N d'ordre : 25/2014 - M/MT

REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE
Faculté de Mathématiques

MÈMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER
EN: MATHÉMATIQUES
Spécialité : Arithmétique, codage et combinatoire : théorie des nombres

AbdelkaderMESSAHEL

Sujet

ETUDE DE CERTAINES SUITES DE CESARO

Soutenu publiquement le15 Juillet 2014devant le jury composé de :

Mr BENSEBAA Boualem	Maître de Conférences A, à l'USTHB	Président
Mr BENCHERIFFarid	Professeur, à l'USTHB	Directeur de thèse
Mme CHERCHEM Leila,	Maitre de conférences A, à l'USTHB	Examinatrice

Etude de certaines suites de Cesàro

Abdelkader MESSAHEL

15 juillet 2014

Table des matières

Remerciements

L'aboutissement de ce travail doit beaucoup aux différentes personnes qui m'ont encouragé durant deux dernières années. Je tiens à leur exprimer ici mes sincères remerciements.

Ma profonde gratitude va en tout premier lieu vers mon directeur de mémoire, Monsieur le Professeur Bencherif Farid. Je le remercie d'abord pour l'intéressant et captivant sujet qu'il m'a proposé et ensuite pour sa patience, pour le temps qu'il a pu me consacrer et pour ses judicieux conseils.

Je souhaite aussi exprimer toute ma reconnaissance envers les membres du jury, Monsieur le Professeur Benseba Boualem qui a accepté de présider ce Jury et Madame la professeur Cherchem Leïla qui a accepté d'examiner ce travail.

Je tiens également à remercier Messieurs les professeurs Garici Tarek, Zékiri Abdelmouméne, Rachid Bouchenna et Ahmed Cherchem pour leur aide dans ce travail de recherche.

Je ne saurais oublier de remercier aussi mes collègues de la post-graduation avec qui j'ai eu plaisir à discuter de nos travaux et nos expériences mutuelles : M. Bouderbala Mihoub, M. Benyettou Abdelkader ainsi que les différents chercheurs ou doctorants que j'ai pu rencontrer tous les lundis lors des séminaires à l'USTHB et avec qui j'ai pu échanger de brillantes discussions

Je tiens à remercier toute ma famille en particulier ma chère épouse qui m'a beaucoup soutenu, mes enfants : Ramine, Rayane et plus particulièrement mon fils Reslène qui m'a beaucoup aidé et qui même relu le manuscrit en entier plusieurs fois pour chercher les petites fautes par-ci par-là, il mérite toute ma reconnaissance. Enfin un grand merci à mon ami Hafid Hadj-sadok proviseur du lycée Descartes car c'est lui qui m'a le plus supporté et encouragé pendant ces deux années dans les bons et mauvais moments. Il a toujours été à mes côtés et je lui dois énormément.

Notations

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$: ensemble des nombres entiers naturels.
2. $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$: ensemble des nombres entiers naturels non nuls.
3. $\mathbb{Z}$: ensemble des nombres entiers rationnels.
4. $\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels.
5. $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.
6. $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes et $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.
7. $A_u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$: série génératrice ordinaire associée à la suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$.
8. $S_u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{z^n}{n!}$: : série génératrice exponentielle associée à la suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$.
9. Pour deux nombres entiers n et k tels que $0 \leq k \leq n$ on note

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

10. $F_n\ (x)$: n-ième polynôme de Fibonacci.
11. $L_n(x)$: n-ième polynôme de Lucas.
12. F_n : n-ième nombre de Fibonacci.
13. L_n : n-ième nombre de Lucas.
14. $B_n(x)$: n-ième polynôme de Bernoulli.
15. $E_n(x)$: n-ième polynôme d'Euler.
16. $G_n(x)$: n-ième polynôme de Génocchi.
17. B_n : n-ième nombre de Bernoulli : $B_n = B_n(0)$.
18. E_n : n-ième nombre d'Euler : $E_n = E_n(0)$
19. G_n : n-ième nombre de Génocchi.
20. $T_n(x)$: n-ième polynôme de Tchebychev de première espèce.
21. $U_n(x)$: n-ième polynôme de Tchebychev de deuxième espèce.
22. Pour tout nombre réel x : $[x]$ désigne la partie entiére de x, c'est à dire l'unique nombre entier k vérifiant $x - 1 < k \leq x$.

23. $\delta_{i,j}$ symbole de Kronecker valant 1 su $i = j$ et 0 sinon.
24. $[x^n]\ P(x)$ désigne le coefficient de x^n dans le polynôme $P(x)$
25. $\Delta(P(x)) = P(x+1) - P(x)$
26. Convention : $\sum_{i\in\varnothing} = 0$. Dans tout ce mémoire, on adopte la convention classique qu'une somme portant sur un indice parcourant l'ensemble vide vaut zéro.

Introduction

Considérons l'application $T : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui à toute suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes associe la suite $T(u) = u^* = (u_n^*)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_n^* = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k u_k.$$

Il est immédiat de constater que T est un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Grâce à la formule d'inversion binomiale de Pascal,nous pouvons aussi affirmer que T est un endomorphisme involutif.Les valeurs propres de l'endomorphisme involutif T sont clairement 1 et -1. Cela nous permet de considérer les deux sous espaces propres notés S^+ et S^- respectivement associés à chacune de ces valeurs propres.L'ensemble S^+ est constitué par les suites $u = (u_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation $T(u) = u$, l'ensemble S^- est constitué par les suites $u = (u_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation $T(u) = -u$. On convient d'appeler suite de Cesàro tout élémént de S^+, c'est à dire toute suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes vérifiant la relation $u^* = u$. Cette dénomination est celle suggérée par Edouard lucas en page 259 (cf.[27]) dans son ouvrage intitulé "Théorie des nombres" paru en 1891.De nos jours, une suite de Césaro est aussi appelée par certains auteurs "suite invariante par transfomation binomiale" (self inverse or invariant séquence) ou "suite paire" (even séquence) ou suite auto-duale,la suite u^* étant alors appelée suite duale de la suite u. Les éléments de l'ensemble S^- sont appelés suites impaires (odd séquence) ou suite inversement invariante "inverse invariant séquence".

Les ensembles S^+ et S^- ont été étudiés par de nombreux auteurs. Sans que cette liste ne soit exhaustive, nous pouvons citer .D. E.Knuth ([25],1973), P.Haukkanen ([20],1993), Helmut Prodinger ([31],1993), Zhi-Hong Sun ([33],1995), Zhi-Hong Sun ([34], 2001), Zhi-Hong Sun ([35], 2003), Yi Wang ([37], 2005), Sharon J.X. Hou et Jiang Zeng ([22],2007), Sandro Mattarei et Roberto Tauraso ([28],2010), Zékiri et Bencherif ([40], 2011), Farid Bencherif et Tarek Garici ([4], 2012) et beaucoup plus récemment Zhi-Hong Sun ([36], 2014).

De nombreux articles sont consacrés à ces suites souvent appelées aussi suites auto-duales, ou encore suites invariantes par transformation binomiale. Ce mémoire est consacré à une étude approfondie de certaines propriétés de ces suites.

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré à des rappels et des compléments utiles à la compréhension et l'étude de certaines propriétés des nombres et polynômes de Fibonacci, de Lucas, de Bernoulli, d'Euler et de Génocchi. Nous terminons ce chapitre par une brêve étude des polynômes de Tchebychev.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions les propriétés de l'endomorphisme T du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Nous caractérisons les séries invariantes et inversement invariantes à l'aide de propriétés vérifiées par leur séries génératrices ordinaires ou exponentielles. Nous montrons que T est involutive, que 1 et -1 sont les seules valeurs propres de T et que l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est somme direct des sous espaces propres S^{+} et S^{-}. Nous donnons dans ce chapitre de nombreux exemples de suites invariantes telles que la suite des nombres de Lucas $(L_n)_{n\geq 0}$ et de suites inversement invariantes telles que la suite des nombres de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$.

Le troisième chapitre est une étude de la relation d'Ettingshausen-Seidel-Kaneko. Dans ce chapitre, on étudie de nombreuses preuves de cette relation établies par différents auteurs. Nous étudions plus particulièrement l'extension de ce théorème aux suites invariantes et nous énonçons et prouvons une relation analogue à la relation d'Ettingshausen-Seidel-Kaneko vérifiée par toute suite invariante. Nous donnons ensuite de nombreuses identités concernant des suites de nombres ou de polynômes remarquables obtenues par application de cette relation.

Chapitre 1

Nombres et polynômes remarquables

« *Les nombres de Bernoulli sont parmi les objets le plus fascinants des mathématiques.On les retrouve en arithmétique,en théorie des nombres, en analyse et même en topologie.*»

André Joyal

1.1 Introduction

Nous rappelons dans ce chapitre les définitions et les prinicipales propriétés de certaines suites de nombres et de polynômes remarquables. Il s'agit des suites de nombres et polynômes de Fibonacci, de Lucas, de Bernoulli, d'Euler et de Génocchi. Nous terminons ce chapitre par une brêve étude des polynômes de Tchebychev de première et de deuxième espèce. Certaines de ces suites de nombres ou de polynômes sont souvent définis à l'aide de leur série génératrice ordinaire ou de leur série génératrice exponentielle. Nous précisons cette notion dans le paragraphe suivant.

