z_\nu(2\sqrt{bx}) = C_1 I_\nu(2\sqrt{bx}) + C_2 K_\nu(2\sqrt{bx})$$

$$\Psi(x) = E_x(e^{-rt}) = C_1 x^{\nu/2} I_\nu(2\sqrt{bx}) + C_2 x^{\nu/2} K_\nu(2\sqrt{bx})$$

tq :

$I_\nu(\cdot)$, $K_\nu(\cdot)$: fonction de Bessel modifiée de premier et seconde espèce ν (voir annexe).

C_1, C_2 : sont des constantes à déterminer.

Ainsi on a trouvé une forme explicite de $E_x(e^{-rt})$.

Remplaçons dans le système (3.7) on obtient :

$$F(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{r} + V \right) \left(C_1 x^{1/2} I_\nu(2\sqrt{bx}) + C_2 x^{1/2} K_\nu(2\sqrt{bx}) \right) - \frac{1}{r} & \text{si } \left(\frac{1}{r} \right) E_x(e^{-r\tau}) - \frac{1}{r} \geq 0 \\ V \left(C_1 x^{1/2} I_\nu(2\sqrt{bx}) + C_2 x^{1/2} K_\nu(2\sqrt{bx}) \right) & \text{si } \left(\frac{1}{r} \right) E_x(e^{-r\tau}) - \frac{1}{r} < 0 \end{cases} \dots (3.11)$$

Remarque 2 :

Le système (3.11) contient des constantes (C_1, C_2) qu'on déterminera da suite. Pour nous on s'intéressera à la valeur de $F(x)$ lorsque le maximum ϵ atteint pour $I=1$. dans le cas contraire c'est à dire pour $I=0$, l'investissement productif est égal a sa valeur actualisée.

On posera $F(x)=F(x,1)$ pour la suite des démonstrations.

On a proposé au début de ce chapitre une règle de décision (P). cette règle à l'investisseur la possibilité de continuer son investissement ou de l'abandonner selon la valeur critique x^* .

La règle (P) peut s'écrire sous la forme équivalente :

$$(P) \Leftrightarrow \begin{cases} F(x) > 0 & \text{tant que } x < x^* \\ 0 & \text{tant que } x \geq x^* \end{cases}$$

Lemme 3 : soit $F(x)$ la fonction investissement productif trouvée par le système (3.11).

x^* est la solution de l'équation $F(x)=0$. ($F(x^*)=0$).

Preuve 3 :

Le système (3.11) montre bien que $F(x)$ est composée de fonctions continues (les propriétés des fonctions de Bessel).

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow x^*_+} F(x) = \lim_{x \rightarrow x^*_-} F(x) = F(x^*)$$

mais :

$$\lim_{x \rightarrow x^*_-} F(x) = 0.$$

Alors :
 $F(x^*)=0$.

Remarque 3 :

Le lemme 3 montre bien que $F(x^*)=0$. mais le problème qui se pose est-ce
fonction $F(x)$ admet une racine dans l'intervalle $[0, +\infty[$?

Proposition 2 :

la fonction $F(x)$ définie à travers le système (3.8) admet une solution u
dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

Preuve :

$F(x,1)$ est une fonction continue dérivable (de classe C^1) car elle se compo
fonctions continues et dérivables sur $[0, +\infty[$ (propriétés des fonctions de
Bessel).

Ecrire le développement de $F(x,1)$ au voisinage de 0 :

On utilisera des propriétés des fonctions de bessel on renvoie à l'annexe

$$\begin{aligned}
 F(x) &= F(x,1) = \left(\frac{1}{r} + V \right) \left(C_1 x^{v/2} I_v(2\sqrt{bx}) + C_2 x^{v/2} K_v(2\sqrt{bx}) \right) - \frac{1}{r} \\
 &= \left(\frac{1}{r} + V \right) \left(C_2 x^{v/2} \frac{K_{v-1}(2\sqrt{bx})}{I_{v-1}(2\sqrt{bx})} I_v(2\sqrt{bx}) + C_2 x^{v/2} K_v(2\sqrt{bx}) \right) - \frac{1}{r} \\
 &= \left(\frac{1}{r} + V \right) \left(C_2 x^{v/2} \frac{2(\sqrt{bx})^{v-1} \frac{\Gamma(v-1)}{\Gamma(v+1)} * (\sqrt{bx})^v}{(\sqrt{bx})^{v-1} \Gamma(v+1)} + C_2 x^{v/2} \frac{\Gamma(v)}{2(\sqrt{bx})^v} \right) - \frac{1}{r} + o(x^v) \\
 &= \left(\frac{1}{r} + V \right) \left(C_2 x^{v/2} \frac{\Gamma(v-1)}{2(bx)^{v-1/2}} * \frac{(bx)^{v/2}}{\Gamma(v+1)} * \frac{\Gamma(v)}{(bx)^{v-1/2}} + C_2 \frac{\Gamma(v)}{2(b)^{v/2}} \right) - \frac{1}{r} + o(x^v) \\
 &= \left(\frac{1}{r} + V \right) \left(\frac{C_2}{2} x^v \frac{\Gamma(v-1)\Gamma(v)}{\Gamma(v+1)} b^{v/2} b^{-v+1} x^{-v+1} + C_2 \frac{\Gamma(v)}{2(b)^{v/2}} \right) - \frac{1}{r} + o(x^v)
 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1+V}{r} \left(\frac{C_2 \Gamma(v-1) \Gamma(v)}{2 \Gamma(v+1)} b^{1-\frac{v}{2}} x + C_2 \frac{\Gamma(v)}{2(b)^{\frac{v}{2}}} \right) - \frac{1}{r} + o(x^v) \right)$$

$$F(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0} F(x,1) = \left(\frac{1+V}{r} \right) C_2 \frac{\Gamma(v)}{2(b)^{\frac{v}{2}}} - \frac{1}{r}$$

conclusion:

$$F(0^+) > 0 \dots \dots \dots (3.12)$$

Ecrire le développement de F(x,1) au voisinage de +∞ :

On utilisera des propriétés des fonctions de Bessel on renvoie à l'annexe

$$F(x,1) = \left(\frac{1+V}{r} \left(C_2 x^{\frac{v}{2}} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{4bx}} e^{-2\sqrt{bx}}}{e^{2\sqrt{bx}}} * \frac{e^{2\sqrt{bx}}}{\sqrt{4\pi\sqrt{bx}}} + C_2 x^{\frac{v}{2}} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{4bx}} e^{-2\sqrt{bx}}}{\sqrt{4\pi\sqrt{bx}}} \right) - \frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{x^v}\right) \right)$$

$$= \left(\frac{1+V}{r} \left(C_2 x^{\frac{v}{2} - \frac{1}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{b^{\frac{1}{4}}} e^{-2\sqrt{bx}} \right) - \frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{x^v}\right) \right)$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x,1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+V}{r} \left(\frac{C_2 \sqrt{\pi}}{b^{\frac{1}{4}}} e^{\left(-2\sqrt{bx} + \left(\frac{v}{2} - \frac{1}{4}\right) \log x\right)} \right) - \frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{x^v}\right) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+V}{r} \left(\frac{C_2 \sqrt{\pi}}{b^{\frac{1}{4}}} e^{\left(-\sqrt{x} \left(-2\sqrt{b} + \left(v - \frac{1}{2}\right) \frac{\log \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\right)} \right) - \frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{x^v}\right) \right)$$

$$= -\frac{1}{r} < 0.$$

conclusion: $F(+\infty) < 0 \dots \dots \dots (3.13)$

F(x) est une fonction continue croissante sur [0, +∞[, d'après les formules (3.12), (3.13) et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une valeur c positive qui vérifie F(c) = 0.

Mais d'après le lemme 3 . $c = x^*$.

D'après (P), Ainsi le système (3.11) devient :

$$F(x) = \begin{cases} \left(\frac{1+V}{r} \right) \left(C_1 x^{\frac{v}{2}} I_v(2\sqrt{bx}) + C_2 x^{\frac{v}{2}} K_v(2\sqrt{bx}) \right) - \frac{1}{r} & \text{si } x < x^* \\ 0 & \text{si } x \geq x^* \end{cases} \dots \dots \dots (3.14)$$

Le système (3.14) contient les constantes C_1, C_2 à déterminer. .

des conditions initiales du modèle écrit sous forme d'EDS (I), et les propriétés des fonctions de Bessel. On présentera dans le lemme suivant la détermination de la constante C_2 .

Lemme 4 : la constante C_2 figurant dans le système (3.14) est donnée par

$$C_2 = \frac{2b^{v/2}}{\Gamma(v)}$$

$$b = \frac{2r}{I\beta^2}.$$

$$v = 1 + \frac{1}{\beta^2}.$$

$\Gamma(\cdot)$: la fonction gamma.

Preuve 4 :

Pour $x=0$: la variable aléatoire temps d'arrêt τ est égale à zéro donc on obtient : $F(0)=V$

A partir de cette condition on peut trouver la constante C_2 .

