N^0 d'ordre : **13/2010-M/M.T.**

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en mathématiques

Spécialité : Géométrie

Par

Smail CHEMIKH

SUJET

GEOMETRIE DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Soutenu publiquement le 02/03/2010 à 11 h 00, devant le jury composé de

Mr.	BAHLOUL	Djilali	Maitre de conférences / A	U.S.T.H.B.	Président
Mr.	BETINA	Kamel	Professeur	U.S.T.H.B.	Directeur de méroire
Mr.	ABBACI	Brahim	Maitre de conférences / A	U.S.T.H.B.	Examinateur
Mr.	REZAOUI	Mohamed Salem	Maitre de conférences / A	U.S.T.H.B.	Examinateur

Remerciements

Je ne peut pas terminer ce travail sans avoir remercier M. Kamel BETINA, professeur de mathématiques à l'U.S.T.H.B. de m'avoir encadrer pour ce travail, ainsi qu'à M. Djilali BAHLOUL d'avoir accepter de présider mon jury de soutenance sans oublier M. Brahim ABBACI et M. Mohamed Salem REZAOUI d'en faire parti.

Je tiens à remercier ma femme pour soutien indifictible tout au long de mon parcour de en magister, je lui dédit ce travail ainsi qu'à mes filles Imane, Rania, Nour-Najoua; et à l'âme de mes parents; sans oublier mon beau père Ami Said.

Je remercie également mes amis Ahmed, Mohamed, et toute autre personne qui a contribué de près ou de loin à l'accomplicement de ce travail.

Géométrie des équations aux dérivées partielles

Résumé

Après un bref rappel sur les variétés de contacts, (transformations de contact, champs de Lie, hamiltonien de contact, sous variété lagrangiennes); on donne une définition plus sophistiqué d'une E.D.P d'ordre un et d'un problème de Cauchy. La classification de ces équations au voisinage de leurs singularités est équivaut à la classification champs de Lie aux voisinages de leurs zéros. On construit les familles génératrices et on utilise ceux qui sont quadratiques à l'infini pour étudier les singularités des E.D.P d'ordre un.

Table des matières

Introduction

L'objet de ce travail est l'étude géométrique des équations aux dérivées partielles. Le premier chapitre est consacré à quelques rappels de géométrie différentielles, plus particulièrement, la notion d'isotopie d'une sous variété et des rappels de géométrie symplectiques ainsi que le prolongement des isotopies lagrangiennes. Une large introduction à la géométrie de contact représente l'essentiel du menu de deuxième chapitre, à commencer par le cas des espaces de jets, puis une définition plus générale d'une variété de contact. Après avoir parler des transformations de contact et des champs de Lie, on définit les sous variétés de Legendre. Une présentation géométrique, en termes de champs de Lie, des équations aux dérivées partielles du premier ordre est proposée dans le troisième chapitre. La majeure partie de quatrième chapitre est consacré à la théorie des familles génératrices; ces familles montrent, grâce aux récents résultats de Conley et Zehnder; ainsi qu'a ceux de Hofer et Checanov, la richesse des méthodes géométriques dans le traitement des équations de Hamilton-Jacobi. .

1

Compléments de géométrie différentielle

1.1 Notions élémentaires

1.1.1 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.1.1 *On dit que $S \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété lisse de dimension d de $\mathbb{R}^n$ en un point a, si il existe un difféomorphisme local*

$$h : (\mathbb{R}^n, a) \to \left(\mathbb{R}^{n-d} \times \mathbb{R}^d, 0\right),$$

lisse, appelé carte adaptée à S en a, tel que

$$h(S \cap dom(h)) = \left(\{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\} \times \mathbb{R}^d\right) \cap \mathrm{Im}(h).$$

On dit aussi que S est de dimension d, de codimension $(n-d)$, au point a.

On dit que $S \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension d, de codimension $(n-d)$, de $\mathbb{R}^n$, si elle l'est en tous ses points.

Exemple 1.1.1

1. *Tout sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension $\dim E$. Pour $\dim E = n-1$, c'est un hyperplan.*
2. *Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de codimension 0. Une hypersurface de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de codimension 1.*
3. *Le graphe d'une fonction lisse $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{n-d}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d, (il suffit de prendre $h : (y, x) \longmapsto (y - f(x), x)$).*

Définition 1.1.2 ***Applications lisses (différentiables)***

Une application $f : (S, a) \to \mathbb{R}^m$ *est lisse au point* a *si pour toute carte locale* $\varphi : (S, a) \to (\mathbb{R}^d, 0)$, *l'application* $f \circ \varphi^{-1} : (\mathbb{R}^d, 0) \to \mathbb{R}^m$ *est lisse en* 0.

L'application f *est lisse si elle l'est en tout point de* S.

1.1.2 Submersion et points critiques

Définition 1.1.3 *Une application* $f : (\mathbb{R}^{n+m}, a) \to (\mathbb{R}^m, f(a))$ *est une* ***submersion en*** a, *si il existe deux difféomorphismes locaux* $g : (\mathbb{R}^{n+m}, a) \to \mathbb{R}^{n+m}$ *et* $h : (\mathbb{R}^m, f(a)) \to \mathbb{R}^m$ *tels que* $h \circ f \circ g^{-1}$ *soit la restriction à* $\mathrm{Im}(g)$ *de la projection canonique* $pr_2 : \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

On dit que $f : S \to \mathbb{R}^m$ *est une* ***submersion*** *de* S *dans* $\mathbb{R}^m$ *si elle l'est en tout ses point.*

Définition 1.1.4 *Si* $f : (S, a) \to \mathbb{R}^m$ *est une submersion au point* a *on dit que* a *est* ***un point régulier*** *ou que* $f(a)$ *est* ***une valeur régulière****. Sinon, on dit que* a *est* ***un point singulier*** *ou que* $f(a)$ *est* ***une valeur singulière****.*

La proposition suivante re-définie les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ par les submersions.

Proposition 1.1.1 *Une partie* S *de* $\mathbb{R}^n$ *est une sous-variété de codimension* m *en* a *si et seulement si il existe une submersion locale* $p : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}^m, b)$ *telle que* $S \cap dom(p) = p^{-1}(b)$. *On dit alors que "*$p = b$*„ est une équation de* S *au voisinage de* a.

En particulier, si $b \in \mathbb{R}^m$ *est une valeur régulière d'une submersion* $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ *alors* $f^{-1}(b)$ *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^{n+m}$.

Exemple 1.1.2 $f : (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2$ *est une application de* $\mathbb{R}^3$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ayant* 1 *pour valeur régulière, ainsi* $S^2 = f^{-1}(1)$ *est sous-variété de* $\mathbb{R}^3$.

1.1.3 Immersions et plongements

Définition 1.1.5 *On dit qu'une application* $f : (\mathbb{R}^m, b) \to (\mathbb{R}^{n+m}, a)$ *est une* ***immersion en*** b, *si il existe deux difféomorphismes locaux* $h : (\mathbb{R}^{n+m}, a) \to \mathbb{R}^{n+m}$ *et* $g : (\mathbb{R}^m, b) \to \mathbb{R}^m$ *tels que* $h \circ f \circ g^{-1}$ *soit la restriction à* $dom(g^{-1})$ *de l'injection canonique*

$$\begin{array}{rccc} j: & \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ & x & \longmapsto & (0, x). \end{array}$$

Dans ce cas, on dit que $h^{-1} \circ j \circ g$ *est* ***un plongement local****.*

On dit que f est une ***immersion*** *quand c'est une immersion en tout point.*

Un ***plongement*** *d'une sous-variété S de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^{m+n}$ est une immersion j telle que $j : S \to j(S)$ est un homéomorphisme.*

Exemple 1.1.3 *Si S est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, alors l'injection canonique $i : S \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ est un plongement.*

Comme dans le cas des submersions, on peut caractériser les sous-variétés par les immersions.

Proposition 1.1.2 *Une partie S de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension m en a si et seulement si il existe un plongement local $j : (\mathbb{R}^m, b) \to (\mathbb{R}^n, a)$ et un ouvert $\mathbb{R}^n \supset U \ni a$ telle que $S \cap U = \mathrm{Im}(j)$; on dit alors que j est un paramétrage de S au voisinage de a.*

Proposition 1.1.3 ***Caractérisation infinitésimale des submersions et des immersions.***
Soit $f : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}^m, b)$ une application lisse.

i) *f est une submersion en a si et seulement si $Df(a)$ est surjective.*

ii) *f est une immersion en a si et seulement si $Df(a)$ est injective.*

Remarque 1.1.1 *Si $Df(a)$ est bijective, on dit que f est* ***étale****. C'est donc à la fois une immersion et une submersion.*

1.1.4 Le fibré tangent à une sous-variété

L'espace tangent en un point à une sous-variété

Définition 1.1.6 ***L'espace tangent*** *à une sous-variété S de $\mathbb{R}^n$ en a, que l'on note T_aS, est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ défini par*

$$T_aS := \left\{ \dot\gamma(0) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, \gamma(t), \ \text{où } \gamma : (\mathbb{R}, 0) \to (S, a) \ \text{ est une courbe lisse} \right\}.$$

Exemple 1.1.4 1) *Si S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors $T_aS = S$.*

2) *Si S est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors en tout point a de S, on a $T_aS = \mathbb{R}^n$.*

Le résultat suivant donne d'autres définitions de l'espace tangent.

Proposition 1.1.4 *Soit S une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d en a.*

1. *Pour toute carte adaptée* $h : (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ *à* S*, on a*

$$T_aS = Dh(a)^{-1}\left(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-d}\right).$$

2. *Si "*$p = b$*", est une équation de* S *au voisinage de* a*, alors* $T_aS = \ker Dp(a)$*.*

3. *Si* $j : (\mathbb{R}^m, b) \to (\mathbb{R}^{n+m}, a)$ *est paramétrage de* S *en* a*, alors* $T_aS = \operatorname{Im} Dj(a)$*.*

Définition 1.1.7 ***Le fibré tangent à une sous-variété de*** $\mathbb{R}^n$***.***

Le fibré tangent à une sous-variété S *de dimension* d *de* $\mathbb{R}^n$*, que l'on note* TS*, est le sous-ensemble de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *défini par*

$$TS = \{(x, v) \in S \times \mathbb{R}^n,\ t.q\ v \in T_xS\}.$$

L'application $\pi_S : (x, v) \longmapsto x$ *est la projection du fibré tangent* TS *sur* S*.*

On a $\pi_S^{-1}(x) = \{x\} \times T_xS$: C'est la fibre au dessus de x.

Proposition 1.1.5 *Le fibré tangent* TS *à* S *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *de dimension* $2\dim S$*.*

De plus, la projection du fibré est une submersion.

Preuve. Si $h : (\mathbb{R}^n, x) \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ est une carte adaptée à S en x, alors

$$\begin{array}{rccc} Th : & TS & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ & (x, v) & \longmapsto & (h(x), Dh(x).v) \end{array}$$

est une carte adaptée à TS en (x, v). ■

Définition 1.1.8 ***La différentielle d'une application***

Soit $f : S \to \mathbb{R}^m$ *une application lisse d'une sous-variété* S *de* $\mathbb{R}^n$*, on définit l'application* $df : TS \to \mathbb{R}^m$ *par :*

Pour tout $a \in S$ *et tout arc lisse* $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \to (S, a)$*, on pose* $df(\gamma(s), \acute{\gamma}(s)) := (f \circ \gamma)'(s)$*, quand cela est bien défini.*

On peut remplacer $\mathbb{R}^m$ par un ouvert ou une sous-variété de $\mathbb{R}^m$.

Définition 1.1.9 ***Application tangente à une application lisse***

Soit $f : S \to T$ *une application différentiable d'une sous-variété* S *de* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans une sous-variété* R *de* $\mathbb{R}^m$*. On définit*

$$\begin{array}{rccc} Tf : & TS & \longrightarrow & TR \\ & (x, v) & \longmapsto & (f(x), df_x.v) \end{array}$$

et on l'appelle l'application tangente à f*.*

Définition 1.1.10 *Soit $f : (S, a) \to \mathbb{R}$ lisse au point a.*

Proposition 1.1.6 *Un point a tel que $df(a) = 0$ est appelé un point critique de f.*

Formes de Pfaff et intégrales curvilignes

Définition 1.1.11 *Une forme de Pfaff (ou une 1-forme différentielle) sur une sous-variété S est une application différentiable*

$$\begin{array}{rlcl} \alpha : & TS & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, v) & \longmapsto & \alpha_x(v), \end{array}$$

où $\alpha_x : T_xS \to \mathbb{R}$ est une application linéaire.

Exemple 1.1.5 *La différentielle df d'une fonction réelle $f : S \to \mathbb{R}$ est une forme de Pfaff.*

Dans le cas où S est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, une forme de Pfaff α s'écrit d'une manière unique

$$\alpha_{(x_1,x_2,...,x_n)}(v_1, v_2, ..., v_n) = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j(x_1, x_2, ..., x_n).v_j = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j dx_j(v_1, v_2, ..., v_n).$$

avec α_j une fonction réelle lisse sur S et $dx_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la $j^{ème}$ projection.

Définition 1.1.12 *Pour tout arc différentiable par morceaux $\gamma : [t_0, t_1] \to S$, on définit l'intégrale curviligne d'une forme de Pfaff α sur S le long deγ par*

$$\int_\gamma \alpha := \int_{t_0}^{t_1} \alpha_{\gamma(t)}(\acute{\gamma}(t))dt.$$

Dans le cas où $\alpha = df$ (on dit dans ce cas que f est une primitive de α et que la 1-forme α est exacte), on a

$$\int_\gamma df = \int_{t_0}^{t_1} df_{\gamma(t)}(\acute{\gamma}(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} (f \circ \gamma)'(t)dt = f(\gamma(t_0)) - f(\gamma(t_1)).$$

Une 2-forme différentielle ω sur S est une application lisse

$$\begin{array}{rlcl} \omega : & TS \oplus_S TS & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, v, w) & \longmapsto & \omega_x(v, w) \end{array}$$

où $\omega_x : T_xS \times T_xS \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire alternée.

L'espace $TS \oplus_S TS = \{(x, v, w), \text{t.q } (x, v), (x, w) \in TS\}$, qui est la somme de Whitney de TS avec lui même, est muni de la structure de sous-variété de $T\mathbb{R}^n \oplus_{\mathbb{R}^n} T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.13 ***La différentielle extérieure d'une forme de Pfaff.***

La différentielle extérieure d'une 1-forme α est la 2-forme $d\alpha$ définie comme suit : Pour toute surface paramétrée $\sigma : (\mathbb{R}^2, 0) \to S$ de classe C^2, on a

$$d\alpha_{\sigma(s,t)}(\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s, t), \frac{\partial \sigma}{\partial t}(s, t)) := \frac{\partial}{\partial s}(\alpha_{\sigma(s,t)}.\frac{\partial \sigma}{\partial t}(s, t)) - \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_{\sigma(s,t)}.\frac{\partial \sigma}{\partial s}(s, t)).$$

Champs de vecteurs sur une sous-variété

Définition 1.1.14 *Un champ de vecteurs X sur une sous-variété S est une application lisse*

$$\begin{array}{rccl} X: & S & \longrightarrow & TS \\ & x & \longmapsto & X(x) = (x, X(x)), \end{array}$$

i.e. C'est la donnée en tout point x de S d'un vecteur tangent à S en X.

Un champ de vecteurs dépendant du temps est la donnée d'une famille $(X_t)_{t\in J}$, où chaque X_t est un champ de vecteurs et J est un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Remarque 1.1.2 *Les champs de vecteurs sont duaux des forme de Pfaff, Si X est un champ de vecteurs et α est une forme de Pfaff alors $(x \longmapsto \alpha_x(X(x)))$ est une fonction différentiable sur S.*

Définition 1.1.15 ***Image réciproque et image directe d'un champ de vecteurs***

Soit $f : V \to W$ une application étale (i.e. une immersion et une submersion à la fois) entre sous-variétés.

Si Y est un champ de vecteurs sur W, on définit son image réciproque par f comme étant le champ de vecteurs sur V, que l'on note f^*Y, est qui est défini par

$$f^*Y(x) := (df_x)^{-1}(Y(f(x))).$$

Si f est un difféomorphisme, on définit l'image directe d'un champ de vecteurs X sur V par f, que l'on note f_*X, comme étant le champ de vecteurs $(f^{-1})^*X$ sur W.

1.1.5 Equations différentielles sur une sous-variété

Définition 1.1.16 *Une équation différentielle sur une sous-variété S de $\mathbb{R}^n$ est une équation de la forme*

$$q'(t) + \Gamma_t(q) = 0, \tag{E1}$$

où $q : I \to S$ est une chemin différentiable et Γ_t est un champ de vecteurs dépendant du temps sur S.

Dans le domaine d'une carte h, l'équation $(E1)$ s'écrit sous-la forme

$$x'(t) + (h_*\Gamma_t)(x) = 0,$$

qui est une équation sur $\mathbb{R}^n$ à laquelle s'applique le théorème fondamental des équations différentielles ordinaires, puis en recollant les solutions on obtient :

Théorème 1.1.1 *On considère l'équation* $(E1)$ *et on suppose que* Γ_t *est à support compact.*

1)- *Quels que soient* $(t_0, q_0) \in J \times S$ *et l'intervalle* $I \subset J$ *contenant* t_0*, il existe une unique solution* $\gamma_I : I \to S$ *de* $(E1)$ *telle que* $\gamma_I(t_0) = q_0$*, c'est la restriction à* I *de l'unique solution maximale* γ_J *sur* J *du problème.*

2)- *On définit* ***la résolvante*** $\mathbf{R}$ *de* $(E1)$ *comme étant l'application*

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{R}: & J \times S \times J & \longrightarrow & S \\ & (s, q_0, t) & \longmapsto & \mathbf{R}_s^t(q_0), \end{array}$$

où $(t \longmapsto \mathbf{R}_s^t(q_0))$ *est l'unique solution qui prend la valeur* q_0 *à l'instant* $t = s$.

