N^0 d'ordre : 24/2013-M/MT

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en Mathématiques

Spécialité : Analyse : Équations aux dérivées partielles

Par

KHADRAOUI Athmane

THÈME

STABILISATION DE L'EQUATION DES ONDES AVEC DES CONDITIONS AUX LIMITES DYNAMIQUES ET UN TERME MEMOIRE

Soutenu publiquement le :02/06/2013 devent le jury composé de :

Mr.	**Racid BEBBOUCHI**	Professeur	à L'U. S. T. H. B.	Président
Mr.	**Ammar KHEMMOUDJ**	M. de confrences	à L'U. S. T. H. B.	Directeur de mémoire.
Mr.	**Amor KESSAB**	Professeur	à L'U. S. T. H. B.	Examinateur
Mr.	**Arezki TOUZALINE**	Professeur	à L'U. S. T. H. B.	Examinateur

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements les plus particuliers à Monsieur ***Ammer KHEMMOUDJ*** *maitre de conférance de l'U.S.T.H.B, qui a accepté de diriger ce mémoire, pour son aide et ces précieux conseils qui m'ont guidé tout au long de ce travail. Je tiens également à exprimer mes vifs remerciements au* ***Rachid BEBBOUCHI*** *de U.S.T.H.B de m'avoir donné l'honneur de présider le jury de ce mémoire. Je remercie également Messieurs* ***Amor KESSAB*** *et* ***Arezki TOUZALINE*** *de l'U.S.T.H.B, d'avoir accepté de faire partie du jury de ce mémoire. Enfin je remercie toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.*

DEDICACES

◊

À mes
très chers parents,
À mes chères sœurs Mimouna et
Soumia, À mes frères, À Assim et Israà
À mes chères amis Nabil et abdelhak, À tous
mes amis, et à tous mes proches, À
mes enseignants tout ou
long de mes
études.

◊

Table des matières

Notations

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes.

$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$	ensemble des entiers naturels non nuls.
$\mathbb{R}$	ensemble des réels.
$\mathbb{R}_+$	ensemble des réels positifs.
$\overline{\mathbb{R}}$	droite réelle achevée, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
$\mathbb{R}^n$	espace euclidien de dimension n.
x	vecteur de $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$.
$\lvert x\rvert$	norme euclidienne de x, $\lvert x\rvert = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$.
Ω	ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
$\Gamma = \partial\Omega$	frontière de Ω.
ν	le vecteur unitaire normal à la frontière Γ extérieur à Ω.
∇u	gradient de $u, \nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$.
$\operatorname{div} v$	divergence du vecteur v, $\operatorname{div} v = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial v}{\partial x_n}$.
$\triangle u$	laplacien de u, $\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$.
$\partial_\nu u$	$= \dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ la dérivée normale de u.
$\mathcal{C}^0(\Omega)$	espace des fonctions continues sur Ω.
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	espace des fonctions continues sur Ω dont les dérivées partielles.
	d'ordre $\leq k$ sont continues sur Ω, k entier positif
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega)$.
$L^0(\Omega)$	ensemble des fonctions mesurables sur Ω.
$L^p(\Omega)$	$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}\,\text{mesurable}; \int_\Omega \lvert u\rvert^p \, dx < \infty\}$ $(1 \leq p < \infty$, constant).
$L^\infty(\Omega)$	$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}\,\text{mesurable}; \exists c \geq 0$ tell que $\lvert u(x)\rvert \leq c$ p.p $x \in \Omega\}$.
p'	conjugé de Hölder de p, $p' = \frac{p}{p-1}$ si $p > 1$ et $p' = \infty$ si $p = 1$.

$\mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniment dérivables dans Ω, à support compact dans Ω.
$\mathcal{D}'(\Omega)$	espace des distributions dans Ω.
$W^{m,p}(\Omega)$	espace de Sobolev des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles au sens des distribution d'ordre $\leq m$ sont également dans $L^p(\Omega)$.
$W_0^{m,p}(\Omega)$	la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.
p.p.	presque partout.
$< .,. >$	le crochet de dualité.
$(.,.)$	le produit scalaire.
$\|\|.\|\|_E$	la norme dans l'espace E.
$\rightarrow$	symbole de convergence forte.
$\rightharpoonup$	symbole de convergence faible.
$\hookrightarrow$	symbole d'injection.

Chapitre 1

Introduction

Un problème d'équations aux dérivées partielles consiste à se donner, en plus des équations proprement dites, soit des conditions initiales soit des conditions aux limites soit les deux, à voir si une solution existe, si elle est unique, si elle dépend régulièrement des données et à chercher des algorithmes de calcul. Nous parlons alors, suivant les différentes situations de Cauchy bien posé ou de problèmes bien posés au sens de Hadamard.

Dans ce mémoire on étudie le problème de stabilisation de l'équation des ondes avec des conditions au bord de Ventcel avec des termes mémoire. Les problèmes de Ventcel sont caractérisés par la présence d'opérateurs différentiels tangentiels de même ordre que l'opérateur principal. Ces problèmes interviennent dans la modélisation de nombreux phénomènes : mécaniques comme l'élasticité ou physiques comme les processus de diffusion ou la propagation d'ondes.

Les conditions de Ventcel (cf.[51]) sont obtenues par des méthodes asymptotiques.

La condition

$$\partial_\nu u - \Delta_T u = g \quad \text{sur} \quad \Gamma$$

dite condition de Ventcel (cf.[51]), a été introduite par Ventcel pour des processus de diffusion.(cf.[51]).

Plus généralement l'approche proposée peut être utilisée pour étudier la stabilisation frontière d'autres problèmes comme :

- Le bilaplatian
- L'équation de la chaleur
- Les équations de Maxwell.

ou d'opérateurs plus généraux : coefficient, variables, ordre élevé ; etc... .

1.1 Note historique sur la notion de stabilisation exponentielle de l'équation des ondes

Cette section a pour but de rappeler les travaux principaux sur la décroissance exponentielle de l'énergie d'un système gouverné par des équations aux dérivées partielles (appelé système distribué).
Cette notion a pris, sous l'influence des travaux de D. L. Russell (cf. [73]) le nom de stabilisation frontière ou interne exponentielle.

1.1.1 Stabilisation frontière d'un exemple modèle

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, dont la frontière est $\Gamma = \partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
On désigne par ν le champ unitaire normal à la frontière Γ extérieur à Ω, et par ∂_ν l'opérateur de dérivation dans cette direction.
On appelle stabilisation frontière de l'équation des ondes dans Ω, avec une condition de Dirichlet homogène et une condition de Newmann non homogène considérées respectivement sur Γ_0 et Γ_1, où (Γ_0, Γ_1) est une partition de Γ, la donnée d'un opérateur (appelé opérateur de feedback frontière)

$$F : V \times H \longrightarrow K$$

où V, H et K sont des espaces de fonctions ou de distributions, telle que l'énergie associée à la solution du problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u & = & 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u & = & 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu u & = & F(u, u_t) & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) & = & u^0 & \text{dans } \Omega \\ u_t(x,0) & = & u^1 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

est

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |u_t|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right]$$

décroisse de manière exponentielle quand $t \to +\infty$, et ceci pour tous u_0, u_1 pris dans des espaces convenables.

Remarque 1.1.1 *Le problème de stabilisation frontière consiste à exhiber un opérateur de feedback frontière de telle sorte que l'énergie $E(t)$ du système vérifie*

$$E(t) \leq C \exp(-\beta t), \qquad \forall t \geq 0.$$

où C et β sont des constantes positives. β est appelé taux de décroissance de l'énergie.

Définition 1.1.1 *On définit ainsi la notion d'opérateur de feedback interne*

$$G : \widetilde{V} \times \widetilde{H} \longrightarrow \widetilde{K}$$

(où $\widetilde{V}, \widetilde{H}, \widetilde{K}$ sont des espaces de fonctions ou de distributions), ensuite on s'intéresse au comportement asymptotique de l'énergie associée au problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u & = & G(u, u_t) & \textit{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u & = & 0 & \textit{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu u & = & F(u, u_t) & \textit{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) & = & u^0 & \textit{dans } \Omega \\ u_t(x,0) & = & u^1 & \textit{dans } \Omega \end{cases}$$

Remarque 1.1.2 *A vrai dire la notion de stabilisation frontière n'est pas propre aux conditions de Dirichlet homogène et Neumann non homogène, ni même à l'équation des ondes ; on peut se poser ce genre de problèmes pour tout système évolutif, avec conditions aux limites choisies de sorte que le problème soit bien posé.*

1.1.2 Note historique

On a vu au-dessus que les problèmes de stabilisation exponentielle que l'on peut se poser pour les système évolutifs, consistent à trouver un opérateur de feedback frontière ou interne de sorte que l'énergie du système décroisse en exponentielle. On va rappeler, d'une manière brève, les différentes phases qu'à connues la notion de stabilisation exponentielle, sans vraiment rentrer dans les détails, ou prétendre que cet aperçu historique soit exhaussif.

Les travaux de C. S. Morawetz En 1959, en analysant l'expression explicite de la solution obtenue par séparation des variables de l'équation des ondes dans un domaine non borné de $\mathbb{R}^3$, C. Wilcox (cf. [79]) a réussi à montrer que l'énergie, locale, décroit de manière exponentielle quand le temps tend vers l'infini.
Sous les hypotèses plus générales que celle de C. Wilcox, en 1961 C. S. Morawetz (cf. [62]) a montré que l'énergie locale décroit comme l'inverse du temps.
En combinant leurs méthodes, P. D. Lax, C. S. Morawetz et R. S. Phillips (cf. [49]) ont prouvé en 1963 que l'énergie locale associée à la solution de l'équation des ondes dans un domaine de $\mathbb{R}^3$, extérieur à un domaine étoilé, décroit de manière exponentielle quand le temps tend vers l'infini.

Les travaux de G. Chen et de J. Lagnese En se basant sur les travaux de C. S. Morawetz (cf. [62] et [74]) sur l'équation des ondes dans un domaine extérieur, D. L. Russell a conjecturé, en 1974, un phénomène analogue pour l'équation des ondes dans un domaine borné.

Énoncé de la conjecture (cf. [74]) Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, s'il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, extérieur à $\overline{\Omega}$ tel que le bord de Ω, noté Γ, admette une partition vérifiant la condition géométrique suivante :

$$m(x).\nu(x) \leq 0, \qquad \text{pour tout } x \in \Gamma_0$$

où :

1− $\nu(x)$ désigne la normale unitaire extérieure à Ω.

2− $m(x) = x - x_0, \qquad$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

3− $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$

alors il existe deux constantes, C et β positives telles que l'énergie associée au système évolutif

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u & = & 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u & = & 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \alpha(x)\partial_\nu u + u_t & = & 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) & = & u^0 & \text{dans } \Omega \\ u_t(x,0) & = & u^1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\alpha \in L^\infty(\Gamma_1)$, et $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$, $\forall x \in \Gamma_1$, vérifie l'inégalité suivante :

$$E(t) \leq C \exp(-\beta t), \quad \forall t \geq 0$$

En 1977, J. P. Quin et D. L. Russell(cf. [70]) sont parvenus à montrer, sous les hypothèses de la conjecture de Russell, l'inégalité

$$E(t) \leq \frac{C(E(0))}{1+t}, \qquad \forall t \geq 0. \tag{1.2}$$

Mais malheuresement, ils n'ont pas réussi à montrer que $C(E(0))$ vérifie

$$C(E(0)) \leq k.E(0). \tag{1.3}$$

où k est une constante qui ne dépend ni de $E(0)$ ni du temps.

Il est intéressant de savoir qu'à partir de (1.2) et (1.3) on peut déduire la décroissance exponentielle de $E(t)$ par une simple application des propriétés des semi-groupes (cf. [70]).

Le premier résultat positif concernant la conjecture de Russell a été obtenu en 1979 par G.

Chen (cf. [24]), en partant des hypothèses suivantes :

il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{aligned} & m(x).\nu(x) \leq 0, && \text{pour tout } x \in \Gamma_0 \\ & m(x).\nu(x) \geq \gamma > 0, && \text{pour tout } x \in \Gamma_1 \end{aligned} \tag{1.4}$$

1– $\nu(x)$ désigne le champ unitaire normal extèrieur à Ω.

2– $m(x) = x - x_0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

3– $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

Ensuite, en adaptant les techniques, en particulier la technique des **multiplicateurs**, utilisées par C. S. Morawetz, W. A. Strauss et J. U. Raltson, dans les domaines extérieurs, G. Chen (cf. [25]) a pu alléger les hypothèses (1.4). Ces résultats ont été améliorés par J. Lagnese (cf. [46]), en 1983, sous l'hypothèse :

il existe un champ de vecteurs $h \in (\mathcal{C}^2(\overline{\Omega}))^n$ tel que :

$$\begin{cases} h(x).\nu(x) \leq 0, & \text{pour tout } x \in \Gamma_0 \\ h(x).\nu(x) \geq \gamma > 0, & \text{pour tout } x \in \Gamma_1. \\ \text{la matrice } (\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial h_j}{\partial x_i}) \text{ est uniformément définie positive sur } \overline{\Omega}. & \end{cases}$$

Les travaux de I. Lasiecka et R. Triggani En 1987, utilisant des méthodes différentes de celles de Chen et Lagnese, I. Lasiecka et R. Triggiani (cf. [48]) ont pu redémontrer les résultats de Chen et Lagnese pour l'équation des ondes avec une condition de Dirichlet non homogène sur tout le bord Γ.

Ils font appel à un opérateur de feedback frontière donné par :

$$F(u, u_t) = -b\frac{\partial}{\partial \nu}(Gu_t), \qquad \text{sur } \Gamma.$$

où $b \in L^\infty(\Gamma)$, et $b(x) \geq b_0 > 0$, pour tout $x \in \Gamma$, et G est l'inverse de l'isomorphisme suivant :

$$(-\Delta) : H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

qu'on note $G = (-\Delta)^{-1}$.

Dans tous les travaux, dans un domaine borné, cités ci-dessus l'inégalité

$$E(t) \leq C \exp(-wt), \qquad \forall t \geq 0.$$

a été obtenue, à partir d'une estimation sur $\int\limits_0^\infty E(t)\mathrm{d}t$, en utilisant un résultat dû à R. Datko (cf. [28]) et A. Pazy (cf. [67]). Malheureusement ce théorème prouve l'existence des constantes C et w sans donner des estimations explicites.
On remarque que lorsque la frontière Γ est régulière, la condition (1.4) exige que

$$\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 \neq \emptyset \tag{1.5}$$

donc si $\Gamma_0 \neq \emptyset$, les résultats obtenus par Chen, ou Lagnese, ne peuvent être appliqués aux domaines ayant un bord connexe.

Les travaux de V. Komornik et E. Zuazua En 1987, V. Komornik et E. Zuazua ont allégé la condition (1.4) de G. Chen en la remplaçant par

$$m(x).\nu(x) > 0, \qquad \text{pour tout } x \in \Gamma_1$$

donc permettant, en principe, de généraliser les résultats de Chen et Lagnese aux domaines à bords réguliers et connexes, mais au prix de remplacer la condition aux limites, du problème (1.1), sur $\Gamma_1 \times \mathbb{R}^+$ par

$$\partial_\nu u = -m.\nu u_t, \qquad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^n.$$

Si $\Gamma = \partial\Omega$ satisfait à la condition (1.5), alors pour tout $n \geq 2$, la méthode de Komornik et Zuazua (cf. [43]) donne, d'une manière simple des estimations explicites pour C et w en fonction de la géométrie de Ω et x_0.
Leur procédé devient inapliquable dans le cas général où

$$\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} \neq \emptyset \tag{1.6}$$

car dans ce cas la régularité des solutions n'est plus suffisante pour justifier l'application de la méthode des multiplicateurs.
Cependant, la même année (1987), P. Grisvard est parvenu à montrer (cf. [35]) que, au moins pour $n \leq 3$, l'identité fondamentale, sur laquelle est basée la thechnique des multiplicateurs de Komornik et Zuazua, devvient une inégalité qui est suffisante pour mener les calculs à bout et obtenir une décroissance exponentielle de l'énergie, avec des estimations explicites pour C et

w.

Le cas $n \geq 4$, sans l'hypothèse (1.5) reste ouvert ; à moins que l'inégalité de Grisvard ne puisse être prouvée dans ce cas ; alors le procédé de stabilisation de Komornik et Zuazua peut être appliqué avec efficacité.

Remarque 1.1.3 *Grace à la simplicité de l'opérateur de feedback*

$$F(u, u_t) = -m.\nu u_t \tag{1.7}$$

la technique des multiplicateurs a pernis d'obtenir des estimations sur C et w, dans le but d'améliorer le taux de décroissance w, certains auteurs ont proposé l'opérateur

$$F(u, u_t) = -bm.\nu u_t \tag{1.8}$$

où b est une fonction, définie sur Γ_1 à choisir convenablement.

En effet, dans certains cas, il a été possible d'améliorer légèrement le taux de décroissance w, cepandant, J. Lions a signalé (cf. [56] page 47) que D. H. Wagner a montré (formellement) que même lorsque $b \longrightarrow +\infty$, le taux $w(b)$, obtenu à partir du feedback (1.8) ne croit pas indéfiniment.

Remarque 1.1.4 *E. Zuazua a montré (cf. [81]) que l'opérateur de feedback $F(u, u_t) = -m.\nu u_t$ ne satisfait pas la propriété de robustesse, c'est à dire que la propriété de stabilisation est perdue sous certaines perturbations continues du support du feedback ; cependant l'opérateur*

$$F(u, u_t) = -m.\nu[u_t + \alpha u], \qquad \text{avec } \alpha > 0 \tag{1.9}$$

est robuste grâce à la présence du terme $\alpha m.\nu \times u$; d'autre part le fait que $\alpha > 0$ exclut l'existence de solution stationnaire non triviale.

Remarque 1.1.5 *(retour à la conjecture de Russell)*

En 1978, Russel insista bien (cf.[73]) sur le fait que l'hypothèse (1.4) suffit à elle seule pour

obtenir la stabilisation du système (1.1) et que toute autre hypothèse sur Ω *constitue une restriction géometrique inutile ; en effet par exemple la condition (1.4) exclut les domaines à bord connexe.*
J. Lagnese a remarqué que l'utilisation d'un feedback de la forme

$$F(u, u_t) = m.\nu \widetilde{F}[u_t, u] \tag{1.10}$$

sur le bord permet d'enlever, au moins formellement, l'hypotèse (1.5) dans certains problèmes de stabilisation de système élastodynamiques ou de plaques vibrantes.

Les travaux de J. L. Lions En 1986, Lions a élaboré une méthode générale de stabilisation exponentielle pour tous les systèmes linéaires réversibles exactement contrôlables.
Son procédé repose essentiellement sur la théorie du contrôle optimal et la méthode de pénalisation. Mais il ne donne aucune méthode explicite pour construire l'operateur de feedback, ni d'estimation sur le taux de décroissance de l'énergie.

1.2 But du travail

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$; On considère $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ une partition de Γ telle que

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$$

et

$$\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \emptyset.$$

On désigne par ν le champ unitaire normal à la frontière Γ extérieur à Ω, et par ∂_ν l'opérateur de dérivation dans cette direction. On note par ∂_T la dérivée tangentielle.
Pour le problème $(\mathcal{P})$, ci dessous, on démontre l'existence et l'unicité de la solution ainsi que la décroissance exponentielle de l'énergie associée à l'équation des ondes, avec des conditions aux limites de type Ventcel, des termes mémoires interne et frontière et une dissipation frictionnelle

non linéaire localisée à l'intérieur du domaine Ω.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int\limits_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds + a(x)g(u_t) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ v_{tt} + \dfrac{\partial u}{\partial \nu} - \int\limits_0^t h(t-s)\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(s)ds - \Delta_T v = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \\ u = v & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ (u(0), v(0)) = (u^0, v^0), (u'(0), v'(0)) = (u^1, v^1) & \text{dans } \Omega \times \Gamma \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

où les fonction g et h vérifient les hypothèses suivantes

hypothèses sur le feedback g :

(**F**.**1**) Soit g est une fonction non décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

(i) $g(s)s > 0 \quad \forall s \neq 0$

(ii) $ks^2 \leq g(s)s \leq Ks^2$ pour tout $|s| > 1$, k et K sont deux constantes positives.

(**F**.**2**) Soit a est une fonction non négative telle que :

$$a \in L^\infty(\Omega), \quad a(x) \geq a_0 > 0 \qquad \textit{dans } \ \omega$$

avec $\omega \subset \Omega$ est un ouvert non vide, a_0 est constante.

hypothèses sur le noyau h :

Supposons que le noyau h est une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ qui vérifie les hypothèses suivantes :

- (**N.1**) $$\int\limits_0^\infty h(s)ds < 1$$
- (**N.2**) $$1 - \int\limits_0^\infty h(s)ds = L > 0$$

de plus on suppose aussi qu'il existe $\xi_1 > 0$ telle que

- (**N.3**) $$0 \leq h_{tt}(t) \leq \xi_1 h(t) \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0$$
- (**N.4**) $$e^{\alpha t}h(t) \in L^1(0,\infty) \quad \text{pour tout} \quad \alpha > 0, \ \ t > 0$$
- (**N.5**) $$h_t(t) + \gamma h(t) \geq 0 \ \text{ et } \ e^{\alpha t}[h_t(t) + \gamma h(t)] \in L^1(0,\infty) \quad \text{pour tout} \quad \alpha, \gamma > 0$$

Le noyau h considéré dans le problème $(\mathcal{P})$ est un noyau positif oscillant.

