République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté des Mathématiques

Mémoire du magister en Recherche Opérationnelle, Option : Mathématiques de gestion

Présenté par [1] :

Fatah CHEURFA

Thème

Optimisation de plongement de copies de graphes dans l'hypercube

Résumé

L'étude d'un plongement d'un graphe G dans un graphe H revient à voir si G est isomorphe à un sous graphe de H. Havel [6, 10, 13, 11] Harary [2, 1, 3], Nebesky [17, 18].
Ce problème possède de nombreuses applications (architecture parallèle, transfère de l'information, codage,...).Johnsson [14] , Wagar[19].
On s'est intéressé dans ce travail au plongement de copies d'un graphe G dans l'hypercube.
Les graphes considérés sont les étoiles, les quasi-étoiles et les Grilles. Pour les deux premier types, on a développé deux algorithmes donnant le maximum de copies plongeables.

Mots clés : : Hypercube, Plongement, Graphe, Isomorphisme, Arbre,Grille.

1. Sous la direction de : Abdelhafid BERRACHEDI, Professeur à l'USTHB

1 Introduction

La mise en oeuvre d'algorithmes parallèles sur des architectures multiprocesseurs à mémoire distribuée a conduit au développement de la notion de plongement d'un graphe G dans un graphe H. Bien souvent, un algorithme distribué A est décrit en supposant l'existence d'une topologie logique S, sur laquelle A est défini. Parmi les topologies logiques les plus utilisées, se trouvent les arborescences et les hypercubes. Un plongement permet à ce qu'un réseau soit simulé par un autre : aux sommets du réseau d'origine sont associés des sommets dans le réseau simulant, et deux sommets voisins sont séparés par un chemin. Ainsi, un algorithme conçu spécialement pour un réseau peut être réutilisé dans un autre grâce à un plongement.Le problème de plongement de graphes dans l'hypercube à été traité par plusieurs auteurs. Ainsi, Havel [6, 10, 13, 11]Harary [2, 1, 3], Nebesky [18] et plusieurs auteurs ont donné des familles de graphes qui sont plongeables dans l'hypercube.

Dans certaines applications, il est souhaitable d'intégrer des copies multiples d'un graphe G donné dans hypercube Q_n de sorte que les plongements soit disjointes, dans le but de plonger un maximum de copies. Par exemple, sur certaines machines les processeurs ont peu de mémoire, et certains programmes ont besoins de plus de mémoire. Dans un tel contexte, il peut être nécessaire d'avoir $(p+1)$ processeurs travaillant ensemble, avec un maître et p esclaves, Pour minimiser le temps de communication, les processeur doivent être disposés comme l'étoile $K_{(1,p)}$. Johnsson [14] , Wagar[19].

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés au plongement de copies de graphes dans l'hypercube, nous avons donnés pour certaines classes de graphe le nombre maximum de copies qu'on peut plonger dans un hypercube de dimension n, comme l'étoile $K_{(1,n)}$, quasi-étoile $S(1,1,1;1,1,1)$, double quasi-étoile $S_k(1,1,1;1,1,1)$, et les grilles.

Pour ce type de plongement nous avons présentés deux algorithmes implémentés sur une machine (Dell,i3) sous le langage de programmation (matlab R2012a), qui permettent de décomposer Q_n en nombre optimal de copies disjointes de $K_{(1,3)}$ et quasi-étoile $S(1,1,1;1,1,1)$.

2 Définitions

Un plongement d'un graphe G dans un graphe H est défini par la donnée d'une application injective φ de l'ensemble des sommets de G dans l'ensemble des sommets de H, et d'une application P_φ de l'ensemble des arêtes de G dans l'ensemble des chaînes de H, qui associe à chaque arête xy de G, une chaîne reliant les sommets $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ dans H.

3 Graphes et dimensions cubiques

Un graphe G est dit cubique s'il admet un plongement de dilatation 1 dans Q_n pour un certain n. Le plus petit entier n pour lequel G est plongeable dans Q_n est appelé dimension cubique, noté $dim(G)$.