3)- *La résolvante vérifie* $\mathbf{R}_\tau^t \circ \mathbf{R}_s^\tau = \mathbf{R}_s^t$ *pour* $s, t, \tau \in J$*; en particulier* $(\mathbf{R}_s^t)^{-1} = \mathbf{R}_t^s$ *et chaque* $\mathbf{R}_s^t$ *est un difféomorphisme de* S *sur lui même.*

4)- *Dans le cas où* $\Gamma_t(q) = -X(q)$ *est indépendant du temps (on dit que l'équation est autonome) on pose* $\mathbf{R}_s^t = \rho^{t-s}$ *et l'application* $((t, q) \longmapsto \rho^t(q))$ *est* ***le pseudo-groupe à un paramètre****, ou* ***le flot*** *engendré par le champ de vecteurs* X.

1.1.6 Isotopie d'une sous-variété

Définition 1.1.17 ***Une isotopie d'une sous-variété*** S *est une application continue*

$$\begin{array}{rccl} g: & [0,1] \times S & \longrightarrow & S \\ & (t, x) & \longmapsto & g(t, x) = g_t(x) \end{array}$$

telle que chaque g_t *est un difféomorphisme de* S *et* $g_0 = Id_S$.

Comme conséquence de cette définition, partant d'une isotopie $(g_t)_{0 \leq t \leq 1}$ de S, on obtient une famille de sous-variétés $(S_t = g_t(S))_{0 \leq t \leq 1}$ qui sont des copies de S.

Exemple 1.1.6 *Si on prend* $S = S^2$ *et* $g_t(x) = (1+t)x$ *alors* S_t *est la sphère de centre* $0_{\mathbb{R}^3}$ *et de rayon* $(1+t)$.

Exemple 1.1.7 *Si on prend* $J = [0, 1]$ *et* $g_t = \mathbf{R}_0^t$ *dans le théorème précédent, on définit bien une isotopie sur* S.

Définition 1.1.18 ***Le générateur infinitésimal*** *d'une isotopie* $(g_t)_{0 \leq t \leq 1}$ *est l'unique champ de vecteurs dépendant du temps* X_t *défini par*

$$\frac{d}{dt} g_t(q) = X_t(g_t(q)).$$

Définition 1.1.19 *Une isotopie est à support compact si en dehors d'un compact elle est réduite à l'identité.*

Dérivée de Lie par rapport à un champ de vecteurs

Soit X un champ de vecteurs et ρ son flot, la dérivée de Lie par rapport à X est définie par

$$\mathcal{L}_X := \frac{d}{dt}\left.\right|_{t=0} \left(\rho^t\right)^* .$$

En particulier, si $\varphi : S \to \mathbb{R}$ alors

$$\left(\mathcal{L}_X \varphi\right)(x) = d\varphi_x . X(x).$$

Proposition 1.1.7 ***Formule d'homotopie de Cartan***

Pour toute 1*-forme* α *sur* S *et tout champ de vecteurs* X *on a*

$$\mathcal{L}_X \alpha = i_X(d\alpha) + d(i_X \alpha). \tag{F-H-C}$$

Remarque 1.1.3 *Si* $(g_t)_{0 \leq t \leq 1}$ *est une isotopie dont le générateur infinitésimal est* X_t *on a*

$$\frac{d}{dt}(g_t)^* = (g_t)^* \circ \mathcal{L}_{X_t}.$$

1.2 Rappels de géométrie symplectique

1.2.1 Structure symplectique sur une variété

Une structure symplectique sur une variété différentiable M est la donnée d'une 2-forme différentielle fermée ω sur M, appelée forme symplectique, telle que la forme bilinéaire alternée ω_x sur $T_x M$ est non dégénérée pour tout $x \in M$.

Exemple 1.2.1 ***La structure symplectique standard sur*** $\mathbb{R}^{2n}$

Sur $\mathbb{R}^{2n} = \{(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n)\}$ *on pose*

$$\omega_{\mathbb{R}^n} := dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 + ... + dx_n \wedge dy_n = \sum_{i=1}^{i=n} dx_i \wedge dy_i.$$

On appelle $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\mathbb{R}^n})$ *la structure symplectique standard sur* $\mathbb{R}^{2n}$*.*

La notation est justifier par l'exemple suivant, qui est identique, de point de vu algébrique au précédent, mais qui a une autre signification géométrique.

Exemple 1.2.2 ***La structure symplectique standard sur*** $T^*\mathbb{R}^n$

Sur $T^*\mathbb{R}^n = \{(q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n)\} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ *on définit* ***la forme de Liouville***

$$\theta_{\mathbb{R}^n} = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + ... + p_n dq_n = \sum_{i=1}^{i=n} p_i dq_i,$$

c'est une 1*-forme différentielle sur* $\mathbb{R}^n$*, sa différentielle* $d\theta_{\mathbb{R}^n}$ *n'est autre que* $\omega_{\mathbb{R}^n}$*.*

En mécanique classique on dit que $\mathbb{R}^n$ *est l'espace des phases et* $T^*\mathbb{R}^n$ *est celui des configurations.*

Exemple 1.2.3 ***La structure symplectique standard sur*** $T^*\mathbf{M}$

C'est la généralisation de l'exemple précédent, dans ce cas la forme de Liouville, que l'on note $\theta_{\mathbf{M}}$*, est caractérisé par :*

"Pour toute 1*-forme* $\alpha : M \to T^*\mathbf{M}$*, on a* $\alpha^*(\theta_{\mathbf{M}}) = \alpha$*". On note par* $\omega_M = d\theta_{\mathbf{M}}$ *: La forme symplectique standard de* $T^*\mathbf{M}$*.*

Définition 1.2.1 ***Sous-variétés langrangiennes d'une variété symplectique***

Une sous-variété L *d'une variété symplectique* (M, ω) *est lagrangienne si en tout point* $x \in L$ *on a* $(T_x L)^{\perp} = T_x L$*; où*

$$(T_x L)^{\perp} := \{\xi \in T_x M,\ t.q\ \forall \eta \in T_x L, \omega_x(\xi, \eta) = 0\}.$$

Un plongement lagrangien *est un plongement* $j : S \longrightarrow (M, \omega)$ *tel que* $j(S)$ *est une sous-variété lagrangienne de* (M, ω)*.*

Exemple 1.2.4 *Une* 1*-forme* $\alpha : M \to T^*M$ *sur* M *est un plongement lagrangien si et seulement si elle est fermée (i.e.* $d\alpha = 0$*)*

Remarque 1.2.1 *Comme la forme symplectique est non dégénérée, une sous-variété lagrangienne est de dimension égal à la moitié de la dimension de la variété ambiante; d'autre part, la restriction de la forme symplectique à une sous-variété lagrangienne est nulle.*

Proposition 1.2.1 *(Invariance par difféomorphisme de sous-variétés lagrangiennes).*

Soit L *une sous-variété lagrangienne de* (M, ω) *et* φ *un difféomorphisme de* M *alors* $\varphi(L)$ *est également une sous-variété lagrangienne.*

Preuve. On rappel que $T_x\varphi(L) = \left(d\varphi^{-1}_{\varphi(x)}\right)(T_{\varphi^{-1}(x)}L)$ et par conséquent

$$\begin{aligned}(T_x\varphi(L))^{\perp} &= \left(d\varphi^{-1}_{\varphi(x)}\right)(T_{\varphi^{-1}(x)}L)^{\perp} = \left(d\varphi^{-1}_{\varphi(x)}\right)(T_{\varphi^{-1}(x)}L)\\ &= T_x\varphi(L),\end{aligned}$$

ce qui démontre que $\varphi(L)$ est également une sous-variété lagrangienne. ■

1.2.2 Automorphismes et isotopies symplectiques

Définition 1.2.2 *Soient (M_1, ω_1), (M_2, ω_2) deux variétés symplectiques et $f : M_1 \to M_2$ une application différentiable.*

L'application f est isomorphisme de variétés symplectiques si $f^*\omega_2 = \omega_1$.

Si $(M_1, \omega_1) = (M_2, \omega_2) = (M, \omega)$ on dit que f est un automorphisme symplectique de (M, ω).

Remarque 1.2.2 *L'ensemble des automorphismes symplectiques est un groupe.*

Proposition 1.2.2 ***Caractérisation des isomorphismes symplectiques***

L'application $f : (M_1, \omega_1) \to (M_2, \omega_2)$ est un isomorphisme symplectique si et seulement si son graphe

$$Gr(f) = \{(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2,\ t.q\ x_2 = f(x_1)\}$$

est une sous-variété lagrangienne de $(M_1 \times M_2, pr_2^*\omega_2 - pr_1^*\omega_1)$.

Preuve. En effet, $(pr_2^*\omega_2 - pr_1^*\omega_1)_{(x_1, f(x_2))} = (f^*\omega_2 - \omega_1)_{x_1}$. ■

Notation 1.2.1 *On note $Aut(M, \omega)$, le groupe des automorphismes de (M, ω) et $\omega^2 := pr_2^*\omega - pr_1^*\omega$ qui est une forme symplectique sur $M^2 = M \times M$.*

Exemple 1.2.5 *L'espace $(\mathbb{R}^n)^*$ s'identifie canoniquement à $\mathbb{R}^n$ grâce au produit scalaire euclidien; comme $T^*\mathbb{R}^n$ s'identifie à $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ l'application*

$$\begin{array}{ccc} (T^*\mathbb{R}^n, \omega_{\mathbb{R}^n}) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n, \sigma_n) \\ ((q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n)) & \longmapsto & (q_1 + ip_1, q_2 + ip_2, ..., q_n + ip_n)\,, \end{array}$$

*où $\sigma_n(u, v) = im(u\overline{v})$, est un isomorphisme symplectique qui envoie **la section nulle** $\sum_{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \times \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ de $T^*\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.*

Définition 1.2.3 ***Un automorphisme infinitésimal*** *de (M, ω) est un champ de vecteurs dont le pseudo-groupe à un paramètre est inclue dans $Aut(M, \omega)$. Autrement dit, Si X est un tel champ alors $\mathcal{L}_X\omega = 0$.*

D'après la formule **(F-H-C)**, le fait que $\mathcal{L}_X\omega = 0$ et que ω est fermée entraînt que la 1-forme $i_X\omega := \omega(X, .)$ est fermée, ce qui motive la définition suivante :

Définition 1.2.4 *On dit qu'un champ de vecteurs X sur une variété symplectique (M, ω) est **un champ hamiltonien** si la forme $i_X\omega$ est exacte; sa primitive $h : M \to \mathbb{R}$ $(i_X\omega = dh)$ s'appelle **l'hamiltonien** de X et X est **le gradient symplectique** de h.*

Notation 1.2.2 *On note $aut(M, \omega)$: L'ensemble des automorphismes infinitésimaux de (M, ω) et $ham(M, \omega)$: L'ensemble des champs hamiltoniens.*

Définition 1.2.5 ***Isotopie symplectique***

Une isotopie symplectique *$(\varphi_t)_{0 \leq t \leq 1}$ sur (M, ω) est une isotopie de M telle que $\varphi_t \in Aut(M, \omega)$, $0 \leq t \leq 1$.*

Si de plus, $(\dot{\varphi}_t)_{0 \leq t \leq 1} \subset ham(M, \omega)$ on dit que $(\varphi_t)_{0 \leq t \leq 1}$ est ***une isotopie hamiltonienne;*** *la famille $(h_t)_{0 \leq t \leq 1}$, ou $\dot{\varphi}_t$ est le gradient symplectique de h_t, est l'hamiltonien de l'isotopie $(\varphi_t)_{0 \leq t \leq 1}$.*

1.2.3 Prolongement des isotopies lagrangiennes

Voisinage tubulaire symplectique

Théorème 1.2.1 *(A. Weinstein)*

Pour tout plongement lagrangien $j : S \longrightarrow (M, \omega)$, il existe un voisinage ouvert $U \subset T^*S$ de la section nulle de T^*S et un plongement $J : U \to (M, \omega)$ tel que $J^*\omega = \omega_S \mid_U$ et que si $(0_S : S \to T^*S)$ est la 1-forme nulle alors $j = J \circ 0_S$.

Définition 1.2.6 *Le plongement J donné par le théorème précédent est appelé* ***voisinage tubulaire symplectique*** *de j pour ω.*

Notation 1.2.3 *On note $Pl(S; M, \omega) = \{j : S \longrightarrow (M, \omega)\,,\ j$ est un plongement lagrangien$\}$.*

Corollaire 1.2.1 *On considère une variété symplectique (M, ω).*

1)- *Si M est compact alors le groupe $Aut(M, \omega)$ est localement connexe par arcs différentiables.*

2)- *Pour toute variété compact S, l'espace $Pl(S; M, \omega)$ est localement connexe par arcs différentiables.*

Preuve.

1)- Soit J un voisinage tubulaire de l'inclusion diagonale $(j : x \hookrightarrow (x, x))$ de (M, ω) dans $(M \times M, \omega^2)$.

Pour tout $\varphi \in Aut(M,\omega)$, assez proche de l'identité, on a $J^{-1}(graphe(\varphi))$ est une sous-variété lagrangienne de T^*M, il en est de même pour $tJ^{-1}(graphe(\varphi))$, ainsi $J\left(tJ^{-1}(graphe(\varphi))\right)$ est une sous-variété lagrangienne de M^2, c'est le graphe d'une application $\varphi_t : M \to M$ et par conséquent, (φ_t) est un chemin reliant l'identité $\varphi_0 = Id_M$ à $\varphi_1 = \varphi$.

2)- Soit J un voisinage tubulaire de $j \in Pl(S;M,\omega)$. Pour tout $k \in Pl(S;M,\omega)$, lisse et assez proche de j, il existe une 1-forme fermée α telle que $k(S) = J(\alpha(S))$, d'après 1) le groupe $Aut(S)$ est localement connexe par arcs alors il existe une isotopie (φ_t) de S telle que $k = J \circ \alpha \circ \varphi_1$ ainsi le chemin différentielle $(k_t := J \circ t\alpha \circ \varphi_t)$ joint $k_0 = J \circ 0_S = j$ à $k_1 = J \circ \alpha \circ \varphi_1 = k$ dans $Pl(S;M,\omega)$.

■

L'isotopie $(k_t := J \circ t\alpha \circ \varphi_t)$ construite dans la preuve est une isotopie lagrangienne.

Isotopie lagrangienne

Définition 1.2.7 ***Une isotopie lagrangienne*** *d'une variété S dans (M,ω) est un chemin dans $Pl(S;M,\omega)$.*

Une telle isotopie (j_t) est dite **exacte**, lorsque la forme symplectique ω est exacte et pour toute primitive θ de ω au voisinage de $j_t(M)$, la 1-forme $\left(\frac{d}{dt} j_t^*\theta\right)$ est exacte sur S.

Lorsque S est compact, cette définition est équivalente au fait que, pour r assez proche de t et pour tout voisinage tubulaire J de j_t, il existe une fonction $f_r : S \to \mathbb{R}$ telle que $j_r(S) = J(df_r(S))$.

Théorème 1.2.2 **i)-** *Une isotopie (ψ_t) de (M,ω) est une isotopie hamiltonienne si et seulement si $\{j_t : x \longmapsto (x, \psi_t(x))\}$ (i.e. $j_t(M) = graphe(\psi_t)$) est une isotopie lagrangienne exacte de $(M \times M, \omega^2)$.*

ii)- ***Prolongement des isotopies lagrangiennes exactes***

Pour toute isotopie (j_t) d'une variété compact S dans M, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. *L'isotopie (j_t) est une isotopie lagrangienne exacte de S dans (M,ω).*
2. *Le plongement j_0 est lagrangien et il existe une isotopie hamiltonienne (φ_t) de (M,ω) à support compact, telle que $j_t = \varphi_t \circ j_0$ pour tout t.*

2

Introduction à la géométrie de contact

2.1 Structure de contact

2.1.1 Structure de contact des espaces de jets

Germes et jets de fonctions lisses sur une variété différentiable

Définition 2.1.1 *Soit M une variété différentiable de dimension n.*

On dit que deux applications $f, g : (M, x) \to \mathbb{R}^p$ ***ont le même germe au point*** *x, si il existe un voisinage V de x tel que $f\mid_V = g\mid_V$.*

Remarque 2.1.1 *La définition reste vraie si on remplace M par un espace topologique quelconque.*

Proposition 2.1.1 *La relation : f et g ont le même germe en x est une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications locales en x.*

Définition 2.1.2 *Le quotient de M par cette relation d'équivalence est appelé l'espace des germes de fonctions en x. On le note $C_x(M)$. On note par $[f]_x$: la classe d'équivalence d'une fonction par rapport à cette relation d'équivalence.*

Lemme 2.1.1 *Si deux fonctions, lisses en x, f et g ont le même germe en x, alors il en ait de même pour leurs dérivées d'ordres supérieurs. Autrement dit : si $[f]_x = [g]_x$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left[D^k f\right]_x = \left[D^k g\right]_x$.*

Preuve. Ceci est vrai parce qu'avoir le même germe en x est une propriété locale (i.e. avoir le même germe dans un ouvert contenant x). ■

Définition 2.1.3 *Sur l'ensemble $\bigcup_{x\in M}\{x\}\times C_x(M)$ on définit la relation*

$$(x,[f]_x)\,\mathcal{R}\left(y,[g]_y\right) \Longleftrightarrow (x=y) \text{ et pour tout } 0\leq k\leq r, \left[D^k f\right]_x = \left[D^k g\right]_x,$$

*la relation $\mathcal{R}$ ainsi définie est une relation d'équivalence et l'ensemble des classes d'équivalence modulo cette relation, que l'on note $\underline{J^r(M,\mathbb{R}^p)}$, s'appel **l'espace des jets d'ordre** r (ou r-jets) **d'applications de** M **dans** $\mathbb{R}^p$.*

*Pour $p=1$, on parle plutôt de jets de fonctions. On note $j_x^r f$: la classe d'équivalence du couple $(x,[f]_x)$ et on l'appelle **le jet d'ordre** r **de** f **en** x.*

Pour $r=0$, $j^0(M,\mathbb{R}^p)=M\times\mathbb{R}^p$ et $j_x^0 f=(x,[f]_x)$.

