N° d'ordre : 27 /2012-M/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la technologie Houari Boumediene
Faculté de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Magistèr
En : Mathématique

Spécialité : Analyse - Systèmes Dynamiques et Géometrie

Par : M. Khier Mourad

Thème

Sur une fonction d'utilité en microéconomie

Soutenu publiquement le : 29 / 01 / 2012, devant le jury composé de :

M. A. KESSI,	Professeur,	à l'U.S.T.H.B.,	Président
M. R. BEBBOUCHI,	Professeur,	à l'U.S.T.H.B.,	Directeur de memoir
M. M. AIDER,	Professeur,	à l'U.S.T.H.B.,	Examinateur
Mme K. DJABALLAH,	Maître de Conférences/A,	à l'U.S.T.H.B.,	Examinatrice

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier Dieu de m'avoir donné le courage, la morale et la santé pour mener à bien ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à mon promoteur Monsieur Rachid BEBBOUCHI, professeur à l'U.S.T.H.B mon directeur de thèse. Je lui témoigne ma sincère reconnaissance pour l'intérêt constant avec lequel il a suivi la progression de mon travail, pour son soutien, ses orientations et ses précieux conseils.

Ma reconnaissance va ensuite aux personnes que me fait l'honneur de composer ce jery :

Monsieur Arezki Kessi, professeur à l'U.S.T.H.B pour avoir accepté de présider ce jury, Monsieur Aider Meziane, professeur à l'U.S.T.H.B et Madame Djaballah Khadidja, Maître de conferences à l'U.S.T.H.B pour avoir accepté d'être les examinateurs de mon travail.

Je tien aussi à exprimer mes vifs remerciements à tous les professeurs qui m'ont permis de connaître le monde des mathématiques et qui m'ont tiré profit de leur vaste connaissance. Aussi, un grand merci à l'ensemble des personnes qui ont contribués de prés ou de loin à la réalisation de ce mémoire, en particulier les membres du groupe de travail dirigé par M. Bebbouchi et M. Bensalloua.

Mes derniers remerciement vont à : ma Mère, mes frères et soeurs, ma fiancé et mes amis.

En fin, je dédie ce travail à la mémoire de mon père ***MAHMOUD****.*

KHIER

Table des matières

Introduction

Durant les années 1960 et la première moitié de la décennie 1970, les bourses de commerce americaines ont déployé des efforts considérables pour développer leurs activités en diversifiant la gamme des instruments offerts aux opérateurs. Ces bourses auraient aimé disposer des marchés d'options sur contrats à terme, or le "Commodity Exchange Act " interdisait la négociation de ces options. Il était donc impossible aux bourses de Chicago d'ouvrir de tels marchés.
À la fin des années 1960, toujours dans un objectif de diversification, le Chicago Board of Trade " CBOT " a envisagé de créer des contrats à terme portant sur les actions des grandes sociétés industrielles americaines. Étonnées par l'originalité du produit qui leur était présenté, les autorités reconnurent leur incompétence dans le domaine des titres financiers et renvoyèrent le CBOT devant la Securities and Echange Commission (SEC). Les experts de la SEC, après examen du projet, craignirent que ces transactions ne soient à l'origine de manipulations et d'opérations d'étranglement.
Ils refusèrent donc et suggérèrent au CBOT de leur soumettre un programme d'options sur valeurs mobilières.
Le CBOT créa alors le Chicago Board Options Exchange et les premières transactions sur des options négociables, ayant pour support des valeurs immobilières, débutèrent en $Avril 1973$ un mois avant la publication du fameux article de Black et Scholes !
Le succès du Chicago Board Option Exchange et la qualité des services offerts par les options négociables sur les valeurs immobilières ont conduit toutes les places financières internationales à créer des marchés identiques à ceux qui s'étaient développés aux U.S.A.

Le souci de l'évaluation du prix d'une option reste toujours posé malgré les nombreuses recherches effectuées dans cet axe, car ce prix doit rassurer l'acheteur sans trop léser le vendeur.

Le chapitre 1 concerne un développement de concepts essentiels aux options. On commence donc par définir une option, un actif support, un actif risqué, un actif sans risque et les éléments caractéristiques d'une option et par la suite on propose un exemple concret.

Au chapitre 2 on introduit l'essentiel des notions des portefeuilles de couverture et la notion d'opportunité d'arbitrage, puis on procédera à l'évaluation du prix d'une option dans un modèle à une et deux étapes et on en tirera les premières résultats qui permettent d'évaluer le prix d'une option ; on conclut ce chapitre par la méthode de Cox, Ross et Rubinstein qui permet l'évaluation du prix d'une option d'achat européenne dans un modèle multi-périodes.
Certains résultats ont nécessité une rédaction originale.

Au chapitre 3 on introduit les notions sur les processus stochastiques, le mouvement brownien et le calcul d'Itô qui permet d'exposer l'approche en temps continu de l'évaluation des options, connu sous le nom de modèle de Black et Scholes développé au chapitre 4.

Au chapitre 4 on présente les hypothèses du modèle de Black et Scholes, on définit la notion de stratégie autofinançante et on en déduit l'équation différentielle stochastique qui régit l'évolution de la valeur du portefeuille de couverture ; par la suite, on présente la condition aux limites qui complète l'équation différentielle partielle de *Black* et *Scholes*. On termine ce chapitre par la méthode de *Black* et *Scholes* et la démonstration telle qu'elle est dans leur article [3].

Une conclusion pour baliser des perspectives termine ce travail.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Les actifs financiers

1.1.1 Les options

Une option est un contrat qui confère à son détenteur le droit d'acheter ou de vendre un bien dans une date future fixée à l'avance.

1.1.2 Actif support

On appelle le bien sur lequel on peut souscrire une option , un actif support ou un actif sous-jacent ou simplement le support de l'option. Il peut être une action, un indice boursier, des devises, des matières premières, ...

1.1.3 Actif risqué, actif sans-risque

L'actif support est appelé parfois actif risqué car son prix fluctue en raison de plusieurs paramètres. Par contre, un actif sans risque est un contrat fixé et bien connu. Par exemple, on peut faire un contrat de prêt ou d'emprunt négocié à un taux d'intérêt fixe.

Remarque 1

On distingue deux types d' options. Les options d'achat et les options de vente.

1. **Les options d'achat :**

   Une option d'achat donne le droit à son détenteur d'acheter l'actif sous-jacent à une date future fixée à l'avance et à un prix fixé.

2. **Les options de vente :**

   Une option de vente donne le droit à son porteur de vendre l'actif support à une date future fixée à l'avance et à un prix fixé, mais pas l'obligation (il peut ne pas vendre cet actif).

Remarque 2

On distingue aussi deux natures d'options : les options européennes et les options américaines. Et il n'y a aucun lien entre ces deux appellations et les lieux de cotations.

1. Les options européennes :

Ce sont des options qui ne peuvent être exercées qu'au dernier jour du contrat .

2. Les options américaines :

Ce sont des options qui peuvent être exercées durant tout l'intervalle de temps qui sépare le jour de souscription, jour initial, et le dernier jour du contrat.

Les éléments caractéristiques d'une option :

1. Nature de l'option :

On distingue deux types d'options, soit les options d'achat, appelées call sur les marchés anglo-saxons, soit les options de vente, appelées put sur les marchés anglo-saxons.

2. La prime :

L'option donne un immense avantage aux investisseurs, et représente aussi un risque pour les vendeurs de cette option. De là, son prix ne pourra jamais être nul ; le prix d'une option est appelé la prime, noté p pour put ou c pour call selon la nature de l'option.

3. La volatilité :

La volatilité d'un actif sous-jacent, notée σ, est une mesure de l'incertitude sur la rentabilité de l'actif financier.

Si la volatilité est assez élevée, alors le prix de l'actif support varie dans un intervalle assez grand, donc l'investissement sur cet actif représente un risque potentiel car son prix peut gravement baisser. Mais aussi, son prix peut augmenter d'une façon considérable, ce qui serait un gain très important pour les investisseurs.

Si la volatilité est assez basse, le prix de l'actif support varie dans un intervalle assez petit, d'où un risque très faible, mais aussi un gain limité.

4. Le prix d'exercice :

Le prix auquel s'entendent l'acheteur et le vendeur d'une option est appelé prix d'exercice, noté E quelle que soit la nature de l'option. Généralement, le prix d'exercice E vaut S_0, le prix de l'actif sous-jacent à l'instant de souscription du contrat mais il peut être autre que S_0 selon que la volatilité de l'actif sous-jacent est assez élèvée ou assez basse.

5. Le prix de l'actif support :

Rappelons que l'option est souscrite sur un actif support, donc le prix de l'option dépend essentiellement du prix de l'actif support, qu'on note S ou S_t pour signaler qu'il varie au cours du temps.

6. L'échéance de l'option :

L'échéance de l'option, notée T est le dernier jour où on peut exercer l'option.

7. Le taux d'intérêt :

D'une façon indirecte le taux d'interêt, noté r, caractérise l'option car l'achat ou la vente d'une option nécessite un prêt ou un emprunt d'une somme placée sous un taux d'interêt fixe ou stochastique.

Dans toute notre étude on suppose que le taux d'interêt est constant.

8. Fonction de paiement :

Une option est définie à l'aide d'une fonction de paiement final, appelée payoff, dont le montant dépend de l'évolution de l'actif support. Par exemple, pour une option d'achat européenne, cette fonction est donnée par :

$\psi_c\left(S_T\right) = Max\left(S_T\ - E, 0\right)$

Le graphe ci dessous montre le payoff, ψ_c , d'une option d'achat européenne en fonction de S_T .

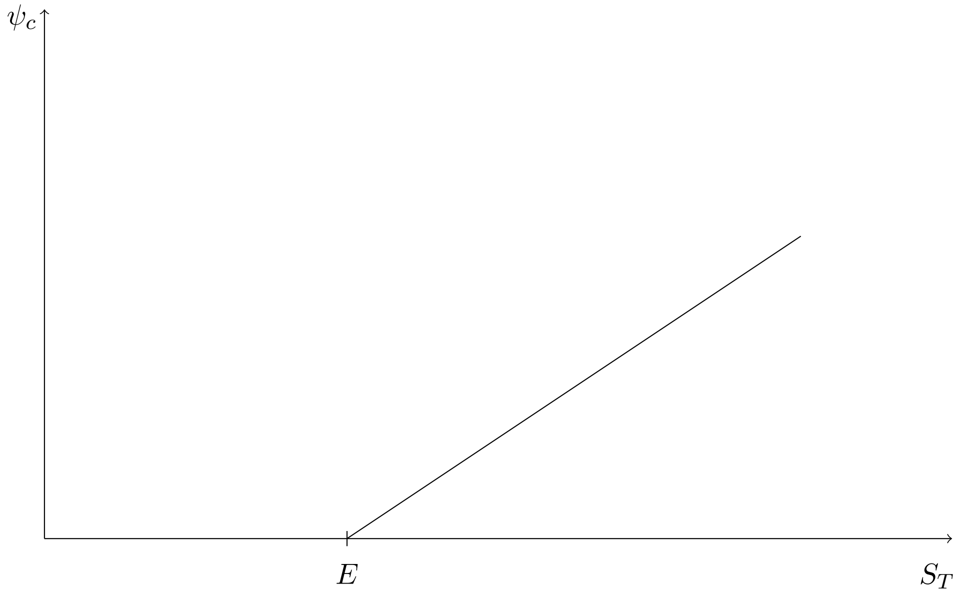

FIG. 1.1 – Payoff d'une option d'achat européenne.

