N°d'ordre : 01/ 2007-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université des Sciences et de la Technologie « Houari Boumediene »

Faculté de Mathématiques

MEMOIRE
Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER
EN : MATHATEMATIQUE
Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres

Par : Cherifi Nawel

SUJET

GENERALISATION DES NOMBRES ET POLYNOMES DE BERNOULLI

Soutenu le 31/01/2007 , Devant le jury composé de :

Mr BETINA KAMEL	**professeur**	**Président**
Mr BENALI BENZAGHOU ;	**professeur**	**directeur de thèse**
Mr ZITOUNI MOHAMED ,	**professeur**	**examinateur**
Mr HARNANE MOHAND OUAMAR	**maitre de conférences**	**examinateur**

GENERALISATION DES NOMBRES ET POLYNOMES DE BERNOULLI

LE SOMMAIRE

GENERALISATION DES NOMBRES ET POLYNOMES DE BERNOULLI

Chapitre 0 :
Introduction :

La formule donnant la somme des *n* premiers nombres entiers :

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

S'obtient facilement en remarquant que :

$$1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)$$

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}n+1-k\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)=\frac{1}{2}n(n+1)$$

Plus généralement, totaliser les carrés, les cubes, etc…des n premiers nombres entiers a été une préoccupation de plusieurs algébristes du XVIII iéme et XIX iéme siècle, parmi lesquels pascal et surtout jaques bernoull Posons pour tout entiers met $n\geq 1$:

$$S_m(n)=1^m+2^m+\cdots+n^m$$

On peut facilement trouver la relation de récurrence permettant de calculer $S_{m+1}(n)$ quand on connaît $S_k(n)$ pour $1 \leq k \leq m$

Pour cela, remarquons qu'on peut retrouver l'expression donnée pour $S_1(n)$ par une méthode généralisée

Observons que pour tout entier $k \geq 1$ on a :

$$(k+1)^2 - k^2 = 1+2k$$

et donc : $\sum_{k=1}^{n}((k+1)-k) = \sum_{k=1}^{n} 1 + 2S_1(n)$

c'est a' dire : $(n+1) - 1 = n + 2\, S_1(n)$

d'ou l'on tire l'expression :

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Plus généralement, on a' pour tort entiers $k \geq 1$, et $m \geq 1$:

$$(k+1)^m - k^{m+1} = 1 + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{q} k^n$$

On obtient alors en sommant de k=1a k=n :

$$(n+1)^{m+1} - 1^m = n + \sum_{k+1}^{m} \binom{m+1}{q} S_q(n)$$

C'est a' dire : $\sum_{k+1}^{m} \binom{m+1}{q} S_q(n) = (n+1)^{m+1} - (n+1)$

et en donnant à n des valeurs 1,2,3,4,…

$S_1(n) = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n$

$S_2(n) = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n$

$S_3(n) = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2$

$S_4(n) = \frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{30} n$

C'est en cherchant une formule générale pour exprimer la somme $S_m(n)$ que jaques bernoulli , au début du XIX ieme siècle , introduit une suite de nombre rationnels A,B,C…

La formule de bernoulli s'énonce alors ainsi :

$S_m(n) = \frac{1}{(m+1)} n^{m+1} + \frac{1}{2} n^m + \frac{1}{2}\binom{m}{1} An^{m-1} + \frac{1}{4}\binom{m}{3} Bn^{m-3} + \frac{1}{6}\binom{m}{5} Cn^{m-5}$
$+ \frac{1}{8}\binom{m}{7} Dn^{m-7} + \ldots$

avec : $\binom{m}{k} = m(m-1)\ldots\frac{(m-1+k)}{k!}$ (pour $k \geq 1$)

les lettres A, B, C, D représentent dans l'ordre les coefficients du dernier terme (coefficient de n) des expressions $S_2(n)$, $S_4(n)$, $S_6(n)$, $S_8(n)$, à savoir
$A=\frac{1}{6}$, $B=-\frac{1}{30}$, $C=\frac{1}{42}$, $D=-\frac{1}{30}$
Nous démontrons et préciserons la formule générale donnant $S_m(n)$
Remarquons qu'un raisonnement par récurrence permet de prouver que $S_m(n)$ est une expression polynomiale de n à coefficients rationnels , de (degré m+1) vérifiant la relation :

$$S_m(n) - S_m(n-1) = n^m \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

Posons $B_m(x)=P'_m(x)$
P_m vérifie la relation $P_m(x+1) - P_m(x)= x^m$

qui est équivalant à la relation : $\int_t^{t+1} B_m(u)du = B_m$, pour tout $t \in \Re$

B_m est appeler m'ieme polynôme de bernoulli (sa connaissance entraîne celle de P_m car $P_m(0) = 0$ pour $m \geq 1$) le terme constant est le coefficient de x dans $P_m(x)$ est le nombre rationnel noté Bm vérifiant :
$B_m= B_m(0)$ est appelé m'iémé nombre de bernoulli

Chapitre 1 Propriétés arithmétiques des nombres et polynômes de Bernoulli

1) **Définition des polynômes de Bernoulli :**

Proposition:

Il existe une unique suite de polynômes $(B_n)_{n\in N}$ de IR[X] telle que :

$B_0=1$

$\forall$ n $\in$ N*, $B_n' = n\ B_{n-1}$

$\forall$ n $\in$ N*, $\int_0^1 B_n(t)dt = 0$

De plus, B_n est de degré n et son coefficient dominant est égal à 1.

Démonstration:

Si n $\in$ N* et si B_{n-1} est déjà connu alors posons:

$$B_n(x) = n\int_0^x B_{n-1}(t)dt + c_n \quad \text{où } c_n \in \text{IR}$$

Ainsi, la condition $B_n' = nB_{n-1}$ est satisfaite.

Choisissons convenablement la constante c_n pour satisfaire la condition

$$\forall\ n \in N^*,\ \int_0^1 B_n(t)dt = 0\,.$$

$$n\int_0^1\int_0^x B_{n-1}(t)dtdx + c_n = 0 \text{ d'où } c_n = -n\int_0^1\int_0^x B_{n-1}(t)dtdx.$$

Cette constante étant parfaitement déterminée, la suite $(B_n)_n$ ainsi définie est donc unique.

On a par exemple; $B_1(x) = \int_0^x B_0(t)dt - \int_0^1\int_0^x B_0(t)dtdx = x - \frac{1}{2}.$

Montrons par récurrence, sur n$\in$N, la propriété :

H (n): B_n est de degré n et son coefficient dominant égal à 1.

Comme B_0=1, on a H (0). Comme $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, on a H (1).

Montrons, pour tout n∈N*: H (n) ⇒ H (n+1).

Soit n∈N* et supposons H (n). On a donc:
B $_n = x^n + Q_{n-1}$ ou $Q_{n-1} \in IR_{n-1}[x]$

Donc $B_{n+1} = (n+1)\int_0^x B_n(t)dt + c_{n+1}$ où c $_{n+1}$ ∈IR

$$B_{n+1} = (n+1)\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + R_n\right) + c_{n+1} = x^{n+1} + R_n \text{ où } R_n = \int_0^x Q_{n-1}(t)dt \text{ etR}_n \in IR[x].$$

Donc B_{n+1} est de degré n+1 et son coefficient dominant est égal à 1.
D'où H (n+1)
Donc: H (n) est vraie, $\forall n \in IN$.

□

Les polynômes de Bernoulli $B_n(t)$ sont définis par leur fonction génératrice:

$$\frac{x}{e^x - 1}e^{xt} = \sum_{k\geq 1} B_k(t)\frac{x^k}{k!}$$

Et leur généralisation $B_n^{(r)}(x)$ d'ordre r est définie par : leurs fonction génératrice

$$b_r(x,t) = \sum_{n\geq 0} B_n^{(r)}(t)\frac{x^n}{n!} = \left(\frac{x}{e^x - 1}\right)^r e^{xt}$$

Les polynômes d'Euler $E_n^{(r)}(x)$ d'ordre r

$$e_r(x,t) = \sum_{n\geq 0} E_n^{(r)}(t)\frac{x^n}{n!} = \left(\frac{2}{e^x + 1}\right)^r e^{xt}$$

et on a pour t=0 , on retrouve le niéme nombre de Bernoulli

$$E_n{}^0(t) = B_n{}^0(t) = t^n \quad \cdot$$

Et pour r =1, on retrouve les polynômes ordinaires.

1-2- propriétés arithmétiques :

a)- $\forall n \in N - \{0,1\}, B_n(1) = B_n(0).$
b)- $\forall n \in N, B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$
c)- $\forall P \in N^*, B_{2p+1}(0) = B_{2p+1}(1) = 0.$
d)- $\forall n \in N^*, B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$

e)- $\forall n \in N, B_n(x) = 2^{n-1}[B_n\left(\frac{x}{2}\right) + B_n\left(\frac{x+1}{2}\right)]$

f)- $\forall P \in N^*, B_{2p}(\frac{1}{2}) = \left(2^{(1-2p)} - 1\right)B_{2p}(0)$ et $B_{2p+1}(\frac{1}{2}) = 0$.

Démonstration:

a)- en intégrant la relation $B'_n = nB_{n-1}$ (pour n≥2) entre 0 et 1

$$\int_0^1 B'_n(t)dt = n\int_0^1 B_{n-1}(t)dt .$$

$$B_n(1) - B_n(0) = 0.$$

b)-Posons pour $n \in N$, $Q_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$

on a :

$Q_0 = 1$.

$\forall n \in N^*; Q'_n(x) = (-1)^{n+1} B'_n(1-x) = (-1)^{n+1} nB_{n-1}(1-x) = nQ_{n-1}(x)$

$\forall n \in N^*; \int_0^1 Q_n(t)dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t)dt = \int_0^1 (-1)^n B_n(u)du = 0.$

Posons : u=1-t.

La suite ($(B_n)_n$ étant unique, on déduit : $\forall n \in N, Q_n = B_n$ d'où le résultat.

c)- d'après la propriété a) $\forall p \in N^*, B_{2p+1}(1) = B_{2p+1}(0)$

D'après la propriété b) particularisée pour x=1.

$\forall p \in N, B_{2p+1}(1) = -B_{2p+1}(0).$

On en déduit : $\forall p \in N^*, B_{2p+1}(1) = B_{2p+1}(0) = 0.$

d)- montrons par récurrence, sur $n \in IN$, la propriété

H(n)=" $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$ ".

$B_n(x+1) - B_1(x) = (x+1) - \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} = 1$ d'où H(1).

Montrons pour tout $n \in N^*$ et: H(n)$\Rightarrow$H(n+1)

Soit $n \in N^*$ et supposons H(n): $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$.

