N^0 d'ordre :15/2011-M / MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPILAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse : Équations aux Dérivées Partielles

Par: KADAI ALI SEGHER

THÈME

Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités et application à un problème inverse

Soutenu publiquement, le 09/11/2011, devant le jury composé de :

Mr.	D. TENIOU.....	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mme.	O. ZAIR...	Maître de Conférences /A, à	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
Mr.	A. HEMINNA...	Professeur	U.S.T.H.B.	Examinateur.
Mr..	T. ALI ZIANE...	Maître de Conférences /A, à	U.S.T.H.B.	Examinateur.

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur D. Teniou pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire. Je voudrais aussi sincèrement exprimer mes plus vifs remerciements à Mme. Zair ouahiba mon Directeur de mémoire pour l'intéressant sujet qu'elle m'a proposé. Sa disponibilité alliée à sa gentillesse et ses conseils ont été des éléments décisifs dans l'aboutissement de ce travail. ma gratitude en seulement quelques lignes.

Je remercie vivement Monsieur A.Heminna, professeur à l'U.S.T.H.B et Monsieur T.Ali ziane, Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B d'avoir accepté d'examiner ce t ravail et de faire partie du jury, qu'ils trouvent ici toute ma gratitude.

Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents, pour leur soutien , ainsi qu'au reste de la famille, sans oublier mes amis spécialement et tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin à ma formation.

Table des matières

Ω : Ouvert de $\mathbb{R}^2$.

$\partial\Omega$: Frontière de Ω.

$D(\Omega)$: Ensemble des fonctions indéfiniment dérivable sur Ω à support compact dans Ω.

$\mathscr{D}'(\Omega)$: L'espace des distributions sur Ω .

$\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$: Dérivée partielle par rapport à x .

$\nabla = (\partial_{1,}\partial_2, ..., \partial_n)$: Gradient parapport à x.

$\mathscr{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$: l'espace des fonctions une fois continûment différentiables dans $\overline{\Omega}$.

$W_p^s(\Omega)$: Espace de Sobolev construit sur $L^p(\Omega)$ et s réel .

$H^s(\Omega) = W_2^s(\Omega)$.

$H^s(\Gamma)$: Espace de Sobolev construit sur $L^p(\Gamma)$, s réel .

Γ : Variété de dimention $(n-1)$plongée dans $\mathbb{R}^n$.

ds : Mesure superficielle sur Γ.

$L^p(\Omega)$: Ensemble des fonctions de puissances $p^{ième}$ intégrable sur Γ

ν : Normale unitaire à Γ dirigée vers l'exterieur de Ω

$\partial./\partial\nu$: Dérivée normale .

∇_T : Gradient tangentiel à Γ .

Introduction générale

Dans ce mémoire on s'interesse dans une première partie à l'étude de la contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes dans un ouvert à frontière polygonale. Ce travail a été réalisé par P.Grisvard dans [4]. Dans une deuxième partie on donne une application à un problème inverse de détermination du terme source associe à l'équation des ondes dans ce type de domaine. Ce résultat a été établit par M.Yamamoto dans [5].

Soit Ω un domaine à frontière polygonale Γ et soit ν la normale unitaire sortante. Pour $T > 0$, on note $Q_T = \Omega \times]0,T[$ et $\Sigma_T = \Gamma \times]0,T[$; pour des données de Cauchy (φ_0, φ_1)(fonctions définie sur Ω) et une donnée de Dirichlet υ (fonction définie sur Σ_T) on considère u la solution de

$$\begin{cases} \varphi^{''} - \Delta\varphi = 0 & \text{dans } Q_T, \\ \varphi(0) = \varphi_0, \varphi^{'}(0) = \varphi_1 & \text{dans } \Omega \\ \varphi = \upsilon & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases} \tag{1}$$

Le problème de contrôlabilité exacte consiste à chercher un temps T tel que pour toutes données de Cauchy il existe (au moins) une donnée de Dirichlet telle que

$$\varphi(T) = \partial_t\varphi(T) = 0.$$

Il s'agit donc d'amener au repos un système qui était unitialement en vibration, en agissant sur sa frontière.

Dans ce travail on considerera également le cas des conditions de types mêlé Dirichlet -Neumann. Lorsque Ω est regulier, d'un seul coté de Γ J. L.Lions [17] a décrit une méthode pour résoudre ce type de problème, appelée méthode d'unicité hilbertiènne (HUM). Cette méthode est mise en œuvre dans les travaux de Triggiani[15] et Lasiecka-Triggiani[12]. Ces hypothèses excluent les domaines polygonaux et en particulière les domaines fissurés. De plus les conditions au bord de type mêlé font apparaitre des comportements singulièrs des solutions.

Le but de cette première partie du travail est la mise en œuvre de cette méthode dans les géométries évoques ci dessus. La mise en œuvre de la méthode de HUM repose sur la possibilité de majorer l'énergie de la solution φ avec condition de Dirichlet homogène ($\upsilon = 0$) à l'aide d'une norme portant sur la dérivée normale $\partial\varphi/\partial\nu$ de φ sur Σ_T pour T assez grand. Plus précisement on note

$$E\left(t\right) = \left(1/2\right)\left\{\left\|\nabla\varphi\right\|_{L^2(\Omega)^2} + \left\|\partial_t\varphi\right\|_{L^2(\Omega)}\right\} \tag{2}$$

l'énergie au temps t qui est constante et égale à l'énergie au temps 0, c'est-à-dire

$$E\left(0\right) = \left\{\left\|\nabla\varphi_0\right\|_{L^2(\Omega)^2} + \left\|\varphi_1\right\|_{L^2(\Omega)}\right\} \tag{3}$$

Le résultat fondamental est l'existence d'un temps T_0 tel que

$$\left(T - T_0\right)E\left(0\right) \leq \int\limits_{\Sigma} \left|\partial\varphi/\partial\nu\right|^2 d\sigma dt. \tag{4}$$

Cette inégalité est basée sur la vérification de l'identité suivante pour un choix convenable de multiplicateur $m(x) = x - x_0$ où le point x_0 est convenablement choisi :

$$\begin{gathered}\textstyle\int_Q \Delta\varphi m\nabla\varphi dxdt = -\sum\limits_{k,l\geq 1}^{2}\int\limits_{\Omega} D_k m_l D_k\varphi D_l\varphi dx \\ +1/2\int\limits_{\Omega}\operatorname{div} m.\left|\nabla\varphi\right|^2 dx + 1/2\int\limits_{\Gamma} m.\nu\left|\partial\varphi/\partial\nu\right|^2 d\sigma.\end{gathered} \tag{5}$$

Cette identité suppose, pour avoire un sens, que la solution φ de (1.1) a une régularité suffisante pour assurer la convergence des diverses intégrales qui composent pour la mesure $d\sigma$. Ceci ne pose pas de problème lorsque Γ est régulier.

De manière générale $\partial\varphi/\partial\nu$ doit être de carré intégrable sur Γ pour la mesure $d\sigma$ à défaut pourr la mesure $|m.\nu|\ d\sigma$. Dans le cas d'un domaine polygonal quelconque qui est d'un seul côté de la frontière, la régularité est suffisante [4] ; ceci exlut les fissures. Dans le cas d'une fissure on aurra $m.\nu\left|\partial\varphi/\partial\nu\right|^2$ intégrable lorsque m est tangent au fonnd de la fissure de sorte que $m.\nu$ tend vers zéro près du fond de la fissure. Dans le cas de conditions mêlées, il faut supposer que la condition change de type en un coin convexe pour que $\partial\varphi/\partial\nu$ soit de carré intégrable. Ceci exlut le cas régulier. Cependant $m.\nu\left|\partial\varphi/\partial\nu\right|^2$ est encore intégrable si on suppose m tangent à Γau point où la condition change de type si on suppose Ω est regulier. On est donc amené à imposer des restrictions aux choix du point x_0 dans le cas des conditions mélées ou par exemple, dans le cas des fissures, x_0 doit être aligné avec toutes les fissures, ce qui est restrictif en pratique.

Dans ce contexte, on expose ce travail en deux parties dont le contenu peut se résumer comme suit:

Le premier chapitre est entièrement consacré à l'exposé des définitions et résultats nécessaires à la suite de ce travail. Nous rappelons tout d'abord quelques définitions des espaces fonctionnels; puis des résultats de base sur les espaces de Sobolev des puissances fractionnaires et on donne les théorèmes de trace et formules de Green dans un polygone.

Dans le deuxième chapitre, on établira les résultats généraux de régularité dans des espaces de Sobolev fractionnaires pour des problèmes aux limites associés à l'équation de Laplace dans un polygone. Ces résultats gouvernent la régularité (ou le comportement singulier) des solutions de l'équation des ondes. On donne alors la résolution faible de ces problèmes aux limites pour l'équation des ondes. Plus particulièrement on distinguere les cas suivants:

Condition de Dirichlet, condition de mêlées dans un polygone si la condition au bord change de type qu'en des coins convexes ou bien lorsque l'ouvert est régulier, puis on regardera le cas d'un domaine plan fissuré.

Dans le chapitre trois, on donnera la mise en œuvre de la méthode de HUM et donc la contrôlabilité exacte pour les differents cas.

Finalement dans le quatrième chapitre, on s'intéresse à un problème inverse de détermination du terme source associé à l'équation des ondes avec condition de Dirichlet. On suppose que le terme source $F(x,t) = \sigma(t) f(x)$ où σ est une fonction donnée. En utilisant les résultats de contrôlabilité exacte obtenu dans les chapitres précedent (cas d'un polygone non convexe) et les propriétés de l'opérateur de $Voltera$, on montre un résultat de stabilité qui donne l'estimation de $\|f\|_{L^2}$ par la norme de la dérivée normale $\|\partial u/\partial\nu\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma))}$où u est la solution de l'équation des ondes, puis on donnera un schéma de reconstruction du terme source f.

Chapitre 1

Définitions et propriétés des espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été définis, au cours du temps, de différentes manières. Lorsque l'ouvert Ω est à frontière régulière, les définitions correspondantes sont équivalentes, tandis que, dans le cas d'un domaine polygonal, elles peuvent conduire à des espaces différents. **C**'est pourquoi nous allons préciser la définition utilisée ici. Pour le moment, considérons un ouvert Ω quelconque, sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, et notons Γ sa frontière.

1.1 Rappels de quelques résultats fondamentaux

Sommaire

On notera $x = (x_1; x_2; ...; x_n)^T$ les éléments de $\mathbb{R}^n$, $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$,

$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ est la norme euclidienne de x et $B(x; R)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon R. Nous désignerons par $\mathbb{R}_+^n$ le demi-espace de $\mathbb{R}^n$. Plus préecisément notant $x' = (x_1; x_2; ...; x_{n-1})^T$ les éléments de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $x = (x', x_n)^T$, on pose :

$$\mathbb{R}_+^n = \left\{ (x', x_n)^T \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : x_n > 0 \right\}$$

Un vecteur $\alpha = (\alpha_1; \alpha_2; ...; \alpha_N) \in \mathbb{N}^n$ est appelé un multi-indice et $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ est la longueur du multi-indice. Pour toute fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ régulière, on note :

$$D^\alpha F(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} F(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_N}}.$$

Si $\alpha = (0; 0; ...; 0)^T \in \mathbb{N}^n$, on adopte la convention $D^\alpha F(x) = F(x)$. De même, on notera pour tout $x = (x_1; x_2; ...; x_n)^T$

$$x^\alpha = x_1^\alpha . x_2^\alpha ... x_n^\alpha.$$

Définition 1.1. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associée.*

Définition 1.2. *Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'une forme bilinéaire $a(u, v)$: $H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est* coercive *s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $a(v, v) \geq \alpha |v|^2 \quad \forall v \in H$.*

Théorème 1.1. *"Représentation de Riesz". Soit l une forme linéaire continue sur E. Il existe un unique élément $u \in E$ tel que*

$$\forall u \in E, \ l(u) = (u, x).$$

Autrement dit, tout forme linéaire se représente par le produit scalaire avec un élément de E. On dit qu'un espace de *Hilbert* est isomorphe à son dual.

Théorème 1.2. *Soit H un espace de Hilbert, $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que*

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

Théorème 1.3. *Soient $(E; \|E\|)$ et $(F; \|F\|)$ deux espaces de Banach et $\widetilde{E}$ un sous-espace de E dense dans E. Soit $T : \widetilde{E} \to F$ une application linéaire continue de norme*

$$\|T\| = \sup_{\substack{u \in \widetilde{E} \\ u \neq 0}} \frac{\|Tu\|_E}{\|u\|_E}$$

alors, T se prolonge de façon unique en une application linéaire continue de E dans F.

Soient E, F deux espaces de Banach.

Définition 1.3. *Un opérateur linéaire A de E dans F est une application linéaire définie sur un sous espace de E.*

On note D_A le domaine de A (Si $D_A = E$ l'opérateur A est linéaire et continue).

Définition 1.4. *1. Un opérateur A est dite borné s'il existe $\alpha > 0$*

$$\|Au\|_F \leq \alpha \|u\|_E, \quad \forall u \in D_A \qquad \text{et } D_A \text{ dense dans } E.$$

Soit $G(A)$ le graphe de A. A est dite fermé si

$$G(A) \text{ est fermé dans } E \times F.$$

Remarque 1.1. *Pour montrer qu'un opérateur A est fermé , on montre que si $\forall (u_n)_{n\geq 0}$, telles que si*

$$\begin{cases} & u_n \text{ converge vers } u \\ \text{et} & \\ & Au_n \text{ converge vers } v \end{cases}$$

alors

$$u \in D_A \quad \text{et} \quad v = Au$$

Définition 1.5. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.*

$$\nabla\varphi(x) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x)\right)^T,$$

est le *gradient* de φ. Si φ est de classe C^2, on définit le *Laplacien* de φ par :

$$\Delta\varphi(x) = \operatorname{div}(\nabla\varphi(x)) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 x_1}(x) + ... + \frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 x_n}(x).$$

Définition 1.6. *On notera $\nu(x)$ le vecteur unitaire normal sortant (c'est à dire dirigé vers l'extérieur de Ω) au point $x \in \Gamma$. Si u est une fonction assez réguliére définie sur $\bar{\Omega}$, on note*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \nabla u(x).\nu(x) \;, \; \nu \in \Gamma$$

la dérivée normale de u sur Γ où $\Gamma = \partial\Omega$ est la frontière de Ω.

Soit H un espace de *Hilbert* et soit E, F deux espaces de Banach.

Définition 1.7. *Un opérateur A continue de E dans E est autoadjoint si $A^* = A$, c-à-d*

$$\forall (x, y) \in E \times E, \ \ (Ax, y) = (x, Ay).$$

Définition 1.8. *Un opérateur linéaire $A : E \longrightarrow F$ est dit compact si $A(B_E)$ est relativement compact dans F où B_E désigne la boule unité dans E.*

Théorème 1.4. *On appelle base Hilbertienne une suite $(e_n)_{n\geq 1}$d 'élément de H tels que*

1. $\|e_n\|_H = 1, \forall n, m \ , (e_n, e_m) = 0, n \neq m.$

2. L'espace véctoriel engendré par les $(e_n)_{n\geq 0}$ est dense dans H.

1.2 Espace de Sobolev

Nous désignons par $D(\Omega)$ l'espace des fonctions C^∞à support compact contenu dans Ω.

Définition 1.9. *Le support d'une fonction $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'adhérence de l'ensemble*

$$\{x \in \Omega, \ \varphi(x) \neq 0\}.$$

Définition 1.10. *Une suite $\left(\varphi_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$de $D(\Omega)$ est convergente vers 0 dans $D(\Omega)$ si et seulement si*

1. Il existe un compact K de Ω tel que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $supp\varphi_j \subset K$

2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la suite $\left(D^\alpha \varphi_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro uniformément sur K.

Notation 1.1. *On notere $D'(\Omega)$ l'espace des distributions à support compact. $D'(\Omega)$ est le dual topologique de l'espace $C_0^\infty(\Omega)$.*

Lemme 1.5. *"Partition de l'unité" Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$ et $U_1; U_2; ...; U_m$ des ouverts tels que $K \subset \cup_{i=1}^m U_i$, Alors il existe $\alpha_0 \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ et m fonctions $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ dans $D\left(\mathbb{R}^N\right)$ telles que:*

1. $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\forall i = 0, 1, ..., N$ et $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$ sur $\mathbb{R}^N$.

2. supp $\alpha_0 \subset \mathbb{R}^N \setminus K$ et supp $\alpha_i \subset U_i$, $i = 1, ..., m$.

Dans le cas particulier où $m = 1$ nous obtenons :

Lemme 1.6. *"Localisation" Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un compact inclus dans Ω. Alors il existe une fonction $\zeta_K \in D(\Omega)$ telle que*

1. $0 \leq \zeta_K \leq 1$ pour tout $x \in \Omega$,

2. $\zeta_K(x) = 1$ pour tout $x \in K$.

Remarque 1.2. *La codimension de* $\mathrm{Im}(A)$ *est égale à la* $\dim(F/\mathrm{Im}(A))$.

Définition 1.11. *Une application linéaire T de $D(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$ est appellée* distribution *si pour toute suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'élément de $D(\Omega)$ qui converge vers zéro dans $D(\Omega)$, la suite $T(\varphi_j)$ converge vers zéro dans $\mathbb{C}$.*

Définition 1.12. *Un opérateur est de rang fini si la dimension de son image est finie.*

Théorème 1.7. *Soit A un opérateur linéaire continue de rang fini, alors A est compact.*

Définition 1.13. *Un opérateur linéaire continu $A : E \longrightarrow F$ est dit de Fredholm s'il vérifie:*

1. $\ker(A)$ est de dimension finie dans E,
2. $\mathrm{Im}(A)$ est fermée et de codimension finie dans F $\left(\dim\left(F_{/\mathrm{Im}(A)}\right) < +\infty\right)$.

Définition 1.14. *On disigne par $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions f, mesurablestels que $\|f\|_{L^p(\Omega)} < +\infty$, où*

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty; \qquad 1 \leq p < \infty \\ \|f\|_{L^\infty(\Omega)} &= \operatorname*{supess}_{x\in\bar{\Omega}} |f(x)| \, dx; \qquad p = \infty, \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach .

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire correspondant à la norme de (1.1.1) étant donné par

$$(f, g)_\Omega = \int_\Omega f(x) \, g(x) \, dx. \tag{1.2.2}$$

Proposition 1.8. *$L^2(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ avec injection continue (La convergence dans $L^2(\Omega)$ implique la convergence dans $\mathscr{D}'(\Omega)$).*

On introduit les espaces suivants[1] :

On appelle espace de *Sobolev* d'ordre m sur $L^p(\Omega)$ que l'on note $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u,\ u \in L^p(\Omega),\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \ |\alpha| \leq m\}. \tag{1.2.3}$$

Muni de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} ;\ 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} &= \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} ; \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Remarque 1.3. *On pose*

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) \tag{1.2.5}$$

$H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}. \tag{1.2.6}$$

$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Définition 1.15. *On note $H^s(\Omega)$ l'espace des distributions u définies dans Ω telles que*

1. $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq m$ lorsque $s = m$ est un entier positif.

2. $u \in H^m(\Omega)$ et

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\sigma}} dxdy < +\infty$$

pour $|\alpha| = m$ lorsque $s = m + \sigma$ est non entier et positif avec m entier et $0 < \sigma < 1$.

On munit $H^s(\Omega)$ de la norme (naturelle)

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{dans le cas 1 et}$$

$$\|u\|_{s,\Omega} = \left(\|u\|^2_{m,\Omega} + \sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\sigma}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{dans le cas 2.}$$

[1] Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

Définition 1.16. *On dit qu'un ouvert Ω est Lipschitzien s'il est borné et si l'on peut recouvrir sa frontière $\partial\Omega$ par un nombre fini d'hypercubes ouverts C_j chacun associé à un système de coordonnées cartésiennes orthonormées, $y^j = \left(y_1^j, y_2^j, ..., y_n^j\right)$ de telle sorte que*

$$Cj = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad \left|y_i^j\right| < a_j \text{ , pour } i = 1, ..., n. \right\}$$

et qu'il existe une fonction $\varphi_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitzienne telle que l'on ait

$$\Omega \cap C_j = \left\{ y \in C_j \ ; \ y_N^j < \varphi_j \left(\left(y^j\right)' \right) \right\}$$

avec la notation $\mathbb{R}^{n-1} \ni \left(y^j\right)' = \left(y_1^j, y_2^j, ..., y^j{}_{n-1}\right)$.

Définition 1.17. *On note $H_0^s(\Omega)$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$.*

Définition 1.18. *Le dual de $H_0^s(\Omega)$ est $H^{-s}(\Omega)$.*

Définition 1.19. *Pour $s < 0$, $H^s(\Omega)$ est le dual de $H_0^{-s}(\Omega)$.*

Afin de pouvoir donner un sens aux traces d'une fonction près d'un sommet, nous introduisons encore les espaces suivants :

Définition 1.20. *On note$\widetilde{H}^s(\Omega)$ le sous-espace de $H^s(\Omega)$ des fonctions u dont le prolongement $\widetilde{u}$ par zéro hors de Ω appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Remarque 1.4. [1]*Si le domaine Ω est Lipschitzien, la définition 1.21 est équivalente à*

$$\widetilde{H}^s(\Omega) = \left\{ u \in H_0^s(\Omega) \ / \ \frac{D^\alpha u}{\rho^\alpha} \in L^2(\Omega), \quad |\alpha| = m \right\},$$

où $\rho(x)$ désigne la distance de x à la frontière Γ de Ω, et $s = m + \sigma$ pour un entier m et $\sigma \in [0, 1[$. Par conséquent, on peut définir une norme sur $\widetilde{H}^s(\Omega)$ par

$$\|u\|_{\sim,s,\Omega} = \left(\|u\|_{s,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x)|^2}{\rho(x)^{2\sigma}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{......}(K)$$

Remarque 1.5. *Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$ on peut définir $H^m(\mathbb{R}^n)$ par la transformation de Fourier.*

Définition 1.21. *Soit v est une fonction continue à support compact, on peut définir $H^m(\mathbb{R}^n)$ par*

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ v \;/\; v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n),\ \left(1+|\xi|^2\right)^{m/2} \hat{v} \in L^2\left(\mathbb{R}^n_\xi\right) \right\} (cf.\,[11])$$

où

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathscr{C}^\infty, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n :\ |x|^k \left| D^\alpha f(x) \right| \underset{|x| \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$$

et

$$\mathscr{F}(v)(\xi) = \hat{v}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2i\pi x \cdot \xi)\, v(x)\, dx, \text{ où } \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \quad \text{et} \quad x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i.$$

tel que $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace dual de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

1.2.1 Résultats de densité

Théorème 1.9. *$C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.*

Théorème 1.10. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipschitziene. Alors $D\left(\bar{\Omega}\right)$ est dense dans $H^s(\Omega)$ quel que soit $s \geq 0$.*

Théorème 1.11. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipschitziene. Alors $D(\Omega)$ est dense dans $\widetilde{H}^s(\Omega)$ quel que soit $s \geq 0$.*

Théorème 1.12. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipschitziene. Alors $D(\Omega)$ est dense dans $H^s(\Omega)$ quel que soit $s \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, autrement dit $H^s(\Omega) = H_0^s(\Omega)$*

1.2.2 Propriété du proplongement

Le théorème de proplongement est une propriété fondamentale des espaces de Sobolev qui permet de prolonger une fonction de $H^s(\Omega)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ et généraliser certains résultats valables sur $\mathbb{R}^n$ à des ouverts à frontière Lipschitzien.

Théorème 1.13. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipschitziene. Alors, quel que soit $s > 0$, il existe un opérateur linéaire et continu P_s de $H^s(\Omega)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ tel que*

$$P_s u_{/\Omega} = u \ ,\forall u \in H^s(\Omega)$$

où $P_s u_{/\Omega}$ est la restriction sur Ω au sens de distribution.

Preuve. Cf.[14] . ■

Théorème 1.14. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipschitziene. Alors, l'injection de $H^s(\Omega)$ dans $H^t(\Omega)$ est compacte pour $s > t$.*

Théorème 1.15. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipschitziene. Alors,*

$$H^s(\Omega) \subseteq C^k\left(\bar{\Omega}\right) \quad si\ k < s - \frac{n}{2}.$$

Proposition 1.16. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipschitzien. Alors,*

$$\begin{aligned} &\widetilde{H}^s(\Omega) = H_0^s(\Omega) \quad si\ s - 1/2 \geq 0\ n'est\ pas\ un\ entier \\ &\widetilde{H}^s(\Omega) = H^s(\Omega) \ = H_0^s(\Omega) \quad si\ 0 \leq s < 1/2 \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

Remarque 1.6. *La situation se complique lorsque $s - 1/2$ est un entier: dans ce cas-là, $\widetilde{H}^s(\Omega)$ est un espace strictement inclus mais non fermé dans $H_0^s(\Omega)$ ($D(\Omega)$ étant à la fois dense dans $\widetilde{H}^s(\Omega)$ et $H_0^s(\Omega)$). Par ailleurs, on avait dit que pour $s \geq 0$, $H^{-s}(\Omega)$ est le dual de $H_0^s(\Omega)$. Evidemment d'après (1.2.7), c'est aussi le dual de $\widetilde{H}^s(\Omega)$ si $s-1/2 \geq 0$ n'est pas un un entier. Par contre, on aura besoin d'introduire une autre notation justement pour le dual de $\widetilde{H}^s(\Omega)$(pour la norme (K)) dans le cas où $s - 1/2 \in \mathbb{N}$. On note alors $\widetilde{H}^{-s}(\Omega)$ cet espace qui contient l'espace $H^{-s}(\Omega)$.*

Fonction ayant une singularité isolée

Nous donnons ici un critère qui permet de vérifier si oui ou non une fonction appartient à un espace de Sobolev donné.

Proposition 1.17. *Soit Ω un polygone du plan. Supposons que 0 est un sommet de Γ. Soit v un voisinage de 0 tel que*

$$v \cap \bar{\Omega} = \{(x, y) = r(\cos\theta, \sin\theta) \,/\, 0 \leq r \leq R,\ a \leq \theta \leq b\}$$

pour un réel positif R et $b - a < 2\pi$.Soit enfin u une fonction régulière dans $\bar{\Omega} \setminus \{0\}$ qui coïncide avec $r^\alpha\varphi(\theta)$ dans $v \cap \bar{\Omega}$, φ appartenant à $H^{s_0}(]a, b[)$. Alors,quel que soit $s < s_0$:

$$\begin{aligned} &u \in H^s(\Omega) \quad si\ \alpha > s - 1 \\ &u \notin H^s(\Omega) \quad si\ \alpha \leq s - 1\ si\ \alpha\ non\ entier\ . \end{aligned}$$

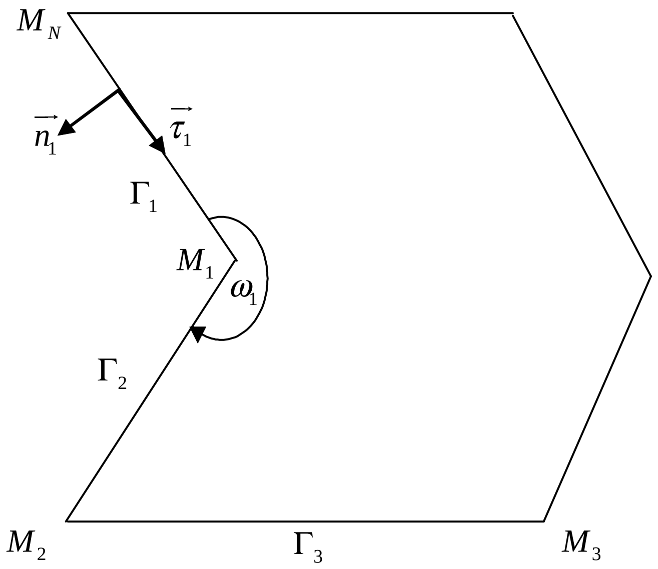


*Fig*1.1

1.2.3 La géométrie polygonale

Nous appelons “polygone plan” un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à frontière Lipschitzienne et polygonale. La frontière Γ est constituée des segments Γ_j, $j = 1, ..., N$ où les Γ_j sont deux à deux disjoints. On note M_j le sommet commun aux arêtes Γ_j et Γ_{j+1} qui forment l'angle ω_j vers l'intérieur de Ω. Enfin, n_j désigne la normale orientée vers l'extérieur de Ω et τ_j la tangente dans le sens direct (voir Fig. 1.1).

1.2.4 Coordonnées locales

On regarde dans la suite le comportement d'une fonction localement au voisinage d'un sommet M_j : Soit M un point quelconque du plan, on note r_j la distance de M à M_j et θ_j l'angle entre Γ_{j+1}et $\overline{M_jM}$ (voir Fig. 1.2 où $S = M$). Par conséquent, Γ_j est supporté par le demi-axe $\theta_j = \omega_j$ et Γ_{j+1} se trouve sur le demi-axe $\theta_j = 0$. Les coordonnées cartésiennes locales sont alors définies par

$$x_j = r_j cos\theta_j \quad \text{et} \quad y_j = r_j sin\theta_j,$$

et Γ_{j+1} est un segment de la droite de l'équation $y_j = 0$,

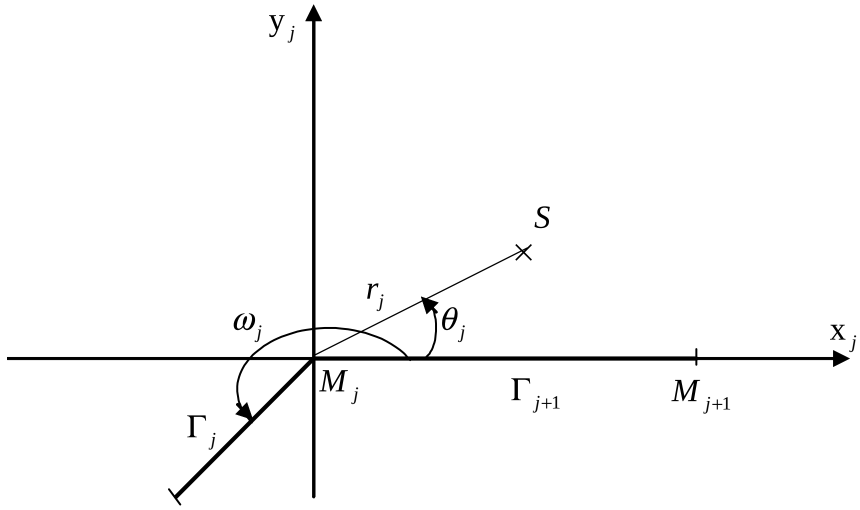


Fig1.2. Les coordonnées locales.

1.2.5 Un résultat de densité pour les fonctions s'annulant aux singularités

Nous énonçons un résultat de densité pour les fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulant au voisinage des singularités géométriques. Ce résultat a été montrer dans [3] (lemme 2.1.2, page 39) pour un polygone du plan.

Lemme 1.18. *Soit Ω un polygone du plan. Le sous-espace de $H^1(\Omega)$, constitué des fonctions qui s'annulent au voisinage des coins, est dans $H^1(\Omega)$.*

On déduit facilement le résultat suivant pour les espaces de traces correspondants. On désigne par $\Pi_{j=1}^{N} D(\Gamma_j)$ l'espace des fonctions définies sur Γ dont la restriction à chaque Γ_j appartient à $D(\Gamma_j)$, Γ_j étant une arête du bord .

Dans un premier, on caractérise les traces sur Γ des fonctions de $H^1(\Omega)$. On introduit l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$:

Définition 1.22. *On note $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ l'espace des fonctions $g \in L^2(\Gamma)$ telle que*

$$\int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|g(x) - g(y)|^2}{|x-y|^2} ds(x)\, ds(y) < +\infty.$$

Théorème 1.19. *L'application "trace" $u \longmapsto u_{/\Gamma}$ qui est bien définie sur $C^\infty(\overline{\Omega})$ se prolonge par densité en un opérateur linéaire continu surjectif, γ, de $H^1(\Omega)$ sur $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ dont le noyau est l'éspace $H_0^1(\Omega)$.*

Remarque 1.7. *Comme chaque Γ_j est un ouvert de $\mathbb{R}$, la restriction $g_j = g_{/\Gamma_j}$ d'un élément de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ appartient à $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$. Au voisinage des sommets, les élément de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ satisfont certaines conditions de raccord qui sont précisées dans la proposition suivante.*

Corollaire 1.1. *L'espace $\Pi_{j=1}^N D(\Gamma_j)$ est dense dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$où*

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \left\{ u \in H_0^s(\Omega) \ / \ \frac{D^\alpha u}{\rho^\alpha} \in L^2(\Omega), \quad |\alpha| = m \right\}$$

Preuve. Etant donné un élément g de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, il existe un relevement continu u appartenant à $H^1(\Omega)$ tel que $\gamma u = g$ sur Γ. Le lemme 1.16 implique que l'on peut trouver une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(\overline{\Omega})$ s'annulant au voisinage des coins et telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$ .par continuité de l'application γ, il vient que

$$\gamma u_n \longrightarrow \gamma u \text{ dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

où, par construction, la suite $\{g_n = \gamma u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\Pi_{j=1}^N D(\Gamma_j)$. ■

1.2.6 Théorème de traces sur un domaine polygonal

Proposition 1.20. *La fonction g appartient à $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$si et seulement si $g_j \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ pour tout j et si en plus (pour ε assez petit)*

$$\int_0^\varepsilon |g_j(x_j(-\sigma)) - g_{j+1}(x_j(+\sigma))|^2 \frac{d\sigma}{\sigma} < +\infty \ \forall 1 \le j \le N. \tag{1.2.8}$$

Ici, la notation $x_j(+\sigma)\,(resp.x_j(-\sigma))$ désigne le point de $\Gamma_{j+1}(resp.\Gamma_j)$ à distance σ du sommet M_j(voir Fig.1.3).