Soit le développement de $F(x,1)$ au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} F(x,1) &= \left(\frac{1+V}{r} \right) \left(C_1 x^{v/2} \frac{\left(\frac{2\sqrt{bx}}{2} \right)}{\Gamma(v+1)} + C_2 x^{v/2} \frac{\Gamma(v)}{2 \left(\frac{2\sqrt{bx}}{2} \right)^v} \right) - \frac{1+o(x^v)}{r} \\ &= \left(\frac{1+V}{r} \right) \left(C_1 x^v \frac{b^{v/2}}{\Gamma(v+1)} + C_2 \frac{\Gamma(v)}{2b^{v/2}} \right) - \frac{1+o(x^v)}{r} \end{aligned}$$

mais $\lim_{x \rightarrow 0} F(x,1) = V$ donc :

$$\left(\frac{1+V}{r} \right) * \left(C_2 \frac{\Gamma(v)}{2b^{v/2}} \right) - \frac{1}{r} = V \Leftrightarrow \left(\frac{1+V}{r} \right) * \left(C_2 \frac{\Gamma(v)}{2b^{v/2}} \right) = V + \frac{1}{r}$$

$$\Leftrightarrow \left(C_2 \frac{\Gamma(v)}{2b^{v/2}} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow C_2 = \frac{2b^{v/2}}{\Gamma(v)}$$

On présentera dans le lemme suivant la détermination de la constante C_1 :

Lemme 5: la constante C_1 présentée dans le système (3.14) est donnée par

$$C_1 = C_2 \frac{K_{v-1}(2\sqrt{bx^*})}{I_{v-1}(2\sqrt{bx^*})}$$

Avec :

C_2 : constante trouvée par le lemme 4.

$I_{v-1}(\cdot)$, $K_{v-1}(\cdot)$: fonction de Bessel modifiée de premier et seconde espèce d'ordre $v-1$.

x^* : valeur critique.

$$b = \frac{2r}{I\beta^2}$$

$$v = 1 + \frac{1}{\beta^2}$$

Preuve 5 :

soit $F(x)$ la fonction investissement productif trouvée par le système (3.1

Des propriétés des fonctions de Bessel seront utilisées pour cela on renvoie l'annexe.

$F(x)$ est une fonction continue dérivable car elle est le composé de fonctions continues et dérivables sur \mathfrak{R}^+ .

Calculons $F'(x)$: (dérivé de la fonction $F(x,1)$)

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(x^{v/2} (C_1 I_v(2\sqrt{bx}) + C_2 K_v(2\sqrt{bx})) - \frac{1}{r} \right)' \\ &= \frac{v}{2} x^{(v/2)-1} (C_1 I_v(2\sqrt{bx}) + C_2 K_v(2\sqrt{bx})) + x^{v/2} (C_1 I'_v(2\sqrt{bx}) + C_2 K'_v(2\sqrt{bx})) \end{aligned}$$

mais :

$$\begin{cases} I'_v(2\sqrt{bx}) = \sqrt{\frac{b}{x}} \left(I_{v-1}(2\sqrt{bx}) - \frac{v}{2\sqrt{bx}} I_v(2\sqrt{bx}) \right) \\ K'_v(2\sqrt{bx}) = \sqrt{\frac{b}{x}} \left(K_{v-1}(2\sqrt{bx}) - \frac{v}{2\sqrt{bx}} K_v(2\sqrt{bx}) \right) \end{cases}$$

En remplace:

$$F'(x) = C_1 \sqrt{bx}^{\frac{v-1}{2}} I_{v-1}(2\sqrt{bx}) - C_2 \sqrt{bx}^{\frac{v-1}{2}} K_{v-1}(2\sqrt{bx})$$

on a déjà montré que x^* solution de l'équation $F(x)$

on obtient alors la dérivé de la fonction $F(x)$ la fonction $F'(x)$ définie par

$$F'(x) = \begin{cases} C_1 \sqrt{bx}^{\frac{v-1}{2}} I_{v-1}(2\sqrt{bx}) - C_2 \sqrt{bx}^{\frac{v-1}{2}} K_{v-1}(2\sqrt{bx}) & \text{si } x < x^* \\ 0 & \text{si } x \geq x^* \end{cases}$$

la continuité de la fonction $F'(x)$, donne :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_-^*} F'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_+^*} F'(x) = F'(x^*) \\ &\Rightarrow C_1 \sqrt{b} (x^*)^{\frac{v-1}{2}} I_{v-1}(2\sqrt{bx^*}) - C_2 \sqrt{b} (x^*)^{\frac{v-1}{2}} K_{v-1}(2\sqrt{bx^*}) = 0 \\ &\Rightarrow C_1 = C_2 \frac{K_{v-1}(2\sqrt{bx^*})}{I_{v-1}(2\sqrt{bx^*})} \end{aligned}$$

Finalement les constantes C_1, C_2 sont déterminées ce qui rend la formule de l'investissement productif facile à utiliser pour la simulation qui sera l'objectif principal du quatrième chapitre.

Après l'énoncé de tous ces lemmes on énonce la proposition suivante :

Proposition 3 : pour $\beta \neq 0$ la valeur de l'investissement productif est donnée

$$F(x) = \begin{cases} C_1 x^{v/2} I_v(2\sqrt{bx}) + C_2 x^{v/2} K_v(2\sqrt{bx}) + C_3 & \text{si } x < x^* \\ 0 & \text{si } x \geq x^* \end{cases}$$

avec:

$I_v(\cdot), K_v(\cdot)$ sont les fonction de bessel modifiées de première et seconde espèce

$$v = 1 + \frac{2}{\beta^2}$$

$$b = \frac{2r}{\beta^2}$$

$$C_3 = -\frac{1}{r}$$

x^* : valeur critique solution de l'équation $F(x)=0$

$$C_1 x^{*v/2} I_\nu(2\sqrt{bx^*}) + C_2 x^{*v/2} K_\nu(2\sqrt{bx^*}) + C_3 = 0$$

Les constantes C_1, C_2 sont données par :

$$C_2 = \left(\frac{1}{r} + V\right) * \frac{2b^{\frac{v}{2}}}{\Gamma(v)}$$

$$C_1 = C_2 \frac{K_{\nu-1}(2\sqrt{bx^*})}{I_{\nu-1}(2\sqrt{bx^*})}$$

conclusion :

Cette dernière formule rend la définition de l'investissement productif simple, plus claire et facile à utiliser. L'investisseur peut avoir à n'importe quel moment la valeur qui lui reste pour entreprendre son projet sous un certain seuil et ne pas aboutir.

Dans le quatrième chapitre cette formule sera utilisée pour l'implémentation d'un programme informatique pour comparer entre deux résultats : le premier est théorique trouvé par cette proposition et le deuxième empirique qui est l'estimateur de l'investissement productif.

Mais maintenant on passe à la dernière partie de ce chapitre qui est l'estimation du paramètre de l'EDS (I) : β par la méthode du maximum de vraisemblance. Mais pour cela, une structure statistique est nécessaire pour résoudre le problème d'estimation.

IV - ESTIMATION DU PARAMETRE β PAR LA METHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE :

L'équation (I) est une EDS du type Itô en fonction du taux d'investissement qu'on supposera constant est égale à I^* . Le paramètre β figure dans l'équation (I) comme paramètre inconnu qu'on propose d'estimer par la méthode du maximum de vraisemblance. Mais le problème d'estimation nécessite la construction d'une structure statistique.

4.1 constructions de la structure statistique :

avant de construire la structure statistique des définitions, des théorèmes seront énoncés et pour plus de détails on renvoie à [13]

Définition 3 : on définit les espaces :

$C_T = \{ \text{espace des applications continues de } [0, T] \rightarrow \mathfrak{R} \}$.

$S_T =$ tribu sur C_T engendré par les applications $\pi_t : x \rightarrow x_t, t \geq 0$

Le théorème suivant donne la possibilité de définir des lois de probabilité équivalentes pour des EDS de la forme générale :

$$dX_t = \begin{cases} a(x,t)dt + b(x,t)dw_t, \dots\dots\dots(3.15) \\ X_0 = x \end{cases}$$

Mais avant d'énoncer ce théorème que veut dire lois équivalentes?. On ré-
 cette question par la définition suivante :

Définition 4 : (probabilité équivalente)

Soit (Ω, A, P) un espace de probabilité. Une probabilité Q sur (Ω, A) est
 absolument continue par rapport à P si :

$$\forall A \in A \quad P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0$$

Ce qui veut dire que Q est absolument continue par rapport à P si, et si
 seulement s'il existe une variable aléatoire Z à valeurs positives ou nulles
 (Ω, A) telle que :

$$\forall A \in A \quad Q(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega)$$

Z est appelé densité de Q par rapport à P et parfois notée dQ/dP .