Dans la suite, on considère les espaces

$$\mathbf{V} = \Big\{(u,v) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma)\ /u|_{\Gamma} = v\Big\},$$

$$\mathbf{H} = L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma),$$

où $H^1_{\Gamma_0} = \Big\{u \in H^1(\Omega)/u|_{\Gamma_0} = 0\Big\}$.
Munis des normes suivantes :

$$|(u,v)|^2_{\mathbf{H}} = |u|^2_{L^2(\Omega)} + |v|^2_{L^2(\Gamma)}$$

$$||(u,v)||^2_{\mathbf{V}} = ||u||^2_{H^1(\Omega)} + ||v||^2_{H^1(\Gamma)}$$

V et **H** sont des espaces de Hilbert et **V** est dense dans **H** avec injection continue.

Notre travail se compose de quatre chapitres.

- • Le **premier chapitre** est consacré aux notes historiques sur la notion de stabilisation exponentielle de l'équation des ondes.
- • Le **second chapitre** est consacré aux définitions et aux rappels, de quelques notions de base d'analyse fonctionnelle.
- • Dans le **troisième chapitre**, on étudie l'éxistence et l'unicité des solutions du problème $(\mathcal{P})$ en trouvant des estimations a priori par la méthode de Galarkin.
- • Dans le **quatrième chapitre**, on étudie la stabilisation exponentielle du problème $(\mathcal{P})$

Chapitre 2

Rappels généraux et définitions

Ce chapitre rassemble les définitions et propriétés essentielles, qui seront utilisées de façon constante dans les chapitres ultérieurs.

2.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 2.1.1

Soient Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}$. On désigne par :

- *$\mathcal{C}^k(\Omega)$ l'espace des fonctions définies sur Ω dans $\mathbb{R}$, k fois continûment dérivables.*
- *$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ on désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables.*
- *On désigne par $\mathcal{C}_c^k(\Omega)$ les éléments de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ à support compact dans Ω.*
- *On désigne par $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ les éléments de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω.*

Définition 2.1.2

Soit X un espace de Hilbert. On désigne par $C^k([0,T];X)$, $k = 0,1,2$, l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans X ayant des dérivées continues jusqu'à l'ordre k dans $[0,T]$. En particulier, nous écrivons $C([0,T];X)$ pour $C^0([0,T];X)$.

Définition 2.1.3

Soit $p \in [1,+\infty[$. On définit $L^p(\Omega)$ par :

$$L^p(\Omega) \quad = \quad \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ tel } \ \text{que} : \left\{ \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} < +\infty \right\}. \tag{2.1}$$

$L^p(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \quad = \quad \left[\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Si $p = +\infty$:

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ tel que} : \ \ \exists\, c \in \mathbb{R}_+ \text{ vrifiant } |f| \leq c \quad \text{p.p sur } \ \Omega \right\}$$

.

On définit sur $L^\infty(\Omega)$ la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \quad = \quad \inf \left\{ c \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que} : |f| \leq c \ \text{ p.p sur } \ \Omega \right\}.$$

Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach, et l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire :

$$< f, g >_{L^2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} f(x) g(x) dx.$$

Définition 2.1.4

Soit X un espace de Hilbert réel avec le produit scalaire $\langle , \rangle$ muni de la norme $||.||$.

Pour tout $T \in (0, +\infty]$ et $p \in [1, \infty]$ on note par $L^p(0, T; X)$ les espaces des fonctions mesurables $v : (0, T) \longrightarrow X$ telle que :

$$||v||_{p,T}^p = \int\limits_0^T ||v(t)||^p dt < \infty, \qquad 1 \leq p < \infty,$$

$$||v||_{\infty,T} = ess \sup_{0 \leq t \leq T} ||v(t)|| < \infty,$$

respectivement. Nous allons utiliser la notation brève $||v||_p$ pour $||v||_{p,\infty}$, $1 \leq p \leq \infty$. Nous désignons par $L^p_{loc}(0, \infty; X)$ l'espace des fonctions dans $L^p(0, T; X)$ pour tout $T \in (0, \infty)$. Dans le cas $X = \mathbb{R}$, nous allons utiliser les abréviations $L^p(0, T)$ et $L^p_{loc}(0, \infty)$ pour désigner les espaces $L^p(0, T; \mathbb{R})$ et $L^p_{loc}(0, T; \mathbb{R})$, respectivment.

Proposition 2.1.1 (**Inégalité de Hölder**)

Soient $p,\, q \in [1, +\infty]$ *tels que :* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (*si* $p = 1$, *alors* $q = +\infty$, *et inversement*). *Alors :* $\forall f \in L^p(\Omega), \forall g \in L^q(\Omega) : fg \in L^1(\Omega)$ *et on a :*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)},$$

c.à.d., si $p, q \in]1, +\infty[$,

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

et si $p = 1$ *et* $q = \infty$,

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |f(x)|dx.$$

Proposition 2.1.2 (**Inégalité de Young**)

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ *tels que :* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Alors* $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$|\alpha\beta| \leq \frac{1}{p}|\alpha|^p + \frac{1}{q}|\beta|^q.$$

Définition 2.1.5 (**produit de convolution**)

Soients $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in L^1(\Omega)$ *et* $g \in L^p(\Omega)$ *avec* $1 \leq p \leq +\infty$.

On pose :

$$(f * g)(x) = \int_\Omega f(x - y)g(y)dy, \qquad \forall x \in \Omega.$$

Alors $f * g \in L^p(\Omega)$ *et on a*

$$\|f * g\|_{L^p(\Omega)} \leq \| f \|_{L^1(\Omega)} \| g \|_{L^p(\Omega)} .$$

Si $f \in L^1(\Omega)$ *et* $g \in C^m(\Omega)$ *avec* $m \in \mathbb{N}$, *alors* $f * g \in C^m(\Omega)$, *et on a :*

$$D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g, \qquad \forall\ |\alpha| \leq m.$$

Définition 2.1.6

Soient E *et* F *deux espaces de Banach. On appelle opérateur linéaire non-borné de* E *dans* F *toute application linéaire* $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ *définie sur un sous-espace vectoriel* $D(A) \subset E$, *à valeurs dans F. $D(A)$ est le domaine de A. On dit que A est borné s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que*

$$||Au|| \leq c||u|| \qquad \forall u \in D(A)$$

2.2 Rappels sur les distributions

Définition 2.2.1

Nous appellerons $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions φ définies et indéfiniment dérivables dans Ω et à support compact dans Ω.

Théorème 2.2.1

$\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p \geq 1$

Définition 2.2.2

$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est l'espace des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Si Ω est borné on a :

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$$

En général : $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \neq \mathcal{D}(\Omega)$ mais $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n}) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

2.2.1 Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 2.2.3

Une suite (φ_j) de $\mathcal{D}(\Omega)$ si :

(i) Il existe une compact $K \subset \Omega$ qui contient tous les supports des φ_j

(ii) quand $j \to +\infty$, les dérivées de tous les ordres de φ_j convergent uniformément sur K vers les dérivées correspondantes de φ

2.2.2 Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition 2.2.4

L'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$, est l'espace des formes linéaires et continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$. On *note* $<\cdot,\cdot>$ *le produit de dualité entre* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *et* $\mathcal{D}(\Omega)$. *Donc* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *si pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *on a :*

(i) l'application $\varphi \longrightarrow <T,\varphi>$ *est linéaire.*

(ii) si $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ *dans* $\mathcal{D}(\Omega)$, *alors*

$$<T,\varphi_j> \longrightarrow <T,\varphi> \qquad\qquad \textit{dans} \quad \mathbb{C}$$

2.3 Les espaces de Sobolev

Définition 2.3.1

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, *on dit qu'une distribution* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *est dans* $(L^p(\Omega))^n$ $(1 \leq p \leq \infty)$, *s'il existe une fonction* $f \in L^p(\Omega)$, *telle que :*

$$<T,\varphi>= \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \qquad\qquad \textit{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Définition 2.3.2

Soient $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1;\infty]$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^n (\Rightarrow \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n))$. *On note*

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}, \qquad\qquad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

On pose

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ f \in L^p(\Omega), D^\alpha f \in L^p(\Omega), \quad \textit{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \textit{ tel que } |\alpha| \leq m \Big\}.$$

alors $W^{m,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme définie par :*

$$||f||_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha f||_{L^p(\Omega)}, \quad \textit{pour tout } p \in [1, +\infty]$$

Si $m = 0$,

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega).$$

Si $p = 2$,

on définit l'espace $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ *par :*

$$H^m(\Omega) = \Big\{ u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad |\alpha| \leq m \Big\}.$$

On muni $H^m(\Omega)$ *du produit scalaire*

$$(u, v)_{m,\Omega} = \int_\Omega \left(\sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u \overline{D^\alpha v} \right) dx$$

et de la norme

$$|v|_{m,\Omega} = (v, v)^{\frac{1}{2}}_{m,\Omega}$$

pour m=1, on a :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ 1 \leq i \leq n \right\}$$

muni de la norme suivante :

$$|v|_{1,\Omega} = (v, v)^{\frac{1}{2}}_{1,\Omega}$$

Théorème 2.3.1

L'application trace

$$\gamma_0 : H^1 \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma = \partial\Omega)$$

et linéaire continue et surjective.

Théorème 2.3.2

L'espace image de γ_0 *est* $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *est un espace de Hilbert pour la norme*

$$||u||_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \inf_{v \in H^1(\Gamma), \gamma_0 v = u} ||v||$$

Définition 2.3.3

On suppose que Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *de frontière* $\partial\Omega = \Gamma$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux. Alors* $H_0^1(\Omega)$ *est le noyau de* γ_0*, application trace sur* Γ *de* $H^1(\Omega)$ *dans* $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$*, i.e,*

$$H_0^1 = \Big\{ u \in H^1(\Omega); \ \gamma_0 u = 0 \Big\}$$

Théorème 2.3.3

$\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense* $H_0^1(\Omega)$.

***Théorème 2.3.4* (Inégalité de Poincaré)**

Soit Ω un ouvert borné dans une direction. Il existe une constante c dépendante du diamètre de Ω telle que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega); \ ||v||_{H^1(\Omega)} \leq c||\nabla v||_{L^2(\Omega)}.$$

C'est-à-dire la semi norme $|.|_{1,\Omega}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme $||.||_{1,\Omega}$.

On note $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$, espace de Hilbert pour la norme duale :

$$||f||_{-1,\Omega} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0} \frac{< f, v >}{|v|_{1,\Omega}}$$

Théorème 2.3.5

Soit $\mathcal{V}$ un espace défini par :

$$\mathcal{V} = \Big\{ u \in H^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega) \Big\}$$

alors l'application

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{V} \ &\longrightarrow \ H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u \ &\longmapsto \ \nabla u . \frac{\partial v}{\partial \nu} \end{aligned} \tag{2.2}$$

est linéaire continue avec

$$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))'$$

Définition 2.3.4

$$H^2(\Omega) \ = \ \Big\{ v \in H^1(\Omega); \ pour\ toutes\ les\ dérivées\ d'ordre\ 2, \ D^2 v \in L^2(\Omega) \Big\}.$$

On note par

$$|v|_{2,\Omega} = \Big(|v|_{1,\Omega}^2 + \sum ||D^2 v||_{L^2(\Omega)}^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

la norme correspondante.

Théorème 2.3.6

$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^2(\Omega)$.

Théorème 2.3.7

L'application trace

$$\begin{aligned} \gamma_1 : H^2(\Omega) &\longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \\ v &\longmapsto \nabla v.\nu \end{aligned}$$

est linéaire continue et surjective.

Formule de Green

$$\forall u \in H^2(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega), \qquad \int_\Omega \Delta uvdx = -\int_\Omega \nabla u \nabla vdx + \int_\Gamma \partial_\nu uvd\Gamma$$

où $\partial_\nu u = \gamma_1 u$ *est la dérivée normale de* u *sur* Γ.

Théorème 2.3.8

$$H_0^2 = \Big\{ u \in H^2(\Omega); \gamma_0 u = 0 \ et \ \gamma_1 u = 0 \Big\}$$

On désigne par $H^{-2}(\Omega)$ *le dual de* $H_0^2(\Omega)$.

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense dans* $H_0^2(\Omega)$, $H^{-2}(\Omega)$ *est un espace de distributions.*

Théorème 2.3.9 **(Extension de l'inégalité de Poincaré)**

Soit Ω *un ouvert borné. Il existe une constante c telle que :*

$$\forall v \in H_0^2(\Omega), \qquad ||v||_{H^2(\Omega)} \leq c||\Delta v||_{L^2(\Omega)}$$

2.4 Quelques critères de convergence

On regroupe ici les résultats qui nous permettrent de manipuler les différentes notions de convergence des suites dans les espaces $L^p(\Omega)$, *pour* $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 2.4.1 (**convergence forte**)

Soit $1 \leq p < \infty$, *on dit que* u_n *converge (fortement) vers* u *dans* L^p *si* $u_n \in L^p$ *et si*

$$\lim_{n \to +\infty} ||u_n - u|| = 0.$$

et on note $u_n \to u$.

Définition 2.4.2 (**convergence faible**)
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $L^p(\Omega)$*, avec* $1 \leq p < \infty$ *converge faiblement dans* L^p *vers une fonction* u *si* $u \in L^p(\Omega)$*, telle que*

$$\forall v \in L^{p'}(\Omega) \quad \text{on a} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega u_n v dx = \int_\Omega uv dx$$

et on note $u_n \rightharpoonup u$*, où* $L^{p'}$ *est le dual topologique de l'espace* $L^p(\Omega)$*.*

Définition 2.4.3 (**convergence faible***)
On dit que u_n *converge faible* vers* u *dans* L^∞*, et on note* $u_n \rightharpoonup^* u$ *si* $u_n \in L^1$ *et si*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \big(u_n(x) - u(x)\big)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in L^\infty(\Omega).$$

Remarque 2.4.1

1. *La limite (forte ou faible) d'une suite de fonctions est toujours unique.*
2. *Dans le cas* $p = 1$*, le symbole * est posé pour montrer que la définition de convergence faible dans* L^1 *n'est pas entièrement la même que dans les espaces* L^p*, pour* $1 \leq p < \infty$ *En effet,* $(L^\infty(\Omega))' \subset L^1(\Omega)$*.*
3. *La convergence forte dans* L^p*, implique la convergence faible dans* L^p*, pour* $1 \leq p \leq \infty$*.*

Chapitre 3

Existence, unicité et régularité des solutions du problème ($\mathcal{P}$)

3.1 Introduction

Ce chapitre comporte deux parties :
La première partie est consacrée à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution forte du problème ($\mathcal{P}$). Dans la seconde partie , on étudie l'existence et l'unicité de la solution faible.

On commence donc dans une première étape par démontrer la solution forte, et ensuite, utilisant des arguments de densité, on prolonge le résultat pour la solution faible.

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$. On considère $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ une partition de Γ telle que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ et $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \emptyset$, on désigne par ν le champ unitaire normal à la frontière Γ extérieur à Ω, et par $\dfrac{\partial .}{\partial \nu}$ l'opérateur de dérivation dans cette direction. On note par ∂_T la dérivée tangentielle.
On rappelle que le problème ($\mathcal{P}$) est défini par

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds + a(x)g(u_t) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ v_{tt} + \dfrac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t h(t-s)\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(s)ds - \Delta_T v = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \\ u = v & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ (u(0), v(0)) = (u^0, v^0), (u_t(0), v_t(0)) = (u^1, v^1) & \text{dans } \Omega \times \Gamma \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

où les fonctions g et h vérifient les hypothèses :

hypothèses sur le feedback g :

(**F.1**) Soit g une fonction non décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

(i) $g(s)s > 0 \quad \forall s \neq 0$

(ii) $ks^2 \leq g(s)s \leq Ks^2$ pour tout $|s| > 1$, k et K sont deux constantes positives.

(**F.2**) Soit a une fonction non négative telle que :

$$a \in L^\infty(\Omega), \quad a(x) \geq a_0 > 0, \qquad \textit{dans } \omega,$$

où $\omega \subset \Omega$ est un ouvert non vide, a_0 est une constante.

hypothèses sur le noyau h :

Soit le noyau h une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ qui satisfait aux hypothèses suivantes :

- (**N.1**) $$\int_0^\infty h(s)ds < 1$$
- (**N.2**) $$1 - \int_0^\infty h(s)ds = L > 0$$

de plus on suppose aussi qu'il existe ξ_1 telle que

- (**N.3**) $$0 \leq h_{tt}(t) \leq \xi_1 h(t) \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0$$
- (**N.4**) $$e^{\alpha t}h(t) \in L^1(0,\infty) \quad \text{pour tout} \quad \alpha > 0, \ t > 0$$
- (**N.5**) $$h_t(t) + \gamma h(t) \geq 0 \ \text{ et } \ e^{\alpha t}[h_t(t) + \gamma h(t)] \in L^1(0,\infty) \quad \text{pour tout} \quad \alpha, \gamma > 0$$

On considère les espaces

$$\mathbf{V} = \Big\{(u,v) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma) \ /u|_\Gamma = v\Big\},$$

$$\mathbf{H} = L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma).$$

Munis des normes suivantes :

$$|(u,v)|^2_{\mathbf{H}} = |u|^2_{L^2(\Omega)} + |v|^2_{L^2(\Gamma)},$$

$$||(u,v)||^2_{\mathbf{V}} = ||u||^2_{H^1(\Omega)} + ||v||^2_{H^1(\Gamma)}.$$

$\mathbf{V}$ et $\mathbf{H}$ sont des espaces de Hilbert et $\mathbf{V}$ est dense dans $\mathbf{H}$ avec injection continue.

l'énergie associée au problème $(\mathcal{P})$ est :

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[\int_{\Omega} \left\{|u_t|^2 + |\nabla u|^2\right\}dx + \int_{\Gamma_1} \left\{|v_t|^2 + |\nabla_T v|^2\right\}d\Gamma\right]$$

3.1.1 Résultat principal

On a le résultat suivant, d'éxistence, d'unicité et de régularité des solutions du problème $(\mathcal{P})$.

Théorème 3.1.1
1) *Supposons que* $(u^0, v^0) \in (H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^2_{\Gamma_0}(\Omega)) \times (H^1(\Gamma) \cap H^2(\Gamma))$ *et* $(u^1, v^1) \in (H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma))$ *avec*

$$\partial_\nu u^0 - \Delta_T v^0 = 0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \quad \text{et} \quad \Delta_T v^0 \in L^2(\Gamma).$$

Alors le problème $(\mathcal{P})$ admet une solution (forte) unique

$$(u,v) : (Q, \Sigma) \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

où $Q = \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad \Sigma = \Gamma \times \mathbb{R}_+$
2) *soient* $(u^0, v^0) \in \mathbf{V}$ *et* $(u^1, v^1) \in \mathbf{H}$*, alors le problème $(\mathcal{P})$ admet une solution (faible) unique.*

$$(u,v) : (Q, \Sigma) \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

vérifiant

$$(u,v) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{H})$$

3.2 Existence et unicité de la solution forte

Dans cette section, on démontre l'existence et l'unicité de la solution forte du problème $(\mathcal{P})$ Une intégration par partie de la première équation nous donne

$$\int_{\Omega} u_{tt} w dx - \int_{\Omega} \Delta u w dx + \int_{\Omega} \int_{0}^{t} h(t-s) \Delta u(s) w ds dx + \int_{\Omega} a(x) g(u_t) w dx$$

$$= (u_{tt}, w)_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} \nabla u \nabla w dx - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} w d\Gamma - \int_{\Omega} \int_{0}^{t} h(t-s) \nabla u(s) \nabla w ds dx$$

$$+ \int_{\Gamma_1} \int_{0}^{t} h(t-s) \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) w ds d\Gamma + \int_{\Omega} a(x) g(u_t) w dx \qquad \forall w \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \tag{3.1}$$

De même, pour la deuxième équation, on obtient

$$\int_{\Gamma_1} v_{tt} w d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \int_{0}^{t} h(t-s) \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) w ds d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \Delta_T v w d\Gamma$$

$$= (v_{tt}, w)_{L^2(\Gamma_1)} + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \int_{0}^{t} h(t-s) \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) w ds d\Gamma$$

$$+ \int_{\Gamma_1} \nabla_T v \nabla_T w d\Gamma \qquad \forall w \in H^1(\Gamma), \quad \text{avec } w = 0 \text{ sur } \Gamma_0. \tag{3.2}$$

Donc sur le partie Γ_1 du bord, on a

$$\int_{\Gamma_1} \int_{0}^{t} h(t-s) \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) w ds d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} w d\Gamma = (v_{tt}, w)_{\Gamma_1}$$

$$+ \int_{\Gamma_1} \nabla_T v \nabla_T w d\Gamma \qquad \forall w \in H^1(\Gamma), \quad \text{avec } w = 0 \text{ sur } \Gamma_0. \tag{3.3}$$

et, en remplaçant le terme

$$\int_{\Gamma_1} \int_{0}^{t} h(t-s) \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) w(t) ds d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} w d\Gamma$$

dans l'équation (3.1) il vient

$$
\begin{aligned}
&(u_{tt}, w)_\Omega + (v_{tt}, w)_{\Gamma_1} + (\nabla u, \nabla w)_\Omega + (\nabla_T v, \nabla_T w)_{\Gamma_1} \\
&- \int_\Omega \int_0^t h(t-s)\nabla u(s)\nabla w ds dx + \int_\Omega a(x)g(u_t)w dx = 0 \quad \forall w \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

On transforme donc le problème $(\mathcal{P})$ en un problème équivalent avec les conditions initiales homogènes.