Remarque 1.8. *La condition(1.2.8) exprime le fait que les fonctions g_j et g_{j+1} se raccordent en M_j en un sens faible, et on écrit pour alléger les notations*

$$g_j \equiv g_{j+1} \text{ en } M_j.$$

Enfin, on introduit γ_j , l'opérateur linaire continu surjectivf de $H^1(\Omega)$ sur $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ par

$$\gamma_j u = (\gamma u)_{/\Gamma_j}.$$

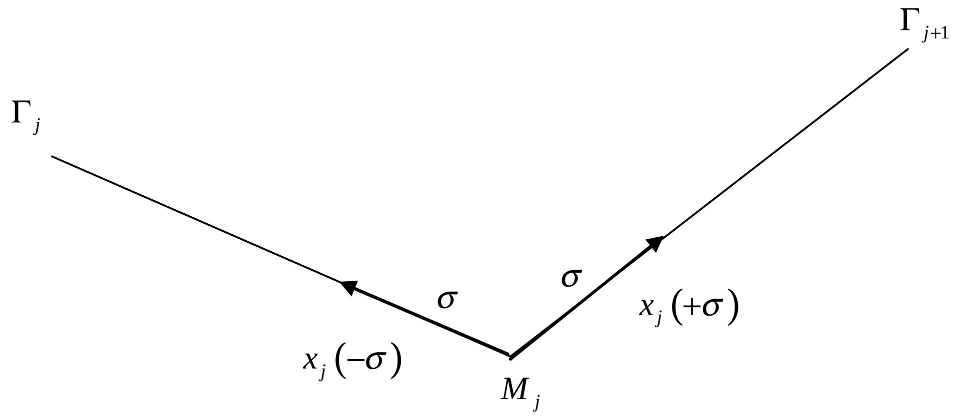


Figure1.3: Distance sur Γ.

Traces des élément de $H^2(\Omega)$

Dans la suite, nous aurons besoin de donner un sens de trace d'une fonctions appartenant à $H^2(\Omega)$ et nous renvoyons à [3] pour un entier m quelconque. On considère premièrement la trace d'une fonction de $H^2(\Omega)$ sur une seule arête Γ_j.

Proposition 1.21. *Soit Ω un domaine polygone du plan. Alors, que que soit j, l'application*

$$u \longrightarrow \left\{\gamma_j u; \gamma_j\left(\partial_{n_j} u\right)\right\}$$

qui est définie pour $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ se prolonge de façon continue en une application linéaire surjective

$$\text{de } H^2(\Omega) \;\; \text{sur} H^{3/2}(\Gamma_j) \times H^{1/2}(\Gamma_j).$$

Remarque 1.9. *Si Ω est un domaine régulier, on peut identifier $H^{3/2}(\Gamma)$ à l'espace des traces sur Γ des élément de $H^2(\Omega)$. Par contre, dans le cas d'un polygone, on se tombe à la difficulté que l'on ne sait définir$H^s(\Gamma)$ que si $s \leq 1$ (la définition de $H^s(\Gamma)$ pour $s > 1$ nécessitant une surface Γ plus régulière). L'espace des traces de $H^2(\Omega)$ n'est donc pas un espace de Sobolev usuel, d'où l'idée de travailler arête par arête en précisant les conditions de raccord aux sommets et tenant compte du changement de repère (n, τ) sur les différences arêtes Γ_j.*

Proposition 1.22. *L'image de $H^2(\Omega)$ par l'application*

$$u \longmapsto \{g_j, h_j\}_{j=1}^N$$

où l'on a posé $g_j = \gamma_j u$ et $h_j = \gamma_j \left({}_j\partial_{n_j} u \right)$, est le sous-espace de

$$\prod_{j=0}^{N} H^{3/2}(\Gamma_j) \times H^{1/2}(\Gamma_j)$$

défini par les conditions de raccord

$$\begin{cases} g_j(M_j) = g_{j+1}(M_j) \quad \forall 1 \leq j \leq N, \\ \partial_{\tau_j} u \equiv -\cos(\omega_j)\, \partial_{\tau_{j+1}} u + \sin(\omega_j)\, h_{j+1}, \ \text{en } M_j \quad \forall 1 \leq j \leq N, \\ \partial_{n_j} u \equiv -\cos(\omega_j)\, h_{j+1} - \sin(\omega_j)\, \partial_{\tau_{j+1}} u, \ \text{en } M_j \quad \forall 1 \leq j \leq N. \end{cases}$$

Preuve. Ce résultat est en fait un cas particulier du theorème des traces de $H^m(\Omega)$ pour m entier dont on trouve la démonstration dans [3] . ■

1.2.7 Une formule de Green sur un polygone

Rappellons d'abord formules de Green qui, dans le cas d'un polygone, s'énoncent de la façon suivante:

$$(u, \Delta v)_\Omega + (\nabla u, \nabla v)_\Omega = \sum_j \left(\gamma_j u, \gamma_j \left(\partial_{n_j} v \right) \right)_{\Gamma_j} \quad \forall u \in H^1(\Omega) \text{ et } v \in H^2(\Omega), \tag{1.2.9}$$

$$(u, \Delta v)_\Omega - (v, \Delta u)_\Omega = \sum_j \left[\left(\gamma_j u, \gamma_j \left(\partial_{n_j} v \right) \right)_{\Gamma_j} \text{ - } \left(\gamma_j v, \gamma_j \left(\partial_{n_j} u \right) \right)_{\Gamma_j} \right] \tag{1.2.10}$$

$\forall u, v \in H^2(\Omega)$, où $(.,.)_\Omega$ et $(.,.)_{\Gamma_j}$ désignent le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Gamma_j)$.

Pour la formule (1.1.10), la trace des fonctions u exprime que le domaine de l'opérateur de Laplace est maximale dans $L^2(\Omega)$ (cf.[3] , [11]). Posons

$$D\left(\Delta, L^2(\Omega)\right) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \,/\, \Delta u \in L^2(\Omega) \right\}$$

muni de la norme

$$v \longmapsto \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Théorème 1.23. *Soit Ω un domaine polygone du plan. Alors, l'application*

$$u \longrightarrow \left\{ \gamma_j u; \gamma_j \left(\partial_{n_j} u \right) \right\}$$

se prolonge de façon unique et continue en un opérateur de $D(\Delta, L^2(\Omega))$ dans $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_j) \times \widetilde{H}^{-3/2}(\Gamma_j)$.

Preuve. Ce résultat est démontrer dans [3] on adoptant la méthode de [11] et la densité de $D\left(\overline{\Omega}\right)$ (et par conséquent $H^2(\Omega)$) dans $D(\Delta, L^2(\Omega))$. ■

Proposition 1.24. *Soit $v \in D(\Delta, L^2(\Omega))$. Alors on a*

$$\begin{aligned}\int_\Omega u.\Delta v dx - \int_\Omega v.\Delta u dx = \sum_j \Big\{ & \left\langle \gamma_j \left(\partial_{n_j} v\right), \gamma_j u \right\rangle_{\widetilde{H}^{-3/2}(\Gamma_j)\times \widetilde{H}^{3/2}(\Gamma_j)} \\ & - \left\langle \gamma_j v, \gamma_j \left(\partial_{n_j} u\right)\right\rangle_{\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_j)\times \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)} \Big\} d\sigma dt\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

quel que soit $u \in H^2(\Omega)$ telle que $\gamma_j u \in \widetilde{H}^{3/2}(\Gamma_j)$ et $\gamma_j\left(\partial_{n_j} u\right) \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$ pour $1 \le j \le N$.

Preuve. Cf[3]. ■

Proposition 1.25. *Soit $v \in H^1(\Omega)$ tel que $\Delta v \in L^2(\Omega)$. Alors, l'application*

$$v \longrightarrow \gamma_j \left(\partial_{n_j} v\right)$$

qui est bien définie pour les fonctions dans $H^2(\Omega)$ admet un prolongement unique et continu en une application de l'espace $\{v \in H^1(\Omega)\ /\ \Delta v \in L^2(\Omega)\}$ dans $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_j)$.De plus, on a

$$\int_\Omega u.\Delta v dx = -\int_\Omega \nabla v.\nabla u dx + \sum_j \left\langle \gamma_j \left(\partial_{n_j} v\right), \gamma_j u \right\rangle_{\widetilde{H}^{-1/2}\left(\Gamma_j\right)\times \widetilde{H}^{1/2}\left(\Gamma_j\right)} \tag{1.2.12}$$

Preuve. Cf[3]. ■

Remarque 1.10. *Cette extension de la formule de Green permet de caractériser l'espace des singularités dans la décomposition de $L^2(\Omega)$.*

1.2.8 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Soit V un espace de Banach. On note par $C([0,T];V)$ l'espace des fonctions continues $u : [0,T] \longmapsto V$ muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;V)} = \underset{0\le t\le T}{Max} \|u(t)\|_V \tag{1.2.13}$$

$C([0,T];V)$ est un espace de Banach.

Soit $T > 0$.On définie $L^p(0,T;X)$ l'espace des fonctions $t \longrightarrow f(t)$ mesurables de $[0,T] \longrightarrow X$ (pour la mesure dt) de norme

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T |f(t)|_X^p \, dt \right)^{1/p} < \infty \ , \tag{1.2.14}$$

$$\|f(t)\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in[0,T]} ess. \|f(t)\|_X \ \text{ si } p = \infty. \tag{1.2.15}$$

Définition 1.23. *$\partial_t u$ est le dérivée de u, prise au sens de distribution tel que*

$$\int_0^T \varphi(t)\, u'(t)\, dt = -\int_0^T \varphi'(t)\, u(t)\, dt \quad \textit{pour tout } \varphi \in D(0,T).$$

Définition 1.24. *On définit $W^{1,p}(0,T;V)$, l'espace de Sobolev, des fonctions dans $L^p(0,T;V)$ tel que le dérivée au sens faible $\partial_t u \in L^1(0,T;V)$.*

Si $p = 2$, on note $W^{1,2}(0,T;V)$ par $H^1(0,T;V)$ muni de produit scalaire

$$(u,v)_{H^1(0,T;V)} = \int_0^T \int_V \left(u(x,t)\, v(x,t) + \partial_t u(x,t)\, \partial_t v(x,t)\right) dS_x dt \tag{1.2.16}$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(0,T;V)} = (u,u)^{\frac{1}{2}}_{H^1(0,T;V)} \tag{1.2.17}$$

pour tout $u, v \in H^1(0,T;V)$.

Chapitre 2

Régularité maximale du Laplacien et résolution faible de l'équation des ondes

Sommaire

2.1 Introduction

Une étude dans la théorie des singularité des problèmes elliptiques du second ordre à été menée par P.Grisvard (cf. par exemple [1, 3]). On se propose dans ce chapitre d'établir les propriétés qualitatives de la solution du problème de Dirichlet pour le Laplacien et la solution de l'équation des ondes dans un polygone. Il n'y a pas de difficulté particulière dans l'application de la méthode variationnelle à la résolution de ce problème, et les résultats classiques donnent la régularité de la solution en dehors des singularités géométriques. Cependant, la solution présente des singularités au voisinage des coins formant un angle supérieur à π, et nous allons donner la forme explicite de ces singularités pour les différentes conditions géométriques au bord. Pour donner une idée de la démarche, considérons le problème suivant.

Soit Ω un polygone du plan. Etant donné f, on cherche la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega\ , \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Il est connu que (2.2.1) admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$ quel que soit le second membre $f \in L^2(\Omega)$. De plus, cette solution appartient à $H^2(\Omega)$ pour un domaine Ω régulier ou même pour un polygone convexe. Par contre, ceci n'est plus vrai si Ω présente des coins rentrants, et dans ce cas-là la question se pose : quelle est la différence entre l'espace de l'image réciproque de Δ, $\{u \in H_0^1(\Omega)\ /\Delta u \in L^2(\Omega)\}$, et l'espace des solutions "régulière", $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$? Afin de répondre à cette question, on raisonne en trois étapes:

1. Dans un premier temps, on établit une inégalité a priori pour les éléments de

$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ qui permet de montrer que l'image de Δ est fermée.

2. Ensuite, on donne une caractérisation de l'orthogonal $\mathcal{N}$ de cette image dans $L^2(\Omega)$.

3. La connaissance des éléments de $\mathcal{N}$ permet alors de déterminer la partie singulière (qui appartient à $H_0^1(\Omega) \setminus H^2(\Omega)$) de la solution de (2.2.1) et ensuite pour la solution de l'équation des ondes.

2.2 Condition de Dirichlet

2.2.1 Formulation variationnelle et résultats classiques de régularité

Soit Ω un polygone du plan. On adopte les notation du premier chapitre. Sur Ω, on s'intéresse à la résolution de l'équation de poisson avec condition de Dirichlet homogène sur le bord.

$$\begin{aligned} -\Delta u = f \qquad & \text{dans} \quad \Omega \ , \\ u = 0 \qquad & \text{sur} \quad \Gamma. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Soit f une fonction appartenant à $L^2(\Omega)$.La formulation variationnelle de (2.2.1) est alors donnée par

$$\begin{gathered} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ (\nabla u, \nabla v)_\Omega = (f, v)_\Omega \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega) . \end{gathered} \tag{2.2.2}$$

Puisque $(\nabla ., \nabla .)_\Omega$ définit une norme sur$H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme $\|.\|_{H_0^1(\Omega)}$, le problème (2.2.2) admet une solution unique

d'après théorème de Lax-Milgram. Dans le cas d'un domaine Ω régulier, les résultats classiques de régularité montrent qu'à une fonction donnée f dans $L^2(\Omega)$ correspond une solution u de classe $H^2(\Omega)$. Ceci reste vrai si le domaine est polygonal et convexe ($cf.$ [1]). Par contre, si un ou plusieurs angles du polygone ont une mesure supérieure à π, la solution de (2.2.2) n'appartient pas, en général, à $H^2(\Omega)$, et les techniques classiques ne donnent la régularité H^2 qu'en dehors des coins (régularité intérieur) ce qui est précisé dans le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ La solution variationnelle du problème (2.2.2) . Alors, $\varphi u \in H^2(\Omega)$ pour toute fonction $\varphi \in D\left(\overline{\Omega}\right)$ dont le support n'intersecte Γ qu'à l'interieur des coins Γ_j.*

2.2.2 Une inégalité a priori

Considérons l'opérateur de Laplace comme un opérateur non borné sur le domaine $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Le théorème suivant montre qu'il est injectif et que son image est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$.

Théorème 2.2. *Soit Ω un domaine polygone du plan. Alors, il existe une constante, $C(\Omega)$, telle que*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \ \ \forall u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \tag{2.2.3}$$

Preuve. On applique la premier formule de Green (1.2.9), on obtient

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = -\int_{\Omega} u\Delta u dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} . \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \ , \ \forall\ u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

On a

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq k \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Aussi on a

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} . \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$$

On déduit alors

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq k. \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} .$$

la majoration des dérivées secondes de u repose essensiellement sur l'identité suivante:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dxdy = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 dxdy \ \ \forall\ u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \tag{2.2.4}$$

que l'on démontre par une double integration par partie (voir [3]). Il vient alors que

$$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \left\|\partial_x^2 u\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\partial_y^2 u\right\|_{L^2(\Omega)} + 2\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 dxdy$$

où $\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 .$

ce qui donne une majoration de toutes les dérivées secondes de u par $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ d'ou le résultat. ■

Remarque 2.1. *La démonstration de (2.2.4) nécessite une régularité H^3. On obtient (2.2.4) par le résultat de densité suivant(cf.*[3]*)*

Proposition 2.3. $H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *est dense dans* $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *quel que soit* $m \geq 2$.

2.2.3 L'orthogonal de $\Delta\left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)$ dans $L^2(\Omega)$

L'image de l'opérateur Δ, considéré comme un opérateur sur $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,est fermé. Notons $\mathcal{N}$ l'orthogonal de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. Ainsi, $\mathcal{N}$ est défini par

$$\mathcal{N} = \left\{ v \in L^2(\Omega) \ / \ \int_{\Omega} v\Delta u dx = 0 \ \ \forall u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \right\}. \tag{2.2.5}$$

La proposition suivante montre que les élément de $\mathcal{N}$ sont les solutions d'un problème homogène adjoint

Proposition 2.4. *Une fonction $v \in L^2(\Omega)$ appartient à $\mathcal{N}$ si et seulement si*

$$\Delta v = 0 \quad dans\ \Omega, \tag{2.2.6}$$

$$\gamma_j v = 0 \quad sur\ \ \Gamma_j, 1 \leq j \leq N. \tag{2.2.7}$$

1. La trace $\gamma_j v$ d'une telle fonction appartient à $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_j)$ ce qui donne un sens à (2.2.7) (cf.Théorème 1.21)Cf.[6] .

2. On pourrait être tenté de conclure que toute solution de (2.2.6)-(2.2.7) s'annule identiquement Cependant, dans le cas d'un polygone non convexe, il existe des solutions non triviales de (2.2.6)-(2.2.7) car les hypothè sur les éléments de $\mathcal{N}$ ne sont pas suffisantes pour que ceux-ci soient des solutions variationnelles.

Preuve. Cf.[3] ■

Les élément de $\mathcal{N}$ sont régulières en dehors de tout voisinage des coins :

Lemme 2.5. *Soit $v \in \mathcal{N}$. Alors $v \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \setminus V\right)$, pour tout voisinage V des sommets M_j.*

Preuve. Cf.[3] ■

Remarque 2.2. *Le lemme précédente implique en particulier que tout comportement singulier des élément de$\mathcal{N}$ est localisé au voisinage des coins. Ceci nous amène à considérer l'équation $\Delta v = 0$ dans un voisinage isolé d'un sommet M_j.*

Après une éventuelle rotation et translation du domaine, nous pouvons supposer que la sommet M_j coïcide avec l'origine du plan et que le segment Γ_{j+1} est supporté par l'axe $\{y = 0\}$. Soit $R > 0$ un réel tel que

$$D_R = \{r(cos\theta, sin\theta)\ /\ 0 < r < R,\ \ \theta \in]0, \omega[\} \subseteq \Omega, \tag{2.2.8}$$

où ω est la mesure de l'angle délimité par Γ_j et Γ_{j+1}. Dans D_R, un élément v de $\mathcal{N}$ est alors solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial^2 r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial^2 \theta^2} = 0 \tag{2.2.9}$$

Tenant compte de la régularité intérieure de v, la condition au bord (2.2.8) s'écrit "au sens fort"

$$v(r,0) = v(r,\omega) = 0 \ \ \forall\ 0 < r < R \tag{2.2.10}$$

Nous allons décomposer v sur la base des fonctions propres de l'opérateur $\Lambda = -\frac{\partial^2}{\partial^2\theta^2}$ défini sur le domaine

$$\mathcal{H}(\Lambda) = \left\{\varphi \in H^2(]0,\omega[)\ \ /\ \ \varphi(0) = \varphi(\omega) = 0\right\}.$$

En effet, comme Λ est un opérateur autoadjoint positif à résolvante compacte, l'ensemble des fonctions propres forme une base de $L^2(]0,\omega[)$.

Notons $\{\varphi_m\}_{m\geq 1} \subset \mathcal{H}(\Lambda)$ l'ensemble des fonctions propres normalisées et disignons par λ_m^2, $m \geq 1$, la suite croissante des valeurs propres associées. Ainsi,

$$-\varphi_m^{''} = \lambda_m^2 \varphi_m \quad \forall m \geq 1, \tag{2.2.11}$$

où

$$\varphi_m(\theta) = \sqrt{2/\omega} \sin(\lambda_m \theta) \text{ et } \lambda_m = \frac{m\pi}{\omega}. \tag{2.2.12}$$

Le proposition suivante nous donne le comportement local au voisinage d'un sommet M_j fixé.

Proposition 2.6. *Soit $v \in \mathcal{N}$. Alors, au voisinage de D_R de sommet 0 (M_j coïncide avec l'origine), v est de la forme*

$$v(r,\theta) = \beta_1 r^{-\frac{\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{\theta\pi}{\omega}\right) + w(r,\theta) \tag{2.2.13}$$

avec une fonction $w \in H^1(D_{R'})$ $\forall$ $R' < R$ et un nombre réel β_1.

Preuve. Comme v est régulier en dohors du coin et tenant compte des conditions au bord, il vient que

$$v(r,\theta) \in \mathcal{H}(\Lambda) \quad \forall\ 0 < r < R$$

Par ailleurs, v paut etre considérée comme une fonction de $\mathcal{C}^\infty(]0,R[, \mathcal{H}(\Lambda))$ ce qui permet vde réécrire (2.2.9) de lma facon suivante

$$\frac{\partial^2 v}{\partial^2 r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\Lambda v = 0. \tag{2.2.14}$$

Décomposons v sur la base des fonctions propres $\{\varphi_m\}_{m\geq 1}$ de l'opérateur Λ. On a

$$v(r,\theta) = \sum_{m\geq 1} v_m(r)\varphi_m(\theta) \quad \text{où } v_m(r) = \int_0^{\omega_j} v(r,\theta)\varphi_m(\theta)\,d\theta.$$

Comme les v_m sont régulières pour $r > 0$, (2.2.14) implique

$$v_m^{''}(r) + \frac{1}{r} v_m^{'}(r) - \frac{\lambda_m^2}{r^2} v_m(r) = 0 \quad \forall\ 0 < r < R \quad \text{au sens des distributions}$$

Les solutions respactives de cette équation différentielle sont données par

$$\begin{cases} v_m(r) = \alpha_m r^{\lambda_m} + \beta_m r^{-\lambda_m} & \text{si} \quad \lambda_m > 0 \\ v_m(r) = \alpha_m + \beta_m \log r & \text{si} \quad \lambda_m = 0 \end{cases}$$

$\forall m \geq 1$.Le fait que v soit dans $L^2(D_R)$ entaîne β_m dès que $\lambda_m \geq 1$, donc quel que soit $m \geq 2$. Ansi, le développement

en série de v s'écrit

$$v(r,\theta) = \beta_1 r^{-\frac{\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{\theta\pi}{\omega}\right) + v_R(r,\theta) \tag{2.2.15}$$

avec

$$v_R(r,\theta) = \sum_{m\geq 1} \alpha_m r^{\lambda_m} \varphi_m(\theta).$$

Comme $\lambda_m = \frac{m\pi}{\omega}$ $\forall m \geq 1$,chaque terme de la série appartient à $H^1(D_R)$, et on a

$$\left\|r^{\lambda_m}\varphi_m(\theta)\right\|_{H^1(D_R)} = \mathcal{O}\left(mR^{\lambda_m}\right) \quad \forall m \geq 1. \tag{2.2.16}$$

Remarque 2.3. *La démonstration montre qu'au voisinage d'un coin" convexe", c'est-à-dire dont l'angle ω est de mesure inferieure à π, v est de classe H^1. En effet, dans ce cas-là β_1 car $r^{-\frac{\pi}{\omega}} \notin L^2(\Omega)$, et par conséquent*

$$v(r,\theta) = v_R(r,\theta) \in H^1(D_R).$$

Par contre, si $\omega > \pi$, v n'appartient pas à $H^1(D_R)$ car $r^{-\frac{\pi}{\omega}} \notin H^1(D_R)$ (cf. proposition 1.15) .

Dans la suite, nous allons revenir à une étude globale des élément de $\mathcal{N}$. Ainsi, nous verrons comment on peut associer à chaque coin non convexe une fonction particulière de $\mathcal{N}$ de facons que l'ensemble de ces fonctions forme une base de $\mathcal{N}$. Nous introduisons une fonction de troncature $\eta_j = \eta_j(r_j) \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ ne dépendant que de la distance r_j au sommet M_j et telle que $\eta_j \equiv 1$ au voisinage de M_j tandis que η_j s'annule près de toute arête Γ_k sauf si $k = j$ ou $k = j+1$. On peut, par ailleurs, supposer que l'intersection entre les supports des différents fonctions η_j est vide.

Le terme singulier dans la décomposition de v au voisinage de D_R de M_j était, à une constante multiplicative près

$$r^{-\frac{\pi}{\omega_j}} \sin\left(\frac{\theta_j\pi}{\omega_j}\right).$$

Cette fonction est harmonique dans Ω, mais ne vérifié les conditions de Dirichlet que sur les deux arêtes Γ_j et Γ_{j+1} qui forment l'angle ω_j. Afin de tenir compte du caractère locale de ce terme, on le multiplie par la fonction de troncature associée, η_j, ce qui ne change rien à son comportement au voisinage de M_j. La fonction ainsi définie

$$s_{-j}(r_j, \theta_j) = \eta_j(r_j, \theta_j)\, r^{-\frac{\pi}{\omega_j}} \sin\left(\frac{\theta_j \pi}{\omega_j}\right), \tag{2.2.17}$$

est appelée *fonction singulière duale.* Evidemment, cette fonction n'est plus harmonique, mais on montre dans le lemme suivant qu'elle coïncide avec un élément de $\mathcal{N}$ à une fonction de classe H^1près.

Lemme 2.7. *Etant donné $j \in \{1, ..., N\}$ avec $\omega_j > \pi$, il existe $\sigma_j \in \mathcal{N}$ telle que*

$$\sigma_j - s_{-j} \in H^1(\Omega).$$

Preuve. Comme η_j est régulière et constante au voisinage de M_j, on peut montre que $\Delta s_{-j} \in D\left(\overline{\Omega}\right)$.

Considérons ensuite la fonction u_j dans $H_0^1(\Omega)$, solution unique du problème variationnel

$$(\nabla u_j, \nabla w)_\Omega = (\Delta s_{-j}, w) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \tag{2.2.18}$$

On conclut en posant

$$\sigma_j = s_{-j} + u_j.$$

car, tenant compte de (2.2.18), on a $\Delta\sigma_j = 0$ dans Ω, et par contruction $\gamma_j \sigma_j = 0$ sur Γ_j ce qui montre $\sigma_j \in \mathcal{N}$. ■

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer une base de l'espace $\mathcal{N}$ et de montrer que dans le cas d'un polygone de plan, la dimention de $\mathcal{N}$ est égale nombre de coins formant un angle superière à π.

Théorème 2.8. *les fonctions σ_j qui ont été déterminées au cours de lemme2.7, forment une base de l'espace $\mathcal{N}$.*

Preuve. L'idée principale est consiste à remplacer dans la décomposition (2.2.15) le terme $r^{-\frac{\pi}{\omega_j}} \sin\left(\frac{\theta_j \pi}{\omega_j}\right)$ par σ_j. Ansi on montre à l'aide du précédent que $v - \beta_{1,j}\sigma_j$ est de classe H^1 au voisinage du sommet M_j. Comme v est régulière en dehors des sommets, on déduit que globalement

$$w = v - \sum_{\omega_j > \pi} \beta_{1,j}\sigma_j \in H^1(\Omega).$$

D'un autre côté, comme v et σ_j appartiennent à $\mathcal{N}$, il en est de meme pour w qui est donc un element de $\mathcal{N} \cap H^1(\Omega)$. Par ailleurs, on montre que $w_{/\Gamma} = 0$ (au sens $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$). En effet, ceci découle immédiatement en remarquant que $\gamma_j w = 0 \; \forall w \in H^1(\Omega)$. La fonction w est alors la solution variationnelle du problème

$$\Delta w = 0 \text{ dans } \Omega$$
$$w = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

ce qui implique que $w \equiv 0$ dans Ω.

Ceci montre que v est une combinaison linéaire des σ_j, et on conclut en remarquant que les σ_j sont linéairement indépendants. ■

Remarque 2.4. *On a vu que les éléments de $\mathcal{N}$ sont de classe H^1 au voisinage d'un sommet d'angle inférieur à π. Ansi, la contribution de chaque coin (d'une condition de Dirichlet) est* 0 *si $\omega_j < \pi$ et* 1 *si $\omega_j > \pi$ La dimension de $\mathcal{N}$ est alors donnée par*

$$\dim \mathcal{N} = card\{j \;/\; \omega_j > \pi\} < +\infty. \tag{2.2.19}$$

2.2.4 Les fonctions singulières

Nous avons vu auparavant que Δ applique $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans un sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$ de codimension χ finie. Etant donnée une fonction arbitraire $f \in L^2(\Omega)$, on ne peut donc pas, en générale, assurer l'existence d'une solution de $\Delta u = f$ dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Autrement dit, nous sommes obligés "de rajouter" un espace convenable à $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ afin de pouvoir résoudre le problème en considération pour tout f dans $L^2(\Omega)$.

Dans l'objectif de déterminer une base de cet espace, on définit des fonctions singulières de la façons suivante.

Définition 2.1. *Si $\omega_j > \pi$, on appelle fonction singulière la fonction*

$$S_j(r_j, \theta_j) = \eta_j(r_j, \theta_j)\, r_j^{\frac{\pi}{\omega_j}} \sin\left(\frac{\theta_j \pi}{\omega_j}\right). \tag{2.2.20}$$

Théorème 2.9. *Soit Ω un polygone du plan. Quel que soit f dans $L^2(\Omega)$, il existe une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$, solution unique du problème variationnel*

$$(\nabla u, \nabla v)_\Omega = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

De plus, il existe des nombres réels, c_j, déterminés de façons unique, et tels que

$$u - \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{\omega_j > \pi} c_j S_j\right) \in H^2(\Omega). \tag{2.2.21}$$

Preuve. Remarquons d'abord que, quel que soit j, la fonction $S_j \in H_0^1(\Omega)$ est la solution variationnelle du problème

$$\Delta S_j = F_j \text{ dans } \Omega$$
$$S_j = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

avec second membre $F_j \in D\left(\overline{\Omega}\right)$. Les supports des fonctions S_j étant disjoints, celles-ci forment une famille libre, et il en est de même pour leurs images, F_j, car Δ est un opérateur injectif.

Pa ailleurs, la fonction F_j correspondant à $\omega_j > \pi$ n'est pas orthogonale à $\mathcal{N}$. En effet, s'il en était ainsi, il existerait $w_j \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

telle que

$$\Delta w_j = F_j = \Delta S_j,$$

et $w_j - S_j$ serait une solution du poblème homogène appartenant à $H_0^1(\Omega)$. D'après le résultat d'unicité, S_j coïnciderait alors avec w_j et

serait de classe H^2 ce qui contredit la proposition 1.15 puisque $\omega_j > \pi$.

Autrement dit, les F_j correspondant à $\omega_j > \pi$ forment une famille libre de $\chi = \dim \mathcal{N}$ fonctions ayant chacune une composante dans $\mathcal{N}$.

Par conséquant, $L^2(\Omega)$ est la somme directe de l'image de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ par Δ et l'espace engendré par les fonctions F_j :

$$L^2(\Omega) = \Delta\left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \oplus Vect\left\{F_j = \Delta S_j \ / \ \omega_j > \pi\right\}. \tag{2.2.22}$$

L'injectivité du Laplacien considéré comme opérateure de $H_0^1(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$ permet de conclure. ∎

Remarque 2.5. *Nous disposons actuellement la décomposition de $L^2(\Omega)$ en deux somme directe*

$$L^2(\Omega) = \Delta\left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \oplus \mathcal{N}^{\perp}, \tag{2.2.23}$$

l'étude de $\mathcal{N}$ nous a essentiellement servi à déterminer la codimension de $\Delta\left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)$ tandis que les fonctions $F_j = \Delta S_j$ nous donnent une connaissance explicite du comportement singulier de la solution u au voisinage des coins.

Théorème 2.10. *On pose* $s_0 = \left(1 + \frac{\pi}{\omega}\right)$. *Alors pour* $f \in L^2(\Omega)$, *la solution* $u \in H_0^1(\Omega)$ *de (2.2.1) vérifié*

$$u \in H^s(\Omega)$$

à condition que $s \leq 2$ et $s < s_0$.

Preuve. Soit u une solution du problème(2.2.1) .On cherche une condition sur Ω pour que $u \in H^2(\Omega)$.

On introduit l'espace $W(\Omega) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ où on cherche u . L'opérateur Δ admet unique extention dans $L^2(\Omega)$ de domaine

$$D\left(\Delta, L^2(\Omega)\right) = \left\{u \in L^2(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega), u = 0 \text{ sur } \Gamma\right\}$$

s'appelle domaine maximal de Δ .Notons $H = L^2(\Omega)$ et on considère l'opérateur auto adjoint positif A défini par l'opérateur de Laplace avec condition de Dirichlet

$$Au = -\Delta u$$

1. Lorsque Ω est convexe $D_A = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$et la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de (2.2.2) avec $f \in L^2(\Omega)$ vérifie $u \in H^2(\Omega)$d'après(Kadlec) . Les fonctions propres du l'opérateur A $\varphi_{j,1}(\theta) = \sin\left(\frac{\pi\theta}{\omega_j}\right)$;

$\varphi_{j,1} \in H^{\left(1+\frac{\pi}{\omega}\right)}(]0, \omega[)$ avec $\omega = \max \omega_{j,1}$.

comme u est régulier dans $\Omega \setminus \{0\}$est $u(r, \theta) = r^{\frac{\pi}{\omega}} \varphi_1(\theta)$ dans $V_0 \cap \Omega$ oŭ V_0 voisinage de 0 tel que 0$\in \Gamma_j$ est $V_0 \cap \overline{\Omega}$,alors pour touts$\prec s_0$

$$u \in H^s(\Omega) \quad \text{pour } \frac{.\pi}{\omega} > s - 1$$

(Proposition1.15 [3]) d'où $s < \left(1 + \frac{\pi}{\omega}\right)$.

2. Si $2\pi > \omega > \pi \Rightarrow \frac{3}{2} < 1 + \frac{\pi}{\omega} < 2$, alors il existe s dans$\left]\frac{3}{2}, 2\right[$ tel que $u \in H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ d'où le résultat. ■

2.2.5 Résolution faible de l'équation des ondes

On utilise l'opérateur auto adjoint positif A, il existe un système orthonormé complet dans $L^2(\Omega)$ formé de fonctions propres $\{w_k\}_{k\geq1}$ et de valeurs propres $\{\lambda_k\}_{k\geq1}$de Laplacien avec la condition de Dirichlet homogène , c'est -à -dire

$$\begin{aligned} -\Delta w_k &= \lambda_k w_k, \qquad k = 1, 2, ... \\ w_k &= 0 \qquad \text{sur } \ \Gamma_k \quad . \end{aligned}$$

Pour tout $s \geq 0$

$$x \in D_{A^s} \Leftrightarrow \text{La série } \|A^s x\| = \left(\sum_{k \geq 1} \lambda_k^{2s} (x; w_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ est converge.} \tag{2.2.24}$$

On sait d'après[11]

$$D_{A^{\frac{1}{2}}} = H_0^1(\Omega)$$

et que $A = (-\Delta)$ se prolonge en un opérateur linéaire continu , encore noté A ,de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

On considère l'équation des ondes (avec condition de Dirichlet homogène) comme suite:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varphi \in C([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T], L^2(\Omega)) \\ \varphi''(t) - \Delta\varphi(t) = f(t) \quad , t \in [0,T] \\ \varphi(0) = \varphi_0, \varphi'(0) = \varphi_1 \\ \varphi(x,t) = 0, \Gamma \times [0,T] \end{array} \right. \tag{2.2.25}$$

où $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega), \varphi_1 \in L^2(\Omega), f \in L^1([0,T]; L^2(\Omega))$.

Théorème 2.11. *Pour $\varphi_0 \in D_{A^s}, \varphi_1 \in D_{A^{s-\frac{1}{2}}}$ et $f \in L^1\left((0,T); D_{A^{s-\frac{1}{2}}}\right)$ avec $s \geq \frac{1}{2}$, le problème* (2.2.8) *admet unique solution φ et de plus*

$$\varphi \in C([0,T], D_{A^s}) \cap C^1\left([0,T], D_{A^{s-\frac{1}{2}}}\right)$$

Preuve. 1. *L'existence*

On établit l'existence par la méthode de Fourier. On cherche la solution φ sous la forme

$$\varphi(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(t) w_k(x), \text{où } \ \alpha_k(t) = \int_\Omega \varphi(x,t) w_k(x) dx$$

où

$$(-\Delta) w_k = \lambda_k w_k, \quad k = 1, 2, ...$$

on a $\varphi''(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k''(t) w_k(x)$ et $\Delta\varphi(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(t) \Delta w_k(x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \alpha_k(t) w_k(x)$.

En multipliant l'équation $\varphi''(x,t) - \Delta\varphi(x,t) = f(x,t)$ par $w_k(x)$ et en integrant sur Ω on obtient

$$\int_{\Omega} (\varphi''(x,t) - \Delta\varphi(x,t))\, w_k(x)\, dx = \int_{\Omega} f(x,t)\, w_k(x)\, dx$$

$$\int_{\Omega} \varphi''(x,t)\, w_k(x)\, dx - \int_{\Omega} \Delta\varphi(x,t)\, w_k(x)\, dx = \int_{\Omega} f(x,t)\, w_k(x)\, dx$$

Grâce à Formule de Green

$$\int_{\Omega} \varphi''(x,t)\, w_k(x)\, dx - \left(\int_{\Gamma} w_k(x) \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma - \int_{\Omega} \nabla w_k(x)\, \nabla\varphi(x,t)\, dx \right) = \int_{\Omega} f(x,t)\, w_k(x)\, dx$$

Or $w_k = 0$ sur Γ_k ,$\forall k \geq 1$,

$$\int_{\Omega} \varphi''(x,t)\, w_k(x)\, dx + \int_{\Omega} \nabla w_k(x)\, \nabla\varphi(x,t)\, dx = \int_{\Omega} f(x,t)\, w_k(x)\, dx$$

$$\int_{\Omega} \varphi''(x,t)\, w_k(x)\, dx - \int_{\Omega} \Delta w_k(x)\, \nabla\varphi(x,t)\, dx = \int_{\Omega} f(x,t)\, w_k(x)\, dx$$

$$\int_{\Omega} \varphi''(x,t)\, w_k(x)\, dx - \int_{\Omega} \Delta w_k(x)\, \nabla\varphi(x,t)\, dx = \int_{\Omega} f(x,t)\, w_k(x)\, dx$$

$$\left(\int_{\Omega} \varphi(x,t)\, w_k(x)\, dx \right)'' + \lambda_k \int_{\Omega} w_k(x)\, \varphi(x,t)\, dx = \int_{\Omega} f(x,t)\, w_k(x)\, dx$$

$$\alpha_k''(t) + \lambda_k \alpha_k(t) = \beta_k(t) \tag{2.2.26}$$

oŭ $\beta_k(t) = \int_{\Omega} f(x,t)\, w_k(x)\, dx$. D'après les conditions initiales

$$\varphi(0) = \varphi_0, \varphi'(0) = \varphi_1 \tag{2.2.27}$$

$$\alpha_k(0) = \int_{\Omega} \varphi_0(x)\, .w_k(x)\, dx$$

$$\alpha_k'(0) = \int_{\Omega} \varphi_1(x)\, .w_k(x)\, dx.$$

oŭ $(\alpha_k(0))_{k\geq 1}, (\alpha_k'(0))_{k\geq 1}$ désignent respectivement les coefficients de Fourier des données initiales φ_0 et φ_1,c'est-à-dire

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(0)\, w_k(x) \qquad , \varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k'(0)\, w_k(x)$$

L'équation différentielle (2.2.26)qui est d'ordre deux avec les conditions initiales (2.2.27) montre que

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\cos\left(t\sqrt{\lambda_k}\right)(\varphi_0, w_k)\, w_k + \sum_{k=1}^{+\infty}\sin\left(t\sqrt{\lambda_k}\right)(\varphi_1, w_k)\, w_k/\sqrt{\lambda_k} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^t \sin\left([t-s]\sqrt{\lambda_k}\right)/\sqrt{\lambda_k}.\,(f(s), w_k)\, w_k ds\end{aligned}$$

2. $L'unicit$

Soient φ_1, φ_2 deux solutions de l'équation des ondes dans (2.2.25), vérifiant

$$\varphi_1''(t) - \Delta\varphi_1(t) = f(t)$$

$$\varphi_2''(t) - \Delta\varphi_2(t) = f(t)$$

La différence $\phi = \varphi_1 - \varphi_2$ est aussi une solution de l'équation des ondes homogène($f = 0$)

$$\phi''(t) - \Delta\phi(t) = 0$$

Pour tout $t > 0$ on définie l'énergie par

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{\phi_t^2 + |\nabla\phi|^2\right\} dx.$$

Si on dérive par rapport à t

$$E'(t) = \int_\Omega \{\phi_t.\phi_{tt} + \nabla\phi_t.\nabla\phi\}\, dx$$

oŭ

$$\int_\Omega \nabla\phi_t.\nabla\phi dx = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi}{\partial n}.\phi_t d\sigma - \int_\Omega \phi_t.\Delta\phi dx \qquad \text{(Formulle de Green)}$$

alors

$$\begin{aligned}E'(t) &= \int_\Omega \left\{\phi_t.\phi_{tt} + \int_{\partial\Omega}\tfrac{\partial\phi}{\partial n}.\phi_t d\sigma - \int_\Omega \phi_t.\Delta\phi dx\right\} \\ &= \int_\Omega \left\{\phi_t.\phi_{tt} - \int_\Omega \phi_t.\Delta\phi dx + \int_{\partial\Omega}\tfrac{\partial\phi}{\partial n}.\phi_t d\sigma\right\} \\ E'(t) &= \int_\Omega \{\phi_{tt} - \Delta\phi\}.\phi_t dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi}{\partial n}.\phi_t d\sigma\end{aligned}$$

Pour que

$$\phi(t,x)=0 \text{ sur } \Gamma; \forall t\in[0,T] \quad \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x)=0 \text{ sur } \Gamma; \forall t\in[0,T]$$

$\phi(t,x)=0$ sur Γ ;$\forall t\in[0,T]$ implique $\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x)=0$ sur Γ ;$\forall t\in[0,T]$, alors

$$E^{'}(t)=0; \forall t\in[0,T]$$

avec $\phi_{tt}-\Delta\phi=0$ et

$$E(t)=E(0); \forall t\in[0,T]$$

où

$$E(0)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{\left[\phi_0^{'}(x)\right]^2+[\phi_1(x)]^2\right\}dx$$

ce qui revient à écrire

$$\phi(0,x)=\frac{\partial\phi}{\partial t}(0,x)=0; \forall x\in\Omega \tag{2.2.28}$$

Si ϕ vérifie (2.2.28) ,on trouve $\phi(x,t)\equiv 0$,c'est-à-dire $\varphi_1(x,t)=\varphi_2(x,t)$ d'où l'unicité de (2.2.25) .

3.*Régularité*

Le cas oŭ $s=\frac{1}{2}$ correspond donc à une donnée f dans $L^1((0,T);L^2(\Omega))$ est

$$\varphi\in C\left([0,T],H_0^1(\Omega)\right)\cap C^1\left([0,T],L^2(\Omega)\right).$$

On montre que $\varphi(t)\in D_{A^s}, \varphi'(t)\in D_{A^{s-\frac{1}{2}}}$:
$\|\varphi\|_{C\left([0,T],H_0^1(\Omega)\right)\cap C^1([0,T],L^2(\Omega))}\leq c\left(\|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)}+\|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)}+\|f\|_{L^1([0,T],L^2(\Omega))}\right)$.En effet :
$\|\varphi\|_{C\left([0,T],H_0^1(\Omega)\right)}=\max\limits_{t\in[0,T]}\|L\|_{H_0^1(\Omega)}$ oŭ

$$\begin{aligned}L=&\sum_{k=1}^{+\infty}\cos\left(t\sqrt{\lambda_k}\right)(\varphi_0,w_k)w_k+\sum_{k=1}^{+\infty}\sin\left(t\sqrt{\lambda_k}\right)(\varphi_1,w_k)w_k/\sqrt{\lambda_k}\\&+\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^t\sin\left([t-s]\sqrt{\lambda_k}\right)/\sqrt{\lambda_k}.(f(s),w_k)w_kds\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{+\infty}\cos\left(t\sqrt{\lambda_k}\right)(\varphi_0,w_k)w_k\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2=\left\|\sum_{k=1}^{+\infty}\cos\left(t\sqrt{\lambda_k}\right)(\varphi_0,w_k)\nabla w_k\right\|_{L^2(\Omega)}^2&\leq|(\varphi_0,w_k)|^2\sum_{k=1}^{+\infty}|\nabla w_k|^2\\&\leq C(\varphi_0,\varphi_0)(w_k,w_k)\\&\leq C\|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)}^2.1,\end{aligned}$$

car $\|w_k\|^2_{L^2(\Omega)} = 1$

$$\left\|\sum_{k=1}^{+\infty} \cos\left(t\sqrt{\lambda_k}\right)(\varphi_0, w_k)\, w_k\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C' \|\nabla\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} \text{ (Inégalité de Poincaré)} = C' \|\varphi_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

De même façons on a :

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{+\infty} \sin\left(t\sqrt{\lambda_k}\right)(\varphi_1, w_k)\, w_k/\sqrt{\lambda_k}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq C''(\varphi_1, \varphi_1)(w_k, w_k)\ ,\\ &\leq \alpha\ \ \|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \sin\left([t-s]\sqrt{\lambda_k}\right)/\sqrt{\lambda_k}.\,(f(s), w_k)\, w_k ds\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq \left\|\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{\sin\left([t-s]\sqrt{\lambda_k}\right)}{\sqrt{\lambda_k}}.\,(f(s), w_k)\, w_k ds\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\leq \beta\ \ \|f\|_{L^2(\Omega)}\ .\end{aligned}$$

oŭ

$$(w_k, w_l) = 1, k = l$$

$$(w_k, w_l) = 0, k \neq l$$

on déduit que$\|\varphi\|_{C\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right)} \leq C\left(\|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^1([0,T], L^2(\Omega))}\right)$.

Pour que:

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_k}\sin\left(t\sqrt{\lambda_k}\right)(\varphi_0, w_k)\, w_k + \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_k}\cos\left(t\sqrt{\lambda_k}\right)(\varphi_1, w_k)\, w_k/\sqrt{\lambda_k}\\ &\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \sqrt{\lambda_k}\cos\left([t-s]\sqrt{\lambda_k}\right)/\sqrt{\lambda_k}.\,(f(s), w_k)\, w_k ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_k}\sin\left(t\sqrt{\lambda_k}\right)(\varphi_0, w_k)\, w_k + \sum_{k=1}^{+\infty} \cos\left(t\sqrt{\lambda_k}\right)(\varphi_1, w_k)\, w_k\\ &\quad + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \cos\left([t-s]\sqrt{\lambda_k}\right).\,(f(s), w_k)\, w_k ds\end{aligned}$$

on peut montre que

$$\|\varphi\|_{C^1([0,T], L^2(\Omega))} \leq c\left(\|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^1([0,T], L^2(\Omega))}\right).$$

d'où le résultat. ∎

Remarque 2.6. *À l'aide de (2.2.24) on peut établit la majoration*

$$\|\varphi\|_{C(0,T;D_{A^s}) \cap C^1\left(0,T;D_{A^{s-\frac{1}{2}}}\right)} \leq K\left\{\|\varphi_0\|_{D_{A^s}} + \|\varphi_1\|_{D_{A^{s-\frac{1}{2}}}} + \|f\|_{L^1\left(0,T;D_{A^{s-\frac{1}{2}}}\right)}\right\} \qquad (2.2.29)$$

qui exprime la dépendance continue de la solution φ par rapport aux données φ_0 ,$\varphi_1$et f.

Théorème 2.12. *Soit Ω un ouvert bornée à frontière polygonale de $\mathbb{R}^2$. Soit $\varphi_0 \in D_A$, $\varphi_1 \in V$ et $f \in L\left([0,T[\,;D_{A^{\frac{1}{2}}}\right)$ et soit u solution de l'équation des ondes obtenue par théorème 2.2.24. Alors il existe*

$$u_R \in C\left([0,T[\,;H^2(\Omega)\right)$$

et une fonction $c_j \in C^{\sigma_j}([0,T[)\,, \sigma_j < 1 - \frac{\pi}{\omega_j}$ tel que

$$u = u_R + \sum_{\omega_j \succ \pi} c_j(t)\,.\eta_j(r_j)\,r^{\frac{\pi}{\omega_j}} \sin\left(\frac{\pi\theta}{\omega_j}\right)$$

Preuve. cf.[3] . ■

2.3 Conditions mixtes au bord

Nous avons traité dans les paragraphes précédents le cas de condition de Dirichlet pure, et nous avons vu que pour déterminer le comportement singulier des dérivées secondes de la solution consistait à étudier localement les solutions d'un problème adjoint.

Dans le cas plus général d'un problème avec conditions mixtes au bord, nous allons appliquer la même méthode. Dans le § 2.3.1 nous donnons le cadre fonctionnel du problème ce qui conduit ensuite à l'orthogonal de l'image des solutions fortes. On montre dans § 2.3.2 que les éléments de cet espace orthogonal sont caractérisés par le problème homogène adjoint, ensuite pour le § 2.3.3 on cherche les solutions de ce problème au voisinage d'un sommet "*mixte*" (qui est l'intersection entre deux arêtes portant une condition de Dirichlet d'un coté et de Neumann de l'autre). En fait, c'est le seul cas qui donne un résultat différent comparé à un sommet "de Dirichlet ou de Neumann pur" dans la mesure où il provoque un comportement plus singulier de la solution.

2.3.1 Formulation variationnelle et solutions fortes

Etant donné un domaine polygonal comme en §1.2.3, on partage sa frontière Γ en deux sous ensembles,

$$\Gamma_{\mathcal{D}} = \bigcup_{j\in D} \Gamma_j \quad \text{et} \quad \Gamma_{\mathcal{N}} = \bigcup_{j\in N} \Gamma_j$$

qui portant respectivement le condition de Dirichlet et le condition de Neumann. On suppose $\mathcal{D}$ et $\mathcal{N}$ non vides et disjoints, et tels que $\mathcal{D} \cup \mathcal{N} = \{1, ..., N\}$. Le problème qur nous nous proposons de résoudre est alors le suivant:

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega, \tag{2.3.1}$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_j \text{ si } \ j \in \mathcal{D}, \tag{2.3.2}$$

$$\partial_{\nu_j} u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_j \text{ si } j \in \mathcal{N} \ . \tag{2.3.3}$$

L'interprétation variationnelle de ce problème nous conduit naturellement à recherche la solution u dans l'espace

$$\mathcal{D}_{mix} = \left\{ u \in H^1(\Omega) \ / \ \gamma_j u = 0 \text{ sur } \Gamma_j, \ \ j \in \mathcal{D} \right\}.$$

Si nous supposons que la donnée f appartient à $L^2(\Omega)$, la formulation variationnelle de (2.3.1)-(2.3.2)-(2.3.3) s'écrit

$$(\mathcal{P}_{mix}) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathcal{D}_{mix} \text{ telle que} \\ (\nabla u, \nabla v)_\Omega = (f, v) \ \ \forall v \in \mathcal{D}_{mix}. \end{cases}$$

Remarquant que grace à $\mathcal{D} \neq \varnothing$, la forme bilinéaire$(\nabla ., \nabla .)_\Omega$ définit une norme sur $\mathcal{D}_{mix}$ équivalents à la norme habituelle $\|.\|_{H_0^1(\Omega)}$. Par conséquent, quel que soit $f \in L^2(\Omega)$, il existe dans $\mathcal{D}_{mix}$ une unique solution du problème $\mathcal{P}_{mix}$.

Introduisons l'espace des solutions fortes pour le problème mixte:

$$\mathcal{D}^2_{mix} = \left\{ u \in H^2(\Omega) \ / \ \gamma_j u = 0 \ \text{ sur } \Gamma_j, \ \ j \in \mathcal{D} \ ; \ \partial_{\nu_j} u = 0 \ \text{ sur } \Gamma_j \text{ si } j \in \mathcal{N} \ \right\}. \tag{2.3.4}$$

Pour les élément de $\mathcal{D}^2_{mix}$, on a l'inégalité à *priori* (cf.[3]).

Théorème 2.13. *Soit Ω un polygone du plan. Alors, il existe une constante,$C(\Omega)$, telle que*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \ \ \forall u \in \mathcal{D}^2_{mix}. \tag{2.3.5}$$

Ansi nous retrouvons la même situation que pour les problèmes avec une seule condition aux limites, à savoir que l'image de $\mathcal{D}^2_{mix}$ par l'opérateur Δ est fermé dans $L^2(\Omega)$ ce qui nous conduit à considérer son orthogonal dans $L^2(\Omega)$,

$$\mathcal{N}_{mix} = \left\{ v \in D\left(\Delta, L^2(\Omega)\right) \ / \ \ (v, \Delta u)_\Omega = 0 \ \ \forall u \in \mathcal{D}^2_{mix} \right\}. \tag{2.3.6}$$

2.3.2 La caractérisation de $\mathcal{N}_{mix}$

En ce qui concerne l'orthogonal de l'image des solutions fortes, on montre de la même façon (cas de Dirichlet) que si v un élément de $\mathcal{N}_{mix}$, alors v est solution du problème homogène adjoint qui est le suivant :

$$\Delta v = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{2.3.7}$$

$$\gamma_j v = 0 \quad \text{au sens } \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_j) \ \text{ si } \ j \in \mathcal{D}\ , \tag{2.3.8}$$

$$\gamma_j \partial_{\nu_j} v = 0 \quad \text{au sens } \widetilde{H}^{-3/2}(\Gamma_j) \ \text{ si } \ j \in \mathcal{N}. \tag{2.3.9}$$

La proposition suivante dit que l'on a aussi la réciproque c'est à dire que si $v \in L^2(\Omega)$ vérifiant (2.3.7)-(2.3.8)-(2.3.9) on a

$$\int_\Omega v(x)\, \Delta u(x)\, dx = 0 \qquad \forall u \in \mathcal{D}^2_{mix}. \tag{2.3.10}$$

A cet effet, introduisons le sous-espace de $\mathcal{D}^2_{mix}$

$$\widetilde{V} = \left\{ u \in \mathcal{D}^2_{mix} \ / \quad \gamma_j u \in \widetilde{H}^{3/2}(\Gamma_j)\, ,\, \gamma_j \partial_{\nu_j} u \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_j) \right\}, \tag{2.3.11}$$

constitué de tous les éléments de $\mathcal{D}^2_{mix}$ pour lesquels l'application de la formulle de Green (proposition1.22) est justifiée. Rappelons dans un premier temps les conditions de raccord qui caractérisent l'image de $H^2(\Omega)$ par l'application de trace

$$\gamma : u \longmapsto \left\{ g_j = \quad \gamma_j u,\ h_j = \gamma_j \partial_{\nu_j} u \right\}_{j=1}^N$$

qui est le sous espace de $\displaystyle\prod_{j=0}^{N} \mathrm{H}^{3/2}(\Gamma_j) \times H^{1/2}(\Gamma_j)$ des éléments $\{g_j, h_j\}_{j=1}^N$ qui vérifient

$$g_j(M_j) = g_{j+1}(M_j)\, , \tag{2.3.12}$$

$$\partial_{\tau_j} u \equiv -\cos(\omega_j)\, \partial_{\tau_j+1} u + \sin(\omega_j)\, h_{j+1},\ \text{ en } M_j, \tag{2.3.13}$$

$$\partial_{n_j} u \equiv -\cos(\omega_j)\, h_{j+1} - \sin(\omega_j)\, \partial_{\tau_j+1} u,\ \text{ en } M_j. \tag{2.3.14}$$

Proposition 2.14. *Supposons que l'ensemble des coins à condition Neumann- Neumann est vide. Soit $v \in L^2(\Omega)$ vérifiant (2.3.7)-(2.3.8)-(2.3.9). Alors $v \in \mathcal{N}_{mix}$.*

Preuve. C.f[3] . ■

2.3.3 Le problème homogène adjoint

On a identifié les élément de$\mathcal{N}_{mix}$ comme les solutions du problème homogène, on regarde le comportement de ces solutions au voisinage d'un coin. Pour cela, passons en coordonnées polaires locales dans un voisinage

$$D_R = \{r(cos\theta, sin\theta) \ / \ 0 < r < R, \ \ \theta \in]0, \omega[\} \subseteq \Omega,$$

de M_j. Nous nous plaçons dans la même situation qu'au cours de la démonstration de la proposition 2.14 au paragraphe précédent, c'est-à-dire que $j \in \mathcal{N}$ et $j+1 \in \mathcal{D}$ où Γ_{j+1} est l'arête supportée par l'axe $\{y=0\}$(on omet l'indice j pour les coordonnées locales).

Etant donné $v \in D\left(\Delta, L^2\left(\Omega\right)\right)$, vérifiant (2.3.6)-(2.3.7)-(2.3.8), il vient que sur D_R, v est solution de

$$\frac{\partial^2 v}{\partial^2 r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\Lambda_{mix} v = 0, \quad \forall 0 < r < R, \ \ 0 < \theta < \omega, \tag{2.3.15}$$

$$v\left(r, 0\right) = \partial_\theta v\left(r, \omega\right) = 0 \ \ \forall \ 0 < r < R, \tag{2.3.16}$$

où Λ_{mix} désigne l'opérateur $-\frac{\partial^2}{\partial^2 \theta^2}$ sur $L^2\left(]0, \omega[\right)$ de domaine

$$\mathcal{H}\left(\Lambda_{mix}\right) = \left\{\varphi \in H^2\left(]0, \omega[\right) \ \ / \ \ \varphi\left(0\right) = \varphi'\left(\omega\right) = 0\right\}.$$

Λ_{mix} est un opérateur auto-adjoint positif à résolvante compacte dont les fonctions et valeurs propres sont données par

$$\varphi_m\left(\theta\right) = \sqrt{2/\omega}\sin\left(\lambda_m \theta\right) \ \text{ et } \lambda_m = \frac{\left(m - 1/2\right)\pi}{\omega}, \ \ m \geq 1. \tag{2.3.17}$$

Ainsi, l'ensemble des fonctions propres, $\{\varphi_m\}_{m\geq 1}$ forme une base orthonormé de $L^2\left(]0, \omega[\right)$.

Décomposons maintenant v sur cette basse ce qui donne

$$v\left(r, \theta\right) = \sum_{m \geq 1} v_m\left(r\right)\varphi_m\left(\theta\right)$$

avec des fonctions $v_m\left(r\right)$ régulières pour $r > 0$. L'équation (2.3.15) conduit ensuite à une équation différentielle pour les v_m qui implique

$$v_m\left(r\right) = \alpha_m r^{\lambda_m} + \beta_m r^{-\lambda_m} \ \ \forall m \geq 1. \tag{2.3.18}$$

C'est alors que la situation change. Rappelons que la condition $v \in L^2\left(D_R\right)$ implique $\beta_m = 0$ dès que $\lambda_m \geq 1$. Dans le cas d'une seule condition au bord (Dirichlet ou Neumann pur), cela signifie $\beta_m = 0 \ \ \forall m \geq 2$ pour un angle de mesure supérieure à π et $\beta_m = 0$ $\forall m \geq 1$ si $\omega < \pi$.

Quand aux conditions mixtes, il faut distinguer trois cas selon la mesure de l'angle en considération :

1. Si $\omega_j \leq \frac{\pi}{2}$, nous avons $\lambda_1 = \frac{\pi}{2\omega} \geq 1$. Par conséquent, $\beta_m = 0\ \forall m \geq 1$ et $v \in H^1(D_R)$.

2. Si $\frac{\pi}{2} < \omega_j \leq \frac{3\pi}{2}$, il vient que $\lambda_2 = \frac{3\pi}{2\omega} \geq 1 > \frac{\pi}{2\omega} = \lambda_1$. On a $\beta_m = 0\ \forall m \geq 2$ et
$$v - \beta_1 r^{-\frac{\pi}{2\omega}} \sin\left(\frac{\pi\theta}{2\omega}\right) \in H^1(D_{R'})\ \forall R' < R.$$

3. Si $\omega_j > \frac{3\pi}{2}$, les deux premières valeurs propres sont inférieures à 1 de sorte que $\beta_m = 0$ $\forall m \geq 3$. On a
$$v - \beta_1 r^{-\frac{\pi}{2\omega}} \sin\left(\frac{\pi\theta}{2\omega}\right) - \beta_2 r^{-\frac{3\pi}{2\omega}} \sin\left(\frac{3\pi\theta}{2\omega}\right) \in H^1(D_{R'})\ \forall R' < R.$$

La proposition suivante résume les trois cas.

Proposition 2.15. *Soit $v \in \mathcal{N}_{mix}$. Alors, au voisinage d'un sommet avec conditions mixtes, on a*
$$v(r,\theta) - \sum_{0<\lambda_m<1} \beta_m r^{-\lambda_m} \sin(\lambda_m \theta) \in H^1(D_{R'})\ \forall R' < R. \tag{2.3.19}$$
où la sommation porte sur respectivement 0, 1, ou 2 termes.

Remarque 2.7. *En ce qui concerne la dimention de l'espace $\mathcal{N}_{mix}$ et par conséquent le nombre de fonctions singulières à prendre en compte, on peut dire que*

1. la contribution d'un coin de type Dirichlet-Dirichle tresp. Neumann-Neumann est 0 si $\omega_j < \pi$ et 1 si $\omega_j > \pi$.

2. la contribution d'un coin "mixte" est 0 si, $\omega_j \leq \frac{\pi}{2}$,1 si $\frac{\pi}{2} < \omega_j \leq \frac{3\pi}{2}$ et 2 si $\omega_j > \frac{3\pi}{2}$.

La suite étant tous à fait identique à la démarche suivie pour le cas d'un problème de Dirichlet pur, nous nous limitons à énoncer le théorème suivant qui donne la décomposition de la solution de $\mathcal{P}_{mix}$ en une partie de classe H^2 et une partie singulière.

Théorème 2.16. *Soit Ω un polygone du plan. Quel que soit f dans $L^2(\Omega)$, il existe une fonction $u \in \mathcal{D}_{mix}$, unique solution de $\mathcal{P}_{mix}$. De plus, il existe des nombres réels, c_{jm}, déterminés de façons unique, et tels que.*
$$u - \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{0<\lambda_m<1} c_{j,m} r_j^{\lambda_{j,m}} \varphi_m(\theta_j) \right) \in H^2(\Omega)$$

2.3.4 Conditions mixtes dans un ouvert convexe

On va indiquer ici les conditions géométriques sur un polygone qui assurent que l'analogue du théorème 2.10 est valable pour le problème mêlé. On obtiendra des solutions dans $H^s(\Omega)$ avec $s > 3/2$ ce qui assure la possibilité de raisonner comme dans le paragarphe2.2. Malheureusement ces conditions excluent les domaines à frontière régulière. On définie s_1, le plus petit des nombres

$$\begin{aligned} &1+\frac{\pi}{2\omega_{j,l}}, \qquad \overline{\Gamma_j}\cap\ \overline{\Gamma_l}\neq\varnothing,\ j\in D, l\in N,\\ &1+\frac{\pi}{2\omega_{j,l}}, \qquad \overline{\Gamma_j}\cap\ \overline{\Gamma_l}\neq\varnothing,\ j\in N, l\in D.\end{aligned}$$

Lemme 2.17. *On a $s_1 > \frac{3}{2}$ dès que $\omega_{j,l} < \pi$ (Ω est convexe) ,pour tout les couples j, l tels que $\overline{\Gamma_j}\cap\overline{\Gamma_l}\neq\varnothing, j\in D, l\in N$ ou $j\in N, l\in D$.*

Preuve. Le condition au bord de Neumann à un sens si : $s-\frac{3}{2}>0$ car $s>0$,donc $s>\frac{3}{2}$,ce qui vrais pour $s_1>\frac{3}{2}\Rightarrow 1+\frac{\pi}{2\omega_{j,l}}>\frac{3}{2}$, c'est-à-dire $\omega_{j,l}<\pi$ (Ω convexe). ■

Théorème 2.18. *Pour $f\in L^2(\Omega)$, u solution de (2.3.1)-(2.3.2)-(2.3.3) vérifié*

$$u\in H^s(\Omega)$$

avec $s\leq 2$ et $s<s_1$.

Preuve. *La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 2.10.* ■

Résolution faible de l'équation des ondes

La caractérisation des domaines des puissances fractionnaires de l'opérateur A reste valable et encore $D_{A^{\frac{1}{2}}}=V$.

L'équation des ondes (avec conditions mêlées homogènes sur Σ) sera réécrite

$$\left\{\begin{array}{c}\varphi\in C([0,T],V)\cap C^1([0,T],L^2(\Omega))\\ \varphi''(t)-\Delta\varphi(t)=f(t)\quad ,t\in[0,T]\\ \varphi(0)=\varphi_0,\ \varphi'(0)=\varphi_1\\ \varphi\in V,\quad \partial\varphi/\partial\nu=0 \text{ sur } \Gamma^N\end{array}\right. \tag{2.3.20}$$

où à priori $\varphi_0\in V$, $\varphi_1\in L^2(\Omega)$, $f\in L^1([0,T];L^2(\Omega))$.