En intégrant la relation ci-dessus entre 0et x on obtient :

$$\int_0^x B_n(t+1)dt - \int_0^x B_n(t)dt = n\int_0^x t^{n-1}dt.$$

$$\int_1^{x+1} B_n(t)dt - \int_1^{x+1} B_n(t)dt - \int_1^x B_n(t)dt = x^n$$

$$\int_x^{x+1} B_n(t)dt = x^n \text{ donc } \left[\frac{B_{n+1}(t)}{n+1}\right]_x^{x+1} = x^n$$

Donc $B_{n+1}(x+1) - B_n(x) = (n+1)x^n$. d'où H(n+1)

Et la propriété est vraie $\forall n \in IN^*$

e)- Posons pour $n \in N : P_n(x) = 2^{n-1}\left[B_n(\frac{x}{2}) + B_n(\frac{x+1}{2})\right]$

on a :

$$P_0 = \frac{1}{2}(1+1) = 1, \forall n \in N^*; P_n'(x) = 2^{n-1}\left[\frac{1}{2}B_n'(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}B_n'(\frac{x+1}{2})\right] = nP_{n-1}(x).$$

$$\forall n \in N^* \int_0^1 P_n(t)dt = 2^{n-1} \geq \left[\int_0^1 B_n(\frac{t}{2})dt + \int_0^1 B_n(\frac{t+1}{2})dt\right] = 2^{n-1}\left[\int_0^1 B_n(u)du\right] = 0$$

La suite (B_n) étant unique , $\forall n \in N \quad P_n = B_n$.

f) d'après b) avec $x = \frac{1}{2}$: $B_{2P+1}\left(\frac{1}{2}\right) = -B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right)$

donc:

$$B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

et d'après 2) avec $x = 0$; $B_{2P}(0) = 2^{p-1}\left[B_{2P}(0) + B_{2P}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

d'où $B_{2p}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2^{1-2p} - 1\right)B_{2p}(0)$

Et plus généralement on a les propriétés suivantes:

1) -En utilisant les identifications suivantes :

$$e_{r+s}(x,a+b) = e_r(x,a)\, e_s(x,b)$$

$$b_{r+s}(x,a+b) = b_r(x,a)\, b_s(x,b)$$

On obtient donc :

$$B_n^{(r+s)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{(r)}(a)\ B_{n-k}^{(s)}(b)$$

2) $b_r(2x, \frac{a+b}{2}) = b_r(x,a)\ e_r(x,b)$

$$B_n^r\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\,B_k^r(a)\,E_{n-k}^r(b)$$ d'ou :

3) $b_r(-x,t)= b_r(x,r-t)$

d'où : $(-1)^n B_n^r(t) = B_n^r(r-t)$

alors implique pour $t=\frac{r}{2}$

$B_n^{(r)}\left(\frac{r}{2}\right)=0$ pour n impair

C'est à dire $t=\frac{r}{2}$ est une racine du polynôme $B_n^{(r)}$

4) $b_r(x,t+1)- b_r(x,t) = x\, B_{r-1}(x,t)$ d'où :

$B_n^r(t+1) - B_n^r(t) = n\, B_{n-1}^r(t) = B_n^{r-1}(t')$ dérivée par rapport à t

Preuve 1) :

$$e_{r+s}(x,a+b)=\left(\frac{2}{e^x+1}\right)^{r+s}e^{x(a+b)}=\left(\frac{2}{e^x+1}\right)^r\left(\frac{2}{e^x+1}\right)^s e^{ax}e^{bx}$$
$$=\left(\frac{2}{e^x+1}\right)^r e^{ax}\left(\frac{2}{e^x+1}\right)^s e^{bx}$$
$$=e_r(x,a).e_s(x,b)$$

$$b_{r+s}(x,a+b)=\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{r+s}e^{x(a+b)}=\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^r\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^s e^{ax}e^{bx}$$
$$=\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^r e^{ax}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^s e^{bx}$$
$$=b_r(x,a).b_s(x,b)$$

$$2)\,b_n\left(2x,\frac{a+b}{2}\right)=\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)^r e^{\left(\frac{a+b}{2}\right)2x}=\left(\frac{2}{e^{2x}+1}\right)^r\left(\frac{x}{e^{2x}-1}\right)^r e^{ax}e^{bx}$$
$$=\left(\frac{2}{e^x+1}\right)e^{bx}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)e^{ax}$$
$$=e_r(x,b)b_r(x,a)$$

3)

$$b_r(-x,t)=\left(\frac{-x}{e^x-1}\right)^r e^{-xt}=\left(\frac{x}{e^{-x}+1}\right)^r e^{-xt}=\left(\frac{x}{e^x+1}\right)^r e^{x(r-t)}=b_r(x,t-r)$$

4)

$$b_r(x,t+1)-b_r(x,t)=\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^r e^{x(t+1)}-\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^r e^{xt}=\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^r e^{xt}(e^x-1)$$

$$=x\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^{r-1} e^{xt}=xb_{r-1}(x,t)$$

□

1-3-les nombres de Bernoulli :
la formule qui donne les nombres de Bernoulli est donnée par la proposition suivante:

proposition:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k}B_k=0 \qquad \forall n>1 \qquad \textbf{(1)}$$

preuve :

soit un entier ,en utilisant la relation (1)

B $_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}$ …(1) (déduire de la propriété α) pour r=1 et b=0,a=X)

Et pour n+1 et x=1 on obtien la relation :

B $_{n+1}$ (1)+$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}$ B $_K$ =B $_{n+1}$ (1)

$$\mathrm{B}_{n+1}(1)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k = B_{n+1}(1)$$

Mais :par définition B $_{n+1}$ (1) = B $_{n+1}$ (0) = B $_{n+1}$

En déduit qu'on a pour tout n≥1la relatio $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k$:

□

Sachant qu' on a:

B $_0$ =1et B $_1$ =-$\frac{1}{2}$ et B $_{2K+1}$ +0 (k≥1)

On obtient les calculs présenter dans le tableau suivant :

k	0	1	2	4	6	8	1	12	14	16	18	20	22				
B_K	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{-691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{361}{510}$	$\frac{438}{79}$	$-\frac{1746}{330}$	$\frac{8545}{138}$				

Calcul sur ordinateur :

A l'aide du logiciel du calcul formel « **MAPLE** » .L'instruction :

>bernoulli (n,x) ;

permet d'obtenir le n'ieme polynôme de bernoulli

l'instruction :
>bernoulli(n) ;

permet d'obtenir le n'ieme nombre de bernoulli
et aussi par l ' instruction :

with (nombre theory)
warning , New de définition for order
>B(n) ;

examples :

1) >bernoulli;(24):

$$-\frac{2634091}{2730}$$

2) > bernoulli (30);

3) >bernoulli (3,x);

$$\frac{1}{2}x+x^3-\frac{3}{2}x^2.$$

$\notin$ **Proprites:**

1) $\forall\ p \in N^*, B_{2p+1}=0$

2) $\forall\ n \in N, B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}x^k$

3) $\forall$ p$\in$N,$B_{2p}=\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}B_K$

4) $\forall$ p$\in$N-$\{0,1\}$,$B_{2P}=\frac{1}{(2p+2)(2p+1)}\sum_{k=0}^{2p-2}\binom{2p+2}{k}B_K$.

Démonstration:

1) conséquence de **c)**des propriétés des polynômes de bernoulli.

2)soit on la deduit de la proprite **1)**des proprietes des polynomes de bernoulli,soit on la demontrons en utilisant l' identité de **TAYLOR** por les polinomes appliquée en 0.

–

$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{B_n^{(k)}}{k!}(0)\ x^k$,or on a par récurrence immédiate:

$B_n^{(k)}(0)=\frac{n!}{(n-k)!}B_{n-k}(0)=\frac{n!}{(n-k)!}B_{n-k}$.

D' ou: $B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}x^k$.

3) D' après **2**) en particulier pour x=1 et n=2p on obtient:

$B_{2P}=B_{2p}(1)=\sum_{k=0}^{2p+2}C_{2p+2}^{k}B_k$

Pour $p\geq 2: B_{2p+2}=\sum c_{2p+2}^{k}B_k+C_{2p+2}^{2p-1}B_{2p-1}+C_{2p+2}^{2p}B_{2p}+(2p+2)B_{2p+1}+B_{2p+2}$

Or $B_{2P-1}=B_{2p+1}=0$ d'où $\forall p\geq 2$ $B_{2p}=\frac{1}{(2p+2)(2p+1)}\sum_{k=0}^{2p-2}C_{2p+2}^{k}B_k$

Cette relation permet d'affirmer, par récurrence que les nombres de Bernoulli sont rationnels .

Chapitre 2 :

Propriété p-adique des nombres et polynômes de bernoulli

<u>Définition</u> : Intégrale de **volkenborn** :
Soit k un sous corps valué complet de $\mathbf{Q_p}$
On dit que la fonction f : $Z/_p \longrightarrow$ k est volk intégrable si la suite

1) $p^n \sum_{j=0}^{p^n-1} f(j)$ a une limite dans k

On pose $\frac{1}{p^n-1} \sum_{j=0}^{p^n-1} f(j)$ sont analogues aux sommes de RIEMANN :
$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\frac{j}{n})$ d' une fonction f : $[0,1] \quad \rightarrow \Re$
donc :on peut exprimer les polynômes de Bernoulli par une intégrale de

Les sommes $\frac{1}{p^n-1} \sum_{j=0} f(j)$ sont analogues aux sommes de RIEMANN :

1/ $n \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right)$ d'une fonction f :[0,1] $\longrightarrow$ /R

Donc :on peut exprimer les polynômes de Bernoulli par une intégrale de Volkenborn

$\forall\ p \succ 0$ Premier on a :

$$B^{r+1}(t) = \int_{Z_p} B_n^r(t+x)dx = \lim_{m\to+\infty} \frac{B_n^r(t) + B_n^r(t+1) + \cdots + B_n^r(t-1+p^m)}{p^m}$$

en effet , la fonction génératrice des intégrales proposer est donnée

n n+1

$$\text{a)}\ \int_{Z_p} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_n^r(t+x)\frac{z^n}{n!}dx = \left(\frac{z}{e^z-1}\right)^r e^{zt} \int_{Z_p} e^{zx}\,dx = \left(\frac{z}{e^z-1}\right)^r e^{zt}$$

Formellement par(a) et coïncide avec celle de la suite $B_n^{r+1}(t)$ (intégrale de Volkenborn et nombres de bernoulli ordinaire)

Proprietés :

a)la série de Taylor des polynômes $(B_n)_{n\geq 0}$ au point *a* est :

$$B_n^r(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k^r(a)(t-a)^{n-k}$$

<u>preuve :</u>démontrons la formule

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_{n-k}x^k \quad .$$

de la relation :

$B'_n(x)$ =nBn-1 …(*)

$\forall n\geq 1$ permet d'obtention par récurrence la formule pour $k\in\{0,1,\ldots.n\}$

$B^k{}_n(x)=\dfrac{n!}{(n-k)!}\ B_{n-k}(x)$ et pour x=0 on obtient :

$B_n^k\ (0)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$Bn-k(0) $0 \leq k \leq n$

En appliquant la formule de TAYLOR MAC LAURIN au polynôme Bn(x) et en remarquant que :

$B_n^k(0)/k!=\dbinom{n}{k}$ Bn-k on obtient le résultat

Montrons la relation(*)

Par définition : $t^n = \displaystyle\int_t^{t+1} B_n(u)du$ du $\forall t\in$R(voir chapitre 0) alors :

d'une part on obtient :

t+1

$nt^{n-1} = \int_t^{t+1} B_n(u)du$ (par définition de l'intégrale)

Et donc on aura par dérivation on aura :
$nt^{n-1} = B_n(t+1) - B_n(t)$

D'ou: $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$ □

La série exponentielle formelle $\sum_{\frac{p^{n-1}}{n-1}} B_n \frac{z^n}{n!}$ existe car elle converge p-adiquement, avec la rayon de convergence de la série e^z est $r = p^{r-1} < 1$

La fonction qui a $x \in Z/p$ associer $e^{tx} = \sum_{n\geq 0} t^n \frac{x^n}{n!}$ est la classe c^1 et

$\int_{z_p} e^{tx}dx$ dx = $\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}(\int_{z_{dx}} x^n dx)$

Par identification des coefficients de t^n on obtient :
$Bn = \int_{Z/p} x^n\, dx$ (preuve voir ci dessous)

Propriété :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} B_J = 0$$

on va essayer de redemontrer cette propriété en utilisant l'intégrale de VOLKENBORN .

rappel : soient I ,T ,D,Δ les applications de Q(x) dans lui même définies par :
I(p(x))=p(x) :I est appelé opérateur identité
T(p(x))=p(x+1) T est appelé opérateur translation
Δ(p(x)) = p(x+1)-p(x) Δ est appelé opérateur différence