Les probabilités P et Q sont dites équivalentes si chacune d'elles est
 absolument continue par rapport à P , de densité Z , alors P et Q sont
 équivalentes si et seulement si $P(Z > 0) = 1$.

On énonce le théorème de GIRSANOV pour plus de détails on renvoie à

Théorème 2 : soit $a(\cdot), b(\cdot)$ des applications mesurables telles que :

A1 : $b(\cdot)$ est inversible.

A2 : l'équation différentielle stochastique $Z_t = \int_0^t b(z) dw_s$ admet une solutio-

faible unique.

$$A3 : \int_0^T \|a(\cdot)\|^2 < +\infty \quad \forall T > 0$$

A4 : $Q_b^T \left\{ \int_0^T \|b(\cdot)\|^2 < +\infty \right\} = 1 \quad \forall T > 0$ où Q_b^T désigne la loi de la solution de l'équation $dZ_t = b(z)dw_t$.

Le système (3.12) admet une solution faible si et si seulement si on a :

$$\forall T > 0 : E_{Q^T} \left[\exp \int_0^T \langle b^{-1}(\cdot)a(\cdot), b^{-1}(\cdot)d\pi_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^T \|b^{-1}(\cdot)a(\cdot)\|^2 ds \right] = 1$$

de plus il y a unicité de la solution faible et pour tout $T > 0$ les lois $P'_{a,b}$; Q_b^T équivalentes, la densité est donnée par :

$$\frac{dP'_{a,b}}{dQ_b^T} = \exp \left[\int_0^T \langle b^{-1}(\cdot)a(\cdot), b^{-1}(\cdot)d\pi_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^T \|b^{-1}(\cdot)a(\cdot)\|^2 ds \right]$$

Pour l'application du théorème il faut assurer l'existence d'une solution faible du système (3.15). Pour cela, on donne dans la suite les conditions nécessaires pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution forte de (3.15). (existence d'une solution forte implique l'existence d'une solution

Théorème 3 : soient $a(\cdot), b(\cdot)$ deux fonctions mesurables telles que :

$\forall x, y \in \mathfrak{R} :$

$$1- \|a(x)-a(y)\| + \|b(x)-b(y)\| \leq K |x-y|$$

$$2- \|a(x)\| \leq K(1+|x|)$$

$$\|b(x)\| \leq K'(1+|x|)$$

K, K' sont des constantes

Si 1 et 2 sont vérifiées le système (3.15) admet une solution forte unique sûrement à trajectoires continues.

Après la définition de ces outils mathématiques nécessaires pour la construction de la structure statistique on va les appliquer pour le système

4.2- Existence et unicité de la solution du système (I) :

On pose dans l'EDS (I) : $I_t = I^*$; on obtient ainsi:

$$\begin{cases} dX_t = -I^* dt + \beta \sqrt{I^* X_t} dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \dots\dots\dots (III)$$

I^* : est le taux d'investissement supposé constant.

Vérifions les conditions 1 et 2 du théorème 2 pour le modèle défini par le système (III) sachant que :

$$a(x) = -I^* ; \quad b(x) = \beta \sqrt{I^* x}$$

condition 1 :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathfrak{R}^+ : & |a(x)-a(y)| + |b(x)-b(y)| < K|x-y| \\ |a(x)-a(y)| & = |-I^* + I^*| = 0 \\ |b(x)-b(y)| & = |\beta \sqrt{I^* x} - \beta \sqrt{I^* y}| = |\beta \sqrt{I^*}| |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \dots\dots\dots (3.16) \end{aligned}$$

soit $f(x) = \sqrt{x}$

f est une fonction continue dérivable sur \mathfrak{R}^+ d'après le théorème des accroissement finis:

$\exists c \in \mathfrak{R}^+ \quad tq:$

$$\begin{aligned} f(x)-f(y) &= (x-y) f'(c) \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = (x-y)f'(c) \\ &\Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = |x-y| |f'(c)| \\ &\Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq |x-y| (|f'(c)| + |x-y|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3.16) \Leftrightarrow |b(x)-b(y)| &\leq |\beta \sqrt{I^*}| (|x-y| |f'(c)| + |x-y|) \\ &\leq (|\beta \sqrt{I^*}| |f'(c)| + |\beta \sqrt{I^*}|) |x-y| \\ &\leq K |x-y| \end{aligned}$$

ainsi la condition 1 est vérifiée

condition 2 :

$$\begin{aligned} |b(x)| &= |\beta \sqrt{I^* x}| = |\beta \sqrt{I^*}| |\sqrt{x}| \leq |\beta \sqrt{I^*}| |x| \leq |\beta \sqrt{I^*}| |x| + |\beta \sqrt{I^*}| \\ &\leq |\beta \sqrt{I^*}| (1 + |x|) \end{aligned}$$

Aussi la condition 2 est vérifiée donc le système (III) admet une solution en trajectoires et cela implique aussi l'existence de la solution faible.

Finalement on peut définir la structure statistique de la façon suivante :

4.3- Structure statistique et problème d'estimation :

Commentaire [MSOffice1]:

On observe sur l'intervalle $[0, T]$, $T > 0$ une fonction continue $(X_t)_{t \geq 0}$. suppose qu'il existe $\hat{\beta}$ l'élément d'un ensemble de paramètre $\Theta \subset \mathfrak{R}$, $\hat{\beta}$ dit «estimateur de β ».

Proposition 4 :

Pour tout $\beta \in \Theta$ et tout $T > 0$ les lois de probabilités P_β^T, Q^T sont équival et la dérivée de RANDON-NIKODYNE est donnée par :

$$\frac{dP_\beta^T}{dQ^T} = \exp \left[\int_0^T -\frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{I^*}{\pi_s}} d\pi_s + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{\beta^2} \frac{I^*}{\pi_s} ds \right]$$

de plus relativement à P_β^T, Q^T, π_t est solution de l'équation (III) pour le processus de Wiener $(N_t)_{t \geq 0}$ définie par :

$$N_t = \frac{1}{\beta \sqrt{I^* x}} \left(\pi_t - \int_0^t I^* ds \right)$$

Où P_β^T désigne la loi de probabilité de $(X_t)_{t \geq 0}$ solution de (III).

Preuve :

D'après le théorème 2, l'équation (III) admet une unique solution forte de faible et l'équation :

$$dX_t = \beta \sqrt{x I^*} dW_t$$

admet une solution faible de plus les hypothèses A1, A3 sont vérifiées car

A1 : $b(x)$ est inversible parce que $\beta \neq 0, I^* \neq 0$ et $b^{-1}(x) = \frac{1}{\beta \sqrt{I^* x}}$ est bien c

A3 : $\int_0^T |a(x)|^2 ds < +\infty$ est vérifier car :

$$\int_0^T |a(x)|^2 ds = \int_0^T | -I^* |^2 ds = I^{*2} T < +\infty$$

On peut appliquer le théorème 2 pour l'équation (III) c'est à dire que les P_β^T, Q^T sont équivalentes et on a :

$$\frac{dP_{\beta}^T}{dQ^T} = \exp \left[\int_0^T -\frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{I^*}{\pi_s}} d\pi_s + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{\beta^2} \frac{I^*}{\pi_s} ds \right]$$

Ainsi on peut estimer le paramètre β dans la structure : $(C_T, S_T, P_{\beta}^T, \beta \in \Theta)$

Après la construction de la structure statistique on utilisera la méthode maximum de vraisemblance pour estimer β .

4.4 – Estimation du paramètre β par la méthode du maximum de vraisemblance

La méthode du maximum de vraisemblance (MMV) consiste à chercher l'existence d'une statistique $\hat{\beta}$ telle que :

$$\frac{dP_{\hat{\beta}}^T(x)}{dQ^T} = \text{SUP}_{\beta \in \Theta} \frac{dP_{\beta}^T(x)}{dQ^T}$$

Dans certain cas cela se traduit par :

$$\frac{d}{d\beta} \left(\log \frac{dP_{\beta}^T(x)}{dQ^T} \right) = 0, \quad x \in C_T$$

on définit :

$L_T(\beta, .)$: fonction log vraisemblance.

$L_T^{(1)}(\beta, .)$: La première dérivée de $L_T(\beta, .)$ Par rapport à β .

$L_T^{(2)}(\beta, .)$: La deuxième dérivée de $L_T(\beta, .)$ Par rapport à β .