Théorème 2.19. *Pour* $\varphi_0 \in D_{A^s}$, $\varphi_1 \in D_{A^{s-\frac{1}{2}}}$ *et* $f \in L^1\left([0,T]\,; D_{A^{s-\frac{1}{2}}}\right)$ *avec* $s \geq \frac{1}{2}$, *le problème* (2.3.20) *admet unique solution* φ *qui vérifie de plus*

$$\varphi \in C\left([0,T], D_{A^s}\right) \cap C^1\left([0,T], D_{A^{s-\frac{1}{2}}}\right)$$

Preuve. *La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 2.11.* ■

2.3.5 Conditions mixtes dans un ouvert régulier

On considère à présent un ouvert Ω borné à frontière de classe C^2 dans le plan . Sa frontière Γ est réunion de l'ouvert Γ^D qui potera la condition de Dirichlet et l'ouvert Γ^N qui portera la condition de Neumann et d'un ensemble fini Σ "les sommet ". On partage Σ en deux ensembles disjoints Σ^c et Σ^s comme suit :

1. $M_j \in \Sigma^c$ si M_j en aval de Γ^D en suivant l'orientation positive de Γ,
2. $M_j \in \Sigma^s$ si M_j en aval de Γ^N en suivant l'orientation positive de Γ.

Nous donnons le comportement de v solution de (2.3.6)-(2.3.7)-(2.3.8) en chaque sommet M_j où $\omega_j = \pi$. Grâce à (2.3.17) les fonctions et les valeurs propres sont données par

$$\varphi_m(\theta) = \sqrt{2/\pi}\sin\ (m-1/2)\,\theta \ \text{ et } \lambda_m = (m-1/2)\,,\ m \geq 1,$$

et le comportement singulier de v est alors déterminé d'après (2.3.19)

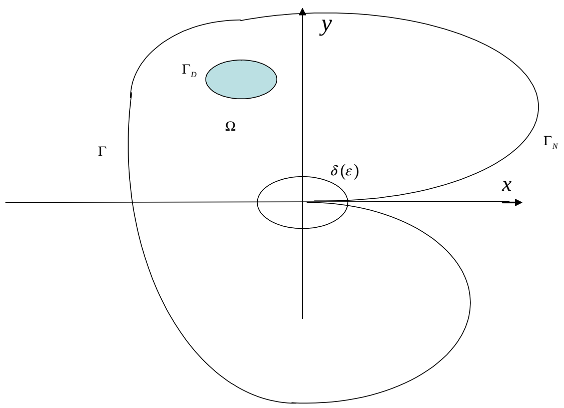
$$v - \beta_1 r^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \in H^1\left(D_{R'}\right)\ \forall R' < R,$$

et la dimention de $\mathcal{N}_{mix}$ dans ce cas la est égale à 1, d'où le théorème qui donne la décomposition de la solution de $\mathcal{P}_{mix}$ en une partie de classe H^2 et une partie singulière.

Théorème 2.20. *Soit* Ω *un polygone du plan. Quel que soit* f *dans* $L^2(\Omega)$, *il existe une fonction* $u \in \mathcal{D}_{mix}$, *unique solution de* $\mathcal{P}_{mix}$. *De plus, il existe des nombres réels,* c_{jm}, *déterminés de façons unique, et tels que.*

$$u - \sum_{j=1}^{N} c_{j,m} r_j^{(m-1/2)} \varphi_m(\theta_j) \in H^2(\Omega)$$

Remarque 2.8. *Le théorème 2.19 reste valable sans changement à condition de remplacer* $H_0^1(\Omega)$ *par* V.



2.3.6 Un domaine modèle avec fissure

Pour éviter de mettre ensemble touts les difficultés on a donc supposé que Ω est un ouvert de classe C^2 en dehors d'un unique point de rebroussement localisé à l'origine de demi-tangente l'axe (Ox). On a supposé également que $\overline{\Gamma_j} \cap \overline{\Gamma_l} = \varnothing$, $j \in D$, $l \in N$ ou $j \in N$, $l \in D$, et que $\Gamma_{\mathcal{D}}$ non vide pour évité des problème de non unicité (cas seulement condition de Neumann).

On se contentera ici de considérer un cas modèle en dimension deux illustré par la figure ci-dessous. Le problème (2.3.1)-(2.3.2)-(2.3.3) admet une solution unique d'après théorème de Lax-Milgram, et on a le même résultats de régularité des solution de l'équation des ondes comme au cas d'un domaine régulier avec conditions mêlées. Grâce à (2.3.17) les fonctions et les valeurs propres, la dimension de $\mathcal{N}_{mix}$ et théorème de décomposition de la solution de $\mathcal{P}_{mix}$ sont données et reste inchange comme au cas à frontière régulière. Voir la figure suivante:

$Fig1.4$

Chapitre 3

Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes dans un domaine polygonal

Sommaire

3.1 Introduction

On considère un domaine polygonal borné de frontièrer Γet soit T un réel strictement positif. Nous étudions la contrôlabilité exacte frontière des solutions de l'équation des ondes dans un domaine polygonal.

la contrôlabilité exacte consiste à amener le système d'un état initial connu à un état final voulu, par une action sur ses conditions au bord par la mise en œuvre de la méthode H.U.M (Hilbert Uniqueness Method) de J.L.Lions[2]. Au paragraphe3.2, on établit un résultat de contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes dans le cas du contrôle frontière du type Dirichlet. Ce problème servant comme un modèle dans la suite du chapitre. Le paragraphe (3.3) est consacré à résoudre le problème de contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes avec un contrôle frontière du type Dirichlet-Neumann, on distinguera deux cas, cas d'un polygone convexe (§3.3.1), puis cas d'un ouvert regulier (§3.3.2). En particulière au (§3.3.3) on établit le résultat de contrôlabilité exacte, lorsque le domaine contenant une fissure.

3.2 Contrôlabilité exacte avec condition de Dirichlet

Cette étude se présent comme suite.

3.2.1 Position du problème

1. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$à frontière polygonale Γ. Pour T >0 , on pose $Q_T = \Omega \times]0,T[$ et $\Sigma_T = \Gamma \times]0,T[$. pour des données de Cauchy u_0 et u_1 définies sur Ω et une donnée de Dirichlet v définie sur Σ_T , on considère la solution φ du problème de Cauchy-Dirichlet pour l'équation des ondes :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 \quad \text{dans } Q_T \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1 \quad \text{pour } t = 0 \\ u = v \quad \text{sur } \Sigma_T \end{cases} \tag{3.2.1}$$

2. Le problème de la contrôlabilité exacte consiste à chercher un temps T tel que pour toutes données de Cauchy , il existe au moins une donnée de Dirichlet telle que

$$u(T) = u'(T) = 0$$

3. On pose $V = H_0^1(\Omega)$. On rappelle que l'opérateur A décrit par

$$\begin{cases} A : D(A) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \\ \qquad\qquad\qquad u \longmapsto -\Delta u \end{cases}$$

de domaine

$$D(A) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega), \text{tel que } \Delta u \in L^2(\Omega) \right\}.$$

On sait d'après Lions(1961) que

$$D\left(A^{\frac{1}{2}}\right) = H_0^1(\Omega)$$

On note

$$H^{-1}(\Omega) \equiv \text{dual topologique de } H_0^1(\Omega)$$

La résolution du problème de contrôlabilité exacte équivaut à résoudre le problème suivant : étant donné $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, peut-on trouver $v \in L^2(\Gamma \times]0, T[)$ tel que la solution u de (3.2.1) vérifie

$$u(T) = u'(T) = 0$$

4. J.L.Lions a donné une méthode systématique pour résoudre le problème de contrôlabilité exacte dite méthode d'unicité hilbertienne (**HUM**) .

5. Les propriété de contrôlabilité exacte est connue pour toute domaine borné à frontière régulier. Notre objectif est de prouve les même propriété dans un polygone .

3.2.2 Résultats préliminaires pour l'équation des ondes

On basant sur les résultats de [2] et [4] . Nous conservons les notations cohérentes avec celle du chapitre deux. Considérons l'équation des ondes avec condition de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} \varphi'' - \Delta\varphi = f \qquad t \in [0, T] \\ \varphi(0) = \varphi_0 \\ \varphi'(0) = \varphi_1 \\ \varphi = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T \end{cases} \tag{3.2.2}$$

où $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi_1 \in L^2(\Omega)$, $f \in X$ avec $X = L^1(0, T; L^2(\Omega))$où

$$V = \left\{\varphi \in H^1(\Omega) \quad / \; \varphi = 0 \text{ sur}\Gamma \right\}, \; V' \text{ espace dual de } V.$$

On rappelle les deux résultats de régularité suivante :

1. Pour $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi_1 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ on a

$$\varphi \in C([0, T], V) \cap C^1\left([0, T], L^2(\Omega)\right)$$

2. Pour $\varphi_0 \in H^2(\Omega) \cap V$, $\varphi_1 \in V$, $f \in L^1(0, T; V)$ on a

$$\varphi \in C([0, T], H^s(\Omega) \cap V) \cap C^1\left([0, T], L^2(\Omega)\right)$$

pour un s tel que $\frac{3}{2} < s \leq 2$.

On sait pour un ouvert regulier [2] que toute solution φ de (3.2.2) admet unique solution tel que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma_T)$$

et que $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ dépend continûment dans $L^2(\Sigma_T)$ par rapport aux données $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi_1 \in L^2(\Omega)$, $f \in X$. Dans le cas d'un ouvert polygonal on a même résultat on utilise une technique classique à l'aide de la méthode des multiplicateurs .

Par la suite, on établit une identité qui permettra d'obtenir les éstimations a priori nécessaires dans l'application de la méthode de*H.U.M*'. On utilise des techniques de calculs utiliser par J.L.Lions(*c.f.* [2]) dans le cas d'un domaine de frontière Γ de classe C^2 ou d'un convexe. Ceci s'applique au cas d'un polygone grâce au résultats de P.Grisvard ([4]).

L'identité directe

soit φ solution de (3.2.2) de l'équation des ondes avec condition de Dirichlet homogène et soit $(\varphi_0, \varphi_1) \in V \times L^2(\Omega)$, $f \in L^1([0,T]; L^2(\Omega))$ et m un champ de vecteurs dit multiplicateur définit par

$$m = (x - x_0), \quad m \in W^{1,\infty}(\Omega)^2 \ ,$$

où x_0 est convenablement choisi.

Lemme 3.1. *soit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\Delta\varphi \in L^2(\Omega)$, on a*

$$\begin{aligned} \textstyle\int_Q \Delta\varphi m \nabla\varphi dxdt = -\sum_{k,l\geq 1}^{2} \int_\Omega D_k m_l D_k\varphi D_l\varphi dx + \tfrac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div} m. \left|\nabla\varphi\right|^2 dx \\ +\tfrac{1}{2}\int_\Gamma m.\nu \left|\tfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Preuve. Si on multiple l'équation $\varphi'' - \Delta\varphi = f$ de (2) par $m\,.\nabla\varphi$ et intégrant sur $Q = \Omega \times [0,T]$ on trouve

$$\int_Q D_t^2\varphi m.\nabla\varphi dxdt - \int_Q \Delta\varphi m\nabla\varphi dxdt = \int_Q f.m.\nabla\varphi dxdt$$

1. Si l'ouvert est convexe ($\omega < \pi$), le domaine D_A est dans $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Pour $\varphi \in H^2(\Omega)$ et par l'application de formule de Green on a

$$\int_Q \Delta\varphi m\nabla\varphi dxdt = \sum_{k,l\geq 1}^{2} \int_\Omega D_k^2\varphi m_l D_l\varphi dx$$

$$= -\sum_{k,l\geq 1}^{2} \int_{\Omega} D_k\varphi D_k \left(m_l D_l \varphi\right) dx + \sum_{k,l\geq 1}^{2} \int_{\Gamma} \nu_k D_k \varphi m_l D_l \varphi d\sigma$$

$$= -\sum_{k,l\geq 1}^{2} \int_{\Omega} D_k\varphi \left(D_k m_l . D_l\varphi + m_l D_k \left(D_l \varphi\right)\right) + \sum_{k,l\geq 1}^{2} \int_{\Gamma} \nu_k D_k \varphi m_l D_l \varphi d\sigma$$

$$= -\sum_{k,l\geq 1}^{2} \int_{\Omega} D_k m_l D_k \varphi D_l \varphi dx - \sum_{k,l\geq 1}^{2} \frac{1}{2} \int_{\Omega} m_l D_l \left(D_k \varphi\right)^2 dx + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right) m.\nabla \varphi d\sigma$$

une seconde application de la formule de Green donne:

$$\begin{aligned} \int_Q \Delta\varphi m \nabla\varphi dxdt \quad = \quad & -\sum_{k,l\geq 1}^{2} \int_{\Omega} D_k m_l D_k \varphi D_l \varphi dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} m. \left|\nabla\varphi\right|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} m.\nu \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right|^2 d\sigma \\ & + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right) m.\nabla \varphi d\sigma \end{aligned}$$

2. Considérons $s > \frac{3}{2}$.

On sait d'après le théorème 2.10, que

$$\varphi \in H^s(\Omega)$$

où

$$\frac{3}{2} < s < s_0 \quad , s \leq 2$$

et le nombre s_0 dépend de Ω. Tous les termes de l'identité (3.2.3)ont un sens pour $\varphi \in H^s(\Omega)$ et dépendent continûment de φ dans cet espace. En effet :

$$\Delta\varphi \in H^{s-2}(\Omega)$$

et

$$m.\nabla\varphi \in H^{s-1}(\Omega) \subset H^{2-s}(\Omega) = H_0^{2-s}(\Omega)$$

avec $s - 1 > 2 - s$ et $2 - s < \frac{1}{2}$, et par conséquent les espaces

$$H^{2-s}(\Omega) = H_0^{2-s}(\Omega)$$

et

$$H^{s-2}(\Omega)$$

sont en dualité, d'où

$$\langle \Delta\varphi, m.\nabla\varphi \rangle = \int_Q \Delta\varphi . m \nabla\varphi dxdt.$$

Concernant le terme à droite dans (3.2.3), les intégrales de volume a un sens et dépend continûment de φ dans $H^1(\Omega)$ .Pour les intégrales de surface dépend continûment de φ dans $H^s(\Omega)$ car d'aprés les théorèmes de trace

$$\nabla\varphi \in \left(H^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma)\right)^2 \subset \left(L^2(\Gamma)\right)^2$$

et

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \in H^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$$

on a donc

$$\begin{aligned}\langle\Delta\varphi, m.\nabla\varphi\rangle &= -\sum_{k,l\geq 1}^{2}\int_{\Omega} D_k m_l D_k\varphi D_l\varphi dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} \operatorname{div} m. \left|\nabla\varphi\right|^2 dx \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_{\Gamma} m.\nu\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma + \int_{\Gamma}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right) m.\nabla\varphi d\sigma\end{aligned}$$

Enfin cette identité est applicable à $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\Delta\varphi \in L^2(\Omega)$ puisque $\varphi \in H^s(\Omega)$ pour $s > \frac{3}{2}$ .Comme $\varphi = 0$ sur Γ ,$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\nu$ (gradient tangentielle est nulle) on a

$$\int_Q \Delta\varphi m\nabla\varphi dxdt = -\sum_{k,l\geq 1}^{2}\int_{\Omega} D_k m_l D_k\varphi D_l\varphi dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} \operatorname{div} m. \left|\nabla\varphi\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma} m.\nu\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma$$

■

Proposition 3.2. *Pour* $\varphi \in C([0,T], D_A) \cap C^1([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,T], L^2(\Omega))$ *solution de (3.2.2) on a*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\Sigma} m.\nu\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt &= -\int_{Q} f.m\nabla\varphi dxdt + \left[\int_{\Omega} D_t\varphi m\nabla\varphi dx\right]_0^T \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_{Q} \operatorname{div} m\left\{(D_t\varphi)^2 - |\nabla\varphi|^2\right\} dxdt + \sum_{k,l\geq 1}^{2}\int_{Q} D_k m_l D_k\varphi D_l\varphi dxdt.\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Preuve. Si on multiple l'équation $D_t^2\varphi - \Delta\varphi = f$ par $m\nabla\varphi$ on trouve

$$\int_{Q} D_t^2\varphi.m.\nabla\varphi dxdt - \int_Q \Delta\varphi.m.\nabla\varphi dxdt = \int_Q f.m.\nabla\varphi dxdt$$

$$\int\limits_Q D_t^2\varphi.m.\nabla\varphi dxdt = \left[\int\limits_\Omega D_t\varphi m\nabla\varphi dx\right]_0^T - \int_Q D_t\varphi.m.\nabla\varphi.D_t\varphi$$

(intégration par rapport à t)

$$= \left[\int\limits_\Omega D_t\varphi m\nabla\varphi dx\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \operatorname{div} m.\left(D_t\varphi\right)^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_\Sigma m.\nu\left(D_t\varphi\right)^2 d\sigma dt$$

car

$$\int\limits_Q D_t\varphi.m.\nabla\left(D_t\varphi\right)dxdt = -\frac{1}{2}\int_Q \operatorname{div} m.\left(D_t\varphi\right)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_\Sigma m.\nu\left(D_t\varphi\right)^2 d\sigma dt$$

et pour que

$$D_t\varphi = 0 \qquad sur\Sigma \;\; car\varphi = 0sur\ \Sigma$$

on a

$$\int\limits_Q D_t^2\varphi.m.\nabla\varphi dxdt = \left[\int\limits_\Omega D_t\varphi m\nabla\varphi dx\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \operatorname{div} m.\left(D_t\varphi\right)^2 dxdt$$

L'identité (3.2.3) donne

$$\left[\int\limits_\Omega D_t\varphi m\nabla\varphi dx\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \operatorname{div} m.\left(D_t\varphi\right)^2 dxdt + \sum_{k,l\geq 1}^{2}\int\limits_\Omega D_k m_l D_k\varphi D_l\varphi dx$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \operatorname{div} m.\left|\nabla\varphi\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma m.\nu\left|\nabla\varphi\right|^2 d\sigma - \int\limits_\Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}.m.\nabla\varphi d\sigma$$

$$= \sum_{k,l\geq 1}^{2}\int\limits_Q D_k m_l D_k\varphi D_l\varphi dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_Q \operatorname{div} m\left\{\left(D_t\varphi\right)^2 - \left|\nabla\varphi\right|^2\right\}dxdt$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_\Sigma m.\nu\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt + \left[\int\limits_\Omega D_t\varphi m\nabla\varphi dx\right]_0^T$$

$$= \int_Q f.m.\nabla\varphi dxdt$$

d'ou (3.2.4). ■

Remarque 3.1. *1. Pour tout* φ *solution de (3.2.2) vérifiant* $\varphi \in \cap C\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right) \cap C^1\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right)$ *on a*

$$E\left(t\right) \leq c\left\{E\left(0\right) + \left(\int\limits_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 ds\right)^2\right\}$$

où $E(t)$ *l'énergie au temps* t *et* c *constante strictement posititive. En effet: On multiple l'équation* $D_t^2\varphi - \Delta\varphi = f$ *par* $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ *et on intègre par parti sur* Ω*. On obtient*

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_\Omega f.\frac{\partial\varphi}{\partial t}dx \qquad \forall t \geq 0$$

On intègre maintenant sur $]0,t[$:

$$\begin{aligned} E(t) &\leq E(0) + \int_{\Omega\times]0,t[} f.\tfrac{\partial\varphi}{\partial t}dx \qquad \forall t \geq 0 \\ &\leq E(0) + \int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)} \left\|\tfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)} ds \end{aligned}$$

$\forall t \geq 0$

$$\leq E(0) + \sup_{]0,t[} \left\|\tfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)} ds\right) \quad \forall t \in]0,t_0[.$$

En utilisant l'inégalité :

$$a.b \leq \alpha.a^2 + \frac{1}{4\alpha}b^2 \quad \forall\alpha > 0.......(*)$$

L'identité précédente s'écrit :

$$E(t) \leq E(0) + \alpha\left(\sup_{]0,t[}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 + \frac{1}{4\alpha}\left(\int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)} ds\right)^2$$

et par suite

$$\sup_{]0,t[} E(t) - \alpha\left(\sup_{]0,t[}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 \leq \frac{1}{4\alpha}\left(\int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)} ds\right)^2$$

Il en découle pour α petit :

$$E(t_0) \leq c\left\{E(0) + \left(\int_0^T \|f\|^2_{L^2(\Omega)} ds\right)^2\right\} \quad \forall t_0 \geq 0$$

où $\alpha\left(\sup_{]0,t[}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 < \mu \ll 0$ et $c > 0$.

2. Pour $f = 0$, (3.2.4) devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Sigma m.\nu\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt &= \sum_{k,l\geq 1}^2 \int_Q D_k m_l D_k\varphi D_l\varphi dx dt + \frac{1}{2}\int_Q \operatorname{div} m\left\{(D_t\varphi)^2 - |\nabla\varphi|^2\right\} dx dt \\ &+ \left[\int_\Omega D_t\varphi m\nabla\varphi dx\right]_0^T. \end{aligned}$$

Lemme 3.3. *Soit φ solution de (3.2.2) alors*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$$

et $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$ dépend continûment dans $L^2(\Sigma)$ des données $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega), \varphi_1 \in L^2(\Omega)$, $f \in X$

Preuve. On choisi m tel que

$$\min_\Gamma m.\nu \geq \delta > 0 \quad \text{et} \quad \max_\Omega \|m\| = \mathrm{M}$$

d'après (lemme 3.2) Lions[2]. Si on note

$$\Sigma^+(x_0) = \{x \in \ \Sigma, \ m.\upsilon > 0\}$$

on obtient d'aprés (3.2.4) avec $f = 0$:

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right|^2 d\sigma dt \ &\leq \ C\left\{-\int_Q f.m.\nabla\varphi dxdt + \left[\int_\Omega D_t\varphi m \nabla\varphi dx\right]_0^T \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\int_Q \operatorname{div} m\left\{(D_t\varphi)^2 - |\nabla\varphi|^2\right\} dxdt\right\} + \sum_{k,l\geq 1}^{2}\int_Q D_k m_l D_k\varphi D_l\varphi dxdt \end{aligned}$$

En effet : on va appliquer la proposition 3.2 avec un choix particulier de multiplicateur m où

$$\underset{\Gamma}{\mathrm{Min}}\ m.\nu > 0.$$

Pour $\varphi \in C([0,T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,T]; L^2(\Omega))$ solution de (3.2.2) on a

$$\begin{aligned} \left|-\int_Q f.m.\nabla\varphi dxdt\right| \ &\leq \ \max_{x\in\Omega}\|m\| \int_0^T \left(\int_\Omega |f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \ M.\int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)} . \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} dt \leq M.\int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)} .E^{\frac{1}{2}}(t) dt \\ &\leq \ M.\int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)} .c^{\frac{1}{2}}\left(E^{\frac{1}{2}}(0) + \int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 ds\right) dt \\ &= \ M.c^{\frac{1}{2}}.E^{\frac{1}{2}}(0)\left(\int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}\right) + M.c^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 ds\right)^2 \\ &\leq \ M.c^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}E(0) + \frac{1}{2}\left(\int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)} ds\right)^2\right) + M.c^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 ds\right)^2 \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ dans } (*)$$

$$\begin{aligned}
&= M.c^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} E(0) + \frac{3}{2} \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}\, ds \right)^2 \right) \\
&\leq \frac{3M.c^{\frac{1}{2}}}{2} \left(E(0) + \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}\, ds \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned}
\left| \left[\int_\Omega D_t\varphi m \nabla\varphi dx \right]_0^T \right| &\leq \left[\|D_t\varphi\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|m.\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \right]_{/t=T} + \left[\|D_t\varphi\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|m.\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \right]_{/t=0} \\
&\leq 2.M.E(t) \leq 2.M. \left\{ E(0) + \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}\, ds \right)^2 \right\}.
\end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2} \int_Q \operatorname{div} m \left\{ (D_t\varphi)^2 - |\nabla\varphi|^2 \right\} dxdt \right| &= \left| \left[\int_Q D_t\varphi.\varphi dx \right]_0^T \right|, \ \operatorname{div} m = 2 \\
&\leq \left[\|D_t\varphi\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \right]_{t=T} + \left[\|D_t\varphi\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \right]_{t=0} \\
&\leq \frac{1}{\lambda} \left[\|D_t\varphi\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\varphi\|_{L^2(\Omega)/t=T} + \|D_t\varphi\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\varphi\|_{L^2(\Omega)t=0} \right] \\
&\leq \frac{2}{\lambda} E(t) \text{ où } \lambda > 0 \text{ (constante de poincaré)}. \\
&\leq \frac{2}{\lambda} \left\{ E(0) + \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}\, ds \right)^2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k,l \geq 1}^{2} \int_Q D_k m_l D_k\varphi D_l\varphi dxdt \right| &\leq \int_Q |\nabla\varphi|^2 dxdt, \text{ où } D_k m_l = \delta_{k,l} \\
&\leq TE(t) \\
&\leq T \left\{ E(0) + \left(\int_0^T \|f\|_{L^2(\Omega)}\, ds \right)^2 \right\}
\end{aligned}$$

où $\delta_{k,l}$ est le symbole de Kronecker. Finalement on a :

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt &\leq \left(\frac{3M.c^{\frac{1}{2}}}{2}+2M+\frac{2}{\lambda}+T\right).\left\{E(0)+\left(\int_0^T\|f\|_{L^2(\Omega)}ds\right)^2\right\}\\ &\leq C.\left\{E(0)+\left(\int_0^T\|f\|_{L^2(\Omega)}ds\right)^2\right\}\text{où } C=\left(\frac{3M.c^{\frac{1}{2}}}{2}+2M+\frac{2}{\lambda}+T\right)>0\\ &< +\infty \text{ , d'ou le résultat.}\end{aligned}$$

■

Remarque 3.2. *D'aprés l'identité3.2.4 et le lemme 3.3 , pour tout* $\varphi\in C\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)\cap C^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$

$$\left(\int_{\Sigma}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt\right)^{\frac{1}{2}}\leq\sqrt{C}\left\{\|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)}+\|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)}+\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right\},$$

En effet : L'inégalité précédente est vraie pour $\varphi\in C(0,T;V)\cap C^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ *grâce au résultat de densité de* $H^2(\Omega)\cap V$ *dansV (C.f [3]). En effet : Il existe une suite de fonctions*

$$\varphi_m\in C\left(0,T;H^2(\Omega)\cap V\right)\cap C^1(0,T;V)\cap C^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$

qui converge vers φ *lorsque* $m\longrightarrow+\infty$ *dans*

$$C(0,T;V)\cap C^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$

et telle que

$$\varphi_m''-\Delta\varphi_m\in C(0,T;V)$$

et $\varphi_m''-\Delta\varphi_m$ *converge vers* $\varphi''-\Delta\varphi$ *dans* $L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$. *Pour cela, il suffit d'approcher* φ_0, φ_1 *et* f *par des données plus régulières*

$$\varphi_0^m\in H^2(\Omega)\cap V,\quad \varphi_1^m\in V\quad et\quad f_m\in L^1(0,T;V).$$

telle que

$$\int_{\Sigma}\left|\frac{\partial\varphi_m}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt\leq\sqrt{C}\left(\|\varphi_0^m\|_{H_0^1(\Omega)}+\|\varphi_1^m\|_{L^2(\Omega)}+\|f_m\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right)^2$$

Lorsque $m\longrightarrow+\infty$ *, on obtient le résultat .*

Définition 3.1. *On dira que* $u \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$ *est solution faible (au sens de la transposition) de l'équation des ondes homogène avec des données de cauchy* $u_0 \in L^2(\Omega), u_1 \in H^{-1}(\Omega)$*et donnée de Dirichlet* $v \in L^2(\Gamma \times [0,T])$ *si il existe* $\psi_0 \in L^2(\Omega), \psi_1 \in H^{-1}(\Omega)$*tels que l'on ait*

$$\int_Q u.f dxdt - \langle \psi_0, \varphi_1 \rangle + \langle \psi_1, \varphi_0 \rangle = \langle u_1, \varphi_0 \rangle - \langle u_0, \varphi_1 \rangle - \int_\Sigma v \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma dt \tag{3.2.5}$$

pour tout triplet $f \in X$, $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi_1 \in L^2(\Omega)$ *où* φ *vérifie*

$$\varphi \in C\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$

$$\varphi^{''}(t) - \Delta\varphi(t) = f\ \ (t) \tag{3.2.6}$$

$$\varphi(T) = \varphi_0, \quad \varphi^{'}(T) = \varphi_1.$$

L'identité (3.2.3) *montre en fait que*

$$L^* u = \alpha$$

où

$$L : D_L = \left\{\varphi \in C\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right); \varphi^{''} - \Delta\varphi \in X\right\} \to X \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

$$\varphi \longmapsto L\varphi = \left\{\varphi^{''} - \Delta\varphi, \varphi(T), \varphi^{'}(T)\right\}$$

et

$$\alpha : \varphi \longmapsto \langle u_1, \varphi_0 \rangle - \langle u_0, \varphi_1 \rangle - \int_\Sigma v \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma dt$$

qui est continue sur D_L *grâce au lemme* 3.3 *théorème2.11 implique que* L *est un isomorphisme de* D_L *sur* $X \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$*et par conséquent* L^* *est un isomorphisme de* $X^{'} \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *sur le dual de* D_L *, ceci montre l'existence et l'unicité de*$\left\{u, \psi_{1,}\psi_0\right\} \in X^{'} \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *solution de (3.2.5).*

Théorème 3.4. *Étant donné* $u_0 \in L^2(\Omega), u_1 \in H^{-1}(\Omega)$ *et* $v \in L^2(\Sigma)$, *il existe un triplet unique*

$$u \in C\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \cap C^1\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right), \quad \psi_0 \in L^2(\Omega), \psi_1 \in H^{-1}(\Omega)$$

solution de (3.2.5).

Preuve. Montrons qu'il existe $u \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$ solution de

$$\int_Q u.f dxdt = \langle u_1, \varphi_0 \rangle - \langle u_0, \varphi_1 \rangle - \int_\Sigma \upsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma dt \tag{3.2.7}$$

Pour cela ,on va montrer que pour tout $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, pour tout $(u_0,u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, $\upsilon \in L^2(\Sigma)$, l'application

$$f \overset{K}{\longmapsto} \langle u_1, \varphi_0 \rangle - \langle u_0, \varphi_1 \rangle - \int_\Sigma \upsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma dt$$

définit une forme linéaire continue sur $L^1(0,T;L^2(\Omega))$. En effet : le théorème de Riesz permettra de déduire l'éxistence de $u \in (L^1(0,T;L^2(\Omega)))' = L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$ tel que pour tout $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ on ait

$$\langle K, f \rangle_{(L^1(0,T;L^2(\Omega)))', L^1(0,T;L^2(\Omega))} = \int_Q u.f dxdt$$

c-à-d

$$\int_Q u.f dxdt = \langle u_1, \varphi_0 \rangle - \langle u_0, \varphi_1 \rangle - \int_\Sigma \upsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma dt.$$

On a :

$$\left| \int_\Omega u_0.\varphi'(0)\, dx \right| \leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \cdot \|\varphi_1\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1$$

$$\left| \langle u_1, \varphi_0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \right| \leq \|u_1\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \cdot \|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_2$$

D'aprés l'identité directe

$$\int_\Sigma \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt \leq C \left\{ \|\varphi_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_X \right\}$$

alors

$$\left| \int_Q u.f dxdt \right| \leq c. \|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}$$

$c = \inf \left\{ C_1, C_2, C \left(\|\varphi_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \right\}$

Donc il existe $u \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$ vérifiant (3.2.5) pour tout $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ et

$$\|u\|_{L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))} \leq c \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|u_1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\upsilon\|_{L^2(\Sigma)} \right). \tag{3.2.8}$$

Maintenant montre que $u \in C\left(0,T;L^{2}\left(\Omega\right)\right)\cap C^{1}\left(0,T;H^{-1}\left(\Omega\right)\right)$.Pour démontre que $u \in C\left(0,T;L^{2}\left(\Omega\right)\right)$,on démontre que u est la limite dans $L^{\infty}\left(0,T;L^{2}\left(\Omega\right)\right)$ d'une suite $\left(u_{n}\right) \subset C\left(0,T;L^{2}\left(\Omega\right)\right)$,associée à des données $\left(u_{0},u_{1},\upsilon\right)$ plus régulières on utilise l'estimation (3.2.8). Il suffit donc de démontrer que $u_{n} \in C\left(0,T;L^{2}\left(\Omega\right)\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, et en résulte par convergence uniforme que u est continue à valeurs dans $L^{2}\left(\Omega\right)$. Admettons le lêmme suivante

Lemme Soit $u \in L^{\infty}\left(0,T;L^{2}\left(\Omega\right)\right)$ solution de (3.2.5) avec $u_{0} \in H_{0}^{1}\left(\Omega\right), u_{1} \in L^{2}\left(\Omega\right)$ et $\upsilon \in H^{\frac{3}{2}}\left(\Sigma\right)\cap H_{0}^{1}\left(\Sigma\right)$ alors on a

$$u \in C\left(0,T;L^{2}\left(\Omega\right)\right)\cap C^{1}\left(0,T;H_{0}^{1}\left(\Omega\right)\right).$$

preuve[4]

Plus précisément ,on considère une suite de données initiales et aux limites

$$\left\{u_{n}^{0},u_{n}^{1},\upsilon_{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_{0}^{1}\left(\Omega\right)\times L^{2}\left(\Omega\right)\times H_{0}^{2}\left(0,T;H^{\frac{3}{2}}\left(\Gamma_{0}\right)\right)$$

telle que

$$\left\{u_{n}^{0},u_{n}^{1},\upsilon_{n}\right\} \underset{n\longmapsto+\infty}{\longmapsto} \left\{u^{0},u^{1},\upsilon\right\} \text{ dans } L^{2}\left(\Omega\right)\times H^{-1}\left(\Omega\right)\times L^{2}\left(\Sigma\right)$$

Considérons un relèvement $\hat{\upsilon}_{n}$ de υ_{n} dans $H_{0}^{2}\left(0,T;H^{2}\left(\Omega\right)\right)$: $\begin{cases} \Delta\hat{\upsilon}_{n}=0 \\ \hat{\upsilon}_{n}=\upsilon \quad \text{sur } \Gamma_{0} \\ \hat{\upsilon}_{n}=0 \quad \text{sur } \partial\Omega\setminus\Gamma_{0} \end{cases}$

On remarque que $\Phi_{n}=u_{n}-\hat{\upsilon}_{n}$,satisfait à

$$\begin{cases} \Phi_{n}^{''}-\Delta\Phi_{n}=-\left(\hat{\upsilon}_{n}\right)_{tt}\in L^{2}\left(Q_{T}\right), \\ \Phi_{n}=0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \Phi_{n}\left(0\right)=u_{n}^{0}-\hat{\upsilon}_{n}\left(0\right)\in H_{0}^{1}\left(\Omega\right), \\ \Phi_{n}^{'}\left(0\right)=u_{n}^{1}-\left(\hat{\upsilon}_{n}\right)_{t}\left(0\right)\in L^{2}\left(\Omega\right). \end{cases}$$

Φ_{n} est donc solution d'une équation des ondes avec second membre dans $L^{2}\left(Q_{T}\right)$ avec conditions de Dirichle homogènes et données initiales dans $H_{0}^{1}\left(\Omega\right)\times L^{2}\left(\Omega\right)$.