Le prix d'une option est très sensible ; il doit refléter toutes les variations de ces caractéristiques, et notamment le prix de l'actif support qui n'est jamais stable. La différence entre deux successions quelconques n'est jamais stable et est très difficile à estimer.

Afin de calculer un prix théorique qui avoisine le prix réel, nous procédons à une étude simplifiée qui nous permet de voir le rôle et l'intérêt de chaque élèment influant sur ce prix, puis nous combinons tous les résultats et toutes les conclusions pour donner un modèle significatif.

1.2 Exemple concret

Un fellah veut vendre une tonne de pommes de terre en Algérie pour une livraison ultérieure.

Il doit s'entendre avec un mandataire sur le prix de vente (appelé prix d'exercice par exemple, $E = 30\ 000$ D.A).

Le mandataire doit donner une somme C_o , en sus de E, au fellah pour garantir le contrat de vente ("Aarboun" non déductible du prix de vente), pour que le prix de la marchandise lors de la livraison reste toujours le prix d'exercice E, même si le marché augmente.

Le fellah doit calculer la valeur exacte de C_o pour qu'il couvre l'éventuel risque de baisse du prix, et cela en créant un portefeuille comportant α % de la marchandise et en empruntant β unités monétaires soumis à un taux d'interêt constant r (positif ou nul). Cela revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha S_0 u + \beta = Max(S_0 u - E, 0) \\ \alpha S_0 d + \beta = Max(S_0 d - E, 0) \end{cases} \quad \text{en prenant } r = 0.$$

où $S_0 u$ désigne le prix du marché après une hausse de 10% c'est à dire $u = 1,1$ donc $S_0 u = 33000DA$ et $S_0 d$ désigne le prix du marché après une baisse de 10% c'est à dire $d = 0,9$, ce qui donne $S_0 d = 27000DA$.
La résolution du système précédent donne $\alpha = 50\%$, c'est à dire que le vendeur doit garantir la possession de 50% de la marchandise et $\beta = -13500DA$ comme appoint.
L'acheteur va donner une somme d'argent au vendeur pour la fixation du coût de la marchandise de la manière suivante :

$$\begin{aligned} C_0 &= \alpha . S_0 + \beta \\ &= 0,50 \times 30000 - 13500 \\ &= 1500DA \end{aligned}$$

Finalement, si la tonne de pomme de terre vaut $27000DA$ le jour où le fellah fait la livraison, le mandataire l'achète ailleurs au prix du marché, ce qui lui fait perdre $1500DA$.
Dans le cas contraire, c'est à dire si le prix est de $33000DA$, le mandataire l'achète à $30000DA$ et gagne $3000DA$ moins $1500DA = 1500DA$.
Et le vendeur acquiert $\alpha = 50\%$ de la marchandise et rembourse ses dettes qui s élèvent à $\beta = -13500$ et fera un gain de $1500DA$ en plus.

Cette somme C_0 s'appelle le prix de l'option d'achat ou encore la prime.

Dans ce qui suit nous allons présenter les différentes notions pour calculer cette prime dans divers cas.

Il faut remarquer que dans les marchés de gros algériens, cette prime n'existe pas mais une avance sur le prix d'achat si.

Chapitre 2

Evaluation du prix d'une option l'approche discret

Avant de commencer notre étude, on définit quelques notions importantes dans la théorie d'évaluation des produits dérivés.

2.1 Notions de portefeuilles

2.1.1 Stratégie de couverture

Nous appelons stratégie de couverture ou de duplication la prise de position, unique, en date initiale, qui permet de dupliquer la valeur de l'option en date finale.

2.1.2 Portefeuille admissible

On note :
α : la quantité d'actif risqué.
β : la quantité d'actif sans risque.

Le couple (α, β) qui permet la duplication de la valeur de l'option est appelé portefeuille admissible, dont la valeur est π_t et tel que :

$$\pi_t = \alpha.S_t + \beta.$$

ou S_t est le prix de l'actif risqué à l'instant t.

2.1.3 Portefeuille dynamique

On appelle portefeuille dynamique, tout ensemble de portefeuilles réalisables $(\alpha_i, \beta_i)_{i=0,\ldots,N-1}$ spécifiant en chaque date i, la composition du portefeuille qui permet de dupliquer la valeur de l'option.

2.1.4 Portefeuille autofinançant

Un portefeuille dynamique est dit autofinançant si l'investisseur ne procède à aucune mise de fonds et n'effectue aucune opération de retrait aux dates intermédiaires $i = 1, ..., N-1$.

La condition d'autofinancement, lorsqu'on passe de la composition $(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1})$, en date $i-1$, à la composition (α_i, β_i), en date i, s'écrit :

$$\underbrace{\alpha_{i-1}S_i + \beta_{i-1}(1+r)^{i-1}}_{\texttt{valeur du portefeuille à la fin de période i-1}} = \underbrace{\alpha_i S_i + \beta_i(1+r)^i}_{\texttt{valeur du portefeuille au début de la période i}} \tag{2.1}$$

notons que r est le taux d'intérêt.

Si on note, π_i^- la valeur du portefeuille à la fin de la période i, et π_i^+ la valeur du portefeuille au début de la période $i+1$, la condition d'autofinancement s'écrit alors : $\pi_i^- = \pi_i^+$ pour $i = 1, ..., N-1$.

2.1.5 Opportunité d'arbitrage

Une opportunité d'arbitrage est une stratégie autofinançante telle que sa valeur initiale est nulle, et sa valeur finale est strictement positive.

Dans toute la suite de notre étude, on travaille dans un marché sans stratégie d'opportunité d'arbitrage, et nous appelons cette hypothèse : **absence d'opportunité d'arbitrage**.

2.2 Evaluation du prix d'une option dans un modèle à une période

Par souci de simplification, on travaille avec des options d'achat de type européen.

Dans ce cas, la prime de cette option est notée C_0 et représente la somme à verser par l'acheteur au vendeur.

Notons :

$t = 0$: l'instant de souscription de l'option.

$t = T$: l'échéance de l'option.

E : le prix d'exercice de l'option.

S_t : le prix de l'actif sous-jacent à l'instant t.

α : la quantité d'actif risqué à inclure dans le portefeuille de couverture .

β : la quantité d'actif sans risque à inclure dans le portefeuille de couverture .

r : le taux d'interêt ; on le suppose constant durant toute la durée de vie de l'option .

ψ_t : le portefeuille de couverture à l'instant t.

π_t : la valeur du portefeuille de couverture ψ_t.

P : la probabilité de la hausse du prix de l'actif support.

$1 - P$: la probabilité de la baisse du prix de l'actif support .

C_0 : le prix de l'option d'achat à l'instant initial, la prime de l'option.

C_t : le prix de l'option d'achat à l'instant t .

P_t : le prix de l'option de vente à l'instant t.

C_u : le prix de l'option d'achat si l'actif support augmente.

C_d : le prix de l'option d'achat si l'actif support diminue.

2.2.1 Relation de parité call-put

Proposition 1 : [20]

En absence d'opportunités d'arbitrage, les primes d'une option d'achat et d'une option de vente de même caractéristique, la valeur courante de l'actif sous-jacent, sont liées par la relation :

$$C_t - P_t = S_t - \frac{E}{(1+\gamma)^{T-t}} \tag{2.2}$$

Corollaire 1

La valeur en t d'une option d'achat européenne de maturité T et de prix d'exercice E respecte les inégalités suivantes :

$$C_t \geq O\,;\, C_t \geq S_t - \frac{E}{(1+\gamma)^{T-t}} \tag{2.3}$$

Pour une option de vente européenne , on a :

$$P_t \geq 0\,;\, P_t \geq \frac{E}{(1+r)^{T-t}} - S_t \tag{2.4}$$

Démonstration

Sous l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage, C_t et P_t sont positifs car les payoff des deux options sont positifs.

Les deux autres inégalités sont obtenues par application de la relation (2.2).

En effet ; cette dernière implique

$$C_t = S_t - \frac{E}{(1+r)^{T-t}} + P_T.$$

or $P_t \geq 0$ ainsi $C_t \geq S_t - \frac{E}{(1+r)^{T-t}}$ ce qui justifie (2.3).

La relation de parité s'écrit également

$$P_t = \frac{E}{(1+r)^{T-t}} - S_t + C_t.$$

Or $C_t \geq 0$ donc $P_t \geq \frac{E}{(1+r)^{T-t}} - S_t$ ce qui justifie (2.4).

Dans ce modèle, on suppose que le prix de l'actif support peut prendre l'une des deux valeurs à la fin de la période :

Soit $S_T = S_0 u$, donc le prix de l'actif support augmente et u désigne une coefficient constant supérieur à 1.

Soit $S_T = S_0 d$, donc le prix de l'actif support diminue, d désigne un coefficient constant inférieur à 1.

La figure suivante, Figure 2.1, schématise le mouvement du prix de l'actif support sur une période.

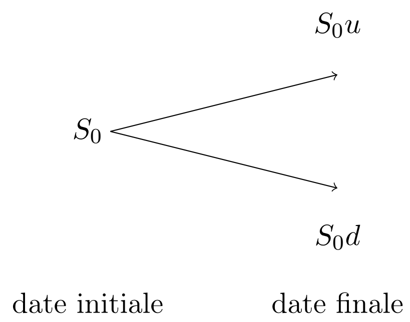

FIG. 2.1 – Prix de l'actif sous-jacent dans un modèle à une période

Proposition 2

Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, on a :
$d < 1 + r < u$.

Démonstration

L'inégalité $d < 1 + r < u$ est équivalente à $S_0 < S_0 (1 + r) < S_0 u$ puisque $S_0 > 0$.

Supposons que $S_0 (1 + r) < S_0 d$; l'agent peut, à la date 0, emprunter S_0 au taux r et achète l'actif support au prix S_0. A la date 1, il revend l'actif support au prix $S_0 d$ et rembourse son emprunt, soit $S_0 (1 + r)$. Il a donc gagné $S_0 d - S_0 (1 + r) > 0$ donc il y a lieu d'une opportunité d'arbitrage.

Supposons maintenant que, $S_0 u < (1 + r) S_0$. L'agent peut, à la date 0 emprunter S_0 au taux $w = u - 1$ et achète l'actif support au prix S_0. A la date 1, il revend l'actif support au prix $S_0 (1 + r)$ et rembourse son emprunt soit $S_0 (1 + w)$ c'est à dire $S_0 (1 + (u - 1))$ il a donc gagné $S_0 (1 + r) - S_0 u > 0$ donc il y a une opportunité d'arbitrage : absurde.

Proposition 3

Le prix d'exercice E est tel que $S_0 d \leq E \leq S_0 u$.

Démonstration

Supposons que $E < S_0d$; alors le détenteur de l'option exercera toujours son droit, et il aura toujours un gain au moins égal à $S_0d - E$ et le vendeur n'aura toujours qu'une perte.

De même ; supposons que $S_0u < E$; alors le détenteur de l'option n'exercera jamais son droit, et il aura toujours une perte au moins égale à $E - S_0u$, et le vendeur aura toujours un gain.

Les termes du contrat et l'exercice formel de l'option impliquent que :
$C_u = Max\,[S_0u - E, 0]$
$C_d = Max\,[S_0d - E, 0]$

Le schema suivant montre la dynamique du prix de l'option d'achat dans un modèle à une période.

$$\begin{tikzcd}
 & C_u = Max[S_0u - E, 0] \\
C_0 \arrow[ur, "P"] \arrow[dr, "1-P"'] & \\
 & C_d = Max[S_0d - E, 0]
\end{tikzcd}$$

FIG. 2.2 – Dynamique du prix de l'option d'achat dans un modèle à une période

Ainsi, la stratégie de couverture qui permet la duplication du prix de l'option consiste à créer un portefeuille qui comporte α actifs risqués et β actifs non risqués tels que, dans chaque état, hausse ou baisse, la valeur de ce portefeuille vaut le prix de l'option.

$$\begin{tikzcd}
 & \alpha S_0u + \beta(1+r) \\
\alpha S_0 + \beta \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \alpha S_0d + \beta(1+r)
\end{tikzcd}$$

FIG. 2.3 – Dynamique de la valeur du portefeuille de couverture dans un modèle à une période

Proposition 4

La composition du portefeuille qui permet de couvrir l'option est la solution unique (α, β) du système

$$\begin{cases} \alpha\,(S_0 u) + \beta\,(1+r) & = & C_u \\ \alpha\,(S_0 d) + \beta\,(1+r) & = & C_d \end{cases} \tag{2.5}$$

et est donnée par :

$$\alpha = \frac{C_u - C_d}{(u-d)\,S_0}.$$

$$\beta = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)(1+r)}.$$

Démonstration

L'unicité est assurée par la linéarité du système.

Le déterminant du système (2.5) n'est pas nul car $u > d$ d'aprés la proposition (2).

Donc le système (2.5) admet une unique solution (α^*, β^*) telle que :

$$\begin{aligned}
\alpha^* &= \frac{\begin{vmatrix} C_u & (1+r) \\ C_d & (1+r) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 u & (1+r) \\ S_0 d & (1+r) \end{vmatrix}} \\
&= \frac{(1+r)\,(C_u - C_d)}{(1+r)\,(u-d)S_0} \\
\alpha^* &= \frac{C_u - C_d}{(u-d)\,S_0} \\
\beta^* &= \frac{\begin{vmatrix} S_0 u & C_u \\ S_0 d & C_d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 u & (1+r) \\ S_0 d & (1+r) \end{vmatrix}} \\
&= \frac{S_0(uC_d - dC_u)}{S_0(1+r)(u-d)} \\
\beta^* &= \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)(1+r)}
\end{aligned}$$

Proposition 5

La valeur du portefeuille de couverture est :

$$\pi_0 = \frac{(\frac{(1+r)-d}{u-d})C_u + (\frac{u-(1+r)}{u-d})C_d}{(1+r)}.$$

Démonstration

Comme on l'a déjà défini , la valeur d'un portefeuille composée de α actifs risqués et de β actifs non risqués est telle que :
$\pi_t = \alpha S_t + \beta$
donc

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \alpha^* S_0 + \beta^* \\
&= \frac{C_u - C_d}{(u-d)S_0} S_0 + \frac{uC_d - dC_u}{(1+r)(u-d)} \\
&= \frac{(1+r)C_u - (1+r)C_d + uC_d - dC_u}{(1+r)(u-d)} \\
&= \frac{[(1+r)-d]C_u + [u-(1+r)]C_d}{(1+r)(u-d)}.
\end{aligned}$$

Proposition 6

Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage , on a
$C_0 = \pi_0$.

Démonstration

Supposons que $\pi_0 < C_0$, il suffit alors de constituer ce portefeuille, en date initiale, et de vendre l'option, en date finale, en encaissant $C_0 - \pi_0$, ce qui constitue un arbitrage.

Supposons que $\pi_0 > C_0$. Il suffit alors d'acheter l'option, en date initiale, et de vendre le portefeuille en date finale, en encaissant $\pi_0 - C_0$, ce qui constitue aussi un arbitrage.

Corollaire 2

La valeur, en date $t = 0$, d'une option d'achat européenne est :

$$C_0 = \frac{1}{1+r}[\frac{(1+r)-d}{u-d}C_u + \frac{u-(1+r)}{u-d}C_d]. \tag{2.6}$$

Démonstration

Application directe de la proposition 6.

2.2.2 Probabilité risque-neutre

Dans l'équation (2.6) spécifiant la valeur de la prime d'une option, le payoff C_u de l'option en cas de hausse est pondéré par un facteur multiplicatif que nous notons q.

$$q = \frac{(1+r)-d}{u-d}. \tag{2.7}$$

Par ailleurs, dans cette équation (2.6) le facteur multiplicatif portant sur C_d est égal à $1-q$

$$1-q = \frac{u-(1+r)}{u-d}. \tag{2.8}$$

Proposition 7

Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, on a
$0 < q < 1$

Démonstration

C'est une application directe de la proposition 2.

Donc q peut s'interpréter comme une probabilité . Sous cette probabilité , l'espérance du payoff de l'option d'achat s'écrit :

$$E^q[C_1] = qCu + (1-q)C_d. \tag{2.9}$$

Ainsi le prix d'une option d'achat peut être interprété comme l'espérance de sa valeur actualisées.
D'où le résultat suivant :

Proposition 8

$$C_0 = \frac{1}{1+r}E^q[C_1] \tag{2.10}$$

Démonstration

D'aprés les équations (2.6), (2.7) et (2.8) on a :

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{1+r}[qC_u + (1-q)C_d] \\ &= \frac{1}{1+r}E^q[C_1]. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Remarque :

La proposition 8 permet de dire que $E^q[C_1] = (1+r)C_0$; ce qui exprime que le rendement d'une option d'achat, sous la probabilité q, vaut exactement r, ce qui signifie qu'aucune prime de risque ne majore l'espérance de rentabilité, d'où l'appellation risque-neutre.

2.3 Evaluation du prix d'une option d'achat dans un modèle à deux périodes

Considérons la dynamique du prix de l'actif sous-jacent dans un modèle à deux périodes

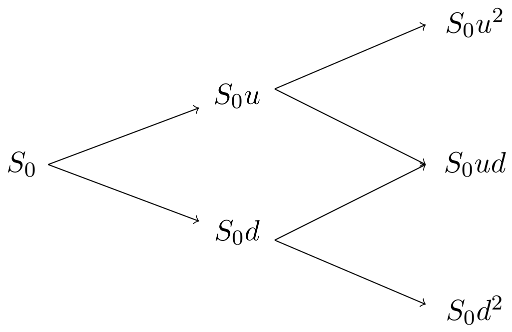

FIG. 2.4 – Dynamique du prix de l'actif sous-jacent dans un modèle à deux périodes.

Ainsi pour la dynamique du prix de l'option d'achat.

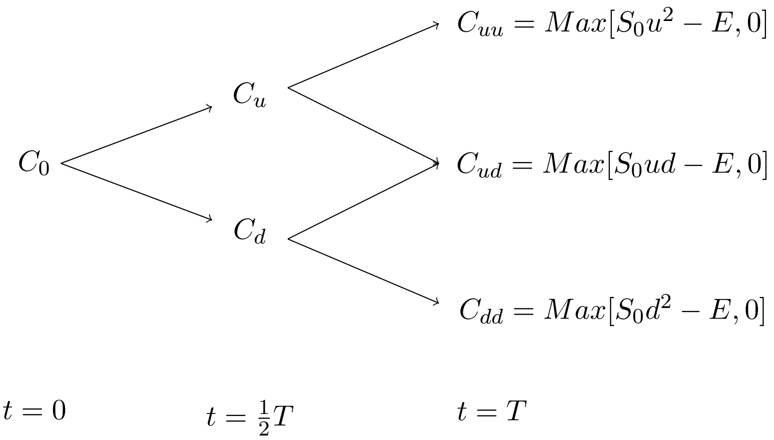

FIG. 2.5 – Dynamique du prix d'une option d'achat dans un modèle à deux périodes.

A l'instant $t = \frac{1}{2}T$, deux cas se présentent, soit l'actif sous-jacent a pour prix S_0u, soit il a pour prix S_od.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & S_0u^2 \\ S_0u \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & S_0ud \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] & S_0ud \\ S_0d \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & S_0d^2 \end{tikzcd}$$

$1^{er} cas$ $\qquad\qquad$ $2^{eme} cas$

FIG. 2.6 – Prix de l'actif sous-jacent aux instants intermédiaires.

Ainsi, on peut présenter chaque cas comme étant un modèle à une période.

En tenant compte des équations (2.9) et (2.10) on aura :

$$C_u = \frac{1}{1+r}\left[qC_{uu} + (1-q)C_{ud}\right] \tag{2.12}$$

$$C_d = \frac{1}{1+r}\left[qC_{ud} + (1-q)C_{dd}\right] \tag{2.13}$$

Toujours dans l'objectif de trouver la valeur de l'option à l'instant initial on construit un portefeuille de couverture avec α actifs risqués et β actifs sans risque. Ce portefeuille aura une valeur identique à C_u si l'actif support tend vers S_0u, et une valeur identique à C_d si l'actif support tend vers S_0d.

Les relations

$$\alpha = \frac{C_u - C_d}{(u-d)s_0} \qquad\qquad \beta = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)(1+r)}$$

sont toujours verifieés pour les nouvelles valeurs de C_u et C_d.

Afin de respecter la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage, la condition d'autofinancement du portefeuille de couverture et en tenant compte des inégalités (2.3), on suivra une stratégie qui consiste à réajuster la composition du portefeuille à la fin de chaque période.

Ainsi le prix de l'option d'achat sera égal à :

$$C = \frac{1}{1+r}\left[qC_u + (1-q)C_d\right] \tag{2.14}$$

en remplaçant les valeurs de C_u et C_d par celles trouvées en (2.12) et (2.13).

Notons que $C_{ud} = C_{du}$.

On obtient :

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{(1+r)^2}\left[q^2 C_{uu} + 2q(1-q)C_{ud} + (1-q)^2 C_{dd}\right] \\
&= \frac{1}{(1+r)^2}\left[q^2 Max\left[S_0u^2 - E, 0\right] + 2q(1-q)Max\left[S_0ud - E, 0\right] + (1-q)^2 Max\left[S_0d^2 - E, 0\right]\right] \\
&= \frac{1}{(1+r)^2}\sum_{j=0}^{2} C_2^j q^j (1-q)^{2-j} Max\left[S_0u^j d^{2-j} - E, 0\right]
\end{aligned}$$

et c'est l'expression analytique qui donne le prix d'une option d'achat européenne dans un modèle à deux périodes.

2.4 Evaluation du prix d'une option d'achat dans un modèle binomial multi-périodes

Dans la section précédente, on a trouvé la valeur du portefeuille initial, la valeur de la prime, à partir des valeurs intermédiaires que peut prendre une option, en respectant la condition d'autofinançement du portefeuille, l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage et et les inégalités (2.3).

Ainsi l'idée d'évaluation d'une option dans un modèle binomial multi-périodes repose sur le même principe.

2.4.1 Principe de base :

On évalue la prime d'une option dans un modèle multi-périodes en procédant par itération. De la fin à chaque sous-période, on construit un portefeuille de couverture, tel que la valeur du portefeuille construit en date $i-1$ constitue l'investissement initial de la période i.

Notons :

(i, j) : le nœud de l'arbre en date i et correspondant à j hausses dans un ordre quelconque,

$S_n = S_0u^jd^{n-j}$: la valeur de l'actif sous-jacent à la période n pour j hausses et $(n-j)$baisses,

$\pi_{i,j}$: la valeur du portefeuille de couverture au nœud (i, j),

$C_{n,j}$: le payoff de l'option à la période n et correspondant à j hausses.

Considérons la dynamique du prix de l'actif support dans un modèle à n périodes, $T = n\delta t$.

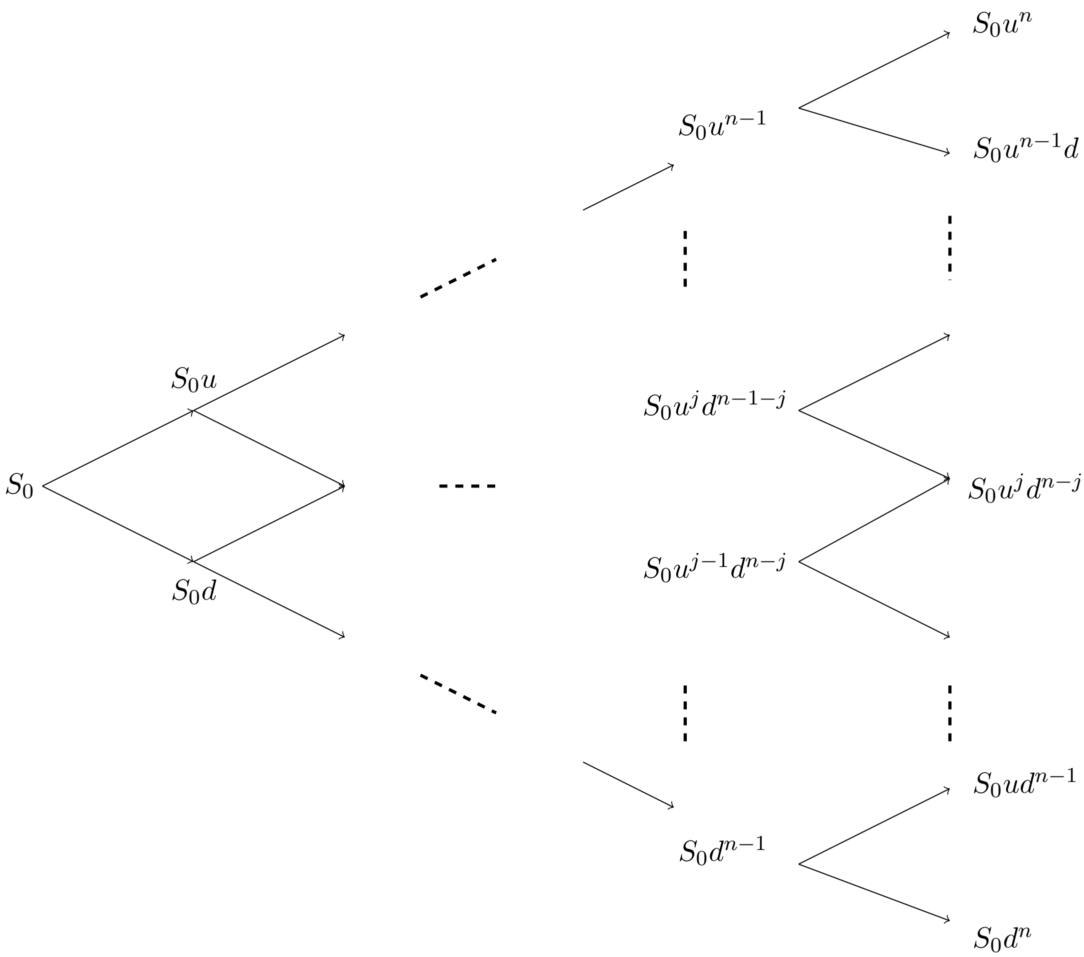

FIG. 2.7 – Dynamique du prix de l'actif sous-jacent dans un modèle multi-périodes.

De même, considérons la dynamique du prix du portefeuille de couverture qui permet de trouver le prix de l'option d'achat souscrite sur l'actif risqué ayant la dynamique précédente.

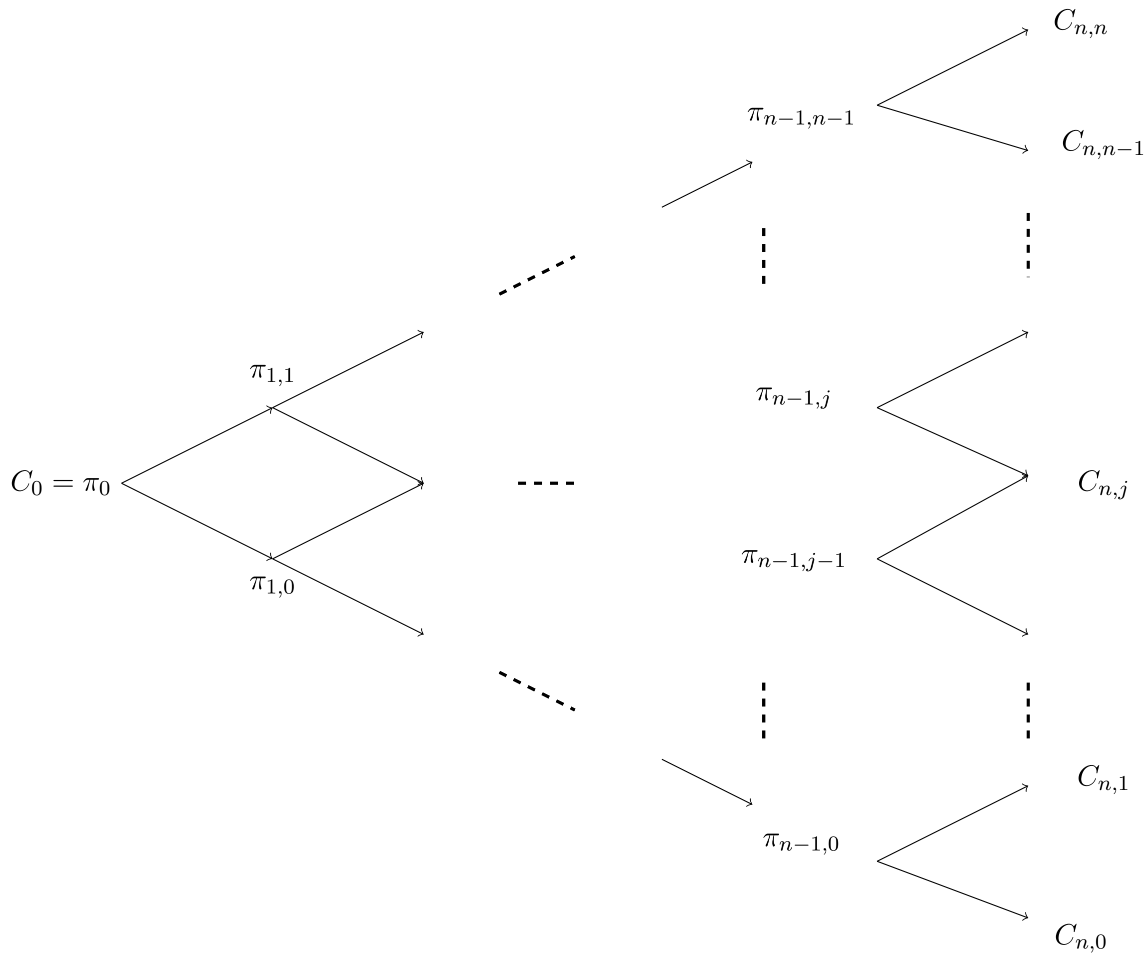

FIG. 2.8 – Dynamique du prix de l'option d'achat dans un modèle multi-périodes.

Proposition : *Formule de Cox Ross et Rubinstein* [6]

La valeur, en date $t = 0$, d'une option d'achat européenne de maturité T est :

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{j=0}^{n} C_n^j q^j (1-q)^{n-j} Max\left[S_0 u^j d^{n-j}, 0\right]$$

Démonstration :

Le principe de la démonstration telle qu'elle est dans l'article de Cox, Ross et Rubinstein repose sur :

- Evaluation du prix de l'option d'achat dans un modèle à une étape qui est établie par l'équation (2.14).

- Evaluation du prix de l'option d'achat dans un modèle à deux périodes.

Ils remarquent que les mêmes propriétés, vérifiées dans la première étape, sont toujours respectées pour un modèle à deux périodes.

Finalement, pour trouver la valeur de l'option d'achat dans un modèle binômial multi-périodes, et pour n'importe quel nombre de périodes, ils établissent une stratégie recursive (" ***backwards*** "), en commençant par la date finale jusqu'à arriver à la date initiale. Ainsi de suite on a le prix de l'option :

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{j=0}^{n} C_n^j q^j (1-q)^{n-j} Max\left[S_0 u^j d^{n-j}, 0\right].$$

Remarque :

Une démonstration par récurrence semble difficile à mettre en oeuvre.

Chapitre 3

Généralités sur les processus stochastiques

3.1 Généralités :

Tribu

soit E un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ un sous ensemble de $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E. On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu sur E lorsqu'elle vérifie les trois conditions suivantes :

1 E $\in \mathcal{A}$.

2 Si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c = E \setminus A \in \mathcal{A}$. (stabilité par passage au complémentaire).

3 Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ (stabilité par réunion dénombrable).

De la définition précédente, on déduit les propriétés élémentaires suivantes :

4 $\emptyset \in \mathcal{A}$.

5 $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

6 Si A et B $\in \mathcal{A}$ alors $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$ et $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \in \mathcal{A}$.

Tribu engendrée

Proposition [14]

Soit E un ensemble non vide, I un ensemble quelconque d'indices et $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus sur E. Alors $\bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$ est une tribu sur E.

Proposition [14]

Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble de E. Il existe une plus petite tribu (au sens de l'inclusion) sur E contenant $\mathcal{C}$: c'est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$. On l'appelle **tribu engendrée par** $\mathcal{C}$ et on la note $\sigma_E(\mathcal{C})$.

On dit aussi que $\mathcal{C}$ est un sous-ensemble générateur de la tribu $\sigma_E(\mathcal{C})$.

Tribu image

Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

- Si $\mathcal{A}_0$ est une tribu sur E alors :
  $\mathcal{A}_1 = \{B \in \mathcal{P}(F); f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_0\}$ est une tribu sur F **(tribu image directe)**.
- Si $\mathcal{A}_1$ est une tribu sur F alors :
  $f^{-1}(\mathcal{A}_1) = \{f^{-1}(B); B \in \mathcal{A}_1\}$ est une tribu sur E **(tribu image réciproque)**.
- Pour tout ensemble $\mathcal{C}$ de parties de F on a :
  $\sigma_E(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma_F(\mathcal{C}))$.

Tribu borélienne

Soit E un espace métrique et Θ la famille des ouverts de E.
On appelle tribu de Borel ou tribu borélienne et on la note $\mathcal{B}(E)$, la tribu engendrée par la famille Θ.
Autrement dit $\mathcal{B}(E) = \sigma_E(\Theta)$. On appelle borélien de E tout élément de la tribu $\mathcal{B}(E)$.

Sous-tribu

Si $\mathcal{A}_0$ est une tribu sur un ensemble E et que la partie $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_0$ est une tribu, alors on dit que $\mathcal{A}_1$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}_0$.

Espace mesurable

Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ une tribu sur E ; le couple $(E, \mathcal{A})$ est appelé **espace mesurable** et les éléments de $\mathcal{A}$ sont dits **$\mathcal{A}$-mesurables**.

Fonction mesurable

Soient $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, F un ensemble muni d'une topologie et f une fonction définie de E dans F.
On dit que f est une fonction **$\mathcal{A}$-mesurable** si :
$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{B}(F)$; ce qui est équivalent à dire que la tribu $f^{-1}(\mathcal{B}(F)) = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(F)\}$ est incluse dans $\mathcal{A}$
, ou encore la tribu $\mathcal{A}_f = \{B \in \mathcal{P}(F); f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ contient $\mathcal{B}(F)$.

Mesure positive

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable.
On appelle mesure positive sur l'espace $(E, \mathcal{A})$ toute application μ de $(E, \mathcal{A})$ dans $[0, +\infty]$ vérifiant :

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, on a

$$\mu(\bigcup_{n \geq 0} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n).$$

On dit que le triplet $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un **espace mesuré**.

Propriétés supplémentaires

- Une mesure μ est dite **finie** ou **bornée** si $\mu(E) < +\infty$.
- Une mesure μ est dite **diffuse** si, pour tout a $\in E$, $\{\text{a}\} \in \mathcal{A}$ et $\mu(\{a\}) = 0$.

Mesure image

Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(F, \mathcal{D})$ un espace mesurable et f une fonction de E dans F $\mathcal{A}$-mesurable.
Alors l'application μ_f définie de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^+$ par :
$\mu_f = \mu(f^{-1}(D))$ pour tout $D \in \mathcal{D}$ est une mesure sur $\mathcal{D}$ appelée **mesure image par f.**

Probabilité

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et μ une mesure positive sur l'espace $(E, \mathcal{A})$.
Si $\mu(E) = 1$ alors μ est appelée **probabilité** ou **mesure de probabilité** et le triplet $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est **un espace probabilisé**.

Remarque

On notera désormais $E = \Omega$, $\mathcal{A} = \mathcal{F}$, et $\mu = P$ pour un espace probabilisé.
Les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés des événements.

3.1.1 Indépendance

Indépendance d'événements

Deux événements A et B de $\mathcal{F}$ sont **indépendants** si $P(A \cup B) = P(A)P(B)$.

Proposition [15]

n événements A_1,...,$A_n \in \mathcal{F}$ sont indépendants si

$$\forall I \subset \{1, ..., n\}, P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Indépendance de tribus

Une famille $(\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n)$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ est indépendante si

$$\forall A_1 \in \mathcal{F}_1, ..., A_n \in \mathcal{F}_n, P(A_1 \cup ... \cup A_n) = P(A_1)...P(A_n).$$

Proposition [4]

Une famille de sous-tribus $(\sigma_\Omega(A_1), ..., \sigma_\Omega(A_n))$ est indépendante si et seulement si les événements $(A_1, ..., A_n)$ sont indépendants.

variable aléatoire réelle

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité.
On appelle **variable aléatoire** une fonction définie de Ω dans $\mathbb{R}$ et Ω-mesurable *i.e.* $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Variables aléatoires indépendantes

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, X et Y deux variables aléatoires réelles définie de Ω dans $\mathbb{R}$. On dit que X et Y sont indépendantes si les tribus qu'elles engendrent sont indépendantes *i.e.* $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a : $\sigma_\Omega(X^{-1}(B))$ et $\sigma_\Omega(Y^{-1}(B))$ sont indépendantes.

3.1.2 Loi d'une variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. Soit X une variable aléatoire à valeur dans un espace $(E, \mathcal{A})$. On appelle **loi** de X ou **distribution** de X **la mesure image** de P par X, i.e. l'application $P_X : \mathcal{F} \mapsto [0,1]$ telle que :

$$\forall A \in \mathcal{A}, P_X(A) = P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}) = P(X^{-1}(A))$$

Théorème [4]

Soit X une variable aléatoire réelle, définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans l'espace probabilisable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
Alors, l'application $P_X(\cdot)$, de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\begin{aligned} P_X(B) &= P(X^{-1}(B)), \\ &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega)\} \in B), \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

est une fonction de probabilité, dite **loi image de** $P(.)$ **par** X ou simplement **loi de la variable aléatoire** X**.**

Remarque

Une variable aléatoire X, en tant qu'application mesurable, peut être intégrée par rapport à la mesure P.
On note $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'ensemble des variables aléatoires intégrables par rapport à P :

$$L^1(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{X : \Omega \mapsto \mathcal{A} \text{ mesurable}/ \int_\Omega |X(\omega)| dP(\omega) < \infty\}.$$

3.1.3 Espérance d'une variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans un espace $(E, \mathcal{A})$.
On appelle **espérance mathématique** ou **moment d'ordre 1** la quantité $\int_\Omega X(\omega) dP(\omega)$, notée $E[X]$.

Remarque

- On dit qu'une variable aléatoire X est centrée si $E(X) = 0$.
- Dans le cas d'un espace d'état Ω fini, on a pour une variable aléatoire X intégrable : $E[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$.

Propriétés

- $\forall X, Y \in L^1 \;\; E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
- $\forall X L^1, \forall a \in \mathbb{R} \;\; E(aX) = aE(X)$

Moment d'ordre 2

soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire. On dit que X admet un **moment d'ordre 2**, si $\int_\Omega |X(\omega)|^2 dP(\omega) < \infty$.
On note $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'ensemble des variables aléatoires de carré intégrable
par rapport à P :

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{X : \Omega \mapsto \mathcal{A} \text{ mesurable}/ \int_\Omega |X(\omega)|^2 dP(\omega) < \infty\}.$$

Covariance et variance

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant chacune un moment d'ordre 2. On appelle **covariance** du couple (X, Y) le nombre

$$Covar(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

On appelle **variance** de X le nombre

$$Var(X) = Covar(X, X) = E[(X - E(X))^2].$$

On **appelle écart-type** de X le nombre

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}.$$

Remarque

On dit qu'une variable aléatoire est réduite si on a $Var(X) = 1$

Propriétés

1. $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$,
2. $\forall a \in \mathbb{R}, Var(aX + b) = a^2 Var(X)$,
3. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Covar(X, Y)$,
4. Si X et Y deux variables aléatoires indépendantes alors $Covar(X, Y) = 0$.

Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
on appelle **fonction de répartition** de X et on note $F_X(\cdot)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} : F_X(t) &= P_X(]-\infty, t]) \\ &= P(X \leq t) \end{aligned}$$

3.2 Variable aléatoire réelle absolument continue

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de fonction de répartition $F_X(\cdot)$.
On dit que X est une variable aléatoire absolument continue, s'il existe une fonction réelle $f_X(\cdot)$ vérifiant les condition suivantes :

1. $f_X(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
2. $f_X(\cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut être sur un ensemble fini de points pour lesquels elle admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite,
3. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx$ existe et est égale à 1,
4. La fonction de répartition $F_X(\cdot)$ peut s'écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, sous la forme : $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du.$

Fonction de densité

Une fonction qui satisfait les quatre conditions précédentes est dite **fonction de densité de probabilité**, ou **fonction de densité** ou tout simplement **densité** d'une variable aléatoire X, absolument continue.

3.3 Variables et lois discrètes classiques

Indicatrice d'un événement

L'ndicatrice de $A \subset \Omega$,notée $\mathbf{1}_A$, est une application définie sur Ω par

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \ si \ x \in A \\ 0 \ si \ x \notin A \end{cases}$$

$\mathbf{1}_A$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\}$.

Masse de Dirac

On appelle masse de dirac en un point $x \in \Omega$ la mesure δ_x définie par

$$\delta_x A = \begin{cases} 1 \ si \ x \in A \\ 0 \ si \ x \notin A \end{cases}$$

3.3.1 Loi de Bernoulli

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p, ou X est une **variable de Bernoulli** de paramètre p si on a
$P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.

3.3.2 Loi binômiale

On appelle loi binômiale de paramètres n et p et on note $\mathcal{B}(n,p)$ la loi de la somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même loi de probabilité p.
On dit que X suit une loi binômiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ lorsque :

- $X(\Omega) = \{0, ..., n\}$.
- pour tout $k \in \{0, ..., n\}$ on a : $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

Loi gaussienne de paramètres m et σ^2

Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale** ou la **loi gaussienne** de paramètres μ et σ^2, et on note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si elle admet la densité

$$x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

Remarques

- On dit qu'une variable gaussienne est centrée lorsque $\mu = 0$.
- On dit qu'une variable gaussienne est réduite lorsque $\sigma^2 = 1$.

Propriétés importantes

Si X suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors on a :
- $aX + b$ suit la loi $\mathcal{N}(\mu + b, a^2\sigma^2)$,
- $\dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$

3.3.3 Filtration

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. On appelle filtration une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $(\mathcal{B}_n) \subset (\mathcal{B}_{n+1}) \subset \mathcal{F}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est une description mathématique de toute l'information dont on dispose à l'instant n.

3.3.4 Processus stochastique réels

Un processus stochastique réel X sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est une famille de variable aléatoires $(X_t)_{t\in[0,T]}$. C'est donc une fonction de deux variables :

$$\begin{array}{lccc} X: & [0,T]\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \\ & (t,\omega) & \mapsto & X(t,\omega). \end{array}$$

Remarque

Chaque $X(t)$ est une variable aléatoire, chaque $X(t,\omega)$ est un nombre réel et chaque $X(\cdot,\omega)$ est une fonction réelle définie sur T, appelée **trajectoire du processus** X.

3.3.5 Processus adapté

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus réel et $(\mathcal{B}_t)_{t\geq 0}$ une filtration. On dit que $(X_t)_{t\geq 0}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{B}_t)_{t\geq 0}$ si pour tout t, X_t est $\mathcal{B}_t$-mesurable.

Remarque

Un processus adapté est celui pour lequel une description probabiliste est réalisable ; c'est à dire, pour toute $t \geq 0$ $(X_t)_{t\geq 0}$ est dans un espace probabilisé $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$.

3.4 Processus stochastiques réels particuliers

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique réel et $t_1, t_2, t_3, ...t_k (k \in \mathbb{N})$ une succession de valeurs du temps.

3.4.1 Processus stationnaire

Le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit stationnaire lorsque les vecteurs aléatoires

$$[X(t_1), X(t_2), X(t_3), ..., X(t_k)] \text{ et } [X(t_1+\tau), X(t_2+\tau), X(t_3+\tau), ..., X(t_k+\tau)]$$

ont la même distribution de probabilité, pour tout $\tau > 0$.

3.4.2 Processus à accroissement indépendant

Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est à accroissement indépendant si les variables

$$X(t_k) - X(t_{k-1}), X(t_{k-1}) - X(t_{k-2}), ..., X(t_2) - X(t_1), X(t_1) - X(t_0)$$

sont indépendantes. Cela s'interprète par le fait que les états décrits par ce type de processus évoluent dans un univers où les variations passées n'influencent pas les variations futures.

3.4.3 Processus à accroissement stationnaire

Considérons deux instants θ_1 et θ_2 avec $\theta_1 < \theta_2$. Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est à accroissement stationnaire si la distribution, associée à l'accroissement, de la variable sur l'intervalle $[\theta_1, \theta_2]$ ne dépend que de la duré écoulée $(\theta_2 - \theta_1)$.
Entre autres : si $s \leq t$, la loi de $X_t - X_s$ est identique à celle de $X_{t-s} - X_0$.

3.5 Mouvement brownien

Soit le processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$. $(X_t)_{t\geq 0}$ est un **mouvement brownien** s'il vérifie les conditions suivantes :

1. X_t suit la loi gaussienne de moyenne nulle et de variance $\theta^2 t$. $\forall t \geq 0$ et $X_0 = 0$.
2. $(X_t)_{t\geq 0}$ a des accroissements indépendants.
3. $(X_t - X_s)$ suit la loi gaussienne de moyenne nulle et de variance $\theta^2(t-s)$ pour tout $t \geq s$, où θ est une variable aléatoire réelle qui suit la loi gaussienne de moyenne nulle et de variance 1.

3.5.1 Mouvement brownien standard

Soit le processus stochastique $(W_t)_{t\geq 0}$. $(W_t)_{t\geq 0}$ est un **mouvement brownien standard**, s'il vérifie les condition suivantes :

1. $(W_t)_{t\geq 0}$ suit la loi gaussienne de moyenne nulle et de variance t. $\forall t \geq 0$ et $W_0 = 0$.
2. $(W_t)_{t\geq 0}$ a des accroissements indépendants
3. $(W_t - W_s)$ suit la loi gaussienne de moyenne nulle et variance $(t-s)$ pour tout $t \geq s$

Remarque

– Le mouvement brownien standard est un cas particulier du mouvement brownien, dont la variable aléatoire θ est égale à 1.

3.5.2 Processus d'Itô

Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit **processus d'Itô** si l'accroissement dX est régi par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t \tag{3.1}$$

où :
$\mu(t)$ et $\sigma(t)$ sont deux fonctions déterministes, $(W_t)_{t\geq 0}$ est un brownien standard et dW_t l'accroissement du mouvement brownien.

Remarque

les coefficients $\mu(t)$ et $\sigma(t)$s'appellent coefficients de dérive et de diffusion respectivement.

3.5.3 Processus de diffusion

Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit **processus de diffusion** si l'accroissement dX s'écrit soit sous la forme :

$$dX_t = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW_t \tag{3.2}$$

soit sous la forme intégrale

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW_s$$

Remarques

1. Les processus d'Itô constituent une classe des processus de diffusions.
2. Les coefficients $\mu(t, X(t))$ et $\sigma(t, X(t))$ suivent des processus stochastiques, bien qu'ils soient calculés avec des fonctions déterministes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, parce que la variable $X(t)$ dont ils dépendent est stochastique.

3.5.4 Mouvement brownien géométrique

Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est un **mouvement brownien géométrique** s'il est régi par l'équation différentielle stochastique

$$dX = \alpha X(t)dt + \beta X(t)dW \tag{3.3}$$

où :
α et β sont constantes.

Remarque

L'équation différentielle stochastique (3.3) est un cas particulier de l'équation (3.2) avec :
- $\mu(t, X(t)) = \alpha X(t)$
- $\sigma(t, X(t)) = \beta X(t)$

et donc le mouvement brownien géométrique est un processus de diffusion.

Le mouvement brownien géométrique est souvent utilisé pour représenter l'évolution des cours de bourse, et généralement, l'équation différentielle stochastique qui le régit est donnée sous la forme suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

où :
- μ représente l'espérance de rentabilité instantané de l'actif (risqué).
- σ la volatilité de l'actif.

3.6 Calcul d'Itô

Soit :

- $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus d'Itô,
- Une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, une fois continûment différentiable par rapport à la première variable t, et deux fois continûment différentiable par rapport à la deuxième variable X_t.

Lemme d'Itô [15] [22]

Sous ces hypothèse on a :

1. $(f(t, X(t)))_{t\geq 0}$ est un processus d'Itô.
2. la différentielle de f,à l'ordre 2, s'écrit sous la forme suivante :

$$df = [\frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t)) + \mu(t)\frac{\partial f}{\partial X}(t, X(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(t, X(t))]dt \; + \; [\sigma(t)\frac{\partial f}{\partial X}(t, X(t))]dW.$$

Chapitre 4

Evaluation du prix d'option d'achat dans le modèle de Black et Scholes

4.1 Modèle standard de Black et Scholes

4.1.1 Hypothèses du modèle

1. Le marché est ouvert en continu et sans coût de transaction.
2. Le marché est constitué de deux actifs, actif risqué et actif sans risque.
3. L'actif risqué ne distribue aucun dividende ; le prix initial est S_0, constante non nulle et le prix instantané S_t est régi par un mouvement brownien géométrique

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{4.1}$$

   μ et σ représentent respectivement la tendance et la volatilité de l'actif risqué, et sont supposées constantes ; $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard.
4. L'actif sans risque est soumis à un taux d'intérêt r, supposé constant.
5. Les options considérées sont de type européen et ont l'actif risqué comme support.
6. Il y a absence d'opportunité d'arbitrage.

Remarques

- La première et la troisième hypothèses ne sont pas évidentes et même non réalisables dans la réalité, mais leur intérêt est de ne pas créer de discontinuités sur la trajectoire du prix de l'actif risqué et de la valeur de l'option.
- La deuxième hypothèse nous permet de dupliquer la valeur de l'option.
- La quatrième hypothèse garantit une tendance μ constante. De plus, si on note β_t la valeur d'actif sans risque en date t , alors, pour une durée de temps dt très petite, on peut écrire :
  $d\beta_t = r\beta_t dt$ soit $\frac{d\beta_t}{\beta_t} = rdt$.
- La cinquième hypothèse permet de donner le modèle le plus simple, car, par définition, on exerce l'option seulement le jour de l'échéance T.

Les même notations que dans le modèle discret sont respectées.

Notons par :

$t = 0$: l'instant de souscription de l'option.

$t = T$: l'échéance de l'option.

E : le prix d'exercice de l'option.

S_t : le prix de l'actif sous-jacent à l'instant t.

α : la quantité d'actif risqué à inclure dans le portefeuille de couverture à l'instant t.

β : la quantité d'actif sans risque à inclure dans le portefeuille de couverture.

r : le taux d'intérêt ; on le suppose constant durant toute la durée de vie de l'option.

$\Gamma_t(t, S_t)$: le payoff de l'option d'achat à l'instant t $\Gamma_T = Max(S_T - E, 0)$.

ψ_t : le portefeuille de couverture à l'instant t.

π_t : la valeur du portefeuille de couverture ψ_t.

$C_0(0, S_0)$: le prix de l'option d'achat à l'instant initial, la prime de l'option.

$C_t(t, S_t)$: le prix de l'option d'achat à l'instant t.

4.1.2 Stratégie dynamique autofinançante

Comme dans le cas discret, on résout le problème de l'évaluation de la prime d'une option par la recherche d'une stratégie dynamique autofinançante qui duplique en date T le payoff de l'option.
Dans un premier temps, on définit la notion de stratégie autofinançante et on en déduit l'équation différentielle stochastique qui régit l'évolution de sa valeur. Considérons π_t la valeur en date t d'un portefeuille investi en actifs risqués et actifs non risqués.

Notons α_t la quantité d'actifs risqués détenue dans le portefeuille, β_t le montant investi en actif sans risque.

$$\pi_t = \alpha_t S_t + \beta_t$$
$$\beta_t = \pi_t - \alpha_t S_t. \tag{4.2}$$

L'évolution de la valeur π_t entre deux dates très proches t et $t + dt$ est décrite sans changement de la composition du portefeuille, par l'équation différentielle suivante :

$$d\pi_t = (\pi_t - \alpha_t S_t) r dt + \alpha_t dS_t \tag{4.3}$$

où rdt représente le rendement obtenu sur l'actif sans risque, et dS_t le gain sur l'actif risqué. L'équation (4.3) décrit bien l'évolution de la valeur π_t, même pour un portefeuille dont la composition varie.
De façon plus générale, pour tout portefeuille (autofinançant ou non), le lemme d'Itô implique

$$\begin{aligned} d\pi_t &= d(\eta_t \beta_t + \alpha_t S_t) \\ &= \eta_t d\beta_t + \beta_t d\eta_t + \alpha_t dS_t + dS_t d\alpha_t \\ &= [\eta_t d\beta_t + \alpha_t dS_t] + [\beta_t d\eta_t + (s_t dS_t) d\alpha_t]. \end{aligned}$$

η_t désigne le nombre d'actifs sans risque composant le portefeuille en date t
et $\eta_t\beta_t = (\pi_t - \alpha_t S_t)$.
Le premier terme entre crochets représente le gain égal à $(\pi_t - \alpha t S_t)rdt + \alpha_t dS_t$, alors que le deuxième terme est égal au montant algébrique des apports, valeur nette des titres achetés en date $t + dt$. C'est ce deuxième terme entre crochets qui est nul pour une stratégie autofinancante pour laquelle

$$\begin{aligned} d\pi_t &= \eta_t d\beta_t + \alpha_t S_t \\ &= (\pi_t - \alpha_t S_t)rdt + \alpha_t dS_t. \end{aligned} \tag{4.4}$$

4.1.3 L'équation de l'évaluation

On cherche un processus $(\pi_t)_{t\geq 0}$ qui représente la valeur d'un portefeuille autofinançant et donc la valeur en T est celle du payoff à dupliquer. On choisit à priori une fonction π de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suffisamment régulière (une fois continûment derivable en la première variable et deux fois en la deuxième) pour pouvoir lui appliquer le lemme d'Itô

$$d\pi(t, S_t) = \frac{\partial \pi}{\partial t}(t, S_t)dt + \frac{\partial \pi}{\partial S}(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2}dS_t^2$$

De l'équation (4.1) on déduit : $dS_t^2 = \sigma^2 S_t^2 dt$ et par substitution dans la relation précédente, on obtient :

$$d\pi(t, S_t) = [\frac{\partial \pi}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \pi}{S^2}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2]dt + [\frac{\partial \pi}{\partial S}(t, S_t)]dS_t. \tag{4.5}$$

Pour que $\pi(t, S_t)$ représente à tout instant t la valeur d'un tel portefeuille, il faut que les variations $d\pi(t, S_t)$ respectent aussi l'équation (4.4).

Pour que (4.4) et (4.5) soient toutes les deux vraies, en identifiant les termes en dS_t et en dt de (4.4) et (4.5) ; on obtient respectivement :

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \frac{\partial \pi}{\partial S}(t, S_t). \\ (\pi(t, S_t) - \alpha_t S_t)r &= \frac{\partial \pi}{\partial t}(t, S_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2. \end{aligned}$$

En remplaçant α_t par $\frac{\partial \pi}{\partial S}(t, S_t)$ dans cette dernière équation et en réarrangeant les termes, il vient :

$$\frac{\partial \pi}{\partial t}(t, S_t) + \frac{\partial \pi}{\partial S}(t, S_t)rS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2 = r\pi(t, S_t).$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation aux dérivées partielles de *Black* et *Scholes*.

Enfin, pour que ce portefeuille autofinançant synthétise l'option, il faut que sa valeur finale soit avec certitude, égale au payoff de l'option :

$\pi(T, S_T) = \Gamma(T, S_T)$

Cette dernière relation constitue la condition aux limites qui complète l'EDP de *Black* et *Scholes*

Proposition : ***Formule de Black et Scholes***

La valeur $C(t,S_t)$ d'une option d'achat européenne, solution de l'EDP de *Black* et *scholes*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t}(t,S_t) + \dfrac{\partial C}{\partial S}(t,S_t) r S_t + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}(t,S_t)\sigma^2 S_t^2 & = & rC(t,S_t) \\ C(t,S_t) & = & \Gamma_T(T,S_T) \end{cases} \tag{4.6}$$

est donnée par :

$$C(t,S_t) = S_t N(d_1) - E\exp^{-r(T-t)} N(d_2).$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\dfrac{S_t}{E} + (r + \dfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Démonstration

La démonstration de cette équation repose sur un changement de variable qui permet de la transformer à une EDP linéaire en S et t, puis la mettre sous la forme réduite. Finalement, moyennant une propriété de similarité, on montre que cette équation ne dépend que d'une seule variable et on aboutit à une équation différentielle ordinaire.

Cette méthode est simple mais ne fonctionne que dans des cas très particuliers. Si nous disposons de théorèmes prouvant l'existence de solutions, l'expression analytique est rarement connu ; il reste le calcul numérique.

Procédons au changement de variable $W_t = \ln S_t$, nous avons les relations suivantes :

$$C(t,S_t) = G(t,W_t) \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial S_t} & = & \dfrac{\partial G}{\partial W_t}\dfrac{\partial W_t}{\partial S_t} = \dfrac{1}{S_t}\dfrac{\partial G}{\partial W_t}. \\ \dfrac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} & = & \dfrac{\partial}{\partial S_t}[\dfrac{1}{S}\dfrac{\partial G}{\partial W_t}] = \dfrac{-1}{S^2}\dfrac{\partial G}{\partial W_t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 G}{\partial W^2}. \end{cases}$$

Nous pouvons réécrire L'EDP de Black et Scholes :

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,S_t) + (\frac{1}{S_t}\frac{\partial G}{\partial W_t}) r S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2[\frac{-1}{S_t^2}\frac{\partial G}{\partial W_t} + \frac{1}{S_t^2}\frac{\partial^2 G}{\partial W_t^2}] = rG.$$

Après simplifications

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,S_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\partial G}{\partial W_t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 G}{\partial W^2} = rG \tag{4.7}$$

Avec $G = max[e^{W_T} - E, 0]$ pour $t = T$.

Pour obtenir la forme réduite de l'équation, effectuons le changement de variable suivant : $\begin{cases} C(t,S_t) & = & e^{-r(T-t)}Y(u,v) \\ u & = & \gamma(T-t) \\ v & = & \alpha\ln(\dfrac{S_t}{E})+\beta(T-t) \end{cases}$

On a à rechercher les valeur constantes α, β et γ telle que la nouvelle EDP soit de la forme réduite :

$$\frac{\partial C}{\partial S_t} = \frac{\partial C}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial S_t} = e^{-r(T-t)}\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\alpha}{S_t}$$

donc

$$rS_t\frac{\partial C}{\partial S_t} = r\alpha e^{-r(T-t)}\frac{\partial Y}{\partial v}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} &= \frac{\partial}{\partial S_t}[e^{-r(T-t)}\frac{\alpha}{s_t}\frac{\partial Y}{\partial v}] \\ &= \frac{\alpha}{S_t^2}e^{-r(T-t)}[-\frac{\partial Y}{\partial v}+\alpha\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2}]. \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} = \frac{\alpha\sigma^2}{2}e^{-r(T-t)}[-\frac{\partial Y}{\partial v}+a\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2}]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}[e^{-r(T-t)}Y] \\ &= re^{-r(T-t)}Y+e^{-r(T-t)}\frac{\partial Y}{\partial t} \\ &= re^{-r(T-t)}Y+e^{-r(T-t)}[\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}] \\ &= re^{-r(T-t)}Y-e^{-r(T-t)}[\gamma\frac{\partial Y}{\partial u}+\beta\frac{\partial Y}{\partial v}]. \end{aligned}$$

Dans ces conditions, l'équation de Black et Scholes devient :

$$re^{-r(T-t)}Y-e^{-r(T-t)}[\gamma\frac{\partial Y}{\partial u}+\beta\frac{\partial Y}{\partial v}]+r\alpha e^{-r(T-t)}\frac{\partial Y}{\partial v}+\frac{\alpha\sigma^2}{2}e^{-r(T-t)}[-\frac{\partial Y}{\partial v}+a\frac{\partial^2 Y}{\partial u^2}] = re^{-r(T-t)}Y.$$

Soit donc :

$$-[\gamma\frac{\partial Y}{\partial u}+\beta\frac{\partial Y}{\partial v}]+r\alpha\frac{\partial Y}{\partial v}+\frac{\alpha\sigma^2}{2}[-\frac{\partial Y}{\partial v}+a\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2}] = 0.$$

et

$$\frac{\alpha^2\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} + (r\alpha - \frac{\alpha\sigma^2}{2} - \beta)\frac{\partial Y}{\partial v} = \gamma\frac{\partial Y}{\partial u}.$$

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} \Longleftrightarrow \begin{cases} \gamma &= \dfrac{\alpha^2\sigma^2}{2} \\ \\ \beta &= \alpha(r - \dfrac{\sigma^2}{2}) \end{cases} \tag{4.8}$$

Avec $u \in \mathbb{R}^+$, $v \in \mathbb{R}$ et $Y(0, v) = max[E(e^{\frac{v}{a}} - 1), 0]$.

Ainsi, on a trouvé l'équation sous une forme réduite. De plus on a un paramètre indéterminé auquel on peut affecter une valeur quelconque.
Pour simplifier les calculs on prend $\alpha = 1$. L'équation (4.8) possède une propriété remarquable qui va permettre de la ramener à une équation différentielle ordinaire.

Pour cela, effectuons le changement de variables suivant :
$u \longrightarrow Z = \lambda^2 u$ et $v \longmapsto w = \lambda v$.

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{\partial Y}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial u} = \lambda^2\frac{\partial Y}{\partial Z}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}[\frac{\partial Y}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}] = \frac{\partial}{\partial v}[\frac{\partial Y}{\partial w}\lambda] = \lambda\frac{\partial}{\partial w}[\frac{\partial Y}{\partial v}] = \lambda\frac{\partial}{\partial w}[\frac{\partial Y}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}] = \lambda^2\frac{\partial^2 Y}{\partial w^2}$$

Ce qui est équivaut à dire que

$$\frac{\partial Y}{\partial Z} = \frac{\partial^2 Y}{\partial w^2}$$

La condition aux bornes respecte également cette condition. Cela signifie que, quels que soient u, v, w et Z nous avons $\dfrac{v}{\sqrt{u}} = \dfrac{w}{Z}$. On est conduit à rechercher une solution du type :
$Y(u, v) = H(x)$ avec $x = \dfrac{v}{\sqrt{u}}$

Le membre droit de l'EDP (4.8) $i.e$ $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial v^2}$ peut être écrit sous la forme :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}[\frac{\partial Y}{\partial v}]$$

avec

$$\frac{\partial Y}{\partial v} = H'(x)\frac{\partial x}{\partial v} = H'(x)\frac{\partial(\frac{v}{\sqrt{u}})}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{u}}H'(x)$$

donc

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}[\frac{H'(x)}{\sqrt{u}}] = \frac{1}{\sqrt{u}}H''(x)\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{u}}H''(x)\frac{1}{\sqrt{u}}$$

donc

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} = \frac{1}{u}H''(x)$$

De même, le membre gauche de l'EDP (4.8) $i.e$ $\frac{\partial Y}{\partial u}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = H'(x)\frac{\partial x}{\partial u} = H'(x)\frac{\partial(\frac{v}{\sqrt{u}})}{\partial u} = -\frac{1}{2}\frac{v}{u\sqrt{u}}H'(x) = -\frac{1}{2}\frac{x}{u}H'(x).$$

alors

$$\frac{1}{u}H''(x) = -\frac{1}{2}\frac{x}{u}H'(x)$$

Donc

$$H''(x) + \frac{1}{2}xH'(x) = 0 \tag{4.9}$$

avec $H(0) = 1$

Cette équation est aisée à résoudre puisque :

$$\frac{H''(x)}{H'(x)} = -\frac{1}{2}x \implies H'(x) = C_1 e^{-\frac{x^2}{4}}$$

$$\implies H(x) = C_1 \int_0^x e^{-\frac{s^2}{4}} ds + C_2$$

si on pose $C_2 = 0$, la condition aux bornes impose $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ par conséquent

$$Y(u,v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{v}{\sqrt{u}}}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4}} ds \tag{4.10}$$

à partir d'un changement de variable

$$w = \sqrt{u}s - v \Longrightarrow dw = \sqrt{u}ds$$

$$Y(u,v) = \frac{1}{\sqrt{\pi u}} \int_0^{+\infty} e^{-\dfrac{(w-v)^2}{4u}} dw \tag{4.11}$$

Comme la fonction sous le signe intégral est paire, nous avons finalement :

$$Y(u,v) = \frac{1}{2\sqrt{\pi u}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\dfrac{(w-v)^2}{4u}} dw$$

Si la condition aux bornes est une fonction $Y(0,v) = Y_0(v)$, la solution du problème peut être écrite sous la forme

$$Y(u,v) = \frac{1}{2\sqrt{\pi u}} \int_{-\infty}^{+\infty} Y_0(w) e^{-\frac{(w-v)^2}{4u}} dw$$

car

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi u}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\dfrac{v^2}{4u}} dw = 1$$

(**somme de la densité d'une loi normale d'espérance nulle et de variance** $2u$)

Maintenant, pour trouver la valeur de l'option, il reste à faire le chemin des changements de variables à l'envers !

Pour ce qui est de

$$\begin{aligned} Y_0(w) &= max(e^u - 1, 0) \\ &= e^u - 1 \end{aligned}$$

Le prix obtenu est positif.

En effet ;

$$\begin{aligned} Y_0(w) &= max(e^u - 1, 0) \\ &= e^u - 1 \\ &= e^{c(T-t)} \\ &= e^{\dfrac{\sigma^2}{2}(T-t)} \qquad \text{car} \qquad c = \frac{\sigma^2}{2} \\ &= e^{\dfrac{\sigma^2}{2}T} \qquad \text{à l'instant initial} \qquad t = 0 \\ &= e^{\dfrac{\sigma^2 T}{2}} > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(t,S) &= \frac{Ee^{-r(T-t)}}{\sqrt{\pi\sigma^2(T-t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^w - 1) e^{-\dfrac{[w - \ln(\frac{S}{X}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}} dw \\ &= Ee^{-r(T-t)}(A - B). \end{aligned}$$

Avec :

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2(T-t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{w - \dfrac{[w - \ln(\dfrac{S}{E}) - \dfrac{(r-\sigma^2)}{2}(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}} dw.$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2(T-t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{[w - \ln(\frac{S}{E}) - (\frac{r-\sigma^2}{2})(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}} dw.$$

On peut simplifier l'expression A de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2(T-t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{w - \frac{[w - \ln(\frac{S}{E}) - \frac{(r-\sigma^2)}{2}(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}} dw. \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2(T-t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\sigma^2(T-t)w - [w - \ln(\frac{S}{E}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}} dw \\
&= \frac{e^{\ln(\frac{S}{E + r(T-t)})}}{\sqrt{\pi\sigma^2(T-t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{[w - \ln(\frac{S}{E}) - (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}} dw
\end{aligned}$$

Le changement de variable inverse de celui qui a été fait en (4.11) et le fait que la fonction soit paire permettent d'écrire :

$$A = \frac{S}{E} e^{r(T-t)} N(d_1)$$

Avec

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Ou $N(\cdot)$ représente la loi normale cumulée jusqu'à d_1.
De la même manière, on obtient :

$$B = N(d_2) \qquad \text{avec} \qquad d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

On retrouve alors le résultat demandé, a savoir le prix de l'option d'achat

$$C(t, S) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)} N(d_2).$$

Conclusion et perspectives

Lorsqu'on cherche à modéliser des systèmes dynamiques on est obligé de tenir compte de toutes les petites perturbations. Néanmoins, dans le monde de la finance, il faut tenir compte d'une difficulté supplémentaire introduite par la présence de l'aléa.

Ces phénomènes sont souvent modélisés par des équations différentielles stochastiques. Cependant, la résolution analytique de ce type d'équations est loin d'être aisée.

Nous avons constaté dans l'analyse du modèle de Black et Scholes que le prix de l'option d'achat dépend de la volatilité de l'actif sous-jacent et n'intègre pas sa tendance. De ce fait, si deux actifs sous-jacents ont la même volatilité, aura-t-on une même prime pour deux options souscrites sur les deux différentes actifs sous-jacents ?

Cette étude nous a permet de tracer quelque lignes de perspectives afin de développer ce type de modélisation, tel qu'un système d'équations différentielles couplés intégrant l'évolution de l'actif sous- jacent et l'évolution du prix de la prime.

Dans [17] et [18] l'outil non standard permet de donner une autre définition du mouvement brownien.

En effet, considérons un intervalle de temps $[0, T]$. Soit ν un nombre pair illimité, posons $dt := \frac{T}{\nu}$ alors : $\Theta := \{0, dt, 2dt, \cdots, \nu dt = T\}$ est un intervalle discret infiniment proche de [0, T].

Soit $\Omega := \{-\sqrt{dt}, +\sqrt{dt}\}^{\Theta}$, l'ensemble des application ω de Θ dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $s \in \Theta, \omega(s) = -\sqrt{dt}$ ou $+\sqrt{dt}$, $i.e\ \Omega^{\Theta} := \{\omega \in \Omega /$ pour tout s $\in \Theta, \omega(s) = -\sqrt{dt}$ ou $+\sqrt{dt}\ \}$.

Considérons maintenant le processus de Wiener non standard dans une approche de temps discret.

$$\begin{array}{llll} W: & \Theta \times \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, \omega) & \longmapsto & W(t, \omega) := \sum_{s \leq t} \omega(s). \end{array}$$

Le processus de Wiener non standard dans le cas discret satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} W(0) & = & 0 \\ \\ dW(t) & = & \begin{cases} +\sqrt{dt} & \text{avec une probabilité } \frac{1}{2} \\ \\ -\sqrt{dt} & \text{avec une probabilité } \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

pour tout $t \in \Theta \setminus T$.

Koudjeti dans [14] a démontré que le mouvement brownien gèomètrique non standard, qu'il a noté $\{\beta(t)/t \in \Theta\}$, approximation binomiale discrete du mouvement brownien gèomètrique en temps continu qui modélise le prix de l'actif sous jacent, satisfait l'équation différentielle stochastique non standard suivante :

$$\begin{cases} \beta(0) & = & S_0 \\ \\ \dfrac{d\beta(t)}{\beta(t)} & = & \mu dt + \sigma dW(t) \end{cases}$$

et on construisant une stratégie autofinançante discrête d'un portefeuille contenant des actifs risqués et non risqués seulement par la duplication de la valeur de $f(\beta(T))$ ou f est une fonction définie de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui désigne la valeur de l'option d'achat à l'instant $t = T$, on trouvera le prix de l'option d'achat à l'instant initial. De plus, cette approche convergera vers la formule de Black et Scholes pour un nombre infiniment grand de périodes.

L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage est la pierre angulaire des modèles d'évolutions. Cependant, elle est irréalisable.
L'étude des modèles d'évaluations avec présence d'opportunité d'arbitrage fera l'objet d'un prochain travail avec l'utilisation de l'outil non standard à travers les textes de Edward Nelson : Dynamical theories of Brownien motion [17], Radically elementary probability Theory [18] et les travaux de Fouad Koudjeti : Elements of External Calcus with an application to Mathematical Finance [14].

Bibliographie

[1] M. Bellalah. *"Gestion des risques et produits dérivés classiques et exotiques"* Dunod 2003.

[2] M. Bellalah et Y. Simon. *"Options, contrats à terme et gestion des risques"* Economica 2000.

[3] F. Black and M. Scholes. *"The pricing of Option and Corporate Liabilities"* Journal of Political Economy 81, No 3 (May-June 1973), pp : 637-654.

[4] M. Bentarzi " Introduction au calcul des probabilités" Tome 1 MSTD-BEN édition 2002.

[5] R. Cobbaut. *"Théorie financière"* Economica 2005, 4^{eme} édition.

[6] C. Cox ; S. Ross et M. *"Option Pricing : A Simplified Approach"* Journal of Financial Economics September 1979.

[7] R. Dana et M. Jeanblanc-picqué. *"Marchés financiers en temps continu"* Economica 1998, 2^{eme} édition.

[8] D. Duffie et P.Protter. *"From discrete to continouns-time finance : weak convergence of the financial gain process "* Journal of Mathematical Finance, Vol. 2, No. 1 (Junuary1992), pp : 1-15.

[9] R. Elie. *"Calcul stochastique pour la finance"* www.ceremade.dauphine.fr/∼elie/elie_files/CStoFinance.pdf

[10] T. Gallay "Théorie de la mesure et de l'intégration" ; http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/enseignement/IMG/pdf/integration.pdf

[11] T. Gallouët et R. Herbin "Mesure, intégration et probabilité " ; http ://www.cmi.univ-mrs.fr/∼gallouet/licence.d/mes-pro.pdf

[12] R. Goffin. *"Principe de finance moderne"* Economica 2008.

[13] J. Hull. *"Options, futures et autres actifs dérivés"* Pearson Education 2007, 6^{eme} édition.

[14] F. Koudjeti "Elements of External Calcus with an application to Mathematical Finance" Theses on Systems, Organisations and Management 1995.

[15] E. H. Laamri " Mesure, intégration, convolution et transformée de Fourier" 2^{eme} édition Dunond 2007.

[16] D. Lamberton. *"Introduction au calcul stochastique appliquée à la finance"* Ellipses 1992.

[17] E. Nelson. *"Dynamical theories of Brownian motion"*; http ://www.math.princeton.edu/~nelson/books/bmotion.pdf

[18] E. Nelson. *"Radically elementary probability theory"*; http ://www.math.princeton.edu/~nelson/books/rept.pdf

[19] F. Pascal. *"Les produits dérivés financiers : méthodes d'évaluation"* Dunod 2005.

[20] R. Portait. *"Les produits dérivés"* Dalloz 1996 2^{eme} édition.

[21] R. Portrait et P. Poncet. *"Finance de marché Instruments de base, produits dérivés, portefeuilles et risques"* Dalloz 2008.

[22] F. Quittard-Pinon. *"Marchés des capitaux et théorie financière"* Economica 2003, 3^{eme} édition.

[23] D. Revuz et M. Yor. *"Continuous martingales and brownian motion"* Springer, 1991.

[24] Y. Simon. *"Encyclopédie des marchés financiers"* Tome1 et 2 Economica 1997.