On calculera pour l'équation (III) les fonctions définies juste avant, on trouve

$$\begin{aligned} L_T(\beta, .) &= \log \left(\frac{dP_{\beta}^T}{dQ^T} \right) = \int_0^T -\frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{I^*}{\pi_s}} d\pi_s + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{\beta^2} \frac{I^*}{\pi_s} ds \\ &= -\frac{1}{\beta} \int_0^T \sqrt{\frac{I^*}{\pi_s}} d\pi_s + \frac{1}{2\beta^2} \int_0^T \frac{I^*}{\pi_s} ds \end{aligned}$$

aussi :

$$\begin{aligned} L_T^{(1)}(\beta, \cdot) &= \frac{dL_T(\beta, \cdot)}{d\beta} \\ &= \frac{1}{\beta^2} \int_0^T \sqrt{\frac{I^*}{\pi_s}} d\pi_s + \frac{1}{\beta^3} \int_0^T \frac{I^*}{\pi_s} ds \end{aligned}$$

encore :

$$\begin{aligned} L_T^{(2)}(\beta, \cdot) &= \frac{dL_T^{(1)}(\beta, \cdot)}{d\beta} \\ &= - \left(\frac{2}{\beta^3} \int_0^T \sqrt{\frac{I^*}{\pi_s}} d\pi_s + \frac{2}{\beta^4} \int_0^T \frac{I^*}{\pi_s} ds \right) < 0 \end{aligned}$$

on présentera dans le paragraphe suivant, la proposition qui nous donne l'estimateur $\hat{\beta}$ du paramètre β trouvé par la méthode du maximum de vraisemblance.

Proposition 5 :

L'estimateur $\hat{\beta}$ de l'équation différentielle stochastique définie à travers le système (III) est donné par :

$$\hat{\beta} = \left(- \int_0^T \frac{I^*}{\pi_s} ds \right) \left(\int_0^T \sqrt{\frac{I^*}{\pi_s}} d\pi_s \right)^{-1}$$

preuve :

cherchons l'estimateur de β :

$$\begin{aligned} L_T^{(1)}(\beta, \cdot) = 0 &\Leftrightarrow \frac{dL_T(\beta, \cdot)}{d\beta} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\beta^2} \int_0^T \sqrt{\frac{I^*}{\pi_s}} d\pi_s + \frac{1}{\beta^3} \int_0^T \frac{I^*}{\pi_s} ds = 0 \end{aligned}$$

l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre β :

$$\hat{\beta}_T = \left(- \int_0^T \frac{I^*}{\pi_s} ds \right) \left(\int_0^T \sqrt{\frac{I^*}{\pi_s}} d\pi_s \right)^{-1}, \text{ pour tout } T :$$

Remarque :

L'estimateur $\hat{\beta}_T$ peut être simulé, et exploité statistiquement (voir [11]).

conclusion :

on vient de tirer de ce chapitre trois résultats importants, qui seront utilisés dans le chapitre suivant. La simulation des instants de premiers passage ainsi que la simulation de l'investissement productif seront les objets principaux du chapitre suivant.

La formule explicite de l'investissement productif sera utilisée pour l'implémentation d'un programme informatique pour comparer entre deux résultats : le premier est théorique trouvé par cette proposition et le deuxième est empirique qui est l'estimateur de l'investissement productif.

Dans ce chapitre, on étudiera l'application des résultats trouvés théoriquement dans le chapitre 3, pour le modèle décrit à l'aide du système d'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dX_t = -I_t dt + \beta \sqrt{I_t X_t} dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \dots\dots\dots(I)$$

Au début de ce chapitre, on déterminera une forme explicite de l'estimateur de l'investissement productif qui est la valeur que l'investisseur devrait disposer pour accomplir son projet d'investissement. Cette valeur est le résultat principal tiré du chapitre précédent. On simulera ainsi deux échantillons de l'investissement productif : le premier théorique, trouvé par la formule théorique indiquée au chapitre 3 et le deuxième empirique trouvé par l'estimateur de l'investissement productif. Pour la validation des résultats, des tests statistiques seront utilisés afin de comparer entre les deux échantillons.

La simulation des deux échantillons nécessite la simulation des temps d'arrêts permettant d'estimer leur densité par la méthode non paramétrique du noyau.

Il est à noter que pour tous nos programmes, nous utiliserons des générateurs de random et de variables gaussiennes propre au langage MATLAB.

1. Estimation de l'investissement productif :

Dans ce paragraphe on estimera l'investissement productif afin de pouvoir en simuler un échantillon empirique.

Rappelons que dans le chapitre 3, nous avons défini l'investissement productif par la formule suivante :

$$F(x) = \max_{0 \leq I_t \leq 1} E_x \left(\int_0^{\tau} -I_t e^{-rt} dt + V e^{-r\tau} \right) \dots \dots \dots (II)$$

Nous avons trouvé une forme explicite de (II) donnée Par :

$$F(x) = \begin{cases} C_1 x_{v/2} I_v(2\sqrt{bx}) + C_2 x_{v/2} K_v(2\sqrt{bx}) + C_3 & \text{si } x < x^* \\ 0 & \text{si } x \geq x^* \end{cases} \dots \dots \dots (4.1)$$

avec:

$I_v(\cdot), K_v(\cdot)$ sont les fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce d'ordre v .

$$v = 1 + \frac{2}{\beta_2}$$

$$b = \frac{2r}{\beta_2}$$

$$C_3 = -\frac{1}{r}$$

x^* : valeur critique solution de l'équation $F(x) = 0$

$$C_1 x_{v/2} I_v(2\sqrt{bx}) + C_2 x_{v/2} K_v(2\sqrt{bx}) + C_3 = 0$$

Les constantes C_1, C_2 sont données par :

$$C_2 = \left(\frac{1}{r} + V \right) * \frac{2b^{v/2}}{\Gamma(v)}$$

$$C_1 = C_2 \frac{K_{v-1}(2\sqrt{bx^*})}{I_{v-1}(2\sqrt{bx^*})}$$

(4.1) est la valeur théorique de l'investissement productif qu'on programmera. Mais pour exploiter le résultat (4.1), on fera une estimation de $F(x)$. Et à l'aide de test statistique : on comparera les deux résultats trouvés autrement dit : est-ce que la valeur estimée se rapproche-t-elle de la valeur théorique ?

Mais avant cela, on donnera dans la proposition suivante une forme explicite de l'estimateur de l'investissement productif :
Proposition 1 : pour un x donnée ($X_0=x$) un estimateur de l'investissement productif est donnée par :

$$\hat{F}(x) = \left(\frac{1}{r} + V\right) S_x - \frac{1}{r} \quad \text{si } x < x^*$$

avec :

x^* : valeur critique (voir chapitre 3).

$$S_x = \frac{\sum_{i=0}^M e^{-r\tau_i x}}{M}$$

Preuve 1 :

L'équation (4.1) est la définition de l'investissement productif. On définit la fonction :

$$F(x, I) = E_x \left(\int_0^{\tau} -I_t e^{-rt} dt + V e^{-r\tau} \right)$$

supposons que l'investissement I_t , comme taux constant appartenant à $[0,1]$.

$$F(x) = \max_{0 \leq I_t \leq 1} F(x, I)$$

Il suffit de maximiser la fonction $F(x, I)$. développons $F(x, I)$:

$$\begin{aligned} F(x, I) &= E_x \left(\int_0^{\tau} -I e^{-rt} dt + V e^{-r\tau} \right) = E_x \left(\frac{I}{r} \int_0^{\tau} -r e^{-rt} dt + V e^{-r\tau} \right) \\ &= E_x \left(\frac{I}{r} [e^{-rt}]_0^{\tau} + V e^{-r\tau} \right) = E_x \left(\frac{I}{r} [e^{-r\tau}] - \frac{I}{r} + V e^{-r\tau} \right) \\ &= E_x \left(\left(\frac{I}{r} + V \right) e^{-r\tau} - \frac{I}{r} \right) = E_x \left(\left(\frac{I}{r} + V \right) e^{-r\tau} \right) - \frac{I}{r} \\ &= \left(\frac{I}{r} + V \right) E_x (e^{-r\tau}) - \frac{I}{r} = \left(\frac{I}{r} \right) E_x (e^{-r\tau}) + V E_x (e^{-r\tau}) - \frac{I}{r} \\ &= I \left(\left(\frac{1}{r} \right) E_x (e^{-r\tau}) - \frac{1}{r} \right) + V E_x (e^{-r\tau}) \dots \dots \dots (4.2) \end{aligned}$$

cette fonction est linéaire en I donc, elle atteint son maximum pour $I=1$ si :

$$\left(\frac{1}{r} \right) E_x (e^{-r\tau}) - \frac{1}{r} > 0$$

On supposera alors $I=1$ dans la suite et pour tous les programmes suivants. on obtiendra :

$$F(x,1) = \left(\frac{1}{r} + V\right) E_x(e^{-r\tau}) - \frac{1}{r} \quad \text{si } x < x^*$$

On rappelle que x^* est la valeur critique : solution de $F(x)=0$ déjà définie au chapitre (3).