Grâce au résultat du théorème 2.5 sur les solutions fortes de l'équation des ondes, on déduit que

$\Phi_{n} \in C\left(0,T;L^{2}\left(\Omega\right)\right)\cap C^{1}\left(0,T;H_{0}^{1}\left(\Omega\right)\right)$, et par conséquent

$$u_{n}=\Phi_{n}+\hat{\upsilon}_{n} \in C\left(0,T;L^{2}\left(\Omega\right)\right)\cap C^{1}\left(0,T;H_{0}^{1}\left(\Omega\right)\right)$$

donc $u_{n} \in C\left(0,T;L^{2}\left(\Omega\right)\right)$.

Pour démontrer que $u \in C^{1}\left(0,T;H^{-1}\left(\Omega\right)\right)$, on considère $f=\frac{df_{1}}{dt}$ avec

$f_1 \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$ .On a donc $f \in W^{-1,1}(0,T;H_0^1(\Omega))$, si on montre que :

$$K(f) \leq c\,\|f_1\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}$$

alors $u \in [W^{-1,1}(0,T;H_0^1(\Omega))]' = W^{1,\infty}(0,T;H^{-1}(\Omega))$,donc $u_t \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$ et on aura aussi :

$$\|u_t\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq c.\left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|u_1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\upsilon\|_{L^2(\Sigma_0)}\right)$$

On va donc revenir sur le calcul précédent en remplaçant f par $\frac{df_1}{dt}$. Il sagit de montre que

$$\|\varphi(0)\|_{H_0^1(\Omega)} + \left\|\varphi'(0)\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma_0)} \leq c.\,\|f_1\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} \tag{3.2.9}$$

pour φ solution de (3.2.6) avec $f = \frac{df_1}{dt}$.

Inversons le sens du temps, donc φ solution de

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \Delta\varphi = \frac{df_1}{dt}. \\ \varphi = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T \\ \varphi(0,.) = \varphi_t(0,.) = 0 \end{cases}$$

Il suffit alors de montrer que :

$$\|\varphi(T)\|_{H_0^1(\Omega)} + \left\|\varphi'(T)\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma_0)} \leq c.\,\|f_1\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} \tag{3.2.10}$$

Par densité et passage à la limite, on approche $f_{\,1}$ par $f_{1,n}$ dans $D(]0,t;[\,;H_0^1(\Omega))$.

On pose $\varphi = w_t$ et on déduit que

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w = f_1 \\ w = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T \\ w(0,.) = w_t(0,.) = 0. \end{cases} \tag{3.2.11}$$

Mais $f_{\,1} \in D(]0,t;[\,;H_0^1(\Omega))$ et

$$\begin{gathered} f_1(T) = 0 \\ w_{tt}(T) = \Delta w(T) = \varphi'(T). \end{gathered}$$

Si on multiple l'équation $w_{tt} - \Delta w = f_1$ par $\left(-\Delta w'\right)$, on trouve

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left|\nabla w'(t)\right|^2 + |\Delta w(t)|^2\right]dx = \left(\nabla f_1(t), \nabla w'(t)\right)$$

d'où

$$w \in L^{\infty}\left(0,T;H^{2}(\Omega)\cap H_{0}^{1}(\Omega)\right) \quad ,w^{'} \in L^{\infty}\left(0,T;H_{0}^{1}(\Omega)\right). \tag{3.2.12}$$

L'application $f_1 \longmapsto w$ étant continue de $L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$ dans l'espace des w vérifiant (3.2.11). Donc on a les mêmes résultats pour les fonctions continues en t et par conséquent

$$\|w(T)\|_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)} + \|w_t\ (T)\|_{H_0^1(\Omega)} \le c.\ \|f_1\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} \tag{3.2.13}$$

Or $\varphi(T) = w_t\ (T)$ et $f_{\ 1} \in D\left(]0,t;[\,;H_0^1(\Omega)\right)$, $f_{\ 1}(T) = 0$ ($f_{\ 1} = 0$ au voisinage de $t = T$)et $w_{tt}\ (T) = \Delta w(T) = \varphi^{'}(T)$,ce qui donne l'équivalence entre (3.2.11) et

$$\|\Delta\varphi(T)\|_{H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)} + \left\|\varphi^{'}(T)\right\|_{H_0^1(\Omega)} \le c.\ \|f_1\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}. \tag{3.2.14}$$

On montre aussi que (si on multiple l'équation $\varphi_{tt}\ - \Delta\varphi = \frac{df_1}{dt}$ par $m.\nabla\varphi$)

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma_0)} \le c.\ \|f_1\|_{L^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}$$

l'inégalité (3.2.14) est vérifie. D'où le théorème3.4. ■

L'inégalité inverse

Nous démontrons une deuxième estimation (inégalité inverse) qui combinée avec "inégalité directe"du lemme 3.1, avec un choix du multiplicateur m. Dans ce but on fixe $x_0$arbitraire et on pose

$$m(x) = (x - x_0)$$

Notation 3.1. *Posant*

$$R(x_0) = \max_{x\in\bar{\Omega}} |m(x)| = \max\left|\sum_{k=1}^{2}\left(x_k - x_k^0\right)^2\right|^{\frac{1}{2}},$$

puis on considère le premier problème

$$\begin{cases} \varphi^{''} - \Delta\varphi = 0 \quad \textit{dans } Q \\ \varphi(0) = \varphi_0 \in, \varphi^{'}(0) = \varphi_1 \\ \varphi = 0 \quad \textit{sur } \Sigma \end{cases} \tag{3.2.15}$$

où $\{\varphi_0, \varphi_1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. *Il possède une unique solution*

$$\varphi \in C\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$

telle que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \in L^2(\Sigma_0).$$

L'inégalité inverse:

Proposition 3.5. [3]*Soit* Ω *un domaine polygonal borné de* $\mathbb{R}^2$.*Alors pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}^2$ *il existe un temps minimum* T_0 *et une constante* C *tels que pour tout* $T > T_0$ *on a*

$$(T - T_0) \int\limits_{\Omega} \left(|\nabla \varphi_0|^2 + |\varphi_1|^2 \right) dx \leq C \int\limits_{\Sigma^+(x_0)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt \tag{3.2.16}$$

pour tout

$$(\varphi_0, \varphi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

où

$$\varphi \in C\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$$

solution de (3.2.15) où

$$\Sigma^+(x_0) = \{x \in \Gamma; (x - x_0).\nu > 0\}.$$

Preuve. Pour $f = 0$ dans (3.2.4), alors pour

$$\varphi \in C([0,T], D_A) \cap C^1\left([0,T], H_0^1(\Omega)\right) \cap C^2\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$$

on a

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma} m.\nu \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt = \int\limits_{\Omega} [D_t \varphi m \nabla \varphi dx]_0^T dx + \int\limits_{Q} \left\{ (D_t \varphi)^2 - |\nabla \varphi|^2 \right\} dxdt + \int\limits_{Q} |\nabla \varphi|^2 dxdt$$

où $\operatorname{div} m = 2$ et $D_k m_l = \delta_{k,l}$. L'énergie

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[\|\nabla \varphi\|^2_{(L^2(\Omega))^2} + \left\|\varphi'\right\|^2_{L^2(\Omega)} \right]$$

est constante et on a :

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\left[\|\nabla \varphi_0\|^2_{(L^2(\Omega))^2} + \|\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)} \right],$$

alors

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma} m.\nu \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt = \left[\int\limits_{\Omega} D_t \varphi m \nabla \varphi dxdt \right]_0^T + \frac{1}{2}\int\limits_{Q} \left\{ (D_t \varphi)^2 - |\nabla \varphi|^2 \right\} dxdt + TE(0)$$

car

$$\int\limits_{Q} \left\{ (D_t \varphi)^2 - |\nabla \varphi|^2 \right\} dxdt + \int\limits_{Q} |\nabla \varphi|^2 dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{Q} \left\{ (D_t \varphi)^2 - |\nabla \varphi|^2 \right\} dxdt.$$

Comme

$$\int_Q \left(\varphi'' - \Delta\varphi\right) \varphi dxdt = \int_Q \varphi''.\varphi dxdt - \int_Q \Delta\varphi.\varphi dxdt = 0$$

$$= -\int_Q \left(\varphi'\right)^2 dxdt + \left[\int_\Omega \varphi'.\varphi\right]_0^T + \int_Q |\nabla\varphi|^2 dxdt = 0$$

(par intégration par partie)

$$= \int_Q \left[|\nabla\varphi|^2 - \left(\varphi'\right)^2\right] dxdt + \left[\int_\Omega \varphi'\varphi dx\right]_0^T = 0$$

(car $f = 0$ et $\varphi'' - \Delta\varphi = 0$)

on obtient

$$\int_Q \left[\left(\varphi'\right)^2 - |\nabla\varphi|^2\right] dxdt = \left[\int_\Omega \varphi'\varphi dx\right]_0^T.$$

En utilisant la norme de $L^2(\Omega)$,on trouve

$$\begin{aligned} \left|\left[\int_\Omega D_t\varphi m\nabla\varphi dxdt\right]_0^T\right| &\le (\|D_t\varphi\| . \|m\nabla\varphi\|)_{t=T} + (\|D_t\varphi\| . \|m\nabla\varphi\|)_{t=0} \\ &\le \max_\Omega \|m\| \left[E^{\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{2}} + E^{\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{2}}\right] = 2\max_\Omega \|m\| E \end{aligned}$$

Ensuite

$$\left|\left[\int_\Omega \varphi'\varphi dx\right]_0^T\right| \le \left(\left\|\varphi'\right\| \|\varphi\|\right)_{t=T} + \left(\left\|\varphi'\right\| \|\varphi\|\right)_{t=0}$$

Pour majorer ce dernier terme on a :

$$\lambda_0 \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \le \|\nabla\varphi\|_{(L^2(\Omega))^2}$$

où λ_0 constante qui intervient dans l'inégalité de Poincaré pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ .Il vient

$$\begin{aligned} \left|\left[\int_\Omega \varphi'\varphi dx\right]_0^T\right| &\le \frac{2}{\lambda_0}\left\{\left(\left\|\varphi'\right\| . \|\nabla\varphi\|\right)_{t=T} + \left(\left\|\varphi'\right\| . \|\nabla\varphi\|\right)_{t=0}\right\} \\ &\le \frac{2}{\lambda_0}E(0). \end{aligned}$$

Au total on obtient l'inégalité suivante:

$$T.E(0) \le \frac{1}{2}\int_\Sigma m.\nu \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt + 2.\max_\Omega \|m\| E(0) + \frac{1}{\lambda_0}E(0)$$

d'où

$$(T-T_0)\,E(0) \leq \frac{1}{2}\int_{\Sigma} m.\nu \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt. \tag{3.2.17}$$

où

$$T_0 = 2R(x_0) + \frac{1}{\lambda_0}.$$

$$(T-T_0)\int_{\Omega}\left(|\nabla\varphi_0|^2 + |\varphi_1|^2\right)dx \leq \int_{\Sigma^+(x_0)} m.\nu\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt$$

puisque la partie négative de l'intégrale est inutile .Puisque

$$\begin{aligned}|m.\nu_j| &\leq \max_{\Omega}\|m\|\,|\nu_j| \\ &\leq \max_{\Omega}\|m\| = R(x_0)\end{aligned}$$

alors

$$(T-T_0)\int_{\Omega}\left(|\nabla\varphi_0|^2 + |\varphi_1|^2\right)dx \leq \int_{\Sigma^+(x_0)} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt$$

Grâce au résultat de densité de $H^2(\Omega)\cap V$ ([3]), toute solution

$$\varphi \in C(0,T;V)\cap C^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$

de (3.2.2) peut être approchée par la norme de cette espace par des solutions fortes

$$\varphi_m \in C\left([0,T],H^2(\Omega)\cap V\right)\cap C^1([0,T],V)\cap C^2\left([0,T],L^2(\Omega)\right).$$

Il suffit d'approcher les données $\varphi_{0,}\ \varphi_1$ par des données régulières

$$\varphi_m^0 \in H^2(\Omega)\cap V,\ \varphi_m^1 \in V.$$

telles que

$$\varphi_m \text{ converge vers } \varphi \text{ dans } C(0,T;V)\cap C^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

On a

$$(T-T_0)\int_{\Omega}\left(\left|\nabla\varphi_m^0\right|^2 + \left|\varphi_m^1\right|^2\right)dx \leq C\int_{\Sigma^+(x_0)}\left|\frac{\partial\varphi_m}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt$$

car elle vérifie pour les solutions fortes .

$$\lim_{m\longmapsto+\infty}(T-T_0)\int_{\Omega}\left(\left|\nabla\varphi_m^0\right|^2 + \left|\varphi_m^1\right|^2\right)dx \leq \lim_{m\longmapsto+\infty} C\int_{\Sigma^+(x_0)}\left|\frac{\partial\varphi_m}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt$$

La convergence uniforme des suites $(\varphi_m)_m$ et la densité $H^2(\Omega) \cap V$ dans V montre que

$$(T - T_0) \int_\Omega \lim_{m \longmapsto +\infty} \left(\left|\nabla \varphi_m^0\right|^2 + \left|\varphi_m^1\right|^2 \right) dx \leq C \int_{\Sigma^+(x_0)} \lim_{m \longmapsto +\infty} \left| \frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt$$

d'où

$$(T - T_0) \int_\Omega \left(\left|\nabla \varphi_0\right|^2 + \left|\varphi_1\right|^2 \right) dx \leq C \int_{\Sigma^+(x_0)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt$$

pour tout $\varphi \in C\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$. ■

Théorème 3.6. *Si $T > T_0$ et $\varphi = \varphi(x,t)$ vérifie (3.2.2) pour des données $\{\varphi_0, \varphi_1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et si*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \ sur \quad \Sigma^+(x_0) \tag{3.2.18}$$

alors $\varphi \equiv 0$ sur Q.

Preuve. D'apres théorème d'unicité de Holmgren[2] . ■

1. L'application

$$\varphi \longmapsto \left\| \{\varphi_0, \varphi_1\} \right\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Sigma^+(x_0)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

définie une norme. En effet: Si$\{\varphi_0, \varphi_1\} = \{0, 0\}$ alors $\left\| \{\varphi_0, \varphi_1\} \right\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} = 0$.

2. La remarque 3.2.(avec $f = 0$) implique l'existence d'une constante C_1 telle que

$$\left(\int_{\Sigma^+(x_0)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1 \left\{ \left\| \varphi(t) \right\|_{C\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} + \left\| \varphi'(t) \right\|_{C(0,T;L^2(\Omega))} \right\}.$$

Remarque 3.3. *On note par F l'espace $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Pour tout $\{\varphi_0, \varphi_1\}$dans F , l'application*

$$\{\varphi_0, \varphi_1\} \longmapsto \left\| \{\varphi_0, \varphi_1\} \right\|_F = \left\{ \int_{\Sigma^+(x_0)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

définit un norme sur F . En effet : Si

$$\left\| \{\varphi_0, \varphi_1\} \right\|_F = 0$$

on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \equiv 0, \quad \forall \{\varphi_0, \varphi_1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

ceci implique $\varphi \equiv 0$ dans Q grâce au théorème d'unicité3.6. D'autre part si pour φ solution de (3.2.15) tel que

$$\varphi \equiv 0 \quad dans \quad Q$$

alors $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$. Ce qui implique

$$\int\limits_{\Sigma^+(x_0)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt = 0$$

c-à-d $\|\{\varphi_0, \varphi_1\}\|_F = 0 sur\ F$.

Théorème 3.7. [3]*Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^2$, il existe T_0 tel que pour tout $T > T_0$, pour tout φ solution de (3.2.15) les normes suivantes sont équivalentes :*

$$\{\varphi_0, \varphi_1\} \longmapsto \|\{\varphi_0, \varphi_1\}\|_F = \|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (**)$$

et

$$\{\varphi_0, \varphi_1\} \longmapsto \left\{ \int\limits_{\Sigma^+(x_0)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt \right\}^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (***)$$

Preuve. D'aprés la remarque 3.2, il existe $C_1 > 0, C_2 = \frac{1}{k}.\sqrt{\frac{T-T_0}{C}} > 0$ telle que

$$\|\{\varphi_0, \varphi_1\}\|_F \leq C_1 \left\{ \|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)} \right\}.$$

et grâce à l'inégalité inverse (3.2.16), il existe un $C_2 >$

$$C_2 \left\{ \|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)} \right\} \leq \|\{\varphi_0, \varphi_1\}\|_F ..$$

Il existe alors deux constantes C_1 etC_2 tels que

$$C_2 \left\{ \|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)} \right\} \leq \|\{\varphi_0, \varphi_1\}\|_F \leq C_1 \left\{ \|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)} \right\}$$

alors les normes associes à (**) et (***) définies sur $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ sont équivalentes. ■

3.2.3 Théorème de contrôlabilité exacte

Nous allons à présent mettre en oeuvre la méthode d'unicité hilbertienne $H.U.M$ présentée dans [2] pour etablit le théorème suivant:

Théorème 3.8. *Soit* Ω *un polygone borné de* $\mathbb{R}^2$. *Soit* x_0 *un point de* $\mathbb{R}^2$.*Alors il existe* T_0 *tel que pour tout* $T > T_0$, $u_0 \in L^2(\Omega), u_1 \in H^{-1}(\Omega)$, *il existe* $\nu \in L^2(\Sigma)$ *à support dans* $\Sigma^+(x_0)$ *tel que*

$$u \in C\left(0,T; L^2(\Omega)\right) \cap C^1\left(0,T; H^{-1}(\Omega)\right)$$

solution faible au sens de (3.2.5) de (3.2.1) vérifie

$$u(T) = u^{'}(T) = 0.$$

Preuve. On applique la méthode de HUM.

1. On considère le système homogène. A $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $\varphi_1 \in L^2(\Omega)$ donnés on associe

$$\varphi \in C\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left(0,T; L^2(\Omega)\right)$$

solution de

$$\begin{cases} \varphi^{''} - \Delta\varphi = 0 \quad \text{dans } Q, \\ \varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi^{'}(0) = \varphi_1, \\ \varphi = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \tag{3.2.19}$$

Ce problème admet solution unique grâce au théorème 2.11.

2. Ensuite on considère le système “rétrograde”:

Soit ψ solution de

$$\begin{cases} \psi^{''} - \Delta\psi = 0 \quad \text{dans } Q, \\ \psi = \upsilon = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \quad \text{sur } \Sigma^+, \\ \psi = 0 \quad \text{sur } \Sigma - \Sigma^+, \\ \psi(T) = \psi^{'}(T) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.2.20}$$

où φ solution de (2.3.19) et

$$\upsilon = \partial\varphi/\partial\nu \text{ sur } \Sigma^+ \text{ et } 0 \text{ sur } \Sigma - \Sigma^+.$$

$(\varphi_0, \varphi_1) \in F$ tel que l'inégalité inverse a lieu

Le problème (3.2.20) admet unique solution ψ grâce au théorème 3.13 définie par la méthode de transposition [2] .soit η solution de

$$\begin{cases} \eta \in C(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T; L^2(\Omega)) \\ \eta^{''} - \Delta\eta = f \quad \text{dans } Q, \\ \eta(0) = \eta^{'}(0) = 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.2.21}$$

où $\eta_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\eta_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$.

En approchant η et ψ par des fonction plus régulières car $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$. En effet

si

$$\eta_m \in C\left(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)\cap C^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$$

et

$$\psi_m \in C\left(0,T;H^1(\Omega)\right)\cap C^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$

On a par intégration par parties application de formule de Green :

$$\begin{aligned}
&\int_Q \psi_m\left(\eta_m'' - \Delta\eta_m\right)dxdt - \int_Q \eta_m\left(\psi_m'' - \Delta\psi_m\right)dxdt \\
&= \int_Q \left(\eta_m''\psi_m - \eta_m\psi_m'' -\right)dxdt - \int_Q \left[\psi_m\Delta\eta_m - \eta_m\Delta\psi_m\right]dxdt
\end{aligned}$$

$$\left[\int_\Omega \left(\psi_m\eta_m' - \psi_m'\eta_m\right)dx\right]_0^T - \left[\int_\Sigma \left(\psi_m\frac{\partial\eta_m}{\partial\nu} - \eta_m\frac{\partial\psi_m}{\partial\nu}\right)d\sigma dt\right] \tag{3.2.22}$$

Comme $\psi_m'' - \Delta\psi_m = 0$ et $\eta_m'' - \Delta\eta_m = f$ et $\psi_m(T) = \psi_m'(T) = 0$ on a

$$\int_Q \psi_m\left(\eta_m'' - \Delta\eta_m\right)dxdt - \int_Q \eta_m\left(\psi_m'' - \Delta\psi_m\right)dxdt = \int_Q \psi_m f dxdt$$

et (3.2.22) devient

$$\left[\int_\Omega \left(\psi_m\eta_m' - \psi_m'\eta_m\right)dx\right]_0^T - \int_\Sigma \psi_m\frac{\partial\eta_m}{\partial\nu}d\sigma dt = \int_Q \psi_m f dxdt$$

où $\eta_m \equiv 0$ sur Σ.

Prenons $f = 0$ et lorsque $m \longrightarrow +\infty$ il vient

$$\int_{\Sigma^+(x_0)} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\frac{\partial\eta}{\partial\nu}d\sigma dt = \int_\Omega \left\{\eta_0\psi'(0) - \psi(0)\eta_1\right\}dx$$

où $\psi = \upsilon = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ sur $\Sigma^+(x_0)$.

L'unicité du problème(3.2.19) permet de poser $\varphi \equiv \eta$, on obtient alors

$$\int_\Omega \left\{\varphi_0\psi'(0) - \psi(0)\varphi_1\right\}dx = \int_{\Sigma^+(x_0)} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt.$$

Pour que $\psi \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$, d'aprés le théorème3.4, il existe$\{\psi_0,\psi_1\} \in H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)$ tels que

$$\langle \Lambda\{\varphi_0,\varphi_1\},\{\varphi_0,\varphi_1\}\rangle_{F'\times F} = \int\limits_{\Sigma^+(x_0)} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt.$$

Par conséquent on a

$$\begin{cases} \psi(0)=\psi_0 \\ \psi'(0)=\psi_1 \end{cases}$$

On définit alors un opérateur linéaire Λ qui associe à $\{\varphi_0,\varphi_1\}$ par

$$\Lambda : F \longrightarrow F'$$

$$\{\varphi_0,\varphi_1\} \longrightarrow \Lambda\{\varphi_0,\varphi_1\} = \left\{ \psi'(0), -\psi(0) \right\}.$$

3. Soit $\{\varphi_0,\varphi_1\} \in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ associe où φ solution de (3.2.19). L'application

$$\begin{array}{rcl} a & : & F\times F \longrightarrow \mathbb{R} \\ \{\varphi_0,\varphi_1\} & \longmapsto & a(\{\varphi_0,\varphi_1\}) = \langle \Lambda\{\varphi_0,\varphi_1\},\{\varphi_0,\varphi_1\}\rangle_{F'\times F} \end{array}$$

est une forme bilinéaire continue et coercitive sur $F\times F$. En effet: On calcule

$$\langle \Lambda\{\varphi_0,\varphi_1\},\{\varphi_0,\varphi_1\}\rangle$$

Grâce à l'équivalence des normes établit dans le théorème 4.12 on a:

$$\begin{aligned} |\langle \Lambda\{\varphi_0,\varphi_1\},\{\varphi_0,\varphi_1\}\rangle| &\leq \int\limits_{\Sigma^+(x_0)} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt \\ &\leq C_1^2\left[\|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)}\right]^2 \\ &= K.\left[\|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)}\right].\left[\|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)}\right] \\ &= K\,\|\{\varphi_0,\varphi_1\}\|_F . \|\{\varphi_0,\varphi_1\}\|_F . \end{aligned}$$

La forme bilinéaire liée à Λ est alors continue sur $F\times F$. On a aussi

$$|\langle \Lambda\{\varphi_0,\varphi_1\},\{\varphi_0,\varphi_1\}\rangle| = \left|\int\limits_{\Sigma^+(x_0)} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt\right| \geq C_2^2\left(\|\varphi(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \left\|\varphi'(t)\right\|_{L^2(\Omega)}\right)^2$$

(Grâce à l'inégalité inverse)

c-à-d

$$|\langle \Lambda\{\varphi_0,\varphi_1\},\{\varphi_0,\varphi_1\}\rangle| \geq \beta\,\|\{\varphi_0,\varphi_1\}\|_F^2$$

a est coercitive sur $F \times F$ et ramarquant que

$$\langle \Lambda \{\varphi_0, \varphi_1\}, \{\varphi_0, \varphi_1\} \rangle_{F' \times F} = (\{\varphi_0, \varphi_1\}, \{\varphi_0, \varphi_1\})_F$$

donc

$$\langle \{\varphi_0, \varphi_1\}, \Lambda^* \{\varphi_0, \varphi_1\} \rangle_{F' \times F} = (\{\varphi_0, \varphi_1\}, \{\varphi_0, \varphi_1\})_F$$

où

$$\Lambda^* : F^{'} \longrightarrow F$$

On déduire que

$$\Lambda^* = \Lambda$$

En résulte que Λ est un isomorphisme isométrie inversible de F dans $F^{'}$et se prolonge en un opérateur linéaire continue de F dans $F^{'}$.

4. La conclusion est directe : comme ψ est unique, on pose $\psi = u$. Pour tout $\{u_1, -u_0\} \in F^{'}$ il existe unique solution$\{\varphi_0, \varphi_1\} \in F$ vérifiant

$$\Lambda \{\varphi_0, \varphi_1\} = \{u_1, -u_0\}$$

et un contrôle

$$\upsilon = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$$

dans $L^2(\Sigma)$. Comme ψ est unique, on pose $\psi = u$ et en particulier

$$u(T) = u^{'}(T) = 0.$$

■

3.3 Contrôlabilité exacte avec condition mêlé

3.3.1 Domaine convexe

Position du problème

On se basant toujours sur les résultat de [2] et [4]. On va indiquer dans ce paragraphe les conditions géometriques sur un polygone qui assurant que l'analogue du théorème 2.10 est valable pour le probléme mêlé. Sous les conditions du lemme2.17, il existe $s > \frac{3}{2}$ tel que

$$D_A \subset H^s(\Omega) \quad , \quad A = (-\Delta)$$

où
$$D_A = \left\{ u \in H^2(\Omega) \cap H^s(\Omega)\, ;\ s > \frac{3}{2},\ u = 0 \text{ sur } \Gamma^D \quad , \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \text{ sur } \Gamma^N \right\}$$
on travail donc avec des solutions dans
$$H^s(\Omega)\, , s > \frac{3}{2}$$
On pose encore $V = D_{A^{\frac{1}{2}}}$ et que $\Gamma^D \neq \varnothing$ de sorte que A soit injectif et que $E^{\frac{1}{2}}(0)$ soit une norme sur V.

On considère la solution u du problème (P) de Cauchy-Dirichlet-Neumann pour ml'équation des ondes
$$(P) \quad \begin{cases} u'' - \Delta u = 0 \qquad \text{dans } Q \\ u = \upsilon \quad \text{sur} \quad \Sigma^D + (x_0) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = w^+ \text{ sur } \ \Sigma^N + (x_0) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = w^- \text{ sur } \ \Sigma^N - (x_0) \\ u(T) = u'(T) = 0 \text{ dans } \Omega \end{cases}$$
Le problème de contrôlabilité exacte consiste à chercher un temps T tel que pour toutes données de Cauchy $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, il existe des contrôles υ, w^+ et w^- telles que si u est la solution de (P), on ait
$$u(T) = u'(T) = 0$$
Considérons pour tout $(\varphi_0, \varphi_1) \in V \times L^2(\Omega)$ l'équation des ondes homogène :
$$\begin{cases} \varphi'' - \Delta\varphi = 0 \quad \text{dans } Q, \\ \varphi(0) = \varphi_0,\ \varphi'(0) = \varphi_1 \text{ sur } \Omega \\ \varphi = 0 \qquad \text{sur } \Gamma^D \ \ , \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^N \end{cases} \tag{3.3.1}$$
Le problème (3.3.1) admet unique solution grâce au théorème 2.19.

Résultats préliminaires pour l'équation des ondes

Lidentité directe

Lemme 3.9. *Soit $\varphi \in D_A$, avec $D_A \subset H^s(\Omega)$,on a alors*
$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta\varphi m \nabla\varphi dx dt \quad &= \quad -\sum_{k,l\geq 1}^{2} \int_\Omega D_k m_l D_k\varphi D_l\varphi dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div} m. \left|\nabla\varphi\right|^2 dx \\ &-\frac{1}{2}\int_{\Gamma^N} m.\nu \left|\nabla_T\varphi\right|^2 d\sigma + \int_{\Gamma^D} m.\nu \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma \end{aligned} \tag{3.3.2}$$
où $\nabla_T\varphi$ désigne la projection de $\nabla\varphi$ sur le plan tangente à Γ définié en dehors des sommets

Preuve. On rappel que
$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\nu + \nabla_T\varphi.$$
D'aprés le lemme 3.1 lorsque $\varphi \in D_A$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta\varphi m\nabla\varphi dxdt &= \sum_{k,l\geq 1}^{2}\int_\Omega D_k m_l D_k\varphi D_l\varphi dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div} m.\left|\nabla\varphi\right|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Gamma m.\nu\left|\nabla\varphi\right|^2 d\sigma \\ &+ \int_\Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} m.\nabla\varphi d\sigma\end{aligned}$$

On a

$$\int_\Gamma m.\nu\left|\nabla\varphi\right|^2 d\sigma = \int_{\Gamma^D} m.\nu\left|\nabla\varphi\right|^2 d\sigma + \int_{\Gamma^N} m.\nu\left|\nabla\varphi\right|^2 d\sigma = \int_{\Gamma^N} m.\nu\left|\nabla\varphi\right|^2 d\sigma$$

car si $\varphi = 0 \quad$ sur $\Gamma^D, \nabla\varphi = 0$ sur Γ^D.

$$\int_\Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} m.\nabla\varphi d\sigma = \int_{\Gamma^D} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} m.\nabla\varphi d\sigma + \int_{\Gamma^N} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} m.\nabla\varphi d\sigma = \int_{\Gamma^D} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} m.\nabla\varphi d\sigma$$

car $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \quad$ sur Γ^N , d'où

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta\varphi m\nabla\varphi dxdt &= -\sum_{k,l\geq 1}^{2}\int_\Omega D_k m_l D_k\varphi D_l\varphi dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div} m.\left|\nabla\varphi\right|^2 dx \\ &- \frac{1}{2}\int_{\Gamma^N} m.\nu\left|\nabla_T\varphi\right|^2 d\sigma + \int_{\Gamma^D} m.\nu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma\end{aligned}$$

■

Proposition 3.10. *Pour $\varphi \in C(0,T;D_A) \cap C^1(0,T;V)\, C^2(0,T;L^2(\Omega))$ solution de (3.3.1) ,on a*

$$\begin{aligned}\int_Q f.m.\nabla\varphi dxdt = &\left[\int_\Omega D_t\varphi m\nabla\varphi dx\right]_0^T + \tfrac{1}{2}\int_Q \operatorname{div} m\left\{(D_t\varphi)^2 - \left|\nabla\varphi\right|^2\right\} dxdt + \\ &+ \sum_{k,l\geq 1}^{2}\int_Q D_k m_l D_k\varphi D_l\varphi dxdt \qquad (3.3.3)\\ &- \tfrac{1}{2}\int_{\Sigma^D} m.\nu\left|\tfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt - \tfrac{1}{2}\int_{\Sigma^N} m.\nu\left\{(D_t\varphi)^2 - \left|\nabla_T\varphi\right|^2\right\} d\sigma dt\end{aligned}$$

Preuve. Si on multiple l'équation $\varphi'' - \Delta\varphi = f$ par $m.\nabla\varphi$ et on intègre sur Q on a

$$\int_Q D_t^2 \varphi m.\nabla\varphi dxdt - \int_\Omega \Delta\varphi m.\nabla\varphi dx = \int_Q f\ m.\nabla\varphi dxdt$$

mais

$$\int_Q D_t^2 \varphi m.\nabla\varphi dxdt = \left[\int_\Omega D_t\varphi m\nabla\varphi dx\right]_0^T - \int_Q D_t\varphi m\nabla\left(D_t\varphi\right) dxdt$$

$$= \left[\int_\Omega D_t\varphi m\nabla\varphi dx\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \operatorname{div} m\left(D_t\varphi\right)^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_{\Sigma^N} m.\nu\left(D_t\varphi\right)^2 d\sigma dt$$

$\varphi = 0$ sur $\Gamma^D_,$ $D_t\varphi = 0$ sur Γ^D . Posons

$$\Sigma^D = \Gamma^D \quad \times \left]0, T\right[,$$

$$\Sigma^N = \Gamma^N \quad \times \left]0, T\right[$$

$$\begin{aligned}\int_Q f\ m.\nabla\varphi dxdt &= \int_Q \left(\varphi'' - \Delta\varphi\right) m\nabla\varphi dxdt = \left[\int_\Omega D_t\varphi m\nabla\varphi dx\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \operatorname{div} m\left(D_t\varphi\right)^2 dxdt \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_{\Sigma^N} m.\nu\left(D_t\varphi\right)^2 d\sigma dt + \sum_{k,l\geq 1}^{2}\int_Q D_k m_l D_k\varphi D_l\varphi dxdt - \frac{1}{2}\int_Q \operatorname{div} m.\left|\nabla\varphi\right|^2 dxdt \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_{\Sigma^N} m.\nu\left|\nabla_T\varphi\right|^2 d\sigma dt - \int_{\Sigma^D} m.\nu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma dt\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_Q f\ m.\nabla\varphi dxdt &= \left[\int_\Omega D_t\varphi m\nabla\varphi dx\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \operatorname{div} m\left\{\left(D_t\varphi\right)^2 - \left|\nabla\varphi\right|^2\right\} dxdt \\ &\quad + \sum_{k,l\geq 1}^{2}\int_Q D_k m_l D_k\varphi D_l\varphi dxdt - \int_{\Sigma^D} m.\nu\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_{\Sigma^N} m.\nu\left\{\left(D_t\varphi\right)^2 - \left|\nabla_T\varphi\right|^2\right\} d\sigma dt\end{aligned}$$

■

Remarque 3.4. *1. Si on utilise les deux types de multiplicateurs*

$$Min_{\Gamma^D}\, m.\nu > 0 \qquad et \qquad m.\nu = 0 \quad sur\ \Gamma^N, \tag{3.3.4}$$

l'identité (3.3.2) *implique l'existence d'une constante* C *telle que*

$$\left(\int_{\Sigma^D}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left\{\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}+\|\varphi\|_{C(0,T;V)}+\left\|\varphi^{'}\right\|_{C(0,T;L^2(\Omega))}\right\}.$$

A priori cettte inégalité est etendue à φ *solution de (3.3.1) grâce à l'analogue de la remarque 3.2.*

2. On suppose que(3.3.4) à lieu, et si φ *solution de (3.3.1), on a*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\in L^2\left(\Sigma^D\right)$$

et dépend continûent dans $L^2\left(\Sigma^D\right)$ *par rapport aux données* $\varphi_0\in V$, $\varphi_1\in L^2(\Omega)$ *et* $f\in L^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$*c-à-d*

$$\left(\int_{\Sigma^D}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left\{\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right. \qquad (3.3.5)$$
$$\left.+\|\varphi_0\|_{C(0,T;V)}+\|\varphi_1\|_{C(0,T;L^2(\Omega))}\right\}$$

Lemme 3.11. *Pour tout* $T>T_0$ *et tout solution forte on a l'éstimation*

$$E(0) \leq C\diagup(T-T_0)\left\{\int_{\Sigma^D+(x_0)}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt+\right. \qquad (3.3.6)$$
$$\left.\int_{\Sigma^N+(x_0)}(D_t\varphi)^2 d\sigma dt+\int_{\Sigma^N-(x_0)}|\nabla_T\varphi|^2 d\sigma dt\right\}$$

Preuve. Toujours on suppose $R(x_0)=\max_{x\in\bar{\Omega}}|m(x)|$ et $T(x_0)=2R(x_0)$,et remplaçant f par 0 dans (3.3.3) on trouve

$$\operatorname{div} m=2\ ,\ D_k m_l=\begin{cases}1, k=l\\ 0, k\neq l\end{cases}.$$

et

$$0 = \left[\int_\Omega D_t\varphi m\nabla\varphi dx\right]_0^T+\int_Q\left\{(D_t\varphi)^2-|\nabla\varphi|^2\right\}dxdt+\int_Q|\nabla\varphi|^2 dxdt$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\Sigma^D} m.\nu\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt-\frac{1}{2}\int_{\Sigma^N} m.\nu\left\{(D_t\varphi)^2-|\nabla_T\varphi|^2\right\}d\sigma dt$$

avec

$$\begin{aligned}
&\int_Q \left\{(D_t\varphi)^2 - |\nabla\varphi|^2\right\} dxdt + \int_Q |\nabla\varphi|^2 \, dxdt = \\
&\frac{1}{2}\int_Q \left\{(D_t\varphi)^2 + |\nabla\varphi|^2\right\} dxdt + \frac{1}{2}\int_Q \left\{(D_t\varphi)^2 - |\nabla\varphi|^2\right\} dxdt \\
&= TE(0) + \frac{1}{2}\int_Q \left\{(D_t\varphi)^2 - |\nabla\varphi|^2\right\} dxdt \\
&= TE(0) + \frac{1}{2}\left[\int_\Omega \varphi' . \varphi\right]_0^T
\end{aligned}$$

car si on multiple l'équation $\varphi'' - \Delta\varphi = 0$ par φ et en intégre sur Q on obtient

$$0 = \int_Q \left(\varphi'' - \Delta\varphi\right) \varphi dxdt = -\int_Q (D_t\varphi)^2 \, dxdt + \left[\int_\Omega \varphi' \varphi dx\right]_0^T + \int_Q |\nabla\varphi|^2 \, dxdt$$

ce qui montre que

$$\int_Q \left\{(D_t\varphi)^2 - |\nabla\varphi|^2\right\} dxdt = \left[\int_\Omega \varphi' . \varphi\right]_0^T .$$

d'où

$$T.E(0) - \frac{1}{2}\int_{\Sigma^D - (x_0)} m.\nu \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt - \frac{1}{2}\int_{\Sigma^N - (x_0)} m.\nu \, (D_t\varphi)^2 \, d\sigma dt + \frac{1}{2}\int_{\Sigma^N + (x_0)} m.\nu \, |\nabla_T\varphi|^2 \, d\sigma dt$$

$$\begin{aligned}
= \quad & -\left[\int_\Omega \varphi' m\nabla\varphi dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi' . \varphi\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_{\Sigma^D + (x_0)} m.\nu \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt \\
& + \frac{1}{2}\int_{\Sigma^N + (x_0)} m.\nu \, (D_t\varphi)^2 \, d\sigma dt - \frac{1}{2}\int_{\Sigma^N - (x_0)} m.\nu \, |\nabla_T\varphi|^2 \, d\sigma dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T.E(0) \quad \leq \quad & \frac{R(x_0)}{2}\left\{\int_{\Sigma^D + (x_0)} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt + \int_{\Sigma^N + (x_0)} (D_t\varphi)^2 \, d\sigma dt + \int_{\Sigma^N - (x_0)} |\nabla_T\varphi|^2 \, d\sigma dt\right\} \\
& + \left\{2R(x_0) + \frac{1}{\lambda_0}\right\} E(0)
\end{aligned}$$

grâce à

$$\begin{cases} \varphi = 0 & \text{sur}\Sigma^D - (x_0) \\ m.\nu < 0 & \text{sur}\Sigma^N - (x_0) \\ m.\nu < 0 & \text{sur}\Sigma^N + (x_0) \end{cases}$$

ce qui établit l'existence d'une constante C et un temps telle que pour tout $T > T_0$

$$E(0) \leq \frac{C}{(T - T_0)} \left\{ \int\limits_{\Sigma^D + (x_0)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt + \int\limits_{\Sigma^N + (x_0)} (D_t \varphi)^2 \, d\sigma dt + \int\limits_{\Sigma^N - (x_0)} |\nabla_T \varphi|^2 \, d\sigma dt \right\}$$

■

Remarque 3.5. ***1.*** *L'estimation (3.3.6) implique aussi un résultat d'unicité tel que si* Γ^D *non vide et s'il existe un temps* $T > T_0$ *telle que*

$$\begin{cases} \varphi = 0 \ sur \ \ \Sigma^D + (x_0), \\ \nabla_T \varphi \ = 0 \ sur \ \Sigma^N - (x_0), \end{cases}$$

où φ *solution forte de (3.3.1) alors*

$$\varphi \equiv 0 \ sur \ Q.$$

2. *Pour* x_0 *donné et pour tout* $(\varphi_0, \varphi_1) \in (H^2(\Omega) \cap V) \times V$ *et grâce à la remarque précédente, il existe un temps* T_0 *tel que pour* $T > T_0$ *l'application*

$$(\varphi_0, \varphi_1) \longmapsto \|(\varphi_0, \varphi_1)\|_{(H^2(\Omega) \cap V) \times V}$$

définie une norme sur $(H^2(\Omega) \cap V) \times V$ *où* φ *une solution forte de (3.3.1) et* $f = 0$ *avec*

$$\|(\varphi_0, \varphi_1)\|_F^2 = \int\limits_{\Sigma^D + (x_0)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt + \int\limits_{\Sigma^N + (x_0)} (D_t \varphi)^2 \, d\sigma dt + \int\limits_{\Sigma^N - (x_0)} |\nabla_T \varphi|^2 \, d\sigma dt$$

D'aprés l'inégalité inverse, on définit un espace F avec la double inclution algebrique et topologique

$$D_A \times V \subset F \subset V \times L^2(\Omega).$$

Définition 3.2. *Pour* x_0 *donné, il existe un temps* T_0 *tel que pour* $T > T_0$ *les normes suivantes sont équivalents:*

$$\{\varphi_0, \varphi_1\} \longmapsto \|(\varphi_0, \varphi_1)\|_{(H^2(\Omega) \cap V) \times V}$$

et

$$\{\varphi_0, \varphi_1\} \longmapsto \|(\varphi_0, \varphi_1)\|_{V \times L^2(\Omega)}$$

Remarque 3.6. *Les normes* $\{\varphi_0, \varphi_1\} \longmapsto \|(\varphi_0, \varphi_1)\|_{(H^2(\Omega)\cap V)\times V}$, *et* $\{\varphi_0, \varphi_1\} \longmapsto \|(\varphi_0, \varphi_1)\|_{V\times L^2(\Omega)}$ *sont équivalents en effet : Grâce à l'inégalité inverse , il existe un temps* T_0 *tel que pour* $T > T_0$ *on a*

$$K_1.E(0) = \frac{C}{(T-T_0)} E(0) \leq \|(\varphi_0, \varphi_1)\|_{(H^2(\Omega)\cap V)\times V}$$

et on a

$$\left| \int\limits_{\Sigma^D+(x_0)} \left|\tfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt + \int\limits_{\Sigma^N+(x_0)} (D_t\varphi)^2 d\sigma dt + \int\limits_{\Sigma^N-(x_0)} |\nabla_T\varphi|^2 d\sigma dt \right| \leq \lambda \left(\int\limits_{\Sigma^D} \left|\tfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt \right)$$

$$\leq c^2\lambda \left(\|\varphi\|_{C(0,T;V)} + \left\|\varphi'\right\|_{C(0,T;L^2(\Omega))} \right) \text{ Grâce à } (3.3.5)$$

où

$$\lambda = \inf \left\{ \int\limits_{\Sigma^D} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt, \lambda_1, \lambda_2 \right\} > 0$$

$$0 < \left| \int\limits_{\Sigma^N+(x_0)} (D_t\varphi)^2 d\sigma dt \right| \leq \lambda_1$$

$$0 < \left| \int\limits_{\Sigma^N-(x_0)} |\nabla_T\varphi|^2 d\sigma dt \right| \leq \lambda_2$$

alors

$$\|(\varphi_0, \varphi_1)\|_{(H^2(\Omega)\cap V)\times V} \leq K_2 E(0)$$

d'où l'équivalence des deus normes.

Théorème 3.12. *Soient* $(\varphi_0, \varphi_1) \in F$, $f \in L^1(0,T;V)$, *sous l'hypothèse (3.3.4) la solution* φ *de (3.3.1) vérifie*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \in L^2\left(\Sigma^D + (x_0)\right), \quad D_t\varphi \in \Sigma^N + (x_0), \quad \nabla_T\varphi \in \left(\Sigma^N - (x_0)\right) \tag{3.3.7}$$

alors $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \in L^2\left(\Sigma^D\right)$.

Preuve. Utilisant l'unicité du théoeème 2.11 où

$$\varphi \in C([0,T], D_A) \cap C^1(0,T;V).$$

D'aprés le théorème de trace on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \in C\left([0,T]; H^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma)\right) \subset L^2(\Sigma)$$

$$\nabla_T\varphi \in C\left([0,T]; H^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma)\right) \subset L^2(\Sigma)$$

$$\varphi \in C\left([0,T]; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \subset L^2(\Sigma).$$

■

Solutions faibles pour l'équation des ondes

Théorème 3.13. *Pour* $u_0 \in L^2(\Omega), u_1 \in V'$,$w \in L^2\left(\Sigma^D + (x_0)\right), \nu^+ \in L^2\left(\Sigma^N + (x_0)\right), \upsilon^- \in L^2\left(\Sigma^N - (x_0)\right)$ *donnés, il existe un unique triplet* $u \in L^\infty\left(0,T;V'\right), \{\psi_1, -\psi_0\} \in F'$ *solution de*

$$\begin{aligned} &\int_Q u.f dx dt - \langle \psi_0, \varphi_1 \rangle + \langle \psi_1, \varphi_0 \rangle = \langle u_1, \varphi(0) \rangle - \left\langle u_0, \varphi'(0) \right\rangle \\ &+ \int_{\Sigma^D + (x_0)} w \tfrac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma dt - \int_{\Sigma^N + (x_0)} \nu^+ \varphi' d\sigma dt - \int_{\Sigma^N - (x_0)} \upsilon^- . \nabla_T \varphi d\sigma dt \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

pour tout triplet $f \in L^1(0,T;V)$, $\{\varphi_0, \varphi_1\} \in F$ *où* φ *vérifie:*

$$\varphi \in C(0,T;V) \cap C^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$

$$\varphi'' - \Delta\varphi = f(t) \quad , t \in [0,T]$$

$$\varphi(T) = \varphi_0, \varphi'(T) = \varphi_1$$

Si de plus la condition (3.3.4)est vérifiée on peut donner w *sur tout* Σ^D .

Preuve. La théorème 3.12 établit que le membre de droite dans (3.3.9) est une forme linéaire continuité sur $L^1(0,T;V)$ d'où l'existence et l'unicité de $u \in L^\infty\left(0,T;V'\right)$, car L est un isomorphisme de D_L sur $L^1(0,T;V) \times V \times L^2(\Omega)$ l'identité (3.3.8) signifie en fait que

$$L^* u = \alpha$$

où

$$L : D_L = \left\{\varphi \in C(0,T;V) \cap C^1\left(0,T;L^2(\Omega)\right); \varphi'' - \Delta\varphi \in L^1(0,T;V)\right\} \to X \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

$$\varphi \longmapsto L\varphi = \left\{\varphi'' - \Delta\varphi, \varphi(T), \varphi'(T)\right\}$$

et

$$\alpha : \varphi \longmapsto \langle u_1, \varphi(0) \rangle - \left\langle u_0, \varphi'(0) \right\rangle + \int_{\Sigma^D + (x_0)} w \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma dt - \int_{\Sigma^N + (x_0)} \nu^+ \varphi' d\sigma dt - \int_{\Sigma^N - (x_0)} \upsilon^- . \nabla_T \varphi d\sigma dt$$

■

Remarque 3.7. *Pour que u dépend continûement des données dans l'espace* $L^{\infty}\left(0,T;V^{'}\right)$, *l'approximation par des données plus régulière établit que u est continue à valeurs dans* $V^{'}$. $V^{'}$ *n'est pas un espace de distribution on peut utiliser (3.3.8) l'orsque* φ *est une fonction test dans* Q. *On voit alors que u solution de*

$$u^{''}-\Delta u=0 \quad \text{au sens de distribution dans } Q.$$

Par ailleurs $H_0^1(\Omega)\subset V$ *(sans densité), il existe une application naturelle de* $V^{'}$ *dans* $H^{-1}(\Omega)$ *qui implique que*

$$u_{/\omega}\in H^{-1}(\omega)$$

avec $\bar{\omega}\subset\Omega$, *alors*

$$u\in C\left(0,T;H^{-1}(\omega)\right)$$
$$u^{''}\in C\left(0,T;H^{-3}(\omega)\right).$$

Par interpolation u est continument dérivable à valeurs dans $H^{-2-\varepsilon}(\omega)$ *pour tout* ω *et tout* $\varepsilon>0$:

$$u(0)=u_0 \quad \text{dans } H_{loc}^{-1}(\Omega)$$
$$u^{'}(0)=u_1 \quad \text{dans } H_{loc}^{-2}(\Omega)$$
$$u(T)=\psi_0 \quad \text{dans } H_{loc}^{-1}(\Omega)$$
$$u^{'}(T)=\psi_1 \quad \text{dans } H_{loc}^{-2-\varepsilon}(\Omega)$$

ce qui établit que $\left(u^{'}(T),-u(T)\right)\in H_{loc}^{-2-\varepsilon}(\Omega)\times H_{loc}^{-1}(\Omega)=F^{'}$ *localement.*

De la même manière on peut donner un sens aux conditions aux limites:

$$u=w \quad \text{sur } \Sigma^D+(x_0)$$
$$u=0 \quad \text{sur } \Sigma^D-(x_0)$$
$$\frac{\partial u}{\partial\nu}=D_t\nu^{+} \quad \text{sur } \Sigma^N+(x_0)$$
$$\frac{\partial u}{\partial\nu}=\nabla_T\nu^{-} \quad \text{sur } \Sigma^N-(x_0)$$

Théorème 3.14. *On suppose que tous les angles portant des conditions mélées sont convexes .Pour tout* x_0 *,il existe un temps* T_0 *tel que pour tout* $T>T_0$, $u_0\in L^2(\Omega)$ *et* $u_1\in V^{'}$ *, il existe* $w\in L^2\left(\Sigma^D+(x_0)\right)$, $\nu^{+}\in L^2\left(\Sigma^N+(x_0)\right)$, $\nu^{-}\in L^2\left(\Sigma^N-(x_0)\right)^{n-1}$ *tels que* $u\in C\left([0,T];V^{'}\right)$ *solution faible au sens de (3.3.8) de l'équation des ondes (avec données de cauchy* $\{\varphi_0,\varphi_1\}$, *données de Dirichlet* w *sur* $\Sigma^D+(x_0)$,$\nabla_T\nu^{-}$ *sur* $\Sigma^N-(x_0)$ *,vérifié* $u(T)=u^{'}(T)=0$.

Preuve. La démonstration repose sur l'application de la méthode de H.U.M.

1. On résout d'abord le problème homogène suivant :

$$\begin{cases} \varphi^{''} - \Delta\varphi = 0, \quad \text{dans } Q, \\ \varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi^{'}(0) = \varphi_1 \text{ dans } \Omega, \\ \varphi = 0 \qquad \text{sur } \Gamma^D, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma^N. \end{cases} \tag{3.3.9}$$

tel que pour tout $\{\varphi_0, \varphi_1\} \in F$, il existe $\varphi \in C(0,T;V) \cap C^1(0,T;L^2(\Omega))$ solution de problème (3.3.9).

2. On considère ensuite le problème rétrograde en ψ. Il existe $\psi \in C(0,T;L^2(\Omega)) \cap C^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$ vérifie (3.3.8) et ψ solution de

$$\begin{cases} \psi^{''} - \Delta\psi = 0 \qquad \text{dans } Q, \\ \psi = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \qquad \text{sur } \Sigma^D + (x_0), \\ \frac{\partial\psi}{\partial\nu} = \frac{\partial}{\partial t}(D_t\varphi) \qquad \text{sur } \Sigma^N + (x_0), \\ \frac{\partial\psi}{\partial\nu} = \Delta_T\varphi \qquad \text{sur } \Sigma^N - (x_0), \\ \psi(T) = \psi^{'}(T) = 0. \end{cases} \tag{3.3.10}$$

On construit l'espace de Hilbert

$$F \text{ complété de} D_A \times V \text{ par rapport à la norme } \|.\|_F$$

où $F^{'}$ dual de F

$$F \subset V \times L^2(\Omega) \quad ; V^{'} \times L^2(\Omega) \subset F^{'}.$$

$$\varphi = 0 \qquad \text{sur } \Gamma^D$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma^N$$

qui admet unique solution .

$$\begin{cases} \eta \in C(0,T;V) \cap C^1(0,T;\ L^2(\Omega)) \\ \eta^{''}(t) - \Delta\eta(t) = f(t) \qquad , t \in [0,T] \\ \eta(0) = 0, \ \eta^{'}(0) = 0 \text{ dans } \Omega \end{cases} \tag{3.3.11}$$

pour tout $f \in L^1(0,T;V)$ où

$$\eta(0) = \eta_0, \ \eta^{'}(0) = \eta_1$$

et

$$\eta(T) = \eta_0, \ \eta^{'}(T) = \eta_1.$$

Le problème (3.3.10) admet une solution unique grace au théorème (3.12).

On définit l'opérateure Λ par

$$\Lambda\{\varphi_0,\varphi_1\} = \left\{\psi'(0), -\psi(0)\right\} \tag{3.3.12}$$

qui est linéaire continu de F dans F'.

D'aprés l'unicité de (3.3.11) on pose $\varphi \equiv \eta$ sur Q .

Pour $\{\varphi_0,\varphi_1\} \in D_A \times V$, on calculer $\langle \Lambda\{\varphi_0,\varphi_1\}, \{\varphi_0,\varphi_1\}\rangle$. En effet: Pour calculer $\langle \Lambda\{\varphi_0,\varphi_1\}, \{\varphi_0,\varphi_1\}\rangle$, en approchant φ , ψ et f par des fonctions plus régulières φ_m, ψ_m et f_m respectivements. Si

$$\varphi_m \in C(0,T;D_A) \cap C^1\left(0,T;\ H_0^1(\Omega)\right)$$

et

$$\psi_m \in C\left(0,T;H^1(\Omega)\right) \cap C^1\left(0,T;\ L^2(\Omega)\right)$$

et

$$f_m \in L^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$$

On a

$$\int_Q \psi_m f_m dxdt = \int_Q \left(\varphi_m'' - \Delta\varphi_m\right)\psi_m dxdt = \left[\int_\Omega \psi_m \varphi_m' dx\right]_0^T - \int_Q \psi_m' \varphi_m' dxdt - \int_Q \Delta\varphi_m \psi_m dxdt$$

(par intégration par partie)

$$= \left[\int_\Omega \left(\psi_m \varphi_m' - \psi_m' \varphi_m\right) dx\right]_0^T + \int_Q \psi_m'' \varphi_m dxdt - \int_Q \Delta\varphi_m \psi_m dxdt$$

$$= \left[\int_\Omega \left(\psi_m \varphi_m' - \psi_m' \varphi_m\right) dx\right]_0^T + \int_Q \Delta\psi_m . \varphi_m dxdt - \int_Q \Delta\varphi_m \psi_m dxdt$$

$$= \left[\int_\Omega \left(\psi_m \varphi_m' - \psi_m' \varphi_m\right) dx\right]_0^T + \int_\Sigma \left\{\varphi_m \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial \nu}\right) - \psi_m \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu}\right)\right\} d\sigma dt$$

$$= \left[\int_\Omega \left(\psi_m \varphi_m' - \psi_m' \varphi_m\right) dx\right]_0^T + \int_{\Sigma^N+(x_0)} \varphi_m . \frac{\partial}{\partial t}\left(D_t \varphi_m\right) d\sigma dt$$
$$+ \int_{\Sigma^N-(x_0)} \varphi_m . \Delta_T \varphi_m d\sigma dt - \int_{\Sigma^D+(x_0)} \frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu} . \frac{\partial \varphi_m}{\partial \nu} d\sigma dt$$

donc

$$-\int_{\Omega}\left[\psi_m(0)\,\varphi_m'(0)-\psi_m'(0)\,\varphi_m(0)\right]dx = \int_{\Sigma^D+(x_0)}\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial\nu}\right).\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial\nu}\right)d\sigma dt$$
$$-\int_{\Sigma^N+(x_0)}\varphi_m.\frac{\partial}{\partial t}(D_t\varphi_m)\,d\sigma dt-\int_{\Sigma^N-(x_0)}\varphi_m.\Delta_T\varphi_m d\sigma dt$$

par passage à la limite ($m\longrightarrow+\infty$) et si $f=0$ on a :

$$\int_{\Omega}\left[\psi'(0)\,\varphi(0)-\psi(0)\,\varphi'(0)\right]dx=\int_{\Sigma^D+(x_0)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma dt+\int_{\Sigma^N+(x_0)}(D_t\varphi)^2\,d\sigma dt+\int_{\Sigma^N-(x_0)}|\nabla_T\varphi|^2\,d\sigma dt$$

On déduit que

$$\langle\Lambda\{\varphi_0,\varphi_1\},\{\varphi_0,\varphi_1\}\rangle=\|(\varphi_0,\varphi_1)\|_F^2 \tag{3.3.13}$$

et alors Λ est un isomorphisme de F dans F'.il existe alors $\{\varphi_0,\varphi_1\}\in F\subset V\times L^2(\Omega)$ où

$$\{\varphi_0,\varphi_1\}\in D_A\times V\subset F\subset V\times L^2(\Omega)$$

tel que

$$\Lambda\{\varphi_0,\varphi_1\}=\left\{\psi'(0)\,,-\psi(0)\right\}. \tag{3.3.14}$$

où ψ solution est l'unique solution faible au sens de (3.3.8) de l'équation des ondes avec

$$\psi(0)=u_0\ ,\ \ \psi'(0)=u_1$$

et le contrôle

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}=\begin{cases} D_t\varphi & \text{sur}\quad \Sigma^N+(x_0)\\ \nabla_T\varphi & \text{sur}\quad \Sigma^N-(x_0)\end{cases}$$

tel que $u(T)=u'(T)=0$.

L'unicité de (3.3.10) permet de pose $\psi\equiv\varphi$, alors toute solution de (P) vérifié

$$u(T)=u'(T)=0.$$

Alors (P) est exactement contrôlable. ■

3.3.2 Domaine régulier

Position du problème

On se basant toujours sur les résultat de[4] .Soit Ω un ouvert polygonal de classe$C^2(\Omega)$.

Les élément de D_A tels que

$$\varphi \in H_0^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \Delta\varphi \in L^2(\Omega)$$

n'implique pas que

$$\varphi \in H^s(\Omega) \quad \text{avec } s > \frac{3}{2}.$$

Alors, on sait que

$$D_A \subset Span\left\{H^2(\Omega), \varphi_i,\ M_i \in \Sigma\right\}.$$

où $A = (-\Delta)$ et grâce au problème (2.3.7), (2.3.8) et (2.3.9) qu'il existe $c_i \in \mathbb{R}$ et $u_R \in H^2(\Omega)$ tels que

$$u = u_R + \sum_{M_i \in \Sigma} c_i u_i. \tag{3.3.15}$$

Les raisonnements pour montrer ne sont pas vrais dans ce cas, car pour $s \leq \frac{3}{2}$, les épaces $H^{2-s}(\Omega)$ et $H^{s-2}(\Omega)$ ne seraient plus en dualité et que

$$2 - s \notin]0, 1/2[.$$

Alors l'identité directe devient une inégalité si Ω est un ouvert à frontière de classe C^2.

On remarque que pour $s = \frac{3}{2}$ au sommet $M_i \in \Sigma^s$(ou $M_i \in \Sigma^c$) :

$$\varphi_s = \sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \notin H^{\frac{3}{2}}(\Omega) \tag{3.3.16}$$

car

$$\frac{\partial u_i}{\partial \nu} \notin L^2(\Gamma)$$

En effet : Comme

$$|\nabla u_i| = \left|\frac{\partial u_i}{\partial r}e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u_i}{\partial \theta}e_\theta\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{r}} + \frac{1}{r}\frac{\sqrt{r}}{2} = \frac{1}{\sqrt{r}}$$

et l'intégrale

$$\int_\Sigma \left|\frac{\partial u_i}{\partial \nu}\right|^2 d\sigma dt \quad i \underset{r \longrightarrow 0}{\rightarrow} +\infty .$$

On garde les mêmes notations aue au problème (P).

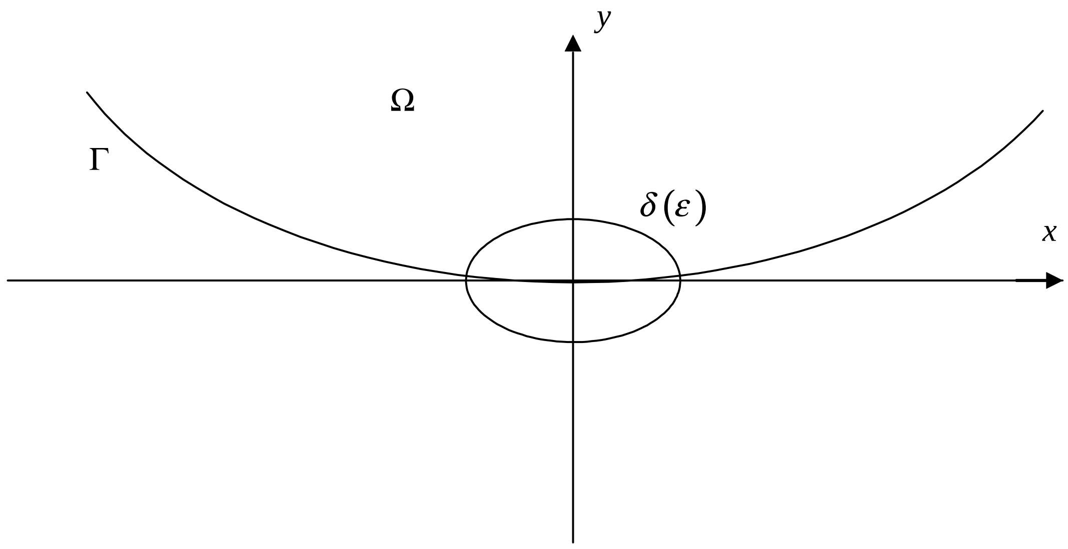


Fig1.5. Ouvert regulier

On considère la solution u du problème de Cauchy -Dirichlet-Neumann pour l'équation des ondes

$$(Q)\quad \begin{cases} u'' - \Delta u = 0 \quad \text{dans } Q \\ u = v \quad \text{sur} \quad \Sigma^D + (x_0) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = w^+ \text{ sur } \; \Sigma^N + (x_0) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = w^- \text{ sur } \; \Sigma^N - (x_0) \\ u(T) = u'(T) = 0 \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

Le problème de contrôlabilité exacte consiste à chercher un temps T tel que pour toutes données de Cauchy $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, il existe des contrôles v, w^+ et w^- telles que si u est la solution de (Q), on ait

$$u(T) = u'(T) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Résultats préliminaires pour l'équation des ondes

Soit φ solution du problème (3.3.1) tel que $\varphi \in C(0, T; D_A) \cap C^1(0, T; V)\, C^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Proposition 3.15. *L'espace $D_A \cap Span\left\{C^1\left(\overline{\Omega}\right); u_S, M_j \in \Sigma\right\}$ est dense dans D_A.*

Preuve. C.f[18] . ■

Remarque 3.8. *proposition 3.15 montre qu'on peut approcher toute φ de D_A par des fonctions φ de la forme* (3.3.15) , *avec $\varphi_R \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$.On applique la méthode de multiplicateur, on choisire x_0 et utilise le multiplicateure*

$$m = (x - x_0)$$

où $m \in W^{1,\infty}(\Omega)^2$ et en tout point $S \in \Sigma$

$$m.\nu = 0 \quad sur\ \Gamma.$$

L'identité directe

Théorème 3.16. *On suppose que $m(x) = (x - x_0)$ et que $m.\nu = 0$ en un point $s \in \Sigma$.Alors on a l'identité*

$$\int_\Omega \Delta\varphi m \nabla\varphi dxdt = \frac{1}{2}\int_{\Gamma^D} m.\nu \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma - \frac{1}{2}\int_{\Gamma^N} m.\nu \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^2 d\sigma \tag{3.3.17}$$
$$+\frac{\pi}{8}\sum_{S\in\Sigma^s} c_s^2 m(s).\tau_s - \frac{\pi}{8}\sum_{S\in\Sigma^c} c_s^2 m(s).\tau_s$$

pour tout $\varphi \in D_A$ où $\varphi - \sum_{S\in\Sigma^s} c_s\varphi_s \in H^2(\Omega)$.

Preuve. On effectue les intégrations par parties sur un sous domaine $\Omega(\varepsilon)$ qui approche Ω enexcluant les disques de rayon ε centrés aux points $M_j \in \Sigma$.

$$\operatorname{div} m = 2$$

$$D_k m_l = \begin{cases} 1, k = l \\ 0, k \neq l \end{cases}$$

Comme au pareagraphe 4.1 il vient

$$\int_{\Omega(\varepsilon)} \Delta\varphi m\nabla\varphi dxdt = -\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega 2.|\nabla\varphi|^2 dx + \int_{\Gamma(\varepsilon)} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} m\nabla\varphi d\sigma - \frac{1}{2}\int_{\Gamma(\varepsilon)} m.\nu |\nabla\varphi|^2 d\sigma$$

donc

$$\int_{\Omega(\varepsilon)} \Delta\varphi m\nabla\varphi dxdt = \int_{\Gamma(\varepsilon)} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right) m\nabla\varphi d\sigma - \frac{1}{2}\int_{\Gamma(\varepsilon)} m.\nu |\nabla\varphi|^2 d\sigma$$

où $\Gamma(\varepsilon)$ disigne la frontière de $\Omega(\varepsilon)$.

$$\int_{\Omega(\varepsilon)} \Delta\varphi m\nabla\varphi dxdt = \left(-\frac{1}{2}\right)\int_{\Gamma(\varepsilon)} m.\nu \left[\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^2\right] d\sigma + \int_{\Gamma(\varepsilon)} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\left\{m.\nu\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} + m.\tau\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right\} d\sigma$$

car

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\nu + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\tau$$

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}, \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)$$

$$|\nabla\varphi|^2 = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^2$$

où $\vec{\nu}$ le vécteur unitaire normale , $\vec{\tau}$ véctaire unitaire tangent

$$\int_{\Omega(\varepsilon)} \Delta\varphi m\nabla\varphi dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma(\varepsilon)} m.\nu \left[\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 - \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^2\right] d\sigma \tag{3.3.18}$$

$$+\int\limits_{\Gamma(\varepsilon)} m.\tau\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}d\sigma$$

on notera $\gamma(\varepsilon) = \Gamma - (\Gamma(\varepsilon) \cap \Gamma)$; $\gamma(\varepsilon)$ est donc réunion finie d'arcs de cercles centrés en M_j .On a évidement

$$\int_{\Omega(\varepsilon)} \Delta\varphi m\nabla\varphi dxdt \underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \int_{\Omega} \Delta\varphi m\nabla\varphi dxdt. \tag{3.3.19}$$

Ensuite on va passer à la limite dans les intégrales de bord en considérantséparément les contributions de $\Gamma \cap \Gamma(\varepsilon)$ et de $\gamma(\varepsilon)$.

A en ce qui concerne l'intégrale sur $\Gamma \cap \Gamma(\varepsilon)$

$$\int\limits_{\Gamma(\varepsilon)\cap\Gamma} m.\nu \left[\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 - \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^2\right] d\sigma \underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \int\limits_{\Gamma} m.\nu \left[\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 - \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^2\right] d\sigma \tag{3.3.20}$$

La convergence est justifiée par le fait que

$$m.\nu\,|\nabla\varphi|^2 \in L^\infty(\Gamma)$$

Puisque

$$|\nabla\varphi|^2 = O\left(\frac{1}{d(x,\Sigma)}\right)$$

$$m.\nu = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

alors

$$m.\nu = O(d(x,\Sigma)) \quad \text{car } |m.\nu| < C.d(x,\Gamma)$$

Par ailleurs

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \text{ .}$$

donc

$$\int\limits_{\Gamma\cap\Gamma(\varepsilon)} m.\tau\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}d\sigma = 0 \underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} \int\limits_{\Gamma} m.\tau\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}d\sigma = 0 \tag{3.3.21}$$

B. Considérons à présent la contribution d'un des arcs des cercles composant $\gamma(\varepsilon)$. On va calcule

$$I(\varepsilon) = \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma(\varepsilon)} m.\nu\left[\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 - \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^2\right]d\sigma + \int\limits_{\gamma(\varepsilon)} m.\tau\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}d\sigma \tag{3.3.22}$$

On a

$$\psi = \varphi - c_s.\varphi_s \in C^1(\Omega)$$

Considérant $I(\varepsilon)$ comme une forme quadratique en φ ,il vient

$$I(\varepsilon) = I_\varepsilon(\varphi,\varphi) = I_\varepsilon(\psi,\psi) + 2c_sI_\varepsilon(\psi,\varphi_s) + c_s^2I_\varepsilon(\varphi_s,\varphi_s)$$

puisque

$$|\nabla\psi| = O(1) \quad \text{car } |\nabla\psi| \leq |\varphi| + |c_s.\varphi_s| \leq C_1 + C_2 = K$$

$$|\nabla\varphi_s| = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \quad \text{car } |\nabla\varphi_s| = \left|\sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \leq C.\frac{1}{d(x,\Gamma)} = \frac{C}{\sqrt{r}}$$

prés de 0 en r, on a

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} I_\varepsilon(\varphi,\varphi) = c_s^2\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} I_\varepsilon(\varphi_s,\varphi_s). \tag{3.3.23}$$

Il reste à calculer $I_\varepsilon(\varphi_s,\varphi_s)$.

i) On suppose $M_j \in \Sigma^s$,alors

$$\varphi_s = \sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

On va calculer explicitement sur $\gamma(\varepsilon)$,la quantité à intégre

$$q = \frac{1}{2}m.\nu\left[\left|\frac{\partial\varphi_s}{\partial\nu}\right|^2 - \left|\frac{\partial\varphi_s}{\partial\tau}\right|^2\right] + m.\tau\frac{\partial\varphi_s}{\partial\nu}\frac{\partial\varphi_s}{\partial\tau}$$

$$= -\frac{1}{2}m_r\left[\left|\frac{\partial\varphi_s}{\partial r}\right|^2 - \frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial\varphi_s}{\partial\theta}\right|^2\right] - m_\theta\left(\frac{\partial\varphi_s}{\partial r}\right)\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi_s}{\partial\theta}\right)$$

où m_r et m_θ sont respectivement les composantes radiales et angulaires de m .

Comme on a supposé $m.\nu = 0$ en 0 , le points x_0 à pour coordonnées $(L,0)$ d'où

$$m = \{x - L, y\}^T$$

$$m_r = (x-L)\cos\theta + y\sin\theta$$

$$m_\theta = -(x-L)\sin\theta + y\cos\theta$$

Par aillairs on a

$$\frac{\partial\varphi_s}{\partial r} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_s}{\partial\theta} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

donc

$$\begin{aligned} q &= \frac{m_r}{8r}\left\{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\} + \frac{m_\theta}{4r}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{1}{8r}\left[m_r\cos\theta - m_\theta\sin\theta\right] \\ &= \frac{1}{8r}(x-L) \end{aligned}$$

on conclut

$$\int\limits_{\gamma(\varepsilon)} q d\sigma = \frac{1}{8}\int\limits_0^1\int\limits_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)}\frac{1}{8}(\varepsilon\cos\theta - L)\,\varepsilon d\theta d\varepsilon =$$
$$\frac{1}{8}\int\limits_0^1\int\limits_0^\pi(\varepsilon\cos\theta - L)\,d\theta d\varepsilon = \int\limits_0^1\frac{1}{8}\left[\varepsilon\sin\theta - L\theta\right]_0^\pi d\varepsilon = \frac{(-\pi L)}{8}$$

où

$$a(\varepsilon)\underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0, \quad b(\varepsilon)\underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow}\pi$$

et donc

$$\int\limits_{\gamma(\varepsilon)} q d\sigma \longrightarrow \frac{(-\pi L)}{8} \tag{3.3.24}$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} I_\varepsilon(\varphi,\varphi) = \frac{(-\pi L c_s^2)}{8} \tag{3.3.25}$$

ii) On suppose $M_j \in \Sigma^c$, alors

$$\varphi_s = \sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

un calcule tout à fait analogue montre que

$$q = \frac{1}{8r}(-x+L)$$

et

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} I_\varepsilon(\varphi,\varphi) = \frac{\pi L c_s^2}{8} \tag{3.3.26}$$

Grâce à (3.3.24),(3.3.25) et (3.3.26) on peut passer à la limite dans (3.3.23). D'ou (3.3.17).

■

Remarque 3.9. *Remarquant que dans les notations précidantes $m(s).\tau_s$ devient $(-L)$,l'abscisse de x_0 dans les coordonnées locales attachées à M_j .*

Corollaire 3.1. *On suppose que $m.\nu = 0$ en tout point M_j de Σ ou $m(x) = x - x_0$.On suppose que de plus que*

$$m(s).\tau \geq 0 \quad sur\ \Sigma^c$$

$$m(s).\tau \leq 0 \quad sur\ \Sigma^s$$

alors on a

$$\int_\Omega \Delta\varphi m\nabla\varphi dxdt \leq \frac{1}{2}\int_\Gamma m.\nu \left\{ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 - \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^2 \right\} d\sigma$$

pour tout $\varphi \in D_A$.

L'inégalité inverse

On montre maintenant l'inégalité inverse qui permet de majorer l'énergie de la solution φ de (3.3.1), qui est nécessaire dans l'application de la méthode HUM.

Proposition 3.17. *.Pour tout T_0 et tout solution $\varphi \in C(0,T;D_A) \cap C^1(0,T;V) \cap C^2(0,T;L^2(\Omega))$ solution de*

$$\varphi'' - \Delta\varphi = 0$$

on a

$$(T - T_0) E(0) \leq C \left\{ \int_{\Sigma^N+(x_0)} m.\nu \left(\varphi'\right)^2 d\sigma dt + \int_{\Sigma^D+(x_0)} m.\nu \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma dt - \int_{\Sigma^N-(x_0)} m.\nu \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2 d\sigma dt \right\} \tag{3.3.27}$$

Preuve. On suppose que $\varphi \in C(0,T;D_A) \cap C^1(0,T;V) \cap C^2(0,T;L^2(\Omega))$ et d'aprés le corollaire 4.3 on a

$$0 = \int_Q \left(\varphi'' - \Delta\varphi\right) m.\nu dxdt \geq \left[\int_\Omega \varphi' m\nabla\varphi dx\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_Q 2\left(\varphi'\right)^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_{\Sigma^N} m.\nu \left(\varphi'\right)^2 d\sigma dt$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\Sigma^D} m.\nu \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma dt + \frac{1}{2}\int_{\Sigma^N} m.\nu \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2 d\sigma dt$$

où $\varphi = 0 \quad \text{sur } \Gamma^D$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^N$. Par ailleurs

$$\begin{aligned}\int\limits_Q \left(\varphi'\right)^2 dxdt &= \frac{1}{2}\int\limits_Q \left\{\left(\varphi'\right)^2 - |\nabla\varphi|^2\right\} dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_Q \left\{\left(\varphi'\right)^2 + |\nabla\varphi|^2\right\} dxdt \\ &= \frac{1}{2}\left[\int\limits_\Omega \varphi'\varphi dx\right]_0^T + TE(0)\end{aligned}$$

où $\displaystyle\int\limits_Q \left\{\left(\varphi'\right)^2 - |\nabla\varphi|^2\right\} dxdt = \left[\int\limits_\Omega \varphi'\varphi dx\right]_0^T$ d'où

$$TE(0) - \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma^N-(x_0)} m.\nu\left(\varphi'\right)^2 d\sigma dt - \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma^D-(x_0)} m.\nu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma dt + \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma^N+(x_0)} m.\nu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2 d\sigma dt$$

$$\leq -\left[\int\limits_\Omega \varphi' m\nabla\varphi dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \varphi'\varphi dx\right]_0^T + \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma^N+(x_0)} m.\nu\left(\varphi'\right)^2 d\sigma dt$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma^D+(x_0)} m.\nu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma dt - \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma^N-(x_0)} m.\nu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2 d\sigma dt$$

où

$$\left|\left[\int\limits_\Omega \varphi' m\nabla\varphi dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \varphi'\varphi dx\right]_0^T\right| \leq 2\max_\Omega \|m\| . E(0) + \frac{1}{\lambda}E(0)$$

Supposons encore

$$\begin{aligned}\varphi' &= 0 \quad \text{sur}\Sigma^N - (x_0) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} &= 0 \quad \text{sur}\Sigma^D - (x_0) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} &= 0 \quad \text{sur}\Sigma^N + (x_0)\end{aligned}$$

et

$$T_0 = 2\max_\Omega \|m\| + \frac{1}{\lambda}$$

Il existe alors deux constantes C et T_0 où (3.3.27) est vérifié. ■

Théorème d'unicité

Théorème 3.18. *Si $\varphi = \varphi(x,t)$ vérifie (3.3.1) pour des données $\{\varphi_0, \varphi_1\} \in D_A \times V$ et les conditions*

$$\begin{cases}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \quad sur\ \Sigma^D + (x_0) \\ \varphi' = 0 \quad sur \Sigma^N + (x_0) \\ \nabla_T\varphi = 0 \quad sur\Sigma^N - (x_0)\end{cases} \tag{3.3.28}$$

sont vérifiées alors

$$\varphi \equiv 0 \quad \textit{dans } Q.$$

Preuve. On utilise le théorème d'unicité de $Holmgren$. ■

Proposition 3.19. *Sous l'hypothèse du corollaire 3.1 il existe T_0 tel que pour $T > T_0$ l'application*

$$\{\varphi_0, \varphi_1\} \mapsto \|\{\varphi_0, \varphi_1\}\|_{D_A \times V} \tag{3.3.29}$$

où

$$\|\{\varphi_0, \varphi_1\}\| = \left(\int_{\Sigma^N + (x_0)} m.\nu \left(\varphi'\right)^2 d\sigma dt + \int_{\Sigma^D + (x_0)} m.\nu \left(\tfrac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma dt - \int_{\Sigma^N - (x_0)} m.\nu \left(\tfrac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)^2 d\sigma dt \right).$$

Preuve. 1. Si$\{\varphi_0, \varphi_1\} = \{0, 0\}$ alors $\|\{\varphi_0, \varphi_1\}\| = 0$.

2. Si $\|\{\varphi_0, \varphi_1\}\| = 0$ implique $\{\varphi_0, \varphi_1\} = \{0, 0\}$ si (3.3.28) est vérifie .

L'application $\{\varphi_0, \varphi_1\} \mapsto \|\{\varphi_0, \varphi_1\}\|$décrit une norme si le condition duthéorème d'unicité 4.3.6 est vérifie. On peut définir l'espace F comme complété de $D_A \times V$ pour cette norme et on a la double inclutionalgèbrique et topologique

$$D_A \times V \subset F \subset V \times L^2(\Omega)$$

et

$$V' \times L^2(\Omega) \subset F'$$

■

Corollaire 3.2. *Sous l'hypothèse du corollaire 4.3, on suppose $\{\varphi_0, \varphi_1\} \in F$ et $f \in L^1(0, T; Y)$ alors*

il existe une unique

$$\varphi \in C(0, T; V) \cap C^1\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \tag{3.3.30}$$

solution de

$$\begin{cases} \varphi''(t) - \Delta\varphi(t) = f(t), t \in [0, T] \\ \varphi(0) = \varphi_0, \varphi'(0) = \varphi_1 \end{cases} \tag{3.3.31}$$

de plus cette solution vérifié

$$\sqrt{-m.\nu}\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \in L^2\left(\Sigma^N - (x_0)\right)$$

$$\sqrt{m.\nu}\varphi' \in L^2\left(\Sigma^N + (x_0)\right) \tag{3.3.32}$$
$$\sqrt{m.\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \in L^2\left(\Sigma^D + (x_0)\right).$$

Théorème 3.20. *Sous les hypothèses du corollaire4.3 pour* $u_0 \in L^2(\Omega), u_1 \in V', \frac{w}{\sqrt{m.\nu}} \in L^2\left(\Sigma^D + (x_0)\right), \frac{\nu_+}{\sqrt{m.\nu}} \in L^2\left(\Sigma^N + (x_0)\right), \frac{\nu_-}{\sqrt{m.\nu}} \in L^2\left(\Sigma^N - (x_0)\right)$ *données, il existe une unique*

$$u \in C\left([0,T];V'\right) \tag{3.3.33}$$

Théorème 3.21. *telle que*

$$\int_\Omega uf dxdt = \int_\Omega \left\{u_1\varphi(0) - u_0\varphi'(0)\right\} dx + \tag{3.3.34}$$
$$\int_{\Sigma^D(x_0)} w\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} d\sigma dt - \int_{\Sigma^N+(x_0)} \nu_+\varphi' d\sigma dt - \int_{\Sigma^N-(x_0)} \nu_-\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} d\sigma dt$$

pour tout $f \in L^1(0,T;V)$ *où* φ *vérifié (3.3.31) et* $\varphi(T) = \varphi'(T) = 0$.

Preuve. Par le corollaire 3.2 le membre de droit de l'identité (3.3.33) dépend continument de f , ce qui établit l'existence et l'unicité de $u \in L^\infty\left(0,T;V'\right)$; la dépendance continue par rapport aux données implique alors (3.3.33). ■

Remarque 3.10. *On établit comme au paragraphe précédent que* $\left\{u'(T), u(T)\right\} \in F'$.

Théorème 3.22. *On suppose que* $m.\nu = 0$ *en tout point de* Σ *ou* $m(x) = (x - x_0)$ *et que*

$$m.\tau \geq 0 \quad \text{en tout } M_j \in \Sigma^c$$

$$m.\tau \leq 0 \quad \text{en tout } M_j \in \Sigma^s$$

Il existe un temps T_0 *tel que pour tout* $T > T_0$,*tout* $u_0 \in L^2(\Omega), u_1 \in V'$,*il existe* $w \in L^2\left(\Sigma^D + (x_0)\right), \nu_+ \in L^2\left(\Sigma^N + (x_0)\right), \nu_- \in L^2\left(\Sigma^N - (x_0)\right)$, *tels que* $u \in C\left([0,T];V'\right)$*solution faible au sens de (3.3.8) de l'équation des ondes homogène avec donnée de cauchy* $\{\varphi_0, \varphi_1\}$,*donnée de Dirichlet* w *sur* $\Sigma^D + (x_0)$,0 *sur* $\Sigma^D - (x_0)$,*et donnée de Neumann* w'_+ *sur* $\Sigma^N + (x_0)$, $\frac{\partial w_-}{\partial\tau}$ *sur* $\Sigma^N - (x_0)$ *vérifié* $u(T) = u'(T) = 0$.

Preuve. On applique la méthode HUM :

1. Soit φ solution de l'équation des ondes vérifié (3.3.9). Le problème(3.3.9) admet unique solution comme au cas convexe.

2. Ensuite on considère le problème rétrograde en ψ :

Il existe $\psi \in C\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right) \cap C^1\left(0,T;H^{-1}\left(\Omega\right)\right)$ solution de

$$\left\{\begin{array}{c} \psi^{''} - \Delta\psi = 0 \qquad \text{dans } Q \\ \psi = (m.\nu)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \qquad \text{sur}\Sigma^D + (x_0) \\ \frac{\partial\psi}{\partial\nu} = \left\{\begin{array}{ll} (m.\nu)\,D_t\left(D_t\varphi\right) & \text{sur}\Sigma^N + (x_0) \\ (-m.\nu)\,\Delta_T\varphi & \text{sur}\Sigma^N - (x_0) \end{array}\right. \\ \psi\left(T\right) = \psi^{'}\left(T\right) = 0 \end{array}\right. \tag{3.3.35}$$

pour tout $f \in L^1\left(0,T;V\right)$ où η solution de

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi \in C\left(0,T;V\right) \cap C^1\left(0,T;\ L^2\left(\Omega\right)\right), \\ \eta^{''}\left(t\right) - \Delta\eta\left(t\right) = f\left(t\right) \qquad ,t \in [0,T], \\ \eta\left(0\right) = 0 \ \ , \ \ \eta^{'}\left(0\right) = 0 \ \ \text{dans } \Omega. \end{array}\right.$$

3. On définit alors l'espace

$$F \text{ complété de } D_A \times V \text{ par rapport à la norme } \|.\|_F$$

où $F^{'}$ dual de$F$ par la double inclusion algebrique et topologique

$$D_A \times V \subset F \subset V \times L^2\left(\Omega\right)$$

F est un espace de Hilbert. On définit l'opérateur Λ par $\Lambda\left\{\varphi_0,\varphi_1\right\} = \psi^{'}\left(0\right), -\psi\left(0\right)$ qui est linéaire continue de F dans $F^{'}$.

Pour calculer $\left\langle \Lambda\left\{\varphi_0,\varphi_1\right\},\left\{\varphi_0,\varphi_1\right\}\right\rangle$ en approchant φ , ψ et f par des fonctions plus régulières φ_m, ψ_m et f_m respectivements. Si

$$\varphi_m \in C\left(0,T;D_A\right) \cap C^1\left(0,T;\ V\right) \cap C^2\left(0,T;\ L^2\left(\Omega\right)\right)$$

et

$$\psi_m \in C\left(0,T;H^1\left(\Omega\right)\right) \cap C^1\left(0,T;\ L^2\left(\Omega\right)\right)$$

aussi

$$f_m \in L^1\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right)$$

on trouve

$$\int_Q \psi_m f_m dxdt = \left[\int_\Omega \left(\psi_m\varphi_m' - \psi_m'\varphi_m\right)dx\right]_0^T + \int_\Sigma \left\{\varphi_m\left(\frac{\partial\psi_m}{\partial\nu}\right) - \psi_m\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial\nu}\right)\right\}d\sigma dt$$

à la limite lorsque $f = 0$

$$\langle \Lambda \{\varphi_0, \varphi_1\}, \{\varphi_0, \varphi_1\} \rangle = -\int_\Omega \left\{ \psi' (0) \varphi_0 - \psi (0) \varphi_1 \right\} dx = \int_\Sigma \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} d\sigma dt - \int_\Sigma \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma dt$$

$$\int_\Omega \left\{ \psi' (0) \varphi_0 - \psi (0) \varphi_1 \right\} dx = \int_{\Sigma^D + (x_0)} m.\nu \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} . \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma dt - \langle m.\nu D_t (D_t \varphi), \varphi \rangle - \langle m.\nu \Delta_T \varphi, \xi \rangle .$$

où

$$\begin{aligned} \langle D_t (D_t \varphi), \xi \rangle_{H^{-1}(0,T;L^2(\Sigma^N + (x_0))) \times H^1(0,T;L^2(\Sigma^N + (x_0)))} &= -\int_{\Sigma^N + (x_0)} D_t \varphi . D_t \xi d\sigma dt, \\ \forall \xi &\in H^1 \left(0, T; L^2 \left(\Sigma^N + (x_0)\right)\right) \end{aligned}$$

et

$$\langle \Delta_T \varphi, \xi \rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Sigma^N - (x_0)))} = \langle \mathrm{div}_T \nabla_T \varphi, \xi \rangle = - \langle \nabla_T \varphi, \nabla_T \xi \rangle = - \int_{\Sigma^N - (x_0)} \nabla_T \varphi . \nabla_T \xi d\sigma dt$$

où div_T est l'opérateur de divergence tangentiel et ∇_T est le gradient tangentiel vérifiant :

$$\mathrm{div}_T \quad \text{l'opérateur adjoint de } \nabla_T.$$

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \nu + \nabla_T \varphi = \nabla_T \varphi \quad \text{car } \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur} \Gamma^N.$$

$$\nabla_T \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \tau ; \quad \overrightarrow{\tau} (\tau_1, \tau_2)^T$$

où $\overrightarrow{\tau}$ vécteure unitaire tangent. On trouve

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left\{ \psi' (0) \varphi_0 - \psi (0) \varphi_1 \right\} dx &= \int_{\Sigma^D + (x_0)} m.\nu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma dt - \int_{\Sigma^N + (x_0)} \varphi m.\nu D_t (D_t \varphi) d\sigma dt \\ &- \int_{\Sigma^N - (x_0)} \varphi (-m.\nu) . \Delta_T \varphi d\sigma dt. \end{aligned}$$

C-à-d

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left\{ \psi' (0) \varphi_0 - \psi (0) \varphi_1 \right\} dx &= \int_{\Sigma^D + (x_0)} m.\nu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma dt + \int_{\Sigma^N + (x_0)} m.\nu (D_t \varphi)^2 d\sigma dt \\ &+ \int_{\Sigma^N - (x_0)} (-m.\nu) (.\nabla_T \varphi)^2 d\sigma dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \Lambda \{\varphi_0, \varphi_1\}, \{\varphi_0, \varphi_1\} \rangle &= \int_{\Sigma^D + (x_0)} m.\nu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma dt + \int_{\Sigma^N + (x_0)} m.\nu (D_t \varphi)^2 d\sigma dt \\ &+ \int_{\Sigma^N - (x_0)} (-m.\nu) . \tau^2 . \left(. \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2 d\sigma dt \end{aligned}$$

où

$$\tau\begin{pmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad \tau^2=1$$

Ce qui est équivalent à

$$\langle\Lambda\{\varphi_0,\varphi_1\},\{\varphi_0,\varphi_1\}\rangle=\|\{\varphi_0,\varphi_1\}\|^2$$

On a

$$\begin{aligned}|\langle\Lambda\{\varphi_0,\varphi_1\},\{\varphi_0,\varphi_1\}\rangle| &= \left|\int\limits_{\Omega}\left\{\psi'(0)\varphi_0-\psi(0)\varphi_1\right\}dx\right|\leq\beta E(0) \qquad (3.3.36)\\ &\leq \beta\|\{\varphi_0,\varphi_1\}\|_F^2\\ &= \beta\|\{\varphi_0,\varphi_1\}\|_F^2\cdot\|\{\varphi_0,\varphi_1\}\|_F^2\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité inverse, Λ est continue. L'inégalité (3.3.36) nous permet de prolonger Λ (de manière unique) en un opérateurlinéaire continu de F dans F'

$$\Lambda:F\longrightarrow F'$$

Comme

$$\langle\Lambda\{\varphi_0,\varphi_1\},\{\varphi_0,\varphi_1\}\rangle=\langle\{\varphi_0,\varphi_1\},\Lambda\{\varphi_0,\varphi_1\}\rangle$$

ce implique

$$\Lambda=\Lambda^*$$

où Λ^* désigne l'opérateur adjoint de Λ. En résulte que Λ est un isomorphisme de F dans F'.

La forme bilineaire associée à Λ est coercive car

$$\begin{aligned}\langle\Lambda\{\varphi_0,\varphi_1\},\{\varphi_0,\varphi_1\}\rangle &= \left\{\int\limits_{\Sigma^N+(x_0)} m.\nu\left(\varphi'\right)^2 d\sigma dt+\int\limits_{\Sigma^D+(x_0)} m.\nu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma dt\right.\\ &\left.-\int\limits_{\Sigma^N-(x_0)} m.\nu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2 d\sigma dt\right\}\\ &\geq \frac{C}{(T-T_0)}E(0)=\frac{C}{(T-T_0)}\left|\!\left|\!\left|\{\varphi_0,\varphi_1\}\right|\!\right|\!\right|_F^2\end{aligned}$$

4. L'unicité du problème rétrograde permet de dire que $u\equiv\psi$ pour tout $\psi\in C\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\cap C^1\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$.Pour $u_0\in L^2(\Omega)$, $u_1\in V'$données ,on a

$$\{u_1,-u_0\}\in V'\times L^2(\Omega)\subset F'.$$

Il existe donc $\{\varphi_0, \varphi_1\} \in F \subset V \times L^2(\Omega)$ solution de

$$\Lambda \{\varphi_0, \varphi_1\} = \{u_1, -u_0\}$$

où $m.\nu = 0$ et $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times V'$. Il existe des contrôles un temps T_0 tel que pour tout $T > T_0$

, il existe un contrôle sur Σ tel que

$$u \in C\left([0, T]; V'\right)$$

vérifie $u(T) = u'(T) = 0$. ■

3.3.3 Domaine fissuré

Introduction

En point de vue physique les lévres de la fissure (rebroussement vers l'interieure) portent une condition de Neumann. Considérons le cas d'un domaine plan avec seulement une fissure portée par le demi-axe positif des abcisses. On suppose que la fissure a pour extrémité (fonddefissure) l'origine et que le reste de la frontière est régulière (de classe C^2).On suppose également que les ensembles $\overline{\Gamma}^D$et $\overline{\Gamma}^N$ ne se rencontrent pas pour éviter la situation déja considérée au paragraphe 3.3.2. On a supposé Γ^D non vide pour évité des problèmes de non unicité, d'où la présence d'au moins un trou conformément à la figure 1.4. On sait alors que

$$D_A \subset Span\left\{H^2(\Omega); \varphi_S\right\}; \quad \omega_j = 2\pi$$

où

$$\varphi_S = \sqrt{r}\cos(\theta/2)$$

Il est claire comme au paragraphe 3.3.1 que

$$\int_\Gamma m.\nu \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma \underset{r\longrightarrow 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ceci nous oblige à choisir un point x_0 porté par l'axe $X'OX$ dans le cas de la figure1.4. Le résultat de densité de la proposition 3.15 est encore valable.

L'identité directe

Théorème 3.23. [4] *On suppose que $m(x) = x - x_0$ avec x_0 porté par l'axe des x, alors on a l'identité suivante :*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta\varphi m \nabla\varphi dxdt &= \frac{1}{2}\int_{\Gamma^D} m.\nu \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_{\Gamma^N} m.\nu \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^2 d\sigma + \left(\frac{\pi}{4}\right) Lc_s^2 \end{aligned} \tag{3.3.37}$$

Pour tout $\varphi \in D_A$ où $\varphi - c_s\varphi_s \in H^2(\Omega)$ et $x_0 = (0, L)$.

Preuve. l'angle représenté pour cette fissure est $\omega_j = (2\pi - \varepsilon)$ où $\varepsilon \ll 0$.

$$\varphi_S = \sqrt{r}\cos(\theta/2)$$

où $S \in \Sigma^c$.

$$\frac{\partial\varphi_s}{\partial r} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_s}{\partial\theta} = -\left(\frac{1}{2\sqrt{r}}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta\varphi m\nabla\varphi dxdt &= \lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{1}{2}\int_{\Gamma(\varepsilon)} m.\nu \left[\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 - \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^2\right] d\sigma \\ &\quad + \lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\int_{\Gamma(\varepsilon)} m.\nu \left[\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 - \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^2\right] d\sigma + \lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\int_{\gamma(\epsilon)} q d\sigma \end{aligned}$$

$$a(\varepsilon) \underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0, \quad b(\varepsilon) \underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 2\pi.$$

où

$$\int_{\gamma(\epsilon)} d\sigma = \int_0^1\int_0^{2\pi} \varepsilon d\theta d\varepsilon$$

car $\omega_j = 2\pi$.

$$I(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} I_\epsilon(\varphi,\varphi) = c_s^2 \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} I_\epsilon(\varphi_s,\varphi_s)$$

et

$$I_\epsilon(\varphi_s,\varphi_s) = \int_{\gamma(\epsilon)} q d\sigma$$

La quantité à intégrer q sur $\gamma(\epsilon)$ devient :

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{8r}\left[-m_r \cos\theta + m_\theta \sin\theta\right] \\ &= \frac{1}{8r}\left[(-\cos\theta).((x-L)\cos\theta + y\sin\theta) + (\sin\theta).(-(x-L)\sin\theta + y\cos\theta)\right] \end{aligned}$$

où m_r et m_θ sont respectivement les composantes radiales et angulaires de m alors

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(\epsilon)} q d\sigma &= \int_{\gamma(\epsilon)} (1/8r)(-x+L)\, d\sigma = \int_0^1\int_0^{2\pi} (1/8\varepsilon)(-\varepsilon\cos\theta + L)\,\varepsilon d\theta d\varepsilon \\ &= \int_0^1 (1/8)\left[-\varepsilon\sin\theta + L\theta\right]_0^{2\pi} d\varepsilon = \frac{1}{8}\int_0^1 d\varepsilon = \frac{2\pi L}{8} = \frac{\pi L}{4}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta\varphi m \nabla\varphi dxdt &= \frac{1}{2}\int_\Gamma m.\nu \left[\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 - \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^2\right] d\sigma + \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} I_\epsilon(\varphi,\varphi) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Gamma^D} m.\nu \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma - \frac{1}{2}\int_{\Gamma^N} m.\nu \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^2 d\sigma + \frac{\pi L}{4} \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 \quad \text{sur } \Gamma^D \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma^N \end{aligned}$$

et

$$a(\varepsilon) \underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0, \quad b(\varepsilon) \underset{\varepsilon\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 2\pi; \qquad \int_{\gamma(\epsilon)} d\sigma = \int_0^1\int_0^{2\pi} \varepsilon d\theta d\varepsilon$$

d'où (3.3.37).