Firsov [16] a remarqué que les arbres sont des graphes cubiques. Il a aussi montré que tout graphe cubique est nécessairement biparti, mais la réciproque n'est pas vrai en général. Un exemple de graphe biparti est le graphe $K_{2,3}$ ci-dessous (figure 1). $K_{2,3}$ n'est pas un graphe cubique, il n'admet pas de plongement dans Q_n quelque soit la valeur de n. En effet, supposons qu'il existe un tel plongement, comme u et v sont à distance 2 dans $K_{2,3}$, alors leurs images respectives $p=\varphi(u)$ et $q=\varphi(v)$ seront aussi à distance 2 dans Q_n Or, deux sommets à distance 2 dans Q_n appartiennent à exactement 2 chaînes sommet-disjointes de longueurs 2 dans Q_n , ce qui n'est pas possible car les 3 chaînes sommet-disjointes de longueurs 2 dans $K_{2,3}$ doivent se plonger dans 3 chaînes sommet-disjointes dans Q_n.

3.1 Décider si un graphe G est cubique

A noter qu'un graphe G est cubique si et seulement si toutes ses composantes connexes. *Havel* et *Morávek* [12] ont donné les conditions nécessaires et suffisantes suivantes pour dire si un graphe

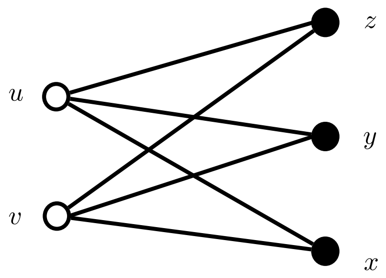


FIGURE 1 – Graphe $K_{2,3}$

G donné est cubique.

3.1.1 Conditions nécessaires et suffisantes

Un graphe G peut être plongé dans Q_n si et seulement si on peut étiqueter les arêtes de G par des entiers appartenant à l'ensemble $\{1, ..., n\}$, de telle sorte que :

1. Toutes les arêtes de G incidentes à un même sommet x admettent des étiquetages différents,
2. Pour toute chaîne P de G, il existe un entier $i \in \{1, ..., n\}$ qui apparaît un nombre impair de fois dans l'étiquetage des arêtes de P,
3. Pour tout cycle C de G, aucun entier $i \in \{1, ..., n\}$ n'apparaît un nombre impair de fois dans l'étiquetage des arêtes de C.

4 Plongement de graphes dans l'hypercube

L'hypercube de dimension n, noté Q_n est le graphe où les sommets représentent les n-uplets de $\{0, 1\}^n$ et où deux sommets sont adjacents si et seulement si les vecteurs associés à ces sommets diffèrent exactement en une seule composante. Le plongement d'un graphe G dans l'hypercube revient à voir si G est isomorphe à un sous-graphe de Q_n. Chercher un plongement optimal d'un graphe G dans un graphe d'une famille donnée, revient à plonger G dans le graphe H de cette famille ayant le plus petit nombre de sommets possible, supérieur ou égale à celui de G. On dit alors que H est optimal pour G.
Dans le cas où cette famille de graphes est réduite à un seul graphe qui est le graphe de l'hypercube ; alors la recherche d'un plongement optimal d'un graphe G dans un hypercube Q_n consiste à trouver la plus petite dimension n de l'hypercube pour le quel G y est plongeable .

5 Quelques classes de graphes plongeable dans l'hypercube

5.1 Plongement des arbre dans Q_n

(Havel) [8]
Un arbre T est plongeable dans Q_n si et seulement s'il existe une $C_n - valuation$ de T.
(Havel) [7]
Soit T un arbre binaire d'ordre 2^n avec $n \geq 3$. Si T est équilibré et possède deux sommets de degré 3 alors T est plongeable dans Q_n.

Théorème (Havel) [5]
Soit $n \geq 2$. D_n est plongeable dans Q_{n+2} et $dim(D_1) = 2$, $dim(D_n) = n + 2$. A partir de l'arbre binaire complet D_n on définira d'autres arbres plongeables dans l'hypercube. Pour $n \geq 2$, B_n et un arbre binaire obtenu à partir de l'arbre binaire complet D_{n-1}, et d'un sommet u, tel que u soit relié à la racine de D_{n-1} par un arête.