La variable τ est comme on l'a déjà défini par le premier instant de passage de zéro, l'estimateur de $E_x(e^{-r\tau})$ peut être donné par :

$$S_x = \frac{\sum_{i=0}^M e^{-r\tau_i^x}}{M}$$

où :

$(\tau_1^x, \tau_2^x, \dots, \tau_M^x)$ est un échantillon de τ donné par simulation sachant $X_0 = x$ ainsi l'estimateur de l'investissement productif sera la fonction :

$$\hat{F}(x) = \left(\frac{1}{r} + V\right) S_x - \frac{1}{r} \quad \text{si } x < x^* \dots\dots\dots(4.3)$$

Remarque 1 :

Pour programmer la fonction $\hat{F}(x)$, cela nécessite, d'après la formule (4.3), la simulation d'un échantillon de temps d'arrêts relatif au processus solution de l'EDS (I). Ceci se fera après la simulation des trajectoires : solution de l'EDS par la méthode de discrétisation (voir chapitre 1). En premier lieu le choix de la valeur initiale « x » est important. Cette valeur ne doit pas être supérieure à x^* valeur critique solution de l'équation $F(x)=0$.(voir chapitre 3).

Chercher x^* solution de $F(x)=0$, nous donnera la possibilité de choisir le point initial de nos simulations. Cette démarche sera l'étape 1 de notre programme principal qu'on introduira dans le paragraphe ci-après :

2. programme de simulation:

Etape (1) : (détermination de la solution de l'équation $F(x)=0$)

On détermine x^* par la méthode numérique connue sous le nom de «dichotomie » qui consiste à chercher x^* dans l'intervalle $I = [a,b]$ de la manière suivante :

Soit : $a_0 = a$
 $b_0 = b$

$$c_0 = (a+b)/2$$

Si $f(a_0)*f(c_0) < 0$ on pose : $a_1 = a_0$ et $c_0 = b_1$

Si non $f(a_0)*f(c_0) > 0$ on pose : $a_1 = c_0$ et $b_0 = b_1$ et $c_1 = (a_1 + b_1)/2$.

Refaire le même test, ainsi on obtient une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$ avec :

$$c_n = (a_n + b_n)/2.$$

Fixons un epsilon (ε) assez petit, et lorsque :

$$\exists n_0 \forall n > n_0 : |f(c_n)| < \varepsilon$$

La solution est donnée par : $x^* = c_{n_0}$

Après la détermination de x^* , on choisira la valeur initiale inférieure à x^* pour la simulation des trajectoires solution de l'EDS (I) par la méthode de discrétisation. Qu'on introduira dans le paragraphe suivant :

Etape 2 : (simulation des trajectoires X_t)

La méthode de discrétisation reste toujours le meilleur moyen pour simuler les trajectoires solution des EDSs du type (I) surtout lorsque la solution exacte est difficile à déterminer. (pour plus de détails voir chapitre1)

On définit le schéma de discrétisation suivant :

$$\begin{cases} X_{i+1} = X_i - I\Delta_i + \beta\sqrt{IX_i}\sqrt{\Delta_i}G_{i+1} \\ X_0 = x \end{cases}$$

- Le terme G_{i+1} est la gaussienne qui suit une loi normale centrée réduite. Rappelons aussi que Δ_i est le pas de discrétisation. ($\Delta_i = t_{i+1} - t_i$).
- L'expression $\sqrt{\Delta_i}G_{i+1}$ devient une variable normale centrée et de variance Δ_i . c'est cette variable qui substituera l'accroissement du mouvement brownien.
- Le taux d'investissement I est égale à 1.
- La valeur initiale x_0 est fixée à l'étape 1 du programme.
- On choisira un pas de discrétisation égale à 1/1000.

- Le paramètre de l'EDS (I) qui est β prendra la valeur 0.63.

Résultats et graphes :

La simulation du modèle (I) illustrant les résultats de la simulation par rapport au temps discrétisé en pas équidistants a donné la courbe suivante :

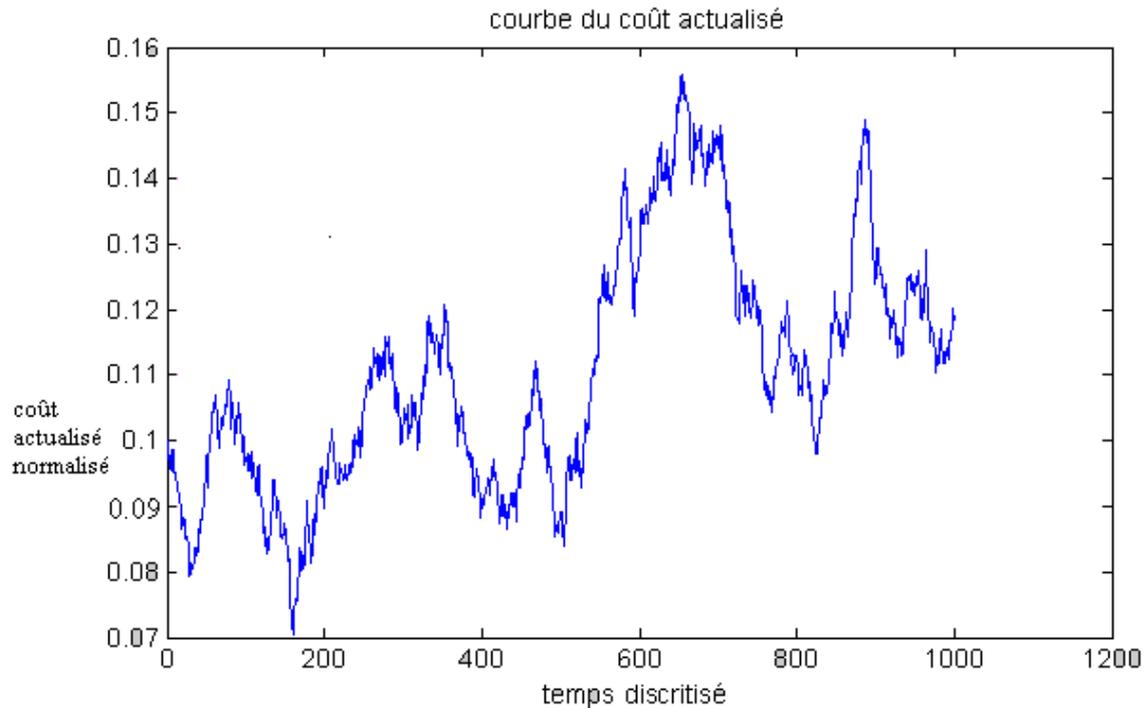


Figure 1 : simulation du coût actualisé du projet. Le coût ici est simulé sur 1000 pas égale à 1/1000, par l'usage du schéma de discrétisation.

La simulation des trajectoires, solution du système (I) nous donnera la possibilité de simuler les instants de premier passage (temps d'arrêt). Cette simulation sera développée dans le paragraphe suivant.

Etape 3 : (simulation des temps d'arrêt)

Nous allons déterminer le premier temps de passage des trajectoires simulées dans l'étape précédente par une valeur donnée qui soit proche de 0 par exemple 0.01.i.e :

$$\tau = \inf \{t / X_t = 0\} \approx \{t / X_t \leq 0.01\}$$

Pour obtenir un échantillon de temps d'arrêt. On propose de générer cent trajectoires de même valeur initiale et déterminée les premiers instants de passage de ces trajectoires de l'instant 0.01.

On obtiendra ainsi un échantillon de temps d'arrêt relatif à l'EDS (I) de taille $M=100$ qui sera utilisé pour estimer l'investissement productif. Mais avant cela on propose d'estimer la densité de la variable aléatoire temps d'arrêt τ relatif au processus X_t solution de l'EDS (I) (pour plus de détails sur cette méthode voir annexe). Rappelons que dans le chapitre 3, nous avons trouvés la loi de probabilité de la variable aléatoire τ qui parait très compliqué, pour cela on propose l'estimation de la densité de cette variable par la méthode du noyau.

Estimation non paramétrique des instants de premier passage :

La densité du noyau pour la variable aléatoire τ est donnée par la formule suivante :

$$\hat{f}(\tau) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau-x_i}{h}\right)^2}$$

τ : échantillon observer par simulation de taille 100.

$K(\cdot)$: densité du noyau, on a choisi la densité symétrique de la loi normale.

$N=200$.

$h : 0.5$.

(x_1, x_2, \dots, x_n) : L'échantillon qui subdivisera $[\tau_{(1)}, \tau_{(n)}]$.

On obtiendra ainsi une densité non paramétrique des instants de premier passage. L'implémentation de cette méthode donne le graphe suivant :

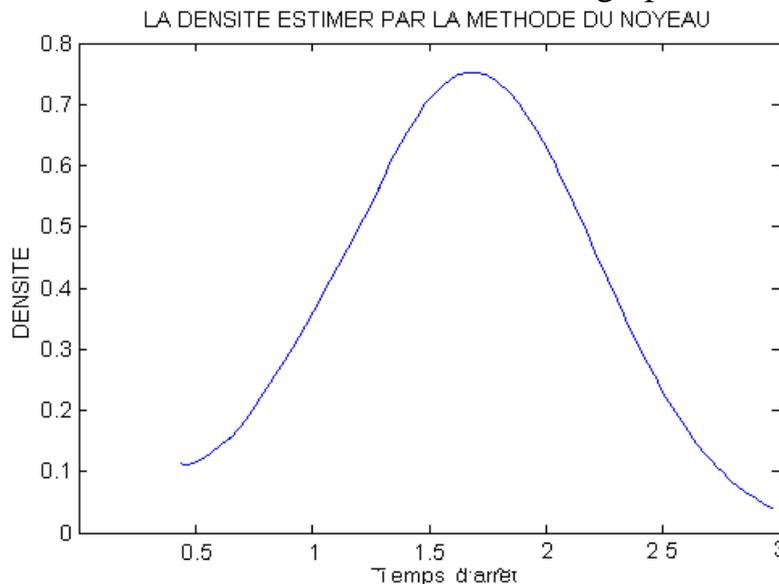


Figure 2 : Densité estimer par la méthode du noyau de la variable aléatoire temps d'arrêt avec un choix de h égale à 0.5.