1.2 Série génératrice d'une suite

Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Les séries formelles de $\mathbb{C}\,[[z]]$

$$A_u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \quad \text{et } S_u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{z^n}{n!},$$

sont appelées respectivement série génératrice ordinaire et série génératrice exponentielle associées à la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. Il est facile de constater que les applications $A : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}\,[[z]]$ et

$S : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}\,[[z]]$ ainsi définies sont linéaires. Si u, $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et si $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} A_{u+v}(z) &= A_u(z) + A_v(z) \\ A_{\lambda u}(z) &= \lambda A_u(z) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S_{u+v}(z) &= S_u(z) + S_v(z) \\ S_{\lambda u}(z) &= \lambda S_u(z) \end{aligned}$$

Donnons deux exemples simples. Si $a = (a_n)_{n\geq 0}$ est la suite constante définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = 1,$$

alors la série génératrice ordinaire de a est

$$A_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z},$$

et la série génératrice exponentielle de a est

$$S_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Un autre exemple qui nous sera utile est le cas où $c = (c_n)_{n\geq 0}$ est la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = n.$$

Dans ce cas, la série génératrice ordinaire de la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ est

$$A_c(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} A_c(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} n z^n \\ &= z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \\ &= z \left(\frac{1}{1-z} \right)' \\ &= \frac{z}{(1-z)^2}. \end{aligned}$$

La série génératrice exponentielle de la suite $(c_n)_{n\geq 0} = (n)_{n\geq 0}$ est

$$S_c(z) = z e^z. \tag{1.1}$$

En effet

$$\begin{aligned} S_c(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{z^n}{n!} \\ &= z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= ze^z \end{aligned}$$

1.3 Suite récurrente linéaire d'ordre deux

Soit $(a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, l'ensemble E des suites $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} \quad (n \geq 2$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de dimension deux. L'équation caractéristique associée de toute suite appartenant à E est

$$r \in \mathbb{C} \;\text{ et }\; r^2 - ar - b = 0. \tag{1.2}$$

Si cette équation admet deux racines distinctes r_1 et r_2, alors, une base de E est $((r_1^n)_{n\geq 0}, (r_2^n)_{n\geq 0})$.Dans ce cas, toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de E s'écrit

$$u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

où A et B vérifient les conditions

$$u_0 = A + B \text{ et } \; u_1 = Ar_1 + Br_2.$$

Ces deux dernières relations permettent de déterminer A et B :

$$\begin{aligned} A &= \frac{u_0 r_2 - u_1}{r_2 - r_1}, \\ B &= \frac{u_0 r_1 - u_2}{r_1 - r_2}. \end{aligned}$$

La série génératrice exponentielle de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} S_u(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{z^n}{n!} \\ &= Ae^{r_1 x} + BAe^{r_2 x} \\ &= \frac{(u_0 r_2 - u_1)\, e^{r_1 x} - (u_0 r_1 - u_2)\, e^{r_2 x}}{r_2 - r_1}. \end{aligned}$$

Si l'équation caractéristique (1.2) admet une racine double $r_1 = r_2 = \frac{a}{2}$ alors, une base de E est $\left(\left(\left(\frac{a}{2}\right)^n\right)_{n\geq 0}, \left(n\left(\frac{a}{2}\right)^n\right)_{n\geq 0}\right)$. Dans ce cas, toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de E s'ecrit

$$u_n = (An + B)\left(\frac{a}{2}\right)^n.$$

où A et B vérifient les conditions

$$u_0 = B \text{ et } \; u_1 = (A + B)\,\frac{a}{2}.$$

Ces deux dernières relations permettent de déterminer A et B :

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{a}u_1 - u_0, \\ B &= u_0. \end{aligned}$$

Dans ce cas, la série génératrice exponentielle de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ s'écrit

$$S_u(z) = \left(\left(u_1 - u_0\frac{a}{2}\right)z + u_0\right)e^{\frac{a}{2}z}.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} S_u(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (An + B)\left(\frac{a}{2}\right)^n \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (An + B)\left(\frac{a}{2}z\right)^n \frac{1}{n!} \\ &= A\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{a}{2}z\right)^n \frac{1}{n!} + B\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{2}z\right)^n \frac{1}{n!} \\ &= A\frac{a}{2}ze^{\frac{a}{2}z} + Be^{\frac{a}{2}z} \\ &= \left(\left(u_1 - u_0\frac{a}{2}\right)z + u_0\right)e^{\frac{a}{2}z} \end{aligned}$$

1.4 Nombres et polynômes de Fibonacci et de Lucas

La suite des nombres de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ et des nombres de Lucas $(L_n)_{n\geq 0}$sont définis par les relations

$$\begin{aligned} F_0 &= 0,\, F_1 = 1 \text{ et } \; F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2), \\ L_0 &= 1,\, L_1 = 2 \text{ et } \; L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

La suite des polynômes de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ et des polynômes de Lucas $(L_n)_{n\geq 0}$sont définis par les relations

$$\begin{aligned} F_0(x) &= 0,\ F_1(x)=1 \text{ et } F_n(x)=xF_{n-1}(x)+F_{n-2}(x) \qquad (n\geq 2), \\ L_0(x) &= 1,\ L_1(x)=2 \text{ et } L_n(x)=xL_{n-1}(x)+L_{n-2}(x) \qquad (n\geq 2) \end{aligned}$$

On a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$F_n(1)=F_n \text{ et } L_n(1)=L_n.$$

Les premiers polynômes de Fibonacci sont

$$F_0\left(x\right)=0$$

$$F_1\left(x\right)=1$$

$$F_2\left(x\right)=x$$

$$F_3\left(x\right)=x^2+1$$

$$F_4\left(x\right)=x^3+2x$$

$$F_5\left(x\right)=x^4+3x^2+1$$

$$F_6\left(x\right)=x^5+4x^3+3x$$

$$F_7\left(x\right)=x^6+5x^4+6x^2+1$$

$$F_8\left(x\right)=x^7+6x^5+10x^3+4x$$

Les premiers polynômes de Lucas sont

$$L_0\left(x\right)=2$$

$$L_1\left(x\right)=x$$

$$L_2\left(x\right)=x^2+2$$

$$L_3\left(x\right)=x^3+3x$$

$$L_4\left(x\right)=x^4+4x^2+2$$

$$L_5\left(x\right)=x^5+5x^3+5x$$

$$L_6\left(x\right)=x^6+6x^4+9x^2+2$$

$$L_7\left(x\right)=x^7+7x^5+9x^3+7x$$

$$L_8\left(x\right)=x^8+8x^6+20x^4+16x^2+2$$

1.5 Nombres et polynômes de Bernoulli

Définition 1 *La suite $(B_n)_{n\in N}$ des nombres de Bernoulli est définie par sa série génératrice exponentielle*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z - 1} \tag{1.3}$$

Remarquons tout de suite que la relation (1.3) est équivalente à

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n,1} \frac{z^n}{n!} \tag{1.4}$$

$\delta_{n,1}$ étant le symbole de Kronécker valant 1 si $n = 1$ et 0 sinon.

En identifiant les coefficients de z^n des deux membres de l'égalité (1.2) ,on obtient

$$\sum_{l+k=m} \frac{n!}{l!k!} B_n = \delta_{n,1},$$

de laquelle on déduit

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k - B_n = \delta_{n,1.} \tag{1.5}$$

La relation(1.5) permet d'obtenir le théorème suivant

Théorème 2 *La suite des nombres de Bernoulli vérifie les relations*

$$B_0 = 1 \text{ } et \text{ } B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k \text{ pour } n \geq 1 \tag{1.6}$$

La relation (1.6) permet d'obtenir les premières valeurs des nombres de Bernoulli

$$B_0 = 1 \text{ } et \text{ } B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0$$

On constate ainsi que $B_3 = B_5 = 0$. Nous allons prouver que plus généralement, on a

$$B_{2k+1} = 0,$$

Pour tout entier $k \geq 1$. Pour cela remarquons que si on pose

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} + \frac{1}{2}z$$

On a

$$F(z) = \frac{e^z}{e^z - 1} + \frac{1}{2}z = z\frac{1 + e^z}{e^z - 1}$$

On constate aisément que $F(z)$ est une série formelle paire. En effet, on a

$$F(-z) = -z\frac{1 + e^{-z}}{e^{-z} - 1} = -z\frac{1 + e^z}{e^z - 1} = F(z)$$

Il en résulte que l'on a

$$B_n = (-1)^n B_n \quad (n \neq 1) \tag{1.7}$$

On a bien donc

$$B_{2k+1} = 0 \qquad (k \geq 1) \tag{1.8}$$

Remarquons qu'on peut déduire de la relation précédente et de la valeur de $B_1 = \frac{1}{2}$ la relation suivante qui nous sera utile

$$(-1)^n B_n = B_n + \delta_{n,1} \quad (n \geq 0) \tag{1.9}$$

Définition 3 *La suite $((B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes de Bernoulli est définie par sa série génératrice exponentielle*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{z^n}{n!}\right) = \frac{e^z}{e^z - 1}e^{xz} \tag{1.10}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{z^n}{n!}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\frac{z^n}{n!}\right) \tag{1.11}$$

En identifiant les coefficients de z^n des deux nombres de l'égalité(1.5), on obtient

$$B_n x) = \sum_{k=0}^{n} n! \frac{B_k}{k!} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$$

Remarquons que l'on a

$$B_n(0) = B_n \qquad (n \geq 0)$$

Calculs des premiers polynômes de Bernoulli :

$$B_0(x) = 1$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$$

$$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$$

$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$$

$$B_7(x) = x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x$$

$$B_8(x) = x^8 - 4x^7 + \frac{14}{3}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{30}$$

A l'aide de la série génératrice des polynômes de Bernoulli, on prouve les propriétés suivantes

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$$

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \quad (n \geq 1). \tag{1.12}$$

1.6 Nombres et polynômes d'Euler

La suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres d'Euler est définie par sa série génératrice exponentielle

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{z^n}{n!} = \frac{2}{e^z+1}.$$

La suite $(E_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes d'Euler est définie par sa série génératrice exponentielle

Les polynômes d'Euler $E_0(x), E_1(x), E_2(x), ...$sont des polynômes en x avec des coefficients indéterminés (dont les dénominateurs sont des puissances : $1; 2; 4; 8; ...$ de 2. Ils peuvent être définis par la série génératrice :

On a en effet

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(0) x^{n-k}$$

Remarquons que

$$\frac{2}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x-1}{e^x+1} = 1 - \tanh(\frac{x}{2})$$

Cela montre que :

$$E_{2n}(0) = 0 \quad (n > 0)$$

puisque la tangente hyperbolique est une fonction impaire.

