

A travers cette thèse nous avons traité le problème de contrôle optimal discret en énonçant les divers principes du maximum relatifs à différentes formulations.

Une nouvelle voie de recherche est de trouver un principe du maximum des systèmes discrets dans le cas multiobjectif c'est à dire dans le cas où on a à optimiser plusieurs fonctions objectifs.

Nous avons également fait une synthèse des principaux résultats qui existent en optimisation multiobjectif notamment concernant la caractérisation des solutions efficaces et proprement efficaces, ceci nous permet de pouvoir les appliquer au problème de contrôle optimal discret multiobjectif.

Cette thèse pourra contribuer également à développer des méthodes numériques dans le domaine de l'optimisation multiobjectif non linéaire, à cet effet nous avons fait une prépublication interne sur les vecteurs suprémaux et quasi-suprémaux dans la méthode des contraintes d'égalités propres.

Une autre voie de recherche est de pouvoir exploiter les possibilités de la dualité multiobjectif pour les méthodes numériques, en effet nous remarquons qu'il existe beaucoup d'analogies entre la dualité Lagrangienne multiobjectif et la dualité Lagrangienne classique d'un programme non linéaire à une seule fonction objectif .

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Arrow, K.J., Hurwicz, L., and Uzawa, H., studies in Linear and Non-Linear Programming, Stanford Univ. Press, Stanford, California, (1958).
- [2] Aubin, J.P., «Mathematical Methods of Game and Economic Theory», North-Holland Publ., Amsterdam, 1979.
- [3] Bector, C.R. and Klassen, J.E. Duality for a nonlinear programming problem, *Utilitas Math.* 11 (1977), 87-99.
- [4] Bitran, G. R., «Duality for nonlinear multiple-criteria optimization problems, » *J. Optim. Theory Appl.* **35**, 367-401 (1981).
- [5] Bruckner, J. and Wu, S. A maximum principle for discrete systems with control variable inequality constraints, *Proc. Sixth Annual Allerton Conf. on Cir. and Sys. Theory*, 1968, pp. 475-484.
- [6] Brumelle, S., «Duality for multiple objective convex programs, » *Math Oper. Res.* **6**, 159-172 (1981).
- [7] Cannon, M. Cullum, C. and Polak, E. Constrained minimization problems in finite-dimensional spaces, *SIAM. J. Control and Optimization*, **4** (1966), pp. 528-547.
- [8] Chankong, V., and Haimes, Y., «Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology, » North-Holland Publ., Amsterdam, 1983.
- [9] Cochrane, J. L., and Zeleny, M., (eds.) «Multiple Criteria Decision Making. » Univ. of South Carolina Press, Columbia, South Carolina, 1973.
- [10] Cohon, J.L., «Multiobjective Programming and Planning, » Academic Press, New York, 1978.
- [11] Corley, H.W., A Fixed Point Interpretation of Pareto Optimization *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. Ac-26, No, 3, June 1981
- [12] Corley, H.W. A new scalar Equivalence for Pareto Optimization *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. Ac-25, No, 4, August 1980
- [13] Corley, H.W., «Duality for maximizations with respect to cones, » *J. Math. Anal. Appl.* **84**, 560-568 (1981).
- [14] DA Cunha, N.O. and Polak, E. Constrained minimization under vector valued criteria in finite dimensional spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **19** (1967), pp. 103-124.
- [15] di Guglielmo, «Nonconvex duality in multiobjective optimization, » *Math. Oper. Res.* **2** 285-291 (1976).
- [16] Fandel, G., and Gal, T., (eds.), «Multiple Criteria Decision Making Theory and Applications, Proceedings, Bonn, 1979 » Springer-Verlag, Berlin and New York, 1979.