L'échantillon de temps d'arrêt trouvés par simulation sera utilisé pour l'estimation de l'investissement productif. Repris dans le paragraphe suivant :

Etape 4 : (simulation de l'estimateur de l'investissement productif)

Pour un « x_1 » ($X_0=x_1$) fixé au départ inférieur à x^* solution de l'équation $F(x)=0$. soit l'échantillon $(\tau_1^{x_1}, \tau_2^{x_1}, \dots, \tau_M^{x_1})$ simuler à l'étape 3 du programme principal et d'après la proposition 1 on a :

$$\hat{F}(x_1) = \left(V + \frac{1}{r} \right) \frac{\sum_{i=1}^M e^{-r\tau_i} x_1}{M} - \frac{1}{r}.$$

Cette estimation se fera cents fois pour obtenir un échantillon d'estimateur de l'investissement productif pour le même point initiale x_1 afin d'obtenir un échantillon d'estimateur de l'investissement productif noté :

$$\left(\hat{F}_1(x_1), \hat{F}_2(x_1), \dots, \hat{F}_{100}(x_1) \right)$$

Pour réduire les erreurs de simulation, on calculera la moyenne empirique de cette échantillon pour en tirer une valeur représentatif. Donc pour $X_0 = x_1$ soit :

$$\hat{F}(x_1) = \frac{\sum_{i=1}^{100} \hat{F}_i(x_1)}{100}$$

On répétera cette démarche cent fois pour des valeurs différentes de $X_0 = (x_i)_{1 \leq i \leq 100}$ inférieure à x^* . a la fin on obtiendra un échantillon de l'I.P estimé donné par :

$$\hat{F}_{I.P \text{ estimé}} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{100} \hat{F}_i(x_1)}{100}, \frac{\sum_{i=1}^{100} \hat{F}_i(x_2)}{100}, \dots, \frac{\sum_{i=1}^{100} \hat{F}_i(x_{100})}{100} \right)$$

$$\hat{F}_{I.P \text{ estimé}} = \left(\hat{F}(x_1), \hat{F}(x_2), \dots, \hat{F}(x_{100}) \right)$$

Nous obtenons dans la suite aussi l'histogramme de l'investissement moyen productif estimé, par l'usage du logiciel MATLAB.

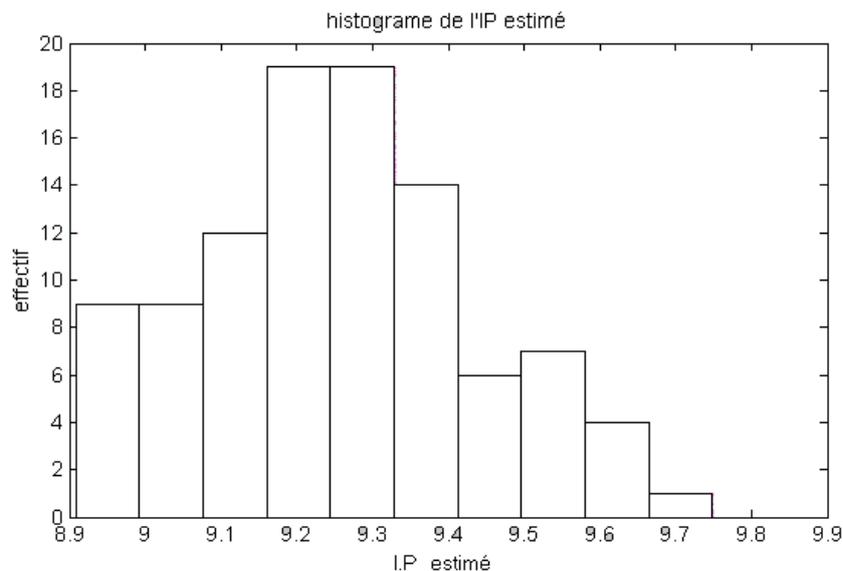


Figure 3 : histogramme de l'investissement productif estimé de taille 100

Parallèlement au calcul de l'estimateur de l'investissement productif, on simulera aussi un échantillon de l'investissement productif par l'usage de la formule (4.1) trouvé dans le chapitre3. pour former un échantillon théorique de l'investissement productif qu'on introduira dans le paragraphe suivant :

Etape 5 : (simulation de l'investissement productif théorique)

L'expression (4.1) est la valeur théorique de l'investissement productif C_1, C_2 sont des constantes bien définies auparavant.

Pour les même valeurs initiales $(x_i)_{1 \leq i \leq 100}$ on calculera, l'investissement productif théorique et on obtient un échantillon noté :

$$F_{I.P \text{ théorique}} = (F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_{100})).$$

t.q :

$$F(x_i) = C_1 x_i^{v/2} I_v(2\sqrt{bx_i}) + C_2 x_i^{v/2} K_v(2\sqrt{bx_i}) + C_3 \dots \dots \dots \text{pour } 1 \leq i \leq 100$$

Nous obtenons dans la suite aussi l'histogramme de l'investissement productif théorique, par l'usage du logiciel MATLAB.

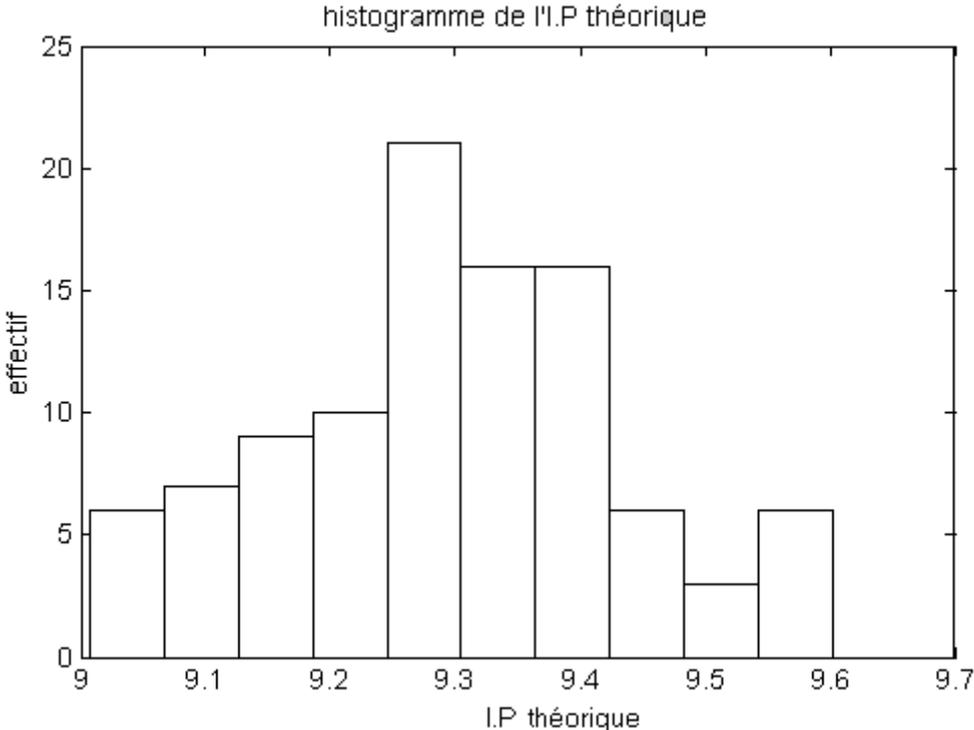


Figure 4 : histogramme de l'investissement productif théorique de taille 100. Pour des considérations économiques, On présentera dans le graphe suivant les deux courbes de l'investissement productif estimé et théorique :