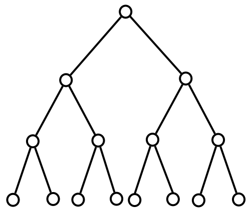


FIGURE 2 – L'arbre D_3

B_n possède $2^{n-1} + 1$ sommets pendants et $2^{n-1} - 1$ sommets de degré 3, donc B_n possède 2^n sommets. (Havel) [7]
Pour tout $n \geq 2$, B_n est plongeable dans Q_{n+1}, $dim(B_n) = n + 1$. L'arbre B_n peut être généralisé comme suit :

soit $n \geq 2$ et $k \geq 1$, on peut définir l'arbre noté $B_n^{(k)}$ de la manière suivante : $B_n^1 = B_n$ et $B_n^{(k)}$ est l'arbre obtenu par subdivision de chaque arête de l'arbre binaire, complet D_{n-1} par $k - l$ sommets et l'arête pendante de B_n adjacente à la racine de D_{n-l} par k sommets.
Il est clair que $|V_n^{(k)}| = K.2^{n+1}$ Havel [7] a démontré aussi la proposition suivante,qui concerne le plongement de B_n^2 dans l'hypercube. (Havcl) [7] Pour $n \geq 2$, $|V(B_n^2)| = 2^{n+2}$,et B_n^2 est plongeable dans Q_{n+2}, $dim(B_n^2) = n + 2$.

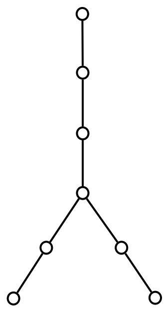


FIGURE 3 – L'arbre D_1^2

5.2 Plongements des grilles est des échelles

5.2.1 Grilles binaires

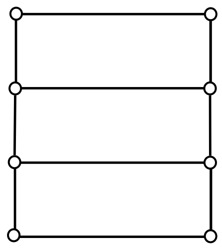
Une grille est dite binaire si d_i est une puissance de 2 pour tout i,en particulier. Si $d_i = 2 \ \ \forall i$. alors M est hypercube de dimension n.

Exemple 1 Harary et Lewinter [4] ont montré que les grilles binaires sont des graphes cubiques. La démonstration repose sur le lemme suivant :

lemme (Hanlry et Lewinter) [4]

Si G ,et H deux graphes plongeables dans G' et H' respectivement, alors $G\square H$ est plongeable dans $G'\square H'$.

Preuve : on a $V(G\square H) \subseteq V(G'\square H')$, et par définition de la somme cartésienne, on a $V(G\square H) \subset V(G'\square H')$.



$M(2 \times 4) = P_2 \square P_4$

FIGURE 4 – Grille binaire

Théorème (Kobeissi) [15] La n - grille est plongeable clans Q_m si et seulement si $d_1 \times ... \times d_n \leq 2^m$
Preuve : (M. Kobeissi) [9]

6 Plongement de copies disjointes de graphes dans Q_n

6.1 Plongement de copies disjointes de $K_{1,3}$ dans Q_n

Par la construction récursive, on voit que pour passer de Q_{n-1} à Q_n, il faut faire une copie du graphe, autrement dit le nombre de sommets est doublé.

Soit DF_n est le nombre de copies disjointes de $k_{1,3}$ dans Q_n, on obtient ainsi

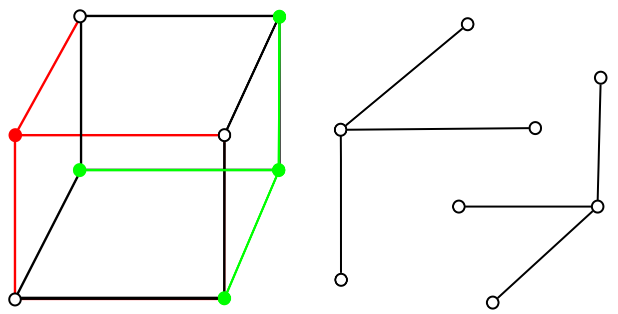
$$DF_n = 2 * DF_{n-1}$$

et le premier cas est $DF_3 = 2$; en déroulant la récurrence, on obtient

$$DF_n = 2 * DF_{n-1} = 2^2 * DF_{n-2} = \underbrace{2 * 2 * 2... * 2}_{(n-3)} * DF_3 = 2^{n-2}$$

c'est-à-dire que l'hypercube Q_n on peut plonger 2^{n-2} copies disjointe de $K_{1,3}$.