Structure de variété de l'espace $J^k(M,\mathbb{R}^p)$

Soit $p:E\to M$ un fibré vectoriel de rang q au dessous de M, on note $J^k(p)$: le sous-ensemble de $J^k(M,E)$ constitué par les jets d'ordre k de section de fibré $p:E\to M$. On se donne un atlas $\Im=\{(U,\varphi;\Phi)\}$ sur M formées d'ouverts de trivialisation du fibré vectoriel (E,p,M). Etant donné une carte $(U,\varphi;\Phi)\in\Im$ on désigne par ψ_φ la carte locale de E donnée par

$$\Phi^{-1}(U\times\mathbb{R}^q)\ni y\longmapsto \psi_\varphi(y)=(\varphi(p(y)),pr_2(\Phi(y)))\in U\times\mathbb{R}^q.$$

Lemme 2.1.2 *On identifiant chaque jet $j_x^k f$ d'applications d'un ouvert $U\subset\mathbb{R}^n$ dans un ouvert $V\subset\mathbb{R}^n$ à $\left(x,(D^i f(x))_{0\leq i\leq k}\right)$, on identifie $j^k(U,V)$ à l'ensemble*

$$U\times V\times\bigoplus_{0\leq i\leq k} L^i_{\mathbf{s}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p),$$

où $L^i_{\mathbf{s}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ désigne l'espace des application i-linéaires symétriques de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^p$.

Théorème 2.1.1 *Pour tout $k\in\mathbb{N}$, soit l'application*

$$\begin{array}{rccl} \pi_k: & J^k(p) & \longrightarrow & E \\ & j_x^k s & \longmapsto & \pi_k(j_x^k s):=s(x). \end{array}$$

i) *Lorsque $(U, \varphi; \Phi)$ varie dans $\Im$, les applications*

$$\psi_\varphi^k : \pi_k^{-1}(\psi_\varphi^{-1}(U \times \mathbb{R}^q)) \to U \times \mathbb{R}^q \times \bigoplus_{0 \leq i \leq k} L_{\mathbf{s}}^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$$

données (modulo l'identification du lemme précédent) par

$$\psi_\Phi^k(j_x^k f) := j_{\varphi(x)}^k \left(pr_2 \circ \psi \circ f \circ \left[\varphi^{-1}\right]_{\varphi(x)} \right),$$

forme un atlas de variété différentiable sur $J^k(p)$. Cette structure ne dépend pas du choix de $\Im$.

ii) *Pour cette structure, l'application $\pi_k : J^k(p) \to E$ est un fibré vectoriel. En particulier $\pi_0 : J^0(p) \to E$ est un difféomorphisme.*

iii) *Quel que soit $l \leq k$, l'application*

$$\begin{array}{rccl} \pi_k^l : & J^k(p) & \longrightarrow & J^l(p) \\ & j_x^k s & \longmapsto & \pi_k(j_x^k s) := j_x^l s. \end{array}$$

est un fibré vectoriel.

Lemme 2.1.3 *Etant donnés un entier naturel k et une variété lisse M, Soit $J_0^k(\mathbb{R}^m, M)$ la fibre en 0 de la projection canonique $\sigma_k : J^k(\mathbb{R}^m, M) \to \mathbb{R}^m$ définie par $\sigma_k(j_y^k g) := y$.*

Pour chaque $y \in \mathbb{R}^m$, désignons par τ_y la translation par y dans $\mathbb{R}^m$.

L'application

$$J^k(\mathbb{R}^m, M) \ni j_y^k g \longmapsto \psi_\varphi(y) = \left(y, j_0^k(g \circ \tau_y)\right) \in \mathbb{R}^m \times J_0^k(\mathbb{R}^m, M)$$

est une trivialisation de σ_k au-dessus de $Id_{\mathbb{R}^m} = \tau_0$, qui permet d'identifier $J^k(U, M)$ à $U \times J_0^k(U, M)$ pour chaque ouvert U de $\mathbb{R}^m$.

Théorème 2.1.2 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère l'application*

$$\begin{array}{rccl} p_k = p \circ \pi_k : & J^k(p) & \longrightarrow & M \\ & j_x^k f & \longmapsto & x. \end{array}$$

i) Le triplet $\left(J^k(p), p_k, M\right)$ est un fibré vectoriel au-dessus de M.

ii) Pour chaque section f de (E, p, M) au-dessus d'un ouvert U de M, $j^k f : x \longmapsto j_x^k f$ est une section de $\left(J^k(p), p_k, M\right)$ au-dessus de U.

Structure de contact sur $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$

Etant donnés un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^q)$; le jet d'ordre k de la fonction f, que l'on note $j^k f$, est une section continue de la projection $\sigma_k : J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q) \to \mathbb{R}^n$ au-dessus de U qui vérifie en plus

$$d(d^{j-1} f) = d^j f$$

Soient $(y^1, y^2, ..., y^n)$, (resp. $(z^1, z^2, ..., z^q)$) le système de coordonnées standard sur $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^q$), on considère les fonctions $x^1, x^2, ..., x^n : J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q) \to \mathbb{R}$ définies par

$$x^i(j^k_v f) = y^i(v), 1 \leq i \leq n,$$

et pour chaque $1 \leq j \leq q$ et chaque multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $|\alpha| \leq k$ on définit la fonction $u^j_\alpha : J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q) \to \mathbb{R}$ par

$$u^j_\alpha(j^k_v f) = \frac{\partial^\alpha (z^j \circ f)}{\partial y^\alpha}(v) = \left(z^j \circ \frac{\partial^\alpha f}{\partial y^\alpha} \right)(v).$$

Considérons à présent les 1-formes différentielles sur $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ données par

$$c^j_\alpha = du^j_\alpha - \sum_{i=1}^{i=n} u^j_{\alpha+\delta_i} dx^i, \quad |\alpha| < k, \ \ 1 \leq j \leq q,$$

où $\delta_i = \left(\delta^1_i, \delta^2_i, ..., \delta^n_i\right) \in \mathbb{N}^n$, δ^l_i désigne le symbole de Kronecker.

Une section continue φ au-dessus de $U \subset \mathbb{R}^n$ est de la forme $\varphi = j^k f$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. L'application $\pi^{k-1}_k \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$; où $\pi^{k-1}_k : J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q) \to J^{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$.est la projection canonique.

2. $\varphi^*(c^j_\alpha \mid_{\sigma_k^{-1}(U)}) = 0$ quels que soient j et α.

Si $\mathcal{K}^k_{n,q}$: désigne le sous-fibré vectoriel de $T^*(J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q))$ engendré par la famille des formes de Pfaff $(c^j_\alpha)_{j,\alpha}$, la deuxième condition s'écrit

$$\varphi^*(\mathcal{K}^k_{n,q} \mid_{\sigma_k^{-1}(U)}) = 0.$$

Nous dirons que $\mathcal{K}^k_{n,q}$ **est la structure de contact de** $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$.

Si on ce donne le fibré trivial $pr_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$, on aura $J^k(pr_1) = J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$, et la projection canonique est notée $\pi_k : J^k(pr_1) \to J^0(pr_1) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$.

Proposition 2.1.2 *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ et $H : U \to V$ un isomorphisme de $pr_1 |_U$ sur $pr_1 |_V$ au-dessus de difféomorphisme $h : pr_1(U) \to pr_1(V)$.*

Le difféomorphisme

$$\begin{array}{rccl} H^k : & \pi_k^{-1}(U) & \longrightarrow & \pi_k^{-1}(V) \\ & j_x^k f & \longmapsto & H^k(j_x^k f) := j_{h(x)}^k (H \circ \widetilde{f} \circ [h^{-1}]_{h(x)}), \end{array}$$

où $\widetilde{f}(x) = (x, f(x))$, vérifie la relation

$$H_*^k(\mathcal{K}_{n,q}^k |_{\pi_k^{-1}(U)}) = \mathcal{K}_{n,q}^k |_{\pi_k^{-1}(V)} . \tag{T-C1}$$

Structure de contact sur $J^k(M, E)$

Corollaire 2.1.1 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un sous-fibré vectoriel $\mathcal{K}^k(p)$ de $T^*(J^k(p))$, appelé **structure de contact de** $J^k(p)$, et ayant la propriété suivante :*

Pour qu'une section continue g du fibré $\big(J^k(p), p_k, M\big)$ au-dessus d'un ouvert U de M soit holonome, il faut et il suffit que $\pi_k^{k-1} \circ g$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ et que l'on ait $g^*(\mathcal{K}^k(p)) = 0$.

On pose $\mathcal{K}^0(p) = \{0\}$.

Corollaire 2.1.2 *Soient (E_1, p_1, M) et (E_2, p_2, M) deux fibrés vectoriels isomorphes sur M.*

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le difféomorphisme

$$\begin{array}{rccl} H^k : & J^k(p_1) & \longrightarrow & J^k(p_2) \\ & j_x^k f & \longmapsto & H^k(j_x^k f) := j_x^k (H \circ f \circ [h^{-1}]_{h(x)}), \end{array}$$

où $p_2 \circ H = h \circ p_1$, vérifie la relation

$$H_*^k(\mathcal{K}^k(p_1)) = \mathcal{K}^k(p_2). \tag{T-C2}$$

Remarque 2.1.2 *Cette application est ce qu'on appelle une transformation de contact; la structure de contact $\mathcal{K}^k(p)$ est la restriction à $J^k(p)$ de la structure de contact sur $J^k(M, E)$.*

2.1.2 Structure de contact sur une variété

Formes de contact sur une variété

On considère la structure de contact $\mathcal{K}_{n,q}^k$ sur $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$, en prend souvent $q = k = 1$, dans ce cas le sous-fibré $\mathcal{K}_{n,1}^1$ est engendré par sa section

$$c_n := du - \sum_{i=1}^n p_i dx^i, \tag{F-C}$$

où $u = u_0^1$ et $p_i = u_{\delta_i}^1$. Cette 1-forme sur $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{(x^i, p_i, u)\}$ est une forme de contact au sens de la définition suivante :

Définition 2.1.4 ***Forme de contact sur une variété lisse***

Une forme de contact sur une variété différentiable M est une forme de Pfaff, noté c, qui vérifie les deux conditions suivantes :

1. *Pour tout x dans M, la forme linéaire $c_x : T_xM \to \mathbb{R}$ est non nulle. Son noyau $\ker c_x$ est donc un hyperplan de T_xM.*
2. *La restriction à ce noyau de la forme bilinéaire $dc_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ est non dégénérée.*

Remarque 2.1.3 *Comme il y a pas de forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée sur un espace vectoriel de dimension impaire, ceci implique que $\ker c_x$ est de dimension paire, et comme $\ker c_x$ est un hyperplan (i.e. un sous-espace vectoriel de codimension un) on en déduit que M est forcément de dimension impaire.*

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une 1-forme c sur M soit une forme de contact est que $c \wedge (dc)^{\wedge n}$ soit une forme volume sur M; $(\dim M = 2n+1)$.

Comme pour les formes symplectiques, nous allons voir que toutes les formes de contact admettent le même modèle local, comme le montre le

Théorème 2.1.3 ***(Darboux)***

Soit c une forme de contact sur une variété lisse M de dimension $2n+1$, en tout point a de M il existe un difféomorphisme local

$$h : (M, a) \to (J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), 0)$$

tel que $h^* c_n = c$ au voisinage de a.

Démonstration. Soit X le champ de vecteurs sur M défini par

$$\forall x \in M, i_{X(x)}c_x := c_x(X(x)) = 1 \wedge i_{X(x)}dc_x := dc_x(X(x), .) = 0.$$

Si $\varphi_t^X = \exp(tX)$: le flot de X, alors, d'après la formule d'homotopie de Cartan, on a

$$\mathcal{L}_X c := d(i_X c) + i_X dc = 0$$

et par conséquent, $\left(\varphi_t^X\right)^* c = c$ (i.e. la forme de contact c est constante le long des courbe intégrales du champ de vecteurs X), d'où

$$\left(\varphi_t^X\right)^* dc = dc.$$

Si $S \ni a$ est une hypersurface de M, (i.e. une sous-variété de codimension un), transverse aux courbes intégrales de X, (i.e. $T_xM = T_xS \oplus \mathbb{R}X(x)$ pour tout $x \in S$) et si $j : S \hookrightarrow M$ désigne l'injection canonique de S dans M alors, j^*dc, qui n'est autre que la restriction de dc à S est une forme symplectique sur S. Car, $T_xS = \ker dc_x$.

On appliquant le théorème de Darboux sur une variété symplectique à (S, j^*dc), il existe sur S un système de coordonnées locales $(y^1, y^2, ..., y^n, q_1, q_2, ..., q_n)$ centré en a tel que

$$j^*dc = \sum_{i=1}^{i=n} dy^i \wedge dq_i.$$

On considère les fonctions $x^1, x^2, ..., x^n, p_1, p_2, ..., p_n$ définies au voisinage de a par

$$j^*x^i = y^i,\ j^*p_i = q_i \text{ et } \left(\varphi_t^X\right)^* p_i = p_i.$$

Puisque $\left(\varphi_t^X\right)^* dc = dc$, on a

$$dc = \sum_{i=1}^{i=n} dx^i \wedge dp_i = -d\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_i dx^i\right) \text{ au voisinage de } a.$$

En on déduit que la 1-forme $c + \sum_{i=1}^{i=n} p_i dx^i$ est fermée, elle est donc localement exacte, elle est donc la différentielle d'une fonction u définie au voisinage de a, i.e.

$$c = du - \sum_{i=1}^{i=n} p_i dx^i \text{ au voisinage de } a.$$

Comme $c \wedge (dc)^{\wedge n}$ est une forme volume, alors $(u, x^1, x^2, ..., x^n, p_1, p_2, ..., p_n)$ est un système de coordonnées locales de M au voisinage de a. ■

Structure de contact abstraite sur une variété lisse

Définition 2.1.5 *Une **structure de contact** $\mathcal{K}$ sur une variété différentiable M est la donné d'un sous-fibré en droites $\mathcal{K}$ de T^*M tel que si on note $\mathcal{K}^* = \mathcal{K} - \{0_{T^*M}\}$ alors toute section locale de $\mathcal{K}^*$ est une forme de contact.*

On dit que $(M, \mathcal{K})$ est une structure (ou variété) de contact.

Exemple 2.1.1 *L'espace de jets d'ordre un des fonctions lisses sur $\mathbb{R}^n$, que l'on note $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ou $J^1(\mathbb{R}^n)$ tout simplement, muni de la forme de contact standard, que l'on note $c_n = c_{\mathbb{R}^n}$. La structure de contact $(J^1(\mathbb{R}^n), c_{\mathbb{R}^n})$ nous sera très utile par la suite.*

2.2 Transformations de contact-variétés de Legendre

2.2.1 Transformation de contact

Définition 2.2.1 ***Transformations de contact***

Une transformation de contact entre deux variétés de contact $(M_1, \mathcal{K}_1)$ et $(M_2, \mathcal{K}_2)$ est un difféomorphisme $f : M_1 \to M_2$ vérifiant : $f^*\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_1$.

On dit également que f est isomorphisme de contact (automorphisme si $M_1 = M_2$).

Exemple 2.2.1 *Tout automorphisme local de fibré vectoriel trivial $(J^0(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, s_0 = pr_1, \mathbb{R}^n)$ définit un unique automorphisme local de la variété de contact $(J^1(\mathbb{R}^n), c_{\mathbb{R}^n})$, qui est un automorphisme local de fibré $(J^1(\mathbb{R}^n), \pi_1^0, J^0(\mathbb{R}^n))$.*

De même, tout difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui même définit également un unique automorphisme local de la variété de contact $(J^1(\mathbb{R}^n), c_{\mathbb{R}^n})$, qui est un automorphisme local de fibré $(J^1(\mathbb{R}^n), s_1, \mathbb{R}^n)$.

Exemple 2.2.2 ***Les involutions de Legendre***

On ce donne I un sous-ensemble de $\{1, 2, 3, ..., n\}$, on définit h_I sur l'espace $J^1(\mathbb{R}^n)$ par

$$\begin{cases} x^i \circ h_I = & \begin{cases} -p_i & si\ i \in I \\ x^i & sinon \end{cases} \\ p_i \circ h_I = & \begin{cases} x^i & si\ i \in I \\ p_i & sinon \end{cases} \\ u \circ h_I = & u - \sum\limits_{i \in I} p_i x^i. \end{cases}$$

L'involution h_I est automorphisme de contact de $(J^1(\mathbb{R}^n), c_{\mathbb{R}^n})$ qui ne conserve pas les deux projections fibrés π_1^0 et s_1.

Définition 2.2.2 ***Automorphisme infinitésimal d'une structure de contact***

C'est un champ de vecteurs sur M dont le pseudo-groupe à un paramètre qu'il engendre est formés d'automorphisme locaux de $(M, \mathcal{K})$.

Un automorphisme infinitésimal s'appel un **champ de Lie.**

Cette définition se traduit en termes infinitésimaux par la propriété suivante : pour toute section locale c de la projection $\mathcal{K}^* \to M$, la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X c$ est une section locale de la projection $\mathcal{K} \to M$.

Proposition 2.2.1 *Si X est un champ de Lie de la structure de contact définie une forme de contact c, alors $c \wedge \mathcal{L}_X c = 0$.*

2.2.2 Variétés de Legendre

Définition 2.2.3 *Une (sous-)* ***variété de Legendre*** *d'une variété de contact* $(M, \mathcal{K})$ *est une sous-variété* $j : S \hookrightarrow M$ *telle que* $j^*\mathcal{K} = 0_{T^*S}$*, et de dimension maximale parmi les sous-variétés de* M *possédant cette propriété.*

Définition 2.2.4 *On dit que deux sous-ensemble* A_1*,* A_2 *d'un ensemble* E *ont le même germe dans un autre sous-ensemble* B *de* E *si* $A_1 \cap B = A_2 \cap B$*. Ce qui définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des parties de* E*; on note* $[A]_B$ *le germe (ou la classe d'équivalence) d'un sous-ensemble* A *de* E*.*

Si $B = \{x\}$*, on écrit plutôt* $[A]_x$*.*

Théorème 2.2.1 i)- *Si* M *est de dimension* $2n+1$*, les sous-variétés legendrienne sont toutes de dimension* n*.*

ii)- *Pour que la sous-variété* $S \hookrightarrow J^1(\mathbb{R}^n)$ *soit une variété de Legendre de* $(J^1(\mathbb{R}^n), \mathcal{K}_{\mathbb{R}^n})$*, il faut et il suffit que, pour chaque* $b \in S$*, il existe une involution de Legendre* h_I *et un germe* $\varphi : [\mathbb{R}^n]_{s_1(h_I(b))} \to \mathbb{R}$ *de fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *tels que*

$$[h_I(S)]_{h_I(b)} = j^1\varphi\left([\mathbb{R}^n]_{s_1(h_I(b))}\right).$$

Démonstration.

i)- Soit $i : S \hookrightarrow M$ une sous-variété de Legendre de $(M, \mathcal{K})$.