- [17] Gearhart, W.B. Characterization of properly efficient solutions by generalized scalarization methods , Journal of Optimization Theory and Applications Vol.41. No 3, november 1983.
- [17*] Geoffrion A.M Duality in non linear programming: a simplified applications oriented development , Siam Rev(1974).
- [17**] Geoffrion, A.M. Proper efficiency and the theory of vector maximization, J. Math Anal. Appl. 22,(1968), 618-630.
- [18] Goicoeche, A.G., Hansen, D.R., and Duckstein, L., «Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Applications, » Wiley, NewYork,1982.
- [19] Grauer, M.,and Wierzbicki, A.P.,(eds.), «Interactive Decision Analysis; Proceedings of an International Workshop on Interactive Decision Analysis and Interpretive Computer Intelligence , HASA, Laxenburg , Austria 1983 » Springer-Verlag , Berlin and NewYork, 1984.
- [20] Hubert Halkin , A Maximum Principle of the Pontryagin Type For Systems Described By Non Linear Difference Equations, J. SIAM Control, Vol. 4, No. 1, 1966
- [21] Halkin, H. A maximum principle of the Pontryagin type for systems described by non linear difference equations, Siam J. Control and Optimization 4(1966), pp. 90-111.
- [22] Halkin, H. Optimal control for systems described by difference equations , Advances in control Systems , C.T. Leondes, ed., Academic Press, New York , 1964 Chap 4 .
- [23] Hansen, P., «Essays and Surveys on Multiple Criteria Decision Making, » Springer-Verlag,Berlin and NewYork,1983.
- [24] Holtzman, J.M. Convexity and the maximum principle for discrete systems, IEEE Trans. Automatic Control, AC-11 (1966), pp. 30-36.
- [25] Holtzman, J.M. and Halkin, H. Directional convexity and the maximum principle for discrete systems, SIAM. J. Control and Optimization,4 (1966), pp. 263-275.
- [26] J.M.Holtzman, On the maximum principle for non linear discrete time systems , I.E.EE Transaction on Automatic Control, 4, 1966, pp. 528-547
- [27] Holtzman, J.M. On the maximum principle for non linear discrete-time systems, IEEE Trans. Automatic Control, AC-11 (1966), pp. 273-274.
- [28] Hwang , C.L., and Masud , A.S., «Multiple Objective Decision Making Methods and Applications , »Springer-Verlag , Berlin and NewYork , 1979 .
- [29] Hwang, C.L., and Yoon, K., «Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications ?? -of the-Art Survey, » Springer-Verlag , Berlin and NewYork , 1981.
- [30] Isermann, H., «The relevance of Duality in Multiple-objective linear programming » in «Multiple Criteria Decision Making, »M.K. Starr and M.Zeleny,North-Holland Publ., Amsterdam, 1977.

- [31] Isermann, H., « On some relations between a dual pair of multiple-objective linear programs » *Z.Oper.Res.* **22**,33-44 (1978).
- [32] Isermann, H., « Duality in multiple-Objective linear programming », in *Multiple Criteria Problem Solving* » S.Zionts,(ed.), Springer-Verlag , Berlin and NewYork , 1978.
- [33] Jahn, J., « Duality in vector optimization, » *Math. Programming* **25**, 34?-353, (1983).
- [34] Kawasaki, H., « A duality theorem in multiobjective nonlinear programming, » *Math. Oper. Res.* **7**. 95-110 (1982).
- [35] Kawasaki, H., « Conjugate relations and weak subdifferentials, » *Math.Oper.Res.* **6** , 593-607 (1981).
- [36] Keeney, R. L., and Raiffa, H., « Decision with Multiple Objective Preferences and Value Tradeoffs, » Wiley,New York, 1975.
- [37] Kuhn, H. W., and Tucker, A. W., Nonlinear programming, in *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley, California , pp, 481-492 (1951) .
- [38] Lee, S. M., « Goal Programming for Decision Analysis, » Ausah Publishers, Philadelphia, 1972.
- [39] Leitmann, G.,(ed.), « Multicriteria Decision Making and differential games, »Plenum, NewYork,1976.
- [40] Leitmann, G., and Marzollo, A., (eds.), « Multicriteria Decision Ming. » Springer-Verlag, Berlin and New York,1975.
- [41] Lin, J.G Maximal vectors and multi-Objective Optimization
Journal of Optimization Theory and Applications Vol.18. No 1, January 1976
- [42] Lin, J.G Multi-Objective problems: Pareto-Optimal solutions by method of proper equality constraints, *IEEE Transactions on automatic control*, Vol. AC-21, No. 5, October 1976.
- [43] Lin, J.G Proper equality constraints and maximization of index vectors
Journal of Optimization Theory and Applications Vol.20. No 2, October 1976.
- [44] Luenberger D.G , *Optimization by vector space methods* , Wiley, New York 1969 .
- [45] Luc, D.T., « Duality theory in multiobjective programming, » *J. Optim. Theory Appl.* **43**, 557-582 (1984).
- [46] Magnanti, T.L. *Non Linear Programming and the Maximum Principle For Discrete Time Optimal Control Problems* , R.A.I.R.O octobre 1975, Vol 3, p. 75 à 91
- [47] Mahajan, D. M.Vartak, Generalization of some duality theorems in nonlinear programming *Math. Programming* **12** (1977) , 293-317.
- [48] Mangasarian, O.L. *Nonlinear programming* (McGraw-Hill,New york,1969).