Exemple 2 Decomposition de Q_3 en copies disjointe de $k_{1,3}$



Q_3 $k'_{1,3}$ $k''_{1,3}$

FIGURE 5 – Décomposition de Q_3 en deux copies de $K_{1,3}$

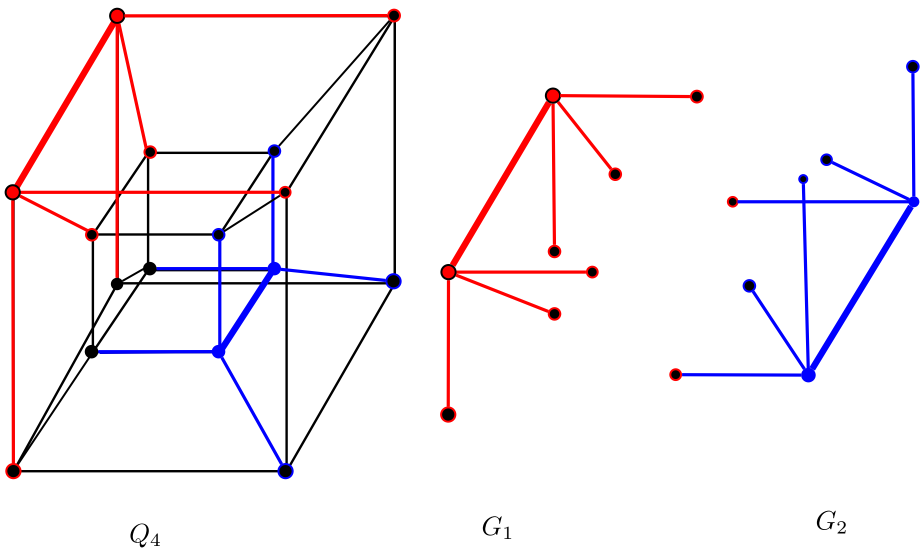


FIGURE 6 – Nombre de copies de G dans Q_3

6.2 Plongement de copies disjointes de double quasi-étoile $S(1,1,1;1,1,1)$ dans Q_n

Si DF_n est le nombre de copies disjointes de $S(1,1,1;1,1,1)$ dans Q_n, on obtient ainsi

$$DF_n = 2 * DF_{n-1}$$

et le premier cas est $DF_4 = 2$; en déroulant la récurrence, on obtient

$$DF_n = 2 * DF_{n-1} = 2^2 * DF_{n-2} = \underbrace{2*2*2...*2}_{(n-4)} * DF_4 = 2^{n-3}$$

.
Dans un hypercube de dimension n on peut plonger 2^{n-3} copies disjointe de $S(1,1,1;1,1,1)$.

6.3 Plongement de copies disjointes de graphe $S_k(1,1,1;1,1,1)$ dans Q_n

Le graphe $S_k(1,1,1;1,1,1)$ est l'union de k copies de double quasi-étoile $S(1,1,1;1,1,1)$ par une arête, comme il le montre la figure7.