Si c est une forme de contact engendrant localement $\mathcal{K}$, on a $i^*c = 0$ et par conséquent $i^*dc = 0$. Comme $dc(i(y))$ est non dégénéré sur $\ker c(i(y))$ pour tout $y \in S$, alors $T_yi(T_yS)$ et son orthogonal par rapport à la forme bilinéaire non dégénéré $dc(i(y))$ s'intersectent en zéro uniquement, donc $2\dim T_yi(T_yS) \leq \dim\ker c(i(y)) = 2n$; en on déduit que $T_yi(T_yS)$ est de dimension au plus n, comme T_yi établit un isomorphisme de T_yS sur son image, ceci entraîne que S est de dimension au plus n. Pour savoir qu'il existe des sous-variétés legendriennes de dimension n, il suffit de remarquer que pour toute fonction lisse $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, la sous-variété $j^1\varphi(\mathbb{R}^n) := \{(x, \varphi(x), \nabla\varphi(x)), x \in \mathbb{R}^n\}$ est une sous-variété de Legendre de $(J^1(\mathbb{R}^n), \mathcal{K}_{\mathbb{R}^n})$, elle est de dimension n car c'est l'image de $\mathbb{R}^n$ par le plongement $x \longmapsto (x, \varphi(x), \nabla\varphi(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n+1}$.

ii)- Soit la projection canonique définie par

$$\begin{array}{rlcl} \pi : & (J^1(\mathbb{R}^n), \mathcal{K}_{\mathbb{R}^n}) & \longrightarrow & T^*\mathbb{R}^n \\ & j^1_x f & \longmapsto & \pi(j^1_x f) := (x, df(x)), \end{array}$$

il existe sur $T^*\mathbb{R}^n$ une unique forme symplectique Ω_n telle que $\pi^*\Omega_n = dc_{\mathbb{R}^n}$. On peut la construire comme suit : si $(y^1, y^2, ..., y^n, q_1, q_2, ..., q_n)$ est le système de coordonnées linéaires sur $T^*\mathbb{R}^n$ défini par

$$\begin{cases} y^i(df(x)) = x^i(j^1_x f) \\ q_i(df(x)) = p_i(j^1_x f), \end{cases}$$

on pose $\Omega_n = \sum\limits_{i=1}^{i=n} dy^i \wedge dq_i$. Comme $(d\varphi)^* \Omega_n = 0$, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on procédant de la même manière que i)- on montre que les sous-variétés $i : Z \hookrightarrow T^*\mathbb{R}^n$ vérifiant $i^*\Omega_n = 0$ et de dimension maximale parmi celles qui ont cette propriété sont de dimension n. De telles sous-variétés sont dite lagrangiennes par rapport à la structure symplectique standard de $T^*\mathbb{R}^n$. Nous aurons besoin de

Lemme 2.2.1 *Soit Y une sous-variété legendrienne de $(J^1(\mathbb{R}^n), \mathcal{K}_{\mathbb{R}^n})$, pour chaque $b \in Y$, le germe $\pi([Y]_b)$ est un germe en b de variétés lagrangiennes de $(T^*\mathbb{R}^n, \Omega_n)$. Réciproquement, étant donné un point c d'une variété lagrangienne Z de $(T^*\mathbb{R}^n, \Omega_n)$, il existe pour chaque $b \in \pi^{-1}(c)$ un unique germe $[Y]_b$ de variété de Legendre de $(J^1(\mathbb{R}^n), \mathcal{K}_{\mathbb{R}^n})$ tel que $[Z]_c = \pi([Y]_b)$.*

Lemme 2.2.2 *Soit $[Y]_b$ un germe de sous-variété de Legendre de $(J^1(\mathbb{R}^n), \mathcal{K}_{\mathbb{R}^n})$; pour qu'il existe un germe de fonction $\varphi : [\mathbb{R}^n]_{s_1(b)} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tel que $[Y]_b = j^1\varphi\left([\mathbb{R}^n]_{s_1(b)}\right)$, il faut et il suffit que $T_b s_1(T_b Y) = T_{s_1(b)}\mathbb{R}^n$.*

Définition 2.2.5 ***Involution de Lagrange***

Soit $I \subset \{1, 2, ..., n\}$, une involution de Lagrange sur $T^*\mathbb{R}^n$ est un automorphisme linéaire k_I de $T^*\mathbb{R}^n$ qui vérifie $k_I \circ \pi = \pi \circ h_I$, où h_I est une involution de Legendre. On a $k_I^*\Omega_n = \Omega_n$.

Comme l'espace tangent à une sous-variété lagrangienne et un sous-espace vectoriel lagrangien de l'espace vectoriel symplectique qui est l'espace tangent à la variété symplectique ambiante, en on déduit des deux lemmes précédents que pour achever notre démonstration, il suffit de prouver le

Lemme 2.2.3 *Pour tout sous-espace lagrangien (i.e. un sous-espace vectoriel de $T^*\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ qui est lagrangien en tant que sous-variété) L de $(T^*\mathbb{R}^n, \Omega_n)$, il existe une involution de Lagrange k_I telle que $\tau^*(k_I(L)) = \mathbb{R}^n$, où $\tau^* : T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est la projection canonique.*

Preuve. Le sous-espace $P = (\tau^*)^{-1}\{0\}$ est lagrangien. On pose

$$M = L \cap P.$$

Si $M = \{0\}$, $k_I = id$ nous convient; sinon, il existe $I \subset \{1, 2, ..., n\}$ tel que

$$P = M \oplus N_I, \text{ avec } N_I = \{v \in P : q_i(v) = 0, \forall i \in I\},$$

autrement dit $N_I = P \cap k_I(P)$.

Pour que k_I répond à notre question, il faut que $k_I(L) \cap P = \{0\}$ ou bien

$$k_I(P) \cap L = \{0\}.$$

Comme L et $k_I(P)$ sont lagrangiens, on déduit que $M \subset L = L^\perp$ et $N_I \subset k_I(P) = (k_I(P))^\perp$, d'où

$$M + N_I \subset (k_I(P) \cap L)^\perp,$$

mais $P = M \oplus N_I$, donc $k_I(P) \cap L \subset P^\perp = P$ et par conséquent, on a $k_I(P) \cap L = (L \cap P) \cap (P \cap k_I(P)) = M \cap N_I = \{0\}$. ■

Ce qui achève la démonstration du théorème. ■

La démonstration précédente et le théorème de Darboux nous donnes avec les mêmes notations :

Théorème 2.2.2 **i)** *Si (M, Ω) est une variété symplectique de dimension $2n$, toutes les sous-variétés lagrangiennes sont de dimension n.*

ii) *Pour que la sous-variété $S \hookrightarrow T^*\mathbb{R}^n$ soit une sous-variété lagrangienne de $(T^*\mathbb{R}^n, \Omega_n)$, il faut et il suffit que, pour chaque $b \in S$, il existe une involution de Lagrange k_I et un germe $\varphi : [\mathbb{R}^n]_{\tau^*(k_I(b))} \to \mathbb{R}$ de fonction de classe $\mathcal{C}^2$ tels que*

$$[k_I(S)]_{k_I(b)} = d\varphi\left([\mathbb{R}^n]_{\tau^*(k_I(b))}\right).$$

2.2.3 Hamiltonien de contact

Soit $(M, \mathcal{K})$ une variété de contact, on ce donne c (une forme de contact) une section de $\mathcal{K}^*$ au-dessus d'un ouvert U de M et X un champ de Lie (i.e. une transformation infinitésimale de contact) sur $(U, \mathcal{K}\mid_U)$. On pose

$$\begin{array}{rccl} f := i_X c : & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) := -i_X c(x) = -c_x(X(x)), \end{array}$$

le fait que $\mathcal{L}_X c \wedge c = 0$ s'écrit, d'après la formule d'homotopie de Cartan,

$$(df + i_X dc) \wedge c = 0.$$

Proposition 2.2.2 *L'application $X \longmapsto (f := -i_X c)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de l'ensemble des champs de Lie sur U à valeurs dans $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$.*

Définition 2.2.6 ***Hamiltonien de contact***

Sous les hypothèses et notations de la proposition précédente, on dit que $f := -i_X c$ est l'hamiltonien de contact de champ de Lie X par rapport à c et l'on note $X = H_c f$ ou $X = H_f$ si aucune confusion n'est à craindre.

Preuve. (de la proposition)

Comme l'application $X \longmapsto f := -i_X c$ est $\mathbb{R}$-linéaire, injective, reste à montrer que pour une fonction $H : U \to \mathbb{R}$ (appelée hamiltonien), il existe un champ de Lie X vérifiant $i_X c = -H$.

En effet, comme pour tout $x \in M$, on a $T_x M = \mathcal{K}_x \oplus \ker(dc_x)$, en écrivant $X_x = Y_x + Z_x$ avec cette décomposition, donc

$$H(x) = -c_x(X_x) = -c_x(Y_x + Z_x) = -c_x(Z_x),$$

ce qui détermine le deuxième facteur Z_x; de la formule

$$(-dH + i_X dc) \wedge c = 0,$$

en on déduit que, comme $c_x \neq 0$ alors forcément

$$-dH(x) + dc_x(Y_x, .) \mid_{\mathcal{K}_x} = 0,$$

ce qui détermine, parce que dc_x est non dégénérée sur $\mathcal{K}_x$ entièrement le premier facteur $Y_x \in \mathcal{K}_x$. ■

Exemple 2.2.3 *Pour $M = J^1(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\mathbb{R}^n}$, un champ de Lie, associé à un hamiltonien H, s'écrit sous la forme*

$$X_H = \left(H - \sum_{i=1}^{i=n} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{i=n} \left(-\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x^i} + \left(\frac{\partial H}{\partial x^i} + p_i \frac{\partial H}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial p_i}\right).$$

Proposition 2.2.3 *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction ayant 0 pour valeur régulière, alors*

i)- *L'hamiltonien de contact $H_c(f)$ associé à f est un champ de vecteurs tangents à $f^{-1}(0)$.*

ii)- *Les orbites (i.e. les courbes intégrales) de la restriction de $H_c(f)$ à $f^{-1}(0)$ sont des sous-variétés (immergées) intégrales de M.*

iii)- *Pour toute autre forme de contact $\acute{c}$ et toute fonction lisse g sur U ne s'annulant pas sur $f^{-1}(0)$, les orbites de $H_{\acute{c}}(gf)$ sont celles de $H_c(f)\mid_{f^{-1}(0)}$.*

Preuve. Avec les mêmes notations que précédemment, on a :

i)- Si l'on note $X = H_c(f)$, on déduit, du fait que X est un champ de Lie associé à la forme de contact c, que

$$i_X df = i_X(df + i_X dc)$$

est un multiple de (ou colinéaire à) $f = i_X c$, donc dire que $f(x) = 0$ (i.e. $x \in f^{-1}(0)$) impliquera que $df_x(X(x)) = 0$, donc $X(x) \in (df_x)^{-1}(0) := T_x f^{-1}(0)$; ainsi, X est un champ de vecteurs tangents à $f^{-1}(0)$.

ii)- Les orbites de X vivent d'après i)- dans la sous-variété $f^{-1}(0)$ de M.

iii)- Comme c et $\acute{c}$ sont colinéaires (d'après le théorème de Darboux sur l'unicité de modèle local d'une forme de contact), sur $f^{-1}(0)$ on a : $gf = -\acute{c}(H_{\acute{c}}(gf)) = -\lambda c\,(H_{\acute{c}}(gf))$ et $f = -c(H_c(f))$ ce qui veut dire que les deux champs sont colinéaires et ont par conséquent les mêmes orbites.

■

2.2.4 Feuilletage caractéristique

Soit S une sous-variété de codimension 1 (ou une hypersurface) de M. On peut trouver un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de S par une famille d'ouverts dans M, tel que pour tout $i \in I$, on a :

1. Le sous-fibré $\mathcal{K}^*$ admet une section (ou forme de contact) c_i au-dessus de U_i.

2. Il existe une fonction lisse $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ ayant 0 pour valeur régulière et telle que $S \cap U_i = f_i^{-1}(0)$.

On déduit de la proposition précédente le

Corollaire 2.2.1 *Sous les précédentes hypothèses, l'ensemble* $\sum := \bigcup_{i \in I} (H_{c_i}(f_i))^{-1}(0)$ *est un fermé de* S *et ceci indépendamment du choix de recouvrement; de même, la formule*

$$\forall i \in I,\ \forall x \in U_i \cap (S \setminus \textstyle\sum),\ D_x := \mathbb{R}.H_{c_i}(f_i)(x)$$

définie ***un champ de droites tangentes à*** $S \setminus \sum$*, ce champ* D *ne dépendant que de* S *et la structure de contact* $\mathcal{K}$*.*

Définition 2.2.7 *La droite* D_x *est appelée* ***ligne caractéristique*** *de* $\mathcal{K}$ *en* x*, l'ensembles des courbes de* $S \setminus \sum$*, ayant les lignes caractéristiques pour tangentes, forme un feuilletage de dimension* 1*, c'est* ***le feuilletage caractéristique*** *de* S *par rapport à* $\mathcal{K}$*.*

Notation 2.2.1 *On note* $\mathcal{F}$ *ce feuilletage.*

Corollaire 2.2.2 *Sous les hypothèses du corollaire précédent, soit* $i : V \hookrightarrow M$ *une sous-variété vérifiant* $i^*\mathcal{K} = 0_{T^*V}$ *et* $V \subset S \setminus \sum$*. Si l'on a*

$$\forall x \in V, \quad D_x \not\subseteq T_x V,$$

alors le germe (de sous-variété W*)* $j : W \hookrightarrow S \setminus \sum$ *en* V *de l'ensemble* $\bigcup_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ F \cap V \neq \emptyset}} F$ *est un germe de sous-variété vérifiant* $j^*\mathcal{K} = 0_{T^*W}$ *et* $\dim W = 1 + \dim V$*.*

Démonstration. Pour tout $x_0 \in V$, soit U un voisinage ouvert de x_0 tel qu'il existe une forme de contact c au-dessus de U et que $U \cap S = f^{-1}(0)$ pour une fonction lisse $f : U \to \mathbb{R}$ ayant 0 pour valeur régulière.

Si $Z \supset U \cap V$ est une sous-variété de codimension 1 de U à laquelle l'hamiltonien de contact $X = H_c(f)$ n'est nulle part tangent (de telles sous-variétés existe d'après l'hypothèse), il existe un ouvert $U_1 \ni x_0$ de U de la forme

$$U_1 = \bigcup_{t \in J} \varphi_t^X(U_0),$$

où $J \ni 0$ est un intervalle ouvert, $U_0 \ni x_0$ est un ouvert de Z et φ_t^X est le flot de X. L'ensemble $W \cap U_1$ est le germe en $W_0 := U_1 \cap V = U_0 \cap V$ de la sous-variété $W_1 = \bigcup_{t \in J} \varphi_t^X(W_0)$, d'où $\dim W = 1 + \dim V$.

De plus, pour tout $x \in W_0$ et tout $t \in J$, si on note $y = \varphi_t^X(x)$, $c_y(X(y)) = 0$ d'après i)- de la proposition précédente et c_y s'annule sur $T_y\varphi_t^X(W_0) = T\varphi_t^X(T_xW_0)$ parce que W_0 est une variété intégrale de c et le flot φ_t^X est un automorphisme de contact. Par conséquent, c_y s'annule sur $T_yW_1 = T_y\varphi_t^X(W_0) \oplus \mathbb{R}.X(y)$. ■

Corollaire 2.2.3 *Sous les hypothèses du précédent corollaire, si* $\dim M = 2n+1$ *et* $\dim V = n-1$, *alors* W *est l'unique germe en* V *de sous-variété de Legendre vérifiant*

$$V \subset W \subset S.$$

Démonstration. L'existence de W est assurée par le corollaire précédent, pour l'unicité, soit $\acute{W}$ une autre sous-variété de Legendre vérifiant $V \subset \acute{W} \subset S$ et telle qu'il existe un ouvert U de S qui satisfait

$$\acute{W} \cap U \neq \emptyset \text{ et } \forall x \in U, \quad D_x \nsubseteq T_x\acute{W},$$

alors le germe en $\acute{W} \cap U$ de la réunion des courbes caractéristiques(i.e. dont les tangentes sont les droites caractéristiques) issus de $\acute{W} \cap U$ serait, d'après le corollaire précédent, un germe de variété intégrale de dimension $n+1$, ce qui est impossible car une sous-variété de Legendre est de dimension au plus n. ■

3

Equations aux dérivées partielles du premier ordre

3.1 Préliminaires

Définition 3.1.1 ***Une équation aux dérivées partielles du premier ordre*** *sur une variété différentiable M de dimension n est une équation de la forme*

$$H\left(q, u, \frac{\partial u}{\partial q}\right) = 0, \tag{E.D.P1}$$

où H est une fonction lisse réelle sur $J^1(M) = J^1(M, \mathbb{R})$.

Une solution de cette équation *est une fonction lisse φ sur un ouvert U de M vérifiant*

$$H \circ j^1\varphi = 0.$$

Remarque 3.1.1 *Si on identifie φ à son image $j^1\varphi$, nous dirons que φ est une solution de cette équation si $j^1\varphi(U)$ est une sous-variété de Legendre de $J^1(M)$ contenue dans l'hypersurface $H^{-1}(0)$.*

De cette remarque vient une autre définition plus moderne d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Définition 3.1.2 *Une équation aux dérivées partielles du premier ordre sur une variété de contact $(N, \mathcal{K})$ est une sous-variété E de codimension 1.*

Une solution locale S de E est une une sous-variété de Legendre de N contenue dans E.

Souvent, $N = J^1(M)$ et $\mathcal{K} = \mathcal{K}_M$, (en analogie avec $M = \mathbb{R}^n$), on rappel, le problème étant local, qu'on peut souvent se ramener à ce cas de figures.

3.2 Problème de Cauchy

3.2.1 Problème de Cauchy classique

Soit M une variété lisse de dimension n, on considère l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(t, q, u, \frac{\partial u}{\partial q}\right) = 0 \tag{E-H-J}$$

sur M, pour intervalle I de $\mathbb{R}$ dont l'intérieur $\mathring{I}$ contient 0 et H est une fonction réelle sur $I \times J^1(M)$. On note (t, q) les coordonnées dans $I \times M$.

Définition 3.2.1 ***Un problème de Cauchy*** *consiste à trouver la solution $\varphi(t, q)$ de l'équation (E-H-J) telle que $\varphi(0, q) = \varphi_0(q)$ pour une fonction φ_0 donnée.*

On note par $(t, q, u, \tau, p) = ((t, q), u, (\tau, p))$ les points de $J^1(I \times M)$, où $(t, q) \in I \times M$, $u \in \mathbb{R}$ et $(\tau, p) \in T^*_{(t,q)}(I \times M) \simeq \mathbb{R} \times T^*_q M$. Ainsi, la forme de contact standard de $J^1(I \times M)$, que l'on note $c_{I\times M}$, est donnée par

$$c_{I\times M} = du - \tau dt - pdq.$$

Notre problème de Cauchy peut-être formulé ainsi :

Trouver une sous-variété de Legendre L (l'image de $j^1\varphi$) contenue dans l'hypersurface

$$\tau + H(t, q, u, p) = 0$$

et qui passe par la sous-variété L_0, de dimension $(n-1)$, de $J^1(I \times M)$ définie par

$$\begin{cases} (q, u, p) = j^1\varphi_0(q), \\ \tau = -H(t, q, u, p) = -H(t, j^1\varphi_0(q)). \end{cases}$$

Ceci à un sens parce que L_0 est tangente à la structure de contact définie par $c_{I\times M}$ en tout point, ce qui équivaut au fait que L_0 soit une sous-variété isotrope (i.e. la restriction de $c_{I\times M}$ à L_0 est nulle).

3.2.2 Problème de Cauchy généralisé

Soit E une équation aux dérivées partielles du premier ordre sur une variété de contact $(M, \mathcal{K})$.

Définition 3.2.2 ***Un problème de Cauchy généralisé****, associé à cette équation, consiste à trouver une solution de(E) qui contient une sous-variété isotrope, de dimension $(n-1)$, L_0 donnée de M.*

Le problème est bien posé *si, pour tout $x \in L_0$, la ligne caractéristique D_x existe et non contenue dans $T_x L_0$.*

Exemple 3.2.1 *Un problème de Cauchy classique est toujours bien posé, la composante en t du champ de Lie sur $J^1(I \times M)$ engendré par l'hamiltonien $\tau + H(t,q,u,p)$ est égale à 1.*

Proposition 3.2.1 *Soit $L_0 \subset E$ un problème de Cauchy généralisé bien posé; une solution (géométrique) L de ce problème peut être obtenue on prenant le réunion de toutes les courbes caractéristiques passant par les points de L_0. De plus, toute solution d'un problème de Cauchy coïncide avec L au voisinage de L_0, toute solution de (E) est réunion des courbes caractéristiques.*

Preuve. Notre hypothèse implique que L est dimension n, comme le problème est local, on peut supposer que $\mathcal{K}$ est engendrée par une forme de contact c et que $E = H^{-1}(0)$ pour une fonction H ayant 0 comme valeur régulière. Si g^t est le flot de champ de vecteurs X dont l'hamiltonien est H, la sous-variété L consiste localement en tout les points $g^t(x)$ où $x \in L_0$ pour t assez petit et

$$T_x L = T_x g^t \left(T_x L_0\right) \oplus \mathbb{R} T_x g^t \left(X_x\right) = T_x g^t \left(T_x L_0\right) \oplus \mathbb{R} X_{g^t(x)}.$$

Comme ces deux sous-espaces sont contenues dans $\mathcal{K}_{g^t(x)}$ le premier parce que g^t est une transformation de contact et L_0 est isotrope, le deuxième parce que $c_{g^t(x)} X_{g^t(x)} = -H(g^t(x)) = 0$ (remarquant que si $x \in E$ alors $g^t(x) \in E$ car X est tangent à E).

Soit S une solution de E, on veut montrer que $\chi_x \subset T_x S$ pour tout $x \in S$. On suppose qu'il existe $a \in S$ tel que $\chi_a \nsubseteq T_a S$ alors on vient juste de montrer qu'au voisinage de a, S est une sous-variété isotrope de V de dimension $(n+1)$, ce qui est en contradiction avec la proposition suivante : ■

Proposition 3.2.2 *Toute sous-variété isotrope V d'une variété de contact de dimension $(2n+1)$ est de dimension au plus n.*

Preuve. Le problème étant local, on peut supposer que la structure de contact $\mathcal{K}$ est engendrée par une forme de contact c. si on note $i : L_0 \hookrightarrow V$, la relation $i^* c = 0$ induit $d\left(i^* c\right) = 0$ i.e. $i^* dc = 0$. Ainsi, pour tout $x \in V$ le sous-espace $T_x V$ est contenu dans $\mathcal{K}_x$ et $dc_x \mid_{T_x V \times T_x V} = 0$ ce qui veut dire que $T_x V \subset \left(T_x V\right)^{\perp}$ pour la forme bilinéaire non dégénérée dc_x sur $\mathcal{K}_x$ ainsi $\dim T_x V \leq \dim \left(T_x V\right)^{\perp} = 2n - \dim T_x V$. ■

Remarque 3.2.1 *Les singularités génériques des solutions d'un problème de Cauchy généralisé bien posé vont être étudiers dans les prochaines sections. Dans le cas classique de J^1M, leurs images par la projection canonique $(q,u,p) \mapsto (q,u)$ dans $J^0M = M \times R$ sont plus singulières que les courbes de niveau génériques, qui sont les projections des sous-variétés de Legendre non singulières.*

Corollaire 3.2.1 *Une solution lisse classique $\varphi : (t,q) \mapsto \varphi_t(q)$ d'un problème de Cauchy classique doit être au voisinage de $t = 0$ comme suit : La sous-variété $J^1\varphi_t(M)$ est l'image de $J^1\varphi_0(M)$ par la transformation de contact g_t obtenue en intégrant le champ de Lie autonome (i.e. indépendant de t) X_t dont l'hamiltonien est $H_t : (q,u,p) \mapsto H(t,q,u,p)$.*

Preuve. Comme cela a été mentionné auparavant, la composante en t du champ de Lie sur $J^1(I \times M)$ engendré par l'hamiltonien $\tau + H(t,q,u,p)$ est égale à 1; comme sa composante en (q,p) est $X_t(q,p)$, le flot

$$\tilde{g}_s : ((t,q), u, (\tau,p)) \longmapsto ((t_s,q_s), u_s, (\tau_s,p_s))$$

de X_t est défini par

$$\begin{cases} t_s = t + s, \quad \tau_s = -H(t+s, q_s, u_s, p_s) \\ (q_s, u_s, p_s) = g_s \circ g_t^{-1}(q,u,p) \,. \end{cases}$$

La solution géométrique de l'équation qui satisfait la condition initiale est localement l'union de tout les $\tilde{g}_t(0, q, \varphi_0(q), -H(0, j^1\varphi_0(q)), d\varphi_0(q))$. ■

Remarque 3.2.2 *Il y a deux difficultés à surmonter dans cette construction : $g_t(j^1\varphi_0(M))$, peut ne pas être défini pour tout t, et si cela été le cas, $g_t(j^1\varphi_0(M))$ peut-il être projeté faiblement (relativement à la composante en t) sur M ?. C'est pour ça qu'on va parler dans le prochain chapitre de familles génératrices.*

3.3 Intégrales singulières des E.D.P du premier ordre

3.3.1 Singularités des champs de Lie

On se donne une hypersurface E d'une variété de contact $(M, \mathcal{K})$.

Définition 3.3.1 ***Un point singulier*** *a de l'équation aux dérivées partielles E est un point $a \in E$ telle que $T_aE = \mathcal{K}_a$.*

On peut re-formuler cette définition ainsi :

Si c est une forme de contact qui définit la structure de contact $\mathcal{K}$ au voisinage de a et H est une fonction réelle ayant 0 pour valeur régulière telle que $E = H^{-1}(0)$ assez près de a, alors $X(a) = 0$, où $H = -c(X)$.

Ainsi, la classification des équations aux dérivées partielles d'ordre un (généralisée) au voisinage de leurs points singuliés consiste à classifier les champs de Lie au voisinage de leurs zéros.

Théorème 3.3.1 *(Guillemin-Schaeffer)*

Pour $i = 1, 2$, soient $(M_i, \mathcal{K}_i)$ une variété de contact et X_i un germe de champ Lie au point $a_i \in M_i$ ayant un zéro hyperbolique en ce point. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i)- *Les deux champs de Lie X_1 et X_2 sont conjugués modulo une transformation de contact, i.e. il existe une transformation de contact $h : (M_1, a_1) \to (M_2, a_2)$ telle que $X_2 = h^*X_1$.*

ii)- *Les deux champs sont formellements conjugués modulo une transformation de contact, i.e. il existe une transformation de contact $g : (M_1, a_1) \to (M_2, a_2)$ telle que X_2 et h^*X_1 ont un contact d'ordre infini au point a_1.*

Preuve. Il est évident que i)- implique ii)-; on suppose que ii)- soit vérifié, on peut remplacer h^*X_2 par X_2 et a_1 par 0 sans perdre de généralité.

Si on note par ρ_1^t,ρ_2^t les flots respectifs de X_1 et de X_2, si on note W^s la variété stable et W^u la variété instable associées à X_1. Il y a deux cas de figures : Si X_1 est dans le domaine de Poincaré, i.e. le germe de M_1 au point a_1 est dans W^s ou W^u, il facile de montrer que $\rho_1^{-t} \circ \rho_2^t$ (dans le cas attractif) ou $\rho_2^t \circ \rho_1^{-t}$ (dans le cas répulsif) converge lorsque $t \to +\infty$ vers h, qui est une transformation de contact et $\rho_2^t \circ \rho_1^{-t}(\rho_1^s(x)) = \rho_2^s\left(\rho_2^{-t-s} \circ \rho_1^{t+s}(x)\right)$, au passage à la limite $h(\rho_1^s(x)) = \rho_1^s(h(x))$.

Si X_1 est dans le domaine de Siegel, un argument similaire montre que le jet d'ordre infini $\left(j^\infty\left(\rho_2^t \circ \rho_1^{-t}\right)\right)|_{W^s}$ et $\left(j^\infty\left(\rho_2^t \circ \rho_1^{-t}\right)\right)|_{W^u}$ convergent lorsque $t \to +\infty$, leurs limites définis le jet le long $W^s \cup W^u$ d'un difféomorphisme h_1 ayant contact d'ordre infini avec l'identité au point a_1, tel que $h_1^*X_2$ et X_1 nt un contact d'ordre infini le long $W^s \cup W^u$; c'est le cas également pour $h_1^*\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_1$.

Ainsi, on peut définir une conjugaison h_2 entre X_1 et $h_1^*X_2$ comme solution de problème de Cauchy suivant : Soit une petite sphère S centrée en a_1 dans W^s, transverse à l'orbite de

X_1, choisissant un germe d'hypersurface $\widetilde{S}$ de S à W^s, et on décide que $h_2(x) = x$ pour $x \in \widetilde{S}$; si ρ_3^t est le flot $h_1^* X_2$, notre conjugaison est défini pour $x \notin \widetilde{S}$, par $h_2(x) = \rho_3^{\tau(x)} \circ \rho_1^{-\tau(x)}(x)$, où $\tau(x)$ est entièrement déterminé par $\rho_1^{-\tau(x)}(x) \in \widetilde{S}$. On peut montrer qu'on peut faire une extension par continuité à un difféomorphisme local $h_2 : (M_1, a_1) \to (M_1, a_1)$ ayant un contact d'ordre infini avec l'identité le long de $W^s \cup W^u$.

A présent, on a $h_2^* h_1^* X_2 = X_1$ mais, $h_2^* h_1^* \mathcal{K}_2 \neq \mathcal{K}_1$, on doit construire un autre germe de difféomorphisme h_3 qui préserve X_1 et tel que $h_3^* h_2^* h_1^* \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_1$ ce qui preuve notre théorème avec $h = h_1 \circ h_2 \circ h_3$. ■

3.3.2 Singularités des E.D.P du premier ordre et champs de Liouville

Soit E une E.D.P généralisée de premier ordre (i.e. une hypersurface E d'une variété M de dimension $2n+1$ munie d'une structure de contact $\mathcal{K}$ avec $a \in E$ tel que $T_a E = \mathcal{K}_a$).

De la proposition 5 on peut supposer que $E = J^1\mathbb{R}^n$ avec $a = 0$ et $\mathcal{K}$ c'est la structure de contact standard

$$du = pdq = \sum_{i=1}^{i=n} p_i dq_i.$$

Si $H : (J^1\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$ est une submersion locale tel que $E = H^{-1}(0)$ au voisinage de 0, la relation $T_a E = \mathcal{K}_a$ se traduit par $dH(0) \wedge du = 0$. Comme $dH(0) \neq 0$, alors le théorème des fonctions implicites implique qu'aux voisinages de 0, E est le graphe d'une fonction $u = g(p,q)$ vérifiant : $p(0) = g(0) = 0$ et $q(0) = dg(0) = 0$.

Si on prend (q,p) les coordonnées en E, les lignes de flot de champ de vecteurs

$$X_g : (q,p) \longmapsto (\frac{\partial g}{\partial p}, -\frac{\partial g}{\partial p} + p)$$

qui est la somme du champ Hamiltonien

$$dg : (q,p) \longmapsto (\frac{\partial g}{\partial p}, -\frac{\partial g}{\partial p})$$

et le standard champ de Liouville $X_0 : (q,p) \longmapsto (0,p)$.

On démontre facilement que X_g est un champ de Liouville (i.e. $\mathcal{L}_{X_g}\omega_{\mathbb{R}^n} = \omega_{\mathbb{R}^n}$).

Ainsi, tout champ de Liouville nulle en 0 est de cette forme.

Lemme 3.3.1 *On considère les deux germes de fonctions*

$$g_0, g_1 : (T^*\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0) \text{ vérifiant } dg_0(0) = dg_1(0) = 0.$$

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1) *Il existe un difféomorphisme de germes*

$$\widetilde{h} : (J^1\mathbb{R}^n, 0) \to (J^1\mathbb{R}^n, 0)$$

qui préserve la forme de contact $c_{\mathbb{R}^n} = du - pdq$ *et envoie le graphe de* g_0 *sur celui de* g_1.

2) *Il existe un difféomorphisme de germes*

$$h : (J^1\mathbb{R}^n, 0) \to (J^1\mathbb{R}^n, 0)$$

qui préserve la forme de contact $\omega_{\mathbb{R}^n} = dp \wedge dq$ *et envoie le champ* X_{g_0} *sur* X_{g_1}.

Remarque 3.3.1 *Ceci réduit la classification locale des équations aux dérivées partielles d'ordre 1 à celui de classification des champs de Liouville.*

Théorème 3.3.2 *Soit* $j = 0, 1$ *et soit* X_j *le germe en* $0 \in T^*\mathbb{R}^n$ *d'un champ de Liouville ayant un zéro hyperbolique en* 0. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *Les deux champs* X_0, X_1 *sont symplectiquement conjuguées. (i.e. Il existe un automorphisme symplectique* h *de* $T^*\mathbb{R}^n$ *qui préserve* $\omega_{\mathbb{R}^n}$ *tel que* $h^*X_1 = X_0$.

2) *Il existe un difféomorphisme local* $g : (T^*\mathbb{R}^n, 0) \to (T^*\mathbb{R}^n, 0)$ *tel que* g^*X_1 *et* X_0 *ont un contact infini en* 0 *et* $g^*\omega_{\mathbb{R}^n} - \omega_{\mathbb{R}^n}$ *s'annule en* 0.

Preuve. Il est claire que 1) implique 2).

On suppose 2) vérifiée, on appliquant **le théorème de Sternberg-Chen** voir [4], on trouve un germe de difféomorphisme $h_2 : (T^*\mathbb{R}^n, 0) \to (T^*\mathbb{R}^n, 0)$, ayant un contact d'ordre infini avec g en 0, tel que $h_2^*X_1 = X_0$; ainsi les deux formes symplectiques $\omega_1 := h_2^*\omega_{\mathbb{R}^n}$ et $\omega_0 := \omega_{\mathbb{R}^n}$ coïncident en 0, et on doit trouver un germe de difféomorphismes $h_1 : (T^*\mathbb{R}^n, 0) \to (T^*\mathbb{R}^n, 0)$ qui préserve X_0 et tel que $\omega_0 := h_1^*\omega_1$: l'assertion 1) est vraie pour $h := h_2 \circ h_1$.

Reste à construire h_1 avec la méthode du chemin : On pose $\omega_t := \omega_1 + t(\omega_1 - \omega_0)$, on cherche une isotopie symplectique $(h_t)_{0\leq t\leq 1}$ de $(T^*\mathbb{R}^n, \omega_{\mathbb{R}^n})$ vérifiant $h_0 = id_{T^*\mathbb{R}^n}$ et $h_t(0) = 0$, telle que $h_t^*\omega_t \equiv \omega_0$ pour tout t; une telle isotopie est obtenue en intégrant un champ de vecteurs dépendant du t, Y_t (i.e. $\frac{d}{dt}h_t = Y_t \circ h_t$), et la relation $h_t^*\omega_t \equiv \omega_0$ équivaut à $\frac{d}{dt}h_t^*\omega_t \equiv 0$, i.e. $\mathcal{L}_{Y_t}\omega_t + \omega_1 - \omega_0 \equiv 0$.

Comme ω_t est fermée, on a d'après la formule d'homotopie de Cartan $\mathcal{L}_{Y_t}\omega_t = d(\omega_t(Y_t))$, ainsi l'équation $\mathcal{L}_{Y_t}\omega_t + \omega_1 - \omega_0 \equiv 0$ se lis

$$d\left(\omega_t(Y_t) + (\omega_1 - \omega_0)\,X_0\right) \equiv 0.$$

Chaque ω_t étant non dégénérée au voisinage de 0 car $\omega_t(0) \equiv \omega_0(0)$, on peut définir le champ recherché par

$$\omega_t(Y_t) + (\omega_1 - \omega_0)\, X_0 \equiv 0;$$

qui doit satisfaire en plus $Y_t(0) \equiv 0$. ■

4

Familles génératrices

4.1 La construction principale

4.1.1 Fonctions génératrices

Introduction

On note $(q,p) \in T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Une application $f : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$ admet une primitive $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (i.e. $f = d\varphi$) si et seulement si $dq \wedge df(q) = 0$. Ce qui veut dire que la forme symplectique standard de $T^*\mathbb{R}^n$ induit la forme nulle sur $L = \{(q,p) \in T^*\mathbb{R}^n, p = f(q)\} = graphe(f)$.

Ce qui se traduit par le fait que L est une sous-variété Lagrangienne pour la structure symplectique canonique $(T^*\mathbb{R}^n, \omega_{\mathbb{R}^n})$.

La primitive φ de f est unique à une constante additive près et la relation $L = d\varphi(\mathbb{R}^n)$ peut être interprétée en disant que φ est la **fonction génératrice** de la sous-variété lagrangienne L.

Soit maintenant $h : (T^*\mathbb{R}^n, 0) \to (T^*\mathbb{R}^n, 0)$ une transformation symplectique. On note $((q,p),(Q,P))$ les coordonnées de $(T^*\mathbb{R}^n)^2$. La 2-forme $dQ \wedge dP - dq \wedge dp$ induit la 2-forme nulle sur le graphe de h, que l'on note Γ.

Si on introduit l'isomorphisme

$$\begin{array}{cccc} A: & (T^*\mathbb{R}^n)^2 & \longrightarrow & T^*(T^*\mathbb{R}^n) \\ & ((q,p),(Q,P)) & \longmapsto & ((Q,p),(P,q)) \end{array}$$

alors, la transformation h est symplectique si et seulement si $A(\Gamma)$ est une sous-variété lagrangienne de $T^*(T^*\mathbb{R}^n)$.

Si de plus, h est de classe C^1 assez proche de l'identité alors $A(\Gamma)$ est le graphe d'une fonction $F : T^*\mathbb{R}^n \to (T^*\mathbb{R}^n)^*$.

Ainsi, il existe une fonction réelle

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & T^*\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (Q,p) & \longmapsto & \Phi(Q_p), \end{array}$$

unique à une constante près, telle que $F = d\Phi$; autrement dit :

$$\begin{cases} q = \frac{\partial \Phi}{\partial p}(Q,p) \\ P = \frac{\partial \Phi}{\partial Q}(Q,p). \end{cases}$$

La fonction Φ est **la fonction génératrice** de h.

Cependant : Il existe une sous-variété lagrangienne de $T^*\mathbb{R}^n$ qui se projette faiblement sur $\mathbb{R}^n$ et une transformation symplectique de $T^*\mathbb{R}^n$ qui n'admet pas une fonction génératrice dans le sens défini précédemment.

De tels objets apparaissent dans l'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires d'ordre un.

Exemple 4.1.1 *La solution de problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,q) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)^2 = 0 \\ u(0,q) = u_0(q), \end{cases}$$

avec $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est obtenue comme suit :Le graphe de $du_t = d(q \longmapsto u(t,q))$ doit être $L_t = g_t(L_0)$, avec $g_t(q,p) = (q + tp, p)$. On peut vérifier qu'en général, tous les L_t ne sont pas globalement les graphes des fonctions.

Selon la situation considérée, L_t peut ou ne peut pas être une solution acceptable du problème.

1

Les sous-variétés lagrangiennes qui ne sont pas des graphes sont là pour justifier une extension de la notion de fonction généralisée.

Le même phénomène est vrai pour les transformations symplectiques près de l'identité.

Application à l'équation de Hamilton

Sur $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \{x = (q,p)\}$, on considère l'équation de Hamilton

$$\frac{dx}{dt} + \Gamma(t,x) = 0,$$

où
$$\begin{array}{rccl} \Gamma: & [0,T]\times T^*\mathbb{R}^n & \longrightarrow & T^*\mathbb{R}^n \\ & (t,x) & \longmapsto & \Gamma(t,x)=(\Gamma_1(t,x),\Gamma_2(t,x)). \end{array}$$

Avec
$$\begin{cases} \Gamma_1(t,x)=\Gamma_1(t,q,p)=-\frac{\partial H}{\partial p}(t,q,p) \\ \Gamma_2(t,x)=\Gamma_2(t,q,p)=\frac{\partial H}{\partial q}(t,q,p), \end{cases}$$

où
$$\begin{array}{rccl} H: & [0,T]\times T^*\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & H(t,x)=H_t(q,p) \end{array}$$

est une application continue telle que l'application $(q,p)\longmapsto dH_t(q,p)$ est uniformément lipschitzienne (i.e. $\exists c>0$, t.q $Lip(dH_t)\leq c$, $\forall t\in[0,T]$).

On appliquant le théorème 1.1.1 on peut trouver $\delta>0$ tel qu'on ait $Lip(\mathbf{R}_s^t-Id)<1/2$ pour $|t-s|<\delta$. Grâce au théorème d'inversion globale on a :

Proposition 4.1.1 *Soient Q_s^t, P_s^t les composantes de $\mathbf{R}_s^t$.*

Pour $|t-s|<\delta$, l'application
$$\begin{array}{rccl} g_s^t: & T^*\mathbb{R}^n & \longrightarrow & T^*\mathbb{R}^n \\ & (q,p) & \longmapsto & g_s^t(q,p)=(Q_s^t(q,p),p) \end{array}$$
est un difféomorphisme de $T^*\mathbb{R}^n$ sur lui même.

Définition 4.1.1 ***Fonctions génératrices***

Pour $|t-s|<\delta$, on définit une fonction $S_s^t: T^*\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ par
$$\begin{aligned} S_s^t(g_s^t(q,p)) \ :\ &= p(q-Q_s^t(q,p)) + \\ &\int_s^t \left(P_s^\tau(q,p)\frac{d}{d\tau}Q_s^\tau(q,p)-H_\tau(\mathbf{R}_s^\tau(q,p))\right)d\tau. \end{aligned} \tag{F-G}$$
On l'appelle la fonction génératrice de $\mathbf{R}_s^t$.

Cette définition est justifiée par le théorème qui suit.

Théorème 4.1.1 *Avec les mêmes notations et pour $|t-s|<\delta$, on a :*

1) *Le graphe de $\mathbf{R}_s^t$ est l'ensemble des $((q,p),(Q,P))\in(T^*\mathbb{R}^n)^2$ vérifiant*
$$\begin{cases} q=Q+\frac{\partial}{\partial Q}S_s^t(Q,p) \\ P=p+\frac{\partial}{\partial p}S_s^t(Q,p). \end{cases}$$

2) *Les points critiques de* S_s^t *sont les images des points fixes de* $\mathbf{R}_s^t$ *par* g_s^t.

3) *Les points critiques de la restriction de* S_s^t *à* $\mathbb{R}^n \times \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ *sont les* $g_s^t(q,0)$ *tels que* $P_s^t(q,0) = 0$. *Il sont en bijection avec* $(\mathbb{R}^n \times \{0_{\mathbb{R}^n}\}) \cap \mathbf{R}_s^t(\mathbb{R}^n \times \{0_{\mathbb{R}^n}\})$.

4) *On a*

$$\left(\frac{d}{dt} S_s^t\right) \circ g_s^t = -H_t \circ \mathbf{R}_s^t.$$

Preuve. Pour $|t-s| < \delta$, on rappelle que $S_s^t(g_s^t(q,p)) = S_s^t(Q,p)$.

1) On a

$$d(P_s^\tau(q,p)\frac{d}{d\tau}Q_s^\tau(q,p))(\delta q, \delta p) = \delta P_s^\tau \frac{d}{d\tau} Q_s^\tau + P_s^\tau \frac{d}{d\tau}(\delta Q_s^\tau),$$

puis

$$\begin{aligned} dH_\tau(\mathbf{R}_s^\tau(q,p))(\delta q, \delta p) &= dH_\tau(d\mathbf{R}_s^\tau(q,p)(\delta q, \delta p)) = dH_\tau(\delta P_s^\tau, \delta Q_s^\tau) \\ &= \frac{\partial H_\tau}{\partial P}\delta P_s^\tau + \frac{\partial H_\tau}{\partial Q}\delta Q_s^\tau \\ &= \left(\frac{d}{d\tau}Q_s^\tau\right).\delta P_s^\tau - \left(\frac{d}{d\tau}P_s^\tau\right).\delta Q_s^\tau; \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} d(P_s^\tau(q,p)\frac{d}{d\tau}Q_s^\tau(q,p) - H_\tau(\mathbf{R}_s^\tau(q,p))) &= P_s^\tau \frac{d}{d\tau}(\delta Q_s^\tau) + \left(\frac{d}{d\tau}P_s^\tau\right).\delta Q_s^\tau \\ &= \frac{d}{d\tau}\left(P_s^\tau.\delta Q_s^\tau\right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} d\left(\int_s^t \left(P_s^\tau(q,p)\frac{d}{d\tau}Q_s^\tau(q,p) - H_\tau(\mathbf{R}_s^\tau(q,p))\right)d\tau\right)(\delta q, \delta p) &= \int_s^t \frac{d}{d\tau}\left(P_s^\tau.\delta Q_s^\tau\right)d\tau \\ &= P_s^t.\delta Q_s^t - p\delta q. \end{aligned}$$

D'où

$$d\left(\int_s^t \left(P_s^\tau(q,p)\frac{d}{d\tau}Q_s^\tau(q,p) - H_\tau(\mathbf{R}_s^\tau(q,p))\right)d\tau\right) = P_s^t.dQ_s^t - pdq. \tag{1}$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned} d\left(S_s^t \circ g_s^t\right)(q,p) &= p(dq - dQ_s^t) + (q - Q_s^t)dp + P_s^t.dQ_s^t - pdq \qquad (2) \\ &= \left(P_s^t - p\right)dQ_s^t + (q - Q_s^t)dp. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} d\left(S_s^t \circ g_s^t\right)(q,p) &= dS_s^t\left(g_s^t(q,p)\right) = dS_s^t\left(Q_s^t, p\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial Q}S_s^t(Q_s^t,p)dQ_s^t + \frac{\partial}{\partial p}S_s^t(Q_s^t,p)dp \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial Q} S_s^t(Q_s^t, p) = P_s^t - p \\ \frac{\partial}{\partial p} S_s^t(Q_s^t, p) = q - Q_s^t. \end{cases}$$

2) De cette relation on déduit que si $\frac{\partial}{\partial Q} S_s^t(Q_s^t, p) = \frac{\partial}{\partial p} S_s^t(Q_s^t, p) = 0$, ceci entraînerait que $P_s^t = p$ et $Q_s^t = q$; et inversement. Ce qui se traduit par : Le couple (q, p) est un point fixe de $\mathbf{R}_s^t$, son image (Q_s^t, p) par g_s^t est un point critique de S_s^t.

3) Même raisonnement que 3) avec $p = 0$.

4) On dérivant par rapport à t les deux membres de la relation $(F - G)$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_s^t(Q_s^t, p) + \frac{d}{dt} Q_s^t . \frac{\partial}{\partial Q} S_s^t(Q_s^t, p) &= (-p + P_s^\tau) \frac{d}{dt} Q_s^t - H_t(Q_s^t, P_s^t) \\ &= \frac{\partial}{\partial Q} S_s^t(Q_s^t, p) \frac{d}{dt} Q_s^t - H_t(Q_s^t, P_s^t), \end{aligned}$$

ce qui nous donne $\frac{d}{dt} S_s^t(g_s^t(q, p)) = -H_t(\mathbf{R}_s^t(q, p))$.

■

4.1.2 Familles génératrices

Choisissant une subdivision $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{N+1} = T, N \in \mathbb{N}$ de $[0, T]$ vérifiant

$$\max_{0 \le j \le N} \{t_{j+1} - t_j\} < \delta$$

et définissons

$$\begin{array}{rccc} S : & (T^*\mathbb{R}^n)^{N+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \left((Q_j, p_j)_{0 \le j \le N}\right) & \longmapsto & S\left((Q_j, p_j)_{0 \le j \le N}\right), \end{array}$$

avec

$$S\left((Q_j, p_j)_{0 \le j \le N}\right) := \sum_{j=0}^{j=N} \left(S_{t_j}^{t_{j+1}}(Q_j, p_j) + p_{j+1}(Q_{j+1} - Q_j)\right).$$

Lemme 4.1.1 *Si l'on définit $q_j = q_j(Q_j, p_j) \in \mathbb{R}^n$ et $P_j = P_j(Q_j, p_j) \in (\mathbb{R}^n)^*$ par*

$$\begin{cases} (Q_j, p_j) = g_{t_j}^{t_{j+1}}(q_j, p_j) \\ (Q_j, P_j) = \mathbf{R}_{t_j}^{t_{j+1}}(q_j, p_j), \end{cases}$$

on a

$$dS = \sum_{j=0}^{j=N} \left((P_j - p_{j+1}) \, dQ_j + (q_{j+1} - Q_j) \, dp_{j+1}\right). \tag{3}$$

Preuve. Il suffit d'appliquer la relation (2) à chaque intervalle $[t_j, t_{j+1}]$, puis faire la somme sur $0 \leq j \leq N$. ■

Théorème 4.1.2 *Posons* $(Q, p) = (Q_0, p_N)$, $v = (Q_j, p_{j+1})_{0 \leq j \leq N}$ *et considérons* S *comme fonction de* (Q, p, v). *Le graphe de* $\mathbf{R}_0^T$ *est alors*

$$graphe(\mathbf{R}_0^T) = \left\{ \left(\left(Q + \frac{\partial S}{\partial p}(Q, p, v), p \right), \left(Q, p + \frac{\partial S}{\partial Q}(Q, p, v) \right) \right) \right\}, \tag{4}$$

et chaque point du graphe correspond à un unique zéro de $\frac{\partial S}{\partial v}$*: on dit que* S *est une* ***famille génératrice*** *(ou* ***phase génératrice****) de* $\mathbf{R}_0^T$. *De plus,*

1. *Les points critiques de* S *sont en bijection avec les points fixes de* $\mathbf{R}_0^T$.

2. *Les points critiques de* $S \mid_{\{p=0\}}$ *sont en bijection avec* $(\mathbb{R}^n \times \{0_{\mathbb{R}^n}\}) \cap \mathbf{R}_0^T (\mathbb{R}^n \times \{0_{\mathbb{R}^n}\})$.

Démonstration. D'après le lemme précédent, l'équation $\frac{\partial S}{\partial v}(Q, p, v) = 0$ et équivalente à $(Q_j, P_j) = (q_{j+1}, p_{j+1})$, ce qui signifie que $(q_{j+1}, p_{j+1}) = \mathbf{R}_{t_j}^{t_{j+1}}(q_j, p_j)$, $0 \leq j < N$.