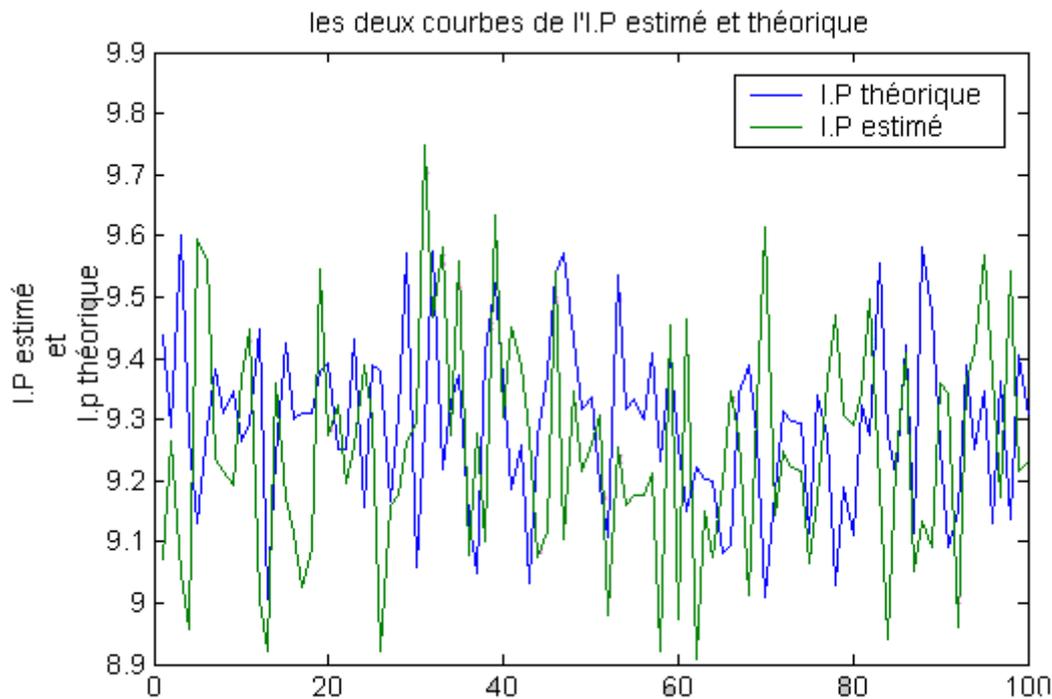


Figure 5: les courbes des deux échantillons empirique et théorique de l'investissement productif (I.P) de taille 100.

Commentaire 1 :

On remarque que la courbe de l'investissement productif se rapproche de la courbe de l'investissement théorique. Les deux échantillons varient dans le même intervalle.

Dans la suite, on appliquera la méthode non paramétrique du noyau (voir annexe) pour estimer les deux densités de l'investissement productif empirique et théorique pour les deux échantillons simulés auparavant.

3.estimation de la densité du noyau pour l'I.P estimé et théorique :

Les densités estimées par la méthode du noyau sont données par :

$$\hat{f}(\hat{F}) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{F} - x_i}{h} \right)^2}$$

$$\hat{f}(F) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{F - x_i}{h} \right)^2}$$

avec :

\hat{F} : échantillon observé par simulation de l'investissement productif estimé de taille 100.

F : échantillon observé par simulation de l'investissement productif théorique de taille 100.

$h=0.5$.

(x_1, x_2, \dots, x_n) : échantillon qui subdivisera $[\hat{F}_{(1)}, \hat{F}_{(n)}], [F_{(1)}, F_{(n)}]$ respectivement.

$n=200$.

Dans le graphe suivant on présentera les deux densités du noyau, par l'usage du logiciel MATLAB :

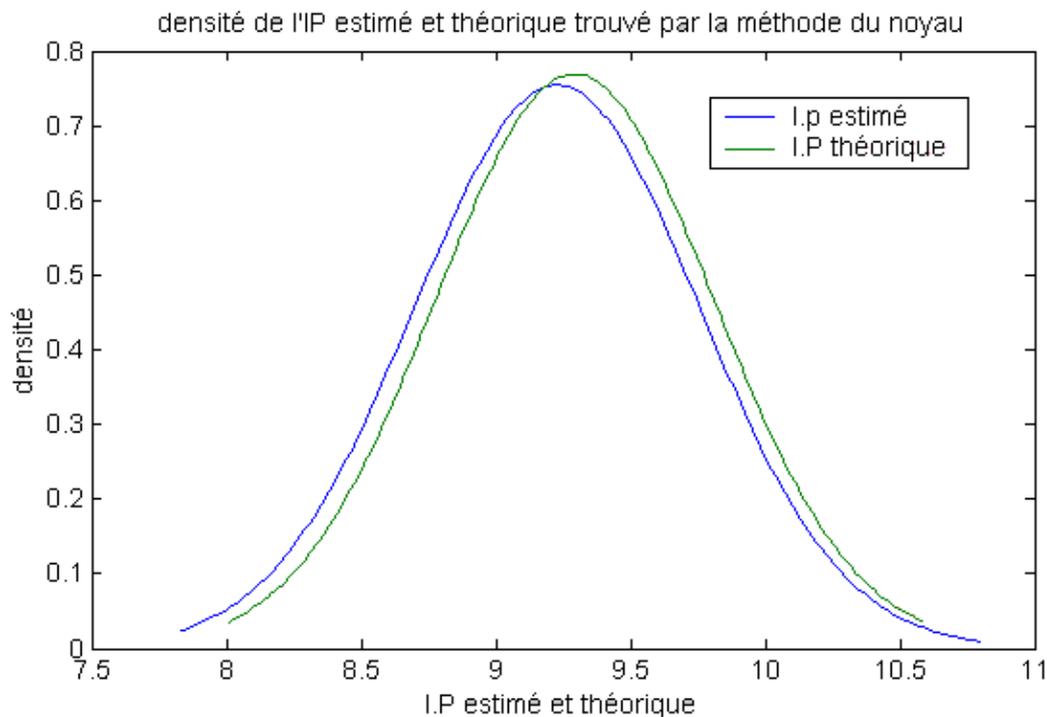


Figure 6 : densité estimé par la méthode du noyau des variables aléatoires I.P. estimé et théorique avec un choix de h égale à 0.5.

Commentaire 2 :

On remarque que les deux densités sont très proches. Cela veut dire que la densité de l'I.P. estimé se rapproche de l'I.P. théorique, car en multipliant les simulations, le simulateur engendre des erreurs qui dispersent les deux échantillons.

Finalement on utilisera un test statistique basé sur les données déjà trouvées par simulation pour valider les résultats trouvés.

4.Application des tests :

Nous allons appliquer le test de Kolmogorov Smirnov (pour plus de détails sur cette méthode voir annexe) aux deux échantillons comportant 100 valeurs. Ces échantillons sont construits après simulation de l'investissement productif empirique \hat{F} et théorique F de taille cent.

Les tests seront effectués à l'aide du logiciel statistique SPSS. Afin d'obtenir réponse à la question suivante : est-ce que les deux échantillons issus de la simulation de l'investissement productif estimé et théorique ont la même distribution ?

Résultats donnés par le test de KS :

L'application du test de KS sur les deux échantillons de l'investissement productif empirique et théorique à donner les résultats suivants :

	Taille	Moyenne	Ecart-type	Minimum	Maximum
Echantillon estimé	100	9.29	0.1	8.9097	9.7484
Echantillon théorique	100	9.25	0.1	9.0075	9.6020

On voit bien quand on regarde les moyennes se rapprochent bien, et les deux échantillons varient presque de la même façon.

Résultats donnés par le test de Kolmogorov smirnov pour l'échantillon de l'I.P estimé :

Statistique de Kolmogorov $Z = 0.577$.

Seuil de signification asymptotique = 0.893.

On accepte que l'échantillon de la simulation de l'investissement productif estimé suit une loi normale de moyenne 9.29 et de variance 0.1 au seuil de signification 0.893.

Résultats donnés par le test de Kolmogorov Smirnov pour l'échantillon de l'I.P théorique :

Statistique de Kolmogorov $Z = 0.503$.

Seuil de signification asymptotique = 0.962.

On accepte que l'échantillon de la simulation de l'investissement productif théorique suit une loi normale de moyenne 9.25 et de variance 0.1 au seuil de signification 0.962.

Commentaire 3 :

Les résultats donnés par le test de KS confirment qu'on accepte l'hypothèse que l'échantillon issu de la simulation théorique et l'échantillon issu de l'estimation suivent la même distribution avec un faible niveau de signification. Mais on remarque que les résultats des tests d'ajustements appliqués à l'échantillon de l'I.P estimé a donné un niveau de signification inférieure à celui donné par le test de l'échantillon de l'I.P théorique. Cela était prévisible, donnons les raisons principales de ces résultats :

- 1) Les erreurs engendrées sont dûes, en générale, au simulateur dont la pertinence de l'approximation dépend de plusieurs paramètres (choix du pas de discrétisation, ou simulateur lui-même).
- 2) La méthode de discrétisation, car en discrétisant l'intégrale stochastique on perd l'information sur les trajectoires du mouvement brownien. Ceci génère donc une erreur d'approximation.
- 3) Le choix du point initial « x » qui est inférieur à x^* déterminé après la résolution numérique de l'équation $F(x)=0$ par la méthode numérique (dichotomie) qui est aussi une méthode d'approximation.
- 4) Le choix du paramètre de l'EDS : β .