[49] Mazzoleni , P., « Duality and reciprocity for vector programming, » European J.Oper.Res. **10**, 42-50 (1980) .

[50] Michel, Ph. Programmes mathématiques mixtes. Application au principe du maximum en temps discret dans le cas déterministe et dans le cas stochastique , R.A.I.R.O. Vol 14 , n°1, février 1980 , p. 1 à 19

[51] Mond, B. Weir, T. Generalized concavity and duality, Generalized concavity in optimization and economics edited by S.Schaible and W.Ziemba, pp. 263-279 (Academic Press, New York, 1981).

[52] Morse, J.N., (ed.), « Organizations: Multiple Agents with Multiple Criteria, Proceedings, University of Delaware , Newark , 1980. » Springer-Verlag ,Berlin and NewYork ,1981.

[53] Moulin, H. Fogelman, F. La convexité dans les mathématiques de la décision, Hermann Paris Collection Méthodes

[54] Naccache, P.H., « Stability in multicriteria optimization, » J. Math. Anal. Appl. **68**, 441-453 (1979).

[55] Nakayama, H., « Geometric consideration of duality in vector optimization » J.Optim. Theory Appl. **44**, 625-655 (1984).

[56] Nelson , « On the use of optimization theory for practical control system design », IEEE Transaction on Automatic Control 1964 .

[57] Neustadt,L.W., « Optimization »,Princeton Univ. Press,Princeton, New Jersey,1976.

[58] Nijkamp, P., and van Delft , A., « Multi-criteria Analysis and Regional Decision Making, » Martinus Hijhoff Social Sciences Division , Leiden , 1977.

[59] Ortega, J.A. Leake , R.J. Discrete maximum principle with state constrained control SIAM J. Control and Optimization Vol. 15 .No 6. November 1977

[60] Pontryagin L.S. et AL., The Mathematical theory of optimal processes , Interscience, New York , 1962.

[61] Propoi, A.I. The maximum principle for discrete systems, Automat. Remote Control, 26(1965), pp. 1169-1177.

[62] Rozonoer, L.I. The maximum principle of L.S Pontryagin in optimal-system theory, Part III Automat. Remote Control, 20 (1970), pp. 1515-1532 .

[63] Rietveld, P., « Multiple Objective Decision Method and Regional Planning , » North-Holland Publ., Amsterdam , 1980.

[64] Ritter., « Optimization theory in linear spaces I », Math. Ann. 182, 189-206(1969)

[65] Ritter., « Optimization theory in linear spaces II », Math. Ann. 183, 169-180(1969)

[66] Ritter., « Optimization theory in linear spaces III », Math. Ann. 184, 133-154(1970)

- [67] Rosinger , E.E., «Duality and alternative in multiobjective optimization. » Proc. Amer. Math. Soc. **64**, 307-312 (1977).
- [68] Salkuvadze , M.E., « Vector-Valued Optimization Problems in Control Theory, » Academic Press , NewYork , 1979.
- [69] Sawaragi, Y. Nakayama, H. Tanino, T. Theory of multiobjective optimization .
- [70] Schönfeld , P., « Some duality theorem for the non-linear vector maximum problem, » Unternehmensforsch. **14**, 51-63 (1970).
- [71] Singh, C. Optimality conditions in multiobjective differentiable programming
Journal of Optimization Theory and Applications Vol.53. No 1, April 1987
- [72] Smale,S., «Global analysis and economics I:Pareto optimum and generalization of Morse theory, in « Dynamical Systems, »M. Peixoto,(ed.),Academic Press, New York,1973.
- [73] Smale,S., «Global analysis and economics III:Pareto optima and price equilibria » J.Math Econom.1, 213-221(1974).
- [74] Star, M. K., and Zeleny, M., (eds.), « Multiple Criteria Decision Making, » North-Holland Publ., Amsterdam , 1977.
- [75] Tanino, T. Sawaragi, Y. Duality theory in multiobjective programming,
Journal of Optimization Theory and Applications Vol.27. No 4, April 1979.
- [76] Tanino , T., and Sawaragi , Y., Nakayama, H. «theory of multiobjective optimization, » Mathematics in Science and engineering Volume 176 , Academic press Inc (1985).
- [77] Tanino, T., and Sawaragi, Y., «Stability of nondominated solutions in multicriteria decision-making, » J. Optim. Theory Appl. **30**, 229-253 (1980).
- [78] Tanino , T., and Sawaragi , Y., «Conjugate maps and duality in multiobjective optimization , » J.Optim. Theory Appl. **31**, 473-469 (1980).
- [79] Thiriez, H., and Zionts, S., (eds.) « Multiple Criteria Decision Making, » Jouy-en-Josas
France, Springer-Verlag , Berlin and NewYork , 1976.
- [80] Weir, T. A converse Duality theorem in multiple objective programming ,
Operations research letters Vol. 6 , No. 3, July 1987.
- [81] Weir, T. Proper efficiency and duality for vector valued optimization problems,
J.Austral. Math. Soc. (Series A) 43 (1987), 21-34.
- [82] Wilhelm, J., « Objectives and Multi-Objective Decision Making under Uncertainty »
Springer-Verlag , Berlin and NewYork , 1975.
- [83] Wolfe, P. A duality theorem for non linear programming, Quart. Appl. Math.19 (1961)
239-244.