Puisque $\mathbf{R}_0^{t_{j+1}} = \mathbf{R}_{t_j}^{t_{j+1}} \circ \mathbf{R}_{t_{j-1}}^{t_j} \circ ... \circ \mathbf{R}_{t_1}^{t_2} \circ \mathbf{R}_0^{t_1}$ on aura

$$(q_{j+1}, p_{j+1}) = \mathbf{R}_0^{t_{j+1}}(q_0, p_0), \; 0 \leq j < N$$

et donc pour $j = N - 1$, $(Q_N, P_N) = \mathbf{R}_0^T(q_0, p_0)$. A tout point $((q, p), (Q, P))$ de graphe de $\mathbf{R}_0^T$ est associé l'unique zéro de $\frac{\partial S}{\partial v}$ défini par

$$(Q_j, P_j) = g_{t_j}^{t_{j+1}} \left(\mathbf{R}_0^{t_{j+1}}(q, p) \right), \; 0 \leq j \leq N.$$

Les deux assertions résultent immédiatement de précédent théorème. ■

4.1.3 Hamiltoniens et familles génératrices quadratiques à l'infini

Théorème 4.1.3 *Soit* K *un autre hamiltonien vérifiant les hypothèses que* H*, en choisissant* δ *assez petit pour convenir à* H *et* K *à la fois, de manière à considérer la même subdivision pour* K *et* H*. Soient* A_s^t*,* A *l'analogue pour* K *de* S_s^t*,* S*.*

Si $(t, q, p) \longmapsto d(H_t - K_t)(q, p)$ *est bornée, il en va de même des applications* $d(S_s^t - A_s^t)$*,* $|s - t| < \delta$ *et de* $d(S - A)$*.*

Démonstration. Tout d'abord, si l'on note par $\mathbf{B}_s^t$ l'analogue pour K de $\mathbf{R}_s^t$, montrons dans ce cas que les applications $(\mathbf{R}_s^t - \mathbf{B}_s^t)$ sont uniformément bornées pour $|s - t| < \delta$: en effet, on peut supposer que $s \le t$; notons

$$\begin{cases} c := \sup Lip(dK_t), & k := \sup |d(H_t - K_t)|\,, \\ \mathbf{R}_s^t = \mathbf{R}_s^t(q,p), & \mathbf{B}_s^t = \mathbf{B}_s^t(q,p), \\ \Delta_t := (-\partial_2 K_t, \partial_1 K_t). & \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{R}_s^t - \mathbf{B}_s^t\right| &= \left|\int_s^t \left(-\Gamma_\tau(\mathbf{R}_s^\tau) + \Delta_\tau(\mathbf{B}_s^\tau)\right) d\tau\right| \\ &\le \int_s^t \left|(-\Gamma_\tau + \Delta_\tau)(\mathbf{R}_s^\tau)\right| d\tau + \int_s^t \left|-\Delta_\tau(\mathbf{R}_s^\tau) + \Delta_\tau\,(\mathbf{B}_s^\tau)\right| d\tau \\ &\le k(t-s) + c\int_s^t \left|\mathbf{R}_s^\tau - \mathbf{B}_s^\tau\right| d\tau, \end{aligned}$$

ainsi

$$\left|\mathbf{R}_s^t - \mathbf{B}_s^t\right| - c\int_s^t \left|\mathbf{R}_s^\tau - \mathbf{B}_s^\tau\right| d\tau \le k(t-s),$$

ou bien

$$\left(\left|\mathbf{R}_s^t - \mathbf{B}_s^t\right| - c\int_s^t \left|\mathbf{R}_s^\tau - \mathbf{B}_s^\tau\right| d\tau\right) e^{-ct} \le (t-s)ke^{-ct}$$

et par conséquent

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-ct}\int_s^t \left|\mathbf{R}_s^\tau - \mathbf{B}_s^\tau\right| d\tau\right) \le (t-s)ke^{-ct}.$$

D'après la formule de Riemann, ceci entraîne

$$e^{-ct}\int_s^t \left|\mathbf{R}_s^\tau - \mathbf{B}_s^\tau\right| d\tau \le \int_s^t (\tau - s)ke^{-c\tau}d\tau,$$

ou bien

$$\int_s^t \left|\mathbf{R}_s^\tau - \mathbf{B}_s^\tau\right| d\tau \le k\int_s^t (\tau - s)e^{c(t-\tau)}d\tau.$$

On dérivant par rapport à t on trouve

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{R}_s^t - \mathbf{B}_s^t\right| &\le k.\frac{d}{dt}\left(e^{ct}\int_s^t (\tau - s)e^{-c\tau}d\tau\right) \\ &\le k\left(e^{ct}(t-s)e^{-ct} + ce^{ct}\int_s^t (\tau - s)e^{-c\tau}d\tau\right) \\ &\le k(t-s) + ke^{ct}\left(\left[-(\tau - s)e^{-c\tau}\right]_s^t + \int_s^t e^{-c\tau}d\tau\right) \\ &\le k(t-s) - k(t-s) + ke^{ct}.\frac{e^{-cs} - e^{-ct}}{c}, \end{aligned}$$

donc pour $0 \le t - s \le \delta$, on a

$$\left|\mathbf{R}_s^t - \mathbf{B}_s^t\right|_\infty \le k.\frac{e^{c(t-s)} - 1}{c} \le k\frac{e^{c\delta} - 1}{c}.$$

Après avoir démontré que les $(\mathbf{R}_s^t - \mathbf{B}_s^t)$ sont uniformément bornées pour $0 \leq t - s \leq \delta$, on note f_s^t l'analogue des difféomorphismes g_s^t pour K; on appliquant le théorème d'inversion globale en on déduit

$$\left|\left(g_s^t\right)^{-1} - \left(f_s^t\right)^{-1}\right|_\infty \leq 2\left|g_s^t - f_s^t\right|_\infty .$$

La formule (2) s'écrit également

$$dS_s^t(Q,p) = \left(pr_2 \circ \mathbf{R}_s^t \circ \left(g_s^t\right)^{-1}(Q,p) - p\right) dQ + \left(pr_1 \circ \left(g_s^t\right)^{-1}(Q,p) - Q\right) dp,$$

on a donc

$$\begin{aligned} d(S_s^t - A_s^t) &= \left(pr_2 \circ \left(\mathbf{R}_s^t \circ \left(g_s^t\right)^{-1} - \mathbf{B}_s^t \circ \left(f_s^t\right)^{-1}\right)\right) dQ \\ &\quad + \left(pr_1 \circ \left(\left(g_s^t\right)^{-1} - \left(f_s^t\right)^{-1}\right)\right) dp, \end{aligned}$$

et l'on conclut grâce au fait que, $\left|\left(g_s^t\right)^{-1} - \left(f_s^t\right)^{-1}\right|_\infty$, $Lip(\mathbf{R}_s^t)$ et $|\mathbf{R}_s^t - \mathbf{B}_s^t|_\infty$ étant uniformément bornées pour $|s-t| < \delta$, il en va de même que

$$\left|\mathbf{R}_s^t \circ \left(g_s^t\right)^{-1} - \mathbf{B}_s^t \circ \left(f_s^t\right)^{-1}\right|_\infty \leq Lip(\mathbf{R}_s^t)\left|\left(g_s^t\right)^{-1} - \left(f_s^t\right)^{-1}\right|_\infty + \left|\mathbf{R}_s^t - \mathbf{B}_s^t\right|_\infty ;$$

ce qui achève la démonstration. ■

Proposition 4.1.2 *Lorsque les K_t sont des formes quadratiques, il en vas de même des A_s^t et de A.*

Preuve. Les équations de Hamilton associées à K étant linéaires, les $\mathbf{B}_s^t$ et f_s^t le sont aussi. ■

Définition 4.1.2 *On considère un Hamiltonien quadratique K.*

*On que **l'hamiltonien H est quadratique à l'infini** lorsque $d(S - A)$ est bornée; on dit également que S est une **famille génératrice quadratique à l'infini**.*

4.2 Application aux tores et aux espaces euclidiens

4.2.1 Fonctions phases

Définition 4.2.1 ***Une fonction phase** sur $\mathbb{R}^n$ est une fonction $F : \mathbb{R}^n \times E \to \mathbb{R}$ de classe C^2, où E est un espace vectoriel de dimension finie.*

Si F est $\mathbb{Z}^n$-périodique par rapport au premier facteur, elle définit une fonction $f : T^n \times E \to \mathbb{R}$, où $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$; on dit alors que f est **une phase** sur T^n.

Exemple 4.2.1 *On prend* $E = \mathbb{R}$ *et* $n = 2$, *et* $F((y_1, y_2), x) = x \cos 2\pi y_1 + x^2 \sin 2\pi y_2$, *est une phase sur* $\mathbb{R}^2$.

Définition 4.2.2 *Les points critiques de* f *sont les images des points critiques de* F *par la projection canonique* $\pi : \mathbb{R}^n \times E \to T^n \times E$.

Un point critique $\pi(a)$ *de* f *(où* a *est un point critique de* F*) est non dégénérée lorsque* $d^2F(a)$, *vue comme une application de* $\mathbb{R}^n \times E$ *dans* $(\mathbb{R}^n \times E)^*$, *est un isomorphisme.*

Définition 4.2.3 ***<u>Phase quadratique à l'infini</u>***

Une phase sur $M = T^n$ *ou* $\mathbb{R}^n$ *est dite quadratique à l'infini (ou phase quadratique, tout simplement) si il existe une forme quadratique non dégénérée* K *sur* E *telle que l'application*

$$M \times E \ni (x, v) \longmapsto \frac{\partial F}{\partial v}(x, v) - dK(v)$$

soit bornée.

Nous admettrons le résultat suivant :

Théorème 4.2.1 *Le nombre de points critiques d'une phase quadratique sur* T^n *est strictement supérieur à* n *dans tous les cas, et au moins égal à* 2^n *quand tous ses points critiques sont non dégénéré.*

4.2.2 Le théorème de Conley-Zehnder

Définition 4.2.4 *Un réseau* $\mathbf{Z}$ *de* $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*, +)$ *tel qu'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels entre* $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ *et* $\mathbb{R}^{2n}$ *qui envoie* $\mathbf{Z}$ *sur* $\mathbb{Z}^{2n}$.

On considère $H : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant

$$H_t(x + m) = H_t(x), \ \forall m \in \mathbf{Z},$$

ce qui s'exprime en disant que H est $\mathbf{Z}$-périodique. On suppose que H satisfait aux conditions de la section précédente, on a :

Proposition 4.2.1 i)- *Pour* $|t - s| < \delta$, *les applications* $\mathbf{R}_s^t$, g_s^t *et* S_s^t *sont* $\mathbf{Z}$*-périodiques.*

ii)- *L'application* S *vérifie : pour tout* $(l, m) \in \mathbf{Z}$

$$S\left(((Q_j, p_j) + (l, m))_{0 \le j \le N}\right) = S\left((Q_j, p_j)_{0 \le j \le N}\right).$$

Preuve.

i)- On a $\mathbf{R}_s^t(q+l,p+m)$ et $\mathbf{R}_s^t(q,p)$ sont deux solutions de la même équations différentielles ayant la même valeurs au point $t=s$, par unicité $\mathbf{R}_s^t(q+l,p+m)=\mathbf{R}_s^t(q,p)$. Ce qui entraînerai également la périodicité de g_s^t et S_s^t.

ii)- Comme les S_s^t sont $\mathbf{Z}$-périodiques, reste à démontrer que

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{j=N}(p_{j+1}+m)\,(Q_{j+1}-Q_j) &= \sum_{j=0}^{j=N}p_{j+1}\,(Q_{j+1}-Q_j)+\sum_{j=0}^{j=N}m\,(Q_{j+1}-Q_j)\\ &= \sum_{j=0}^{j=N}p_{j+1}\,(Q_{j+1}-Q_j)+m(Q_{N+1}-Q_0)\\ &= \sum_{j=0}^{j=N}p_{j+1}\,(Q_{j+1}-Q_j)\,,\end{aligned}$$

et le résultat en découle.

■

Un changement de variables

Pour $1\leq j\leq N$, on pose

$$\begin{cases} x_j=Q_{j+1}-Q_j, & w=(x_j,y_j)_{1\leq j\leq N}\\ y_j=p_j-p_0, & (Q,p)=(Q_N;p_0).\end{cases}$$

Proposition 4.2.2 *La fonction F définie par*

$$F(Q,p,w):=S\left((Q_j,p_j)_{0\leq j\leq N}\right)$$

est une famille génératrice de $\mathbf{R}_0^1$; elle est $\mathbf{Z}$-périodique par rapport à (Q,p) d'après la proposition précédente et c'est une phase quadratique non dégénérée sur l'espace $\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n)^*$ (avec $E=\left(\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n)^*\right)^N$); plus précisément, si l'on pose

$$F_0(Q,p,w)=\sum_{j=1}^{j=N}y_jx_j,$$

l'application $d(F-F_0)$ est bornée.

Preuve. On applique le théorème 4.1.3, on prenant $K = 0$, la famille génératrice associée est

$$\sum_{j=0}^{j=N} p_{j+1}(Q_{j+1} - Q_j);$$

comme

$$\begin{aligned} p_0(Q_0 - Q_N) &= -p_0 \sum_{j=0}^{j=N} (Q_{j+1} - Q_j) \\ &= -p_0 \sum_{j=0}^{j=N} x_j, \end{aligned}$$

en on déduit que

$$\begin{aligned} p_0(Q_0 - Q_N) + \sum_{j=0}^{j=N} p_{j+1}(Q_{j+1} - Q_j) &= -p_0 \sum_{j=0}^{j=N} x_j + \sum_{j=0}^{j=N} (p_0 + y_j)x_j \\ &= \sum_{j=1}^{j=N} y_j x_j. \end{aligned}$$

■

Corollaire 4.2.1 *(Conley-Zehnder)*

Sous les hypothèses précédentes, $\mathbf{R}_0^1$ *a au moins* $2n+1$ *points fixes ne se ramenant pas les uns aux autres par translation dans le réseau* $\mathbf{Z}$*, et au moins* 2^{2n} *lorsqu'ils sont non dégénérées (i.e. lorsque* 1 *n'es jamais valeur propre de* $d\mathbf{R}_0^1$ *en un point fixe).*

Preuve. Les points fixes de $\mathbf{R}_0^1$ sont en bijection avec les points critiques de sa famille génératrice F, qui est, d'après la proposition précédente, une phase quadratique à l'infini sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$; la $\mathbf{Z}$-périodicité en plus signifie que F provient d'une phase quadratique à l'infini f sur le tore $T^{2n} = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* / \mathbf{Z}$, le corollaire en découle en appliquant à f le théorème 4.2.1 en plus de lemme qui va suivre. ■

Lemme 4.2.1 *Les points critiques non dégénérés de* $\mathbf{R}_0^1$ *sont en bijection avec les points critiques non dégénérés de* F*.*

Démonstration. D'après la formule (3), dire qu'un point critique de F est non dégénéré signifie que la différentielle de l'application

$$(Q_j, p_j)_{0 \leq j \leq N} \longmapsto (q_{j+1} - Q_j, P_j - p_{j+1})_{0 \leq j \leq N}$$

est bijective, c'est à dire que la différentielle de

$$\Phi : (z_0, z_1, ..., z_N) \longmapsto \left(\left(z_0 - \mathbf{R}_{t_N}^{t_{N+1}}(z_N) \right), \left(z_{j+1} - \mathbf{R}_{t_j}^{t_{j+1}}(z_j) \right)_{0 \leq j \leq N} \right)$$

au point $z = (z_0, z_1, ..., z_N) \in (\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*)^{N+1}$ (où Φ s'annule) est bijective.

Comme $d\Phi(z)$ est un endomorphisme, pour qu'elle soit bijective, il faut et il suffit qu'elle soit injective.

Or, $Z = (Z_0, Z_1, ..., Z_N) \in \ker d\Phi(z)$ est équivaut au système

$$\begin{cases} Z_0 = d\mathbf{R}_{t_N}^{t_{N+1}}(z_N).Z_N \\ Z_{j+1} = d\mathbf{R}_{t_j}^{t_{j+1}}(z_j).Z_j, \quad 0 \leq j \leq N. \end{cases}$$

Puis grâce à la relation de transition $\mathbf{R}_\tau^t \circ \mathbf{R}_s^\tau = \mathbf{R}_s^t$ et à la règle de dérivation des fonctions composées, on a

$$\begin{cases} Z_0 = d\mathbf{R}_0^1(z_0).Z_0 \\ Z_j = d\mathbf{R}_0^{t_j}(z_0).Z_0, \quad 0 \leq j \leq N. \end{cases}$$

Si 1 n'est pas une valeur propre de $d\mathbf{R}_0^1(z_0)$ au point fixe z_0 et donc z_0 est un point fixe non dégénéré de $\mathbf{R}_0^1$. ■

4.2.3 Un théorème d'intersection

On reprend les données du paragraphe précédent, on peut supposer que H soit seulement $\mathbb{Z}^n$-périodique par rapport à la première variable $q \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 4.2.2 *Sous les hypothèses précédentes, $\mathbb{R}^n \times \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et son image par $\mathbf{R}_0^1$ ont au moins $(n+1)$ points d'intersection ne se ramenant pas les uns aux autres par translation dans $\mathbb{Z}^n \times \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, et au moins 2^n lorsque ces intersections sont toutes transverses.*

Démonstration. Comme $\mathbb{R}^n \ni q \longmapsto \mathbf{R}_0^1(q, 0)$ est $\mathbb{Z}^n$-périodique, elle est bornée.

On multipliant tous les H_t par une même fonction plateau en p au voisinage de zéro, on peut se ramener au cas où $H_t(q,p) = 0$ quand la norme de p est assez grande. Ainsi, la famille génératrice F associée à H est quadratique à l'infini (avec $K = 0$) et elle vérifie les les hypothèses du théorème 4.1.1. En effectuant les mêmes changements de variables que pour le théorème de Conley-Zehnder, on arrive à une famille génératrice F dont la restriction $G(Q,w)$ à $\{p = 0\}$ est $\mathbb{Z}^n$-périodique par rapport à Q et induit donc une phase quadratique à l'infini sur le tore $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, en on déduit donc, en appliquant le théorème 4.2.1, que G a au moins $n+1$ point critiques ne se ramenant pas les uns aux autres par translation dans $\mathbb{Z}^n \times \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, et au moins 2^n lorsque ces ils sont tous non dégénérées.

D'après 2. du théorème 4.1.2, et l'analogue du lemme précédent on conclue la démonstration. ■

4.2.4 Un résultat de Hofer

On considère les équations de Hamilton sur $T^*\mathbb{R}^n$ associées au hamiltonien quadratique

$$K_0(q,p) := \sum_{j=1}^{j=n}(q_j^2 + p_j^2),$$

elles définissent le flot

$$\rho_{K_0}^t(q,p) = (q\cos(2t) + p\sin(2t), p\cos(2t) - q\sin(2t)). \tag{5}$$

On considère un autre Hamiltonien H sur $T^*\mathbb{R}^n$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Il est identiquement nul au voisinage de zéro et il est nulle part négatif.

2. Il vaut $\frac{2\pi}{3}K_0$ en dehors d'un compact.

Ce qui nous permet de dire que $H_t := H$ est quadratique à l'infini et qu'il vérifie les hypothèses du théorème 4.1.1.

On note ρ_H^t le flot que définit H et l'on s'intéresse aux points fixes du difféomorphisme ρ_H^1 (i.e. aux solutions périodiques de période 1 des équations de Hamilton associées à H). Plus précisément, on s'intéresse à l'action

$$\mathcal{A}(a) := \int_0^1 \left(P^\tau(a)\frac{d}{d\tau}Q^\tau(a) - H(\rho_H^\tau(a))\right)d\tau$$

le long d'une telle solution. On a le :

Théorème 4.2.3 *(Hofer)*
Le difféomorphisme ρ_H^1 possède au moins un point fixe a vérifiant $\mathcal{A}(a) > 0$.