Proposition 4

$$E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x)$$

Preuve. On a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(x) + E_n(x) = 2x^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(E_k(1-x) - (-1)^k E_k(x)\right) + E_n(1-x) - (-1)^n E_n(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(1-x) + E_n(1-x) - (-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(x)(-1)^{n-k} + E_n(x)\right)$$

$$= 2(1-x)^n - (-1)^n (E_n(1-x) + E_n(x-1+1)) = 0$$

$$2(1-x)^n - (-1)^n (E_n(1-x) + E_n(x)) = 0$$

$$(-1)^n (E_n(1-x) + E_n(x)) = 2(1-x)^n$$

$\square$

$$E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x).$$

$$E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x)$$

Les premièrs polynômes d'Euler

$$E_0(x) = 1$$

$$E_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$E_2(x) = x^2 - x$$

$$E_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}$$

$$E_4(x) = x^4 - 2x^3 + x$$

$$E_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

1.7 Nombres et polynômes de Genocchi

La suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres de Génocchi est définie par sa série génératrice exponentielle

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{z^n}{n!} = \frac{2z}{e^z+1}.$$

qui satisfait

$$G_1 = 1; G_3 = G_5 = G_7 = ... = G_{2n+1} = 0$$

et les coefficients sont donnés par

$$G_n = 2(1-2^n) B_n = 2nE_{2n-1}(0) \qquad \text{pour} \quad n \geq 1$$

où les B_n sont les nombres de Bernoulli et les $E_n(x)$ sont les polynômes d'Euler

Les premiers nombres de Génocchi sont $-1, 1, -3, 17, -155, 2073, ...$

Pour x réel,les polynômes de Génocchi peuvent être définis comme suit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{z^n}{n!} = \frac{2ze^{xz}}{e^z+1} \quad , \mid z \mid < \pi$$

$$G_n(0) = G_n \quad \text{et } G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_k x^{n-k}$$

Calculs des premiers polynômes de Génocchi :

$$G_1(x) = 1$$

$$G_2(x) = 2x - 1$$

$$G_3(x) = 3x^2 - 3x$$

$$G_4(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$$

$$G_5(x) = 5x^4 - 10x^3 + 5x$$

$$G_6(x) = 6x^5 - 15x^4 + 15x^2 - 3$$

Les coefficients de G_n sont entiers puisque les nombres de Génocchi sont entiers. Remarquons que $G_n(x)$ est un polynôme de degré $(n-1)$.

$$G_n(x) = nE_{n-1}(x)$$

En effet

$$G_n(x)e^{xt} = x\frac{2e^{xt}}{e^x+1} = x\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} nE_{n-1}(x)\frac{x^n}{n!}$$

par suite on obtient :

$$G_n(x) = nE_{n-1}(x)$$

1.8 Polynômes de Tchebychev

Les polynômes de Tchébychev,nommés ainsi en l'honneur du mathématicien russe Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821-1894) sont deux suites de polynômes notées $(T_n(x))_{n\geq 0}$ pour les polynômes de Tchebychev de première espèce et $(U_n(x))_{n\geq 0}$ pour les polynômes de Tchebychev de seconde espèce. Ces polynômes sont définis par les relations

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x \quad \text{et} \quad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad \text{pour } n \geq 1,$$

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x \quad \text{et} \quad U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Les premiers polynômes de Tchebychev de premiere espèce sont

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1. \end{aligned}$$

Les premiers polynômes de Tchebychev de seconde espèce sont

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, \\ U_1(x) &= 2x, \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1, \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x, \\ U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1. \end{aligned}$$

Le théorème suivant explique l'origine de la définition des polynômes de Tchébychev.

Théorème 5 *Pour tout nombre réel θ, on a*

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta),$$

$$U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}.$$

Preuve. Pour tout réel θ, pour tout entier naturel n, on a :

$$\cos(n\theta) + \cos((n+1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta)$$

ce qui fournit encore :

$$\begin{aligned} \forall\theta &\in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) + T_{n+2}(\cos(\theta)) + T_{n+1}(\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)\, T_{n+1}(\cos(\theta)) \end{aligned}$$

Propriétés des polynômes de Tchebychev de première espéce $\square$

a) Pour tout entier n strictement positif.

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

b) Quels que soient les entiers naturels m et n et pour tout réel x,

$$T_n(T_m(x)) = T_{mn}(x)$$

c) Pour tout entier n strictement positif, le coéfficient dominant de T_n est 2^{n-1} et ses n racines sont :

$$a_k^{(n)} = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \text{pour tout } k \in \{1, ..., n\}$$

d) La parité dépend de n :

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

Les T_n sont associés aux séries génératrices suivantes :

la série génératrice ordinaire

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n = \frac{1-tx}{1-2tx+t^2}$$

la série génératrice exponentielle

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{2}\left[e^{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)t}\right] + \frac{1}{2}\left[e^{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)t}\right],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) \frac{t^n}{n} = -\frac{1}{2} \ln\left(1-2tx+t^2\right)$$

Propriétés des polynômes de Tchebychev de 2éme espèce

a) Pour tout entier n positif ou nul,

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k}$$

b) Pour tout entier naturel strictement positif, les n racines de U_n sont

$$a_k^{(n)} = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \text{pour tout } k \in \{1, 2..., n\}$$

On a

$$U_n\left(\cos(\theta)\right) = \frac{\sin\left((n+1)\,\theta\right)}{\sin\theta}$$

donc

$$U_n\left(\cos(\frac{k\pi}{n+1})\right) = \frac{\sin\left((n+1)\,\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\frac{k\pi}{n+1}} = \frac{\sin(k\theta)}{\sin(\frac{k\pi}{n+1})} = 0$$

donc les n racines de U_n sont bien les

$$a_k^{(n)} = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

pour tout $k \in \{1, 2..., n\}$

$c)$ Pour tout entier naturel $n > 0$ les n racines de T_n sont

$$a_k^{(n)} = \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n}) \text{ pour tout } k \in \{1, 2..., n\}$$

En effet

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

donc

$$T_n\left(\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})\right) = \cos(n\frac{(2k+1)\pi}{2n}) = \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2}) = 0$$

Ce qui prouve que les

$$a_k^{(n)} = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$$

sont bien n les racines de T_n.

Chapitre 2

Suites invariantes et suites inversement invariantes

2.1 Introduction

Etant donné une suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes, on appelle transformée binomiale de u la suite $u^* = (u_n^*)_{n\geq 0}$ où u_n^* est défine par

$$u_n^* = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k u_k.$$

On définit ainsi une application T de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ dans lui même. Il est facile de constater que T est un endomorphisme de l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. En 1891, en page 259 de son ouvrage intitulé "Théorie des nombres" Edouard lucas (cf.[27]) désigne par suite de Césàro toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes vérifiant la relation

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k u_k.$$

Ainsi, dans le cas où on a $u^* = u$, on dit que la suite u est une suite de Cesàro ou suite auto-duale ou encore on dit que u est invariante par transformation binomiale. Dans le cas où on a $u^* = -u$, on dit que la suite u est inversement invariante par transformation binomiale. Ces suites ont été étudiées par de nombreux auteurs. Sans que cette liste ne soit exhaustive, nous pouvons citer.D. E.Knuth ([25],1973), P.Haukkanen ([20],1993), Helmut Prodinger ([31],1993), Zhi-Hong Sun ([33],1995), Zhi-Hong Sun ([34], 2001), Zhi-Hong Sun ([35], 2003), Yi Wang ([37], 2005), Sharon J.X. Hou et Jiang Zeng ([22], 2007), Sandro Mattarei et Roberto Tauraso ([28], 2010), Farid Bencherif et Tarek Garici ([4], 2012) et beaucoup plus récemment Zhi-Hong Sun ([36], 2014).

Ce chapitre est consacré à l'étude de certaines propriétés de ces suites. Nous allons constater que ces suites sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres de l'endomorphisme T. Au paragraphe suivant, nous étudions T.

2.2 Définition de la transformation binomiale T

On considère l'application $T : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$T((u_n)_{n\geq 0}) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k u_k \right)_{n\geq 0}.$$

En posant pour toute suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$

$$u_n^* = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k u_k, \qquad (n \geq 0).$$

et $u^* = (u_n^*)_{n\geq 0}$. L'application T est définie par la relation

$$T(u) = u^*.$$

T est appelée transformation binomiale. L'image u^* de u par T est appelée suite duale de la suite u. La première propriété de T est la suivante.

Théorème 6 *L'application $T : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un endomorphisme du $\mathbb{C}$ espace-vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.*

Preuve. Il s'agit de prouver que si $u = (u_n)_{n\geq 0}$, $v = (v_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors

$$T(u+v) = T(u) + T(v) \quad \text{et} \quad T(\lambda u) = \lambda T(u).$$

Par définition on a $u + v = (u_n + v_n)_{n\geq 0}$ et $\lambda u = (\lambda u_n)_{n\geq 0}$on a donc

$$\begin{aligned} T(u+v) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (u_k + v_k) \right)_{n\geq 0} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k u_k \right)_{n\geq 0} + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k v_k \right)_{n\geq 0} \\ &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

On a de même

$$\begin{aligned} T(\lambda u) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (\lambda u_k \right) \\ &= \lambda \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k u_k \right) \\ &= \lambda T(u). \end{aligned}$$

$\square$

2.3 Suites invariantes et suites inversement invariantes

Nous allons tout d'abord constater qu'il est facile de calculer la suite duale de certaines suites de nombres complexes.

Théorème 7 *Pour tout nombre complexe λ, on a*

$$
\begin{aligned}
T((\lambda^n)_{n\geq 0}) &= ((1-\lambda)^n)_{n\geq 0}\,. && (2.1)\\
T((n\lambda^n)_{n\geq 0}) &= \left(-n\lambda\,(1-\lambda)^{n-1}\right)_{n\geq 0} && (2.2)\\
T((F_n)_{n\geq 0}) &= -\,(F_n)_{n\geq 0} && (2.3)\\
T((L_n)_{n\geq 0}) &= (L_n)_{n\geq 0} && (2.4)
\end{aligned}
$$

Preuve. Prouvons la relation (2.1)

$$
\begin{aligned}
T((\lambda^n)_{n\geq 0}) &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\lambda^k\right)_{n\geq 0}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\lambda)^k\right)_{n\geq 0}\\
&= ((1-\lambda)^n)_{n\geq 0}\,.
\end{aligned}
$$

Prouvons la relation (2.2)

$$
\begin{aligned}
T((n\lambda^n)_{n\geq 0}) &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k k\lambda^k\right)_{n\geq 0}\\
&= \left(n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(-\lambda)^k\right)_{n\geq 0}\\
&= \left(n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(-\lambda)^{j+1}\right)_{n\geq 0}\\
&= \left(-n\lambda\,(1-\lambda)^{n-1}\right)_{n\geq 0}\,.
\end{aligned}
$$

Prouvons la relation (2.3)

$$\begin{aligned}
T((F_n)_{n\geq 0}) &= T(\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)_{n\geq 0}) \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\big(T((\alpha^n)_{n\geq 0}) - T((\beta^n)_{n\geq 0})\big) \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\big(((1-\alpha)^n)_{n\geq 0}) - ((1-\beta)^n)_{n\geq 0})\big) \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\big((\beta^n)_{n\geq 0}) - (\alpha^n)_{n\geq 0})\big) \\
&= -\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)_{n\geq 0} \\
&= -(F_n)_{n\geq 0}
\end{aligned}$$

Prouvons la relation (2.4)

$$\begin{aligned}
T((L_n)_{n\geq 0}) &= T((\alpha^n+\beta^n)_{n\geq 0}) \\
&= T((\alpha^n)_{n\geq 0}) + T((\beta^n)_{n\geq 0}) \\
&= ((1-\alpha)^n)_{n\geq 0}) + ((1-\beta)^n)_{n\geq 0}) \\
&= \big((\beta^n)_{n\geq 0}) + (\alpha^n)_{n\geq 0})\big) \\
&= (L_n)_{n\geq 0}
\end{aligned}$$

Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, on déduit des relations (2.1) et (2.2)

$$\begin{aligned}
T(\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geq 0}) &= \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geq 0}. \\
T(\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n\geq 0}) &= -\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n\geq 0} \\
T((F_n)_{n\geq 0}) &= -(F_n)_{n\geq 0} \\
T((L_n)_{n\geq 0}) &= (L_n)_{n\geq 0}
\end{aligned}$$

$\square$

Ainsi, les nombres réels 1 et -1 sont des valeurs propres de l'endomorphisme T. Les suites $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geq 0}$ et $(L_n)_{n\geq 0}$ sont des vecteurs propres (non nuls) associés à la valeur propre 1. Les suites $\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n\geq 0}$ et $(F_n)_{n\geq 0}$ sont des vecteurs propres (non nuls) associés à la valeur propre -1.