On fait un changement de fonctions en posant

$$
(u, v)(x, t) = (\psi_1, \psi_2)(x, t) + (\phi_1, \phi_2)(x, t), \tag{3.5}
$$

où

$$
(\phi_1, \phi_2)(x, t) = (u, v)(x, 0) + t(u_t, v_t)(x, 0), \qquad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+.
$$

D'autre part,

$$
(u_{tt}, v_{tt}) = ((\psi_1)_{tt}, (\psi_2)_{tt}),
$$

$$
(\Delta u, \Delta_T v) = (\Delta\psi_1 + \Delta\phi_1, \Delta_T\psi_2 + \Delta_T\phi_2),
$$

$$
u_t = (\psi_1)_t + (\phi_1)_t,
$$

et

$$
\int_0^t h(t-s)\Delta u(s) ds = \int_0^t h(t-s)\Delta\psi_1 ds + \int_0^t h(t-s)\Delta\phi_1(s) ds,
$$

où

$$
u|_\Gamma = v
$$

c'est à dire

$$
u = v \quad \text{sur} \;\; \Sigma = \Gamma \times]0, T[
$$

avec

$$
u(x, 0) = \psi_1(x, 0) + \phi_1(x, 0) = \psi_1(x, 0) + u^0(x)
$$

ce qui donne

$$
\psi_1(x, 0) = 0.
$$

De même

$$u_t(x,0) = (\psi_1)_t(x,0) + (\phi_1)_t(x,0) = (\psi_1)_t(x,0) + u^1(x)$$

donne

$$(\psi_1)_t(x,0) = 0.$$

On a aussi

$$v(x,0) = \psi_2(x,0) + \phi_2(x,0) = \psi_2(x,0) + v^0(x)$$

ce qui implique

$$\psi_2(x,0) = 0,$$

et

$$v_t(x,0) = (\psi_2)_t(x,0) + (\phi_2)_t(x,0) = (\psi_2)_t(x,0) + v^1(x)$$

donne

$$\psi_2(x,0) = 0,$$

Le problème équivalent à $(\mathcal{P})$ s'écrit alors

$$\begin{cases} (\psi_1)_{tt} - \Delta\psi_1 + \int\limits_0^t h(t-s)\Delta\psi_1(s)ds + a(x)g((\psi_1)_t + (\phi_1)_t) & = \mathcal{F} \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ (\psi_2)_{tt} + \dfrac{\partial\psi_1}{\partial\nu} - \int\limits_0^t h(t-s)\dfrac{\partial\psi_1}{\partial\nu}(s)ds - \Delta_T\psi_2 & = \mathcal{G} \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+, \\ \psi_1 = \psi_2 & \quad\;\; \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ \psi_1 = 0 & \quad\;\; \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+, \\ \psi(0) = (\psi_1(0), \psi_2(0)) = \psi_t(0) = ((\psi_1)_t(0), (\psi_2)_t(0)) & = (0,0) \quad \text{dans } \Omega \times \Gamma, \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_\mathbf{1})$$

où

$$\mathcal{F} = \Delta\phi_1 - \int\limits_0^t h(t-s)\Delta\phi_1(s)ds,$$

$$\mathcal{G} = -\frac{\partial\phi_1}{\partial\nu} + \int\limits_0^t h(t-s)\frac{\partial\phi_1}{\partial\nu}(s)ds + \Delta_T\phi_2.$$

Remarque : Notons que si ψ est une solution de $(\mathcal{P}_\mathbf{1})$ dans $[0,T]$, alors $\psi + \phi$ est solution de $(\mathcal{P})$ dans le même intervalle.

A partir des estimations que nous allons obtenir ci-dessous ; nous sommes capable de prouver que

$$\begin{cases} |\Delta\psi_1(t)|^2 + |\nabla(\psi_1)_t(t)|^2 \leq c_1(t) \quad \text{pour} \quad t \in [0,T] \quad , \\ |\Delta\psi_2(t)|^2 + |\nabla(\psi_2)_t(t)|^2 \leq c_2(t) \quad \text{pour} \quad t \in [0,T] \quad . \end{cases}$$

Donc, à partir de (3.5) les inégalités précédentes est vérifiée pour la solution u : Ensuite, utilisant des méthodes standards, on prolonge u à l'intervalle $(0; +\infty)$: Donc, il est suffisant de démontrer que $(\mathcal{P}_\mathbf{1})$ a une solution locale, qui sera obtenue en utilisant la méthode de Galerkin.

Soit $(w_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ une base de $\mathbf{V} \cap (H^2(\Omega) \times H^2(\Gamma))$ orthonormale dans $\mathbf{H}$.
Soit $\mathbf{V}^m$ l'espace engendré par $w^1, w^2, \cdots, w^m$ et soit

$$(z_1^m(t), z_2^m(t)) = z^m(t) = (\sum_{j=1}^{m} \gamma_j^1(t) w_j^1, \sum_{j=1}^{m} \gamma_j^2(t) w_j^2)$$

une solution approchée du problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} ((z_1)_{tt}^m, w_1)_\Omega + ((z_2)_{tt}^m, w_2)_{\Gamma_1} + (\nabla z_1^m, \nabla w_1)_\Omega + (\nabla_T z_2^m, \nabla_T w_2)_{\Gamma_1} \\ +\big(a(x) g((z_1)_t^m + (\phi_1)_t), w_1\big)_\Omega - \int\limits_0^t h(t-s)\big(\nabla z_1^m(s), \nabla w_1\big)_\Omega ds \\ = (\mathcal{F}(t), w_1)_\Omega + (\mathcal{G}(t), w_2)_{\Gamma_1} \qquad\qquad \text{pour tout } w \in \mathbf{V}^m \\ \text{et} \quad z^m(0) = (z)_t^m(0) = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Par les méthodes standards des équations différentielles, on peut démontrer l'existence d'une solution du problème $(\mathcal{P})$ sur un certain intervalle $[0, T_m]$: Ensuite, cette solution peut être prolongée à l'intervalle fermé $[0, T]$ en utilisant la première estimation ci dessous.

3.2.1 Estimations a Priori

3.2.1.1 Première Estimation

En prenant $(w_1, w_2) = ((\gamma_j^1)_t(t) w_j^1, (\gamma_j^2)_t(t) w_j^2)$ dans (3.6), on obtient :

$$((z_1)_{tt}^m(t), (\gamma_j^1)_t(t) w_j^1)_\Omega + ((z_2)_{tt}^m(t), (\gamma_j^2)_t(t) w_j^2)_{\Gamma_1} + (\nabla z_1^m(t), \nabla(\gamma_j^1)_t(t) w_j^1)_\Omega$$

$$+(\nabla_T z_2^m(t), \nabla_T(\gamma_j^2)_t(t) w_j^2)_{\Gamma_1} - \int\limits_0^t h(t-s)\big(\nabla z_1^m(s), \nabla(\gamma_j^1)_t(t) w_j^1\big)_\Omega ds$$

$$+\big(a(x)g((z_1)_t^m(t)+(\phi_1)_t(t)),(\gamma_j^1)_t(t)w_j^1\big)_\Omega=(\mathcal{F}(t),(\gamma_j^1)_t(t)w_j^1)_\Omega+(\mathcal{G}(t),(\gamma_j^2)_t(t)w_j^2)_{\Gamma_1}.$$

Maintenant, en sommant sur j et en notant que $z^m(0)=0$, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|(z_1)_t^m(t)|^2+|\nabla z_1^m(t)|^2+|(z_2)_t^m(t)|^2+|\nabla_T z_2^m(t)|^2\right\}$$

$$-\int_0^t h(t-s)\big(\nabla z_1^m(s),\nabla(z_1)_t^m(t)\big)_\Omega ds+\big(a(x)g((z_1)_t^m(t)+(\phi_1)_t(t)),(z_1)_t^m(t)\big)_\Omega$$

$$=(\mathcal{F}(t),(z_1)_t^m(t))_\Omega+(\mathcal{G}(t),(z_2)_t^m(t))_{\Gamma_1}.$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|(z_1)_t^m(t)|^2+|\nabla z_1^m(t)|^2+|(z_2)_t^m(t)|^2+|\nabla_T z_2^m(t)|^2\right\}$$

$$=(\mathcal{F}(t),(z_1)_t^m(t))_\Omega+\frac{d}{dt}(\mathcal{G}(t),z_2^m(t))_{\Gamma_1}-(\mathcal{G}_t(t),z_2^m(t))_{\Gamma_1}$$

$$-\int_0^t h_t(t-s)\big(\nabla z_1^m(s),\nabla z_1^m(t)\big)_\Omega ds-h(0)|\nabla z_1^m(t)|^2$$

$$-\big(a(x)g((z_1)_t^m(t)+(\phi_1)_t(t)),(z_1)_t^m(t)\big)_\Omega+\frac{d}{dt}\left[\int_0^t h(t-s)\big(\nabla z_1^m(s),\nabla z_1^m(t)\big)_\Omega ds\right].\qquad(3.7)$$

A partir des hypothèses (**F.1**)-(**F.2**), et en utilisant l'inégalité $ab\leq\frac{1}{4\eta}a^2+\eta b^2$ où $\eta>0$ est un nombre arbitraire, et d'après (3.7), et l'inégalité de Cauchy-Schwartz donne

$$\int_0^t h_t(t-s)\big(\nabla z_1^m(s),\nabla z_1^m(t)\big)_\Omega ds\leq|\nabla z_1^m(t)|\int_0^t|h_t(t-s)||\nabla z_1^m(s)|ds.$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|(z_1)_t^m(t)|^2+|\nabla z_1^m(t)|^2+|(z_2)_t^m(t)|^2+|\nabla_T z_2^m(t)|^2\right\}$$

$$+(a(x)g((z_1)_t^m(t)+(\phi_1)_t(t)),(z_1)_t^m(t)+(\phi_1)_t(t))_\Omega\leq(\mathcal{F}(t),(z_1)_t^m(t))_\Omega$$

$$+\frac{d}{dt}(\mathcal{G}(t), z_2^m(t))_{\Gamma_1} + |\nabla z_1^m(t)| \int_0^t |h_t(t-s)||\nabla z_1^m(s)|ds - h(0)|\nabla z_1^m(t)|^2$$

$$+|\nabla z_1^m(t)| \int_0^t |h_t(t-s)||\nabla z_1^m(s)|ds - h(0)|\nabla z_1^m(t)|^2 - (\mathcal{G}_t(t), z_2^m(t))_{\Gamma_1}$$

$$+(a(x)g((z_1)_t^m(t) + (\phi_1)_t(t)), (\phi_1)_t(t))_\Omega + \frac{d}{dt}\left[\int_0^t h(t-s)\big(\nabla z_1^m(s), \nabla z_1^m(t)\big)_\Omega ds\right].$$

Sous les hypothèses (**F.1**)-(**F.2**) et appliquant l'inégalité de Young, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|(z_1)_t^m(t)|^2 + |\nabla z_1^m(t)|^2 + |(z_2)_t^m(t)|^2 + |\nabla_T z_2^m(t)|^2\right\}$$

$$+a_0 k \int_{|(z_1)_t^m + (\phi_1)_t| > 1} |(z_1)_t^m(t) + (\phi_1)_t(t)|^2 dx \leq k_1(\eta) + (\mathcal{F}(t), (z_1)_t^m(t))_\Omega - h(0)|\nabla z_1^m(t)|^2$$

$$+\frac{d}{dt}(\mathcal{G}(t), z_2^m(t))_{\Gamma_1} - (\mathcal{G}_t(t), z_2^m(t))_{\Gamma_1} + a_0\eta \int_{|(z_1)_t^m + (\phi_1)_t| > 1} |(z_1)_t^m(t) + (\phi_1)_t(t)|^2 dx$$

$$+|\nabla z_1^m(t)| \int_0^t |h_t(t-s)||\nabla z_1^m(s)|ds + \frac{d}{dt}\left[\int_0^t h(t-s)\big(\nabla z_1^m(s), \nabla z_1^m(t)\big)_\Omega ds\right]$$

où

$$k_1(\eta) = \frac{1}{4\eta}|u^1(x)|^2.$$

est une une constante positive qui dépend de u^1 et de η.

Considérons l'inégalité de Cauchy-Schwartz et tenant compte de l'hypothèse (**N.5**), on déduit

$$\begin{aligned}
|\nabla z_1^m(t)| \int_0^t |h_t(t-s)||\nabla z_1^m(s)|ds &\leq |\nabla z_1^m(t)| \int_0^t \gamma h(t-s)|\nabla z_1^m(s)|ds \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\int_0^t h(t-s)|\nabla z_1^m(s)|ds\right)^2 + \frac{\gamma^2}{2}|\nabla z_1^m(t)|^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_0^t h(t-s)|\nabla z_1^m(s)|^2 ds + \frac{\gamma^2}{2}|\nabla z_1^m(t)|^2 \\
&= \frac{1}{2}||h||_{L^1(0,\infty)}\int_0^t h(t-s)|\nabla z_1^m(s)|^2 ds + \frac{\gamma^2}{2}|\nabla z_1^m(t)|^2 \quad (3.8)
\end{aligned}$$

$$(\mathcal{F}(t),(z_1)^m_t(t))_\Omega \ \leq \ \frac{1}{2}|\mathcal{F}(t)|^2+\frac{1}{2}|(z_1)^m_t(t)|^2. \tag{3.9}$$

D'autre part, soit $C_0>0$ une constante positive telle que

$$|z_2|_{\Gamma_1} \ \leq \ C_0|\nabla_T z_2|, \qquad \text{pour tout } z_2\in H^1(\Gamma). \tag{3.10}$$

Ensuite, combinons (3.8), (3.9) et (3.10) on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|(z_1)^m_t(t)|^2+|\nabla z^m_1(t)|^2+|(z_2)^m_t(t)|^2+|\nabla_T z^m_2(t)|^2\right\}\\
&+a_0(k-\eta)\int_{|(z_1)^m_t+(\phi_1)_t|>1}|(z_1)^m_t(t)+(\phi_1)_t(t)|^2dx\leq k_1(\eta)\\
&+\frac{1}{2}|\mathcal{F}(t)|^2+\frac{1}{2}|(z_1)^m_t(t)|^2+\frac{d}{dt}(\mathcal{G}(t),z^m_2(t))_{\Gamma_1}+\frac{C_0^2}{2}|\mathcal{G}_t(t)|^2_{\Gamma_1}\\
&+\left(\frac{\gamma^2}{2}-h(0)\right)|\nabla z^m_1(t)|^2+\frac{1}{2}||h||_{L^1(0,\infty)}\int_0^t h(t-s)|\nabla z^m_1(s)|^2ds\\
&+\frac{1}{2}|\nabla_T z^m_2(t)|^2+\frac{d}{dt}\left[\int_0^t h(t-s)\big(\nabla z^m_1(s),\nabla z^m_1(t)\big)_\Omega ds\right].
\end{aligned} \tag{3.11}$$

En intégrant (3.11) entre 0 et t et en notant que $z^m(0)=z^m_t(0)=0$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\{|(z_1)^m_t(t)|^2+|\nabla z^m_1(t)|^2+|(z_2)^m_t(t)|^2+|\nabla_T z^m_2(t)|^2\}\\
&+a_0(k-\eta)\int_0^t\int_{|(z_1)^m_t+(\phi_1)_t|>1}|(z_1)^m_t(s)+(\phi_1)_t(s)|^2dxds\\
&\leq k_2(\eta,T)+\frac{1}{2}||h||_{L^1(0,\infty)}\int_0^t|\nabla z^m_1(s)|^2ds+\frac{1}{2}\int_0^t|\mathcal{F}(s)|^2ds\\
&+\int_0^t\left[\frac{1}{2}|(z_1)^m_t(s)|^2+\left(\frac{\gamma^2}{2}-h(0)\right)|\nabla z^m_1(s)|^2+\frac{1}{2}|\nabla_T z^m_2(s)|^2\right]ds
\end{aligned}$$

$$+(\mathcal{G}(t), z_2^m(t))_{\Gamma_1} + \frac{C_0^2}{2}\int_0^t |\mathcal{G}_t(s)|_{\Gamma_1}^2 ds + \int_0^t h(t-s)\big(\nabla z_1^m(s), \nabla z_1^m(t)\big)_\Omega ds, \tag{3.12}$$

où

$$\int_0^t k_1(\eta)dt \leq \int_0^T k_1(\eta)ds = k_2(\eta, T).$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^t h(t-s)\big(\nabla z_1^m(s), \nabla z_1^m(t)\big)_\Omega ds &\leq |\nabla z_1^m(t)| \int_0^t h(t-s)|\nabla z_1^m(s)|ds \\
&\leq \eta|\nabla z_1^m(t)|^2 + \frac{1}{4\eta}\int_0^t h(s)ds \int_0^t h(t-s)|\nabla z_1^m(s)|^2 ds \\
&\leq \eta|\nabla z_1^m(t)|^2 + \frac{1}{4\eta}||h||_{L^1(0,\infty)}||h||_{L^\infty(0,\infty)}\int_0^t |\nabla z_1^m(s)|^2 ds.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité (3.10) on a :

$$(\mathcal{G}(t), z_2^m(t)) \leq \frac{C_0^2}{4\eta}|\mathcal{G}(t)|_{\Gamma_1}^2 + \eta|\nabla_T z_2^m(t)|^2 \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}|(z_1)_t^m(t)|^2 + \left(\frac{1}{2}-\eta\right)|\nabla z_1^m(t)|^2 + \frac{1}{2}|(z_2)_t^m(t)|^2 + \left(\frac{1}{2}-\eta\right)|\nabla_T z_2^m(t)|^2 \\
&+a_0(k-\eta)\int_0^t \int_{|(z_1)_t^m+(\phi_1)_t|>1} |(z_1)_t^m(s) + (\phi_1)_t(s)|^2 dxds \leq k_2(\eta, T) \\
&+\frac{1}{2}||\mathcal{F}||_{L^2(0,\infty;L^2(\Omega))}^2 + \frac{C_0^2}{4\eta}|\mathcal{G}(t)|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2}||h||_{L^1(0,\infty)}\int_0^t |\nabla z_1^m(s)|^2 ds \\
&+\frac{1}{4\eta}||h||_{L^1(0,\infty)}||h||_{L^\infty(0,\infty)}\int_0^t |\nabla z_1^m(s)|^2 ds + \frac{C_0^2}{2}||\mathcal{G}_t||_{L^2(0,\infty;L^2(\Gamma_1))}^2 \\
&+\int_0^t \left[\frac{1}{2}|(z_1)_t^m(s)|^2 + \left(\frac{\gamma^2}{2}-h(0)\right)|\nabla z_1^m(s)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_T z_2^m(s)|^2\right] ds.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

3.2.1.2 Lemme de Gronwall

Lemme 3.2.1 *Soit l une fonction non négative de $L^1(0,\infty)$, et f une fonction de $L^\infty(0,\infty)$. Soit β une constante positive ou nulle telle que*

$$f(t) \leq \beta + \int_0^t l(s)f(s)ds,$$

alors

$$f(t) \leq \beta \exp\left(\int_0^t l(s)ds\right).$$

Combinons (3.13) et (3.14), choisissons $\eta > 0$ suffisamment petite et appliquons le lemme de Gronwall on obtient la première estimation

$$|(z_1)_t^m(t)|^2 + |\nabla z_1^m(t)|^2 + |(z_2)_t^m(t)|^2 + |\nabla_T z_2^m(t)|^2 \leq L_1. \tag{3.15}$$

En effet

$$\begin{aligned}
f(t) &= |(z_1)_t^m(t)|^2 + |\nabla z_1^m(t)|^2 + |(z_2)_t^m(t)|^2 + |\nabla_T z_2^m(t)|^2 \\
&\leq k_2(\eta,T) + \frac{1}{2}||\mathcal{F}||^2_{L^2(0,\infty;L^2(\Omega))} + \frac{C_0^2}{4\eta}|\mathcal{G}(t)|^2_{\Gamma_1} + \frac{C_0^2}{2}||\mathcal{G}_t||^2_{L^2(0,\infty;L^2(\Gamma_1))} \\
&+ \int_0^t \left[\frac{1}{2}||h||_{L^1(0,\infty)} + \left(\frac{\gamma^2}{2} - h(0)\right) + \frac{1}{4\eta}||h||_{L^1(0,\infty)}||h||_{L^\infty(0,\infty)}\right]|\nabla z_1^m(s)|ds \\
&+ \int_0^t \left[\frac{1}{2}|(z_1)_t^m(s)|^2 + \frac{1}{2}|(z_2)_t^m(s)| + \frac{1}{2}|\nabla_T(z_2)^m(s)|^2\right]ds,
\end{aligned}$$

alors

$$f(t) \leq \beta + \int_0^t l(s)\left[|(z_1)_t^m(s)|^2 + |\nabla z_1^m(s)|^2 + |(z_2)_t^m(s)|^2 + |\nabla_T z_2^m(s)|^2\right]ds,$$

et donc

$$\begin{aligned}
f(t) &\leq \beta \exp\left[\int_0^t \sup\left(\frac{1}{2}||h||_{L^1(0,\infty)} + \left(\frac{\gamma^2}{2} - h(0)\right) + \frac{1}{4\eta}||h||_{L^1(0,\infty)}||h||_{L^\infty(0,\infty)}; \frac{1}{2}\right)ds\right] \\
&\leq \beta \exp\left[\int_0^T \sup\left(\frac{1}{2}||h||_{L^1(0,\infty)} + \left(\frac{\gamma^2}{2} - h(0)\right) + \frac{1}{4\eta}||h||_{L^1(0,\infty)}||h||_{L^\infty(0,\infty)}; \frac{1}{2}\right)ds\right] \\
&\leq \beta C(T)
\end{aligned}$$

où :

$$\beta = k_2(\eta, T) + \frac{1}{2}||\mathcal{F}||^2_{L^2(0,\infty;L^2(\Omega))} + \frac{C_0^2}{4\eta}|\mathcal{G}(t)|^2_{\Gamma_1} + \frac{C_0^2}{2}||\mathcal{G}_t||^2_{L^2(0,\infty;L^2(\Gamma_1))} > 0$$

$$l \equiv \sup\left(\frac{1}{2}||h||_{L^1(0,\infty)} + \left(\frac{\gamma^2}{2} - h(0)\right) + \frac{1}{4\eta}||h||_{L^1(0,\infty)}||h||_{L^\infty(0,\infty)}; \frac{1}{2}\right),$$

et

$$|\mathcal{G}(t)|^2_{\Gamma_1} \leq |\mathcal{G}(T)|^2_{\Gamma_1}.$$

D'où

$$f(t) \leq \beta C(T) \leq L_1$$

où L_1 est une constante positive indépendante de $m \in \mathbb{N}$.

D'où

$$|(z_1)_t^m(t)|^2 + |\nabla z_1^m(t)|^2 + |(z_2)_t^m(t)|^2 + |\nabla_T z_2^m(t)|^2 + \int_0^t \int_\Omega |(z_1)_t^m(s) + (\phi_1)_t(s)|^2 dxds \leq L_2$$

où L_2 est une constante positive indépendante de $m \in \mathbb{N}$.

On déduit que $T = t_m$, $\forall m$ et

$$\begin{cases} (z)_t^m & \text{demeure dans un borné de } L^\infty(0,T,\mathbf{V}) \cap W^{1,\infty}(0,\infty,\mathbf{H}) \\ z^m & \text{demeure dans un borné de } L^\infty(0,T,\mathbf{V}) \cap W^{1,\infty}(0,\infty,\mathbf{H}). \end{cases} \tag{3.16}$$

3.2.1.3 Seconde Estimation

Premièrement, on estime le terme $(z)_{tt}^m(0)$ dans la norme $L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)$.

Considérons $w = (z)_{tt}^m(0)$ dans (3.6), notons que

$$z^m(0) = (z)_t^m(0) = 0,$$

c'est à dire

$$(z^m(0) = (z_1^m(0), z_2^m(0)) = (z)_t^m(0) = ((z_1)_t^m(0), (z_2)_t^m(0)) = 0),$$

il s'ensuit que

$$|(z_1)_{tt}^m(0)|^2 + |(z_2)_{tt}^m(0)|^2 + (\nabla z_1^m(0), (z_1)_{tt}^m(0))_\Omega + (\nabla_T z_2^m(0), (z_2)_{tt}^m(0))_{\Gamma_1}$$

$$-\int_0^t h(t-s)(\nabla z_1^m(0),(z_1^m)_{tt}(0))ds+\int_\Omega a(x)g((z_1)_t^m(0)+(\phi_1)_t(t))(z_1)_{tt}^m(0)dx$$

$$=(\mathcal{F}(0),(z_1)_{tt}^m(0))_\Omega+(\mathcal{G}(0),(z_2)_{tt}^m(0))_{\Gamma_1}.$$

Puisque, on a

$$\frac{\partial z_1^0}{\partial \nu}-\Delta_T z_2^0=0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1\times]0,\infty[\quad \text{et} \quad \Delta_T z^0_{2_{|\Sigma}}\in L^2(\Sigma),$$

alors

$$((z_2^1)^m)_{tt}(0),(z_2)_{tt}^m(0))+|(z_2^m)_{tt}(0)|^2=(\Delta u_1^0,(z_2^m)_{tt}(0)).$$

Donc

$$|(z_2)_{tt}^m(0)|^2=|\Delta u_1^0||(z_2^1)_{tt}(0)|=|(z_2)_{tt}^m(0)|\Rightarrow|(z_2)_{tt}^m(0)|^2=|(z_2^1)_{tt}(0)-1||\Delta u_1^0|,$$

d'où :

$$|(z_2^m)_{tt}(0)|^2 \quad < \quad L_3, \tag{3.17}$$

où L_3 est une constante positive indépendante de $m\in\mathbb{N}$ et $t\in[0,T]$.

En dérivant (3.6) par rapport à t, il s'ensuit que

$$\left(\frac{d}{dt}(z_1)_{tt}^m(t),w\right)_\Omega+\left(\frac{d}{dt}(z_2)_{tt}^m(t),w\right)_{\Gamma_1}+(\nabla(z_1)_t^m(t),w)_\Omega+(\nabla_T(z_2)_t^m(t),w)_{\Gamma_1}$$

$$+\int_\Omega a(x)\frac{d}{dt}\Big[g((z_1)_t^m(t)+(\phi_1)_t(t))w\Big]dx-\int_0^t h_t(t-s)(\nabla z_1^m(s),\nabla w)_\Omega ds$$

$$-h(0)(\nabla z_1^m(t),\nabla w)_\Omega=\frac{d}{dt}\Big[(\mathcal{F}(t),w)_\Omega+(\mathcal{G}(t),w)_{\Gamma_1}\Big]. \tag{3.18}$$

En multipliant (3.18) par $\gamma_{tt}^j(t)$, on déduit

$$\left(\frac{d}{dt}(z_1)_{tt}^m(t),\sum_{j=1}^m\gamma_{tt}^j(t)w_j\right)_\Omega+\left(\frac{d}{dt}(z_2)_{tt}^m(t),\sum_{j=1}^m\gamma_{tt}^j(t)w_j\right)_{\Gamma_1}$$

$$+\left(\nabla(z_1)_t^m(t),\nabla\sum_{j=1}^m\gamma_{tt}^j(t)w_j\right)_\Omega+\left(\nabla_T(z_2)_t^m(t),\nabla_T\sum_{j=1}^m\gamma_{tt}^j(t)w_j\right)_{\Gamma_1}$$

$$+\int\limits_{\Omega} a(x)(z_1)^m_{tt}(t)g_t((z_1)^m_t(t)+(\phi_1)_t(t))\sum_{j=1}^m \gamma^j_{tt}(t)w_j dx$$

$$-h(0)\left(\nabla z_1^m(t),\nabla\sum_{j=1}^m\gamma^j_{tt}(t)w_j\right)-\int\limits_0^t h_t(t-s)\left(\nabla z_1^m(s),\nabla\sum_{j=1}^m\gamma^j_{tt}(t)w_j\right)_{\Omega}$$

$$=\left(\mathcal{F}_t(t),\sum_{j=1}^m\gamma^j_{tt}(t)w_j\right)_{\Omega}+\frac{d}{dt}\left(\mathcal{G}_t(t),\sum_{j=1}^m\gamma^j_t(t)w_j\right)_{\Gamma_1}-\left(\mathcal{G}_{tt}(t),\sum_{j=1}^m\gamma^j_t(t)w_j\right)_{\Gamma_1}.$$

En sommant par rapport à j, il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|(z_1)^m_{tt}(t)|^2+|\nabla(z_1)^m_t(t)|^2+|(z_2)^m_{tt}(t)|^2+|\nabla_T(z_2)^m_t(t)|^2\right\}$$

$$-h(0)(\nabla z_1^m(t),\nabla(z_1^m)_{tt}(t))-\int\limits_0^t h_t(t-s)(\nabla z_1^m(s),\nabla(z_1^m)_{tt}(t))ds$$

$$+\int\limits_{\Omega} a(x)g_t((z_1)^m_t(t)+(\phi_1)_t(t))((z_1)^m_{tt})^2(t)dx=(\mathcal{F}_t(t),(z_1)^m_{tt}(t))_{\Omega}$$

$$+\frac{d}{dt}(\mathcal{G}_t(t),(z_2)^m_t(t))-(\mathcal{G}_{tt}(t),(z_2)^m_t(t))_{\Gamma_1}.$$

En intégrant l'égalité précédente par parties, on trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{|(z_1)^m_{tt}(t)|^2+|\nabla(z_1)^m_t(t)|^2+|(z_2)^m_{tt}(t)|^2+|\nabla_T(z_2)^m_t(t)|^2\Big\}$$

$$+h(0)|\nabla(z_1^m)_t(t)|^2+\int\limits_{\Omega} a(x)g_t((z_1)^m_t(t)+(\phi_1)_t(t))((z_1)^m_{tt})^2(t)dx$$

$$=(\mathcal{F}_t,(z_1^m)_{tt}(t))_{\Omega}+\frac{d}{dt}(\mathcal{G}_t(t),(z_2^m)_t)_{\Gamma_1}-(\mathcal{G}_{tt}(t),(z_2^m)_t)_{\Gamma_1}$$

$$-h_t(0)(\nabla z_1^m(t),\nabla(z_1^m)_t(t))+\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t h_t(t-s)(\nabla z_1^m(s),\nabla(z_1^m)_t(t))ds\right)$$

$$-\int_0^t h_{tt}(t-s)(\nabla z_1^m(s),\nabla (z_1^m)_t(t))ds + h(0)\frac{d}{dt}(\nabla z_1^m(t),\nabla (z_1^m)_t(t)).$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwartz et de Young et sous l'hypothèse (**N.4**) , on obtient

$$(\mathcal{F}_t(t),(z_1)_{tt}^m(t))_\Omega \leq \frac{1}{2}|\mathcal{F}_t(t)|^2 + \frac{1}{2}|(z_1)_{tt}^m(t)|^2,$$

$$(\mathcal{G}_{tt}(t),(z_2)_t^m(t))_{\Gamma_1} \leq \frac{C_0^2}{4\eta}|\mathcal{G}_{tt}(t)|^2 + \eta|\nabla_T z_2^m(t)|^2$$

$$h_t(0)(\nabla z_1^m(t),\nabla (z_1^m)_t(t)) \leq \frac{(h_t(0))^2}{4\eta}|\nabla z_1^m(t)|^2 + \eta|\nabla (z_1^m)_t(t)|^2$$

$$\begin{aligned}\int_0^t h_{tt}(t-s)(\nabla z_1^m(s),\nabla z_1^m(t))ds &\leq |\nabla (z_1^m)_t(t)|^2\left|\int_0^t \xi_1 h(t-s)|\nabla z_1^m(s)|^2\right| \\ &\leq \eta|\nabla (z_1^m)_t(t)|^2 + \frac{(\xi_1)^2}{4\eta}||h||_{L^1(0,\infty)}\int_0^t h(t-s)|\nabla z_1^m(s)|^2 ds.\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{|(z_1)_{tt}^m(t)|^2 + |\nabla (z_1)_t^m(t)|^2 + |(z_2)_{tt}^m(t)|^2 + |\nabla_T (z_2)_t^m(t)|^2\Big\}$$

$$+(h(0)-2\eta)|\nabla (z_1^m)_t(t)|^2 + a_0\int_\Omega g_t((z_1)_t^m(t)+(\phi_1)_t(t))((z_1)_{tt}^m)^2(t)dx$$

$$\leq \frac{1}{2}|\mathcal{F}_t(t)|^2 + \frac{1}{2}|(z_1)_{tt}^m(t)|^2 + \frac{C_0^2}{4\eta}|\mathcal{G}_{tt}(t)|^2 + \eta|\nabla_T z_2^m(t)|^2 + \frac{d}{dt}(\mathcal{G}_t(t),(z_2)_t^m(t))_{\Gamma_1}$$

$$+\frac{(\xi_1)^2}{4\eta}||h||_{L^1(0,\infty)}\int_0^t h(t-s)|\nabla z_1^m(s)|^2 ds + \frac{d}{dt}\left(\int_0^t h_t(t-s)(\nabla z_1^m(s),\nabla (z_1)_t^m(t))ds\right)$$

$$+\frac{(h_t(0))^2}{4\eta}|\nabla z_1^m(t)|^2 + h(0)\frac{d}{dt}(\nabla z_1^m(t),\nabla (z_1^m)_t(t)).$$

En intégrant cette dernière relation de 0 à t et en tenant compte de (3.17), de $z^m(0) = z_t^m(0)$, et des estimations

$$\frac{1}{2}|(z_1)_{tt}^m(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla(z_1)_t^m(t)|^2 + a_0 \int_0^t \int_\Omega g_t((z_1)_t^m(s) + (\phi_1)_t(s))((z_1)_{tt}^m)^2(s)dxds$$

$$+\frac{1}{2}|(z_2)_{tt}^m(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_T(z_2)_t^m(t)|^2 + (h(0) - 2\eta) \int_0^t |\nabla(z_1^m)_t(s)|^2 ds \leq \frac{L_3}{2}$$

$$+\frac{1}{2}||\mathcal{F}_t(t)||^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \frac{(\xi_1)^2}{4\eta}||h||_{L^1(0,\infty)}||h||_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t |\nabla z_1^m(s)|^2 ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t |(z_1)_{tt}^m(s)|^2 ds + (\mathcal{G}_t(t), (z_2)_t^m(t))_{\Gamma_1} + \frac{C_0^2}{4\eta}||\mathcal{G}_{tt}(t)||^2_{L^2(0,T,L^2(\Gamma_1))}$$

$$+\int_0^t h_t(t-s)(\nabla z_1^m(s), \nabla(z_1)_t^m(t))ds + \frac{h(0)^2}{4\eta}|\nabla z_1^m(t)|^2 + \eta|\nabla(z_1^m)_t(t)|^2$$

$$+\eta\int_0^t |\nabla_T z_2^m(s)|^2 ds + \frac{(h_t(0))^2}{4\eta}\int_0^t |\nabla z_1^m(s)|^2 ds.$$

En tenant compte de (3.10), on a

$$(\mathcal{G}_t(t), (z_2)_t^m(t))_{\Gamma_1} \leq \frac{C_0^2}{4\eta}||\mathcal{G}_t(t)||^2_{\Gamma_1} + \eta|\nabla_T(z_2)_t^m(t)|^2$$

$$\int_0^t h_t(t-s)(\nabla z_1^m(s), \nabla(z_1)_t^m(t))ds \leq \frac{\gamma^2}{4\eta}||h||_{L^1(0,\infty)}||h||_{L^\infty(0,\infty)}\int_0^t |\nabla z_1^m(s)|^2 ds + \eta|\nabla(z_1)_t^m(t)|^2.$$

D'où

$$\frac{1}{2}|(z_1)_{tt}^m(t)|^2 + \left(\frac{1}{2} - \eta\right)|\nabla(z_1)_t^m(t)|^2 + \frac{1}{2}|(z_2)_{tt}^m(t)|^2 + \left(\frac{1}{2} - \eta\right)|\nabla_T(z_2)_t^m(t)|^2$$

$$+(h(0) - 2\eta)\int_0^t |\nabla(z_1^m)_t(s)|^2 ds + a_0\int_0^t \int_\Omega g_t((z_1)_t^m(s) + (\phi_1)_t(s))((z_1)_{tt}^m)^2(s)dxds$$

$$\leq \frac{L_3}{2} + \frac{1}{2}||\mathcal{F}_t(t)||^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \frac{C_0^2}{4\eta}||\mathcal{G}_{tt}(t)||^2_{L^2(0,T,L^2(\Gamma_1))} + \frac{C_0^2}{4\eta}||\mathcal{G}_t(t)||^2_{\Gamma_1}$$

$$+\eta|\nabla(z_1)^m_t(t)|^2 + \frac{\gamma^2}{4\eta}||h||_{L^1(0,\infty)}||h||_{L^\infty(0,\infty)}\int_0^t |\nabla z_1^m(s)|^2 ds + \eta\int_0^t |\nabla_T z_2^m(s)|^2 ds$$

$$+\frac{(h_t(0))^2}{4\eta}\int_0^t |\nabla z_1^m(s)|^2 ds + \frac{(\xi_1)^2}{4\eta}||h||^2_{L^1(0,\infty)}\int_0^t |\nabla z_1^m(s)|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t |(z_1)^m_{tt}(s)|^2 ds$$

$$+\frac{h(0)^2}{4\eta}|\nabla z_1^m(t)|^2 + \frac{C_0^2}{4\eta}||\mathcal{G}_t(t)||^2_{\Gamma_1}.$$

ensuite, à partir de (3.18), (3.19) et (3.20), choisissons $\eta > 0$ suffisamment petit, considérant la première estimation et employons le Lemme de Gronwall on obtient la seconde estimation

$$\frac{1}{2}\Big\{|(z_1)^m_{tt}(t)|^2 + |\nabla(z_1)^m_t(t)|^2 + |(z_2)^m_{tt}(t)|^2 + |\nabla_T(z_2)^m_t(t)|^2\Big\}$$

$$+\int_0^t |\nabla(z_1^m)_t(s)|^2 ds + \int_0^t\int_\Omega g_t((z_1)^m_t(s) + (\phi_1)_t(s))((z_1)^m_{tt})^2(s) dx ds \leq L_4, \tag{3.19}$$

où L_4 est une constante positive indépendante de $m \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,T]$.

Où :

$$f(t) = |(z_1)^m_{tt}(t)|^2 + |\nabla(z_1)^m_t(t)|^2 + |(z_2)^m_{tt}(t)|^2 + |\nabla_T(z_2)^m_t(t)|^2$$

$$\leq \frac{L_3}{2} + \frac{1}{2}||\mathcal{F}_t(t)||^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \frac{C_0^2}{4\eta}||\mathcal{G}_{tt}(t)||^2_{L^2(0,T,L^2(\Gamma_1))} + \frac{C_0^2}{4\eta}||\mathcal{G}_t(t)||^2_{\Gamma_1}$$

$$+\int_0^t C|\nabla z_1^m(s)|^2 ds + \eta\int_0^T |\nabla_T(z_2)^m_t(s)|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^T |(z_1)^m_{tt}(s)|^2 ds + \frac{C_0^2}{4\eta}||\mathcal{G}_t(t)||^2_{\Gamma_1}$$

$$\leq \beta + \int_0^t l(s)\Big[|(z_1)^m_{tt}(t)|^2 + |\nabla(z_1)^m_t(t)|^2 + |(z_2)^m_{tt}(t)|^2 + |\nabla_T(z_2)^m_t(t)|^2\Big] ds.$$

Donc :

$$f(t) \leq \beta \exp\left(\int_0^t \sup\left[\frac{1}{2}, \eta\right] ds\right) \leq \beta \exp\left(\int_0^T \sup\left[\frac{1}{2}, \eta\right] ds\right) \leq \beta C(T).$$

Où :

$$\beta=\frac{L_3}{2}+\frac{1}{2}||\mathcal{F}_t(t)||^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}+\frac{C_0^2}{4\eta}||\mathcal{G}_{tt}(t)||^2_{L^2(0,T,L^2(\Gamma_1))}+\frac{C_0^2}{4\eta}||\mathcal{G}_t(t)||^2_{\Gamma_1}>0$$

$$C=\frac{(\xi_1)^2}{4\eta}||h||^2_{L^1(0,\infty)}+\frac{(h_t(0))^2}{4\eta}+\frac{\gamma^2}{4\eta}||h||_{L^1(0,\infty)}||h||_{L^\infty(0,\infty)}.$$

Donc

$$f(t)\leq \beta C(t)\leq L_5.$$

D'après (3.16) et (3.17) on déduit que

$$(z)^m_{tt}=((z_1)^m_{tt},(z_2)^m_{tt}) \text{ demeure dans un born de } L^\infty(0,T,L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma)). \tag{3.20}$$

Passage à la limite :

Des informations (3.16) et (3.20) on déduit que l'on peut extraire de z^m une sous suite $z^\eta=(z_1^\eta,z_2^\eta)$ telle que :

$$z^\eta=(z_1^\eta,z_2^\eta)\longrightarrow z=(z_1,z_2) \text{ dans } L^\infty(0,T,\mathbf{V}) \text{ faible etoile.}$$

$$(z)^\eta_t=((z_1)^\eta_t,(z_2)^\eta_t)\longrightarrow z=((z_1)_t,(z_2)_t) \text{ dans } L^\infty(0,T,\mathbf{V}) \text{ faible etoile.}$$

$$(z)^\eta_{tt}=((z_1)^\eta_{tt},(z_2)^\eta_{tt})\longrightarrow z=((z_1)_{tt},(z_2)_{tt}) \text{ dans } L^\infty(0,T,\mathbf{H}) \text{ faible etoile.}$$

D'où l'existence d'une solution forte.

Analyse du terme non linéaire. Tenons compte de (3.15), on déduit qu'il existe $\chi\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ tel que

$$g(v'_m+\phi')\rightharpoonup\chi \quad \text{weakly in } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.21}$$

Retournons à (3.6) et utilisant des arguments standards, on peut montrer à partir des estimations précédentes que

$$v''-\Delta(v-\int_0^t h(t-\tau)v(\tau)d\tau)+\chi=\mathcal{F} \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega\times(0\times T). \tag{3.22}$$

Maintenant, puisque $v'',\chi,\mathcal{F}\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ on a

$$\Delta(v-\int_0^t h(t-\tau)v(\tau)d\tau)+\chi\in L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

et par conséquent l'identité (3.22) donne

$$v'' - \Delta \left(v - \int\limits_0^t h(t-\tau)v(\tau)d\tau \right) + \chi = \mathcal{F} \quad \text{in} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.23}$$

Tenons compte de (3.23) et utilisons la formule de Green on déduit que

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(v - \int\limits_0^t h(t-\tau)v(\tau)d\tau \right) = \mathcal{G} \quad \text{sur} \quad \mathcal{D}'(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_1)),$$

et puisque $\mathcal{G} \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$ on déduit que

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(v - \int\limits_0^t h(t-\tau)v(\tau)d\tau \right) = \mathcal{G} \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)) \tag{3.24}$$

Notre but est de montrer que

$$\chi = g(v' + \phi').$$

Premièrement, on définit

$$z_m(t) = v_m(t) - \int\limits_0^t h(t-\tau)v_m(\tau)d\tau \in \mathbf{V}^m. \tag{3.25}$$

Maintenant, considérons, en particulier, $w = z_m(t)$ dans (3.6) et intégrons sur $(0,T)$ l'expression obtenue, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & \int_0^T (v_m''(t), z_m(t)) \;\; dt + \int_0^T |\nabla z_m(t)|^2 \;\; dt + \int_0^T (g(v_m'(t) + \phi^{'}(t)), z_m(t))_\Omega \;\; dt \\ = \;\; & \int_0^T (\mathcal{F}(t), z_m(t)) \;\; dt + \int_0^T (\mathcal{G}(t), z_m(t))_{\Gamma_1} \;\; dt \end{aligned} \tag{3.26}$$

A partir des première et seconde estimations, et grâce au théorème d'Aubin-Lions, il existe une sous suite de $\{v_m\}$, qui sera encore notée par $\{v_m\}$, telle que

$$v_m \;\; \to v \;\; \text{fortement dans} \;\; L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.27}$$

$$v_m' \;\; \to v' \;\; \text{fortement dans} \;\; L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.28}$$

Maintenant, puisque $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$ est compacte et notons que

$$|v_m(t)|_{H^{1/2}(\Gamma_0)} \leq C|\nabla v_m(t)|, \quad \text{et} \quad |v_m'(t)|_{\Gamma_0} \leq C|\nabla v_m'(t)|.$$

à partir de la première et seconde estimation et en utilisant de nonveau le théorème d'Aubin-Lions on déduit que

$$v_m \to v \text{ fortement dans } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \tag{3.29}$$

A partir de la seconde estimation on a aussi

$$v_m'' \rightharpoonup v'' \text{ faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.30}$$

Ensuite, à partir des convergences (3.21), (3.27), (3.29) et (3.30) on peut passer à la limite dans (3.26) afin d'obtenir

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty}\int_0^T |\nabla z_m(t)|^2 \; dt &= -\int_0^T (v'', z(t)) \; dt - \int_0^T (\chi(t), z(t))_\Omega \; dt \\ &\quad + \int_0^T (\mathcal{F}(t), z(t)) \; dt + \int_0^T (\mathcal{G}(t), z(t))_{\Gamma_1} \; dt. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Combinons (3.23), (3.24) et (3.31) et en tenant compte de la formule de Green, on déduit

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T |\nabla z_m(t)|^2 \; dt = \int_0^T |\nabla z(t)|^2 \; dt,$$

qui implique que

$$\nabla z_m \to \nabla z \text{ fortement dans} L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.32}$$

Maintenant, considérons $w = v_m'(t)$ dans (3.6) et en intégrant le résultat obtenu sur $(0,T)$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} &\int_0^T (v_m''(t), v'(t)) \; dt + \int_0^T (\nabla z_m(t), \nabla v_m'(t)) \; dt + \int_0^T (g(v_m'(t)+\phi'(t)), v_m'(t)+\phi'(t))_\Omega \; dt \\ = &\int_0^T (\mathcal{F}(t), v_m'(t)) \; dt + \int_0^T (\mathcal{G}(t), v_m'(t))_{\Gamma_1} \; dt + \int_0^T (g(v_m'(t)+\phi'(t)), \phi'(t))_\Omega \; dt. \end{aligned} \tag{3.33}$$

On note aussi qu'à partir de la seconde estimation on conclut que

$$\nabla v_m' \rightharpoonup \nabla v' \text{ faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.34}$$

Les convergences (3.23), (3.28), (3.30) et (3.34) avec (3.33) donnent

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty}\int_0^T (g(v_m'(t)+\phi'(t)), v_m'(t)+\phi'(t))_\Omega \; dt &= -\int_0^T (v''(t), v'(t)) \; dt - \int_0^T (\nabla z(t), \nabla v'(t)) \; dt \\ &\quad + \int_0^T (\mathcal{F}(t), v'(t)) \; dt + \int_0^T (\mathcal{G}(t), v'(t))_{\Gamma_1} \; dt \\ &\quad + \int_0^T (\chi(t), \phi'(t))_\Omega \; dt. \end{aligned} \tag{3.35}$$

et à partir de (3.23), (3.24) et (3.25), en appliquant la formule de Green, on obtient

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T (g(v_m'(t)+\phi'(t)), v_m'(t)+\phi'(t))_\Omega \ \ dt = \int_0^T (\chi(t), v'(t)+\phi'(t))_\Omega \ \ dt. \tag{3.36}$$

D'autre part, puisque g est une fonction monotone non croissante, on a

$$\int_0^T (g(v_m'(t)+\phi'(t) - g(\Psi), (v_m'(t)+\phi'(t)) - \Psi)_\Omega \ \ dt \geq 0$$

pour tout $\Psi \in L^2(\Omega)$.

La dernière inégalité donne

$$\begin{aligned} &\int_0^T (g(v_m'(t)+\phi'(t)), \Psi)_\Omega \ \ dt + \int_0^T (g(\Psi), v_m'(t)+\phi'(t)-\Psi)_\Omega \ \ dt \\ \leq \ &\int_0^T (g(v_m'(t)+\phi'(t)), v_m'(t)+\phi'(t))_\Omega \ \ dt. \end{aligned} \tag{3.37}$$

A partir de (3.37) on déduit

$$\begin{aligned} &\lim\inf_{m\to\infty}\int_0^T (g(v_m'(t)+\phi'(t)), \Psi)_\Omega \ \ dt \\ &+\lim\inf_{m\to\infty}\int_0^T (g(\Psi), v_m'(t)+\phi'(t)-\Psi)_\Omega \ \ dt \\ \leq \ &\lim\inf_{m\to\infty}\int_0^T (g(v_m'(t)+\phi'(t)), v_m'(t)+\phi'(t))_\Omega \ \ dt. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Considérons les convergences (3.21), (3.36) et aussi la suivante

$$v_m' + \phi' \rightharpoonup v' + \phi' \ \text{ faiblement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

on déduit

$$\int_0^T (\chi(t) - g(\Psi), v'(t)+\phi'(t)) - \Psi)_\Omega \ \ dt \geq 0. \tag{3.39}$$

Considerons $\Psi = (v'+\phi') + \lambda\xi$, où ξ est un élément arbitraire de $\xi \in L^2(\Omega)$ et $\lambda > 0$, on peut écrire

$$\int_0^T (\chi(t) - g((v'(t)+\phi'(t)) + \lambda\zeta), (-\lambda\xi))_\Omega \ \ dt \geq 0.$$

Par conséquent

$$\int_0^T (\chi(t) - g((v'(t)+\phi'(t)) + \lambda\zeta), \xi)_\Omega \ \ dt \geq 0.$$

pour tout $\xi \in L^2(\Omega)$.

Comme l'opérateur $g : L^2(\Omega) \to (L^2(\Omega))' = L^2(\Omega)$ donné par $v \to g(v)$ est hémicontinu, on a

$$\int_0^T (\chi(t) - g((v'(t) + \phi'(t)), \xi)_\Omega \ \ dt \leq 0.$$

pour tout $\xi \in L^2(\Omega)$.

Donc,

$$\int_0^T (\chi(t) - g((v'(t) + \phi'(t)), \xi)_{\Gamma_0} \ \ dt = 0$$

pour tout $\xi \in L^2(\Omega)$, qui implique que

$$\chi(t) = g(v'(t) + \phi'(t)).$$

Unicité :

Soit u et v deux solutions du problème (3.6), alors

$$z = (z_1, z_2) = u - v$$

vérifie

$$((z_1)_{tt}, w_1)_\Omega + ((z_2)_{tt}, w_2)_{\Gamma_1} + (\nabla z_1, \nabla w_1)_\Omega + (\nabla_T z_2, \nabla_T w_2)_{\Gamma_1}$$

$$-\int\limits_0^t h(t-s)(\nabla z_1(s), \nabla w_1(s))ds + \int\limits_\Omega a(x)\big[g(u_1)_t - g(v_1)_t\big]w_1 dx = 0$$

pour tout $w = (w_1, w_2)$ appartient à $\mathbf{V}$.

En posant

$$w = z_t(t),$$

on obtient

$$((z_1)_{tt}, (z_1)_t)_\Omega + ((z_2)_{tt}, (z_2)_t)_{\Gamma_1} + (\nabla z_1, \nabla (z_1)_t)_\Omega + (\nabla_T z_2, \nabla_T (z_2)_t)_{\Gamma_1}$$

$$-\int\limits_0^t h(t-s)(\nabla z_1(s), \nabla (z_1)_t(s))ds + \int\limits_\Omega a(x)\big[g(u_1)_t - g(v_1)_t\big]((u_1)_t - (v_1)_t)dx = 0.$$

Donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{|(z_1)_t(t)|^2+|(z_2)_t(t)|^2+|\nabla z_1|^2+|\nabla_T z_2|^2\Big\}-\int_0^t h(t-s)(\nabla z_1(s),\nabla (z_1)_t(s))ds$$
$$+\int_\Omega a(x)\Big[g(u_1)_t-g(v_1)_t\Big]\Big((u_1)_t-(v_1)_t\Big)dx=0.$$

Comme

$$\begin{aligned}\int_0^t h(t-s)(\nabla z_1(s),\nabla (z_1)_t(t))ds &= -h(0)|z_1(t)|^2-\int_0^t h_t(t-s)(\nabla z_1(s),\nabla z_1(t))ds\\ &+\frac{d}{dt}\left(\int_0^t h(t-s)(\nabla z_1(s),\nabla z_1(t))ds\right).\end{aligned}\tag{3.40}$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\left\{|(z_1)_t(t)|^2+|(z_2)_t(t)|^2+|\nabla z_1|^2+|\nabla_T z_2|^2\right\}+h(0)|z_1(t)|^2$$

$$+\int_0^t h_t(t-s)(\nabla z_1(s),\nabla z_1(t))ds-\frac{d}{dt}\left(\int_0^t h(t-s)(\nabla z_1(s),\nabla z_1(t))ds\right)$$

$$+\int_\Omega a(x)\big[g(u_1)_t-g(v_1)_t\big]((u_1)_t-(v_1)_t)dx=0.$$

Comme

$$\int_0^t h_t(t-s)(\nabla z_1(s),\nabla z_1(t))ds \le \frac{1}{2}||h||_{L^1(0,\infty)}\int_0^t h(t-s)|\nabla z_1(s)|^2ds+\frac{\gamma^2}{2}|\nabla z_1(t)|^2 \tag{3.41}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|(z_1)_t(t)|^2+|(z_2)_t(t)|^2+|\nabla z_1|^2+|\nabla_T z_2|^2\right\}+\int_\Omega a(x)\big[g(u_1)_t-g(v_1)_t\big]((u_1)_t-(v_1)_t)dx$$

$$\le\frac{1}{2}||h||_{L^1(0,\infty)}\int_0^t h(t-s)|\nabla z_1(s)|^2ds+\frac{\gamma^2}{2}|\nabla z_1(t)|^2+\frac{d}{dt}\left(\int_0^t h(t-s)(\nabla z_1(s),\nabla z_1(t))ds\right).$$

En intégrant de 0 à t on déduit que

$$\frac{1}{2}|(z_1)_t(t)|^2+\frac{1}{2}|(z_2)_t(t)|^2+\frac{1}{2}|\nabla z_1|^2+\frac{1}{2}|\nabla_T z_2|^2+\int_0^t\int_\Omega a(x)\big[g(u_1)_t-g(v_1)_t\big]((u_1)_t-(v_1)_t)dxds$$

$$\leq \frac{1}{2}||h||^2_{L^1(0,\infty)} \int_0^t |\nabla z_1(s)|^2 ds + \frac{\gamma^2}{2} \int_0^t |\nabla z_1(s)|^2 ds + \int_0^t h(t-s)(\nabla z_1(s), \nabla z_1(t)) ds.$$

Comme

$$\int_0^t h(t-s)(\nabla z_1(s), \nabla z_1(t)) ds \leq \eta |\nabla z_1(t)|^2 + \frac{1}{4\eta} ||h||_{L^1(0,\infty)} ||h||_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t |\nabla z_1(s)|^2 ds$$

$$\frac{1}{2}|(z_1)_t(t)|^2 + \frac{1}{2}|(z_2)_t(t)|^2 + \left(\frac{1}{2} - \eta\right) |\nabla z_1|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_T z_2|^2 + \int_0^t \int_\Omega a(x) \left[g(u_1)_t - g(v_1)_t\right]((u_1)_t - (v_1)_t) dx ds$$

$$\leq \frac{1}{2}||h||^2_{L^1(0,\infty)} \int_0^t |\nabla z_1(s)|^2 ds + \frac{\gamma^2}{2} \int_0^t |\nabla z_1(s)|^2 ds + \frac{1}{4\eta} ||h||_{L^1(0,\infty)} ||h||_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t |\nabla z_1(s)|^2 ds,$$

donc

$$\frac{1}{2}|(z_1)_t(t)|^2 + \frac{1}{2}|(z_2)_t(t)|^2 + \left(\frac{1}{2} - \eta\right) |\nabla z_1|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_T z_2|^2$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}||h||^2_{L^1(0,\infty)} + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{1}{4\eta} ||h||_{L^1(0,\infty)} ||h||_{L^\infty(0,\infty)}\right) \int_0^t |\nabla z_1(s)|^2 ds.$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on trouve

$$|(z_1)_t(t)|^2 = |(z_2)_t(t)|^2 = |\nabla z_1|^2 = |\nabla_T z_2|^2 = 0,$$

ce qui donne

$$z = (z_1, z_2) = u - v = 0.$$

Donc

$$u = v.$$

3.3 Existence de la solution faible

Soient $(u^0, u^1) \in H^1_{\Gamma_0} \times L^2(\Omega)$ et $(v^0, v^1) \in H^1(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$, on sait que

$$D(-\Delta) = \left\{(u, v) \in \mathbf{V} \cap (H^2(\Omega) \times H^2(\Gamma))\ ; v_{tt} + \frac{\partial u}{\partial \nu} - \Delta_T v = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_1 / \ \ u|_\Gamma = v\right\}$$

est dense dans $\mathbf{V}$ et $(H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times (H^1(\Gamma) \cap H^2(\Gamma))$ est dense dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)$, il existe donc une suite $\{u^0_\eta, v^0_\eta\} \subset D(-\Delta)$ et $\{u^1_\eta, v^1_\eta\} \subset (H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times (H^1(\Gamma) \cap H^2(\Gamma))$

telle que

$$(u_\eta^0, v_\eta^0) \longrightarrow (u^0, v^0) \text{ fortement dans } \mathbf{V} \tag{3.42}$$

$$(u_\eta^1, v_\eta^1) \longrightarrow (u^1, v^1) \text{ fortement dans } \mathbf{H} \tag{3.43}$$

avec

$$\frac{\partial u_\eta^0}{\partial \nu} - \Delta_T v_\eta^0 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad \text{et} \quad \Delta_T v_\eta^0 \in L^2(\Gamma)$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe

$$u_\eta = (u_\eta, v_\eta) : (\Omega \times \mathbb{R}_+) \times (\Gamma \times \mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathbb{R},$$

solution régulière du problème $(\mathcal{P})$ vérifiant

$$\begin{cases} u_{tt,\eta} - \Delta u_\eta - \int\limits_0^t h(t-s)\Delta u_\eta(s)ds + a(x)g(u_{t,\eta}) & = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ v_{tt,\eta} + \dfrac{\partial u_\eta}{\partial_\nu} + \int\limits_0^t h(t-s)\dfrac{\partial u_\eta}{\partial \nu}(s)ds - \Delta_T v_\eta & = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \\ u_\eta = v_\eta & \quad\quad \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\ u_\eta = 0 & \quad\quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ u_\eta(0) = (u_\eta(0), v_\eta(0)) = u_{t,\eta}(0) = (u_{t,\eta}(0), v_{t,\eta}(0)) & = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \Gamma. \end{cases} \tag{3.44}$$

En utilisant la première estimation, on obtient

$$|u_{t,\eta}(t)|^2 + |v_{t,\eta}(t)|^2 + |\nabla u_\eta(t)|^2 + |\nabla_T v_\eta(t)|^2 \leq L. \tag{3.45}$$

Et posons

$$z_{\theta,\eta} = (z_{1,\theta,\eta}, z_{2,\theta,\eta}) = u_{\theta,\eta} - v_{\theta,\eta},$$

où θ, et $\eta \in \mathbb{N}$ sont deux solutions régulière de (3.44) correspondantes à $u_\eta^0(x)$, $u_\eta^1(x)$, $u_\theta^0(x)$, $u_\theta^1(x)$ et $v_\eta^0(x)$, $v_\eta^1(x)$, $v_\theta^0(x)$, $v_\theta^1(x)$ respectivement.

On suivra les mêmes étapes que celles utilisées pour démontrer l'unicité de la solution forte de (3.6) et en tenant compte de (3.42), on déduit l'existence de

$$(u, v) : (\Omega \times \mathbb{R}_+) \times (\Gamma \times \mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que

$$(u_\eta, v_\eta) \longrightarrow (u, v) \text{ fortement dans } \mathcal{C}^0([0,T], \mathbf{V}). \tag{3.46}$$

$$(u_{t,\eta}, v_{t,\eta}) \longrightarrow (u_t, v_t) \text{ fortement dans } \mathcal{C}^0([0,T], \mathbf{H}). \tag{3.47}$$

Par passage à la limite dans la première équation du problème $(\mathcal{P})$, on trouve

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \int\limits_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds + a(x)g(u_t) = 0 & \text{dans } L^2(0,T,\mathbf{V}) \\ v_{tt} + \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \int\limits_0^t h(t-s)\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(s)ds - \Delta_T v = 0 & \text{dans } L^2(0,T,\mathbf{V}) \end{cases}$$

Maintenant, notre but est de montrer que $\chi = g(y')$. En effet, multiplyant la première équation dans (3.44) par y'_μ et intégrant sur Ω on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y'_\mu(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla y_\mu(t)|^2 + (g(y'_\mu(t)), y'_\mu(t))_\Omega \\ = \; & \frac{d}{dt}(\int_0^t h(t-\tau)(\nabla y_\mu(\tau), \nabla y_\mu(t)) \;\; d\tau) - h(0)|\nabla y_\mu(t)|^2 \\ & - \int_0^t h'(t-\tau)(\nabla y_\mu(\tau), \nabla y_\mu(t)) \;\; d\tau. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Intégrant la dernière égalité sur $(0;t)$ il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}|y'_\mu(t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla y_\mu(t)|^2 + \int_0^t (g(y'_\mu(s)), y'_\mu(s))_\Omega ds, \\ = \; & \frac{1}{2}|y^1_\mu|^2 + \frac{1}{2}|\nabla y^0_\mu|^2 + \int_0^t h(t-\tau)(\nabla y_\mu(\tau), \nabla y_\mu(t)) \;\; d\tau \\ & -h(0)\int_0^t |\nabla y_\mu(s)|^2 \;\; ds - \int_0^t \int_0^s h'(s-\tau)(\nabla y_\mu(\tau), \nabla y_\mu(s)) \;\; d\tau ds. \end{aligned} \tag{3.49}$$

A partir de (3.49) et tenons compte des convergences (3.42), (3.43), (3.46) et (3.47), on déduit que

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \longrightarrow \infty} \int_0^t (g(y'_\mu(s)), y'_\mu(s))_\Omega ds \;\; = \;\; & -\frac{1}{2}|y'(t)|^2 - \frac{1}{2}|\nabla y(t)|^2 \frac{1}{2}|y^1|^2 \\ + \;\; & \frac{1}{2}|\nabla y^0|^2 + \int_0^t h(t-\tau)(\nabla y(\tau), \nabla y(t)) \;\; d\tau \\ - \;\; & \int_0^t \int_0^s h'(s-\tau)(\nabla y(\tau), \nabla y(s)) \;\; d\tau \;\; ds. \\ - \;\; & h(0)\int_0^t |\nabla y(s)|^2 \;\; ds \end{aligned} \tag{3.50}$$

D'autre part, supposons que w est une solution faible du problème linéaire

$$\begin{cases} w'' - \Delta w + \displaystyle\int_0^t h(t-\tau)\Delta w(\tau) \; d\tau + \chi = 0 & \text{dans} \;\; L^2(0,\infty;\mathbf{V}') \\ w = 0 & \text{sur} \;\; \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} - \displaystyle\int_0^t h(t-\tau)\dfrac{\partial w}{\partial \nu}(\tau) \; d\tau & \text{dans} \;\; L^2(0,\infty;L^2(\Gamma_1)) \\ w(0) = y^0; \qquad w'(0) = y^1 & \text{dans} \;\; \Omega. \end{cases} \tag{3.51}$$

ensuite, considérons les même arguments utilisés pour démontrer (3.50), on conclut que

$$\begin{aligned} \int_0^t (\chi(s), w'(s))_\Omega ds &= -\frac{1}{2}|w'(t)|^2 - \frac{1}{2}|\nabla w(t)|^2 \frac{1}{2}|y^1|^2 + \frac{1}{2}|\nabla y^0|^2 \\ &+ \int_0^t h(t-\tau)(\nabla w(\tau), \nabla w(t)) \; d\tau \\ &- \int_0^t \int_0^s h'(s-\tau)(\nabla w(\tau), \nabla w(s)) \; d\tau \;\; ds \\ &- h(0)\int_0^t |\nabla w(s)|^2 \;\; ds \end{aligned} \tag{3.52}$$

Puisque y est une solution faible du problème (3.51), alors à partir de (3.50) et (3.52) il s'ensuit que

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \int_0^t (g(y_n'(s)), y_n'(s))_\Omega \;\; ds = \int_0^t (\chi(s), y'(s))_\Omega ds.$$

La convergence précédente, combinée avec (3.46), joue un rôle essentiel pour montrer que $\chi = g(u')$ en utilisant les mêmes arguments que ceux considérés avant. Maintenant, l'unicité des solutions faibles est obtenue en utilisant la procédure de régularisation de Lions-Visik.

Chapitre 4

Stabilité exponentielle du problème $(\mathcal{P})$

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de la stabilisation exponentielle du problème $(\mathcal{P})$. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ une partition de Γ telle que

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$$

et

$$\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \emptyset.$$

On désigne par ν le champ unitaire normal extérieur à la frontière Γ de Ω, et par ∂_ν l'opérateur de dérivation dans cette direction. On note par ∂_T la dérivée tangentielle.
Il important de rappeler que Cavalcanti et Al [22] ont étudié l'éxistence, l'unicité et le comportement asymptotique des solutions du problème viscoélastique, avec un feedback frontière, non linéaire suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int\limits_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} - \int\limits_0^t h(t-s)\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(s)ds + g(u_t) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ u = 0 & \text{dans } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \qquad (*)$$

où Ω est un domaine étoilé, borné de $\mathbb{R}^n$; $n \geq 1$, avec une frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ assez régulière. Ici, Γ_0 et Γ_1 sont disjoints fermés, et ν représente le vecteur normal sortant de Ω. Quand $n = 1$ et $\Omega = (0, L)$, par exemple, le problème $(*)$ décrit l'équation du mouvement d'un corps constitué par un matériaux viscoelastique, avec une mémoire longue, qui occupe l'intervalle $[0; L]$ et tel que l'une de ses extrémité est fixée quant à l'autre elle est libre et soumise à l'action d'une dissipation non linéaire. Quand $h = 0$, le problème $(*)$ a été étudié par M. Aassila [5], G. Chen et H. Wong [26], I. Lasiecka et D. Tataru [48] et aussi par E. Zuazua [80]. Quand $g = 0$, on renvoit le lecteur au travail de J. Muñoz Rivera et J. Barbosa Sobrinho [7], qui ont considéré l'équation viscoelastique sous les conditions de contact de Signorini. On peut aussi citer d'autres travaux en relation avec les effets viscoelastiques tels que C. M. Dafermos [27, 29] ; S. Jian et J. Muñoz Rivera [39] ; J. Lagnese [45] ; et M. Renardy, W. J. Hrusa et J. A. Nohel [72], parmi tant d'autres.

Le résultat principal de notre travail, dans cette première partie, conserne l'existence globale et l'unicité des solutions fortes et faibles de $(\mathcal{P})$ et la décroissance uniforme (exponentielle) de l'énergie associée à ce problème. Pour obtenir l'existence des solutions on utilise la méthode de Faedo-Galerkin au lieu de la théorie des semigroupes. Cependant, les conditions aux limites non linéaires posent de sérieuses difficultés techniques, que nous décrivons ci dessous : Premièrement, on ne peut pas utiliser une base spéciale donnée par les fonctions propres de $-\Delta$, qui nous conduit à considérer un problème équivalent avec des données initiales nulles obtenues par un changement de variables. Le même argument a toujours été considéré par M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti et J. A. Soriano [19] dans leur récent travail. Deuxièment, les arguments standards de compacité ou de monotonie ne marchent pas quand on passe à la limite. En effet, afin de passer à la limite on cherche à combiner les deux méthodes. Concernant la stabilité asymptotique de l'énergie, on considère les estimations intégrales de l'énergie avec la téchnique des multiplicateurs de V. Komornik [44]. Cependant, la méthode des multiplicateurs, n'est pas utilisable quand on traite le terme mémoire $\int_0^t h(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau$ ce qui nous a conduit à utiliser le "trick" donnée par le noyau résolvant de Volterra afin d'obtenir le terme

$\int_0^t h(t-\tau)y(\tau)d\tau$. Mais les conditions aux limites non linéaires posent d'autres problèmes, qui nous ont poussé à traiter l'équation dans sa forme originale. Ensuite, en supposant que g et h

vérifient des propriétés générales (voir hypothèses sur le feedback g et sur le noyau h ci-dessous) et de plus que $\int_0^t h(s)ds$ est assez petite, on obtient des estimations du taux de décroissance de l'énergie associée aux solutions du problème $(\mathcal{P})$.

On rappelle que le problème $(\mathcal{P})$ est défini par :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds + a(x)g(u_t) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ v_{tt} + \dfrac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^t h(t-s)\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(s)ds - \Delta_T v = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \\ u = v & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ (u(0), v(0)) = (u^0, v^0), (u_t(0), v_t(0)) = (u^1, v^1) & \text{dans } \Omega \times \Gamma \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

On considère les espaces

$$\mathbf{V} = \Big\{(u,v) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma) \ / u|_\Gamma = v\Big\},$$

$$\mathbf{H} = L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma).$$

munis des normes suivantes

$$|(u,v)|^2_{\mathbf{H}} = |u|^2_{L^2(\Omega)} + |v|^2_{L^2(\Gamma)},$$

$$||(u,v)||^2_{\mathbf{V}} = ||u||^2_{H^1(\Omega)} + ||v||^2_{H^1(\Gamma)}.$$

$\mathbf{V}$ et $\mathbf{H}$ sont des espaces de Hilbert et $\mathbf{V}$ est dense dans $\mathbf{H}$ avec injection continue.

On fait les :

hypothèses sur le feedback g :

$(\mathbf{F.1})$ Soit g est une fonction non décroissante, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que

(i) $g(s)s > 0 \quad \forall s \neq 0$

(ii) $ks^2 \leq g(s)s \leq Ks^2$ pour tout $|s| > 1$, k et K étant deux constantes positives.

$(\mathbf{F.2})$ Soit a est une fonction non négative telle que

$$a \in L^\infty(\Omega), \quad a(x) \geq a_0 > 0 \qquad \textit{dans } \ \omega.$$

où $\omega \subset \Omega$ est un ouvert non vide, a_0 est constante.

hypothèses sur le noyau h :

Premiérement, on suppose que h est une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ qui vérifie les hypothèses suivantes

- **(N.1)** $$\int_0^\infty h(s)ds < 1$$
- **(N.2)** $$1 - \int_0^\infty h(s)ds = L > 0$$

de plus on suppose aussi qu'il existe ξ_1 telle que

- **(N.4)** $$0 \leq h_{tt}(t) \leq \xi_1 h(t) \quad , \text{pour tout} \quad t \geq 0,$$
- **(N.5)** $$e^{\alpha t} h(t) \in L^1(0, \infty) \quad , \text{pour tout} \quad \alpha > 0, \quad t > 0,$$
- **(N.6)** $$h_t(t) + \gamma h(t) \geq 0 \ \text{ et } \ e^{\alpha t}[h_t(t) + \gamma h(t)] \in L^1(0, \infty) \quad , \text{pour tout} \quad \alpha, \gamma > 0.$$

Dans la suite, on notera par : $l, \bar{l}, l_\alpha, \bar{l}_\alpha$ et $\overline{h}_\alpha$ les expressions suivantes

$$\begin{aligned}
l(t) &= h_t(t) + \gamma h(t), && (4.1)\\
\bar{l} &= \int_0^\infty l(s)ds, && (4.2)\\
l_\alpha &= e^{\alpha t} l(t), && (4.3)\\
\bar{l}_\alpha &= \int_0^\infty l_\alpha(s)ds, && (4.4)\\
\overline{h} &= \int_0^\infty h(s)ds. && (4.5)
\end{aligned}$$

Ensuite, on définira l'énergie classique associée au problème $(\mathcal{P})$.

En multipliant la première équation du problème $(\mathcal{P})$ par : u_t, la deuxième par v_t et en intégrant sur Ω et Γ_1 respectivement, on obtient

$$\begin{cases}
(u_{tt}, u_t)_\Omega - (\Delta u, u_t)_\Omega + \displaystyle\int_0^t h(t-s)(\Delta u(s), u_t)_\Omega ds + (a(x)g(u_t), u_t)_\Omega = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+,\\
(v_{tt}, v_t)_{\Gamma_1} + \big(\dfrac{\partial u}{\partial \nu}, v_t\big)_{\Gamma_1} - \displaystyle\int_0^t h(t-s)\big(\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(s), v_t(t)\big) ds - (\Delta_T v, v_t)_{\Gamma_1} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+,\\
u = v & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+,\\
u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+,\\
(u(0), v(0)) = (u^0, v^0), (u_t(0), v_t(0)) = (u^1, v^1) & \text{dans } \Omega \times \Gamma
\end{cases}$$

La première équation donne

$$\int\limits_{\Omega} u_{tt}u_t dx - \int\limits_{\Omega} \Delta u u_t dx + \int\limits_{\Omega} u_t \int\limits_{0}^{t} h(t-s)\Delta u(s)dsdx + \int\limits_{\Omega} a(x)g(u_t)u_t dx = 0.$$

En appliquant la formule de Green, la dernière égalité devient

$$\int\limits_{\Omega} u_{tt}u_t dx + \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx - \int\limits_{\Omega} \nabla u_t \int\limits_{0}^{t} h(t-s)\nabla u(s)dsdx + \int\limits_{\Omega} a(x)g(u_t)u_t dx - \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t d\Gamma$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_1} u_t \int\limits_{0}^{t} h(t-s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)dsd\Gamma = 0$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \Big\{|u_t|^2 + |\nabla u|^2\Big\}dx - \int\limits_{\Omega} \nabla u_t \int\limits_{0}^{t} h(t-s)\nabla u(s)dsdx + \int\limits_{\Omega} a(x)g(u_t)u_t dx$$

$$- \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_1} u_t \int\limits_{0}^{t} h(t-s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)dsd\Gamma = 0. \tag{4.6}$$

De même pour la deuxième équation

$$\int\limits_{\Gamma_1} v_{tt}v_t d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} v_t d\Gamma - \int\limits_{\Gamma_1} v_t \int\limits_{0}^{t} h(t-s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)dsd\Gamma - \int\limits_{\Gamma_1} \Delta_T v v_t d\Gamma = 0$$

c'est à dire

$$\int\limits_{\Gamma_1} v_{tt}v_t d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_1} \nabla_T v \nabla_T v_t d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} v_t d\Gamma - \int\limits_{\Gamma_1} v_t \int\limits_{0}^{t} h(t-s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)dsd\Gamma = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Gamma_1} \Big\{|v_t|^2 + \nabla_T v|^2\Big\}d\Gamma = -\int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} v_t d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_1} v_t \int\limits_{0}^{t} h(t-s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)dsd\Gamma \tag{4.7}$$

En remplaçant le terme

$$-\int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} v_t d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_1} v_t \int\limits_{0}^{t} h(t-s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)dsd\Gamma$$

de l'équation (4.6) par le terme

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Gamma_1}\Big\{|v_t|^2+\nabla_T v|^2\Big\}d\Gamma$$

et en utilisant les conditions aux limites, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int\limits_{\Omega}\Big\{|u_t|^2dx+|\nabla u|^2\Big\}dx+\int\limits_{\Gamma_1}\Big\{|v_t|^2+\nabla_T v|^2\Big\}d\Gamma\right]+\int\limits_{\Omega}a(x)g(u_t)u_tdx$$
$$-\int\limits_{\Omega}\nabla u_t\int\limits_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx=0. \tag{4.8}$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int\limits_{\Omega}\Big\{|u_t|^2dx+|\nabla u|^2\Big\}dx+\int\limits_{\Gamma_1}\Big\{|v_t|^2+\nabla_T v|^2\Big\}d\Gamma\right]=-\int\limits_{\Omega}a(x)g(u_t)u_tdx$$
$$+\int\limits_{\Omega}\nabla u_t\int\limits_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx, \tag{4.9}$$

ce qui donne

$$\frac{d}{dt}E(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int\limits_{\Omega}\Big\{|u_t|^2dx+|\nabla u|^2\Big\}dx+\int\limits_{\Gamma_1}\Big\{|v_t|^2+\nabla_T v|^2\Big\}d\Gamma\right]$$

L'énergie associée au problème ($\mathcal{P}$) est définie par :

$$E(t)=\frac{1}{2}\left[\int\limits_{\Omega}\Big\{|u_t|^2dx+|\nabla u|^2\Big\}dx+\int\limits_{\Gamma_1}\Big\{|v_t|^2+\nabla_T v|^2\Big\}d\Gamma\right] \tag{4.10}$$

4.2 Stabilisation du problème ($\mathcal{P}$)

Théorème 4.2.1 *Si les hypothèses* (**N.1**) *et* (**N.5**) *sont satisfaites, alors l'énergie du problème ($\mathcal{P}$) décroit exponentiellement vers zéro, c'est-à-dire ; il existe deux constantes positives C et β telles que*

$$E(t)\le C\exp(-\beta t)\qquad\qquad \forall t\ge 0,$$

pour toute solution faible u du problème ($\mathcal{P}$).

On fait la démonstration pour les solutions fortes par des arguments de densité les résultats seront étendus aux solutions faibles.

La différentiation de $E(t)$ par rapport au temps donne

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_{\Omega} a(x)g(u_t)u_t dx + \int_{\Omega} \nabla u_t \int_0^t h(t-s)\nabla u(s) ds dx.$$

On définit une fonction de Lyaponouv par

$$(h\Box\nabla u)(t) = \int_{\Omega}\int_0^t h(t-s)|\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds dx.$$

Pour la peuve du théorème, on utilise le lemme suivant

Lemme 4.2.1 *Pour tout $u \in \mathcal{C}^1(0,T,H^2(\Omega))$ on a :*

$$\int_{\Omega}\int_0^t h(t-s)\Delta u(s)u_t(t) ds dt = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(h\Box\nabla u)(t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_{\Omega}|\nabla u(t)|^2 dx$$
$$-\frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t) + \frac{1}{2}h(t)\int_{\Omega}|\nabla u(t)|^2 dx.$$

Preuve du lemme (4.2.1) On a

$$\int_{\Omega}\int_0^t h(t-s)\Delta u(s)u_t(t) ds dx = -\int_0^t h(t-s)\int_{\Omega}\nabla u_t(t)\nabla u(s) ds dx$$

$$= -\int_0^t h(t-s)\int_{\Omega}\nabla u_t(t)\big[\nabla u(s) - \nabla u(t)\big] dx ds - \int_0^t h(t-s)\int_{\Omega}\nabla u_t(t)\nabla u(t) dx ds,$$

d'où

$$\int_{\Omega}\int_0^t h(t-s)\Delta u(s)u_t(t) ds dx = \frac{1}{2}\int_0^t h(t-s)\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|\nabla u(s) - \nabla u(t)|^2 dx ds$$
$$-\int_0^t h(s)\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|\nabla u(t)|^2 dx\right) ds.$$

Il claire que :

$$\int_{\Omega}\int_0^t h(t-s)\Delta u(s)u_t(t) ds dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t h(t-s)\int_{\Omega}|\nabla u(s) - \nabla u(t)|^2 dx ds\right\}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx\right\} - \frac{1}{2}\int_0^t h(t-s)\int_\Omega |\nabla u(s)-\nabla u(t)|^2 dxds$$
$$+\frac{1}{2}h(t)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx.$$

Ceci achève la démonstration du lemme (4.2.1).

En dérivant $(h\Box\nabla u)(t)$, on obtient

$$\frac{d}{dt}(h\Box\nabla u)(t) = (h_t\Box\nabla u)(t) + \frac{d}{dt}\left\{\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right\} - h(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$
$$-2\int_0^t\int_\Omega h(t-s)\nabla u(s)\nabla u_t(t)dxds.$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(h\Box\nabla u)(t) = \frac{1}{2}(h_t\Box\nabla u)(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right\} - \frac{1}{2}h(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$
$$-\int_0^t\int_\Omega h(t-s)\nabla u(s)\nabla u_t(t)dxds.$$

d'où l'on tire

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega \left\{|u_t|^2 + |\nabla u|^2\right\}dx + \int_{\Gamma_1}\left\{|v_t|^2 + |\nabla_T v|^2\right\}d\Gamma\right]$$

$$= -\int_\Omega a(x)g(u_t)u_t dx + \int_\Omega \nabla u_t \int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx$$
$$= -\int_\Omega a(x)g(u_t)u_t dx - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(h\Box\nabla u)(t) + \frac{1}{2}(h_t\Box\nabla u)(t)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right\} - \frac{1}{2}h(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

ce qui implique

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega \left\{|u_t|^2 + |\nabla u|^2\right\}dx + \int_{\Gamma_1}\left\{|v_t|^2 + |\nabla_T v|^2\right\}d\Gamma\right]$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right\}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(h\Box\nabla u)(t)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_\Omega |u_t|^2 dx+\left(1-\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx+\int_{\Gamma_1}\{|v_t|^2+|\nabla_T v|^2\}d\Gamma+(h\Box\nabla u)(t)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}h(t)\int_\Omega |\nabla u|^2+\frac{1}{2}(h_t\Box\nabla u)(t)-\int_\Omega a(x)g(u_t)u_t dx.$$

En définissant l'énergie modifiée, il s'ensuit que

$$e(t)=\frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2dx+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}|v_t|^2d\Gamma+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}|\nabla_T v|^2d\Gamma+\frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t).$$

Donc

$$e(t)=E(t)-\frac{1}{2}\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u|^2dx+\frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t).$$

La différentiation de $e(t)$ par rapport au temps donne

$$\frac{d}{dt}e(t)=-\frac{1}{2}h(t)\int_\Omega |\nabla u|^2dx+\frac{1}{2}(h_t\Box\nabla u)(t)-\int_\Omega a(x)g(u_t)u_t dx$$

D'après la définition de $e(t)$, $(h\Box\nabla u)(t)$, et l'hypothèse (**N.2**), on a la

Remarque 4.2.1 *Soient* $(u^0,u^1)\in[H^2(\Omega)\cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)]\times H^1_{\Gamma_0}$ *et* $(v^0,v^1)\in H^2(\Gamma)\times H^1(\Gamma)$ *avec*

$$\partial_\nu u^0-\Delta v^0=0,\quad \textit{sur}\quad \Gamma\qquad \textit{et}\quad \Delta_T v^0_\Gamma\in L^2(\Gamma).$$

Alors, il existe une constante $M>0$ telle que :

$$E(t)\leq Me(t);\quad \text{pour tout } t\geq 0.$$

En effet :

$$\begin{aligned} e(t) &\geq \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |u_t|^2dx+L\int_\Omega |\nabla u|^2dx+\int_{\Gamma_1}\left\{|v_t|^2+|\nabla_T v|^2\right\}d\Gamma\right]\\ &\geq \frac{L}{2}E(t),\quad \text{puisque}\quad 0<L<1.\end{aligned}$$

On introduit maintenant les deux fonctionnelles

$$\varphi(t) = \int_\Omega u_t u dx + \int_{\Gamma_1} v_t v d\Gamma$$

et

$$\psi(t) = \int_\Omega \int_0^t L_\alpha(t-s)|\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds dx = (L_\alpha \Box \nabla u)(t)$$

où

$$L_\alpha(t) = e^{-\alpha t} \int_t^\infty l_\alpha(s) ds = e^{-\alpha t} \int_t^\infty l(s) e^{\alpha s} ds$$

et $l(t)$ définit par (4.1) et α est définit par (**N.5**).

De plus, on définit une fonctionnelle $V(t)$ par

$$\begin{aligned} V(t) &= e(t) + \varepsilon\varphi(t) + \eta\psi(t) - \eta \left(\int_0^t L_\alpha(s) ds \right) \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx \\ &\quad + 2\eta \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s) \nabla u(s) ds dx. \end{aligned} \tag{4.11}$$

où η et ε sont des constantes qui seront déterminées plus tard.

Proposition 4.2.1 *Soient* $(u^0, u^1) \in [H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)] \times H^1_{\Gamma_0}$ *et* $(v^0, v^1) \in H^2(\Gamma) \times H^1(\Gamma)$ *avec*

$$\partial_\nu u^0 - \Delta v^0 = 0, \quad sur \quad \Gamma \qquad et \quad \Delta_T v^0_\Gamma \in L^2(\Gamma).$$

Alors, il existe des constantes $\varepsilon_0, \eta_0, \zeta_1$ *et* ζ_2 *telles que*

$$\zeta_1(E(t) + \frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t)) \leq V(t) \leq \zeta_2(E(t) + \psi(t) + (h\Box\nabla u)(t)), \tag{4.12}$$

pour tout ; $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *et* $0 < \eta < \eta_0$.

Preuve : En appliquant l'inégalité de Poincaré à la fonction $\varphi(t)$, on obtient

$$\varphi(t) = \int_\Omega u_t u dx + \int_{\Gamma_1} v_t v d\Gamma \leq \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |u_t|^2 dx + c_p \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma + c'_p \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 d\Gamma \right]$$

où c_p et c'_p sont les constantes de Poincaré.

D'autre part, on a l'estimation

$$\int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s) \nabla u(s) ds dx = \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s)[\nabla u(s) - \nabla u(t) + \nabla u(t)] ds dx$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\int_0^t L_\alpha(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx + \int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t L_\alpha(t-s)[\nabla u(s)-\nabla u(t)]dsdx \\
&\leq \left(\delta_1 + \int_0^t L_\alpha(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx + \frac{1}{4\delta_1}\left(\int_0^t L_\alpha(s)ds\right)\psi(t)
\end{aligned}
$$

où $\delta_1 > 0$.

On a aussi

$$
\bar{l} \;=\; \int_0^\infty l(s)ds \leq \int_0^\infty e^{\alpha s}l(s)ds = \bar{l}_\alpha,
$$

et

$$
\int_0^t L_\alpha(s)ds \;\leq\; \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} l(s)e^{\alpha s}ds = \frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha}. \tag{4.13}
$$

En effet,

$$
\begin{aligned}
\int_0^t L_\alpha(s)ds &= \int_0^t e^{-\alpha s}\int_s^\infty l(r)e^{\alpha r}drds \\
&= \left[\frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha s}\int_s^\infty l(r)e^{\alpha r}dr\right]_0^t + \frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\alpha s}\left(\int_s^\infty l(r)e^{\alpha r}dr\right)' ds \\
&= \frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha t}\int_t^\infty l(r)e^{\alpha r}dr + \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty l(r)e^{\alpha r}dr - \frac{1}{\alpha}\int_0^t l(r)dr \\
&\leq \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty l(r)e^{\alpha r}dr = \frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha}, \qquad (\text{car} \;\; l > 0).
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t L_\alpha(t-s)\nabla u(s)dsdx \;\leq\; \left(\delta_1 + \frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha}\right)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx + \frac{\bar{l}_\alpha}{4\alpha\delta_1}\psi(t). \tag{4.14}
$$

Substituant les estimations précédentes dans (4.11), on tire

$$
\begin{aligned}
V(t) \geq e(t) - \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |u_t|^2dx - \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Gamma_1} |v_t|^2d\Gamma - \frac{\varepsilon c_p}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \frac{\varepsilon c_p'}{2}\int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2d\Gamma - \eta\frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx \\
+\eta\psi(t) - \eta\frac{1}{2\delta_1}\frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha}\psi(t) - 2\eta\left(\delta_1 + \frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha}\right)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx.
\end{aligned}
$$

A partir de la dernière inégalité on obtient

$$V(t) \geq \left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)\int_{\Omega}|u_t|^2dx+\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)\int_{\Gamma_1}|v_t|^2d\Gamma+\left(\frac{1-\varepsilon c_p'}{2}\right)\int_{\Gamma_1}|\nabla_T v|^2d\Gamma+\eta\left(1-\frac{1}{2\delta_1}\frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha}\right)\psi(t)$$

$$+\frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t)+\left(\frac{1}{2}(1-\overline{h})-2\eta\delta_1-3\eta\frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha}-\frac{\varepsilon c_p}{2}\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx.$$

En choisissant maintenant

$$\delta_1=\frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha},$$

$$\eta=\frac{\alpha(1-\overline{h})}{20\bar{l}_\alpha},$$

et

$$\varepsilon<\min\left\{1,\frac{1-\overline{h}}{4c_p}\right\}.$$

on déduit l'existence d'une constante positive $\zeta_1>0$ telle que

$$V(t)\geq\zeta_1E(t)+\frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t), \tag{4.15}$$

où

$$\zeta_1\leq\min\left\{(1-\varepsilon),(1-\varepsilon c_p'),\frac{3}{4}(1-\overline{h})-10\eta\frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha}\right\}.$$

Pour l'autre inégalité on a

$$\varphi(t)=\int_{\Omega}u_tudx+\int_{\Gamma_1}v_tvd\Gamma\leq\frac{1}{2}\int_{\Omega}|u_t|^2dx+\frac{c_p}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}|v_t|^2d\Gamma+\frac{c_p'}{2}\int_{\Gamma_1}|\nabla_T v|^2d\Gamma$$

$$\int_{\Omega}\nabla u(t)\int_0^tL_\alpha(t-s)\nabla u(s)dsdx \quad\leq\quad \left(\delta_1+\frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha}\right)\int_{\Omega}|\nabla u(t)|^2dx+\frac{\bar{l}_\alpha}{4\alpha\delta_1}\psi(t).$$

En prenant $\delta_1=\frac{1}{2}$, on obtient alors

$$V(t)\leq\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)\int_{\Omega}|u_t|^2dx+\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)\int_{\Gamma_1}|v_t|^2d\Gamma+\left(\frac{1+\varepsilon c_p'}{2}\right)\int_{\Gamma_1}|\nabla_T v|^2d\Gamma$$

$$+\eta\left(1+\frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha}\right)\psi(t)+\frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon c_p}{2}+\eta+2\eta\frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha}\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx.$$

Donc il existe une constante positive, $\zeta_2 > 0$ telle que

$$V(t) \leq \zeta_2(E(t) + \psi(t) + (h\Box\nabla u)(t)), \tag{4.16}$$

où

$$\zeta_2 \geq \max\left\{(1+\varepsilon), (1+\varepsilon c_p'), (1+\varepsilon c_p + 2\eta + 4\eta\frac{\overline{l}_\alpha}{\alpha})\right\}.$$

En combinant (4.15) et (4.16), on obtient (4.12).

Ceci achève la démonstration de la Proposition.

On définit maintenant une nouvelle fonctionnelle $W(t)$ en posant

$$W(t) = V(t) + \lambda\Gamma(t) + \mu\Theta(t),$$

où

$$\Gamma(t) = \int_\Omega \int_0^t H_\alpha(t-s)|\nabla u(s)|dsdx,$$

$$H_\alpha(t) = e^{-\alpha t}\int_t^{+\infty} h(s)e^{\alpha s}ds$$

et

$$\Theta(t) = \int_\Omega u_t \int_0^t h(t-s)(u(s)-u(t))dsdx.$$

Proposition 4.2.2 *Soient* $(u^0, u^1) \in [H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)] \times H^1_{\Gamma_0}$ *et* $(v^0, v^1) \in H^2(\Gamma) \times H^1(\Gamma)$ *avec*

$$\partial_\nu u^0 - \Delta v^0 = 0, \quad sur \quad \Gamma \qquad et \quad \Delta_T v^0_\Gamma \in L^2(\Gamma).$$

Alors, il existe des constantes $\varepsilon_0, \eta_0, \zeta_3$ *et* ζ_4 *telles que :*

$$\zeta_3(E(t) + \frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t)) \;\leq\; W(t) \leq \zeta_4(E(t) + \psi(t) + \Gamma(t) + (h\Box\nabla u)(t)), \tag{4.17}$$

pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *et* $0 < \eta < \eta_0$.

Preuve : L'inégalité de Young donne

$$\begin{aligned}
\Theta(t) &= \int_\Omega u_t \int_0^t h(t-s)(u(s)-u(t))dsdx \\
&\leq c\int_\Omega |u_t|^2dx + \frac{c_p\overline{h}}{4c}\int_\Omega\int_0^t h(t-s)|\nabla u(s) - \nabla u(t)|^2dsdx \\
&\leq c\int_\Omega |u_t|^2dx + \frac{c_p\overline{h}}{4c}(h\Box\nabla u)(t),
\end{aligned}$$

où c est constante positive.

D'après la proposition 4.2.1 on a

$$\begin{aligned} V(t)+\lambda\Gamma(t)+\mu\Theta(t) &\geq \zeta_1 E(t)-\mu c\int\limits_\Omega |u_t|^2dx-\frac{\mu c_p\overline{h}}{4c}(h\Box\nabla u)(t)+\frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t)+\lambda\Gamma(t)\\ &\geq \left(\frac{\zeta_1}{2}-\mu c\right)\int\limits_\Omega |u_t|^2dx+\frac{\zeta_1}{2}\int\limits_\Omega |\nabla u|^2dx+\frac{\zeta_1}{2}\int\limits_{\Gamma_1}|v_t|^2d\Gamma\\ &+ \frac{\zeta_1}{2}\int\limits_{\Gamma_1}|\nabla_T v|^2d\Gamma+\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu c_p\overline{h}}{4c}\right)(h\Box\nabla u)(t). \end{aligned}$$

En choisissant

$$c=\mu c_p\overline{h}$$

et

$$\mu^2<\frac{\zeta_1}{2c_p\overline{h}},$$

on obtient l'existence d'une constante positive $\zeta_3>0$ telle que

$$W(t) \;\;\geq\;\; \zeta_3(E(t)+\frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t)).$$

Pour l'autre inégalité on a

$$\begin{aligned} W(t)=V(t)+\lambda\Gamma(t)+\mu\Theta(t) &\leq \zeta_2(E(t)+\psi(t)+(h\Box\nabla u)(t))+\lambda\Gamma(t)+\mu\Theta(t)\\ &\leq \zeta_2E(t)+\zeta_2\psi(t)+\zeta_2(h\Box\nabla u)(t)+\lambda\Gamma(t)\\ &\quad +\mu c\int\limits_\Omega |u_t|^2dx+\frac{\mu c_p\overline{h}}{4c}(h\Box\nabla u)(t)\\ &= \left(\frac{\zeta_2}{2}+\mu c\right)\int\limits_\Omega |u_t|^2dx+\frac{\zeta_2}{2}\int\limits_\Omega |\nabla u|^2dx+\frac{\zeta_2}{2}\int\limits_{\Gamma_1}|v_t|^2d\Gamma\\ &\quad +\frac{\zeta_2}{2}\int\limits_{\Gamma_1}|\nabla_T v|^2d\Gamma+\zeta_2\psi(t)+\left(\zeta_2+\frac{\mu c_p\overline{h}}{4c}\right)(h\Box\nabla u)(t)\\ &\quad +\lambda\Gamma(t). \end{aligned}$$

Donc il existe une constante positive ζ_4 telle que

$$W(t) \;\;\leq\;\; \zeta_4(E(t)+\psi(t)+\Gamma(t)+(h\Box\nabla u)(t)),$$

d'où l'on obtient

$$\zeta_3(E(t)+\frac{1}{2}(h\Box\nabla)(t)) \;\;\leq\;\; W(t)\leq\zeta_4(E(t)+\psi(t)+\Gamma(t)+(h\Box\nabla u)(t)).$$

Théorème 4.2.2 *Supposons que les hypothèses* (**N.1**) *et* (**N.5**) *sont satisfaites, et que les données initiales :* $(u^0, u^1) \in [H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)] \times H^1_{\Gamma_0}$ *et* $(v^0, v^1) \in H^2(\Gamma) \times H^1(\Gamma)$ *avec*

$$\partial_\nu u^0 - v^0 = 0, \text{ sur } \Gamma_1 \text{ et } \Delta_T v^0_{\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1)$$

vérifiant l'inégalité : $E(0) > 0$*. Supposons de plus que les quantités* $\overline{l}_\alpha$ *et* $\overline{h}_\alpha$ *sont suffisamment petites, alors l'énergie classique* $E(t)$ *du problème* $(\mathcal{P})$ *décroit exponentiellement vers zéro, c'est-à-dire, il existe deux constantes* $C > 0$ *et* $B > 0$ *telle que*

$$E(t) \quad \leq \quad Ce^{-Bt}; \qquad \forall t \geq 0, \tag{4.18}$$

pour tout solution forte u du problème $(\mathcal{P})$

Preuve. En dérivant l'énergie modifiée e par rapport au temps t, on obtient

$$e'(t) = -\frac{1}{2}h(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}(h_t \Box \nabla u)(t) - \int_\Omega a(x)g(u_t)u_t dx.$$

De même en dérivant la fonctionnelle $\varphi(t)$, on a

$$\frac{d\varphi}{dt} = \int_\Omega \{|u_t|^2 + u_{tt}u\}dx + \int_{\Gamma_1} \{|v_t|^2 + v_{tt}v\}d\Gamma$$

En remplaçant u_{tt} et v_{tt} par leurs expressions obtenues à partir des deux premières équations du problème $(\mathcal{P})$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} \quad &= \quad \int_\Omega \Big\{|u_t|^2 - |\nabla u|^2\Big\}dx + \int_{\Gamma_1} \Big\{|v_t|^2 - |\nabla_T v|^2\Big\}d\Gamma \\ &\quad + \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx - \int_\Omega a(x)g(u_t)udx\end{aligned}$$

En dérivant la fonction $\psi(t)$, on trouve

$$\frac{d\psi}{dt} = -\alpha\psi(t) - (l\Box\nabla u)(t) + 2\left(\int_0^t L_\alpha(s)ds\right)\int_\Omega \nabla u(t)\nabla u_t(t)dx$$

$$-2\int_\Omega \nabla u_t(t)\int_0^t L_\alpha(t-s)\nabla u(s)dsdx.$$

Dérivons la fonctionnelle $V(t)$ et remplaçons $e'(t)$, $\varphi'(t)$ et $\psi'(t)$ par leurs valeurs, il vient

$$\frac{dV(t)}{dt} = \varepsilon \int_\Omega |u_t|^2 dx - \left(\varepsilon + \frac{1}{2}h(t) + \eta L_\alpha(t) - 2\eta L_\alpha(0)\right) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}(h_t \square \nabla u)(t)$$

$$- \int_\Omega a(x)g(u_t)u_t dx + \varepsilon \int_\Omega \nabla u \int_0^t h(t-s)\nabla u(s) ds dx - \alpha\eta\psi(t) - \eta(l\square\nabla u)(t)$$

$$+\varepsilon \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma - \varepsilon \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 d\Gamma - 2\eta\alpha \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s)\nabla u(s) ds dx$$

$$-2\eta \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t l(t-s)\nabla u(s) ds dx - \varepsilon \int_\Omega a(x)g(u_t)u dx.$$

De même dérivons les fonctionnelles $\Theta(t)$ et $\Gamma(t)$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{d\Theta(t)}{dt} &= -\int_\Omega \nabla u \int_0^t h(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds dx \\
&\quad + \int_\Omega \left(\int_0^t h(t-s)\nabla u(s) ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds\right) dx \\
&\quad - \left(\int_0^t h(s) ds\right) \int_\Omega |u_t|^2 dx + \int_\Omega u_t \int_0^t h_t(t-s)(u(s) - u(t)) ds dx
\end{aligned}$$

et

$$\frac{d}{dt}\Gamma(t) = -\alpha\Gamma(t) - \int_\Omega \int_0^t h(t-s)|\nabla u(s)|^2 ds dx + \overline{h}_\alpha \int_\Omega |\nabla u(s)|^2 dx. \tag{4.19}$$

Substituons maintenant les dérivées de $\Theta(t)$ et $\Gamma(t)$ dans la dérivée de $W(t)$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W(t) &= -\left(\mu \int_0^t h(s)ds - \varepsilon\right) \int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}(h_t\Box\nabla u)(t) \\
&+ \varepsilon \int_{\Gamma_1} |v_t|^2 d\Gamma - \varepsilon \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 d\Gamma - \alpha\eta\psi(t) - \eta(l\Box\nabla u)(t) \\
&- (\varepsilon + \frac{1}{2}h(t) + \eta L_\alpha(t) - 2\eta L_\alpha(0) - \lambda\overline{h}_\alpha) \int_\Omega |\nabla u(s)|^2 dx \\
&+ \mu \int_\Omega \left(\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))ds\right) dx \\
&- \int_\Omega a(x)g(u_t)u_t dx - \varepsilon \int_\Omega a(x)g(u_t)u dx - \alpha\lambda\Gamma(t) \\
&- 2\eta\alpha \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s)\nabla u(s)dsdx + \varepsilon \int_\Omega \nabla u \int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx \\
&- 2\eta \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t l(t-s)\nabla u(s)dsdx + \mu \int_\Omega u_t \int_0^t h_t(t-s)(u(s)-u(t))dsdx \\
&- \lambda \int_\Omega \int_0^t h(t-s)|\nabla u(s)|^2 dsdx \\
&- \mu \int_\Omega \nabla u \int_0^t h(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))dsdx. \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

On a les estimations suivantes

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u \int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx &\leq \delta_2 \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx \\
&+\frac{1}{4\delta_2}\left(\int_0^t h(s)ds\right) \int_\Omega \int_0^t h(t-s)|\nabla u(s)|^2 dsdx, \quad \delta_2 > 0,
\end{aligned}$$

$$\int_\Omega \nabla u \int_0^t h(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))dsdx \leq \delta_3 \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{\overline{h}}{4\delta_3}(h\Box\nabla u)(t), \qquad \delta_3 > 0,$$

$$\int_\Omega \left(\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))ds\right) dx \leq k_2 \int_\Omega \left(\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)ds\right)^2 dx$$

$$+\frac{\overline{h}}{4k_2}(h\Box\nabla u)(t), \qquad k_2>0,$$

et

$$\int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t l(t-s)\nabla u(s)dsdx \leq \left(\delta_4+\int_0^t l(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx+\frac{1}{4\delta_4}\left(\int_0^t l(s)ds\right)(l\Box\nabla u)(t) \quad \delta_4>0.$$

Injectons les estimations précédentes dans (4.20), alors on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W(t) \quad \leq & \quad -\left(\mu\int_0^t h(s)ds-\varepsilon\right)\int_\Omega |u_t|^2dx+\frac{1}{2}(h_t\Box\nabla u)(t)+\varepsilon\int_{\Gamma_1}|v_t|^2d\Gamma-\varepsilon\int_{\Gamma_1}|\nabla_T v|^2d\Gamma-\alpha\eta\psi(t)\\
& - \quad \eta(l\Box\nabla u)(t)-(\varepsilon+\frac{1}{2}h(t)+\eta L_\alpha(t)-2\eta L_\alpha(0)-\lambda\overline{h}_\alpha)\int_\Omega |\nabla u(s)|^2dx-\int_\Omega a(x)g(u_t)u_tdx\\
& + \quad \mu k_2\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)ds\right)^2dx+\mu\frac{\overline{h}}{4k_2}(h\Box\nabla u)(t)-\varepsilon\int_\Omega a(x)g(u_t)udx\\
& + \quad 2\eta\alpha\left(\delta_1+\frac{\overline{l}_\alpha}{\alpha}\right)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx+2\eta\alpha\frac{\overline{l}_\alpha}{4\alpha\delta_1}\psi(t)+\varepsilon\delta_2\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx\\
& + \quad \varepsilon\frac{1}{4\delta_2}\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega\int_0^t h(t-s)|\nabla u(s)|^2dsdx-\alpha\lambda\Gamma(t)\\
& + \quad 2\eta\left(\delta_4+\int_0^t l(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx+2\eta\frac{1}{4\delta_4}\left(\int_0^t l(s)ds\right)(l\Box\nabla u)(t)\\
& + \quad \mu\delta_3\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx+\mu\frac{\overline{h}}{4\delta_3}(h\Box\nabla u)(t)+\mu\int_\Omega u_t\int_0^t h_t(t-s)(u(s)-u(t))dsdx\\
& - \quad \lambda\int_\Omega\int_0^t h(t-s)|\nabla u(s)|^2dsdx,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W(t) &\leq -\left(\mu\int_0^t h(s)ds-\varepsilon\right)\int_\Omega |u_t|^2dx+\frac{1}{2}(h_t\Box\nabla u)(t)+\varepsilon\int_{\Gamma_1}|v_t|^2d\Gamma+\varepsilon\int_{\Gamma_1}|\nabla_T v|^2d\Gamma \\
&- (\varepsilon-6\eta\bar{l}_\alpha-2\eta\alpha\delta_1-\varepsilon\delta_2-2\eta\delta_4-\mu\delta_3-\lambda\overline{h}_\alpha)\int_\Omega|\nabla u(s)|^2dx-\alpha\lambda\Gamma(t) \\
&- \alpha\eta\left(1-\frac{\bar{l}_\alpha}{2\alpha\delta_1}\right)\psi(t)-\eta\left(1-\frac{\bar{l}}{2\delta_4}\right)(l\Box\nabla u)(t)-\varepsilon\int_\Omega a(x)g(u_t)udx \\
&+ \frac{\mu\overline{h}}{4}\left[\frac{1}{k_2}+\frac{1}{\delta_3}\right](h\Box\nabla u)(t)+\left(\frac{\varepsilon\overline{h}}{4\delta_2}+\mu k_2\overline{h}-\lambda\right)\int_\Omega\int_0^t h(t-s)|\nabla u(s)|^2dsdx \\
&+ \mu\int_\Omega u_t\int_0^t h_t(t-s)(u(s)-u(t))dsdx. \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

En choisissant dans (4.21)

$$\delta_1=\frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha},\ \delta_2=\frac{1}{2},\ \delta_3=\frac{\varepsilon}{6\mu},\ \delta_4=\bar{l}\text{ et }\ k_2=\frac{\varepsilon}{\mu}$$

et en remplaçant $h_t(t)$ par $l(t)-\gamma h(t)$, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W(t) &\leq -\left(\mu\int_0^t h(s)ds-\varepsilon\right)\int_\Omega |u_t|^2dx+\varepsilon\int_{\Gamma_1}|v_t|^2d\Gamma+\varepsilon\int_{\Gamma_1}|\nabla_T v|^2d\Gamma \\
&- \left(\frac{\varepsilon}{3}-10\eta\bar{l}_\alpha-\lambda\overline{h}_\alpha\right)\int_\Omega|\nabla u(s)|^2dx-\alpha\lambda\Gamma(t) \\
&- \frac{\alpha\eta}{2}\psi(t)-\frac{1}{2}(\eta-1)(l\Box\nabla u)(t)-\varepsilon\int_\Omega a(x)g(u_t)udx \\
&- \frac{1}{2}\left(\gamma-\frac{7\mu^2\overline{h}}{2\varepsilon}\right)(h\Box\nabla u)(t)-\left(\lambda-\frac{3\varepsilon\overline{h}}{2}\right)\int_\Omega\int_0^t h(t-s)|\nabla u(s)|^2dsdx \\
&+ \mu\int_\Omega u_t\int_0^t l(t-s)(u(s)-u(t))dsdx \\
&- \mu\gamma\int_\Omega u_t\int_0^t h(t-s)(u(s)-u(t))dsdx. \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

En utilisant les estimations

$$\int_\Omega u_t\int_0^t l(t-s)(u(s)-u(t))dsdx\leq\frac{h_0}{3}\int_\Omega|u_t|^2dx+\frac{3C_p\bar{l}}{4h_0}(l\Box\nabla u)(t),$$

$$\int_\Omega u_t \int_0^t h(t-s)(u(t)-u(s))dsdx \leq \frac{h_0}{3\gamma}\int_\Omega |u_t|^2dx + \frac{3\gamma C_p\overline{h}}{4h_0}(h\Box\nabla u)(t)$$

et le fait que pour tout $t \geq t_0 \geq 0$, on a

$$\int_0^t h(s)ds \quad \geq \quad \int_0^{t_0} h(s)ds = h_0,$$

dans (4.22), il vient alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W(t) \quad &\leq \quad -\left(\frac{h_0}{3}-\varepsilon\right)\int_\Omega |u_t|^2dx + \varepsilon\int_{\Gamma_1}|v_t|^2d\Gamma + \varepsilon\int_{\Gamma_1}|\nabla_T v|^2d\Gamma \\
&- \quad \left(\frac{\varepsilon}{3} - 10\eta\overline{l}_\alpha - \lambda\overline{h}_\alpha\right)\int_\Omega |\nabla u(s)|^2dx - \alpha\lambda\Gamma(t) \\
&- \quad \frac{\alpha\eta}{2}\psi(t) - \frac{1}{2}\left(\eta - 1 - \frac{3C_p\mu\overline{l}}{2h_0}\right)(l\Box\nabla u)(t) - \varepsilon\int_\Omega a(x)g(u_t)udx \\
&- \quad \frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{7\mu^2\overline{h}}{2\varepsilon} - \frac{3\mu\gamma^2C_p\overline{h}}{2h_0}\right)(h\Box\nabla u)(t) \\
&- \quad \left(\lambda - \frac{3\varepsilon\overline{h}}{2}\right)\int_\Omega\int_0^t h(t-s)|\nabla u(s)|^2dsdx.
\end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned}
\mu \quad &= \quad \frac{h_0}{\overline{h}}\min\left\{\frac{1}{3C_p\gamma}, \frac{\gamma}{63}\right\}, \\
\varepsilon \quad &= \quad \frac{\mu h_O}{6}, \\
\eta \quad &= \quad 2 + \frac{3\mu C_p\overline{l}}{2h_0}, \\
\lambda \quad &= \quad \frac{\mu h_0(9\overline{h}_\alpha^2+1)}{36h_\alpha},
\end{aligned}$$

et en choisissant

$$\overline{h}_\alpha < \frac{1}{3}, \quad \overline{l}_\alpha = \frac{\varepsilon}{60\eta}$$

on oboutit au résultat suivant

$$\frac{d}{dt}W(t) \leq -C(E(t) + (h\Box\nabla u)(t) + \psi(t) + \Gamma(t))$$

où C est une constante positive.

D'après la proposition 4.2.2 on a

$$W'(t) \leq -\frac{C}{\zeta_4}W(t) = -\beta W(t), \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

Comme

$$W(0) = V(0) > 0, \quad \text{pour un } \varepsilon \text{ assez petit,}$$

alors

$$W(t) \leq W(0)\exp(-\beta t), \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

Le membre de gauche de la proposition 4.2.2 donne

$$E(t) \leq \frac{W(0)}{\zeta_3}\exp(-\beta t), \quad t \geq t_0 \geq 0,$$

d'où

$$E(t) \leq C_1 \exp(-\beta t), \quad \text{pour tout t} \geq 0$$

où $C_1 = \dfrac{W(0)}{\zeta_3} > 0$.

Ce qui achève la démonstration du Théorème .

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence, l'unicité et la décroissance exponentielle de l'énergie associée à **un problème viscoélastique**.

– Les **termes mémoire** sont présents à **l'intérieur du domaine** et **sur une partie de sa frontière**,
– La **fonction de relaxation** utilisée est **positive** et **oscillante**,
– Les **conditions aux limites** sont **évolutives sur une partie du bord**,
– Le **feedback** est **non linéaire**.

Perspectives

Il serait souhaitable d'étudier

1. Le même problème avec des semi linéarités à l'intérieur du domaine et sur le bord avec des noyaux fortement définis positifs ,
2. le problème des plaques viscoélastiques combiné avec l'équation de la chaleur avec des noyaux fortement définis positifs,
3. le problème de Petrovsky avec des noyaux fortement définis positifs,
4. le problème thermoélastique avec des noyaux fortement définis positifs.

.

Bibliographie

[1] **R. A. Adams**, *Sobolev spaces*, Academic press, new york, 1975.

[2] **F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa, D. Sforza**, *Decay estimates for second order evolution equations with memory*,J. Funct. Anal. 254 (2008) 1342-1372.

[3] **F. Alabau-Boussouira, J. Prüss, R. Zacher**, *Exponential and polynomial stability of a wave equation for boundary memory damping with singular kernels*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 347 (2009) 277-282.

[4] **D. Andrade, M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, H. Portillo Oquendo**, *Existence and asymptotic stability for viscoelastic evolution problems on compact manifolds.* J. Comput. Anal. Appl. 8 (2006) 173-193.

[5] **M. Assila** , *A note on the boundary stabilization of a compacity coupled system of wave equations*, Applied Mathematics Letters, 1998.

[6] **J. M. Ball**, *Strongly continuous semigroups, weak solutions, and the variation of constants formula*,Proc. Amer. Math. Soc. 63 (1977) 370-373.

[7] **J. Barbosa Sobrinho and J. E. Muñoz Rivera** , *Existence and uniform rates of decay for contact problems in viscoelasticity*, Appl. Anal., 67 (1997), 3-4.

[8] **V. Barbu**, *Analysis and control of nonlinear infinite dimensional systems.* Academic press, New york, 1993.

[9] **S. Berrimi, S.A. Messaoudi**, *Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with a nonlinear source*, Nonlinear Anal. 64 (2006) 2314-2331.

[10] **H. Brézis**, *Analyse fonctionnelle, théorie et application*, Springer-verlag Heidelberg 1987.

[11] **P. Cannarsa and D. Sforza**, *Integro-differential equations of hyperbolic type with positive definite kernels.* (J. Differential Equations 250 (2011) 4289-4335).

[12] **P. Cannarsa, D. Sforza**, *An existence result for semilinear equations in viscoelasticity : the case of regular kernels, in : M. Fabrizio, B. Lazzari, A. Morro (Eds.), Mathematical Models and Methods for Smart Materials.* in : Ser. Adv. Math. Appl. Sci., vol. 62, World Scientific, 2002, pp. 343-354.

[13] **P. Cannarsa, D. Sforza**, *Global solutions of abstract semilinear parabolic equations with memory terms*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 10 (2003) 399-430.

[14] **P. Cannarsa, D. Sforza**, *Semilinear integrodifferential equations of hyperbolic type : existence in the large*, Mediterr. J. Math. 1 (2004) 151-174.

[15] **P. Cannarsa, D. Sforza**, *A stability result for a class of nonlinear integrodifferential equations with L^1 kernels*, Appl. Math. (Warsaw) 35 (2008) 395-430.

[16] **M.M. Cavalcanti, H. Portillo Oquendo**, *Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation.* SIAM J. Control Optim. 42 (2003) 1310-1324.

[17] **M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti**, *T.F. Ma, Exponential decay of the viscoelastic Euler-Bernoulli equation with a nonlocal dissipation in general domains*, Differential Integral Equations 17 (2004) 495-510.

[18] **M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti**, *Stabilization of the damped wave equation with Cauchy-Ventcel boundary conditions.* (J. Evol. Equ.(2009)).

[19] **M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, and J. A. Soriano**, *Existence and boundary stabilization of a nonlinear hyperbolic equation with time-dependent coefficients*,EJDE, 8 (1998), 1-21.

[20] **M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. S. Prates Filho and J. A. Soriano**, *Existence and uniform decay rates for viscolelastic problems with nonlinear boundary damping*, Differential Integral Equations 14 (1) (2001) 85-116.

[21] **M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, P. Martinez** *General decay rate estimates for viscoelastic dissipative systems*, Nonlinear Anal. 68 (2008) 177-193.

[22] **M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, and J. A. Soriano**, *Asymptotic stability of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping-a sharp result*, (A. Math. S.(2009), p.4561-4580).

[23] **M. M. Cavalcanti, A. Khemmoudj, M. Medjden**, *Uniform stabilization of the damped Cauchy-Ventcel problem with variable coefficients and dynamic boundary conditions.* (J. Math. Anal. Appl. 328 (2007) 900-930).

[24] **G. Chen**, *Energy decay estimates and exact boundary value controlbility for the wave equation in a bounded domain.* (J. Math. pures Appl, 58 (1979), 249-274).

[25] **G. Chen**, *A note on the boundary stabilization of the wave equation.* (S.I.A.M. J. control. opt, 19 (1981), 106-113).

[26] **G. Chen and H. Wong**, *Asymptotic behaviour of solutions of the one dimensional wave equation with a nonlinear boundary stabilizer.*SIAM J. Control and Opt., 27(1989), 758-775.

[27] **C.M. Dafermos** , *An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity* , J. Differential Equations 7 (1970) 554-589.

[28] **R. Datko**, *Extending a theorem of Liapounov to hilbert spaces.* (J. Math. Anal. Appl. 32, (1970), p. 610-616).

[29] **C.M. Dafermos**, *Asymptotic stability in viscoelasticity.* Arch. Ration. Mech. Anal. 37 (1970)297-308.

[30] **M. Doi, S.F. Edwards**, *Dynamics of concentrated polymer systems*, Parts 1, 2 and 3, J. Chem. Soc. Faraday II 74 (1978) 1789-1832 ;
M. Doi, S.F. Edwards,*Dynamics of concentrated polymer systems*, Part 4, J. Chem. Soc. Faraday II 75 (1979) 38-54.

[31] **M. Fabrizio, A. Morro**, *Viscoelastic relaxation functions compatible with thermodynamics* ,J. Elasticity 19 (1988) 63-75.

[32] **M. Fabrizio, B. Lazzari** , *On the existence and the asymptotic stability of solutions for linearly viscoelastic solids*, Arch. Ration. Mech. Anal. 116 (1991) 139-152.

[33] **V. Georgiev, B. Rubino, R. Sampalmieri** , *Global existence for elastic waves with memory* ,Arch. Ration. Mech. Anal. 176 (2005) 303-330.

[34] **G. Gripenberg, S.O. Londen, O.J. Staffans** , *Volterra Integral and Functional Equations* , Encyclopedia Math. Appl., vol. 34,Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[35] **P. Grisvard**, *Controlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités.* (J. M. Pures Appl. 68(1989), 215-259).

[36] **A. Halanay**, *On the asymptotic behavior of the solutions of an integro-differential equation* , J. Math. Anal. Appl. 10 (1965) 319-324.

[37] **A. Heminna**, *Contrôlabilité exacte et stabilisation frontière de divers problèmes aux limites modélisant des jonctions de multi structures*, thèse, U.S.T.H.B, Alger .2000.

[38] **W.J. Hrusa, J.A. Nohel** , *The Cauchy problem in one-dimensional nonlinear viscoelasticity* , J. Differential Equations 59 (1985) 388-412.

[39] **S. Jiam and J. E. Muñoz Rivera**, *A global existence theorem for the Dirichlet problem in nonlinear n-dimensional viscoelasticity*, Differential and Integral Equations,9 (1996), 791-810.

[40] **S. Kawashima**, *Global solutions to the equation of viscoelasticity with fading memory*, J. Differential Equations 101 (1993)388-420.

[41] **A. Khemmoudj**, *Stabilisation de quelques Problèmes aux limites non linéaires.* Thèse, USTHB, Alger 2007.

[42] **A. Khemmoudj and M. Medjden** , *Exponential decay for the semilinear Cauchy-Ventcel problem with localized damping* , Bol. Soc. Paran. Mat. 22(2)(2004), 97-116.

[43] **V. Komornik et E. Zuazua**, *A direct method for the boundary stabilization of the wave equation.* (J. Math. Pure Appl. 58(1990), 33-54).

[44] **V. Komornik** , *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method* , John Wiley and Sons-Masson, Paris, 1994.

[45] **J. E. Lagnese**, *Asymptotic Energy Estimates for Kirchhoff Plates Subject to Weak Viscoelastic Damping* ,International Series of Numerical Mathematics, 91 (1989),Birhäuser, Verlag, Bassel.

[46] **J. E. Lagnese**, *Decay of solutions of the wave equation in a boundary region with boundary dissipation.* (J. Diff. Equations, 50, 1983, 163-182).

[47] **I. Lasiecka and D. Tataru** , *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping* , Differential and Integral Equations, 6(1993), 507-533.

[48] **I. Lasiecka and K. Triggiani** , *Uniform exponential decay in a bounded region with* $L^2(0,T,L^2(\sum))$ *feedback control in the Dirichlet boundary conditions* . (J. Diff. Equations, 66, 1987, 1340-1390).

[49] **P. D. Lax, C. S. Moraetz, R. S. Phillips** , *Exponential decay of solutions of the wave equation in exterior of start-shaped obstacle.* (comm.pure. Appl. Math, vol 16, 1963, p 477-489).

[50] **G. Lebon, C. Perez-Garcia, J. Casas-Vazquez**, *On the thermodynamic foundations of viscoelasticity*, J. Chem. Phys. 88 (1988)5068-5075.

[51] **K. Lemrabet** , *Etude de divers problèmes aux limites de Ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers* , (USTHB, Alger. 1987).

[52] **K. Lemrabet** , *problème aux limites de Ventcel dans un domaine non régulier*, (C.R.Acad. Sci. Paris, 15, série I (1985) p.531-534).

[53] **K. Lemrabet** , *problème de Ventcel pour le système de l'élasticité dans un domaine de* $\mathbb{R}^3$, (C.R.Acad. Sci. Paris, 304, série I (1987) p.151-154).

[54] **G. Leugering** , *Boundary controllability of a viscoelastic string* , in : G. Da Prato, M. Iannelli (Eds.), Volterra Integrodifferential Equations in Banach Spaces and Applications, Longman Sci. Tech., Harlow, Essex, 1989, pp. 258-270.

[55] **J. L. Lions** , *Controlabilité exact berturbations et stabilisation de systèmes distribués. tome 1*, Masson, paris 1988.

[56] **J. L. Lions** , *Exact contrlability stabilization, and perturbation for distributed systems* .(S. I. A. M. Rev. 30, (1988), 1-68).

[57] **J. L. Lions and E. Megenes** , *Problèmes aux limites non homogènes et applications.volume 1.* Dunod, paris 1968.

[58] **M. Medjden**, *Propriétés de régularité pour le problème de Navier-Stokes et estimations d'énergie pour certaines équations aux dérivées partielles.* thèse, USTHB, Alger(2004).

[59] **M. Medjden and Nasser-eddine Tatar**, *Asymptotic behavior for a viscoelastic 3 problem with not necessarily decreasing kernel.* Appl. Math. Comput. (2004), 1-15.

[60] **S.A. Messaoudi, B. Said-Houari, N. Tatar** *Global existence and asymptotic behavior for a fractional differential equation* , Appl. Math. Comput. 188 (2007) 1955-1962.

[61] **M. Milla Miranda**, *Traço para o dual dos Espa¸cos de Sobolev*, Bol. Soc. Paran. Mat. 2^a série , Vol. 11, N.2 (1990), 131-157.

[62] **C. S. Moraetz**, *Exponential decay of solutions of the wave equation.* (comm.pure.Appl. Math, vol 19, 1966, p. (539-444).

[63] **J.E. Muñoz Rivera** , *Asymptotic behaviour in linear viscoelasticity* , Quart. Appl. Math. 52 (1994) 628-648.

[64] **J.E. Muñoz Rivera, E. Cabanillas Lapa**, *Decay rates of solutions of an anisotropic inhomogeneous n-dimensional viscoelastic equation with polynomially decaying kernels* , Comm. Math. Phys. 177 (1996) 583-602.

[65] **J.E. Muñoz Rivera, E.C. Lapa, R. Barreto** , *Decay rates for viscoelastic plates with memory* , J. Elasticity 44 (1996) 61-87.

[66] **J.A. Nohel, D.F. Shea**, *Frequency domain methods for Volterra equations* , Adv. Math. 22 (1976) 278-304.

[67] **A. Pazy**, *Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equation.* Springer Verlag, Berlingo, New-York,1983.

[68] **J. Prüss** , *Decay properties for the solutions of a partial differential equation with memory* , Arch. Math. 92 (2009) 158-173.

[69] **J. Prüss** , *Evolutionary Integral Equations and Applications* , Monogr. Math., vol. 87, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.

[70] **J. P. Quinn and D. L. Russel** , *Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of hyperbolic equations with boundary damping.* (Po. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A, 77, 1977,97-127).

[71] **M. Renardy** , *Some remarks on the propagation and nonpropagation of discontinuities in linearly viscoelastic liquids* , Rheol. Acta 21 (1982) 251-254.

[72] **M. Renardy, W.J. Hrusa, J.A. Nohel** , *Mathematical Problems in Viscoelasticity* , Pitman Monogr. Pure Appl. Math., vol. 35, Longman Sci. Tech., Harlow, Essex, 1988.

[73] **D. L. Russel**, *Controlability and stabilization for linear partial differantial equations. Recent progress and open questions.*(S.I.A.M.J. control. opt,21(1978), 639-739).

[74] **D. L. Russel**, *Exact boundary value controlability theorems for wave and heat processes in star-complemented regions, in differential games and control theory.* (Raxin, Liu and Sternberg, Eds, Maercel Dekker Inc, New-York 1974).

[75] **A. Samarsky et V. Andreev**, *Méthodes aux différences pour équations elliptiques,*. (Moscou).

[76] **O.J. Staffans** , *Positive definite measures with applications to a Volterra equation* , Trans. Amer. Math. Soc. 218 (1976) 219-237.

[77] **O.J. Staffans** , *On a nonlinear hyperbolic Volterra equation* ,SIAM J. Math. Anal. 11 (1980) 793-812.

[78] **A. Vicente** , *Wave equation with acoustic/memory boundary conditions*, Bol. Soc. Parana.Mat. 27 (2009) 29-39.

[79] **C. Wilcox**, *The initial-boundary value problem for the wave equation in an exterior domain with spherical boundary.* (Amer. Math. Soc. Not.Abstract n° 564-20, Vol 6, 1959).

[80] **E. Zuazua** , *Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback*,SIAM J. Control and Optimization, 28 (1990), 466-478.

[81] **E. Zuazua** , *C. R. A. Sci. Paris*, t 307, série I, p. 587-591, (1988).