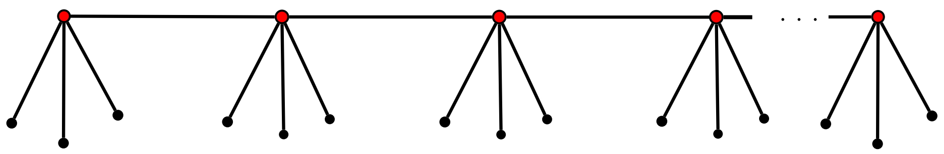


FIGURE 7 – Le graphe $S_k(1,1,1;1,1,1)$

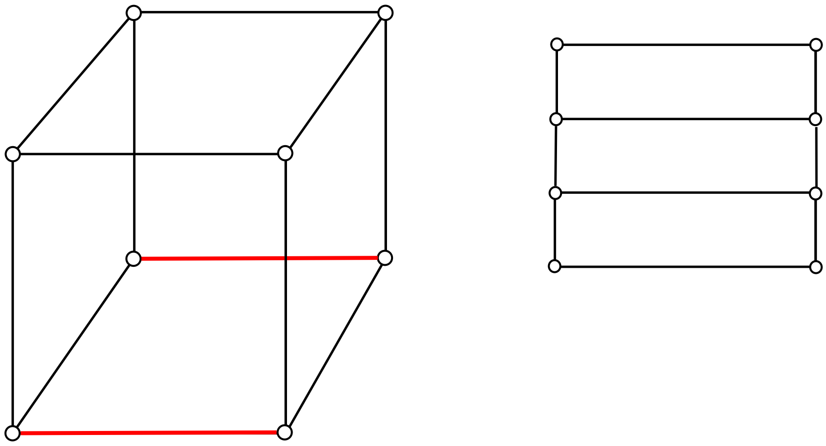
Par recurrence

$$DF_n = 2 * DF_{n-1} = 2^2 * DF_{n-2} = \underbrace{2*2*2...*2}_{(n-k)} * DF_k = 2^{n-k+1}$$

Donc dans l'hypercube Q_n on peut plonger 2^{n-k+1} copies disjointe de $S_k(1,1,1;1,1,1)$.

6.4 Plongement de copies disjointes de la grille binaire $M(2,4)$ dans Q_n

Exemple 3 La décomposition de Q_3 en copies disjoints de $M(2,4)$,



Q_3 $M(2 \times 4) = P_2 \square P_4$

FIGURE 8 – Plongement de la grille binaire(2,4) dans Q_3

Soit $M_{2,4}(Q_n)$ le nombre de copies disjointes de graphe $M(2,4)$ dans Q_n.

La formule récursive est :

$$M_{2,4}(Q_n) = 2 * M_{2,4}(Q_{n-1}) \qquad n \geq 3$$

Le déroulement de la récurrence :

$$\begin{aligned} M_{2,4}(Q_n)_3 &= 1 \\ M_{2,4}(Q_n) &= 2 * M_{2,4}(Q_{n-1}) \\ &= 2^2 * M_{2,4}(Q_{n-2}) \\ &= \underbrace{2 * 2 * 2 ... * 2}_{(n-3)} * M_{2,4}(Q_3) = 2^{n-3} \qquad n \geq 3 \end{aligned}$$

Ce résultat montre que dans l'hypercube Q_n on peut plonger 2^{n-3} copies disjointes de $M(2,4)$.

6.5 Plongement de copies disjointes de la grille binaire $M(2,8)$ dans Q_n

La formule récursive est :

$$M_{2,8}(Q_n) = 2 * M_{2,8}(Q_{n-1}) \qquad n \geq 4$$

Le déroulement de la récurrence :

$$\begin{aligned} M_{2,8}(Q_n) &= 1 \\ M_{2,8}(Q_n) &= 2 * M_{2,8}(Q_{n-1}) \\ &= 2^2 * M_{2,8}(Q_{n-2}) \\ &= \underbrace{2 * 2 * 2 ... * 2}_{(n-4)} * M_{2,8}(Q_4) = 2^{n-4} \qquad n \geq 4 \end{aligned}$$

Ce résultat montre que dans l'hypercube Q_n on peut plonger 2^{n-3} copies disjointes de $M(2,4)$.

6.6 Plongement de copies disjointes de grille binaire $M(2, 4*k)$ dans Q_n

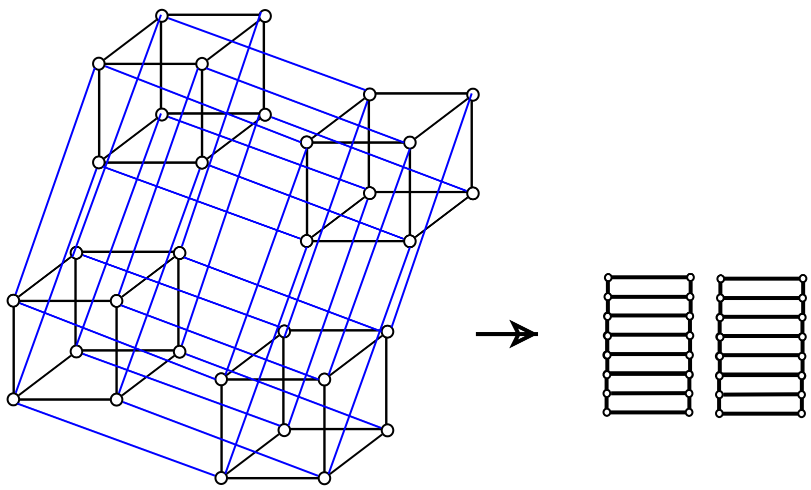
On pose $M_{2,4*k}(Q_n)$ avec $k \in N^*$ est le nombre de copies disjointes de $M(2, 4*k)$ dans Q_n, on obtient ainsi