La démonstration est tout à fait similaire à celle du théorème 3.17. Si on a $L \leq 0$ (c'est –à-dire que est dans le prolongement de la fissure) on a déduit l'inégalité

$$\int_\Omega \Delta\varphi m \nabla\varphi dxdt \leq \frac{1}{2}\int_{\Gamma^D} m.\nu \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma - \frac{1}{2}\int_{\Gamma^N} m.\nu \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^2 d\sigma$$

■

Remarque 3.11. *Si on a $L \leq 0$ (c'est-à-dire que x_0 est dans le prolongement de la fissure) on déduit l'inégalité*

$$\int_\Omega \Delta\varphi m \nabla\varphi dxdt \leq \frac{1}{2}\int_\Gamma m.\nu \left\{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 - \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^2\right\} d\sigma \quad \textit{pour tout } \varphi \in D_A.$$

A partir de là, les raisonnements sont les mêmes et il est inutile de les répéter.
La conclusion de l'application de méthode HUM est la suivante :

Théorème 3.24. *On suppose que le point x_0 est dans le prolongement de la fissure de l'ouvert Ω .*
Il existe un temps T_0 tel que pour tout $T > T_0$, tout $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u_1 \in V'$, il existe $w \in L^2(\Sigma^D + (x_0))$, $\nu_+ \in L^2(\Sigma^N + (x_0))$, $\nu_- \in L^2(\Sigma^N - (x_0))$ tels que $u \in C([0,T]; V')$ Solution faible de l'équation des ondes homogène avec données de Cauchy, donnée de Dirichlet w sur $\Sigma^D + (x_0)$, 0 sur $\Sigma^D - (x_0)$, et donnée de Neumann sur w'_+ sur $\Sigma^N + (x_0)$, $\frac{\partial w_-}{\partial \tau}$ sur $\Sigma^N - (x_0)$ vérifié $u(T) = u'(T) = 0$.

Preuve. On applique la méthode HUM comme au paragraphe 4.3 et les raisonnements sont les mêmes il est donc inutile de les répéter. ■

Remarque 3.12. *Le résultat ci –dessus se généralise aisément au cas d'un ouvert de classe C^2 présentant plusieurs points de rebroussements vers l'intérieur (ou fissures) à condition que x_0 soit à l'intersection de toutes les tangentes aux fonds de fissures et dans le prolongement de chacune d'elles.*

Chapitre 4

Problème inverse

Sommaire

4.1 Préliminaires

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, à frontière polygonale Γ et Γ^0une partie non vide de Γ. Pour $T > 0$, on note $Q_T = \Omega \times]0,T[$, $\Sigma_T = \Gamma \times]0,T[$ et $\Sigma_T^0 = \Gamma^0 \times]0,T[$, et on considère le problème

$$\begin{cases} u^{"}(x,t) = \Delta u(x,t) + \sigma(t) f(x) & \text{dans } Q_T, \\ u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où $\sigma \in C^1([0,T])$ fonction connue telle que

$$\sigma(0) \neq 0 \tag{4.1.2}$$

et f dans $L^2(\Omega)$ est l'inconnue. On suppose connu l'observation frontière:

$$\varphi = \frac{\partial u}{\partial \nu} \text{ sur } \Sigma_T^0 . \tag{4.1.3}$$

Notation 4.1. *1. On fixe arbitrairement $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et notons*

$$\Gamma^+ (x_0) = \{x \in \Gamma; (x - x_0, \nu (x))_{\mathbb{R}^2} > 0\}$$

$$R_0 = R_0 (x_0) = \sup \{|x - x_0|_{\mathbb{R}^2} ; x \in \Gamma\}$$

$$T > 2R_0 \tag{4.1.4}$$

$$\Gamma^0 \supset \Gamma^+ (x_0) . \tag{4.1.5}$$

2. On garde les notations de(1.2.16) et (1.2.17) avec $V = L^2 (\Gamma^0)$.

Remarque 4.1. *Si $\sigma \in C^1 [0, T]$, alors pour tout $f \in L^2 (\Omega)$, il existe unique solution*

$$u = u (f) \in C^1 \left([0, T] ; H_0^1 (\Omega)\right) \cap C^2 \left([0, T] ; L^2 (\Omega)\right)$$

de (4.1.1) et

$$\frac{\partial u (f)}{\partial \nu} \in H^1 \left(0, T; L^2 (\partial\Omega)\right)$$

De plus on a

$$\|u(f)\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|\acute{u} (f) \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_0 \|f\|_{L^2(\Omega)} . \tag{4.1.6}$$

De plus

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial \nu} (f)\right\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma))} \leq C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} \qquad \left(f \in L^2 (\Omega)\right) \tag{4.1.7}$$

(C.f. Annexe)où $u^{'} (x, 0) = \partial_t u (x, 0) = 0$.

Le problème inverse consiste à déterminer la source f à partir de la donnée $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ sur Σ_T^0 plus particulièrement il s'agit de montrer les deux points suivants:

1. Stabilité: Existe-t'il une constante $C_2 > 0$ tel que $\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu} (f)\right\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma^0))}$
2. Reconstruction: On établit un shéma de reconstruction du terme source f à partir de l'observation $\partial u/\partial \nu$ sur Σ_T^0.

4.2 Stabilité

Théorème 4.1. *Sous les hypothèses (4.1.2) et (4.1.4), il existe une constante $C_3 = C_3 (\Omega, \Gamma, T, x_0) > 0$ tel que*

$$C_3^{-1} \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu} (f)\right\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma^0))} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu} (f)\right\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma^0))} \tag{4.2.1}$$

pour tout f $\in L^2 (\Omega)$.

Preuve. Elle se faiten trois étaps

1^{ere} etape:

On considère le problème (4.2.1)

$$\begin{gathered}\varphi''(x,t) = \Delta\varphi(x,t) \qquad (x\in\Omega, t>0)\,,\\ \varphi(x,0)=0, \qquad \partial_t\varphi(x,0) = f(x) \qquad (x\in\Omega)\,,\\ \varphi(x,t)=0 \qquad (x\in\Gamma, t>0)\,.\end{gathered} \tag{4.2.2}$$

D'aprés le théorème 2.11, pour $f \in L^2(\Omega)\,(s = 1/2)$ le problème (4.2.1) possède unique solution $\varphi = \varphi(f)$ vérifiant:

$$\varphi(f) \in C^0\left([0,T]\,;H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T]\,;L^2(\Omega)\right)$$

et

$$\|\varphi(f)\|_{L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} + \left\|\varphi(f)'\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_2\,\|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.2.3}$$

De plus d'aprés la remarque 3.2 et (3.2.16) (où $f \neq 0$) on a l'estimation

$$C_3^{-1}\left\|\frac{\partial\varphi(f)}{\partial\nu}\right\|_{L^2\left(\Gamma^0\times(0,T)\right)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3\left\|\frac{\partial\varphi(f)}{\partial\nu}\right\|_{L^2\left(\Gamma^0\times(0,T)\right)} \tag{4.2.4}$$

2eme étape:

On définie l'operateur K: $L^2(\Gamma\times(0,T)) \longrightarrow H^1(0,T;L^2(\Gamma^0))$ par

$$(Kg)(x,t) = \int_0^1 \sigma(t-s)\,g(x,s)\,ds \qquad \left(x\in\Gamma^0, 0<t<T\right) \tag{4.2.5}$$

On a alors les deux lêmmes suivantes:

Lemme 4.2. *Pour tout* $g \in L^2(\Gamma^0\times(0,T))$, *Il existe une constante* $C_4 = C_4(\Omega,T) > 0$, *tel que*

$$C_4^{-1}\,\|Kg\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma^0))} \leq \|g\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))} \leq C_4\,\|Kg\|_{H^1\left(0,T;L^2\left(\Gamma^0\right)\right)} \tag{4.2.6}$$

Preuve. C.f [16]. ■

Lemme 4.3. *Pour toute* $f \in L^2(\Omega)$, *on a*

$$u(f)(x,t) = (K\varphi(f))(x,t) = \int_0^t \sigma(s)\,\varphi(f)(x,t-s)\,ds \;(\;t>0). \tag{4.2.7}$$

■

Preuve. On approxime $f \in L^2(\Omega)$ par une suites $(f_n)_{n\geq 0}$ dans $C_0^\infty(\Omega)$ telles $f_n \longrightarrow f$ dans $L^2(\Omega)$.

Posons $\tilde{u}(x,t) = \tilde{u}(f_n)(x,t) = (K\varphi(f))(x,t) = \int_0^t \sigma(s)\varphi(f)(x,t-s)\,ds$.

$\tilde{u}$ vérifié (4.1.1), en effet :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_t(x,t) &= \sigma(t)\varphi(f)(x,0) + \textstyle\int_0^t \sigma(s)\varphi_t(f)(x,t-s)\,ds \\ &= \textstyle\int_0^t \sigma(s)\varphi_t(f)(x,t-s)\,ds \quad \text{où } \varphi(f)(x,0) = 0\end{aligned}$$

et

$$\tilde{u}_{tt}(x,t) = \sigma(t)\varphi_t(f)(x,0) + \int_0^t \sigma(s)\varphi_{tt}(f)(x,t-s)\,ds$$

d'où

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{tt}(x,t) - \Delta\tilde{u}(x,t) &= \sigma(t)\varphi_t(f)(x,0) + \textstyle\int_0^t \sigma(s)\varphi_{tt}(f)(x,t-s)\,ds - \int_0^t \sigma(s)\Delta\varphi(f)(x,t-s)\,ds \\ &= \sigma(t)f(x) + \textstyle\int_0^t \sigma(s)(\varphi_{tt} - \Delta\varphi)(f)(x,t-s)\,ds \\ &= \sigma(t)f(x)\end{aligned}$$

car $\varphi_t(f)(x,0) = f(x)$ et φ vérifie (4.2.1), alors $\tilde{u}(f_n)(x,t) \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$ et satisfait (4.1.1). Par unicité de (4.1.1) on obtient $\tilde{u}(f_n) = u(f_n)$. Par densité de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ on a $\tilde{u}(f) = u(f)$ pour $f \in L^2(\Omega)$,d'où (4.2.7).

<u>3^{eme} étape:</u>

Soit $f \in L^2(\Omega)$; par densité, il exise $f_n \in C_0^\infty(\Omega)$ tel que $f_n \longrightarrow f$ dans $L^2(\Omega)$. Supposons qu'on a l'estimation (4.2.1) pour $f \in C_0^\infty(\Omega)$ et grâce l'estimation (4.1.7) on a

$$\left\|\frac{\partial u(f_n)}{\partial\nu}\right\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma^0))} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \left\|\frac{\partial u(f)}{\partial\nu}\right\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma^0))}$$

et donc (4.2.1) est vrai pour f dans $L^2(\Omega)$. Pour $f_n \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi(f_n)$ est suffisamment régulier dans $\bar{\Omega} \times [0,T]$, on a alors

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial u(f_n)}{\partial\nu}(x,t) &= \tfrac{\partial}{\partial\nu}\textstyle\int_0^t \sigma(s)\varphi(f_n)(x,t-s)\,ds \quad (x \in \Gamma, 0 < t < T) \\ &= \textstyle\int_0^t \sigma(s)\frac{\partial\varphi(f_n)}{\partial\nu}(x,t-s)\,ds \quad (x \in \Gamma^0, 0 < t < T) \\ &= \textstyle\int_0^t \sigma(s)\frac{\partial\varphi(f_n)}{\partial\nu}(x,t-s)\,ds = K\left(\frac{\partial\varphi(f_n)}{\partial\nu}\right)(x,t) \quad \left(x \in \Gamma^0, 0 < t < T\right)\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Grâce au lemme 4.2 il existe une constante $C_5 > 0$:

$$C_5^{-1}\left\|\frac{\partial u(f_n)}{\partial\nu}\right\|_{H^1\left(0,T;L^2\left(\Gamma^0\right)\right)} \leq \left\|\frac{\partial\varphi(f_n)}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Gamma^0\times(0,T))} \leq C_5\left\|\frac{\partial u(f_n)}{\partial\nu}\right\|_{H^1\left(0,T;L^2\left(\Gamma^0\right)\right)}$$

pour tout $f_n \in C_0^\infty(\Omega)$. Par densité de $C_0^\infty(\Omega)$dans $L^2(\Omega)$

$$C_5^{-1}\left\|\frac{\partial u(f)}{\partial\nu}\right\|_{H^1\left(0,T;L^2\left(\Gamma^0\right)\right)} \leq \left\|\frac{\partial\varphi(f)}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Gamma^0\times(0,T))} \leq C_5\left\|\frac{\partial u(f)}{\partial\nu}\right\|_{H^1\left(0,T;L^2\left(\Gamma^0\right)\right)}$$

et pour que φ vérifié (4.2.4), on déduit (4.2.1). ■

4.3 La reconstruction

Notation 4.2. *1. L'opérateure définie dans $L^2(\Omega)$ vérifie $Au(x) = -\Delta u(x)$ avec condition de Dirichlet où $D(A) = H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $(D(A) \subset H^s(\Omega),\ s > 3/2)$.*

A à un nombre infini de valeurs propres avec leurs multiplicité vérifiantes:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \tag{4.3.1}$$

où λ_k de multiplicité m_k. Soit ϕ_k un vecteur propre associe à valeur propre λ_k $(k \geq 1)$. On choisire $\{\phi_k\}_{k\geq 1}$ tels que

$$(\phi_k, \phi_l)_{L^2(\Omega)} = \delta_{kl} \qquad , \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & (k=l) \\ 0 & (k\neq l) \end{cases}. \tag{4.3.2}$$

et l'espace véctoriel engendré par les $\{\phi_k\}_{k\geq 1}$ est dense dans $L^2(\Omega)$.

Lemme 4.4. *Sous les hypothèses (4.1.4) et (4.1.5), pour chaque $\phi_0 \in L^2(\Omega)$ on peut construire unique contrôle $\upsilon = \upsilon(\phi_0) \in L^2(\Gamma \times (0,T))$ tel que*

(i) Le solution faible $\phi = \phi(\upsilon) \in C^0([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^{-1}(\Omega))$ de

$$\begin{array}{rcll} \ddot{\phi}(x,t) &=& \Delta\phi(x,t) & (x \in \Omega, 0 < t < T) \\ \phi(x,t) &=& \phi_0(x) & \acute{\phi}(x,t) = 0 \quad (x \in \Omega) \\ \phi(x,t) &=& \upsilon(x,t) & \left(x \in \Gamma^0, 0 < t < T\right) \\ \phi(x,t) &=& 0 & \left(x \in \Gamma \diagdown \Gamma^0, 0 < t < T\right) \end{array} \tag{4.3.3}$$

vérifie

$$\phi(x,T) = 0 \qquad \acute{\phi}(x,T) = 0 \qquad (x \in \Omega) \tag{4.3.4}$$

(ii) Il existe une constante $C_6 = C_6(\Omega, T, x_0) > 0$ tel que

$$\|\upsilon(\phi_0)\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))} \leq C_6 \|\phi_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.3.5}$$

pour tout $\phi_0 \in L^2(\Omega)$ (remarque3.2).

Définition 4.1. *On peut définit un opérateur linéaire borné Π $: L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma \times (0,T))$ par*

$$\Pi\phi_0 = \upsilon(\phi_0) \qquad \left(\phi_0 \in L^2(\Omega)\right) \tag{4.3.6}$$

On définit l'operateur $\Phi : L^2(\Gamma^0 \times (0,T)) \longrightarrow H^1(0,T; L^2(\Gamma^0))$ et on considère l'équation de $Volterra$ de seconde espèce:

$$\sigma(0)\frac{\partial\theta}{\partial t}(x,t)+\int_t^T\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}(\zeta-t)\frac{\partial\theta}{\partial t}(x,\zeta)+\sigma(\zeta-t)\theta(x,\zeta)\right)d\zeta=\eta(x,t) \tag{4.3.7}$$

$$\left(x\in\Gamma^0, 0<t<T\right)$$

$$\theta(x,0)=0 \qquad \left(x\in\Gamma^0\right),$$

Remarque 4.2. *Pour tout* $\eta\in L^2(\Gamma^0\times(0,T))$ *(4.3.7) admet unique solution* $\theta\in H^1(0,T;L^2(\Gamma^0))$ *vérifiant l'estimation*

$$\|\theta\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma^0))}\leq c_7\|\eta\|_{L^2(\Gamma^0\times(0,T))}$$

pour tout η *dans* $L^2(\Gamma^0\times(0,T))$ *où* $c_7>0.(C.f$ [16]).

Définissons à présent l'opérateur $\Phi:L^2(\Gamma^0\times(0,T))\longrightarrow H^1(0,T;L^2(\Gamma^0))$

$$\theta=\Phi\eta \qquad \eta\in L^2\left(\Gamma^0\times(0,T)\right).$$

qui est linéaire borné.

4.3.1 Théorème de reconstruction

Théorème 4.5. *On suppose (4.1.2) et (4.1.4) vérifies , on notes*

$$\theta_k=-\Phi\Pi\phi_k \qquad (k\geq 1).$$

Alors on a

$$(f,\phi_k)_{L^2(\Omega)}=\left(\frac{\partial u(f)}{\partial n},\theta_k\right)_{H^1(0,T;L^2(\Gamma^0))}$$

pour $k\geq 1$. *En particulier*

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\partial u(f)}{\partial n},\theta_k\right)_{H^1(0,T;L^2(\Gamma^0))}\phi_k. \tag{4.3.8}$$

Preuve. Pour la démonstration du theorème on a besoin les deux lemmes suivants:

Lemme 4.6. *Soient* $p(x,t)$ *et* $q(x,t)$ *suffisamment réguliers et vérifiant :*

$$\begin{aligned} p''(x,t) &= \Delta p(x,t) \qquad (x\in\Omega, 0<t<T) \\ p(x,T) &= 0 \qquad p'(x,T)=0 \qquad (x\in\Omega) \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

et

$$\begin{aligned} q''(x,t) &= \Delta q(x,t) \qquad (x \in \Omega, 0 < t < T) \\ q(x,0) &= 0 \qquad q'(x,0) = f(x) \qquad (x \in \Omega) \\ q(x,t) &= 0 \qquad (x \in \Gamma, 0 < t < T). \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

alors

$$\int_\Omega p(x,0) f(x)\,dx = -\int_0^T \int_\Gamma p(x,t) \frac{\partial q}{\partial \nu}(x,t)\,ds_x dt \tag{4.3.11}$$

■

Preuve. Pour que p et q suffisamment régulier, les calculs suivants sont justifié .

$$\int_0^T \int_\Omega \Delta p(x,t)\, q(x,t)\,dxdt = \int_\Omega \left(\int_0^T p''(x,t)\, q(x,t)\,dt \right) dx$$

$$= \int_\Omega \left([p'(x,t)\, q(x,t)]_0^T - \int_0^T p'(x,t)\, q'(x,t)\,dt \right) dx \text{ (par intégration par partie)}$$

$$= -\int_\Omega \int_0^T p'(x,t)\, q'(x,t)\,dtdx$$

$$= \int_\Omega \int_0^T p(x,t)\, q''(x,t)\,dtdx + \int_\Omega p(x,0) f(x)\,dx$$

où $p'(x,T) = q(x,0) = 0$ (par intégration par partie et $p(x,T) = 0, q'(x,0) = f(x)$)

$$= \int_0^T \int_\Omega p(x,t)\, \Delta q(x,t)\,dxdt + \int_\Omega p(x,0) f(x)\,dx$$

donc

$$\int_0^T \int_\Omega (q(x,t)\, \Delta p(x,t)\,dxdt - p(x,t)\, \Delta q(x,t)\,dxdt) = \int_\Omega p(x,0) f(x)\,dx$$

On utilisant la formule de Green est on a

$$= \int_0^T \int_\Gamma q(x,t) \frac{\partial p(x,t)}{\partial n} ds_x dt - \int_0^T \int_\Gamma p(x,t) \frac{\partial q(x,t)}{\partial n} ds_x dt.$$

et comme $q(x,t) = 0 \ (x \in \Gamma, 0 < t < T)$ on trouve le résultat.

Lemme 4.7. *Sous les suppositions (4.1.4) et (4.1.5), on a*

$$\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda_l}t}{\sqrt{\lambda_l}} \frac{\partial \phi_l}{\partial n}, -\Pi\phi_k \right)_{L^2(\Gamma^0 \times (0,T))} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & si \quad k=l \\ 0 & si \quad k \neq l. \end{cases} \tag{4.3.12}$$

■

Preuve. Soit Ψsolution de

$$\begin{aligned}
\Psi^{"}(x,t) &= \Delta\Psi(x,t) \qquad (x\in\Omega, 0<t<T) \\
\Psi(x,T) &= 0 \qquad \Psi'(x,T)=0 \qquad (x\in\Omega) \\
\Psi(x,t) &= \upsilon(x,t) \qquad \left(x\in\Gamma^0, 0<t<T\right) \\
\Psi(x,t) &= 0 \qquad \left(x\in\partial\Omega\setminus\Gamma^0, 0<t<T\right)
\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

pour $\upsilon\in L^2(\Gamma\times(0,T))$.

Il existe unique solution faible $\Psi=\Psi(\upsilon)\in C^0([0,T];L^2(\Omega))\cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega))$, de plus

$$\|\Psi(\upsilon)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\left\|\Psi(\upsilon)'\right\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))}\le C_1\|\upsilon\|_{L^2(\Gamma^0\times(0,T))} \tag{4.3.14}$$

Pour $\Psi(\upsilon)$,l'équation suivante est vérifiée:

$$\int_\Omega \Psi(\upsilon)(x,0)\,\phi_l(x)\,dx=-\int_0^T\int_\Omega \upsilon(x,t)\,\frac{\sin\sqrt{\lambda_l}t}{\sqrt{\lambda_l}}\frac{\partial\phi_l}{\partial\nu}(x)\,ds_xdt \tag{4.3.15}$$

pour tout $\upsilon\in L^2(\Gamma^0\times(0,T))$ et $\ell\ge 1$.

On montre (4.3.15). En effet: Comme $C_0^\infty(\Gamma^0\times(0,T))$ est dense dans $L^2(\Gamma^0\times(0,T))$, on approche υ par une suite$(\upsilon_n)_{n\ge1}$où $\upsilon_n\in C_0^\infty(\Gamma^0\times(0,T))$ telles que

$$\|\upsilon_n-\upsilon\|_{L^2(\Gamma\times(0,T))}\longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque n}\longrightarrow+\infty.$$

Soit $\upsilon_n\in C_0^\infty(\Gamma^0\times(0,T))$. Alors le solution $\Psi=\Psi(\upsilon)$ est régulière ce qui permet de poser dans le lemme 4.6.

$$p(x,t)=\Psi(\upsilon)(x,t)$$
$$q(x,t)=\left(\sin\sqrt{\lambda_l}t\,/\sqrt{\lambda_l}\right)\phi_l(x)$$

Comme $p(x,t)=\upsilon_n(x,t)$ sur Γ^0, on a

$$\int_\Omega \Psi(\upsilon)(x,t)\left[\cos\left(\sqrt{\lambda_l}t\right)\right]_{t=0}\phi_l(x)\,dx=-\int_0^T\int_{\Gamma^0}\upsilon_n(x,t)\,\frac{\sin\sqrt{\lambda_l}t}{\sqrt{\lambda_l}}\frac{\partial\phi_l(x)}{\partial\nu}ds_xdt$$

pour tout $\upsilon_n\in C_0^\infty(\Gamma^0\times(0,T))$ et par densité on déduit (4.3.15) pour tout $\upsilon\in L^2(\Gamma^0\times(0,T))$

Dans le lemme 4.5, pour ($k\ge1$) on prend

$$\phi_0(x)=-\ \phi_k(x)$$

et on pose:

$$\upsilon=-\Pi\phi_k\in\ L^2\left(\Gamma^0\times(0,T)\right) \qquad (k\ge1\ ). \tag{4.3.16}$$

Alors $\phi(\upsilon)$ vérifie (4.3.3) et (4.3.4).

On voit que $\Psi(\upsilon) = \phi(\upsilon)$ car ψ est unique et si on remplace υ dans (4.3.15), on obtient

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda_l}t}{\sqrt{\lambda_l}}\frac{\partial\phi_l}{\partial n}, -\Pi\phi_k\right)_{L^2(\Gamma\times(0,T))} &= \int_0^T\int_{\Gamma'} -\Pi\phi_k(x,t)\frac{\sin\sqrt{\lambda_l}t}{\sqrt{\lambda_l}}\frac{\partial\phi_l}{\partial n}(x)\,dS_x dt \\ &= \int_\Omega \phi_k(x)\,\phi_l(x)\,dx = \delta_{kl}\end{aligned}$$

car $\{\phi_k\}_{k\geq 1}$est une famille orthonormée d'où le lemme 4.6. ■

maintenant on montre le théorème de reconstruction:

Preuve. Il suffit de prouver le theorème 4.5 pour $f \in C_0^\infty(\Omega)$ utilisant l'estimation (4.3.1) et la densité de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. A partire de suite posons $f \in C_0^\infty(\Omega)$. La solution de (4.2.2) s'ecrit

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sin\left(t\sqrt{\lambda_k}\right)(f,\varphi_k)\,\varphi_k/\lambda_k$$

alors

$$\frac{\partial\varphi(f)}{\partial\nu}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(f,\phi_k)_{L^2(\Omega)}\frac{\sin\sqrt{\lambda_k}t}{\sqrt{\lambda_k}}\frac{\partial\phi_k}{\partial\nu} \qquad \left(x\in\Gamma^0, 0<t<T\right)$$

Soit $K^* : R(K) \longrightarrow L^2(\Gamma^0\times(0,T))$ l'opérateur adjoint de $K : L^2(\Gamma^0\times(0,T)) \longrightarrow H^1(0,T;L^2(\Gamma^0))$ où

$$R(K) = \left\{Ky,\ y\in L^2\left(\Gamma^0\times(0,T)\right)\right\} \subset H^1\left(0,T;L^2\left(\Gamma^0\right)\right)$$

Alors on peut vérifie en utilise (1.2.16) que :

$$\begin{aligned}(K^*\theta)(x,t) &= \sigma(0)\,\theta'(x,t) + \int_0^T\left(\sigma'(\zeta-t)\,\theta'(x,\zeta) + \sigma(\zeta-t)\,\theta(x,\zeta)\right)d\zeta \\ &\quad \left(x\in\Gamma^0, 0<t<T\right).\end{aligned}$$

où $\theta \in R(K)$. L'équation

$$K^*\Phi\eta = \eta \qquad \left(\eta\in L^2\left(\Gamma^0\times(0,T)\right)\right)$$

est vérifie grâce au remarque 4.2. Ceci permet de calculer

$$\left(\frac{\partial u(f)}{\partial\nu},\theta_k\right)_{H^1(0,T;L^2(\Gamma^0))} = \left(K\left(\frac{\partial w(f)}{\partial\nu}\right), \Phi(-\Pi\phi_k)\right)_{H^1(0,T;L^2(\Gamma^0))}$$

$$= \left(\frac{\partial w(f)}{\partial\nu}, (K^*\Phi)(-\Pi\phi_k)\right)_{L^2(\Gamma^0\times(0,T))}$$

$$= \left(\frac{\partial w (f)}{\partial \nu}, -\Pi \phi_k \right)_{L^2(\Gamma^0 \times (0,T))}$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} (f, \phi_l)_{L^2(\Omega)} \left(\frac{\sin \sqrt{\lambda_l} t}{\sqrt{\lambda_l}} \frac{\partial \phi_l}{\partial \nu}, -\Pi \phi_k \right)_{L^2(\Gamma^0 \times (0,T))}$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} (f, \phi_l)_{L^2(\Omega)} \delta_{kl}$$

$$= (f, \phi_k)_{L^2(\Omega)}$$

d'où le théorème 4.5. ■

4.4 Annexe

On montre

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} (f) \right\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma))} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \qquad \left(f \in L^2 (\Omega)\right) \tag{4.4.1}$$

On a grâce au [2] :

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} (f) \right\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma))} \leq C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.4.2}$$

Soit z solution faible de

$$\left\{ \begin{array}{ll} z'' (x,t) = \Delta z (x,t) + \sigma' (t) f (x) & \text{dans } Q_T, \\ z (x,0) = 0, \quad \partial_t z (x,0) = \sigma (0) f (x) & \text{dans } \Omega, \\ z (x,t) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \end{array} \right. \tag{4.4.3}$$

els que $\sigma' . f \in L^1 (0,T; L^2 (\Omega))$ et $\sigma (0) f (x) \in L^2 (\Omega)$. D'aprés théorème4.1[2] on a

$$z \in C^1 \left([0,T] ; H_0^1 (\Omega)\right) \cap C^2 \left([0,T] ; L^2 (\Omega)\right)$$

et

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial z}{\partial \nu} (f) \right\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma))} &\leq C_1' \left(\left\| \sigma' f (x) \right\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + \sigma (0) \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C_1' \|f\|_{L^2(\Omega)} . \end{aligned}$$

pour tout $f (x) \in L^2 (\Omega)$.

On peut pose alors

$$\tilde{u} (x,t) = \int_0^t z (x,t) \, ds$$

tel que $\tilde{u} \in C^1\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right) \cap C^2\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$ et $\tilde{u}$ vérifié (4.1.1).

L'unicité de (4.1.1) permet de pose

$$u(f) = \tilde{u}(x,t)$$

et

$$z(x,t) = u^{'}(f)(x,t) \qquad (x \in \Omega, \quad 0 < t < T) \tag{4.4.4}$$

Grâce à (4.4.2) et (4.4.4) on a (4.4.1).

Conclusion et perspectives

Le but de ce mémoire est l'étude, de point de vue théorique, la contrôlabilité exacte de certaines équations aux dérivées partielles qui modélisent les équations des ondes et d'appliquer les résultats ainsi obtenus à la résolution d'un problème inverse dans un domaine polygonal. Ce mémoire repose sur deux parties. La première est consacrée à l'étude de la régularité des solutions de l'équation de Laplace avec condition de Dirichlet et avec condition de Dirichlet–Neumann dans un ouvert polygonal non convexe. Ainsi , on établit explicitement la contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes et montrons qu'il y a un seuil de régularité pour la mise en œuvre de la méthode de $H.U.M.$

La deuxième partie de ce mémoire, étudie un problème inverse de reconstruction du terme source pour l'équation des ondes dans un polygone non convexe avec condition de Dirichlet. La résolution est basée sur un résultat de stabilité et de reconstruction de la source à partir d'une observation sur une partie de la frontière.

En conclusion, nous avons montré qu'on peut utiliser les outils de la théorie de contrôle pour des problèmes inverses à condition de connaître la régularité des traces des solutions.

Bibliographie

[1] P. Grisvard, Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, Monographs and Studies in Mathematics 24, Pitman, Boston, 19

[2] J.L. Lions, Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués, Tome 1,RMA 8, Masson, Paris, 1988.

[3] P. Grisvard, "Singularities in Boundary Value Problems," in Recherches en Mathe matiques Applique es, No. 22, Masson, Paris, 1992.

[4] P. Grisvard, Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités,J. Math. Pures Appl. 68 (1989) 215–259.

[5] Yamamoto.M 1995 Stability, reconstruction formula and regularization for an inverse source hyperbolic problem by a control method Inverse Problems 11 481–96

[6] J.L. Lions, Équations opèrationnelles et problèmes aux limites ,springer Verlag , 1961.

[7] M. Dauge, Elliptic boundary value problems on corner domainsLecture Notes in Mathematics, vol. 1341, Springer-Verlag,Berlin–Heidelberg, 1988

[8] Komornik 1989a , Exacte controllability in short time for the wave quation Ann.Inst. H.piocarré 6 153-64.

[9] Grisvard, P. (1975b) Alternative de Fredholm relative au probleme de Dirichlet dans un polyedre, Annali S.N.S. Pisa, Series 4,2 (3), 359-388

[10] Kadlec , On the Regularity of the solution of the poisson problem on a Domain with boundary locally Similar to the boundary of a Convexe Open Set (Czechoslavk Math .J,Vol,14, (89) ,1964,p.386-393).

[11] J-L.Lions-E.Magenes, Problème aux limite non homogènes et applications, Dunod paris, 1968

[12] I. Lasiecka - R.Triggiani, Exact boundary controllability of the wave equation with Neumann boundary control, préprint,1987.

[13] R.A.Adams. Sobolev spaces .1975.

[14] J. Nečas. Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Masson, Paris, 1967.

[15] R.Triggiani, Exact boundary controllability on $L_2 \times H^{-1}$of the wave equation with Dirichlet boundary control acting on a portion of the boundary $\partial\Omega$ and related problems (à paraître dans Applied Mathematics and optimisation), Préprint, 1986.

[16] FG.Tricomi : Integral Equation 1985 (New York:Dover).

[17]J-L.Lions, the J.Von Neumann Lecture (S.I.A.M.National Meeting, Boston, 1986).

[18] Haim Brezis, analyse Fonctionnelle, théorie et applications , Masson, Paris New York Barcelone aso paulo 1983.