Preuve. On choisissant $\delta > 0$ assez petit pour convenir aux trois Hamiltoniens H, K et 0, nous pouvons donc considérer les trois familles génératrices S_H, S_K et S_0 associées à ses hamiltoniens. On effectue les mêmes changements de variables afin d'obtenir trois familles génératrices F_H, F_K et F_0 des variables (Q,p,w). Nous savons déjà que

$$F_0(Q,p,w) = \sum_{j=1}^{j=n} y_j x_j$$

et nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.2.2 i)- *La fonction $F_H - F_0$ est nulle aux voisinage de zéro et elle négative ou nulle.*

ii)- *La forme quadratique $F_K - F_0$ est définie positive.*

iii)- *La forme quadratique F_K est non dégénérée et la somme de son indice et de celui de $(-F_0)$ étant égale à $2n(N+2)$ est strictement supérieur à la dimension de l'espace ambiant qui vaut $2n(N+1)$.*

Démonstration. (du lemme)

On a

$$S_H - S_0 = \sum_{j=1}^{j=N} S_{t_j}^{t_{j+1}}(Q_j, p_j), \tag{(*)}$$

comme les $S_{t_j}^{t_{j+1}}$ sont nulles au voisinage de zéro (d'après la première propriété que satisfait H), puis en appliquant l'assertion 4) du théorème 4.1.1 on en déduit que les deux hamiltoniens $F_H - F_0$ et $F_K - F_0$ sont négatives.

Dire que F_K est définie négative, signifie donc d'après la deuxième assertions du même théorème que $\rho_K^{t_{j+1}-t_j}$ n'a pas de point fixe autre que zéro; ce qui est vérifié car $t_{j+1} - t_j$ est assez petit.

Pour $iii)-$, remarquons que, pour $|t-s| < \delta$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction S_s^t qui correspond à λK_0 n'est autre que la fonction $S_0^{\lambda(t-s)}$, d'où l'on déduit par 4) du théorème 4.1.1 que la forme quadratique

$$\frac{d}{d\lambda} S_{\lambda K_0}$$

est définie négative quel que soit $\lambda \leq \frac{3\pi}{2}$; il en résulte que l'indice de $S_{\lambda K_0}$ augmente de $2n$ chaque fois de λ traverse un point de $\pi\mathbb{Z}$, ce sont, d'après (5), les valeurs de λ pour lesquelles $S_{\lambda K_0}$ est non dégénérée.(autrement dit, admet des points critiques), ces points critiques de $S_{\lambda K_0}$ sont en bijection avec les points fixes de $\rho^1_{\lambda K_0}$. En on déduit que l'indice de S_K est la somme de nN, qui est l'indice de K_0 et de $2(2n)$ (une fois pour $\lambda = 0$ et l'autre pour $\lambda = \pi$). ■ ■

Preuve. (du théorème, suite et fin)

On considère l'isomorphisme

$$\begin{array}{rccl} \flat_B : & \mathbb{R}^{n(N+1)} & \longrightarrow & \left(\mathbb{R}^{n(N+1)}\right)^* \\ & x & \longmapsto & \flat_B(x) = B(x, .), \end{array}$$

où B est la forme polaire associée à la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$B^2(Q, p, v) := \left(\|Q\|^2 + \|p\|^2 + \sum_{j=1}^{j=N} \left(\|x_j\|^2 + \|y_j\|^2 \right) \right).$$

Posons

$$\begin{cases} W^+ := \{(Q,p,v) : y_j = \flat_B(x_j), \text{ pour } 1 \le j \le N \text{ et } (Q,p) = (0,0)\} \\ W_0^- := \{(Q,p,v) : y_j = -\flat_B(x_j), \text{ pour } 1 \le j \le N\}\,; \end{cases}$$

d'après i)- du théorème, F_H est strictement positive sur W^+ et ne prend pas de valeurs positives sur W_0^-; d'après ii)- et iii)- il existe un sous-espace vectoriel W_1^- de W_0^- de codimension un (un hyperplan de W_0^-) et tel que la restriction de F_K à W_1^- soit définie négative. La différentielle de $F_H - F_K$ étant bornée, on déduit donc de la formule de Taylor, appliquée à F_H, que la restriction de F_H à W_1^- tend vers l'infini à l'infini. Pour $r > 0$ assez petit et $R > r$ assez grand, nous sommes devant la situation suivante :

1) La restriction de F_H à la sphère de rayon r dans W^+ est constante et égale à r^2.

2) La restriction de F_H à la frontière ∂B de B ne prend pas de valeur strictement positive.

Ceci étant, considérons maintenant le flot g^t du gradient de F_H, c'est-à-dire le champ de vecteurs défini par

$$\nabla F_H(Q,p,v) = dF_H(Q,p,v),$$

puisque $\nabla F_H - \nabla F_K$ est bornée et que le champ de vecteurs linéaire ∇F_K ne s'annule qu'en 0 (car F_K est non dégénérée), $\nabla F_H(Q,p,v)$ tend vers l'infini quand (Q,p,v) tend vers l'infini et que le flot de ∇F_K est défini pour tout t, il résulte de 1) et 2) que $g^{-t}(B)$ rencontre S pour tout $t \geq 0$; en effet, le nombre algébrique d'intersection entre $g^{-t}(B)$ et S vaut 1 ou -1 pour $t = 0$ (selon l'orientation choisies), et ne pourrait varier au cours du temps que si $g^{-t}(\partial B)$ rencontrait S ce qui est impossible, comme le montre la formule

$$\frac{d}{dt} F_H(g^{-t}(X)) = -\left\|\nabla F_H(g^{-t}(X))\right\|^2,$$

la fonction $t \longmapsto F_H(g^{-t}(X))$ est décroissante; 2) nous dit qu'elle n'est jamais > 0 (ni a fortiori égale à r^2) pour $X \in \partial B$ et $t \geq 0$. On tire en conclusion l'inégalité

$$\forall t \geq 0, \max F_H(g^{-t}(B)) \geq r^2, \tag{**}$$

dont nous allons déduire que F_H à au moins une valeur critique (image par F_H d'un point critique) supérieure ou égale à r^2; en effet,

$$B_0 := \bigcap_{t \geq 0} \left\{X \in B : F_H(g^{-t}(X)) \geq r^2\right\}$$

est non vide, comme intersection décroissante de compacts non vides. Pour X dans B_0, on a

$$\int_0^t \left\|\nabla F_H(g^{-\tau}(X))\right\|^2 d\tau = F_H(X) - F_H(g^{-t}(X)) \leq F_H(X) - r^2$$

pour tout $t \geq 0$ ce qui entraîne l'existence d'une suite (t_k) de réels, tendant vers $+\infty$ et telle que $\nabla F_H(g^{-t_k}(X)) \to 0$ quand $k \to +\infty$; comme ∇F_H tend vers l'infini à l'infini, la suite $(g^{-t_k}(X))$ est donc bornée et l'on peut donc extraire une suite convergente $(g^{-t_{k(l)}}(X))_l$. La limite X_0 de cette suite est un point critique de F_H car $\nabla F_H(X_0) = \lim \nabla F_H\left(g^{-t_{k(l)}}(X)\right) = 0$, on a bien $F_H(X_0) = \lim F_H\left(g^{-t_{k(l)}}(X)\right) \geq r^2$ d'après (**).

Il en résulte que la famille génératrice S_H a un point critique $(a, v) \in (\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*) \times (\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*)^N$ avec $S_H(a, v) \geq r^2$, en d'autres termes, le point fixe a de ρ_H^1 vérifie $\mathcal{A}(a) \geq r^2 > 0$. ■

4.3 Application aux sous-variétés

4.3.1 Reformulation des précédents résultats et conséquences

Voici une reformulation du théorème principal.

Théorème 4.3.1 *Sous les mêmes hypothèses et avec les notations du théorème* 4.1.2*, on a*

1. *L'application* $\frac{\partial S}{\partial v}$ *admet* 0 *pour valeur régulière, et par conséquent*

$$\sum\nolimits_S := \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)^{-1}(0)$$

est une sous-variété.

2. *Le graphe de* $\mathbf{R}_0^T$ *est l'image de* $\sum_S$ *par* ***le plongement***

$$\begin{array}{rccc} j_S : & \sum_S & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*)^2 \\ & (Q, p, v) & \longmapsto & j_S(Q, p, v) \end{array}$$

défini par

$$j_S(Q, p, v) = \left(\left(Q + \frac{\partial S}{\partial p}(Q, p, v), p\right), \left(Q, p + \frac{\partial S}{\partial p}(Q, p, v)\right)\right).$$

Le théorème suivant du à Tchekanov et à Sikorav généralise, en quelque sorte le théorème principal concernant les familles génératrices.

Théorème 4.3.2 *Sous les mêmes hypothèses et notations, soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. On a les assertions suivantes :*

i)- *En désignant par $\Phi : (Q,v) \longmapsto \Phi(Q,v) = S(Q,0,v)$ la restriction de S à l'ensemble des (Q,p,v) avec $p = 0$ et $Q \in M$, la fonction $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ admet 0 pour valeur régulière, et par conséquent*

$$\sum\nolimits_{\Phi} := \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^{-1}(0)$$

est une sous-variété.

ii)- *Le difféomorphisme de $\sum_S$ sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$, obtenu en composant le plongement j_S avec la projection*

$$\begin{array}{rccc} pr_2 : & \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* & \longrightarrow & \left(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*\right)^2 \\ & ((q,p),(Q,P)) & \longmapsto & (Q,P), \end{array}$$

envoie la sous-variété $\sum_\Phi$ sur $\mathbf{R}_0^T(\mathbb{R}^n \times \{0_{\mathbb{R}^n}\}) \cap (M \times (\mathbb{R}^n)^*)$, et les points critiques de Φ sur les intersections de $\mathbf{R}_0^T(\mathbb{R}^n \times \{0_{\mathbb{R}^n}\})$ et du fibré conormal à M, qui est défini par

$$\nu^* M := \left\{(Q,P) : Q \in M \text{ et } P \in (T_Q M)^\perp\right\};$$

où

$$(T_Q M)^\perp := \{P \in (\mathbb{R}^n)^*, \text{ tq } P(u) = 0, \text{ pour tout } u \in T_Q M\}.$$

iii)- *De même, j_S envoie les points critiques de la restriction de S à l'ensemble des (Q,p,v) avec $Q \in M$ sur l'ensemble des $((q,p),(Q,P)) \in$ graphe$(\mathbf{R}_0^T)$ tels que $Q \in M$ et $P - p \in (T_Q M)^\perp$.*

4.3.2 Lemme de Tchekanov

Soit M une **sous-variété compacte** de $\mathbb{R}^n$ et (g_t) une isotopie hamiltonienne de T^*M. Il existe une isotopie hamiltonienne, à support compacte, (G_t) de $T^*\mathbb{R}^n$ ayant les propriétés suivantes :

i)- On a $G_t(Q,0) = g_t(Q,0)$ quel que soit $(t,Q) \in [0,1] \times M$.

ii)- $G_t(\mathbb{R}^n \times \{0_{\mathbb{R}^n}\}) \cap (M \times (\mathbb{R}^n)^*) = g_t(M \times \{0_{\mathbb{R}^n}\})$ pour tout $t \in [0,1]$.

Démonstration. Ce qui nous intéresse ce sont les sous-variétés $g_t(M \times \{0_{\mathbb{R}^n}\})$; quitte à multiplier le hamiltonien de (g_t) par une fonction $T^*M \to \mathbb{R}$ à support compact qui vaut

1 dans un grand voisinage de $M \times \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, nous pouvons supposer que (h_t) (et donc (g_t)) est à support compact.

On considère à présent une fonction lisse $u : \mathbb{R} \to [0,1]$ telle que $u^{-1}(1) =]-\infty, 1]$ et $u^{-1}(0) = [2, +\infty[$; pour chaque $q \in M$, on note $\pi_q : (\mathbb{R}^n)^* \to T_q^*M$ la projection parallèlement à $(T_qM)^{\perp}$ (qui n'est autre que la projection orthogonale lorsqu'on identifie le fibré tangent avec le fibré cotangent moyennant le produit scalaire euclidien).

Du théorème d'inversion locale et de la compacité de M le théorème des voisinages tubulaires : pour $\varepsilon > 0$ assez petit, quel que soit $q \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $d(q, M) := \min\{\|q - \acute{q}\| : \acute{q} \in M\} < 3\varepsilon$, il existe un unique point $\nu(q) \in M$ tel que $\|q - \nu(q)\| = d(q, M)$ (c'est la projection orthogonale de q sur M); dans le "tube" $M_\varepsilon = \{q : d(q, M) < 3\varepsilon\}$ les deux applications $q \longmapsto \nu(q)$, $q \longmapsto (d(q, M))^2$ sont lisses.

Nous sommes donc en mesure de construire un hamiltonien $(\widetilde{h}_t)$ sur $T^*\mathbb{R}^n$ comme suit

$$\widetilde{h}_t(q,p) := \begin{cases} h_t(q, \pi_q(p)), & q \in M \\ u\left(\frac{d(q,M)}{\varepsilon}\right).\widetilde{h}_t(\nu(q), p) & q \in M_\varepsilon \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors les propriétés suivantes :

a)- Ce hamiltonien engendre une isotopie $(\widetilde{g}_t)$ sur $T^*\mathbb{R}^n$.

b)- La restriction de cette isotopie à T^*M n'est autre que (g_t).

c)- On a $\widetilde{g}_t(M \times (\mathbb{R}^n)^*) = M \times (\mathbb{R}^n)^*$ pour tout $t \in [0,1]$.

On définit donc l'isotopie (G_t) par son hamiltonien

$$H_t(q,p) = u\left(\frac{\|q\|}{R}\right).\widetilde{h}_t(q,p),$$

pour $R > 0$ assez grand, on aura $G_t(q, 0) = \widetilde{g}_t(q, 0)$. ■

4.3.3 Fonctions phases sur une sous-variété compacte

Les définitions d'une fonction phase et d'une phase quadratique à l'infini sur une sous-variété M sont les mêmes que pour $M = \mathbb{R}^n$.

Théorème 4.3.3 *(Sikorav et Tchekanov)*

Sous les hypothèses du lemme de Tchekanov, soit S une famille génératrice associée au hamiltonien (H_t) de l'isotopie (G_t) du lemme de Tchekanov.

i)- *En désignant par* $\Phi : (Q,v) \longmapsto \Phi(Q,v) = S(Q,0,v)$ *la restriction de* S *à l'ensemble des* (Q,p,v) *avec* $p = 0$ *et* $Q \in M$*, la fonction* $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ *admet* 0 *pour valeur régulière, et par conséquent*

$$\sum_{\Phi} := \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^{-1}(0)$$

est une sous-variété.

ii)- *On définit un* ***plongement***

$$\begin{array}{rccl} j_\Phi : & \sum_\Phi & \longrightarrow & T^*M \\ & (Q,p,v) & \longmapsto & j_\Phi(Q,p,v) = \left(Q, \frac{\partial \Phi}{\partial Q}(Q,v)\right), \end{array}$$

l'image $j_\Phi(\sum_\Phi)$ *de* $\sum_\Phi$ *par* j_Φ *n'est autre que la sous-variété lagrangienne* $g_1(M \times \{0_{\mathbb{R}^n}\})$.

iii)- *La fonction* Φ *est une phase quadratique à l'infini sur* M*, ses points critiques sont en bijection avec* $g_1(M \times \{0_{\mathbb{R}^n}\}) \cap (M \times \{0_{\mathbb{R}^n}\})$.

ses trois conditions s'exprime en disant que $g_1(M \times \{0_{\mathbb{R}^n}\})$ *est* ***engendrée par la phase quadratique*** Φ.

Démonstration. La fonction est une phase quadratique à l'infini avec $K = 0$, le reste découle du lemme de Tchekanov et du théorème principale. ■

Notation 4.3.1 *$cl(M)$: La longueur cohomologique d'une sous-variété compacte M, i.e. la somme des dimensions de ces espaces de cohomologie de de Rham.*

$SB(M)$: La somme des nombres de Betti de M, i.e. la somme des dimensions (en tant que $\mathbb{Z}$-module) de ces groupes d'homologie.

Nous admettrons le résultat suivant :

Lemme 4.3.1 *Le nombre de points critiques d'une phase quadratique sur une sous-variété compacte M est strictement supérieur à $cl(M)$ dans tous les cas, et au moins égale à $SB(M)$ quand aucun de ces points n'est dégénéré.*

Remarque 4.3.1 *Comme $cl(T^n) = n$ et $SB(T^n) = 2^n$ ce lemme contient le théorème 4.2.1.*

Corollaire 4.3.1 *(Hofer)*

Soit M une sous-variété ***compacte*** *de $\mathbb{R}^n$ et (g_t) une isotopie hamiltonienne de T^*M.*

Les deux sous-variétés lagrangiennes $g_1(M \times \{0_{\mathbb{R}^n}\})$ et $M \times \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ se coupent en au moins $cl(M)$ points, et en au moins $SB(M)$ quand toutes les intersections sont transverses.

Preuve. Il suffit d'appliquer le lemme précédent et iii)- du théorème qui lui précède. ■

Bibliographie

[1] **M. Chaperon**, Géométrie différentielle et singularités de systèmes dynamiques.

Astérisque, 138-139 (1986).

[2] **M. Chaperon**, Familles génératrices.

Cours donné à l'école d'été Erasmus de Samos en 1990.

[3] **M. Chaperon**, Quelques questions de géométrie symplectique.

Séminaire N.Bourbaki, 1982-1983, exp n° 610, p. 2311-249.

[4] **M. Chaperon**, A remak on Liouville vectr fieds and a theorem of Manouchehri.

Ergodic Theory Dynam. Systems, 19 (1999), 895-889.

[5] **Yu. V. Checanov**, Critical points of quasi-functions and generating families of legendrian manifolds.

Funktsionnal. Anal. i Prilozhen. 30:2 (1996), 56-69.

[6] **C.C. Conley, E. Zehnder**, The Birkhoff-Lewis fixed point therem and a conjoncture of V.I. Arnold.

Invent. Math. 73 (1983), 33-49.

[7] **Y. Eliashberg, M. Gromov**, Lagrangian intersection theory : finite dimensional approach.

Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 186, Amer. Math. Soc., Providence, 1998, 27-118.

[8] **H. Hofer**, Lagrangian embeddings and critical point theory.

Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non linéaire 2 (1985), 407-462.