[84] Yu ,P.L, Cone convexity , cone extreme points , and non dominated solutions in decision problems with multiple objectives , J . Optim. Theory Appl. **14**,319-377(1974)

[85] Zeleny, M., « Linear Multi-objective Programming, » Springer-Verlag Berlin and NewYork , 1974.

[86] Zeleny, M., (ed.), « Multiple Criteria Decision Making: Kyoto, » Springer-Verlag ,Berlinand NewYork , 1976.

[87] Zeleny, M., « Multiple Criteria Decision Making, » McGraw-Hill , NewYork ,1982.

[88] Zionts, S.,(ed.), « Multiple Criteria Problem Solving: Proceedings, Buffalo,Ny 1977, » Springer-Verlag , Berlin and NewYork , 1978.

Table des matières

INTRODUCTION

CHAPITRE I Introduction au problème de contrôle optimal discret

I.1. Formulation de contrôle optimal discret à une fonction objectif	2
I.2. Lien avec la programmation mathématique	6
I.3. Introduction au problème de contrôle optimal continu	8
I.4. Enoncé du principe discret du maximum	8
I.5. Lien avec la programmation dynamique	9

CHAPITRE II Principe du maximum des systèmes discrets

II.1. Problème de contrôle optimal discret avec contraintes sur l'état initial et final	14
II.2. Problème de contrôle optimal discret avec contraintes sur les coordonnées de phase	15
II.3. Cas où la fonction objectif dépend de l'état final et du contrôle	19
II.4. Cas où le domaine de commande admissible dépend de l'état du système	20
II.5. Programmes mathématiques mixtes	22
II.6. Conditions nécessaires d'optimalité d'un programme mathématiques mixtes	24
II.7. Application au principe du maximum en temps discret	26

CHAPITRE III Optimisation multiobjectif et optimisation au sens de PARETO

III.1. Ordre de préférence et structure de domination	29
III.2. Définition d'élément efficace	31
III.3. Exemples d'ordre de préférences	31
III.4. Propriétés des ensembles efficaces	32
III.5. Approche par une suite hiérarchique de critères de performances	38
III.6. Définition d'une solution efficace	39
III.7. Définition de l'efficacité propre au sens de BORWEIN	39
III.8. Définition de l'efficacité propre au sens de BENSON	41
III.9. Définition de l'optimum de PARETO	42
III.10. Quelques propriétés topologiques des optimums de PARETO	45
III.11. Cas des critères différentiables	45

III.12. Cas des critères concaves	46
III.13. Exemples d'application	48
III.14. Deux approches de résolution par passage à un problème d'optimisation unicritère	49

CHAPITRE IV Caractérisation des solutions efficaces et proprement efficaces

IV.1. Vecteurs maximaux	54
IV.2. Caractérisation des solutions efficaces et proprement efficaces	58
1. Caractérisation par scalarisation	58
2. Recherche de la meilleure approximation au point idéal	62
3. Caractérisation par résolution d'un problème d'optimisation avec contrainte supplémentaire paramétrique	67
4. Méthode de scalarisation généralisée	71
IV.3. Conditions d'optimalité d'un problème de programmation multiobjectif différentiable	74

CHAPITRE V Dualité en optimisation multiobjectif

V.1. Dualité pour les programmes convexes	84
V.2. Dualité pour les programmes non convexes	86
V.3. Dualité réciproque	89
V.4. Dualité Lagrangienne	89
1. Cône des points extrêmes et lemmes fondamentaux	90
2. Carte primal et multiplicateur de Lagrange	93
3. Lagrangien vectoriel et point selle	96
V.5 Théorie de la dualité et carte duale	98

CONCLUSION GENERALE

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES