

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE



Faculté de Mathématiques

MÉMOIRE

présenté pour obtenir le diplôme de

MAGISTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

par

BOUCHALI Anissa

SUJET

ETUDE DE GRAPHES SEMI-RÉGULIERS DE TYPE HYPERCUBE

Soutenu publiquement le 17/11/2009 devant le jury composé de :

M.	BOUROUBI	Sadek	<i>Maître de Conférences/A</i>	USTHB	Président,
M.	BERRACHEDI	Abdelhafid	<i>Professeur</i>	USTHB	Directeur de mémoire,
Mme.	BOUCHEMAKH	Isma	<i>Professeur</i>	USTHB	Examinatrice,
Mlle.	KAHOUL	Nawel	<i>Chargée de Recherche</i>	USTHB	Invitée,
Mme.	AFFIF CHAOUCHE	Fatma	<i>Maître de Conférences/B</i>	USTHB	Invitée.

Remerciements

Tout d'abord, mes remerciements s'adressent à Mr Berrachedi qui m'a proposé ce sujet de mémoire et qui m'a encadré. Je le remercie tout particulièrement de m'avoir laissé une large marge de liberté afin de mener à bien, je l'espère du moins, ce travail.

Je remercie les membres du jury d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Leurs remarques et commentaires m'ont permis de clarifier et d'améliorer certains points de ce mémoire, je les remercie également pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Le plus fort de mes remerciements est pour Yacine Ait Amrane. Merci pour ton aide, ta disponibilité, tes nombreux conseils avisés et ton soutien sans faille malgré ton emploi du temps chargé. Merci de m'avoir initié à la rigueur mathématique, vue par un Algébriste de surcroît, à laquelle je n'accordais pas une grande importance jusque là. Trouve ici, Yacine, la preuve de ma profonde gratitude.

Enfin, je remercie mes parents pour leurs encouragements, ils nous ont toujours poussé à aller le plus loin possible dans nos études et à surtout être sérieux et méticuleux dans toutes les tâches que nous entreprenons. Merci à mes frères de ne pas m'avoir laissé travailler comme il le fallait. Merci d'être là tous les jours.

Table des matières

Introduction	4
1 Définitions et notations	5
1.1 Graphes	5
1.1.1 Définitions générales	5
1.1.2 Chaînes et cycles	6
1.1.3 Connexité dans les graphes	8
1.1.4 Quelques graphes particuliers	8
1.1.5 Distance, excentricité et diamètre	11
1.1.6 Intervalles	12
1.2 Opérations classiques	12
1.2.1 Somme cartésienne	12
1.2.2 Produit cartésien	13
1.2.3 Isomorphisme	14
1.3 Les matrices associées aux graphes	14
1.4 L'hypercube	15
1.4.1 Quelques propriétés de l'hypercube	16
1.4.2 Décomposition en couches (niveaux)	16

1.4.3	Caractérisations de l'hypercube	17
1.4.4	Plongement de graphes dans l'hypercube	18
1.5	Conjectures de I. Havel	19
2	Graphes semi-réguliers et (s, r)-réguliers de type1	21
2.1	Définition	21
2.2	Graphes <i>exactement</i> (s, r) -réguliers	22
2.3	Graphes (s, r) -réguliers	25
2.4	Résultats sur la semi-régularité de type1	28
3	Graphes semi-réguliers de type2	31
3.1	Définition	31
3.2	Quelques résultats	32
3.3	Algorithme pour déterminer la semi-régularité	34
4	Graphes (s, r)-réguliers de type2	35
4.1	Définition	35
4.2	Généralisation des résultats de A. Northup	36
4.3	Algorithme pour déterminer la (s, r) -régularité	38
4.4	Les cycles dans les graphes (s, r) -réguliers	41

Introduction

L'objectif essentiel de ce mémoire est l'étude des graphes semi-réguliers. Cette étude est fondamentale car elle nous permettra éventuellement d'avoir des outils afin de pouvoir étudier la fameuse conjecture de I. Havel. Effectivement, I. Havel a conjecturé que le sous-graphe engendré par les deux couches centrales d'un hypercube de degré impair est hamiltonien. Il se trouve que ce sous-graphe est semi-régulier.

Dans le présent mémoire nous définirons deux sortes de graphes semi-réguliers, le type1 et le type2. La conjecture de I. Havel concerne le type1.

Les chapitres du mémoire seront répartis comme suit :

Le premier chapitre "Définitions et notations" sera consacré au rappel de certaines définitions et résultats les plus fréquemment utilisés dans la suite du mémoire.

Dans le second chapitre "Graphes semi-réguliers et (s, r) -réguliers de type1", nous exposerons la définition donnée par J. A. De La Peña [5] et nous donnerons plus de détails à la preuve de son Théorème, à savoir que tout graphe (s, r) -régulier est soit régulier soit semi-régulier. Enfin, nous donnerons quelques exemples de graphes qui sont nécessairement semi-réguliers de type1.

Au troisième chapitre "Graphes semi-réguliers de type2", nous donnerons la définition des graphes semi-réguliers selon A. Northup [14] et nous rappellerons ses résultats sur ce type de graphes. Nous finirons le chapitre avec l'algorithme de A. Northup qui détermine la semi-régularité d'un graphe.

Dans le quatrième et dernier chapitre "Graphes (s, r) -réguliers de type2", nous introduirons la classe de graphes (s, r) -réguliers qui généralise celle des graphes semi-réguliers de

type2. Nous démontrerons dans le cas général tous les résultats obtenus par cette dernière et nous donnerons aussi un algorithme qui détermine la (s, r) -régularité. Nous exposerons également quelques propriétés spécifiques à ce type de graphes.

Chapitre 1

Définitions et notations

Dans ce chapitre nous donnons brièvement les définitions relatives aux éléments rencontrés dans le mémoire. Nous décomposons ce chapitre en cinq parties : la première est consacrée aux notions générales sur les graphes, la seconde aux opérations sur les graphes, la troisième aux matrices associées aux graphes, la quatrième aux hypercubes et la cinquième et dernière partie aux conjectures de I. Havel.

1.1 Graphes

1.1.1 Définitions générales

1

Un **graphe** G est défini par un ensemble de sommets $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, un ensemble d'arêtes $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ et une fonction dite d'incidence qui associe deux sommets à chaque arête.

Le nombre de sommets d'un graphe est l'**ordre** du graphe.

Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents** et représentent les **extrémités** de cette arête. Ces mêmes sommets sont **voisins** l'un de l'autre. L'ensemble des voisins d'un sommet x est noté $N(x)$.

Une arête est appelée une **boucle** si ses deux extrémités sont identiques.

Une arête est dite **multiple** s'il existe au moins une autre arête ayant les mêmes extrémités. Sa **multiplicité** représente le nombre de son apparition.

Un sommet **isolé** est un sommet qui n'est relié à aucun autre sommet.

Le **degré** d'un sommet x de G est le nombre d'arêtes incidentes à x . Il est noté $deg(x)$. Le degré d'un sommet isolé est nul et celui d'un sommet **pendant** est égal à un. Le degré minimal de G , noté δ , est égal au plus petit degré de tous les sommets de G . De la même manière, le degré maximal de G , noté Δ , est égal au plus grand degré de tous les sommets de G .

Un **sous-graphe** G^* de G est composé de certains sommets de G (i.e. $V(G^*) \subset V(G)$), ainsi que de toutes les arêtes de G qui relient ces sommets (i.e. $E(G^*) \subset E(G)$). Quand on supprime des sommets non isolés, on supprime du même coup des arêtes, c'est pour cette raison qu'on n'a pas l'inclusion au sens large (\subseteq).

Un **graphe partiel** G^* de G est composé de tous les sommets de G (i.e. $V(G^*) = V(G)$), et de certaines de ses arêtes (i.e. $E(G^*) \subset E(G)$). Donc, on garde tous les sommets même s'ils deviennent isolés.

Si on supprime à la fois des arêtes et des sommets, on parle de **sous-graphe partiel**.

L'**expansion** d'un graphe est le résultat de l'ajout d'un ou plusieurs sommets sur une ou plusieurs arêtes.

Une **face** f d'un graphe G est une région maximale du plan délimitée par un ensemble d'arêtes de G , et qui n'en contient aucune. Le degré de f représente le nombre d'arêtes de G qui bordent f .

1.1.2 Chaînes et cycles

Une **chaîne** dans G est une suite de la forme $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k$ ayant pour éléments alternativement des sommets v_i et des arêtes e_i , telle que la suite commence

et se termine par un sommet. Le sommet v_1 représente l'**origine** de la chaîne et v_k son **extrémité**.

Une chaîne est dite **induite** si chacun de ses sommets non consécutifs ne sont adjacents. Ou bien, comme étant une chaîne dont l'ensemble des sommets engendre un sous-graphe qui est une chaîne.

Une chaîne est **élémentaire** si chacun de ses sommets apparaît exactement une fois.

Une chaîne est **simple** si chaque arête apparaît au plus une fois.

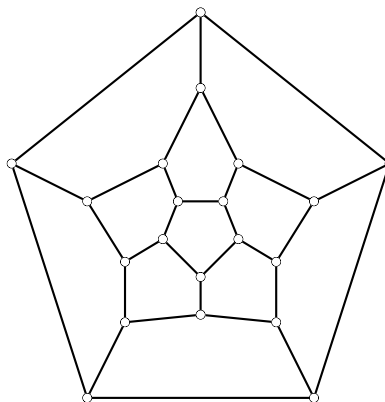
Une chaîne **fermée** est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues ($v_1 = v_k$).

Un **cycle** est une chaîne fermée composée d'arêtes distinctes.

La **longueur** d'une chaîne représente le nombre d'arêtes qui composent cette chaîne. La chaîne élémentaire (respectivement cycle) à n sommets est notée P_n (respectivement C_n) et est de longueur $n - 1$ (respectivement n).

La **maille** d'un graphe G est la longueur du plus petit cycle appartenant à G .

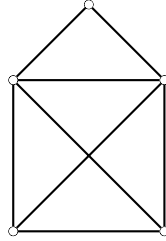
Une chaîne **hamiltonienne** (respectivement cycle hamiltonien) est une chaîne (respectivement cycle) passant par tous les sommets du graphe une et une seule fois. En voici un exemple :



Exemple d'une chaîne hamiltonienne

Si un graphe G possède un cycle hamiltonien (respectivement chaîne hamiltonienne), alors G est dit graphe **hamiltonien** (respectivement graphe **semi-hamiltonien**).

Une chaîne **eulérienne** (respectivement cycle eulérien) est une chaîne (respectivement cycle) passant par toutes les arêtes du graphe une et une seule fois. Par exemple :



Exemple d'une chaîne eulérienne

Si un graphe G possède un cycle eulérien (respectivement une chaîne eulérienne), alors G est dit graphe **eulérien** (respectivement graphe **semi-eulérien**).

1.1.3 Connexité dans les graphes

Un graphe G est **connexe** s'il existe une chaîne entre toutes les paires de sommets. Si G n'est pas connexe, on peut identifier plusieurs sous-graphes connexes, appelés **composantes connexes**.

A ce propos, dans un graphe connexe, un **isthme** est une arête dont la suppression crée exactement deux composantes connexes.

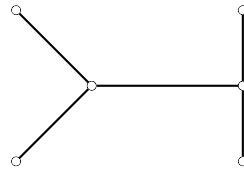
A noter qu'une chaîne hamiltonienne (respectivement cycle hamiltonien) n'existe que si le graphe est connexe et de même pour une chaîne eulérienne (respectivement cycle eulérien).

1.1.4 Quelques graphes particuliers

Un graphe G est dit **simple** s'il ne possède ni boucles ni arêtes multiples. Pour un graphe simple le degré de x correspond exactement au nombre de sommets qui lui sont adjacents.

Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle. Il existe plusieurs propriétés qui caractérisent un arbre, en voici un échantillon :

1. Il possède autant d'arêtes que de sommets moins un.
2. Si une arête devrait être supprimée, le graphe cesserait d'être connexe.
3. Si une nouvelle arête devrait être ajoutée, un cycle serait créé.

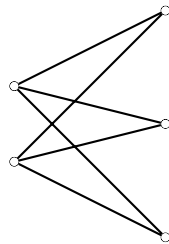
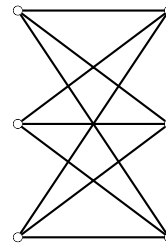


Arbre

Un graphe est **complet** si deux sommets quelconque sont adjacents. On note K_n le graphe simple complet à n sommets.

Une **clique** d'un graphe simple G est un sous-graphe complet.

Un graphe G est **biparti** si on peut partitionner ses sommets en deux sous-ensembles $V_1(G)$ et $V_2(G)$ avec aucune arête ni entre deux sommets de $V_1(G)$ ni entre deux sommets de $V_2(G)$. Un graphe simple biparti complet avec $|V_1(G)| = a$, $|V_2(G)| = b$ est noté $K_{a,b}$.

 $K_{2,3}$  $K_{3,3}$

Un graphe G est dit **équilibré** si et seulement si G est biparti et chaque sous-ensemble de la bipartition contient le même nombre de sommets.

Soit r un entier positif. Un graphe G est dit **r -régulier** si pour tout sommet $x \in V(G)$, $\deg(x) = r$.

Le graphe **complémentaire** d'un graphe $G = (V(G), E(G))$ est le graphe $\overline{G} = (V(G), E(\overline{G}))$ dont les arêtes sont tous les couples de sommets qui ne sont pas dans $E(G)$.

Le graphe $G = (V(G), E(G))$ est **planaire** si on peut le représenter par un diagramme dans le plan sans qu'il y ait croisement d'arêtes. Tous les graphes qui ont au plus 5 sommets

sont planaires, ainsi que tous les graphes bipartis à 6 sommets au plus. En fait, K_5 et $K_{3,3}$ sont les plus petits graphes non planaires. Un autre résultat connu en théorie des graphes dit que, si un graphe simple connexe avec au moins 3 arêtes ($|E(G)| > 2$) est planaire, alors $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$. Nous avons également le théorème de Kuratowski qui dit que : le graphe G est planaire si et seulement s'il ne contient pas de sous-graphe qui est une expansion de K_5 ou $K_{3,3}$.

La formule suivante d'Euler est fondamentale en théorie des graphes planaires :

Définition 1.1. Soit G un graphe planaire connexe avec n sommets, m arêtes et f faces, alors :

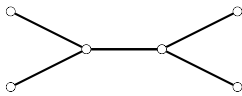
$$n - m + f = 2.$$

Par le biais de cette formule, Euler a prouvé le résultat qui suit :

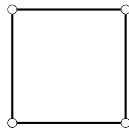
Théorème des polyèdres réguliers :

Il n'existe pas d'autres polyèdres réguliers que le cycle, le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

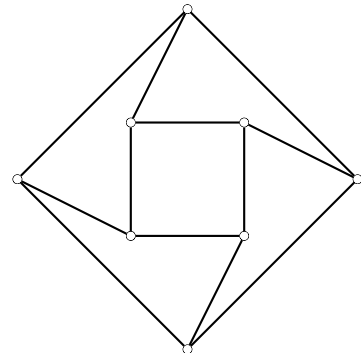
Quelques exemples de graphes planaires :



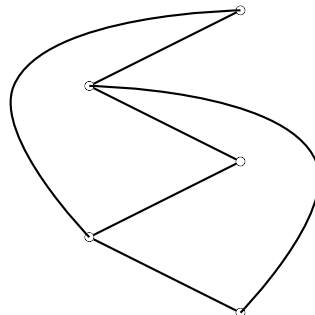
Graphe planaire à 1 face



Graphe planaire à 2 faces



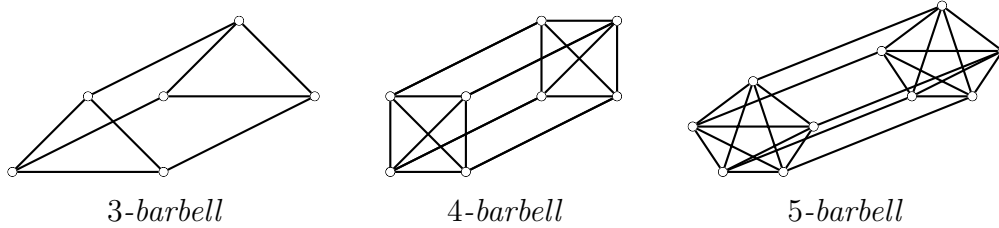
Graphe planaire à 6 faces



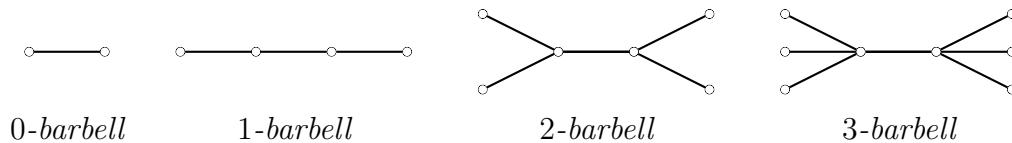
Une représentation planaire de $K_{2,3}$

Il existe plusieurs définitions différentes d'un graphe **n-barbell** G . Dans toutes ces définitions G est simple et connexe :

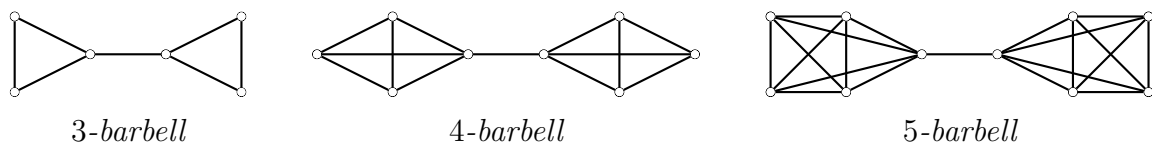
1. Selon Wilf (1989), G est obtenu en connectant deux copies d'un graphe complet K_n par n arêtes.



2. Selon A. Northup [14] (2002), G est formé en prenant deux sommets adjacents v_1, v_2 et en connectant n sommets à v_1 et n d'autres à v_2 .



3. Selon Ghosh (2006), G est obtenu en connectant deux copies d'un graphe complet K_n par une seule arête.



Remarque 1.1. L'arête centrale d'un graphe n -barbell selon la deuxième et la troisième définition est un isthme.

1.1.5 Distance, excentricité et diamètre

On appelle **distance** entre deux sommets la longueur d'une plus petite chaîne les reliant. Cette chaîne est dite **géodésique**.

L'**excentricité** d'un sommet représente sa distance maximale à tous les autres sommets.

Le **diamètre** d'un graphe est égal à la plus grande distance entre deux sommets, ce qui est équivalent à dire qu'il est égal à l'excentricité maximale des sommets.

Un **centre** de G est un sommet s d'excentricité minimum.

Le **rayon** de G est l'excentricité d'un centre de G , noté $r(G)$.

1.1.6 Intervalles

Soient u et v deux sommets d'un graphe G . L'**intervalle** $I_G(u, v)$ est l'ensemble des sommets de G appartenant aux chaînes géodésiques entre u et v .

Afin de mieux assimiler la notion d'intervalle, nous introduisons la proposition suivante :

Proposition 1.1.1. *Soient u et v deux sommets d'un graphe G , alors :*

1. $u, v \in I_G(u, v)$
2. $I_G(u, v) = I_G(v, u)$
3. Si $w \in I_G(u, v)$, alors $I_G(u, w) \subset I_G(u, v)$
4. Si $w \in I_G(u, v)$, alors $I_G(u, w) \cap I_G(w, v) = \{w\}$
5. Si $w \in I_G(u, v)$ et $z \in I_G(u, w)$, alors $w \in I_G(z, v)$

Généralement, l'intervalle désigne aussi bien $I_G(u, v)$ que le sous-graphe engendré par $I_G(u, v)$.

1.2 Opérations classiques

1.2.1 Somme cartésienne

La somme cartésienne de deux graphes $G = (V(G), E(G))$ et $G^* = (V(G^*), E(G^*))$, notée $G \square G^*$, est définie comme suit :

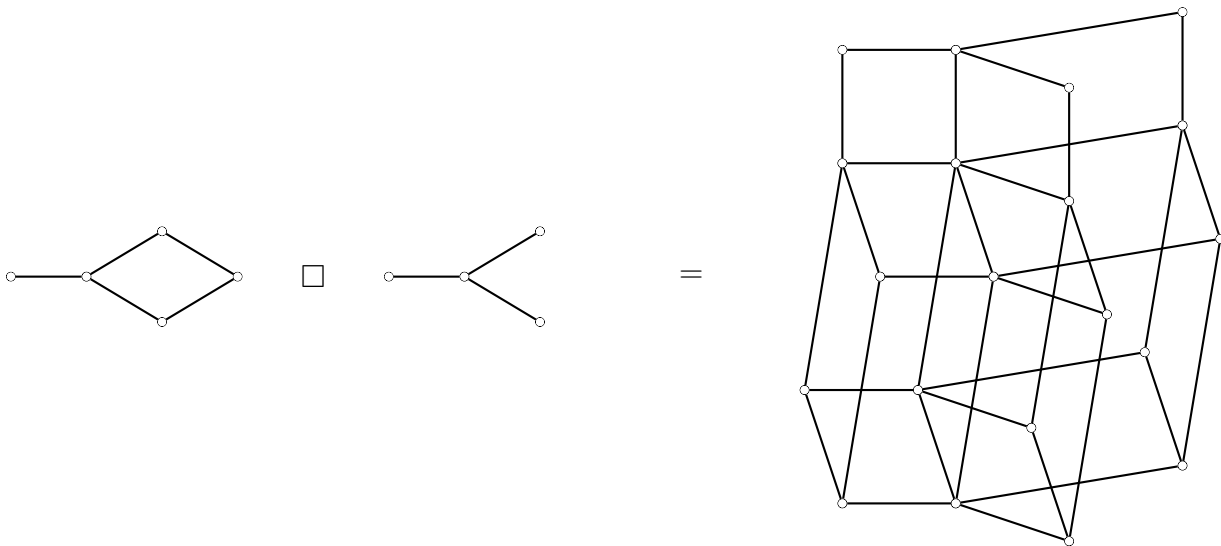
1. L'ensemble des sommets de $G \square G^*$ est le produit cartésien $V(G) \times V(G^*)$.
2. Les sommets (x, x^*) et (y, y^*) sont adjacents dans $G \square G^*$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = y \text{ et } x^*y^* \in E(G^*) \\ \text{ou} \\ x^* = y^* \text{ et } xy \in E(G) \end{array} \right.$$

Ci-dessous, quelques propriétés de $G \square G^*$:

1. L'opération \square est commutative et associative.
2. Le graphe $G \square G^*$ est connexe si et seulement si G et G^* sont connexes.
3. Si G et G^* sont bipartis, alors $G \square G^*$ est biparti.
4. Le diamètre de $G \square G^*$ est égal à la somme du diamètre de G et de celui de G^* .

Ci-dessous, un exemple sur la somme cartésienne de deux graphes :



1.2.2 Produit cartésien

Le produit cartésien de deux graphes $G = (V(G), E(G))$ et $G^* = (V(G^*), E(G^*))$, noté $G \times G^*$, est défini comme suit :

1. L'ensemble des sommets de $G \times G^*$ est le produit cartésien $V(G) \times V(G^*)$.

2. Les sommets (x, x^*) et (y, y^*) sont adjacents dans $G \times G^*$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^*y^* \in E(G^*) \\ \text{et} \\ xy \in E(G) \end{array} \right.$$

1.2.3 Isomorphisme

Deux graphes $G = (V(G), E(G))$ et $G^* = (V(G^*), E(G^*))$ sont isomorphes si et seulement s'il existe une application bijective $\varphi : V(G) \rightarrow V(G^*)$ qui vérifie la condition suivante :

$$xy \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E(G^*)$$

pour toute paire de sommets x et y dans $V(G)$.

1.3 Les matrices associées aux graphes

Soit G un graphe d'ordre n . La **matrice d'adjacence** $A = (a_{ij})$ associée au graphe G est la matrice carée définie comme suit :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arête } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le **polynôme caractéristique** d'un graphe G , noté $P_G(\lambda)$, est le polynôme $P_G(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, où la matrice A est la matrice d'adjacence de G .

Les **valeurs propres** d'un graphe G sont les racines de son polynôme caractéristique. Elles sont usuellement notées par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

On dit que v est un **vecteur propre** de G associé à la valeur propre λ si v est un vecteur non nul tel que $Av = \lambda v$.

Le **rayon spectral** d'une matrice A est donné par comme suit : $\rho(A) = \max\{|\lambda_i|, i = 1, \dots, n\}$, où les λ_i représentent les valeurs propres de A .

Comme A est symétrique, alors toutes les valeurs propres de A sont réelles, c'est-à-dire A est diagonalisable sur \mathbb{R} .

Une matrice **stochastique** (aussi appelée matrice de Markov) est une matrice carrée dont chaque élément est un réel compris entre 0 et 1 et dont la somme des éléments de chaque ligne vaut 1.

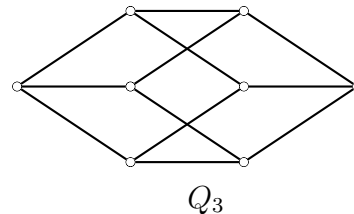
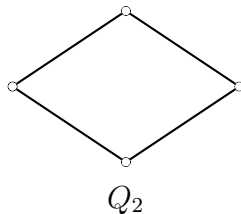
Voici quelques propriétés sur les graphes bipartis et les valeurs propres associées :

Proposition 1.3.1.

1. *S'il existe $u \in \mathbb{R}_+^n$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $A^2u = \mu^2u$ et $Au \neq \mu u$, alors G est biparti.*
2. *Si $-\rho(A)$ est une valeur propre de A , tel que $\rho(A)$ représente le rayon spectral de A , alors G est biparti.*
3. *Un graphe G est biparti si et seulement si à chaque fois que λ est une valeur propre de A alors $-\lambda$ est aussi une valeur propre de A .*

1.4 L'hypercube

L'**hypercube** de dimension n , noté Q_n , est un graphe dont l'ensemble des sommets représente les n -uplets de $\{0,1\}^n$, et deux sommets sont adjacents si et seulement s'ils diffèrent en exactement une seule composante.



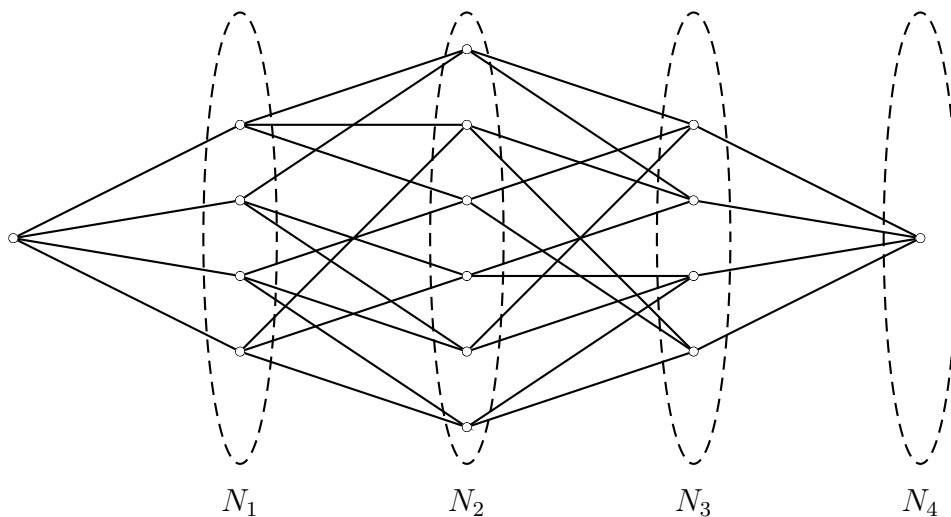
On peut construire l'hypercube en utilisant le produit cartésien comme suit :
 $Q_0 = K_1$, $Q_1 = K_2$ et de manière récursive $Q_{n+1} = Q_n \times K_2$.

1.4.1 Quelques propriétés de l'hypercube

1. L'hypercube de dimension n est un graphe équilibré et n -régulier avec 2^n sommets et par conséquent $n.2^{n-1}$ arêtes.
2. Le diamètre et le rayon d'un hypercube Q_n est égal à n .
3. Pour deux sommets x et y qui sont à distance k dans Q_n , il existe $k!$ chaînes géodésiques entre x et y .
4. L'hypercube est un graphe hamiltonien, de plus par toute arête passe un cycle hamiltonien.

1.4.2 Décomposition en couches (niveaux)

Une **décomposition en couches** d'un graphe G à partir d'un sommet x donné est formée d'une suite de couches $\{x, N_1(x), N_2(x), \dots, N_k(x)\}$. Sachant que pour tout $1 \leq i \leq k$, $N_i(x)$ représente l'ensemble des sommets de $V(G)$ à distance i de x . Il faut savoir que dans une décomposition en couches les arêtes sont ou bien dans une même couche ou bien entre deux couches successives.



Décomposition en couches de Q_4

1.4.3 Caractérisations de l'hypercube

Nous donnons dans ce paragraphe quelques caractérisations de l'hypercube à travers des théorèmes, comme suit :

S. Foldes [7] était l'un des premiers à avoir caractérisé l'hypercube :

Théorème 1.4.1. *Un graphe connexe G est un hypercube si et seulement si G satisfait les conditions suivantes :*

1. G est biparti.
2. Pour toute paire de sommets x, y de G , le nombre de chaînes géodésiques entre x et y est $d(x, y)!$ ($d(x, y)$ représente la distance entre x et y).

Une autre caractérisation a été introduite en utilisant le concept de $(0, 2)$ -graphe.

Définition 1.2. *Un graphe connexe G est un $(0, 2)$ -graphe si et seulement si toute paire d'arêtes adjacentes de G appartient à exactement un cycle de longueur 4.*

J. M. Laborde [11] et H. M. Mulder [13] ont démontré le théorème suivant :

Théorème 1.4.2. *Soit $G = (V(G), E(G))$ un $(0, 2)$ -graphe, alors :*

1. Si G est n -régulier, alors $|V(G)| \leq 2^n$.
2. De plus, on a $|V(G)| = 2^n$ si et seulement si G est un hypercube de dimension n .

Une caractérisation basée également sur le concept de $(0, 2)$ -graphe a été donnée par A. Berrachedi [2] :

Théorème 1.4.3. *Soit G un $(0, 2)$ -graphe tel qu'il existe une décomposition en couches où tout cycle de longueur 4 rencontre 3 couches, alors G est un hypercube.*

Une caractérisation de l'hypercube par des intervalles a été faite par H.J. Bandelt [1] :

Théorème 1.4.4. *Soit G un graphe biparti connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. G est un hypercube.

2. Tout intervalle dans G engendre un hypercube.
3. Tout intervalle dans G engendre un $(0, 2)$ -graphe.
4. Tout intervalle $I_G(u, v)$ contient exactement $2^{d(u,v)}$ sommets.
5. Tout intervalle $I_G(u, v)$ engendre un graphe avec exactement $d(u, v) \cdot 2^{d(u,v)-1}$ arêtes.

1.4.4 Plongement de graphes dans l'hypercube

La notion de plongement est très utilisée en pratique, particulièrement dans le domaine informatique. L'architecture des algorithmes est le plus souvent sous forme d'arborescence. Afin d'implémenter sur un réseau un algorithme, il suffit simplement de simuler la structure de l'algorithme dans le réseau, ce qui nous donne un plongement de la structure de l'algorithme dans le réseau. L'hypercube est choisi comme réseau surtout pour sa robustesse, dans le sens où quand on supprime une arête le graphe reste connexe.

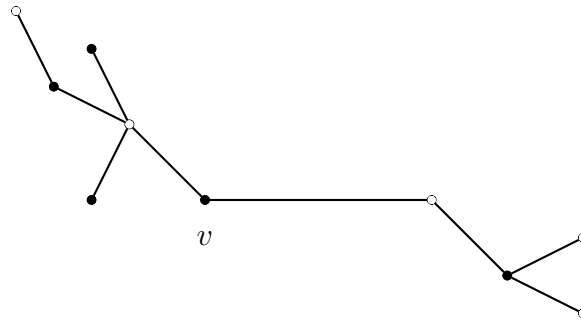
Définition 1.3. *Un plongement de G_1 dans G_2 revient tout simplement à vérifier si G_1 est isomorphe à un sous-graphe de G_2 .*

Conditions nécessaires pour qu'un graphe G soit plongeable dans Q_n :

Si un graphe G est plongeable dans Q_n , alors on a nécessairement :

1. $|V(G)| \leq 2^n$.
2. G est biparti.
3. Le degré maximum, $\Delta(G) \leq n$.
4. Si $|V(G)| = 2^n$, alors G est équilibré.

Ces conditions ne sont pas suffisantes. Voici un exemple :



Arbre équilibré à 10 sommets

Cet arbre n'est pas plongeable dans Q_4 car tous les sommets de l'arbre sont au plus à distance 3 de v , alors que dans Q_4 tout sommet est à distance 4 d'un unique sommet.

1.5 Conjectures de I. Havel

Par la décomposition en couches à partir d'un sommet x , nous obtenons p niveaux, $N_1(x), N_2(x), \dots, N_p(x)$.

I. Havel [10] a conjecturé sur certaines propriétés d'un graphe de type hypercube comme suit :

Soit L_n^k un sous-graphe de l'hypercube Q_n composé par deux niveaux consécutifs N_{k-1} et N_k .

Conjecture 1.1. *Si n est impair et $k = \frac{n+1}{2}$, alors L_n^k est un graphe hamiltonien.*

Pour $k = \frac{n+1}{2}$, L_n^k représente les deux couches centrales de l'hypercube Q_n .

Conjecture 1.2. *Pour tout k , $1 \leq k \leq n$, L_n^k admet une chaîne saturante.*

Les précédentes conjectures sont ouvertes à ce jour. Par contre, I. Havel a prouvé leur équivalence.

Chapitre 2

Graphes semi-réguliers et (s, r) -réguliers de type 1

Dans ce chapitre, nous essayerons principalement de détailler le travail de J. A. De La Penã [5].

Nous appelons graphes semi-réguliers (respectivement (s, r) -réguliers) de **type 1**, les graphes semi-réguliers (respectivement (s, r) -réguliers) définis selon J. A. De La Penã [5].

2.1 Définition

Soit G un graphe d'ordre n . Le graphe G est (s, r) -régulier si pour tout sommet $i \in V(G)$, on a $\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(s)} = r$ (les $a_{ij}^{(s)}$ représentent les éléments de la matrice A^s). Cela veut dire qu'en partant du sommet i , il existe r chaînes de longueur s , en sachant que les chaînes ne sont pas nécessairement simples ou élémentaires. Un graphe (s, r) -régulier est aussi appelé graphe régulier retardé.

Pour tout $n \geq 1$, un graphe (s, r) -régulier est aussi (ns, r^n) -régulier.

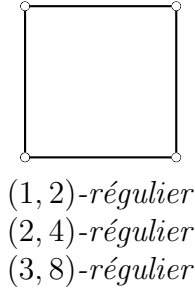
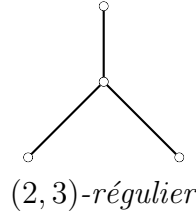
Un graphe r -régulier est un graphe $(1, r)$ -régulier.

Le graphe G est semi-régulier s'il possède une bipartition $V(G) = V_1(G) \cup V_2(G)$, telle

que :

$$\deg(x) = \begin{cases} r_1 & \text{si } x \in V_1(G) \\ r_2 & \text{si } x \in V_2(G) \end{cases}$$

Si G est semi-régulier alors G est $(2, r_1 r_2)$ -régulier.



Remarque 2.1. Dans l'article [5], il est dit qu'un graphe semi-régulier est (s, r) -régulier, avec $s \leq 2$. Par conséquent, un graphe régulier retardé peut être régulier et semi-régulier à la fois.

Proposition 2.1.1. Soit G un graphe et A sa matrice d'adjacence. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. G est (s, r) -régulier.
2. La matrice $\frac{1}{r}A^s$ est stochastique, s et r appartiennent à \mathbb{N}^+ .
3. $v = (1, \dots, 1)^t$ est un vecteur propre de A^s pour $s \geq 1$.
4. v appartient au \mathbb{R} -espace vectoriel engendré par les vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $|\lambda| = \rho(A)$, le rayon spectral de A .

La preuve de cette proposition est décrite dans l'article [5].

2.2 Graphes exactement (s, r) -réguliers

Dans cette section, nous allons démontrer la proposition 2.2.1 ci-dessous. A cet effet, nous avons besoin d'énoncer les théorèmes suivants :

Théorème 2.2.1. [4]

Une matrice A est dite réductible s'il existe une matrice de permutation P telle que $P^{-1}AP$ est sous la forme $A = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix}$, où X et Z sont des matrices carrées. Sinon, A est dite irréductible. De plus, si A est symétrique et réductible alors $Y = 0$.

Théorème 2.2.2. [4]

Si A est une matrice positive et irréductible, alors $\rho(A)$ est une racine simple du polynôme caractéristique et il existe un vecteur positif v tel que : $Av = \rho(A)v$.

De plus, si A a exactement h valeurs propres de module $\rho(A)$, alors ces valeurs propres sont racines de l'équation : $\lambda^h - \rho(A)^h = 0$.

Définition 2.1. Si $h > 1$, la matrice A est dite imprimitive et h est l'indice d'imprimitivité. Sinon, A est primitive.

Théorème 2.2.3. [4]

Soit A une matrice positive ayant λ comme valeur propre maximale. Pour λ , il existe un vecteur propre positif u associé à A et A^t si et seulement si il existe une permutation de lignes (la même pour les colonnes) telle que A peut être représentée en blocks diagonaux $A = \text{diag}(B_1, \dots, B_d)$, avec B_1, \dots, B_d des matrices irréductibles et chacune d'elle a λ comme unique valeur propre maximale.

Définition 2.2. Un graphe G est exactement (s, r) -régulier si s est minimal tel que G est (s, r^*) -régulier, pour un entier $r^*(= r)$.

Proposition 2.2.1. Si G est un graphe exactement (s, r) -régulier connexe, alors $s \leq 2$.

Démonstration.

Comme G est connexe alors la matrice d'adjacence A qui lui est associée est irréductible. Soit h la multiplicité de $r = \rho(A)^s$ comme racine du polynôme caractéristique de A^s . Par le théorème 2.2.3, $A^s = \text{diag}(B_1, \dots, B_d)$, B_1, \dots, B_d sont des matrices irréductibles et chacune d'elle a r comme sa valeur propre maximale. Ainsi d doit être égal à h .

Nous avons $\rho(A^s) = \rho(A)^s = r$, alors $\rho(A) = r^{\frac{1}{s}}$.

Soit h_0 l'indice d'imprimitivité de A (h_0 représente le nombre de valeurs propres λ telles que $|\lambda| = \rho(A) = r^{\frac{1}{s}}$). Par le théorème 2.2.2 :

$$\lambda^{h_0} - \rho(A)^{h_0} = 0.$$

Les $h_0^{\text{ième}}$ racines de λ sont :

$$\lambda_m = \rho(A)e^{\frac{2i\pi m}{h_0}}, \quad 0 \leq m \leq h_0 - 1.$$

Sachant que la matrice d'adjacence A est symétrique, alors toutes les valeurs propres de A sont réelles. Donc, comme $\lambda_m \in \mathbb{R}$, alors :

$$\frac{2\pi m}{h_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_m \geq 0 \\ \pi & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $h_0 \geq 3$, pour $m = h_0 - 1$ la valeur propre $\lambda_m \notin \mathbb{R}$. Donc, on a forcément $1 \leq h_0 \leq 2$.

