République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté de Mathématiques
Résumé du mémoire de Magister en Mathématiques
Option : Modélisation Stochastique en Recherche Opérationnelle

Présenté par[1] :
KESSIRA Abderrahim

Thème
Structure probabiliste et inférence dans des modèles de séries chronologiques à seuils

Résumé

Au cours des quatre dernières décennies, la modélisation des séries chronologiques a connu un développement important, Une classe de modèles non linéaires, particulièrement utile, est celle des modèles autorégressifs à seuil (TAR) introduits par Tong . De nombreuses séries réelles sont mieux modélisées par ces modèles plutôt que par les modèles linéaires.
Le but de ce travail est d'étudier, d'abord, les conditions de stabilité de ce type de modèle et de ses généralisations, ensuite les propriétés asymptotiques des estimateurs des paramètres des modèles considérés grâce à deux méthodes d'estimation adoptées : la méthode des moindres carrés et la méthode du maximum de vraisemblance. Une étude de simulation intensive a été entreprise. Elle a confirmé les performances des estimateurs obtenus. Nous avons enfin adopté la procédure de modélisation de Tsay. Une étude de simulation a été menée qui a confirmé l'optimalité de cette procédure. Une étude sur une série de données réelles, le nombre annuel de lynx canadiens pris au piège, a été faite.

[1]Sous la direction de : Hafida Guerbyenne Directrice de Thèse, Maitre de Conférence Classe A à l'USTHB

1 Introduction

Les modèles linéaires ont montré leurs limites dans la modélisation de nombreuses séries de données d'observations. Des alternatives non linéaires ont paru pour pallier à ces insuffisances. Parmi celles-ci figurent les modèles de séries chronologiques à seuils introduits par Tong (1977a, 1977b, 1978). Ils ont reçu l'intérêt de nombreux chercheurs (Ling (1999) Qian (1998), Tong (2010) etc.). Ils permettent de modéliser, en particulier, des phénomènes comme l'existence de cycles limites, la non réversibilité du temps etc.

2 Notions de stabilité

De nombreux modèles de séries chronologiques acceptent une représentation markovienne et de là, les résultats connus sur les chaînes de Markov à espace d'états continu peuvent être appliqués pour l'étude de ces modèles. Une approche du problème de la stationnarité figure dans les travaux de Tweedie (1974, 1975, 1983, 1988) et dans l'ouvrage de Meyn et Tweedie (1993). Cette approche est, en particulier, utilisée lorsque la spécification du modèle comporte des effets de seuils excluant l'existence d'une représentation linéaire.

3 Etude de la structure probabiliste

3.1 Modèle autorégressif à seuil TAR(1)

Nous considérons un modèle TAR(1) qui s'écrit sous la forme suivante

$$y_t = \phi_1 y_{t-1}^+ + \phi_2 y_{t-1}^- + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{N}^* \tag{3.1}$$

avec $y^+ = \max(y,\ 0)$ et $y^- = \min(y,\ 0)$. (3.1) peut s'écrire aussi de la manière suivante

$$y_t = [\phi_1 \mathbf{1}(y_{t-1} > 0) + \phi_2 \mathbf{1}(y_{t-1} \leq 0)] y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{N}^* \tag{3.2}$$

dans les deux formes ci-dessus, ϕ_1 et ϕ_2 sont des constantes réelles et $\{\varepsilon_t,\ t \geq 1\}$ est une suite de variables aléatoires *i.i.d*, de moyenne nulle et de densité $f(.)$ strictement positive sur $\mathbb{R}$.

3.1.1 Ergodicité du modèle TAR(1)

Notons que $\{y_t,\ t \geq 0\}$, définit par (3.1) est une chaîne de Markov à espace d'état $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $\mathcal{B}$ est la σ-algèbre de Borel sur $\mathbb{R}$, la densité de transition est donné par

$$p(x, z) = f(z - \phi_1 x^+ + \phi_2 x^-). \tag{3.3}$$

Si μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, alors $\{y_t,\ t \geq 0\}$ est μ-irréductible et aperiodique (voir Orey (1971)). Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres ϕ_1 et ϕ_2 pour que $\{y_t\}$ soit ergodique.

Théorème 3.1.1 (Petruccelli et Woolford (1984)) *Le processus $\{y_t,\ t \geq 0\}$, défini par (3.1), est ergodique si et seulement si*

$$\phi_1 < 1, \qquad \phi_2 < 1 \qquad et \qquad \phi_1\phi_2 < 1. \tag{3.4}$$

Supposons que pour $r \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq k \leq l$, $E(\left|\varepsilon_t^{(k)}\right|^r) < \infty$, alors sous la condition précédente, la mesure de probabilité invariante pour la chaîne $\{y_t\}$ a un moment d'ordre r fini, et la chaîne $\{y_t\}$ est géométriquement ergodique.

3.1.2 Modèle TAR(1) général

On définit un modèle TAR(1)général à l régimes que l'on note TAR(l; 1,...,1) par

$$y_t = \phi_0^{(k)} + \phi_1^{(k)} y_{t-1} + \varepsilon_t^{(k)} \quad si\ y_{t-1} \in \mathbb{R}_k, \tag{3.5}$$

avec $\mathbb{R}_k =]r_{k-1},\ r_k],\ 1 \leq k \leq l$, tel que $-\infty = r_0 < r_1 < ... < r_l = +\infty$, de manière équivalente, nous pouvons écrire (3.5) comme

$$y_t = \sum_{k=1}^{l} \mathbf{1}(y_{t-1} \in \mathbb{R}_k)\{\phi_0^{(k)} + \phi_1^{(k)} y_{t-1} + \varepsilon_t^{(k)}\}, \tag{3.6}$$

où $\{\phi_i^{(k)};\ i = 0, 1;\ 1 \leq k \leq l\}$ sont des constantes réelles et pour chaque k, $\{\varepsilon_t^{(k)};\ t \geq 1\}$ est une suite de variables aléatoires *i.i.d* centrées et de densité $f_k(.)$ strictement positive sur $\mathbb{R}$; on suppose aussi que $\{\varepsilon_t^{(k)}\}$ et $\{\varepsilon_t^{(j)}\}$ sont indépendants pour $k \neq j$.

3.1.3 Ergodicité

Notons que, comme pour un modèle TAR(1) simple, $\{y_t;\ t \geq 1\}$ définit par (3.6), est une chaîne de Markov à espace d'état $(\mathbb{R},\ \mathcal{B})$, $\mathcal{B}$ est la σ-algèbre de Borel sur $\mathbb{R}$. La densité de transition est donnée par

$$p(x, z) = \sum_{k=1}^{l} \mathbf{1}(y_{t-1} \in \mathbb{R}_k) f_k(z - \phi_0^{(k)} - \phi_1^{(k)} x). \tag{3.7}$$

On note aussi que $\{y_t;\ t \geq 1\}$ est μ-irréductible et apériodique quand μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Cependant, contrairement au cas d'un modèle TAR(1) simple, la loi de transition $\{P(x, .)\}$ correspondant à (3.7) , n'est pas nécessairement fortement continue. Alors, nous devons donner le lemme suivant pour permetre ensuite de prouver l'ergodicité.

Lemme 3.1.1 (Tweedie (1975)) *Soit $\{P(x, .)\}$ la loi de transition correspondant à (3.7). Alors, si K est l'ensemble des compacts dans B de mesure de Lebesgue positive, alors $0 < \pi(K) < \infty$, $\forall K \in K$, où $\pi(.)$ est une mesure sous invariante pour $\{y_t\}$.*

Maintenant, on donne les conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres $\{\phi_i^{(k)};\ i = 0, 1;\ 1 \leq k \leq l\}$ pour que le processus $\{y_t\}$ soit ergodique.

Théorème 3.1.2 (Chan *et al* (1985)) *Supposons que pour $r \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq k \leq l$, $E(\left|\varepsilon_t^{(k)}\right|^r) < \infty$. Le processus $\{y_t\}$ défini par (3.7), est ergodique si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :*

$$\begin{aligned}
\phi_1^{(1)} &< 1, \quad \phi_1^{(l)} < 1, \quad \phi_1^{(1)}\phi_1^{(l)} < 1; && (3.8)\\
\phi_1^{(1)} &= 1, \quad \phi_1^{(l)} < 1, \quad \phi_0^{(1)} > 0; && (3.9)\\
\phi_1^{(1)} &< 1, \quad \phi_1^{(l)} = 1, \quad \phi_0^{(l)} < 0; && (3.10)\\
\phi_1^{(1)} &= 1, \quad \phi_1^{(l)} = 1, \quad \phi_0^{(l)} < 0 < \phi_0^{(1)}; && (3.11)\\
\phi_1^{(1)}\phi_1^{(l)} &= 1, \quad \phi_1^{(1)} < 0, \quad \phi_0^{(l)} + \phi_1^{(l)}\phi_0^{1} > 0. && (3.12)
\end{aligned}$$

De plus, la mesure de probabilité invariante pour la chaîne $\{y_t\}$ a un moment d'ordre r fini, et la chaîne $\{y_t\}$ est géométriquement ergodique.

3.2 Modèle moyenne mobile à seuil

On considère un modèle moyenne mobile à seuil du 1^{er} ordre (TMA(1)), qui génère la série chronologique $\{y_t\ :t=0, \pm 1, \ldots\}$ *i.e.*,

$$y_t = [\phi + \psi \mathbf{1}(y_{t-1} \leq r)]\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.13}$$

où ε_t est une suite de variable aléatoire *i.id* de moyenne nulle et de densité $f(x)$.

3.2.1 Ergodicité et inversibilité des modèles TMA(1)

Soit $\{(y_t,\ \varepsilon_t)\}$, $t = 0, \pm 1, \ldots$, définis sur l'espace de probabilité $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$. D'abord, on définit une suite aléatoire

$$S_n(t) = \begin{cases} \varepsilon_t, & \text{si } n = 0, \\ [\phi + \psi \mathbf{1}(S_{n-1}(t-1) \leq r)]\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Lemme 3.2.1 (Ling *et al* (2007)) *Si $|\psi| \sup_x |xf(x)| < 1$ et $E|\varepsilon_t| < \infty$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(t)$ existe p.s. $\forall t \in \mathbb{Z}$.*

Théorème 3.2.1 (Ling *et al* (2007)) *Sous les hypothèses du Lemme 3.2.1,*$\{X_t\}$ *défini par* $X_t = \lim_{n\to\infty} S_n(t)$ *est l'unique solution strictement stationnaire et ergodique du modèle (3.13).*

Théorème 3.2.2 (Ling *et al* (2007)) *Soit* $\{y_t\}$ *l'unique solution strictement stationnaire et ergodique du modèle (3.13), avec* $E\left|\log|y_t|\right| < \infty$ *. Le modèle (3.13) est inversible si* $|\phi|^{1-F_y(r)} |\phi+\psi|^{F_y(r)} < 1$*, où* $F_y(r)$ *est la distribution de* y_t*.*

3.2.2 Extension à des modèles TMA généraux

On considère le modèle moyenne mobile à k seuils MA (1, k) :

$$y_t = \left\{ \phi_0 + \sum_{j=1}^{k} \psi_j \mathbf{1}(r_{j-1} < y_{t-1} \le r_j) \right\} \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.14}$$

avec $r_0 = -\infty < r_1 < r_2 < ... < r_k = +\infty$. C'est un cas spécial du modèle SETARMA introduit par Tong (1983).
D'abord, on définit

$$u_n(t) = \left\{ \phi_0 + \sum_{j=1}^{k} \psi_j \mathbf{1}(r_{j-1} < S_n(t) \le r_j) \right\} \varepsilon_t$$

et

$$S_n(t) = \begin{cases} \varepsilon_t & si\ n = 0 \\ u_{n-1}(t-1) + \varepsilon_t & si\ n \ge 1 \end{cases}$$

Théorème 3.2.3 (Ling *et al* (2007)) *Si* $\sum_{j=1}^{k} \left|\psi_j + \psi_{j+1}\right| \sup_x |xf(x)| < 1$*, alors* $\{X_t\}$ *défini par* $X_t = \lim_{n\to\infty} S_n(t)$ *est l'unique solution strictement stationnaire et ergodique du modèle (3.14), si* $E\left|\log|y_t|\right| < \infty$*, et le modèle (3.14) est inversible si* $\prod_{j=1}^{k} \left|\phi_0 + \psi_j\right|^{F_y(r_j) - F_y(r_{j-1})} < 1$.

On considère ensuite le modèle à deux régimes TMA(p, q) :

$$y_t = \sum_{i=1}^{p} \left[\phi_j + \psi \mathbf{1}(y_{t-q} \le r)\right] \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \tag{3.15}$$

Théorème 3.2.4 (Ling *et al* (2007)) *Si* $\left|\psi_p\right| \sup_x |xf(x)| + \sup_x |f(x)| \times E\left|\sum_{i=1}^{p-1} \psi_i \varepsilon_{t-i}\right| < 1$ *quand* $p = q$ *ou* $\sup_x |f(x)| \times E\left|\sum_{i=1}^{p} \psi_i \varepsilon_{t-i}\right| < 1$ *quand* $p < q$*, alors* $\{X_t\}$ *définie par* $X_t = \lim_{n\to\infty} S_n(t)$ *est l'unique solution strictement stationnaire et ergodique du modèle (3.15).*

3.3 Modèle ARMA conditionnellement hétéroscédastique à seuils

La classe des modèles ARMA conditionnelllement hétéroscédastiques à seuils notée DTARMACH est une généralisation du modèle DTARCH de Li et Li (1996) et inclut plusieurs modèles de séries chronologiques connus comme cas particuliers, comme le modèle GARCH à seuils, le modèle ARMA à seuil (TARMA) et le modèle TAR, pour lesquels nous donnerons les conditions de stationnarité et de finitude des moments. Cependant, les difficultés essentielles sont dans l'établissement de l'irréductibilité et dans la construction des fonctions tests pour l'utiliation du critère de Tweedie. Pour cela, pour prouver l'existence de la solution strictement stationnaire pour le modèle DTARMACH, on utilise les résultats de Tweedie (1988) d'où a été relaxée l'hypothèse de l'irréductibilité.

On définit le modèle ARMA conditionnellement hétéroscédastique à seuils pour le processus $\{y_t\}$ par

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_0^{(j)}+\sum_{i=1}^{p_j}\phi_i^{(j)}y_{t-i}+\sum_{i=1}^{q_j}\theta_i^{(j)}\varepsilon_{t-i}+\varepsilon_t, \quad r_{j-1}< y_{t-b}\leq r_j, && (3.16)\\ \varepsilon_t &= z_t h_t^{1/2}, && (3.17)\\ h_t &= \alpha_0^{(k)}+\sum_{i=1}^{u_k}\alpha_i^{(k)}\varepsilon_{t-i}^2+\sum_{i=1}^{v_k}\beta_i^{(k)}h_{t-i}, \quad a_{k-1}< y_{t-d}\leq a_k, && (3.18)\end{aligned}$$

avec $j=1\,,...,l_1,\ k=1,...,l_2,\ b$ et d sont des constantes dans $\mathbb{N}^*$, les seuils vérifient $-\infty=r_0<r_1<...<r_{l_1}=\infty$ et $-\infty=a_0<a_1<...<a_{l_2}=\infty$; les coefficients $\phi_i^{(j)},\ \theta_i^{(j)},\ \alpha_i^{(k)}$ et $\beta_i^{(k)}$ sont des constantes réelles; $\alpha_0^{(k)}>0,\ \alpha_i^{(k)}\geq 0$ et $\beta_i^{(k)}\geq 0$; $\{z_t\}$ est une suite de variables aléatoires $i.i.d$ de moyenne nulle et de variance 1.

Pour appliquer le critère de Tweedie, réécrivons (3.16)-(3.18) sous la forme espace état. De (3.17)-(3.18), on a

$$\varepsilon_t^2=\alpha_0^{(k)}z_t^2+\sum_{i=1}^{u_k}\alpha_i^{(k)}z_t^2\varepsilon_{t-i}^2+\sum_{i=1}^{v_k}\beta_i^{(k)}z_t^2h_{t-i}, \quad a_{k-1}< y_{t-d}\leq a_k. \tag{3.19}$$

Notons par

$$\begin{aligned} Y_t &= (y_t,...,y_{t-p+1},\varepsilon_t,...,\varepsilon_{t-q+1})'_{(p+q)\times 1},\\ H_t &= (\varepsilon_t^2,...,\varepsilon_{t-u+1},h_t,...,h_{t-v+1})'_{(u+v)\times 1},\end{aligned}$$

avec $p=\max_j p_j,\ q=\max_j q_j,\ u=\max_k u_k$ et $v=\max_k v_k$, on note aussi

$$\widetilde{\Phi}^{(j)}=\left(\begin{array}{ccc|ccc} \phi_1^{(j)} & ... & \phi_p^{(j)} & \theta_1^{(j)} & ... & \theta_q^{(j)}\\ & I_{(p-1)\times(p-1)} & O_{(p-1)\times 1} & & O_{(p-1)\times q} & \\ \hline & & & 0 & ... & 0\\ & O_{q\times p} & & & I_{(q-1)\times(q-1)} & O_{(q-1)\times 1}\end{array}\right) \tag{3.20}$$

$$\widetilde{\alpha}^{(k)}=\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_1^{(k)}z_t^2 & ... & \alpha_u^{(k)}z_t^2 & \beta_1^{(k)}z_t^2 & ... & \beta_v^{(k)}z_t^2\\ & I_{(u-1)\times(u-1)} & O_{(u-1)\times 1} & & O_{(u-1)\times v} & \\ \hline \alpha_1^{(k)} & ... & \alpha_u^{(k)} & \beta_1^{(k)} & ... & \beta_v^{(k)}\\ & O_{(v-1)\times u} & & & I_{(v-1)\times(v-1)} & O_{(v-1)\times 1}\end{array}\right) \tag{3.21}$$

où $\phi_i^{(j)}=0$ si $i>p_j,\ \theta_i^{(j)}=0$ si $i>q_j,\ \alpha_i^{(k)}=0$ si $i>u_k,\ \beta_i^{(k)}=0$ si $i>v_k,\ j=1,...,l_1,\ k=1,...,l_2,$ et $I_{r\times r}$ est la matrice identité de taille $r\times r$.

Les équations (3.16)-(3.18) sont équivalentes à l'écriture suivante :

$$\begin{aligned} Y_t &= \sum_{j=1}^{l_1}(\widetilde{\Phi}_0^{(j)}+\widetilde{\Phi}^{(j)}Y_{t-1})\mathbf{1}_{(r_{j-1}<y_{t-b}\leq r_j)}+\varepsilon_t\eta, && (3.22)\\ H_t &= \sum_{k=1}^{l_2}(\widetilde{\alpha}_{0t}^{(k)}+\widetilde{\alpha}_t^{(k)}H_{t-1})\mathbf{1}_{(a_{k-1}<y_{t-d}\leq a_k)}; && (3.23)\end{aligned}$$

avec $\widetilde{\Phi}_0^{(j)}=(\phi_0^{(j)},\ 0,...,\ 0)'_{(p+q)\times 1}$, η est un vecteur de taille $(p+q)\times 1$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la $1^{ère}$ et la $(p+1)^{ème}$ qui prennent la valeur 1; aussi, $\widetilde{\alpha}_{0t}^{(k)}$ est un vecteur de taille $(u+v)\times 1$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la $1^{ère}$ et la $(u+1)^{ème}$ qui sont $\alpha_0^{(k)}z_t^2$ et $\alpha_0^{(k)}$ respectivement.

Soit

$$X_t=\begin{pmatrix}Y_t\\ H_t\end{pmatrix},\quad B_{0t}^{(j,k)}=\begin{pmatrix}\widetilde{\Phi}_0^{(j)}\\ \widetilde{\alpha}_{0t}^{(k)}\end{pmatrix} \text{ et } B_t^{(j,k)}=\begin{pmatrix}\widetilde{\Phi}^{(j)} & 0\\ 0 & \widetilde{\alpha}_t^{(k)}\end{pmatrix},$$

en combinant (3.22)-(3.23), on obtient

$$X_t=\sum_{j=1}^{l_1}\sum_{k=1}^{l_2}(B_{0t}^{(j,k)}+B_t^{(j,k)}X_{t-1})1_{(X_{t-1}\in\mathbb{R}_{j,b;k;d})}+\widetilde{\varepsilon}_t, \tag{3.24}$$

où $\widetilde{\varepsilon}_t = (\varepsilon_t \eta', 0, ..., 0)'_{(p+q+u+v)\times 1}$, et $\mathbb{R}_{j,b;k,d}$ est le produit Cartesien

$$\mathbb{R}_{j,b;k,d} = \mathbb{R}^{b-1} \times]r_{j-1},\ r_j] \times \mathbb{R}^{d-b-1} \times]a_{k-1},\ a_k] \times \mathbb{R}^{p+q-d} \times \mathbb{R}_+^{u+v},$$

Théorème 3.3.1 (Ling (1999)) *Supposons que $E(z_t^{2m})$ est fini pour $m > 0$. Si*

$$\sum_{i=1}^{p} \max_j |\phi_i^{(j)}| < 1 \tag{3.25}$$

et

$$\rho \left[\max_k E(\widetilde{\alpha}_t^{(k)\otimes m}) \right] < 1, \tag{3.26}$$

alors (3.16)-(3.18) possède une solution strictement stationnaire $\{y_t,\ \varepsilon_t\}$, et $E_{\pi_1}(|\ y_{t-t'_1} y_{t-t'_2} ... y_{t-t'_m}|)$ et $E_{\pi_2}(|\ \varepsilon_{t-t''_1} \varepsilon_{t-t''_2} ... \varepsilon_{t-t''_m}|)$ sont finis, avec $t'_i \in \{0,\ 1, ...,\ p\}$, $t''_i \in \{0,\ 1, ...,\ u\}$, $i = 1, ..., m$, et , π_1 et π_2 sont les distributions stationnaires de $\{y_t\}$ et $\{\varepsilon_t\}$ respectivement.

4 Estimation des modèles à seuils

4.1 Modèle TAR(1) simple

On suppose que la suite $\{\varepsilon_t\}$ possède un moment d'ordre $2 + \xi$ fini, $\xi > 0$; alors la distribution stationnaire de $\{y_t\}$ possède un moment d'ordre 2 fini. σ^2 représente la variance de l'erreur, nous noterons par la suite $(y_t^+)^2$ et $(y_t^-)^2$ par y_t^{+2} et y_t^{-2} respectivement.

Théorème 4.1.1 (Petruccelli et Woolford (1984)) *Si ϕ_1 et ϕ_2 vérifient (3.4), alors*
$\widehat{\phi}_1 = \sum_{t=1}^{n} y_t y_{t-1}^+ \Big/ \sum_{t=1}^{n} y_{t-1}^{+2}$, $\widehat{\phi}_2 = \sum_{t=1}^{n} y_t y_{t-1}^- \Big/ \sum_{t=1}^{n} y_{t-1}^{-2}$ *et*
$\widehat{\sigma}^2 = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} \left(y_t - \widehat{\phi}_1 y_{t-1}^+ - \widehat{\phi}_2 y_{t-1}^- \right)$ *sont des estimateurs consistants et asymptotiquement gaussiens pour ϕ_1, ϕ_2 et σ^2 respectivement.*

4.2 Modèle TAR(1) multiple

Théorème 4.2.1 *Si $\phi_0^{(k)}$ et $\phi_1^{(k)}$ vérifient une des conditions (3.8)-(3.12)*
$\widehat{\phi}_0^{(k)} = n(k)^{-1} \left[\sum_{t\in J(k)} y_{t+1} - \widehat{\phi}_1^{(k)} \sum_{t\in J(k)} y_t \right]$, $\widehat{\phi}_1^{(k)} = \left[\sum_{t\in J(k)} y_t y_{t+1} - \sum_{t\in J(k)} y_t \sum_{t\in J(k)} y_{t+1}/n(k) \right] \Big/ nS_{(k)}^2$
où $nS_{(k)}^2 = \sum_{t\in J(k)} y_t^2 - (\sum_{t\in J(k)} y_t)^2/n(k)$ et $\widehat{\sigma}_{(k)}^2 = n(k)^{-1} \sum_{t\in J(k)} \left(y_{t+1} - \widehat{\phi}_0^{(k)} - \phi_1^{(k)} y_t \right)^2$, $1 \le k \le l$, sont des estimateurs fortement consistants et asymptotiquement gaussiens pour $\phi_i^{(k)}$ et $\sigma_{(k)}^2$, $i = 0, 1;\ 1 \le k \le l$.

4.3 Estimation par la méthode du maximum vraisemblance d'un modèle autorégressif à seuils

Dans cette section, on dérive des propriétés similaires pour les estimateurs du maximum vraisemblance du même modèle SETAR(2; p, p) sous des conditions de régularité sur la densité des erreurs, non nécessairement gaussiennes. On définit un modèle SETAR(2; p, p) par :

$$y_t = h(y_{t-1},\ \theta) + \varepsilon_t, \qquad t \ge 1, \tag{4.1}$$

pour $\theta = (\theta'_1,\ \theta'_2,\ r,\ d)' \in \mathbb{R}^{2p+3} \times \{1,\ 2\ ,\ ...\ ,\ p\}$, où $\mathbf{y}_{t-1} = (y_{t-1},\ y_{t-2},\ ...\ ,\ y_{t-p})'$, $\theta_j = (\phi_0^{(j)},\ \phi_1^{(j)},\ ...\ ,\ \phi_p^{(j)})' \in \mathbb{R}^{p+1}$, $j = 1,\ 2$, et pour $x \in \mathbb{R}^p$,

$$h(x,\ \theta) = (\phi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i^{(1)} x_i) 1(x_d \le r) + (\phi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i^{(2)} x_i) 1(x_d > r).$$

Les erreurs $\{\varepsilon_t\}$ dans (4.1) sont des variables aléatoires $i.i.d$ de moyenne nulle et de variance constante. Dans ce qui suit, on suppose que la série définie par le modèle (4.1) est stationnaire et ergodique. Soit $\widehat{\theta}_n = (\widehat{\theta}'_{cn},\ \widehat{r}_n,\ \widehat{d}_n)'$ une fonction mesurable de $(y_0,\ \dots,y_n)$ telle que $\widehat{\theta}_n$ maximise la fonction de vraisemblance conditionnelle

$$L_n(\vartheta) := \prod_{t=1}^{n} f(y_t - h(y_{t-1},\ \vartheta))$$

Notons $\vartheta = (\vartheta'_c,\ s,\ q)'$, $\theta = (\theta'_c,\ r\ ,\ d)'$, $\theta_c = (\theta'_1,\ \theta'_2)'$. En raison de la discontinuité due à la présence du paramètre threshold dans la fonction vraisemblance, l'algorithme de maximisation est donné par les étapes suivantes :

Etape 1. Pour s fixé dans $\overline{\mathbb{R}}$, $q \in \{1,\ 2,\ \dots,\ p\}$, notons $L_{nsq}(\vartheta_c) = L_n(\vartheta_c,\ s,\ q) = L_n(\vartheta)$. Soit $\vartheta_{cn}(s,\ q) \in K$ tel que $\vartheta_{cn}(s,\ q) = \arg\max_{\vartheta_c \in K} L_{nsq}(\vartheta_c)$.

Etape 2. Considérons ensuite la fonction de vraisemblance $(s,\ q) \longrightarrow L_n(\vartheta_{cn}(s,\ q),\ s,\ q)$.Notons que $L_n(\vartheta_{cn}(s,\ q),\ s,\ q)$ a un nombre fini de valeurs possibles. Soit $\widehat{r}_n,\ \widehat{d}_n$ les plus petites valeurs satisfaisant:

$L_n(\vartheta_{cn}(\widehat{r}_n,\ \widehat{d}_n),\ \widehat{r}_n,\ \widehat{d}_n) = \max_{s\in\overline{\mathbb{R}},\ q\in\{1,\ \dots\ ,\ p\}} L_n(\vartheta_{cn}(s,\ q),\ s,\ q)$, on remplace ensuite $\widehat{r}_n,\ \widehat{d}_n$ dans $\vartheta_{cn}(s,\ q)$ pour avoir
$\widehat{\theta}_{cn} = \vartheta_{cn}(\widehat{r}_n,\ \widehat{d}_n)$. Ainsi, $\widehat{\theta}_n = (\widehat{\theta}'_{cn},\ \widehat{r}_n,\ \widehat{d}_n)'$ est un estimateur du maximum vraisemblance de θ. Aussi, d'après la définition de $\widehat{\theta}_{cn},\ \widehat{r}_n$ et $\widehat{d}_n$, on a $L_n(\widehat{\theta}'_{cn},\ \widehat{r}_n,\ \widehat{d}_n) = L_n(\vartheta_{cn}(\widehat{r}_n,\ \widehat{d}_n),\ \widehat{r}_n,\ \widehat{d}_n) \geq L_n(\vartheta_{cn}(s,\ q),\ s,\ q) \geq L_n(\vartheta)$, alors $L_n(\widehat{\theta}'_{cn},\ \widehat{r}_n,\ \widehat{d}_n) = \sup_{\vartheta\in\Omega} L_n(\vartheta)$. Cela signifie que $\widehat{\theta}_n = (\widehat{\theta}'_{cn},\ \widehat{r}_n,\ \widehat{d}_n)'$ est un MLE de θ.

4.3.1 Consistance forte

On commence par les hypothèses sur la densité f des erreurs ε_t et le processus sous-jacent.

(C_1) f est absolument continue et strictement positive sur tout $\mathbb{R}$. avec la dérivée $\dot{f}$, soit $\varphi = \dot{f}/f$ et $I(f) = \int \varphi^2(x)f(x)dx < \infty$. (C_2) φ est Lip(1). (C_3) φ est différentiable et la dérivée $\dot{\varphi}$ est Lip(1). (C_4) $E|\varepsilon_t|^4 < \infty$. Pour vérifier la n-consistance et la distribution asymptotique de l'estimateur du threshold, nous avons besoin de considérer les hypothèses suivantes: (M_1) Le point $r \in \mathbb{R}$ est un point de discontinuité pour h, *i.e.* il existe $X^* = (1,\ y_0,\ \dots\ ,\ y_{1-p})'$ tel que $(\theta_1 - \theta_2)'X^* \neq 0,\ y_{1-d} = r.(M_2)$ $\{y_t\}$ admet une unique mesure π telle que $\exists K,\ \rho < 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^p,\ \forall k \geq 1,\ ||P^k(x,\ .) - \pi(.)|| \leq K\rho^k(1 + |x|)$, avec $||\ .\ ||$ et $|\ .\ |$ représentent la norme de la variation totale et la norme euclidienne respectivement.

Théorème 4.3.1 (Qian (1998)) *Supposons que $\{y_t\}$ dans le modèle (3.13) est stationnaire et ergodique, si les conditions (C_1) et (C_2) sont vérifiées. Alors $\widehat{\theta}_n \longrightarrow \theta$ p.s quand $n \longrightarrow \infty$ (sous θ). Supposons que les conditions $(C_1) - (C_4)$, (M_1) et (M_2) sont vérifiées. Alors* $\lim_{n\longrightarrow\infty} |n(\widehat{r}_n - r)| = 0$.

5 Application

Le modèle autorégressif à seuils proposé par Tong (1978) est un des modèles non linéaires qui a la particularité de pouvoir reproduire les phénomènes de cycles limites, d'irréversibilité dans le temps, de dépendance amplitude-fréquence et du phénomène de saut (Voir Tong et Lim (1980)). La plupart des motivations qui existent pour ce modèle concernent les cycles limites de séries temporelles cycliques, et en effet, ce modèle est capable de reproduire des cycles limites asymétriques. Cependant, la difficulté des modèles autorégressifs à seuils n'est pas seulement dans la théorie, mais aussi dans la pratique; cela est dû (a) au manque d'une procédure de modélisation (b) à l'incapacité d'identifier la variable threshold et d'estimer ses valeurs. On a présenté dans cette partie une procédure pour la construction d'un modèle autorégressif à seuils, donnée par Tsay. Une statistique du test proposé est donnée pour tester la non linéarité et pour spécifier la variable threshold basée sur les résidus prédictifs. Des outils graphiques supplémentaires sont donnés pour identifier le nombre et localiser les thresholds potentiels. Finalement, on a utilisé ces statistiques pour construire le modèle à seuils. Les statistiques et ses propriétés sont utilisées dans une régression linéaire récursive arrangée. On évalue par simulation, ses performances pour différentes tailles d'échantillons et pour une série réelle connue dans la littérature.

Bibliographie

Akaike, H. (1973), Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. 2nd Int. Symp. on Inf. Theory (B. N. Petrov et F. Csaki, pp. 267-281. Budapest : Akademiai Kiado).

Akaike, H. (1979), A Bayesian extension of the minimum AIC procedure of autoregressive model fitting. Biometrika, 66, 237-242.

An, H.Z. et Chen, S.G. (1997) A note on the ergodicity of non-lineare autoregressive model. Statst. Probab. Lett. 34. 365-372.

An, H.Z. et Huang, F.C. (1996) The geometrical ergodicity of non-linear autoregressive models. Statist. Sinica. 6. 943-956.

Anděl, I. Netuka et Zvára, K. (1984) On threshold autoregressive processes. Kybernetika. 20. 89-106.

Beneš, V. E. (1967) Existence of finite invariant measures for Markov processes. Proc. Amer. Math. Soc. 18. 1058-1061.

Billingsley, P. (1968) Convergence of Probability Measures. Wiley, New York.

Bollerslev, T. (1986) Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. J. Econometrics. 31. 307-327.

Bollerslev, T., Chou, R. Y., et Kroner, K. F.(1992) ARCH modelling in finance. J. Econometrics. 52. 5-59.

Brockwell, J.P. et Davis. R. A. (1991) Time series : Theory and Methods. Springer-Verlag. 2^{nd} edition. New York.

Brockwell, J.P., Liu. J. et Tweedie, R. L. (1992) On the existence of stationary threshold autoregressive moving average processes. J. Time Ser. Anal. 13, 95-107.

Bulmer, M. G. (1974) A statistical analysis of 10 year cycle in Canada. J. Anim. Ecol., 43, 701-718.

Campbell, M. J. et Walker, A. M. (1977) A survey of statistical work on the MacKenzie River series of annual Canadian lynx trappings for the years 1821-1934 and a new analysis. J. R. Statist. Soc. A. 140, 411-431.

Chen, R. et Tsay, R.S. (1991) On the ergodicity of TAR(1) processes. Ann. Appl. Probab. 1. 613-634.

Chan, K. S., Petruccelli, J. D., Tong, H., et Woolford, S. W. (1985) A multiple threshold AR(1) model. J. Appl. Prob. 22, 267-269.

Chan, K. S., Tong, H. (1985) On the use of the deterministic Lyaponov function for the ergodicity of stochastic difference equation. Adv. Appl. Prob. 17, 666-678.

Chan, K. S., Tong, H. (1986) On estimating thresholds in autoregressive models. J. Time Ser. Anal. 7. 197-190.

Cline, D.B.H, et Pu, H.H. (1999) Stability of non-linear AR(1) time series with delay. Stoch. Proc. Appl. 82. 307-333.

Cline, D.B.H, et Pu, H.H. (2004) Stability and Lyapunov exponent of the threshold AR-ARCH models. Ann. Appl. Probab. 14. 1920-1949.

Doob, J. L. (1953) Stochastic Processes. John Wiley & Sons , New York.

Engle, R. F. (1982) Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of variance of U.K. inflation. Econometrica. 50. 987-1008.

Feller, W. (1971) An Introduction to Probability Theory and its Applcations, Vol.2. Wiley, New York.

Foster, F. G. (1953) On the stochastic matrices associated with certain queuing processes. Ann. Math. Statist. 24, 355-360.

Guegan, D. et Diebolt, J. (1994) Probabilistic properties of the β-ARCH model. Statist. Sinica. 4. 71-89.

Hannan, V. et Ozaki, T. (1980) Amplitude-dependent exponential AR model fitting for non-linear random vibrations. in Anderson(Ed.), O.D. Time Series. North-Holland. Amesterdam. 57-71.

Keenan, D. M. (1985) A Tukey non-additivity type test for time series non-linearity. Biometrika. 72. 39-44.

Klimko, L. A. et Nelson, P. I. (1978) On conditionnal least squares estimation for stochastic processus. Ann. Statist. 6, 629-642.

Lai, T. L. et Wei, C. Z. (1982) Least squares estimates in stochastic regression models with applications to identification and control of dynamic systemes. Annals of Statistics. 10. 154-166.

Liedscher, E. (2005) Towards a unified approch for proving geometric ergodicity and mixing properties of non-linear autoregressive processes. J. Time. Ser. Anal. 26. 669-689.

Ling, S. (1999) On probability properties of a double threshold ARMA conditionnal heteroskedasticity model. J. Appl. Probab. 36. 688-705.

Ling, S. et Tong, H. (2005) Testing a linear moving average model aginst threshold moving average models. Ann. Statist. 33. 2529-2552.

Ling, S., Tong, H. et Li, D. (2007) Ergodicity and inversibility of threshold moving average models. Bernoulli. 13. 161-168.

Li, C.W. et Li, W.K. (1996) On a double threshold autoregressive conditional heteroskedastic time series model. J. Appl. Econometrics. 11. 253-274.

Liu, J. et Susko, E. (1992) On strict stationarity and ergodicity of a non-linear ARMA model. J. Appl. Probab. 29. 363-373.

Liu, J., Li, W.K. et Li, C.W. (1997) On threshold autoregression with conditionnal heteroscedastic variances. J. Statist. Plann. Inference. 62. 279-300.

Meyn, P. S. et Tweedie, R. L. (1993) Markov chains and stochastic stability. Springer-Verlag. London.

Mélard, G. et Roy, R. (1988) Modèles de séries chronologiques avec seuils. Rev. Statist. Appl. XXXVI(4). 5-24.

Milhøj, A. (1985) The moment structure of ARCH processes. Scand. J. Statist. 12. 281-292.

Nummelin, E. (1984) General irreducible Markov chains and non-negative operators. Cambridge University Press, Cambridge.

Orey, S. (1971) Limit Theorems for Markov Chain Transition Probabilities. Van Nostrand Reinhold, New York.

Petruccelli, J. D. et Woolford, S. W. (1984) Athreshold AR(1) model. J. Appl. Prob. 21, 270-286.

Petruccelli, J. D. (1986) On the consistency of least squares estimators for a threshold AR(1) model. J. Time Ser. Anal. 7. 269-278.

Petruccelli, J. D. et Davies, N. (1986) A portmanteau test for self-exciting threshold autoregressive-type npn-linearity in time series. Biometrika. 73. 687-694.

Pflug, Ch.G, (1983) The limiting log-likelihood processes for discontinuous density families. Z. Wahrsheinlichkeits-theorie verw. Gebiete 64. 15-35.

Pole, A. et Smith, A.F.M. (1985) A bayesian analysis of some threshold switching models. J. Econ. 29. 97-119.

Pristley, M. B. (1980) State-dependent models : a generalapproach to non-linear time series analysis. J. Time Series Analysis 1, 47-71.

Qian. L. (1998) On maximum likelihood estimators for a threshold autoregression. J. Statist. Plan. Inf. 75. 21-46.

Samia, I. N., et Chan, K. S. (2009) Maximum likelihood estimation of generalised threshold model. working paper

Tjøstheim, D. (1990) Non-linear time series and Markov chains. Adv. Appl. Probab. 22. 587-611.

Tong, H. (1977a) Some comments on the Canadian lynx data. J. R. Statist. Soc., A, 140, 432-436, 448-468.

Tong, H. (1977b)Discussion of a paper by A. J. Lawrance and N. T. Kottegoda. J. R. Statist. Soc. A, 140, 34-35.

Tong, H. (1978) On threshold model. In Pattern Recognition and Signal Processing, ed. C. H. Chen, Sijhoof and Nordhoff, Alphen aan den Rijin, The Netherlands.

Tong, H. et Lim, K. S. (1980) Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data. J. R. Statist. Soc. B42, 245-292.

Tong, H. (1983) Threshold Models in Non Linear Time series Analysis. Lecture Notes in Statistics 21, Springer-Verlag, New York.

Tong, H. (2007) Birth of th threshold time series model. Statist. Sinica. 17, (1), 8-14.

Trasvirta, T. et Luukkonen, R (1985) Choosing between linear and threshold autoregressive models. Dans Dans Anderson(Ed.), O.D. Time Series Analysis: Theory and Practice. 7. Northe-Holland. Amesterdam. 129-137.

Tsay, R. S. (1986) Non-linearity test for time series. Biometrika. 73. 461-466.

Tsay, R. S. (1989) Testing and modeling threshold autoregressive processes. J. Amer. Statist. Assoc. 84. 231-240.

Tsay, R. S. (1998) Testing and modeling multivariate threshold models. J. Amer. Statist. Assoc. 93. 1188-1202.

Tsay, R. S. (2002) Analysis of financial time series. New York: John Wiley & Sons.

Tweedie, R. L. (1974) R-theory for Markov chains on a general state space I: solidarity properties and R-recurrent chains. Ann. Prob. 2, 840-864.

Tweedie, R. L. (1974) R-theory for Markov chains on a general state space II: r-subinvariant measures for r-transient chains, Ann. Prob. 2, 865-878.

Tweedie, R. L. (1975) Sufficient conditions for ergodicity and recurrence of Markov chains on a general state space. stoch. Proc. Appl. 3, 385-403.

Tweedie, R. L. (1976) Criteria for classifying general Markov chains. Adv. Appl. Prob. 8, 737-771.

Tweedie, R. L. (1983) The existence of moments for stationary Markov chains. J. Appl. Prob. 20, 191-196.

Tweedie, R. L. (1988) Invariant measure for Markov chains with no irreducibility assumptions. J. Appl. Prob. 25A, 275-285.

Tweedie, R. L. (2001) Drift conditions and invariant measures for Markov chains. Stoch. Process. Appl. 92. 345-354.