Pour améliorer les résultats trouvés on propose quelques solutions :

- 1) Utiliser un simulateur assez puissant de taille assez grande, il peut être à concevoir des générateurs appropriés.
- 2) Utiliser des schémas plus exacts : ajouter des termes dans le reste de l'intégrale stochastique pour avoir plus de précision (voir chapitre 1).
- 3) Estimer le paramètre de l'EDS β , et l'incorporer dans la simulation des trajectoires.
- 4) Utiliser autre méthode de résolution numérique de l'équation $F(x)=0$ pour mieux approcher x^* .

C'est ainsi qu'on peut améliorer nos simulations.

Conclusion :

Le programme informatique développé dans ce chapitre, permet à l'investisseur de construire sa règle de décision en calculant la valeur de l'investissement productif.

Par ailleurs, nous avons vu comment la simulation aboutissait à l'étude statistique des premiers instants de passage relatif au modèle étudié. Cette simulation nous a permis d'estimer une densité empirique pour ces temps aléatoires, dont l'importance est l'utilité sont non des moindres pour les acteurs financiers.

Pour conclure, nous dirons que la simulation, a permis d'appliquer la théorie de façon concrète, et par conséquent, de mieux maîtriser l'usage qu'on peut faire de l'informatique dans les questions propres à l'investissement dans le monde de la finance.

Conclusion générale

Le monde de la finance présente plusieurs phénomènes incontrôlables, en particulier l'investissement dans de grands projets. Ce qui a fait l'objet principal de notre recherche par l'étude d'un modèle financier exprimé à l'aide d'une équation différentielle stochastique du type Itô. La règle de décision effectuée dans ce travail est un outil indispensable que l'investisseur utilisera pour décider de continuer ou d'abandonner son projet d'investissement.

La simulation élaborée sur ce modèle, permet d'en sortir avec plein de renseignements et d'informations sur l'analyse mathématique et statistique du taux d'investissement. Et cela par l'étude des courbes du taux, de l'investissement productif.

Par ailleurs, nous avons vu comment la simulation aboutissait à l'étude statistique des premiers instants de passage relatif au modèle étudié. Cette simulation nous a permis d'estimer une densité empirique pour ces temps aléatoires, dont l'importance est l'utilité sont non des moindres pour les acteurs financiers.

Pour conclure, nous dirons que la simulation, a permis d'appliquer la théorie de façon concrète, et par conséquent, de mieux maîtriser l'usage qu'on peut faire de l'informatique dans les questions propre a l'investissement dans le monde de la finance.

Annexe :

1/fonctions cylindriques :

a/fonction de BESSEL :

Equation de Bessel :

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - \nu^2) u = 0$$

admet la solution:

$u = Z_\nu(x)$: fonction cylindrique d'ordre ν .

b/ équation de LOMMEL :

$$\Psi'' + \frac{1-2\alpha}{x} \Psi' + \left[(\beta \gamma x_{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2 \gamma^2}{x^2} \right] \Psi = 0.$$

admet la solution:

$$\Psi(x) = x^\alpha Z_\nu(\beta x_\gamma)$$

tq:

$Z_\nu(\beta x_\gamma)$: composé de fonctions de BESSELS MODIFIERS d'ordre ν de première et deuxième espèce: $I_\nu(x); K_\nu(x)$.

Relations entre les fonctions de Bessel modifiées :

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \pi \nu}$$

$$K_{-\nu}(x) = K_\nu(x).$$

Développements en séries :

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}.$$

Relations de récurrence et formules de dérivation :

$$I_{v-1}(x) - I_{v+1}(x) = \frac{2v}{2} I_v(x).$$

$$I_{v-1}(x) + I_{v+1}(x) = 2I_v(x).$$

$$K_{v-1}(x) - K_{v+1}(x) = -\frac{2v}{2} K_v(x).$$

$$K_{v-1}(x) + K_{v+1}(x) = -2K_v(x).$$

Comportement asymptotique pour $x \rightarrow \infty$:

$$I_v(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right) \right]$$

$$K_v(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right) \right]$$

2/ test de Komogorov-Smirnov :

Le test de KS est un test non paramétrique qui vise à déterminer si les fonctions de répartition de deux populations sont identiques. Il peut être utilisé comme test d'adéquation. Dans ce cas, on est en présence d'un seul échantillon tiré d'une population dont la fonction de répartition est $F(x)$. son but est de déterminer si la fonction de répartition inconnue $F(x)$ est en fait une fonction de répartition spécifique et connue $F(x)$.

les hypothèses de test sont les suivantes :

Cas bilatéral :

$$H_0 : F(x) = G(x) \quad \text{pour tout } x.$$

$$H_1 : F(x) \neq G(x) \quad \text{pour au moins une valeur de } x.$$

Cas unilatéral :

$$H_0 : F(x) \leq G(x) \quad \text{pour tout } x$$

$$H_1 : F(x) > G(x) \quad \text{pour au moins une valeur de } x.$$

Cas unilatéral :

$$H_0 : F(x) \geq G(x) \quad \text{pour tout } x$$

$$H_1 : F(x) < G(x) \quad \text{pour au moins une valeur de } x.$$

On note $G(x)$ la fonction de répartition empirique de l'échantillon aléatoire, les tests statistiques sont les suivants :

$$T_1 = \sup_x |F(x) - G(x)|$$

$$T_2 = \sup_x [F(x) - G(x)]$$

$$T_3 = \sup_x [G(x) - F(x)]$$

Ce test est défini comme étant la plus grande distance verticale entre les deux fonctions de répartitions empiriques.

Règle de décision :

Rejeter H_0 au seuil de signification α si T_1 (ou T_2, T_3) est supérieur à la valeur de la table de KS ayant pour paramètre n (taille de l'échantillon) $1-\alpha$ c'est à dire : T_1 (ou T_2, T_3) $> t_{n,1-\alpha}$.

Nous allons dans la suite présenter une brève présentation d'une méthode connue sous le nom «méthode du noyau » pour estimer de la densité.

3. méthode du noyau :

Soit un échantillon (x_1, x_2, \dots, x_n) . l'estimateur de la densité \hat{f} par le noyau K à la forme suivante :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$$

Où K est la densité noyau (convenable), et h est le paramètre de lissage (ou largeur de la fenêtre). En générale, la fonction noyau K est une densité symétrique (densité é normale, densité bêta).

Il existe plusieurs critères sur le choix de h , les plus connus sont : MSE et MISE, qui doivent être minimiser si l'on veut trouver un bon estimateur de la densité f .

Il existe aussi un critère très connu qui est le critère de silverman qui consiste à prendre en considération le nombres de modes ou points d'inflexion.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] Avner Friedman. Stochastic differential equations and applications. Volume 1. Academic- press, 1975.

[2] Avner Friedman. Stochastic differential equations and applications. Volume 2. Academic- press, 1976.

[3] D. Lamberton, B.Lapeyre, introduction au calcul stochastique appliqué à la Finance. Ellipses,1991.

[4] Elena.v.boguslavskaya (1998) optimisation of long-terme irréversible investments in diffusion model. RAND journal of Economics 20,331-343.

[5] E.Pardou, D.Talay, discretization and simulation of stochastic differential equation, acta applicandae mathematica, 1985.

[6] Encyclopaedia Universalis France. Théorie des martingales, Encyclopaedia Universalis France S.A,1997.

[7] Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables/ Ed. By M.Abramowitz and I.A.Stegun, national bureau of standart. 10 th print. New york : wiley-Inerscience, 1972, 1046 p.

[8] I.I.Gihman, A.V.Skorohod. Introduction à la théorie des processus aléatoires, Mir,1980 .

[9] I.Karatzas,S.E.Shreve, brownien motion and stochastic calculus, Springer-Verlang, New-York,1988.

[10] K.Boukhetala modelling and simulation of a dispersal pollutant with attractive center. In computer methods and water resources III.

[11] K.Boukhetala identification and simulation of communication system magreb math. Rev, vol 4 N⁰ 2 pg 55-79 1995

- [12] K.Boukhetala application des processus de diffusion et problème d'échantillonnage. Thèse doctorat d'état U.S.T.H.B.1998.
- [13] K.Boukhetala estimation des paramètres d'une équation différentielle stochastique. Thèse de magistère.USTHB.1984
- [14] Khoan Vo Khoac Ellips. Estimation et tests paramétriques et non paramétriques. Paris : Ellipes 1985.
- [15] N .Bouleau, probabilité de l'ingénieur, Hermann,1986.
- [16] N.Bouleau, processus stochastique et applications, Hermann, 1988.
- [17] R.Pindyck investments of uncertain cost , J. of financial economics ,34,(1993),53.76
- [18] Tarek-Benakila, Zahir Hammoutene, simulation des modèles de taux d'intérêt en finance, projet de fin d'étude encadré par K.Boukhetala USTHB 1999.
- [19] V.Ouvarov ;A-NIKIFOROV.. Fonctions spéciales de la physique mathématique. Trad du russe par V.Kotliar- Alger : office des publications universitaires, 1987.