D(p(x)) = p'(x) D est appelé opérateur dérivation
Preuve : en utilisant l'intégrale de VOLKERBRNE ^{tx}

$\int \Delta(e^{tx})$ dx= $\int (e^{t(x+1)} - e^{tx})dx$ =$(e^t-1) \int_{z_p} e^{tx}dx = \frac{d}{dx}(e^{tx})(0)$ =t

Ainsi, pour tout $t \in Ep$ ou $Ep = \{t \in k/|t| < dt\}$. $t \neq 0$ on a :

$$\int_{z_p} e^{tx}dx = \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} \int_{z_{p0}} x^n \ .$$

D'où : $B_n = \int_{z_p} x^n dx$ (pour t=0 on a : $\int_{z_p} dx = 1$ =lim $\frac{t}{e^t - 1}$

il vient d'une autre part que B_0 =1 et d'autre par : n≥2 ; on a :

$$\int_{z_p}\Delta(e^{tx})dx = \int_{z_p} ((x+1)^n - x^n)dx = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\int_{z_p} x^j dx = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j = (x^n)'(0) = 0$$

Proposition :

Relation entre les Sn(y) et les nombres de bernoulli soit pour n ≥ 0

$Sn(y) = S(y^n)$ la fonction somme indéfinie de la fonction $y \to y^n$

On a : $S_n(y)=\frac{1}{n+1}(p_{n+1}(y)-B_{n+1}) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_{n-j}\frac{y^{j+1}}{j+1}$

<u>Preuve :</u>

On a : $(n+1)\, y^n = P_{n+1}(y+1) - P_{n+1}(y) = \Delta P_{n+1}(y)$

Puis que : $\Delta S_n(y) = y^n$ on a $\Delta \frac{S_{n-1}}{n+1} p_{n+1}) = 0$

Et alors $S_n(y) - \frac{1}{n+1} p_{n+1}(y) = C_n$ est une constante

Tel que : $\frac{1}{n+1}P_{n+1}(0) + C_n = 0$ $+C_n=0$ d'où $C_n = B_n + \frac{1}{n+1}$ et

$S_n(y) = \frac{1}{n+1}(P_{n+1}(y)-B_{n+1})$ $(P_{n+1}(y) - B_{n+1})$

Sachant que : $P_{n+1}(y) = \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j} B_{n+1-j}\, y^j$

$$S_n(y)=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}B_{n+1-j}y^j = \sum_{j=0}^{n+1}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{j}B_{n+1-j}y^j = \sum_{j=0}^{n+1}\frac{1}{n+1}\binom{n}{j-1}B_{n+1-j}\frac{y^j}{j}$$

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_{n-j}\frac{y^{j+1}}{j+1} \qquad \square$$

Les nombres de Bernoulli B_0, B_1,…sont donnés par la définition.

$B_n := \int_{Z_p} x^n dx$ (n=0,1,2,…).

La formule $\int_{Z_p} f(x+1)dx - \int_{Z_p} f(x)dx = f'(0)$ implique :

(*) $\int_{z_p}(x+1)^n dx - \int_{z_p} x^n dx =$ 1 si n=1

0 si n$\in$ 0,2,3 …

D'une autre façon,pour $\int_{z_p}(x+1)^n dx = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\int_{z_p} x^i dx - \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j = 0$

On obtient :

$$(*')\int_{z_p}(x+1)^n dx - \int_{z_p} x^n dx = \begin{cases} 0\, pour n = 0 \\ \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}B_j\, pour n \in \{1,2,....\} \end{cases}$$

On combinons $(*) et (*')$ on obtient :

$(* \quad *)$B$_0$=1 et $\sum\binom{n}{j}B_j = 0$ pour n≥ 2.

La relation $(**)$ détermine les nombres B$_0$,B$_1$,…

Et on conclus que ces nombres sont rationnels « indépendant de p »

Ie : que $\int_{z_p} x^n = \int_{z_q} x^n$ deux éléments égaux sur Q.

Proposition :

$$\int_{z_p}(-x)^n dx = \int_{z_p}(x+1)^n dx = \begin{cases} B_1 + 1 pour n = 1 \\ B_n\, pour n \neq 1 \end{cases}.$$

Et donc :B$_1$$= -\frac{1}{2} et (-1^n)B_n = B_n$ pour n≥ 2.

De plus B$_3$=B$_5$=B$_{7=\ldots=0}$

Les nombres de Bernoulli sont les cœfficients de série expentielle de certaine fonctions analytique par exemple $\int_{z_p}\exp(ax)dx = \frac{a}{\exp(a-1)}(a \neq 0)$

D'un autre coté ,on a : $\int_{z_p}\exp(ax)dx = \int_{z_p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n x^n}{n!}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n a^n}{n!}$.

Et donc : $\frac{a}{\exp(a-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{a^n}{n!}$ a$\neq 0$

Cette formule est l'une des définition classique des nombres de Bernoulli,similaire de :

$$\int_{z_p} \cos(ax)dx = \frac{a\sin(an)}{2-2\cos(a)} = \frac{a}{2}\cot an(\frac{a}{2}) \quad (p \neq 2) .$$

Nous obtenons :

$$\frac{a}{2}\cot an(\frac{a}{2}) = \sum(-1)^n a^{2n} \frac{B_{2n}}{(2n)!}(a \neq 0, p \neq 2).$$

Théorème :

Le dénominateur des B_n ne contient pas un carré .

PREUVE :

Pour tout nombre premier p on a :

$$\left| \int_{z_p} f(x)dx \right|_p \leq p \| f \|_1 \qquad f \in c^1 \ (\mathbf{Z}_p \longrightarrow \mathbf{Q}_p).$$

Et donc : $|B_n|_p = \left| \int_{z_p} x^n dx \right| \leq p$

Si $B_n = t\, m^{-1}$ ou $t,m \in Z$ sont relativement la puissances de nombres premier p dans la factorisation de m entre 0et1 alors m est le produit de premiers distincts.

Et le théorème suivant est plus précis, il donne même la façon dont ces premiers interviennent dans le dénominateur de B_n.

Théorème :von staudt

Soit n un entier alors :

$$B_n + \sum_{\frac{p-1}{n}} \frac{1}{p} \in Z \quad .$$

Pour la preuve on a le lemme suivant de L.VAN HAMME

Lemme: la formule :

$\left|B_n + \frac{1}{p}(0^n + 1^n + ... + (p-1)^n\right|_p \leq 1$ est vraie si les deux propriétés suivante sont vérifier :

i)p $\neq 2$,n$\in IN$

ii)p=2 ,n$\in IN$,n pair .

Preuve : pour k$\in \{1,2,...\}, n \in \{0,1,2,...\}$ ensembles

$R_n(k) := p^{-k}(0^n + 1^n + ... + (p^k - 1)^n)$;on a :
$R_0(k) = 1$ pour tout k, $\lim_{k\to\infty} R_n(k) = B_n$ p-adiquement .
Si i)et ii) sont vérifier alors :$\left|B_n - R_n(1)\right|_p \leq 1$ pour k$\in IN$ et n$\in \{0,1,2,...\}$

On a :

$$R_n(k+1) = p^{k-1}\sum_{s=0}^{p^{k+1}-1} s^n = p^{-k-1}\sum_{i=0}^{p^k-1}\sum_{j=0}^{p-1}(i+jp^k)^n = p^{-k-1}\sum_{i=0}^{p^k-1}\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s} i^{n-s}(jp^k)^s = \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s} R_{n-s}(k)R_s(1)p^{ks}$$

On sait que :pour n≥ 1 $R_n(k+1) - R_n(k) = \sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s} R_{n-s}(k)R_s(1)p^{ks}$

Et si s>1 alors :$\binom{n}{s} R_{n-s}(k)R_s(1)p^{ks} = \binom{n}{s} p^k R_{n-s}(k)R_s(1)p^{ks-k-1} \in Z/$

Pour s=1 et tout premier p on obtient :

$$\binom{n}{1} R_{n-1}(k)R_1(1)p^k = \binom{n}{1} R_{n-1}(k)\frac{1}{2}(p-1)p^k \in Z/$$

Pour s=1 ,p=2 et n pair $\binom{n}{1} R_{n-1}(k)R_1(1)2^k = \frac{1}{2}nR_{n-1}(k)2^k \in Z/$

Et par i)ou ii) on a :$\left|R_n(k+1) - R_n(k)\right|_p \leq 1$ (k$\in IN$)

On a pour k>m (k,m$\in IN$) :$\left|R_n(k) - R_n(m)\right|_p \leq 1$

Pour k plus grand que m=1 on arrive a :$\left|B_n - R_n(1)\right|_p \leq 1$ d'où la démonstration .

Chapitre3 :

Congruences

1) **Congruences sur les nombres et polynômes de Bernoulli ordinaire :**

Différentes congruences concernant les nombres et polynômes de Bernoulli d'ou plusieurs résultats sont connues, la plus importante est due à KUMMER qui est donnée sous sa forme simple :

Lemme :

1) $\begin{pmatrix} n & p \\ k & p \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \text{mod}(np\,\mathbf{Z}_p)$ si p ne divise pas k.

2) $\begin{pmatrix} np \\ k \end{pmatrix} \equiv 0 \mod (np\mathbf{Z}_P)$ si p ∕ k.

PREUVE :

pour démontrer la résultat on a besoin du théorème suivant dit le THEOREME des accroissements finis (P-ADIQUE)

THEOREME 2 :

Soit un espace de BANACH ultrametrique (E.| |)sur un corps complet k et soit $f(t) \in E[t]$ et $t,h,a \in E$. avec $|a| \leq 1$.

On munit E de la norme de GAUSS : $\left\| \sum_k a_k t^k \right\|_{E[t]} = Max\{ |a_k|, k \geq 0. \}$

1)Si $|h| \leq p^{1/p-1}$ alors $|f(a+h)-f(a)| \leq |h| \; \|f'\|_{E(t)}$

2)si p est impair et $|h| \leq p^{\frac{1}{p-2}}$ alors : $|f(a+h)-f(a)-hf'(a)| \leq \left|\frac{h^2}{2}\right| \|f'\|_{E(t)}$

:

Preuve du lemme :

Soit : f(t) = $\left(\frac{(x+1)^p - x^p - 1}{p} t + x^p + 1\right)^n$

avec : $\frac{(x+1)^p - x^p - 1}{p} \in ZI[X] \subseteq Q[X]$.

Donc : les coefficients de f(t) sont dans Q_p espace de BANACH
$E=\{g(x) \in Q_p[x] \; ; \; d°g \leq np\} \subseteq Q_p[x]$.
Alors TAF donne : $|f(p)-f(0)| \; |p| \; \|f'\| \leq |np|$.
Donc : $|f(p)-f(0)| = (x+1)^{np}-(x^p-1)^n \in npZI_P[X]$.
Et donc : $(x+1)^{np} \equiv (x^p-1)^n \mod npZ/_p[x]$.

En identifiant les coefficients on aura :

$$\binom{np}{kp} \equiv \binom{n}{k} \mathrm{mod}(npZ/_P)$$

pour la preuve de la relation **2)** du lemme 1 est élémentaire .

La version P-adique du T AF permet d'améliorer aisément plusieurs résultats connus sur les nombres de bernoulli ordinaires .

Théorème 3 :pour n≥1 , le nombre de bernoulli ordinaire $B_n=B_n^1(0)$ vérifie :

$$pB_n \equiv \sum_{k=0}^{p-1} k^n \equiv \begin{cases} 0 si p-1/n \\ p-1 si p-1 \end{cases}$$

preuve :

l'assertion est vérifié pour n=1 (B_1= $-\frac{1}{2}$) et , procèdent par induction , supposons qu'elle le soit pour tout indice strictement inférieur a n ≥ 2 .

On considère alors : le polynôme f(t) = $\frac{B_{n+1}(t)}{n+1} \in Q_p(t)$, dont les deux premièrs dérivées sont : $f'(t) = B_n(t)$ et $f''(t) = n\, B_{n-1}(t)$

le TAF permet d'écrire :

$$\left|\frac{B_{n+1}(p)-B_{n+1}}{n+1} - pB_n\right| = \left|\frac{np}{2}\right| \left\|pB_{n-1}(t)\right\| .$$

par l'hypothèse de l'induction et le fait que $B_0=1 \in Z/p$, on a :

$$\|p\, Bn\text{-}1(t)\| = \text{Max.}\{|\binom{n-1}{k} pB_k ; k=0,1,\ldots,n-1\} \leq 1 .$$

et il suit que : $pB_n - \frac{B_{n+1}(p)-B_{n+1}}{n+1} = pB_n - \sum_{k=0}^{n} k^n \in (np/2)Z/p$

nous concluons du : le lemme de HENSL assure l'existence et l'unicité d'éléments $\xi_1,\ldots,\xi_{p-1}$ $Z/p^{\times}$ tels que $\xi_p^{p-1} = 1$et $\xi_k \equiv k \bmod pZ/p$

En appliquant le TAF au polynôme $f(t)=t^n$ on trouve $|\zeta^{nk} - k^n| \leq |\zeta_k - k|\ \|f'\| \leq |np|$ autrement dit $\zeta_k^n \equiv k^n \bmod (npZ/p)$,l'ensemble $\{\zeta_1,\ldots\zeta_{p-1}\} \in Z/p^{\times}$ des racines(p-1) ième de l'unité formant un groupe cyclique , il est engendré par les puissances d'un élément ξ de sorte que , modulo (np/2)Z/p (et même modulo(npZ/P) .

la somme :

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^n \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k_k^n = \sum_{k=0}^{p-2} (\xi^n)^k = \frac{1-\xi^{n(p-1)}}{1-\xi^n}$$ est nulle si n n'est pas un multiplie de p-1

et elle vaut p-1 si non □

de ce THM découlent le résultats de KUMMER et de CLAUSEN-VON STAUDT

1) si p-1 ne devise pas n , alors $Bn \in nZ/p$ et plus précisément $Bn(a) \in nZ/p$ pour tout $a \in Z/p$

on a' aussi $pBn \equiv -1 \bmod Pz/p$ lorsque p-1 devise n pair ≥ 2

2) $Bn + \sum_{p-1/n} \frac{1}{p}$ est un nombre entier (pour tout n pair) de plus , on sait que si p-1 ne devise pas m≥2,alors : $\frac{B_{m+p-1}}{m+p-1} \equiv \frac{B_m}{m}$.

Les valuations p - adique $v_p(B_k)$ des B_k :

Possèdent les propriétés suivantes :
i)si p-1 divise 2k alors $v_p(B_k)=-1$
ii)si p-1 ne divise pas 2k alors $v_p(\frac{B_k}{k}) > 0$
la démonstration est donnée par la proposition 2 et le théorème de Clausen _von staudt .
Proposition 2 : soit n un entier ≥ 1

Pour tout nombre premier p on a :
$pB_n \in Z/_p$ $pB_{2n} \equiv S_{2n}(p)$ (mod $pZ/_p$) .
Preuve :(de la prop 2)

i)en déduit aussitôt de $\left|\int_{Z_p} f(x)dx\right| <p\|f\|_2$ ou $\|f\| = \sup_{x\in Z_P} |f(x)|$.

tel que : $\left| f_n \right| = \left|\int_{Z_P} x^n dx\right| <p|x|_p = p = |p^{-1}|$.

ie : $|pB_n| \leq 1$ donc :$pB_n \in Z/_P$.

ii) puisque $B_{2n-j}=0$ lors que j=2n-1 et impair

$$S_{2n}(p)=\sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{2j}B_{2n-j}\frac{p^{j+1}}{j+1} = pB_{2n} + \sum_{j=1}^{n}\binom{2n}{2j}\frac{p^{2j+1}}{2j+1} + \binom{2n}{2j}B_n\frac{p^{2n}}{2n}.$$

$$=pB_{2n}+\sum_{j=1}^{n}\binom{2n}{2j}pB_{2(n-j)}\frac{p^{2j}}{2j+1} - \frac{p^{2n}}{2} .$$

Avec :$pB_{2(n-j)} \in Z/_p$ pour $1 \leq j \leq n$.

a) si p=2 on a $1 \leq j \leq n$ $v_2(\frac{2^{2j}}{2j+1})$=2j-v_2(2j+1)=2j >2 .

$v_2(\frac{2^{2n}}{2})$=2n-1 ≥ 1.

b) si p=2 alor $v_p(\frac{p^{2n}}{2})$=2n≥ 2 pour $1 \leq j \leq n$ comme $p^{v_p(2j+1)} \leq 2j+1$.

on a $v_p(2j+1) \leq \dfrac{Log(2j+1)}{Logp}$ <Log(2j+1) .

Mais Log(x+1) < x ainsi Log (2j+1) < 2j il vient que :

V_p (2j+1) <2j et $v_p(\dfrac{p^{2j}}{2j+1})$ =2j $-v_p$(2j+1) ≥ 1 .

On déduit de ce qui précède que pour tout nombre premier p,on a :

$V_p(S_{2n}(p)-pB_{2n}) \geq Min (\min_j (2j-v_p(2j+1)),2n-v_p(2)) \geq 1$.

Il vient que $S_{2n}(p)-pB_{2n} \in pZ/_p$.

Preuve du théorème de clausen –von staudt :

1) réduisant la somme $S_{2n}(p) = \sum_{j=1}^{p-1} j^{2n}$,on a :$S_{2n}(p)= \sum_{\mu\in F_P^*} \mu^{2n}$.

Ou bien :p-1/2n et alors $\mu^{2n} = 1 \forall \mu \in F_p^*$ et $S_{2n}(p) = \sum_{\mu\in F_p^*} 1 = p-1$ =-1 .

Ou bien p-1// 2n et considérant $\xi \in F_P^*$ tel que :

$\xi^{2n} \neq 1$,comme $\xi F_P^* = F_p^*$ on a : $S_{2n(p)} = \sum_{\mu\in F_P^*} \mu^{2n} = \sum_{\mu\in F_P^*} (\xi\mu)^{2n} = \xi^{2n} S_{2n}(p)$

Ainsi :(1-ξ^{2n}) S_{2n}(p) =0 ,et donc :S_{2n}(p) =0 .

En résumé :

On a :S_{2n} (p)= -1(mod $pZ/_p$) lorsque p-1 /2n et S_{2n}(p)=0 (mod $pZ/_p$) lorsque : p-1//2n .

soit q un nombre premier quelconque , considérant :

$B_{2n} + \sum_{p-1/2n} \frac{1}{p} \in Q.$

Ou bien q-1/2n alors :

$$\left| B_{2n} + \sum_{p-1/2n} \frac{1}{p} \right|_q = \left| B_{2n} + \frac{1}{q} + \sum_{p-1/2n} \frac{1}{p} \right|_q \leq Max(\left| B_{2n} + \frac{1}{q} \right|_q, \max_p \left| \frac{1}{p} \right|_q) = 1$$

Et de même si q-1//2n et il vient que :$B_{2n} + \sum_{p-1/2n} \frac{1}{p} \in Q \cap Z/_q$

En conclusion :$B_{2n} + \sum_{p-1/2n} \frac{1}{p} \in Q \cap (\bigcap_q Z/_q) = Z/$.

D'où :l'on déduit que le dénominateur de B_{2n} est sans facteur carré .

Et puit une amélioration de ce résultat :

Théorème 4 : si m≥1 et p-1 ne devise pas m+n , alors on a la congruence :

$\frac{B_{m+np}(a)}{m+np} \equiv \frac{B_{m+n}(a)}{m+n}$ (mod npZ/p) pour tout entier périodique a$\in$ Z/p

Preuve :

Comme p-1 ne devise pas m+n , le polynôme R(t) = $\frac{B_{m+np}(t)}{m+np} - \frac{B_{m+n}(t)}{m+n}$

D'écrit une fonction ~~Z/p~~ $\longrightarrow$ Z/p et pour un entier n$\geq$1 donne :
La dernière propriété énoncer dans le premier paragraphe fournit

$$|R(n)-R(0)| = |\sum_{k=0}^{n-1} k^{m-1+np} - k^{m-1+n}| < \underset{k}{Max}\left\{|k^{np} - k^{n}| \; |\xi; k = 0,...n-1\right\}$$

en posant x=0 dans la congruence déjà établie $(x+k)^{np} \equiv (x^p + k)^n$ mod npZ/p(x)
on voit que : $k^{np} \equiv k^n$ mod np Z/p et il suit que R(n) $\equiv$ R(0) mod npZ/p
ceci étant valable pour tout entier n$\geq$0 , l'application R : Z/p $\quad \frac{Z/_p}{npZ/_p}$ est constante (par densité de N/ dans Z/p)
considerons une nuitée P-adique a$\in$ Z/p* afin que les termes $\frac{1+k}{n}$ (k$\geq$0) se trouve dans Z/p
en utilisant l'identité suivante dit l'identité de RAABE
le fait que : $a^{np} \equiv a^n$ mod npZ/p , nous obtenons alors :

$$R(n) \equiv R(0) \equiv a^{m-1+n} \sum_{k=0}^{a-1} R\left(\frac{1+k}{a}\right) \equiv a^{m+n} R(0) \text{ mod npZ/p .}$$

Remarque : $(a^{m+n} - 1)$ R(0) $\equiv$ 0 mod(npZ/p) .

Choisissons pour a$\in$ {1,…,p-1} un générateur du groupe multiplicatif $(Z / pZ)^*$
Donc : $a^{m+n} - 1$ est inversible dans Z/p (car p-1/m+n) et l'application R est nulle .

Du THM 4 on retrouve la résultats suivant :

Théorème 5 :

Si c est divisible par (p-1) p^s (s$\geq$0) et p-1 ne devise par m , alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{B_{m+kc}(a)}{m+kc} \in P^{\min\{m-1, n(s+1)\}} Z/_p$$ pour tout entier p_adique a

Et tout n$\in$ IN .

Preuve :

Comme p-1 divise c mais m le polynome :

Q(t)=$\sum_{k=0} n\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{B_{m+kc}(t)}{m+kc}$ d'écrit une fonction Z/$_p \to Z/_p$ pour tout entier $N\geq 1$,on peut écrire :

Q(N)-Q(0)=$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\sum_{l=0}^{N-1} l^{m-1+kc}=\sum_{l=0}^{N-1} l^{m-1}(l^c-1)^n$

Et on raisonne sur les indices intervenant dans cette dernière somme :

Si l est divisible par p alors $l^{m-1}\in P^{m-1}Z/$.

Dans le cas contraire , on a $l^{p-1}\equiv 1 \bmod pZ/_p$ et le TAF d'ordre 1

(appliqué au polynome f(t)=t$^{\frac{c}{p-1}}$) donne $|l^c-1|\leq |c\,p|$,donc en particulier $l^c\equiv 1 \bmod p^{s+1}Z/$ et $(l^c-1)^n\in p^{n(s+1)}Z/$.

Au total ,ces considérations montrent que la réduction :

$\bar{Q}$:Z/$_p \to \frac{Z/_p}{p^{\min\{m-1,n(s+1)\}}Z/_p}$ est constante (par densité de N dans Z/$_p$)

Choisissons un entier $b\in\{1,2,..,.p-1\}$générateur de $(Z//pZ/)^{\times}$ et considérons une puissance a=b^q avec $\underset{p}{ord}(q)\geq \min\{m-1,n(s+1)\}$

On a ainsi $|a^c-1|\leq |qc\,p| et donc a^c\equiv 1 \bmod p^{\min\{m-1,n(s+1)\}}Z/$.

L'identité de Raabe nous donne alors :

Q(0) $\equiv Q(a)\equiv a^{m-1}\sum_{k=0}^{a-1}Q(1+\frac{k}{a})\equiv a^m Q(0) \bmod p^{\min\{m-1,n(s+1)\}}Z/_p$ et comme (a^m-1)est inversible dans Z/$_p$ (puisque p-1 ne divise pas m),il suit que l'application $\bar{Q}$ est identiquement nulle .

Définition :l'identité de Raabe (pour les nombres de Bernoulli ordinaires)est :

$$B_n(a)=a^{n-1}\sum_{k=0}^{a-1}B_n(1+\frac{k}{a}).$$

Rappel :

on note par k une extension finie de Qp et on considère la clôture intégrale de Z/p dans k , qui coïncide avec la boule unité A= $B_{\leq 1}(0)$ ={α∈k ; | α|≤ 1}.

soit $c\in N$ et $(a_n)_n$ une suite dans A , on regarde les puissances de l'opérateur Δ_c qui agit sur $(a_n)_n\geq 0$ par :

$\Delta_c a_m=a_{m+c}-a_m$.

et soit l'application linéaire $\varnothing : A(x) \rightarrow A$ définie sur la base canonique par $\varnothing (x^n) = a_n$,on a ainsi :
$\Delta_c \varnothing : (f(x)) = \varnothing ((x^c-1)f(x))$ pour tout polynôme $f(x) \in A(x)$ et par itération , on trouve :

$$\Delta_c^n a_m = \Delta_c^n \phi(x^m) = \phi(x^m (x^c - 1)^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{c} (-1)^{n-k} a_{m+kc} \quad .$$

Théorème 6:
Etant donnée une série formelle $f(t) \in A[(t-1)]$, les éléments

$$a_m = \frac{d^m}{dx^m} f(e^x)\Big|_{x=0} \quad \text{resp} \quad \hat{a}_m = \frac{d^m}{dx^m} \Big(f(e^x) - \frac{1}{p} \sum_{\xi^p=1} f(\xi e^x) \Big)' .$$

Sont dans A et pour tout entier $c \geq 0$ divisible par $(p-1)\, p^s$ $(s \geq 0)$, on a :
$\Delta_c^n a_m \in p^{\min(m,n(s+1))} A$ resp $\Delta_c^n \hat{a}m \in p^{(n(s+1))} A$.
Preuve :
par linéarité , on se ramène a ne traiter que le cas :
$f(t) = (t-1)^l$ pour un entier $l \geq 0$ fixé :

on trouve ainsi : $\varnothing(x^m) = am = \sum_{k=0}^{m} \binom{l}{k} (-1)^{l-k} k^m \in Z/\subseteq A$

notons que a_m est nul lorsque $m<l$ puis que $f(e^x)=(e^x-1)^l$ admet le développement $(x+x^2/2!+x^3/3!+\ldots x^n/n!)^l$ et par linéarité ,on obtient

$$\Delta_c^n a_m = \varnothing(x^m(x^c-1)^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{l}{k} (-1)^{l-k} k^m (k^c - 1)^n .$$

Les éléments $\varnothing (x^m) := \hat{a}m$ et Δ_c^n $\hat{a}m$ se développent comme ci dessus , a la différences que les sommes portent sur les indices k qui ne sont pas divisibles par p(on utilise ici le fait que : $\sum_{\xi^p=1} \xi^k$ vaut p si p divise k ,et est nul sinon).

On conclut alors comme dans la preuve du théorème 6 on raisonnant sur chaque Indice intervenant dans ces sommes .

□

On définit l'opérateur cœfficient binomial $\binom{D}{k}$ associe à l'opérateur $D=\frac{d}{dt}$,
Et en écrit le cœfficient binomial par :

$\binom{x}{k} = \dfrac{x(x+1)...(x-k+1)}{k!}$.

Soit p un nombre premier et on définit q par :

$q = \begin{cases} psip > 2 \\ 4sip = 2 \end{cases}$.

Soit f$\in D_K [[T-1]]$ou D_K est l'anneau des entiers .

On définit l'opérateur linéaire φ par :

φ(f(T))=f(T)-$\dfrac{1}{p}\sum_{\xi^p=1} f(\xi T)$.

Théorème 7 :

Soit f$\in D_k [[T-1]]$ et écrivons : f(e^t) = $\sum_{n\geq 0} a_n \dfrac{t^n}{n!}$ alors :$a_n \in D_k \forall n$ de plus :

Si c$\equiv \bmod(\phi(q)p^a) avec a \geq 0$ alors :

$\Delta_c^k m \equiv 0(\bmod\, p^a D_k)$ pour tout m,k ≥ 0.

.

Soit A=$\begin{cases} Min\{n,k(a+1)\}sip > 2 \\ Min\{n,k(a+3)\}sip = 2 \end{cases}$

Et l'opérateur linéaire φ définit plus haut est une fonction dans $D_k [[T-1]]$et si :

F(e^t) = $\sum_{n\geq 0} a_n \dfrac{t^n}{n!}$ on écrit :

$\varphi(f(e^t)) = \sum_{n\geq 0} \hat{a}_n \dfrac{t^n}{n!}$ alors $\hat{a}_n \in D_k$ de plus : si c$\equiv 0 \bmod(\varphi(q)p^a)$ avec a≥ 0alors :

$\Delta_c^k \hat{a}_m \equiv 0 \bmod(p^{ka'} D_k)$ pour m ,k≥ 0 ou : a'=$\begin{cases} a+1sip > 2 \\ a+3sip = 2 \end{cases}$.

Et on a aussi :$\binom{p^{-r}\Delta_c}{k} \hat{a}_m \in D_K$.

Preuve :

On utilisant la formule de '' Mellin _Barsky '' montrant que $\hat{a}_n \in D_k$.

Soit : $\mu = \mu 0 a_n$ alors :

$a_n = \sum_{m=0}^{n} b_m m! S(n,m)$,comme $|S(n,k)|$=$(-1)^{n+k}$S(n,k) alors :

$a_n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n+m} b_m n! S(n,m)$ alors $\hat{a}_n$=$(-1)^{n+m} b_m$n ! .

par la formule de ''FAADI BRUNO'' : (v0u)(x)=$\sum_{k=1}^{n} v(k) B_{n,k}(u)$

ou $B_{n,k}$ est le polynôme de Bell exp partiel pour $\mu = a$ avec :

a(n)=$\begin{cases} 0 \sin = 0 \\ 1 pour n = 0 \end{cases}$

$$\left(\frac{g_\mu(x)}{k!}\right)^k = \sum_{n\geq k} B_{n,k}(\mu)\frac{x^n}{n!}$$,Y=g_a(x)=1-e^{-x} et x=$g_{\hat{a}}$(x)=-Log(1-x)

Mais : $\frac{(e^x-1)^k}{k!} = \sum_{n\geq k} S(n,k)\frac{x^n}{n!}$ donc :$B_{n,k}$(a)=S(n,k)

Et â(n)=$(-1)^{n-1}$(n-1) ! si n$\geq$1 et donc : $B_{n,k}$(â)=S(n,k) et â(0)=0 comme :

$a_n \in D_k$ et $b_m \in D_k$ alors : â$\in D_k$.

Définition de la transformation de MELLIN-BARSKY :

Soit g(x)=$\sum_{n=0}^{+\infty} a\ (n)\frac{x^n}{n!}$ de $C_p[[x]]$ et sa transformée :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a(n)\frac{(e^x-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} b(n)\frac{x^n}{n!} .$$

.

exemples :

on considère ici un nombre premier p quelconque et un entier b $\geq$1 non divisible par p

en remarque tout d'abord que T^b-1/ b(T-1) $\in$1+(T-1)Z/p [T-1]

son inverse est donc donné par b(T-1)/T^b-1$\in$1+(T-1)Z/p [T-1] et la fonction rationnelle :

f(t) = b/T^b-1-1/T-1 est un élément de Z/p [T-1]

avec les notations du THM 6, on obtient alors : a_m=(b^{m+1}-1)B_{m+1}/m+1

et $\hat{a}_m$ = (1-p^m)(b^{m+1}-1)B_{m+1}/m+1

le raisonnement est valable pour tout entier b $\geq$1 non divisible par p et la conclusion du THM6 et donc vérifiée (par densité) pour tout unité P-adique b $\in$Z/p^*

en prenant b=w(a) (c'est l'unique racine (p-1) i'èmé de l'unité) ou a est un générateur de $(Z / pZ)^*$

,on trouve :

$\Delta_c^n a_m$ = $(w(a)^{m+1}-1)$ Δ_c^n {B_{m+1}/m+1} , $\Delta_c^n \hat{a}_m$ = $(w(a)^{m+1}-1)$ $\Delta^n c${(1-p^m)B_{m+1}/m+1}

dans le cas ou p $\in \{1,...,m+1\}$, on a : $(w(a)^{m+1}-1)$ $\in$Z/p^* et donc :

$\Delta^n c${B_{m+1}/m+1}$\in p^{\min(m,n(s+1))}$Z/p resp $\Delta^n c${(1-p^m)B_{m+1}/m+1}$\in p^{n(s+1)}$ Z/p

chaque fois que c est divisible par (p-1)p^s

on trouve un cas particulier du THM 8 (voir plus loin) .

Théorème 8 : supposons que ϕ(q) ne divise pas m si c$\equiv 0 \bmod(\phi(q)p^a)$ avec a≥ 0 alors :

$$\binom{p^{-r}\Delta_c}{k}\left\{(1-p^{m-1})\frac{B_m}{m}\right\} \in Z/_p \text{ pour } 0 \leq r \leq \grave{a} \text{ pour tout k>0}$$

Ou à=$\begin{cases} a+1 sip > 2 \\ a+3 sip = 2 \end{cases}$.

Preuve :

pour p=2 ;la quantité $\dfrac{(1-2^{m-1})B_m}{m}$ est un zéro pour tout impaire m, le théorème est trivial .

maintenant supposons p est impair et soit b$\in Z/$ avec b>1 et (b,p)=1

le polynôme :

$F_b(T)\dfrac{T^b-1}{T-1} = \dfrac{((T-1)+1)^b-1}{T-1} = b+\dbinom{b}{2}(T-1)+...+(T-1)^{b-1} \in Z/[T-1]$,et le terme constant b$\in Z/_p^{\times}$ et comme c'est un élément de Z/$[[T-1]]$

donc : $\dfrac{b}{F_b(T)} \in 1+(T-1)Z/_p[[T-1]]$ de sorte que : $\dfrac{b}{T^b-1} = \dfrac{1}{T-1}+f(T)$

Ou f(T) est une fonction rationnelle qui est aussi dans $Z_p[[T-1]]$.

Maintenant on remplace T par e^t et écrivons la série de puissances correspondante :

$t^{-1}\sum_{n\geq 0}(b^n-1)B_n\dfrac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} a_n \dfrac{t^n}{n!}$,ou $a_n \in Z/_p \; \forall n \geq 0$.

en identifiants les cœfficients de $\dfrac{t^n}{n!}$,on aura :

$a_n = (b^{n+1}-1)\dfrac{B_{n+1}}{n+1}$ et aussi : $\varphi(\dfrac{1}{T^a-1}) = \dfrac{1}{T^a-1}-\dfrac{1}{T^{ap}-1}$;comme (a,p)=1

on voit que par la fonction f(T) on a :

$(1-p^n)(b^{n+1}-1)\dfrac{B_{n+1}}{n+1} = \hat{a}_n$...(1)

Supposons que (n+1)est non divisible par p-1 et choisissons b tel que :

$b^{n+1} \neq 1$ (mod p)

alors les congruences du théorème 7 donne les nombres $\hat{a}_n$,comme dans la formule 1) associe à $b^p{}_i$ pour $1 \leq i \leq n$,on aura :

$(1-p^n)(w(b)^{n+1}-1)\dfrac{B_{n+1}}{n+1}$ obtenus en passant par la limite p_adique ,on prend alors m=n+1 et observons que $(w(b)^m-1)$ est une p_adique et que :

$(w(b)^j-1) \equiv (w(b)^m-1)$ si $j \equiv m (\bmod c)$ et de ceci résulte les congruences de $(w(b)^m-1)$ qui nous donne résultat .

Remarque :
D'après ce qui précède on retrouve la congruence de Kummer classique :

$\Delta_c^k \left\{ (1-p^{m-1})\frac{B_m}{m} \right\} \equiv 0$ (mod $p^{m(a+1)}Z/_p$ $\forall p$ premier et $c \equiv 0$ mod $((p-1)p^a)$ et p-1/m
.

Dans cette partie on va généralisés les congruences connue de Kummer et d'autre pour les nombres de Bernoulli d'ordre supérieur .

Proposition :
Pour tout indice $n \geq 0$ on a :

$$P^r B_{np}^r(t) \equiv p^r B_n^r(t^p)(\text{mod}(\frac{np}{2})Z/_p[t])$$

Preuve :pour démontrer cette proposition on a besoin du théorème suivant :

Théorème 9 : pour une famille de polynôme d'appell$(A_n(t))_{n \geq 0}$ dans $Z/p[t]$ les assertions suivantes sont èquivalentes :

1) $A_{np}[t] \equiv A_n[t^p](\text{mod}\, npZ/_p[t]$ pour tout $n \geq 0$

2)il existe $a \in Z/_p$ pour lequel $A_{np}(a) \equiv A_n(a^p)$(mod np $Z/_p$) $\forall$ $n \geq 0$

3)il existe $a \in Z/_p$ pour le quel $A_{np}(a) \equiv A_n(a)$ (mod np $Z/_p$) $\forall n \geq 0$

Preuve de la proposition :

L'assertion est vérifiée pour r=0 et dés qu'elle l'est pour un ordre $r \geq 0$,le TAF fournit :

$P^r B_{np}^r(k) \equiv p^r B_n^r(k^p) \equiv p^r B_n^r(k)\,\text{mod}(\frac{np}{2})Z/_p$ pour tout entier p_adique $k \in Z/_p$.

De même en appliquant le TAF au polynôme f(t)=$\dfrac{p^{r+1}B_{n+1}^{r+1}(t)}{(n+1)}$, on trouve :

$$p^{r+1}B_n^{r+1}(0) \equiv p^r \sum_{k=0}^{p-1} B_n^r(k)(\text{mod}\frac{np}{2}Z/_p).$$

Par induction ,ceci nous montre que : $p^{r+1}B_{np}^{r+1}(0) \equiv p^{r+1}B_n^{r+1}(0)(\text{mod}(\frac{np}{2})Z/_p)$

Pour tout entier naturel n et on conclut à l'aide du Théorème 9 ,également valable si on considère les congruences modulo $(\frac{np}{2})Z/_p$.

Preuve du théorème 9 :

La démonstration est élémentaire ,elle découle des propriétés de la suite d'appell.

De la proposition on a le résultat le plus général suivant :

$p^r B^r_{m+np}(a) \equiv p^r B^r_{m+n}(a)(\mathrm{mod}(\frac{np}{2})Z/_p)$.

Théorème 10 : pour tout m≥ 0

$\frac{B^{(w)}_{m+w}}{(m+1)_w} \in p^{-E} Z/_p$ ou : $(m+1)_w = \frac{(m+w)!}{m!}$ c'est le symbole de POCHHAMMER ,et de plus si $0 \leq m \leq n$ et $m \equiv n \bmod ((p-1)p^a)$ avec $a \geq M$ Alors :

$\frac{B^{(w)}_{m+w}}{(m+1)_w} \equiv \frac{B^{(w)}_{n+w}}{(n+1)_w} \mathrm{mod}(p^c Z/_p)$ ou c=Min $\{m-E, a+1-M-E\}$

Et E=E (m,w) = $\sum_{j \in J \cup \{W\}} K(j(m,w)$ et J=J(m,w)=$\{j \in \{1,2,..., w\}; p-1/m+j\}$

.

Et K(j,m,w)=$\begin{cases} Max\{1+ord(m+j)-ordj, 0\} sij \in Jetj \neq w \\ 1+ord(m+j)-ordjsij = w \in J \\ -ordjsij = w \notin J \end{cases}$

Preuve :

Pour démontrer la 2[ième] partie du théorème 10 c'est le même principe que celui du théorème 8 mais ceci démontre uniquement le cas ou m+w>w pour démontrer le résultat $B^{(w)}_r$ pour $0 \leq r \leq w$ donc on doit prendre comme ensemble J^+au lieu de J de la 1[ere] démonstration ou J^+(m,w)=$\{j \in \{1,2,..., w\}; m+j > 0etp-1/m+j\}$.

Et on trouve que $B_k^{(s)}$ et a_k sont nuls pour k<0 avec $B_0^{(w)} = 1$ est facile à prouver et par induction en r on trouve le résultat

$$\frac{B_r^{(w)}}{r!} \in p^{-E} Z/_p$$

Mais avec cette méthode on ne va pas retrouver tout les cas donc on est obliger d'utiliser la méthode d'Adelberg :

Ord $B_{m+w}^{(w)} \geq -\left[\frac{S(m-w)}{p-1}\right]$ ou S(m+w) c'est la somme des chiffre qui apparaît dans le développement de Hensel dans la base p de (m+w) et $[\ ]$ c'est la fonction partie entière .

Et Howards à montrer que si p^j divise w mais p ne divise pas m alors :

Ord $B_{m+w}^{(w)} \geq j - \left[\frac{S(m+w)}{p-1}\right] (\ast)$ et après Adelberg à montrer le même résultat pour p^j /w et (p-1)p ne divise pas m+w pour m>0 fixé ,on a :

Ord $B_{m+w}^{(w)} \leq ord(m+1) - E$ et par ce qui précède on montre que

$B_{m+w}^{(w)} \geq -Log(m+w+1)$ et sachant que :ord (n !)=$\frac{(n-s(n))}{(p-1)!}$ et on écrit :

Ord $B_{m+w}^{(w)} \geq \left[\frac{s(m)}{p-1}\right] - \left[\frac{s(m+w)}{p-1}\right] - \sum_{j\in J} K(j,m) - 1; si w \in J$ et si $w \notin J$ alors :

Ord $B_{m+w}^{(w)} \geq ordw + \left[\frac{s(m)}{p-1}\right] - \left[\frac{s(m+w)}{p-1}\right] - \sum_{j\in J} K(j,m,w) - 1$.

Et donc si west fixé et $m \to \infty$,la partie droite de $(\ast)$ est réduite àj=ord w et donc :
Si w>0 alors la formule $(\ast)$ est valable tan disque si w<0 alors la formule $(\ast)$ est valable que si p/w . d'où le résultat du théorème 10 .

Corollaire :(Carlitz) $\forall n \geq 0$

$$\begin{cases} B_n^{(p)} \in Z/_p \ pour n \neq 0 \bmod (p-1) \\ B_n^{(p)} \in p^{-1} Z/_p \ pour n \equiv 0,-1 \bmod (p) \end{cases}$$

Preuve :

Comme $n \geq p$ alors on peut écrire n=m+p avec $n \neq 0 \bmod$ (p-1) alors :
J coinside au terme singulier de E =1+ord (m+j)-1 pour $1 \leq j_0 \leq p$;mais
ord $(m+1)_p \geq ord(m+j_0)$ et par le théorème 10 on a :$B_n^{(p)} \in Z/_p$ supposons que $n \equiv 0 \bmod$ (p-1) alors :

E=1+ord(m+1) +ord (m+p)
Et si $m \neq 0,-1 \bmod$ (p) alors :E =1 et puis ord $(m+1)_p \geq 1$ nous avons $B_n^{(p)} \in Z/_p$
Et par le théorème et pour $m \equiv 0$ (resp -1)mod p on a E=1+ord (m+p)(resp 1+ord(m+1)) et cela montre que : $B_n^{(p)} \in p^{-1} Z/_p$.

Théorème 11 : si $m\geq 0$,$w\geq 0$ et $c\equiv 0$ mod ((p-1)p^a) avec $a\geq M$.

Alors : $\forall$ k $\geq$0 on à

$$\Delta_n^k\left\{\frac{B_{m+w}^{(w)}}{(m+1)_w}\right\}\equiv 0(\mathrm{mod}\, p^c Z/_p) \qquad \text{si c=Min}\{m-E, K(a+1-M)-E\} \ .$$

Preuve :

Pour k=0,1 le résultat est donnée par le théorème pour k>1 ,le théorème est démontrer pour tout entier positive plus grand que k on a l' identité :

$$\Delta_c^k\{X_m Y_m\}=\sum_{i=0}^{K}\binom{K}{i}\Delta_c^i\{\Delta_c^{K-i}\{Y_{m+ic}\}\} \ (**)$$

De la définition Δ_c^K est de $(**)$ on trouve les cœfficients de X_{m+jc} et Y_{m+hc} sont :

$$(-1)^{k-h}\binom{k}{1,k-h,h-1}\sum_{s=0}^{h-j}\binom{h-j}{s}(-1)^s=\begin{cases}0 si j\neq h\\(-1)^{k-j}\binom{k}{j} si j=h\end{cases} .$$

On appliquant cette identité on a :

$a_m=(b^{m+1}-1)\frac{B_{m+1}^{(1)}}{m+1}$ pour $X_m=b^{m+1}-1$ et $Y_m=\frac{B_{m+1}^{(1)}}{(m+1)}$,on aura :

$$(b^{m+1}-1)\Delta_c^k\left\{\frac{B_{m+1}^{(1)}}{m+1}\right\}=\Delta_c^K a_m-\sum\binom{k}{j}\Delta_c^i\{b^{m+1}\}\Delta_c^{k-i}\left\{\frac{B_{m+ic+1}^{(1)}}{m+ic+1}\right\}(*')$$

Observons que :

$\Delta_c^i\{b^{m+1}\}\equiv 0$ mod ($p^{i(a+1)}$Z/) et par le théorème on aura : $\Delta_c^k a_m\equiv 0$ mod (p^aZ/$_p$)

ou A =Min $\{m,k(a+1)\}$, et par l'hypothèse :ord $\Delta_c^{k-i}\left\{\frac{B_{m+ic+1}^{(1)}}{m+ic+1}\right\}$ est plus petit que :Min $\{m-E,(k-i)(a+1-M)-E\}$ pour i>0 ,de la somme p_adique dans $(**)$ est plus petite que :Min$\{a+1+m-E, a+1+(k-1)(a+1-M)-E\}$ et de plus le théorème est prouver pour la k^{ieme} puissance et pour w=1 ,pour w>1 le théorème est aussi prouver pour la k^{ieme} puissance pour tout ordre positif plus petit que w et de $(*)'$ on obtient $(*)''$:

$$(b^{m+w}-1)\Delta_c^k\left\{\frac{B_{m+w}^{(w)}}{(m+1)_w}\right\}=\Delta_c^k\left\{R(m)\right\}-\sum\left\langle\begin{matrix}k\\i\end{matrix}\right\rangle\Delta_c^i\left\{b^{m+w}\right\}\Delta_c^{K-i}\left\{\frac{B_{m+ic+w}^{(w)}}{(m+ic+1)_w}\right\}$$

$(\quad *)''$

Ou $R(m)=a_m+\sum_{j=1}^{w-1}\frac{B^{(j)}_{m+j}}{(m+1)_j}$.

Et finalement on obtient ord $\Delta_c^k\left\{\frac{B^{(w)}_{m+w}}{(m+1)_w}\right\}\geq Min\{m-E, K(a+1-M)-E\}$

Et par induction le théorème pour la k^{ieme} puissance est prouvé pour tout w ,qui complète la preuve pour tout k .

de ce théorème découle le résultat suivant :
$Bm+w(w) /(m+1)w \in p^{-E}Z/p$

Résultats importants sont cité ci dessous :
1) $B^{(p+1)}p+2 \equiv 0$ mod $p^{(i)}$ pour i=2003
1) $B^{(p)}p \equiv ½ p^2(\text{mod } p^3)$
2) $B^{(p)}p+1 \equiv -p\ Bp+1/p+1 + 1/24\ p^2\ (\text{mod } p^3)$
3) $B^{(p)}p+2 \equiv p^2 Bp+1/p+1 \text{ mod } p^4$
4) $B^{(p+1)}p^r \equiv -1/2p^{r+1}\ (p-1)\ Bp^r-1 \text{ mod } (p^{r+2})$ pour r>1 $m\equiv 1 \text{ mod}(p^r(p-1))$
5) $B^{(p)}m \equiv 1/2p(p-1)\ Bm-1$ mod (p^{r+2}) pour $m\equiv 1 \text{ mod}(p^r(p-1))$
6) $B^{(p+1)}p^r = p^r\{1/2\ p(p+1)\ Bp^r-1/p^r-1 + p!\ Bp^{r-1}/p^r-1\} \text{ mod}(p^{r+2})$ pour p>3 et r>1

La preuve Cf [calit z]

.

CHAPITRE 4 :

Nombres de Bernoulli relatifs

Introduction :

Le théorème de MITTAG LEFFLER relie certains propriétés de congruences sur les an (ou $(a_n)_n$ une suite des nombres algébrique sur Q) et la géométrie du quasi connexe sur lequel sa fonction génératrice F prolonge analytiquement (p_adique).
Avec cette remarque et on utilisant les travaux de D.BARSKY,AMICE sur la fonction génératrice des nombres de Bernoulli relatif au caractère de dirichlet modulo f, χ ,je vais essayer de reprendre ces résultats

Définition et notations :

Soit F(x) = $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ $\in$Cp[[x]] une série de TAYLOR convergent sur l'idéal de valuation B(0.1) = {x$\in C_p$; |x|<1} de Cp
Soit δ un nombre réel positif , nous désignons par B(a, δ) = {x$\in C_p$; |x-a|<δ}
Resp $B(a,p)^+$ = {x$\in C_p$; |x-a|<δ} la boule ouverte resp fermée décentre a et de rayon δ
Si B⊂Cp , on note H(B) (resp H_0(B)) l'espèce des éléments analytique sur B (resp si B est non bornée , l'espèce des éléments analytiques sur B nuls à l '∞)
C'est-à-dire : le complété pour la norme de convergence normal sur Bde l'espace des fonctions rationnelles de C_p(x) sans pole dans B .

Définition 1 :
B$\subseteq C_p$, un élément analytique sur B est la limite uniforme sur Bd'une suite de fonction rationnelle de C_P(x) sans pole dans B .

Définition 2 :

Les nombres de Bernoulli ,$B_{n,\chi}$ relatifs au caractère de dirichlet modulo f, χ ont pour fonction génératrice de Hurwitz : (B_{n,χ_0}=B_n) .

$$F_\chi(x)=\sum_{n\geq 0} B_{n,\chi}\frac{x^n}{n!} = \sum_{a=1}^{p^k f}\frac{\chi(a)xe^{ax}}{e^{pkfx}-1} \qquad ;\forall k\geq 0 \ .$$

En transformant le troisième membre :

$$F_\chi(x)=- f^{-1}\sum_{a=1}^{f}\chi(a)e^{ax}(e^{fx}-1)Log(1-(1-e^{fx})) = f^{-1}\sum_{a=1}^{f}\chi(a)e^{ax}\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\frac{(-1+e^{fx})^n}{n+1} \ .$$

G_χ(x)=

$$\sum_{n\geq 0} B_{n,\chi}(1-\chi(p)p^{n-1})\frac{x^n}{n!} = F_\chi(x)-\chi(p)p^{-1}F_\chi(px) = \sum_{a=1}^{p^k f}\chi(a)xe^{ax}(e^{p^k fx}-1)^{-1}, k\geq 1$$

la série converge X-adiquement .

$L(e^{kx})=(1-kx)^{-1}$ ou L est la transformation de Laplace ,et donc :

$$L(F_\chi(x)=\sum_{n\geq 0} B_{n,\chi}x^n = F_\chi(x) = -f^{-1}\sum_{a=1}^{f}\chi(a)\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\frac{n!\,x^n f^n}{(1-ax)...(1-(a+nf)x)}(*)$$

$$L(G_{\chi}^{'})(x) = p^{-1} f^{-1} \sum_{a=1}^{p^k f} \chi(a) \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \frac{n! x^n p^{kn}}{(1-ax)(1-(a+p^k f)x)...(1-(a+p^k fn)x}$$ (**)

Théorème de Mittag-Leffler p-adique :

Soit Fun élément analytique sur le quasi –connexe D,soit τ la famille des trous de D .
Il existe pour chaque T$\in \tau$ un unique élément analytique F_T sur C_p-T,nul à l'infini tel que F-F_T se prolonge analytiquement dans τ (en outre on a F=$\sum_{T\in\tau} F_T$ CU sur D)

Et de plus : $\|F\|_D = \|F\|_{C_p - T}$
Comme application immédiate on a le corollaire suivant qui montre le lien entre la géométrie du quasi connexe sur lequel F se prolonge et la presque périodicité de la suite a_n et avant ça on doit rappeler les définitions nécessaire .

Définition3 : soit D$\subset$Cp , on dit que D est un quasi connexe si , pour tout x$\in$D et pour tout y $\in$D il existe une suite finie réels 0< r_1< r_2<………< r_n< |x-y| tel que si z$\notin$D et |z-x|<|x-y|
Alors il existe 1≤i≤n tel que |z-x|=ri .

Corollaire1 :

Pour que F(x)=$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ soit un élément analytique sur C_p-$\bigcup_{i=1}^{p-1} D(i^{-1},1)^-$ nul à l' ∞ ,il faut et il suffit que les suites m$\rightarrow a_{i+m(p-1)}$ soient pour $1 \leq i \leq p-1$ la restriction à IN d'une fonction continue de Z/$_p$ dans C_p .

Preuve :
D'après le th de Mittag- Leffler ,on a F=F_1=F_2+…F_{p-1} ou $F_i \in H_0$ (C_p-D(i^{-1},1)$^-$),et

F_i(x)=$\sum_{k\geq 0} \lambda_{i,k} \frac{(x_{i^{-1}})^k}{(1-x_{i-1})^{k+1}}$ avec $\lim_{k\to\infty} |\lambda_{i,k}| = 0$ d'où le résultat .

Théorème 2 : soit $\tilde{F}(x)=\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \in C_p[[x]]$, il existe une suite $(b_n)_{n\in IN}$ d'éléments de $C_p$tel que l'on ait formellement $\tilde{F}(x)=\sum_{n\geq 0} b_n (e^x-1)^n$,on pose

T=e^x-1et $\tilde{G}(T)=\sum_{n\geq 0} b_n T^n$,F(x)=L($\tilde{F}$(x))=$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et

G(T)=$\sum_{n\geq 0}(n!)b_nT^n$ = L(G̃(T))

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1)F(x) est un élément analytique p-adique sur $D(0,1)^-$
2) G(T) est un élément analytique p-adique sur $D(0,1)^-$

Preuve :

Montrons tout d'abord 1)$\rightarrow$ 2 .
Soit F_n une fraction rationnelle de $C_p(x)$approchant F uniformément sur $D(0,1)^-$,on décompose F_n en élément simple et on est donc amené à étudier

$f_k(x) = \dfrac{1}{(1-ax)^k}$ avec $|a| \leq 1$,et $h_k(x)=x^k$,k$\in$ IN ,on a $f_1(x)=\dfrac{1}{1-ax}$ et

$f_k(x)=\dfrac{1}{k!}f_{k-1}(x) = \dfrac{1}{k!}a^{-k+1}\dfrac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(f_1(x))$.

$\tilde{f}_1(x)=e^{ax}=(e^x-1+1)^a$ donc $\tilde{f}_1(x)=\sum_{n\geq 0}\binom{a}{n}(e^x-1)^n$ et donc $\tilde{g}_1(T)=\sum_{n\geq 0}\binom{a}{n}t^n$,

$g_1(T)=\sum_{n\geq 0}a(a-1)...(a-n+1)T^n$ avec $|a| \leq 1$.

Or a-k-$p^h \equiv a-k$ (mod $p^h o_p$)ou o_p est l'anneau des entiers de C_p et donc ,si n=$rp^h + q$ avec $0\leq q \leq p^h -1$,on a :

a(a-1)…(a-n+1)$\equiv$a(a-1)…(a-q+1)$\{a(a-1)...(a-p^h+1)\}^r$ (mod p^h)

et donc modulo $p^h o_p[[T]]$:

$$g_1(T) \equiv \sum_{n=0}^{p-h-1}a(a-1)...(a-n+1)T^n\sum_{r\geq 0}(a(a-1)...(a-p^h+1))^rT^{rp^h}$$

$$\equiv \sum_{N+0}^{P^H-1}a(a-1)...(a-n+1)T^n\frac{1}{1-a(a-1)...(a-p^h+1)T^{P^H}}$$

Raisonnons par récurrence sur k .on a montré que $g_1(T)$ est un élément analytique sur $D(0,1)^-$ nul à l'infinie ,supposons que g_{k-1} est un élément analytique sur $D(0,1)^-$ nul a l'infinie ;on a :

$\tilde{f}_k(x)=\dfrac{1}{ka}\dfrac{d}{dx}x\dfrac{d}{dx}(\tilde{f}_k(x))=\dfrac{1}{ka}\dfrac{d}{dx}x\dfrac{d}{dx}\sum_{n\geq 0}b_n(k-1)(e^x-1)^n$

$$=\frac{1}{ka}\frac{d}{dx}\sum_{n\geq 0}(b_{n+1}(k-1).(n+1)+n.b_n(k-1)(e^x-1)^n$$

=

$$\frac{1}{ka}\sum_{n\geq 0}\{(n+1)b_{n+1}(k-1)+nb_n(k-1)\}(e^x-1)^n+\frac{1}{ka}x\sum_{n\geq 0}\{(n+2)(n+1)b_{n+2}(k-1)+((n+1)^2+$$

n(n+1)b $_{n+1}(k-1)+n^2 n_n(k-1)\ \}(e^x-1)^n$.

onposeA $_n=\dfrac{1}{ka}((n+1)b_{n+1}(k-1)+nb_n(k-1)$ et

B $_n\dfrac{1}{ka}((n+2)b_{n+2}(k-1)+((n+1)^2+n(n+1)b_{n+1}(k-1)+n^2b_n(k-1))$.

il est clair que $\tilde{g}_k$ (T)=$\sum_{n\geq 0}A_nT^n+Log(1+T)\sum_{n\geq 0}B_nT^n$ et donc

$$g_k(T)=\sum_{n\geq 0}(n!)A_nT^n+\sum_{n\geq 0}T^n\sum_{n=0}^{n=1}(k!)(n-k-1)!)\binom{n}{k}B_k \ .$$

les suites n$\to(n!)A_n$ et k$\to(k)!B_k$ sont p-presque périodiques ,donc la suite n$\to c_n=\sum_{k=0}^{n-1}(k)!(n-k-1)!\binom{n}{k}B_k$ l'est aussi .en effet la suite k$\to k!$ tend vers zéro p-adiquement,et la suite n$\to\binom{n}{k}$ est p-presque périodique .

on adonc montré que g $_k$ est un élément analytique sur D(0,1) $^-$ pour tout k$\in$IN.

Il reste donc à étudier le cas de x ^{n} ,or on a x=Log ($e^x-1+1)=\sum_{n\geq 0}\dfrac{(-1)^n}{n}(e^x-1)^n$ et la suite n$\to(-1)^n(n-1)!$ est presque périodique .

Par récurrence ,on montre alors aisément que si x $^k=\sum_{n\geq 0}c_n(e^x-1)^n$ alors la suite n$\to(n)!c_n$ est presque périodique .on conclut alors que les fractions rationnelles satisfont 2).

Les éléments analytiques vérifient 2) car F$\equiv F_n(\bmod p^h o_p[[x]])$ entraîne G (T)$\equiv G_n(T)(\bmod p^h o_p[[T]]$.

Montrant maintenant que 2)$\to$1) .on a $\tilde{F}$(x)=$\sum_{n\geq 0}b_n(e^x-1)^n$ et donc

F(x)=$\sum_{n\geq 0}\dfrac{(n)!x^nb_n}{(1-x)(1-2x)...(1-nx)}$ .comme la suite n$\to(n)!b_n$ est p-presque périodique on a : F(x)$\equiv F_h(\bmod p^h o_p[[x]]$ ou

.

$$_n(x)=\sum_{n=0}^{s-1}b_n\frac{n!x^n}{(1-x)...(1-nx)}+\sum_{n=0}^{s+mp^k-1}\frac{b_nn!x^n}{(1-x)...(1-nx)}\sum_{r\geq 0}\frac{x^{rmp^h}}{((1-x)...(1-(mp^h-1)x))^r}$$

$$=\sum_{n=0}^{s-1}b_n\frac{n!x^n}{(1-x)...(1-nx)}+\sum_{n=0}^{s+mp^k-1}\frac{b_nx^n}{(1-x)...(1-nx)}.\frac{(1-x)...(1-(mp^h-1)x)}{(1-x)...(1-(mp^h-1)-x^{mp^h}}$$

Et donc F $_h(x)$ est une fraction rationnelle sans pole dans D(0,1) $^-$,d'où le théorème .

Théorème 3 : Kubota et Leopoldt

soit 1$\leq$i$\leq$p-1 et soit B_n le n'ieme nombre de Bernoulli , la suite :

$m \to (1-P^{i+m(p-1)-1})B_{i+m(p-1)}$ et la restriction a'I N d'une fonction continue de Z/p dans Cp (et m localement analytique)

Preuve : on définit

$$\sum_{n\geq 0} B_n \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{e^x - 1} := \sum_{i=0}^{p-1} \frac{-xe^{ix}}{e^{px} - 1} \text{ et}$$

donc : $\sum_{n\geq 0} (1 - p^{n-1}) B_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{-xe^{ix}}{e^{px} - 1} = \sum_{i=1}^{p-1} - p^{-1} e^{ix} \frac{Log(1 + e^{px} - 1)}{e^{px} - 1}$

Et donc : $\sum_{n\geq 0} (1 - p^{n-1}) B_n x^n = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \frac{p^{n-1} n! x^n}{(1 - ix)...(1 - (i + np)x)} = F(x)$

Définition4 : la suite $(a_n)_{n \in IN}$ est p presque périodique

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in IN, t \in IN : \forall n \geq n_0 ; |a_n - a_{n+t}| \leq \varepsilon$

On va appliquer ces théorèmes et corollaires ,propositions aux nombres de Bernoulli relatifs (fonctions génératrices).

Proposition 1 :pour tout nombre premier p ,$F_\chi(x) = \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi} x^n$ est un élément analytique sur $B(0,1)^- \subseteq C_p$

Preuve :

Pour montrer cela il suffit montrer que F_χ est un élément analytique sur les quasi connexes strictement plus grands que $B(0,1)^-$

Sachant que : $1 \leq p^{-k} \leq \inf |(1 - nx)| < p^{-k-1}$,$k \in IN$ alors :

$\left| \frac{n! x^n}{(1-x)...(1-nx)} \right| \leq \left| \frac{\left[\frac{n}{p^k |x|} \right]!}{|p^k| |x|} \right|$ ou $[\delta]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à δ et si de plus : $p^r \leq |x| < p^{r+1}$ $r \in IN$ alors :

$$\left| \frac{n! x^n}{(1-x)...(1-nx)} \right| \leq \frac{\left[\frac{n}{p^r} \right]!}{p^\theta \left[\frac{n}{p^{r+1}} \right]}$$ .ou $0 \leq \theta < 1$ réel,

(resp $|x| < 1$ alors : $\left| \frac{n! x^n}{(1-x)...(1-nx)} \right| \leq |n!|$).

D'où le résultat en posant : $|x| = p^{r+\theta}$ avec $0 \leq \theta \leq 1$.

Théorème 4 : pour tout nombre premier p,

$F_{\chi}(x)=\sum_{n\geq 0} B_{n,\chi}x^n$ est prolongeable en un élément analytique nul à l'infini sur

(resp :G_{χ} (x)est un élément prolongeable analytiquement sur $D_{p,h}$)

Ou =C_p- $=\bigcup_{i=1}^{p-1}\bigcup_{n\geq 0}\bigcup_{m=1}^{p^h-1} B(\frac{i+phm}{p^n}, p^{n-1-h}\left| f \right|^{-1})^{+}$

Et $D_{p,h}=C_p-\bigcup_{i=1}^{p-1}\bigcup_{m=1}^{p^h-1} B(i+pm, p^{-h-1})^{+}$

Preuve :

La démonstration est immédiate ,compte tenu des formules ($*$)et ($**$) et en évaluant un minorant de : $\left\|(1-ax)...(1-(a+nf)x)\right\|_{C_{P?H}}$ resp

($\left\|(1-ax)...(1-(a+p^h fn)x\right\|_{D_{P,h}}$;(a,p)=1

Ecrivons la partie singulière de G_{χ} par le théorème de Mittag Leffler ,en somme de ses partie singulière relatives aux trous du quasi connexe $D_{p,0}$,les trous de $D_{P,0}$ sont les boules $B(i,p^{-1})^{+}$ pour $1\leq i\leq p-1$ et soit $G_{\chi,i}$ la partie singulière au trou $B(i,p^{-1})^{+}$ donc :

$G_{\chi}=\sum_{i=1}^{p-1} G_{\chi,i}$ avec $G_{\chi,i}\in H_0(C_p\text{-}B(i,p^{-1})^{+})$ donc :

$G_{\chi,i}(x)=\sum_{n\geq 1}\lambda_{n,i}(x-i)^n$ avec $\sup_{n\geq 1}\left|\lambda_{n,i}\right|p^n=\left\|G_{\chi,i}\right\|_{C_P-B(i,p^{-1})}$

Et de plus $\sup_{1\leq i\leq p-1}\left\|G_{\chi,i}\right\|_{C_p-B(i,p^{-1})}=\left\|G_{\chi}\right\|_{D_{p,0}}$.

En faisant tendre $k\to\infty$ dans la formule ($**$)on trouve que :

G $\chi(x)=\lim_{k\to\infty} p^{-k}f^{-1}\sum_{a=1}^{p^k f}\chi(a)(1-ax)^{-1}$ converge uniformément sur $D_{p,h}$

Et pour terminer on utilise le théorème 2 et l'équivalence donne le résultat .

Application :

la fonction zêta p-adique :
on définit les valeurs $\xi_{p,j}$ avec $j\in\{1,2,...,p-1\}$:

$\xi_{p,0}(n)=(1-p^{(p-1)n-1})\frac{B_{(p-1)n}}{(p-1)n}$ $n\in\{1,2,...\}$

$\xi_{p,j}(n)=(1-p^{j-1+(p-1)n})\frac{B_{j+(p-1)n}}{j+(p-1)k}$ $n\in\{0,1,...\}$et $\xi_{2,0}(n)=(1-p^{n-1})\frac{B_n}{n}$ $n\in\{2,4,6,...\}$

La fonction zêta classique est définie par :

$\xi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ (Res>1),on peut l'écrire aussi :

$\xi(s) = \prod (1 - q^{-s})^{-1}$

Comme le produit prend ces valeurs dans l'ensemble des nombres premier alors on définit :

$\xi^*(s) = \prod_{q \neq p} (1 - q^{-s})^{-1} = (1 - p^{-s})\xi(s)$.

On sait que ξ on peut l'extraire à une fonction méromorphe dans le plan complexe avec un seul pole simple 1, on peut prouver que :

$\xi(1-n) = -\frac{B_n}{n}$ n$\in \{1,2,..., n\}$ et donc : $\xi^*(1-n) = (1 - p^{n-1} \frac{B_n}{n}$

Et on aura les égalités :

$\xi_{p,j}(n) = -\xi^*(1-(j+(p-1)n)$ n$\in \{0,1,2,...\}$.

Proposition 3 (d'Euler) : si k est entier ≥ 1 on a :

$$\xi(2k) = \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} B_k \Pi^{2k} ...(25)$$

Preuve :

L'identité :z cotgz =1-$\sum_{k=1}^{\aleph} B_k 2^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ (26)

Résulte de la définition des B $_k$,on posant x=2iz ,d'autre part ,en prend la dérivée logarithmique de :sinz =z$\prod_{n=1}^{\aleph} (1 - \frac{z^2}{n^2 \Pi^2})$ (27)

On a z cotgz =1+2$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^2}{z^2 - n^2 \Pi^2}$ =1-2$n = 1\sum \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{n^2 \Pi^{2k}}$

Et comparant (26) et (28) ,on obtient (25) .

Références :

[1] Amice,Bull.Soc math fr .92,1964p :117-180.
[2] D.Barsky; analyse p-Adique et suites classiques des nombres , université Paris 13institut GaliléeLAGA, URA.CNRS N° 742 A VJB Clément , F_ 93430

Villetaneuse. 1982, revu décembre 1995.

[3] D.Barsky ; Fonction génératrice et congruences (Application aux nombres de Bernoulli) Séminaire Delang – pisot – poittou " théorie des nombres de Bernoulli" 17ème années , 1975/76,N° 21 ,16 p.
[4] D.Barsky ; analyse p-Adique et nombres de Bernoulli c.r Acad sc .paris, t 1974 (1869-1072).
[5] B.BENZAGHOU . la transformation de MELLIN BARSKY , (pre publication de la faculté de math u.s.t.h.b-2000)
[6] BERTIN ,cours de DEUA (2000)
[7] L.CARLITZ ; some theorems on Bernoulli numbers of heigher order Pacific J.MATH 2(1952) 127-139 .
[8] L.CONTET ; analyse combinatoire tome 1 et tome 2 puf (1970)
[9] K.IWASAWA ,analyse math studies n° 74 , princetou university press 1972
[10] A.Junod ; congruences par l'analyse p-adique et calcul symbolique (thèse de doctorat juin 2003,université Newchatel faculté des sciences)
[11] A.ROBERT ; p- adiques analysis cours
[12] P.TOMAS YOUNG ; congruences of Bernoulli , Euler and Stirling numbers , journal of numbers theory 78,204-227 juin (1999)
[13] N.KATZ ; p-adic interpolation of real analytic . Eisensteirn series Ann of math , 1976 p 459-571.
[14 P.H.ROBBA ; fonction analytiques des corps value ultrametrique comptet (livre 1973)
[15] SCHOCOFF