Définition 8 *On appelle suite de Cesàro ou suite invariante par transformation binomiale tout vecteur propre $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. associée à la valeur propre 1 de T. On appelle suite inversement invariante par transformation binomiale tout vecteur propre $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. associée à la valeur propre -1 de T. On note S^+ et S^- les sous-espaces propres respectivement associés aux valeurs propres 1 et -1.*

$$S^{+}=\left\{u\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}/\ \ T(u)=u\right\}$$

$$S^{-}=\left\{u\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}/\ \ T(u)=-u\right\}$$

On a montré que

$$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geq 0}\in S^{+}$$

$$\left(L_n\right)_{n\geq 0}\in S^{+}$$

et

$$\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n\geq 0}\in S^{-}$$

$$\left(F_n\right)_{n\geq 0}\in S^{-}$$

Deux questions se posent naturellement.

Première question : l'endomorphisme T admet-il d'autres valeurs propres, autres que $1\,;\,-1$?

Deuxiéme question : comment se traduit la relation :$v=T\left(u\right)$ sur les séries génératrices exponentielles $S_v\left(z\right)$ et $S_u\left(z\right)$ associées à v et u respectivement. ?

Nous allons répondre à ces deux questions en commençant par la deuxiéme.

2.4 Traduction de la transformation binomiale T à l'aide des séries génératrices

Rappelos que si $u=(u_n)_{n\geq 0}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $A_u\left(z\right)$ désigne la série génératrice ordinaire de u et $S_u\left(z\right)$ désigne la série génératrice exponentielle de u. On a

$$A_u\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^n\ \text{ et }\ S_u\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\frac{z^n}{n!}.$$

Théorème 9 *Pour* $u=(u_n)_{n\geq 0}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$*et* $v=(v_n)_{n\geq 0}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$*, on a la relation*

1.

$$v=T\left(u\right)\iff S_v\left(z\right)=e^{z}S_u\left(-z\right)\tag{2.5}$$

2.

$$v=T\left(u\right)\Longleftrightarrow A_v\left(z\right)=\frac{1}{1-z}A_u\left(\frac{z}{z-1}\right)\tag{2.6}$$

1. La relation
$$v=T\left(u\right)$$
c'est à dire $\left(v_{n}\right)_{n\geq0}=T\left(\left(u_{n}\right)_{n\geq0}\right)$se traduit d'abord par $v_{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}u_{k}\quad(n\geq 0)$,ce qui peut s'écrire sous la forme
$$\frac{v_{n}}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}\frac{(-1)^{k}}{k!}u_{k}=\sum_{l+k=n}\frac{1}{(l)!}\frac{(-1)^{k}}{k!}u_{k}\quad(n\geq0).$$
Ce qui se traduit par l'égalité formelle
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_{n}}{n!}z^{n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(l)!}z^{l}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k!}u_{k}\right)$$
c'est à dire :
$$S_{v}\left(z\right)=e^{z}S_{u}\left(-z\right)$$
Ce qui est bien la relation qu'on devait obtenir.on a aussi prouvé la relation
2. Peut établir la relation (2.6), en s'inspirant en partie de la page 327 de l'article "invariant sequences under binomial transformation" de zhi hong sun (1999).

$$A^{*}(z)=\frac{1}{1-z}A(\frac{z}{z-1})\text{ avec }U(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_{n}z^{n}$$

$$\begin{aligned}\text{alors}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}u_{k} &= \pm A_{k}\qquad,(n=0,1,2,...)\text{ si et seulement si}\\ A\left(\frac{z}{z-1}\right) &= \pm\left(1-z\right)A\left(z\right)\end{aligned}$$

Il est clair que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z}A\left(\frac{z}{z-1}\right)&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^{k}A_{k}z^{k}\left(1-z\right)^{-1-k}\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^{k}U_{k}z^{k}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{1-k}{r}\left(-z\right)^{r}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{r=0}^{n}\left(-1\right)^{n-r}U_{n-r}\binom{1-(n-r)}{r}\left(-1\right)^{r}\right]z^{n}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(-1\right)^{n-r}U_{n-r}\right]z^{n}\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(-1)^{r}U_{r}\right]z^{n}$$

$$\text{montrons que } \; S^{*}(z) = e^{z}S(-z)$$

$$S^{*}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n}^{*}\frac{z^{n}}{n!} \quad \text{ou} \quad e^{z}S(-z) = (\sum_{n=0}^{\infty} u_{n}\frac{z}{n!})\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n}(-1)^{k}\frac{z^{n}}{n!}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}(-1)^{k}\frac{u_{k}}{k!}n!\right]\frac{z^{n}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}u_{k}\right]\frac{z^{n}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} u_{n}^{*}\frac{z^{n}}{n!} = S^{*}(z)
\end{aligned}$$

Les conséquences que l'on peut déduire de cette relation sont intéréssantes et importantes. Tout d'abord on a prouvé le théorème bien connu suivant :

Théorème 10 *Formule d'inversion de Pascal : Pour* $u = (u_n)_{n\geq 0}$ *et* $v = (v_n)_{n\geq 0}$, *on a la relation*

$$v = T(u) \iff u = T(v)$$

Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}u_{k} \iff \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}v_{k}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
v &= T(u) \iff S_{v}(z) = e^{z}S_{u}(-z) \\
&\iff e^{-z}S_{v}(z) = S_{u}(-z) \\
&\iff e^{z}S_{v}(-z) = S_{u}(z) \\
&\iff S_{u}(z) = e^{z}S_{v}(-z) \\
&\iff u = T(v)
\end{aligned}$$

$\square$

On aussi le corollaire suivant

Corollaire 11 *Soit $u = (u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, alors, en posant $T(u) = u^*$, on a*

$$S_{u^*}(z) = e^z S_u(-z)$$

$$A_{u^*}(z) = \frac{1}{1-z} A_u\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$\begin{aligned} u &\in S^+ \Longleftrightarrow \text{la série formelle } e^{\frac{z}{2}} S_u(-z) \text{ est paire} \\ u &\in S^- \Longleftrightarrow \text{la série formelle } e^{\frac{z}{2}} S_u(-z) \text{ est impaire} \end{aligned}$$

Propriétés de la transformation binomiale T

Nous allons maintenant énumérer et prouver des propriétés importantes de l'endomorphisme T.

Théorème 12
1. *L'endomorphisme T est bijectif donc un automorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $T = T^{-1}$*
2. *L'endomorphisme T est involutif. On a $T \circ T = I_{d\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}$.*
3. *Les seules valeurs propres de T sont $(+1)$ et (-1)*
4. *Pour tout $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ on a $u + u^* \in S^+$ et $u - u^* \in S^-$ où $u^* = T(u)$*
5. *$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est somme directe des sous espaces vectoriels S^+ et S^-.*

1) La relation

$$v = T(u) \iff u = T(v)$$

équivaut à dire T que est bijectif et $T = T^{-1}$.

2) De la relation précédente, on déduit qu'on a alors : $T \circ T = I_{d\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}$.

3)On sait déja que $(+1)$ et (-1) sont des valeurs propres de T . Si λ est une valeur propre de T associée à un vecteur propre $u \neq 0$ alors

$$u = T \circ T(u) = T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda^2 u$$

on a alors

$$u = \lambda^2 u$$

Par suite $(\lambda^2 - 1) u = 0$, comme $u \neq 0$, on en déduit que $\lambda^2 = 1$ et donc $\lambda = +1, \lambda = -1$. Ainsi T possède $(+1)$ et (-1) que comme valeurs propres.

4) On a :

$$T(u^*) = T(T(u)) = u$$

On en déduit aisément, en utilisant la linéarité de T,que

$$T(u+u^*) = u+u^*$$

$$T(u-u^*) = -(u-u^*)$$

On a donc

$$u+u^* \in S^+ \text{ et } u-u^* \in S^-$$

où $u^* = T(u)$.

5) La somme de deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On a donc

$$S^+ + S^- \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$

On a aussi

$$\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \subset S^+ + S^-.$$

En effet si $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,alors

$$u = \frac{1}{2}(u+u^*) + \frac{1}{2}(u-u^*)$$

avec $\Longleftrightarrow$

$$\frac{1}{2}(u+u^*) \in S^+ \text{ et } \frac{1}{2}(u-u^*) \in S^-$$

De plus, on a

$$S^+ \cap S^- = \{0\}$$

En effet, l'inclusion $\{0\} \subset S^+ \cap S^-$ est triviale et on a aussi

$$S^+ \cap S^- \subset \{0\}.$$

En effet si $u \in S^+ \cap S^-$ on a alors $T(u) = u$ et $T(u) = -u$. Par suite $u = -u$ et donc $u = 0$. Ainsi, on a bien

$$S^+ + S^- = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$

2.5 Exemples de suites invariantes et de suites inversement invariantes

Dans ce paragraphe, nous donnons de nombreux exemples de suites invariantes et de syutes inversement invariantes par transformation binomiale.

Théorème 13 *Soit $u = (u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, alors on a l'équivalence suivante*

$$u = (u_n)_{n\geq 0} \in S^- \Longleftrightarrow u_0 = 0 \quad et \quad \left(\frac{u_{n+1}}{n+1}\right)_{n\geq 0} \in S^+ \tag{2.7}$$

et aussi, en convenant définir u_{-1}arbitrairement, on a

$$u = (u_n)_{n\geq 0} \in S^- \Longleftrightarrow u_0 = 0 \quad et \quad (nu_{n-1})_{n\geq 0} \in S^+ \tag{2.8}$$

Preuve. Remarquons que toute $u = (u_n)_{n\geq 0} \in S^-$ vérifie $u_0 = 0$. En effet, on doit avoir $u_0^* = -u_0$, ce qui s'écrit $u_0 = -u_0$ et donc $u_0 = 0$. On a donc en posant

$$v = (v_n)_{n\geq 0} = \left(\frac{u_{n+1}}{n+1}\right)_{n\geq 0}$$

$$\begin{aligned}
u &= (u_n)_{n\geq 0} \in S^- \Longleftrightarrow u_0 = 0 \ \text{ et } T(u) = -u \\
&\Longleftrightarrow u_0 = 0 \ \text{ et } e^z S_u(-z) = -S_u(z) \\
&\Longleftrightarrow u_0 = 0 \ \text{ et } e^z \sum_{n=1}^{\infty} u_n \frac{(-z)^n}{n!} = -\sum_{n=1}^{\infty} u_n \frac{z^n}{n!} \\
&\Longleftrightarrow u_0 = 0 \ \text{ et } e^z \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} \frac{(-z)^{n+1}}{(n+1)!} = -\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \\
&\Longleftrightarrow u_0 = 0 \ \text{ et } (-z)e^z \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} \frac{(-z)^n}{(n+1)!} = -z \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} \frac{z^n}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient, en simplifaint par $-z$

$$\begin{aligned}
u &= (u_n)_{n\geq 0} \in S^- \\
&\Longleftrightarrow u_0 = 0 \ \text{ et } e^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+1}}{n+1} \frac{(-z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+1}}{n+1} \frac{z^n}{n!} \\
&\Longleftrightarrow u_0 = 0 \ \text{ et } e^z S_v(-z) = S_v(z) \\
&\Longleftrightarrow u_0 = 0 \ \text{ et } T(v) = v \\
&\Longleftrightarrow u_0 = 0 \ \text{ et } (v_n)_{n\geq 0} = \left(\frac{u_{n+1}}{n+1}\right)_{n\geq 0} \in S^+
\end{aligned}$$

La preuve de (2.7) est complète. La preuve de (2.8) est analogue. □

Le théorème qui suit concerne la suite des nombres de Bernoulli

Théorème 14 *On a*

$$T\left(((-1)^n B_n)_{n\geq 0}\right) = ((-1)^n B_n)_{n\geq 0} \tag{2.9}$$

et

$$T((B_n)_{n\geq 0}) = (n + (-1)^n B_n)_{n\geq 0} \tag{2.10}$$

Ainsi la suite $((-1)^n B_n)_{n\geq 0}$ est invariante par contre la suite des nombres de Bernoulli n'est pas invariante.

Preuve. Prouvons (2.9). Posons

$$b_n = (-1)^n B_n \ \ (n \geq 0).$$

On a alors

$$S_{b^*}(z) = e^z S_b(-z),$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} b_n^* \frac{z^n}{n!} &= e^z \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{(-z)^n}{n!} \\ &= e^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n \frac{(-z)^n}{n!}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} b_n^* \frac{z^n}{n!} &= e^z \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} \\ &= \frac{ze^z}{e^z - 1}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} b_n^* \frac{z^n}{n!} &= \frac{-z}{1 - e^{-z}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(-z)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n!}\end{aligned}$$

Ainsi on a $b_n^* = b_n$ pour $n \geq 0$. La suite $(b_n) = ((-1)^n B_n)$ est donc bien invariante.

Prouvons (2.9). On doit pour cela prouver que

$$B_n^* = n + (-1)^n B_n.$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} B_n^* \frac{z^n}{n!} &= e^z \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(-z)^n}{n!} \\ &= e^z \frac{ze^z}{e^z - 1}\end{aligned}$$

En exploitant la relation 1.1, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} B_n^* \frac{z^n}{n!} &= ze^z + \frac{ze^z}{e^z - 1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n . \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + (-1)^n B_n\right) . \frac{z^n}{n!}\end{aligned}$$

Ce qui prouve qu'on a bien $(B_n^*)_{n\geq 0} = (n + (-1)^n B_n)_{n\geq 0}$. $\square$

Voici maintenant d'autres exemples de suites invariantes ou inversement invariantes données dans le théorème suivant

Théorème 15 *1. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0 = 2$ et $u_n = 1$ pour $n \geq 1$, alors $(u_n)_{n\geq 0} \in S^+$*

2. *Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0 = u_1 = 0$ et $u_n = n$ pour $n \geq 2$, alors $(u_n)_{n\geq 0} \in S^+$*
3. *Si $(u_n(t))_{n\geq 0}$ est définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $u_n = u_{n-1} + tu_{n-2}$ pour $n \geq 2$, alors $(u_n(t))_{n\geq 0} \in S^+$*
4. *Si $(u_n(t))_{n\geq 0}$ est définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_n = u_{n-1} + tu_{n-2}$ pour $n \geq 2$, alors $(u_n(t))_{n\geq 0} \in S^-$, $(nu_{n-1}(t))_{n\geq 0} \in S^+$ et $\left(\frac{u_{n+1}(t)}{n+1}\right)_{n\geq 0} \in S^+$*
5. *Soit $T_n(x)$ étant le n-ième polynôme de Tchebychev de première espèce, alors pour tout $x \in \mathbb{C}$, la suite $\left(\frac{T_n(x)}{(2x)^n}\right)_{n\geq 0} \in S^+$.*
6. $\left(\frac{(-1)^{n+1}\left(-1+2^{n+1}\right)B_{n+1}}{n+1}\right)_{n\geq 0} \in S^+$.
7. *Pour $x \neq 0, 1, 2\ldots$, la suite $\left(\frac{\binom{\frac{x}{2}}{n}}{\binom{x}{n}}\right)_{n\geq 0} \in S^+$*
8. *Pour $m \in \mathbb{N}^*$, la suite $\left(\binom{n+2m-1}{m}^{-1}\right)_{n\geq 0} \in S^+$*
9. *La suite $\left(\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right)_{n\geq 0} \in S^+$*
10. *Pour $m \in \mathbb{N}$, la suite $\left((-1)^n \int_0^{2m-1} \binom{x}{n+2m} dx\right)_{n\geq 0} \in S^+$. En particulier $\left((-1)^n \int_0^{-1} \binom{x}{n} dx\right)_{n\geq 0} \in S^+$.*

Nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 16 *(Identité de Vandermonde)*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n}$$

Preuve. En utilisant l'identité de Vandermonde il est clair que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{\binom{\frac{x}{2}}{n}}{\binom{x}{k}} = \frac{1}{\binom{x}{k}} \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{n}\binom{n}{k} (-1)^k \frac{\binom{\frac{x}{2}}{k}}{\binom{x}{k}}$$

$$= \frac{1}{\binom{x}{k}} \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \binom{x-k}{n-k} (-1)^k \frac{\binom{\frac{x}{2}}{k}}{\binom{x}{k}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\binom{x}{k}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-x-1}{n-k} \binom{\frac{x}{2}}{k}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\binom{x}{k}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-\frac{x}{2}-1}{n} = \frac{\binom{\frac{x}{2}}{k}}{\binom{x}{n}}$$

D'aprés l'identité de Vandermonde on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{x}{k+2m} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{n-r} \binom{x}{n+2m-r} = \sum_{r=0}^{n+2m} \binom{n}{r} \binom{x}{n+2m-r} = \binom{n+x}{n+2m}$$

$$A_n(x) = \binom{n+x}{n+2m} + (-1)^n \binom{x}{n+2m} \quad \text{alors } \{A_n(x)\} \in IS$$

D'aprés la formule binomiale d'inversion :

$$\int_0^{2m-1} \binom{n+x}{n+2m} dx = \int_0^{2m-1} \binom{n+2m-1-x}{n+2m} dx = (-1)^n \int_0^{2m-1} \binom{x}{n+2m} = \frac{1}{2} \int_0^{2m-1} A_n(x)\, dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k . \frac{1}{2} \int_0^{2m-1} A_k(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^{2m-1} \binom{x}{k+2m} dx$$

$\square$

Théorème 17 *$(E_n)_{n\geq 0}$ étant la suite des nombres d'Euler, on a*

$$\left(\frac{E_n - 1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in S^-$$

Preuve. On a

$$\frac{2e^z}{e^{2z}+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{z^n}{n!}$$

Il est alors clair que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n-1}{2^n}\frac{z^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}E_n\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{n!}\\ &= \frac{2e^{\frac{z}{2}}}{e^z+1}-e^{\frac{z}{2}}=e^{\frac{z}{2}}\frac{1-e^z}{e^z+1}\end{aligned}$$

Comme on a

$$\frac{1-e^{-z}}{e^{-z}+1}=\frac{e^z-1}{e^z+1},$$

$\frac{e^z-1}{e^z+1}$ est une serie formelle impaire. On constate ainsi que

$$e^{-\frac{z}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n-1}{2^n}\frac{z^n}{n!}=\frac{e^z-1}{e^z+1}$$

Comme est $\frac{e^z-1}{e^z+1}$ est une serie formelle impaire alors

$$\left(\frac{E_n-1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\in S^-$$

$\square$

Théorème 18 *Pour deux nombres b, c , soient deux suites de Lucas ;$\{u_n(b,c)\}_{n\geq 0}$ et $\{v_n(b,c)\}_{n\geq 0}$ définies par :*

$$u_0=0, u_1=1 \text{ et } u_{n+1}=bu_n-cu_{n-1} \qquad (n\geq 1)$$

$$v_0=0, v_1=b \text{ et } v_{n+1}=bv_n-cv_{n-1} \qquad (n\geq 1)$$

Alors on a

$$\left(\frac{u_n}{b^n}\right)_{n\geq 0}\in S^- \text{ et } \left(\frac{v_n}{b^n}\right)_{n\geq 0}\in S^+$$

En conséquence, il est prouvé que $(a_n)\in S^+ \iff$ il existe une suite (a_k).de telle sorte que :

$$a_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0.2/n}^{n}\binom{n}{k}; \quad (n=0,1,2,...)$$

Exemple 19 *Cet exemple est consacré à la relation de récurrence pour les suites invariantes. Le résultat principal est :*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f(k)-(-1)^{n-k}\sum_{s=0\,;2/k}^{k}\binom{k}{s}f(s)\right)A_{n-k}=0; \quad (n=0,1,2,...)$$

où $(A_n) \in S^+$ et f est une fonction arbitraire. Nous rappelons également les relations de récurrence pour les suites appartenant à S^- . Comme conséquence :

Si $(B_n), (F_n), (L_n)$ désignent réspectivement les nombres de Bernoulli, de Fibonacci et de Lucas on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left((-1)^{n-k} f(k) - \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} f(s) \right) B_{n-k} = 0 \quad ; (n = 0, 1, 2, ...)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f(k) + (-1)^{n-k} \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} f(s) \right) L_{n-k} = 0 \quad ; (n = 0, 1, 2, ...)$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f(k) - (-1)^{n-k} \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} f(s) \right) F_{n-k} = 0 \quad ; (n = 0, 1, 2, ...)$$

Ces identités fournissent de nombreuses relations de récurrence vérifiées par les nombres de Bernoulli, les nombres de Lucas et les nombres de Fibonacci en particularisant la fonction f.

1.
$$\begin{aligned} \text{Si } a_n &= \sum_{k=0}^{n} F_{k-1} b_{n-k} \ ; (n = 0, 1, 2, ...) \text{ alors} \\ (a_n)_{n \geq 0} &\in S^+ \text{ si et seulement si } (b_n)_{n \geq 0} \in S^+ \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \text{Si } F_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \ ; (n = 0, 1, 2, ...) \\ \text{alors } (a_n)_{n \geq 0} &\in S^+ \text{ si et seulement si } (b_n)_{n \geq 0} \in S^+ \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} \text{Soient } (a_n) \text{ et } (A_n) \text{ deux suites qui satisfont} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} A_k &= 1, (n = 0, 1, 2, ...) \\ \text{alors } (a_n) &\in S^+ \text{ si et seulement si } (A_n) \in S^+ \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} \text{Soient } (A_n) \text{ et } (a_n) \text{ deux suites satisfont } &: \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} A_k = 1, (n = 0, 1, 2, ...) \\ \text{alors } (a_n) &\in S^+ \text{ si et seulement si } (A_n) \in S^+ \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\text{si } (A_n) &\in S^+ \text{ avec } A_0 \neq 0 \text{ et si } (a_n) \text{ est donnée par} \\
a_0 A_0 &= 1 \text{ et} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} A_k = 0 \\
\text{alors } (a_{n+2}) &\in S^+ \text{ et } \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) \in S^+
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\text{si } (A_n) &\in S^+ \text{ avec } A_0 \neq 0 \text{ et } (a_n) \text{ donnée par } a_0 A_0 = 2 \\
\text{et } \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} A_k &= 1, \ (n = 0, 1, 2, ...) \\
\text{alors } (a_{n+1}) &\in S^- \text{ et } (n a_n) \in S^+
\end{aligned}$$

7. Si trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) non nulles satisfont

$$c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, (n = 0, 1, 2, ...).$$

Alors si deux de ces trois suites sont des suites invariantes alors la troisième l'est aussi.

Chapitre 3

La relation d'Ettingshausen-Seïdel-Kaneko

3.1 Introduction

La suite des nombres de Bernoulli vérifie la relation

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+k+1) B_{n+k} = 0.$$

De nos jours, cette relation est souvent à tort "relation de Kaneko". C'est en 1995 que Kaneko [24] publie cette relation mais en fait ne fait que redécouvrir une relation connue. En effet, comme le signale Cigler à juste raison, cette relation avait déjà été découverte en 1827 par von Ettingshausen [13]. Elle fut redécouverte par Seidel [32] (1877). Une relation plus générale, écrite symboliquement, figure aussi en page 240 dans le livre d'Edouard Lucas [27] (1891). Nous étudierons la preuve d'Edouard Lucas un peu plus loin De nombreux autres auteurs se sont intéressés à ce résultat. Ainsi Gessel [16] (2003) en donne une démonstration utilisant le calcul ombral. Chen [10] (2005) la démontre en exploitant des propriétés d'une matrice de Seidel. Chen et Sun [8] (2009) la prouvent en utilisant une extension de l'algorithme de Zeilberger alors que Cigler [12](2009) reprend, en la modernisant, la démonstration originale de Seidel. En 2011, Zékiri et Bencherif [40]généralisent cette relation. En 2012, Benchérif et Garici [4] obtiennent une plus grande généralisation de cette même relation en utilisant le calcul ombral. Nous détaillons certaines de ces preuves dans ce chapitre, il s'agit dans l'ordre d'abord d'une preuve imple de cette relation d'Ettingshausen (1827, [13]), en suite des preuves d'Edouard Lucas (1891,[27]), de Johan Cigler ([12],2009), d'Abelmoumène Zekiri et Farid Bencherif (2011, [40]) et enfin celle de Farid Bencherif et Tarek Garici ([4], 2012). Cette dernière preuve étant en fait un cas particulier d'un théorème général s'appliquant à toute suite de Césàro, nous terminons ce chapitre par de nombreuses applications de ce théorème aux suites de Césaro qu'on mis en évidence au chapitre précédent. Le paragraphe suivant est consacré à définir rigoureusement les propriés du calcul symbolique devenu aujourd'hui calcul ombral. Ces propriétés nous seront dans les preuves d'Edouard Lucas et de Johan Cigler.

3.2 Preuve simple de la relation d'Ettingshausen-Seïdel-Kaneko

La preuve de cette identité commence par la définition des nombres de Bernoulli.

$$\sum_{k\geq 0} \binom{m}{k} B_k = B_m$$

Calulons la différence $\Delta^l B_m$ pour les deux membres en utilisant le fait que :

$$\Delta^l \binom{m}{k} = \binom{m}{k-l},$$

on obtient alors

$$\sum_{i=0}^{l} (-1)^{l-i} \binom{l}{i} B_{m+i} = \Delta^l B_k$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m} B_k \Delta^m \binom{m}{k} &= \sum_{k=0}^{m} B_k \binom{m}{k-l} \\ &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} B_{m+j} \end{aligned}$$

En choisissant $m = n = l$, et on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} B_{n+i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{n+i},$$

Ce qui est équivalent à :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{2i+1} B_{2n-2i-1} = 0$$

Ce qui implque le résultat bien connu $B_{2i+1} = 0$ pour $i \geq 1$

Pour $l = n$ et $m = n+1$,on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} B_{n+1+i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{j} B_{n+j}$$

$$= B_n + \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i+1} B_{n+i+1}.$$

Comme $B_{n+1+i} = 0$ pour $n + i \equiv 0 \pmod 2$ cette identité est la même que :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{n+1+i} = B_n + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{n+i+1}$$

car

$$\binom{n+1}{i+1} + \binom{n}{i} = \frac{n+i+2}{n+1} \binom{n+1}{i+1}$$

ce qui donne

$$(n+1)\, B_n + \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i+1} (n+i+2)\, B_{n+i+1} = 0$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+k+1) B_{n+k} = 0.\text{pour } n > 1,$$

ce qui termine la démonstration.

3.3 Preuve d'Edouard Lucas (1891)

Pour définir une application linéaire entre deux sous espaces vectoriels, il suffit de définir les images d'une base de l'espace de départ. Comme $(x^i y^j)_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[x, y]$, on peut ainsi définir une application linéaire $L_B : \mathbb{C}[x, y] \to \mathbb{C}[x]$ par

$$L_B(x^i y^j) = B_j x^i. \quad (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Il en résulte que si $P(x, y) = \sum a_{i,j} x^i y^j \in \mathbb{C}[x, y]$, on a alors

$$L_B\left(\sum a_{i,j} x^i y^j\right) = \sum a_{i,j} B_j x^i.$$

Remarquons que

$$L_B(1) = L_B(x^0 y^0) = B_0 x^0 = 1$$

et que par conséquent

$$L_B(\lambda) = \lambda$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Nous conviendrons de noter "symboliquement" $\sum a_{i,j} B_j x^i$ par $P(x, B)$. Nous emploierons le signe $\doteq$ entre deux expressions symboliques

$$P(x, B) \doteq Q(x, B)$$

pour exprimer que l'on a l'égalité

$$L_B\left(P(x, y)\right) = L_B\left(Q(x, y)\right)$$

Remarquons alors que la relation (1.3) s'écrit alors

$$L_B\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k - y^n\right) = \delta_{n,1} \qquad (n \geq 0).$$

où encore

$$L_B\left((y+1)^n - y^n\right) = \delta_{n,1} \quad (n \geq 0).$$

Il en résulte que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} L_B\left((x+y+1)^k - (x+y)^k\right) &= L_B\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{k-j} \left((y+1)^j - (y+1)^j\right)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{k-j} \delta_{j,1} \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$L_B\left((x+y+1)^k - (x+y)^k\right) = kx^{k-1} \tag{3.1}$$

Nous allons prouver maintenant l'identité suivante appelée "identité fondamentale pour le calcul des nombres bernoulliens" par E. Lucas (page 240 de). Symboliquement cette identité s'énonce ainsi : on a

$$f(x+B+1) - f(x+B) \doteq f'(x) \tag{3.2}$$

pour tout polynôme $f(x) \in \mathbb{C}[x]$. Nous traduirons cet énoncé par le théorème suivant :

Théorème 20 *Pour tout polynôme $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, on a*

$$L_B\left(f(x+y+1) - f(x+y)\right) = f'(x)$$

Preuve. Soit $f(x) = \sum a_k x^k \in \mathbb{C}[x]$, on a alors, compte tenu de la relation (3.1)

$$\begin{aligned} L_B\left(f(x+y+1) - f(x+y)\right) &= \sum a_k L_B\left((x+y+1)^k - (x+y+1)^k\right) \\ &= \sum a_k\left(kx^{k-1}\right) \\ &= f'(x). \end{aligned}$$

□

En choisissant $x = 0$ dans (3.2) , on obtient la relation

$$f(B+1) - f(B) = f'(0) \tag{3.3}$$

Ce qu'on peut aussi énoncer de la manière suivante :

Corollaire 21 *Pour tout polynôme $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, on a*

$$L_B\left(f(y+1) - f(y)\right) = f'(0)$$

Compte tenu de la relation(1.2),le choix $f(x) = x^n$ dans (3.2) permet d'obtenir

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}, \quad (n \geq 1) \tag{3.4}$$

Théorème 22 *(Formule de Faulhaber) Pour tous entiers naturels n et m, on a*

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1}\left(B_{m+1}(n) - B_{m+1}(0)\right) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k} B_k n^{m+1+k}$$

Preuve. Il suffit de remarquer que pour tout entier k, on a, d'après la relation (3.4)

$$k^m = \frac{1}{m+1}\left(B_{m+1}(k+1) - B_{m+1}(k)\right)$$

On en déduit alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1}\left(B_{m+1}(k+1) - B_{m+1}(k)\right) = \frac{1}{m+1}\left(B_{m+1}(n) - B_{m+1}(0)\right)$$

La formule (3.4) est ainsi prouvée. On obtient (3.5) en tenant compte de l'expression (1.2) et de la propriété (1.8) □

En choisissant judicieusement le polynôme $f(x)$, Edouard Lucas va déduire de l'identité fondamentale pour le calcul des nombres bernoulliens (3.2) et théorème (20) de nombreuses identités vérifiées par les nombres de Bernoulli.

Edouard Lucas note en page 240 que si l'on suppose successivement que $f(x)$ représente

$$(2x-1)^p,\ x(x+1)...(x+p), (x-1)x...(x+p-1),$$

dans la relation (3.1), on trouve les formules de récurrence symboliques suivantes :

$$\begin{aligned}(2B+1)^p-(2B-1)^p &= 2p(-1)^{p-1},\\(p+1)(B+1)(B+2)...(B+p) &= p!,\\(p+1)B(B+1)...(B+p-1) &= -(p-1)!.\end{aligned}$$

Ce qu'on peut traduire par

$$\begin{aligned}L_B\left((2y+1)^p-(2B-1)^p\right) &\doteq 2p(-1)^{p-1},\\(p+1)L_B\left((y+1)(y+2)...(y+p)\right) &\doteq p!,\\(p+1)L_B((y(y+1)...(y+p-1)) &\doteq -(p-1)!.\end{aligned}$$

Ces relations écrites pour $p=2n+1$ pour la première (le cas où p est pair étant sans intérêt) et pour $p=n$ pour les deux suivantes se traduisent par le théorème suivant dans lequel les $\left[{n \atop k}\right]$ désignent les nombre de Stirling de première espèce non signés définies par l'égalité suivante

$$x(x+1)...(x+n-1)=\sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k}\right]x^k \quad (n\geq 0)$$

Nous avons vu que

$$L_B\left(f(y+1)-f(y)\right)=f'(0)$$

relation traduite symboliquement par

$$f(B+1)-f(B)=f'(0) \tag{3.5}$$

En page 240 de son livre, Edouard Lucas choisit

$$f(x)=(x-1)^p x^q$$

La relation (3.5) devient

$$B^p(B+1)^q-B^q(B-1)^p \doteq 0 \quad , \quad (p\geq 1,\ \ q\geq 2)$$

Cette relation se traduit par l'identité

$$\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}B_{p+k}+\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(-1)^{p-k+1}B_{q+k}=0$$

Choisissons $p = n$ et $q = n + 1$, cette relation devient

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_{n+k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n+k+1} B_{n+k+1} = 0 \qquad (n \geq 1)$$

Comme on sait que : $(-1)^n B_n = B_n$ alors on a pour $n \geq 1$

$$(-1)^{n+k+1} B_{n+k+1} = B_{n+k+1}$$

on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_{n+k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n+k+1} = 0$$

où encore

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_{n+k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} B_{n+k} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_{n+k} + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{n+1} \binom{n+1}{k} B_{n+k} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (1 + \frac{k}{n+1}) B_{n+k} = 0$$

Ainsi, on a obtenu la relation suivante vérifiée pour $n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+k+1) B_{n+k} = 0. \tag{3.6}$$

On vérifie directement par un simple calcul que cette relation est encore vérifiée pour $n = 0$. En effet on obtient par le calcul que $B_0 + 2B_1 = 0$

3.4 Preuve de Johan Cigler (2009)

On a besoin de l'identité suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} F_{n+k}(s) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} F_{2n-k}(s) = 0 \tag{3.7}$$

or

$$F_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k-1}{k} s^k \tag{3.8}$$

où les $F_n(s)$ désignent les polynômes de Fibonacci donnés par la formule de Binet :

$$F_n(s) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ avec } \alpha = \frac{1+\sqrt{1+4s}}{2} \quad et\ \beta = 1 - \alpha \tag{3.9}$$

ce qui satisfait l'identité

$$\sum_{n\geq 0} \frac{F_n(s)}{n!} z^n = -e^z \sum_{n\geq 0} \frac{F_n(s)}{n!} (-z)^n \tag{3.10}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} F_{n+k}(s) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} F_{2n-k}(s) = 0$$

qui est immédiate à partir de la relation suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left(\alpha^{2n-k} - \beta^{2n-k}\right) = \left(\alpha^2 - \alpha\right)^n - \left(\beta^2 - \beta\right)^n = s^n - s^n = 0$$

ceci implique que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{2k} F_{2n+2-2k}(s) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{2k+1} F_{2n+1-2k}(s)$$

Si nous appliquons la fonction linéaire L à l'identité $(3,3)$ on obtient le résultat suivant :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{2k+1} (2n-2k+1) B_{2n-2k} = 0 \text{ pour } n \succ 1$$

avec $B_{2k+1} = 0$ pour $k > 0$

alors on obtient la fameuse formule

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+k+1) B_{n+k} = 0.\text{pour } n \succ 1$$

C'est facile de vérifier la relation $(3,2)$ pour $n = 0$ et $n = 1$

3.5 Preuve d'Abdelmoumène Zekiri et Farid Bencherif (2011)

Dans leur article ([40]), A. Zekiri et F. Bencherif généralisent la relation d'Ettingshausen-Seïdel-Kaneko. Dans ce qui suit, nous avons adapté leur preuve pour prouver directement la relation d'Ettingshausen-Seïdel-Kaneko. La relation à prouvé étant facile à vérifier pour $n = 0$ et $n = 1$. On peut supposer dans ce qui suit que $n \geq 2$. Considérons les polynômes

$$H(x) = \frac{1}{2} x^{n+1} (x-1)^{n+1}, \tag{3.11}$$

$$K(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1+(-1)^{n+k}}{2(n+k+2)} \binom{n+1}{k} \left(B_{n+k+2}(x) - B_{n+k+2}\right). \tag{3.12}$$

En développant $(x-1)^{n+1}$ à l'aide de la formule du binôme, on obtient :

$$H(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+k+1} \binom{n+1}{k} x^{n+k+1}. \tag{3.13}$$

Comme on a, d'après la relation (3.11)

$$H(x+1) = \frac{1}{2} x^{n+1} (x+1)^{n+1},$$

on en déduit en développant $(x+1)^{n+1}$ à l'aide de la formule du binôme

$$H(x+1) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+k+1}. \tag{3.14}$$

On constate par différence membre à membre entre (3.13) et (3.14)

$$\begin{aligned} H(x+1) - H(x) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+k+1} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+k+1} \binom{n+1}{k} x^{n+k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1+(-1)^{n+k}}{2} \binom{n+1}{k} x^{n+k+1}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Or d'après la relation (3.12), on a

$$K(x+1) - K(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1+(-1)^{n+k}}{2(n+k+2)} \binom{n+1}{k} \left(B_{n+k+2}(x+1) - B_{n+k+2}(x)\right).$$

On sait d'après la propriété (1.12) que

$$B_{n+k+2}(x+1) - B_{n+k+2}(x) = (n+k+2)\, x^{n+k+1}.$$

On en déduit que

$$K(x+1) - K(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1+(-1)^{n+k}}{2} \binom{n+1}{k} x^{n+k+1}. \tag{3.16}$$

En comparant (3.15) et (3.16), on obtient

$$K(x+1) - K(x) = H(x+1) - H(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1+(-1)^{n+k}}{2} \binom{n+1}{k} x^{n+k+1}$$

Il résulte de cette relation que le polynôme $H(x) - K(x)$ est un polynôme constant. De plus on constate par un calcul direct qu'on a

$$H(0) = K(0),$$

il en résulte que l'on a

$$H(x) = K(x)$$

Les coefficients de x^2 dans $H(x)$ et dans $K(x)$ sont donc égaux, c'est à dire

$$\left[x^2\right] K(x) = \left[x^2\right] H(x) \tag{3.17}$$

D'après la relation (3.11) et le fait qu'on a supposé $n \geq 2$, on a

$$\left[x^2\right] H(x) = 0. \tag{3.18}$$

Les relations (3.17) et (3.18) impliquent

$$\left[x^2\right] K(x) = 0 \tag{3.19}$$

Calculons $\left[x^{n+2}\right] K(x)$. On a

$$\begin{aligned}
\left[x^{n+2}\right] K(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+(-1)^{n+k})B_{n+k}}{2(n+k+2)} \binom{n+1}{k} \binom{n+k+2}{2} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+(-1)^{n+k})B_{n+k}}{2(n+k+2)} \binom{n+1}{k} \frac{(n+k+2)(n+k+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+(-1)^{n+k})}{2} \binom{n+1}{k} (n+k+1) B_{n+k}
\end{aligned}$$

Comme on a supposé que $n \geq 2$, on sait que $B_{n+k} = 0$ pour $n+k$ impair et $n+k \geq 3$, la relation précédente s'écrit en remarquant que l'on a aussi $B_{2n+1} = 0$

$$\left[x^{n+2}\right] K(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+k+1) B_{n+k} \tag{3.20}$$

Des relations (3.20) et (3.19), on déduit que l'on a

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+k+1) B_{n+k} = 0.$$

Ce qui est bien la relation qu'on devait prouver.

3.6 Preuve de Farid Bencherif et Tarek Garici (2012)

Dans [4], Farid Bencherif et Tarek Garici démontrent un théorème général. Le théorème qui suit est un cas particulier de ce théorème général

Théorème 23 *Pour tout suite de Cesàro $u = (u_n)_{n\geq 0}$, on a la relation suivante*

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+k+1) (-1)^k u_{n+k} = 0 \tag{3.21}$$

La relation d'Ettingshausen-Seïdel-Kaneko s'obtient comme conséquence directe de ce théorème en remarquant que la suite $((-1)^n B_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Césàro.

Pour prouver le théorème 23, F. Bencherif et T. Garici introduisent l'application linéaire $L_u : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$ définie par ses images sur les vecteurs de la base canonique $(x^n)_{n\geq 0}$ de la manière suivante

$$L(x^n) = u_n \quad (n \geq 0).$$

Ainsi l'image de $P(x) = \sum_{i=1}^m a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ par L_u est

$$(P(x)) = \sum_{i=1}^m a_i u_i$$

Cette image est souvent notée pratiquement $P(u)$. Il est alors facile de constater que la suite u est une suite de Césàro si et seulement si on a $L_u(x^n - (1-x)^n) = 0$, pour tout entier $n \geq 0$. Il résulte alors de la linéarité de L_u que si u est une suite de Césàro, alors pour tout poynôme $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$, le polynôme $Q(x) - Q(1-x) \in \ker u$, autrement dit on a

$$L_u(Q(x) - Q(1-x)) = 0.$$

En choisissant

$$Q(x) = x^n(1-x)^{n+1},$$

On obtient, en désignant par D l'opérateur de dérivation dans $\mathbb{C}[x]$

$$\begin{aligned} Q(x) - Q(1-x) &= x^n(1-x)^{n+1} - x^{n+1}(1-x)^n \\ &= \frac{1}{n+1} D(x^{n+1}(1-x)^{n+1}) \\ &= \frac{1}{n+1} D(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} x^{n+k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+k+1) (-1)^k x^{n+k}. \end{aligned}$$

On a vu que si u est une suite de Cesàro, alors le polynôme $Q(x)-Q(1-x) \in \ker u$, autrement dit si u est une suite de Cesàro, on a

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+k+1)\,(-1)^k\, u_{n+k} = 0.$$

Ce qui est bien la relation qu'on devait prouver.

3.7 Applications à des suites de Césàro

Nous allons appliquer le théorème de Bencherif-Garici du pararagraphe précédent à différentes suites invariantes.

On sait que pour toute suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on a $u + T(u) = u + u^* \in S^+$, on déduit aussi du théorème précédent le corollaire suivant

Corollaire 24 *Pour toute suite $u = (u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on a*

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+k+1) u_k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+k+1) u_k^* = 0 \quad (n \geq 0).$$

On a vu que $(L_n)_{n\geq 0}$ et $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geq 0} \in S^+$, par application du théorème de , on obtient les identités

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+k+1) L_k &= 0 \\ \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+k+1) \frac{1}{2^k} &= 0 \end{aligned}$$

Conclusion

Ce mémoire nous a permis de faire un tour d'horizon sur l'origine et sur les propriétés des suites invariantes par transformation binomiale, appelées suites de Césàro et sur les suites inversement invariantes. Nous avons pu constater que de nombreuses suites de nombres et de polynômes remarquables sont associées simplement à des suites invariantes ou à des suites inversement invariantes. La recherche de relations vérifiées par des suites invariantes ou par des suites inversement invariantes représente donc, de toute évidence, un enjeu important. En effet, la découverte de telles relations fournirait des identités pour de nombreuses suites de nombres et de polynômes remarquables.

Annexe 1 : Quelques commandes MAPLE

On trouvera dans cette annexe quelques commandes MAPLE qui nous ont été utiles pour vérifier les relations données dans ce mémoire.

Calcul des nombres de Bernoulli :

$> seq(\text{bernoulli}(i), i = 0..20);$

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{5}{66}, 0, -\frac{691}{2730}, 0, \frac{7}{6}, 0, -\frac{3617}{510}, 0, \frac{43867}{798}, 0, -\frac{174611}{330}$

Calcul des nombres d'Euler :

$> seq(\text{euler}(i), i = 0..16);$

$1, 0, -1, 0, 5, 0, -61, 0, 1385, 0, -50521, 0, 2702765, 0, -199360981, 0, 19391512145$

Calcul du n-ième polynôme de Bernoulli :

$> sort(\text{bernoulli}(10, x), x);$

$x^{10} - 5x^9 + \frac{15}{2}x^8 - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{66}$

Calcul du n-ième polynôme d'Euler :

$> sort(\text{euler}(10, x), x);$

$x^{10} - 5x^9 + 30x^7 - 126x^5 + 255x^3 - 155x$

Calcul du numérateur d'un nombre rationnel :

$> numer(-\frac{4}{6}));$

-2

Calcul du dénominateur d'un nombre rationnel :

$> denom(-\frac{4}{6});$

3

Calcul de la suite des n premiers nombres premiers pour $n = 20$

$> seq(ithprime(n), n = 2..20);$

$3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71$

Vérification de la relation

$> f := n \rightarrow add(abs(Stirling1(n,k)).bernoulli(k), k = 0..n) + factorial(n-1),$

$>$ seq$(f(n), n = 0..20);$

$0,\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0$

Bibliographie

[1] M. Abramowitz and I.A. Stegun. Handbook of Mathematical Functions : with Formulas, Graphs and Mathematical tables, Dover Publications, 1972

[2] W.C.Barley. Problem. B-234.The Fibonacci Quarterly,Vol.11 N°2.April,1973,p222.

[3] M.Biknel and V.E.Hoggatt Jr.,Fibonacci's Problem book.The Fibonacci Association,1974

[4] F. Bencherif & T. Garici, suites de Césàro et nombres de Bernoulli, Publications Mathématiques de Besançon, Vol1. (2012), 19-26.

[5] R.Blazej.Problem B-298-294–185,The Fibonacci Quarterly,Vol.13,N°1,Vol.N°3.Feb.1975.

[6] L. Carlitz, Bernoulli Numbers, Fibonacci Quart. 6 (1958) 71-85.

[7] L.Carlitz,and J.A.H.Hunter,some Powers of Fibonacci and Lucas numbers.The FibonacciQuarterly.Vol.7.N°5.Dec1969.pp467-473

[8] W. Y. C. Chen, L.H. Sun, Extended Zeilberger's Algorithm for Identities on Bernoulli and Euler Polynomials, J. Number Theory 129, (2009) 2111-2132. arXiv :0810.0438 ; Final version. References updated and a typo in (8.1) corrected.

[9] C. H. Chang and C.W. Ha, On identities involving Bernoulli and Euler polynomials, Fibonacci Quart. 44 (2006), n°1, 39-45.

[10] K. W. Chen, A summation on Bernoulli numbers, J. Number Theory 111 (2005), n°2, 372-391

[11] W.Chevez.ProblemB-192,The Fibonacci Quarterly,Vol.5,N°5.Oct.1970 ;p443.

[12] J.Cigler,q-Fibonacci polynomials and q-Génocci numbers.arXiv prepint 0908.1219,2009

[13] von Ettingshausen, A.Vorlesungen über die höhere Mathematik,Bd. 1, Vienna :Carl Gerold,(1827).

[14] H.H.Ferns.Problem H.163,The Fibonacci Quarterly.Vol.9.N°2.April.1971pp143-144.

[15] M. B. Gelfand, A note on a certain relation among Bernoulli numbers, (Russian), Bashkir. Gos. Univ. Uchen. Zap. Vyp. 31 (3) (1968) 215-216.

[16] I. M. Gessel, Applications of the classical umbral calculus, Algebra Universalis 49 (2003) 397-434, dedicated to the memory of Gian-Carlo Rota.

[17] R.L.Graham, D.E.Knuth and O.Patashnik,Concrete Mathematics,2nd Edition,Addison Wesley,1994.

[18] D.Jarden,A new Impotant Formula for lucas numbers,the Fibonacci,Quartely,Vol,5 N°4.Nov.1967.p346.

[19] Velasco, Claudio de Jesús Pita Ruiz. "A Note on Fibonacci & Lucas and Bernoulli & Euler Polynomials." Journal of Integer Sequences 15.2 (2012) : 3.

[20] P.Haukkanen."Formal Power Series for Binomial Sums of Sequences of Numbers." The Fibonacci Quarterly MA (1993) :28-31

[21] V.E.Hoggatt.Jr,Problem.H-131,The Fibonacci Quarterly.Vol.7,N°3.Oct.1969,pp285-286

[22] Hou, S. J., & Zeng, J. (2007). A q-analog of dual sequences with applications. European Journal of Combinatorics, 28(1), 214-227.

[23] H.L.Humansky,Problem B-266,The Fibonacci Quarterly,Vol.12 ;N°3.Oct1974,pp315-316.

[24] M. Kaneko, A recurrence formula for the Bernoulli numbers, Proc. Japan Acad. Ser.A Math. Sci. 71 (8) (1995) 192-193

[25] D. E. Knuth. The Art of Computer Programming. Vol.3. Reading, MA : Addison-Wesley, 1973

[26] T.Koshy,Fibonacci and Lucas Numbers with Applications,John Wiley et sons,2001.

[27] Lucas, Edouard. Théorie des nombres. Vol. 1. Gauthier-Villars, 1891.

[28] S. Mattarei, & R. Tauraso.,Congruences of multiple sums involving sequences invariant under the Binomial transform. J. Integer Seq, 13(10.5), 1.(2010)

[29] H. Momiyama, A new recurrence formula for Bernoulli numbers, Fibonacci Quart. 39 (3) (2001) 285-288.

[30] N. Nielsen, Traité élémentaire des nombres de Bernoulli, Gauthier-villars et Cie, 1923

[31] H. Prodinger, Some information about the binomial transform, 1993.

[32] L. Seidel, Uber eine einfache Entstehungsweise der Bernoullischen Zahlen und einiger verwandten Reihen, Sitzungsber. Münch. Akad. Math. Phys. Classe (1877) 157-187.

[33] Sun, Z. H. (1995). A Supplement to the Binomial Inversion Formula.". J. Nanjing Univ. Math. Biquarterly, 12, 264-271.

[34] Sun, Z. H. (2001). Invariant sequences under binomial transformation. Fibonacci Quarterly, 39(4), 324-333.

[35] Sun, Z. W. (2003). Combinatorial identities in dual sequences. European Journal of Combinatorics, 24(6), 709-718.

[36] Z. H. Sun, On the properties of even and odd sequences, arXiv preprint arXiv :1402.5091, (2014).

[37] Wang, Y. (2005). Self-inverse sequences related to a binomial inverse pair. Fibonacci Quart, 43(1), 46-52.

[38] K.-J. Wu, Z.-W. Sun and H. Pan, Some identities for Bernoulli and Euler polynomials, Fibonacci Quart. 42 (2004) 295-299. Informaticae 38 (2011) pp 123-126.W

[39] Edouard Lucas and Primality Testing,Canadan,Mathématical Sociéty Séries of Monographs and advances texts (Vol 22).Willey,N.York 1998 ;74-94.

[40] A.Zekiri,F.Bencherif,A new récursion relationship for Bernoulli numbers,Annales Mathématicae et informaticae 38 (2011) pp 123-126.