$$M_{2,4*k}(Q_n) = 2 * M_{2,4*k}(Q_n)n - 1 \quad avec \;\; n \geq k+2 \;\; et \;\; k \geq 1.$$

Le déroulement de la récurrence :

$$\begin{aligned} M_{2,4k}(Q_{k+2}) &= 1 \\ M_{2,4k}(Q_n) &= 2 * M_{2,4k}(Q_{n-1}) \\ &= 2^2 * M_{2,4k}(Q_{n-2}) \\ &= \underbrace{2 * 2 * 2 ... * 2}_{(n-(k+2))} * M_{2,4k}(Q_{k+2}) = 2^{n-(k+2)} \qquad n \geq k+2; k \geq 1 \end{aligned}$$

Ce résultat montre que dans l'hypercube Q_n on peut plonger 2^{n-k-2} copies disjointes de $M(2, 4*k)$ avec $n \geq k+3 \;\; et \;\; k \geq 1$.



Q_5 2 copies de $M(2 \times 8) = P_2 \square P_8$

FIGURE 9 – Plongement de 2 grille binaire(2,8) dans Q_5

Références

[1] F. Harary and M.Lewillter. Spaning subgraphs of a hypercube ii. *Meshes, inter, jour,computer math*, 25 :20–24, 1988.

[2] F. Harary and M.Lewillter. Spanning subgraphs of a hypercube ii. *starlik,computer math.Modelling*, (11) :216–217, 1988.

[3] F. Harary and M.Lewillter. The starlike tree which span a hypercube. *computer math*, 15 :299–302, 1988.

[4] F. Harary and M.lewinter. Spanninng subgraphs of hypercube. *computer Math*, 1988.

[5] I. Havel. Embedding certain trees into hypercube. *in recent advances in graph theory*, pages 201–205, 1974.

[6] I. Havel. On hamiltonian circuits and spanning trees of hypercube. *Casopis*, (109) :103–108, 1984.

[7] I. Havel. On certain trees in hypercube. *Topics in combinatorrics and graph thoery*, (353-358), 1990.

[8] I. Havel and J.Maoravek. B-valuations of graphs. *Czech-math*, (22) :338–351, 1972.

[9] I. Havel and J.Monivek. B-valuations of graphs. *Czech Math Journ.*, (98) :338–351, 1972.

[10] I. Havel and P. Liebl. Embedding the polytomic tree into the n-cube. *Cas Pest mat*, (98) :307–314, 1973.

[11] I. Havel and P. Liebl. One-legged caterpillars span hypercube. *Journal of Graph Theory*, (10) :69–77, 1986.

[12] I. Havel and P.Liebl. Embedding the dichotomie tree into the n-cube. *Cas.Pest. mat*, (97) :201–205, 1972.

[13] I. Havel and P.Liebl. Embedding the polytomic tree into the n-cube. *Cas Pest math*, (98) :307–314, 1973.

[14] C.T Ho and L. Johnsson. Spanning graphs for optimal broadcasting and personalized communication in hypercubes. *Tech. REPT. YALEU/CSD/RR-500 Yale U*, 1986.

[15] M. Kobiessi. Plongement de graphes dans l'hypercube. *Thèse de doctorat ,discipline informatique*, 2001.

[16] H.M. MULDER. *The interval function of a graph.* MCT.132, 1980.

[17] L. Nebesky. On quasistars in n-cubes. *Cas.Pest. mat*, (109) :153–156, 1984.

[18] L. Nebesky. Embedding m-quasistars in n-cubes. *C zechoslovak mathematical, journal,praha*, (38) :113, 1988.

[19] QF. Stout and B.Wagar. Passing messages in link-bound hypercubes. *Multiprocesseurs Hypercube*, (251-257), 1987.