Donc, nous avons bien deux valeurs possibles pour h_0 :

Si $h_0 = 1$, alors $|\lambda| = \rho(A)$. Par la proposition 2.1.1 (1 \Leftrightarrow 4), $v = (1, \dots, 1)^t$ est un vecteur propre de A , alors c'est clair que G est régulier, avec pour tout $x \in V(G)$, $\deg(x) = \rho(A)$.

Si $h_0 = 2$, alors m est égal soit à 0, soit à 1. Ainsi, on trouve que $\lambda_0 = \rho(A)$ ou $\lambda_1 = -\rho(A)$ respectivement. D'après la proposition 2.1.1 (1 \Leftrightarrow 4) : $\exists \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \mid v = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2$, avec $Aw_1 = \rho(A)w_1$ et $Aw_2 = -\rho(A)w_2$. Nous avons :

$$\begin{aligned} Aw_1 = \rho(A)w_1 &\Rightarrow A\mu_1 w_1 = \rho(A)\mu_1 w_1 \\ &\Rightarrow A^2 \mu_1 w_1 = \rho(A)\mu_1 Aw_1 \\ &\Rightarrow A^2 \mu_1 w_1 = \rho(A)^2 \mu_1 w_1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

De même pour w_2 :

$$\begin{aligned}
 Aw_2 = -\rho(A)w_2 &\Rightarrow A\mu_2w_2 = -\rho(A)\mu_2w_2 \\
 &\Rightarrow A^2\mu_2w_2 = -\rho(A)\mu_2Aw_2 \\
 &\Rightarrow A^2\mu_2w_2 = \rho(A)^2\mu_2w_2.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

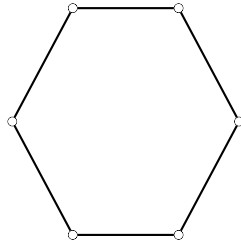
Par (2.1) et (2.2), on a $A^2v = \rho(A)^2v$. Donc, v est bien un vecteur propre de A^2 avec $\rho(A)^2$ comme valeur propre.

En suivant le même principe, nous pouvons démontrer aussi que v est un vecteur propre de A^n , tel que n pair et $n > 2$.

Comme G est *exactement* (s, r) -régulier, alors $s = 2$. ◇

Remarques 1. Si μ_2 était nul, alors $Av = \rho(A)v$. Donc $s = 1$, ce qui nous donne un graphe régulier. Par conséquent, on peut avoir $h_0 = 2$ et $s = 1$.

Voici un exemple :



Les valeurs propres de la matrice d'adjacence associée à ce graphe sont : $-2, 2, 1, 1, -1, -1$.
Donc $h_0 = 2$ et $\rho(A) = 2$.

Nous avons $Av = \rho(A)v$ et $A^2v = \rho(A)^2v$, donc $s = 1$. Ce graphe est bien semi-régulier $((2, 4)$ -régulier) et régulier $((1, 2)$ -régulier) à la fois, alors il est *exactement* $(1, 2)$ -régulier.

2.3 Graphes (s, r) -réguliers

La proposition 2.2.1 nous dit qu'un graphe *exactement* (s, r) -régulier est soit régulier soit semi-régulier. Dans cette section, nous généralisons ce résultat aux graphes (s, r) -réguliers.

Théorème 2.3.1. *Un graphe (s, r) -régulier connexe est soit régulier soit semi-régulier.*

Démonstration.

Si $s = 1$, alors G est forcément régulier.

Sinon, $h_0 = s = 2$, et donc, par le théorème 2.2.3, A^2 s'écrit comme suit :

$$A^2 = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

avec B_1 et B_2 des matrices irréductibles et chacune a $\rho(A)^2$ comme son unique valeur propre maximale. De cette matrice, nous pouvons déduire une partition des sommets $V(G) = V_1(G) \cup V_2(G)$, avec $V_1(G) = \{1, \dots, m\}$ et $V_2(G) = \{m+1, \dots, n\}$. Nous obtenons donc deux cas, soit :

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^t \end{pmatrix}$$

soit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme A est irréductible et comme le premier cas est écarté par le théorème 2.2.1, alors :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $B_1 = BB^t$ et $B_2 = B^tB$. Par la proposition 2.1.1 ($1 \Leftrightarrow 4$), $v = (1, \dots, 1)^t$ est une combinaison linéaire de w_1 et w_2 , avec $Aw_1 = \rho(A)w_1$ et $Aw_2 = -\rho(A)w_2$. Posons $w_1 = (x, y)^t$, et donc $w_2 = (x, -y)^t$, avec $x \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^{n-m}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} Aw_1 = \rho(A)w_1 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \rho(A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} By \\ B^tx \end{pmatrix} = \rho(A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned} Aw_2 = -\rho(A)w_2 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = -\rho(A) \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} By \\ B^t x \end{pmatrix} = \rho(A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

De (2.3) et (2.4), on a $By = \rho(A)x$ et $B^t x = \rho(A)y$.

Nous avons pour un certain $\mu_1 \in \mathbb{R}$ et un certain $\mu_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} v = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 &\Leftrightarrow v = \mu_1(x, y)^t + \mu_2(x, -y)^t \\ &\Leftrightarrow v = ((\mu_1 + \mu_2)x, (\mu_1 - \mu_2)y)^t \end{aligned} \quad (2.5)$$

Comme $v = (1, \dots, 1)^t$ et comme μ_1, μ_2 sont des constantes réelles, alors forcément $x = c_1(1, \dots, 1)^t \in \mathbb{R}^m$ et $y = c_2(1, \dots, 1)^t \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Par conséquent, pour $1 \leq i \leq m$ et en identifiant les $i^{\text{èmes}}$ coordonnées dans (2.5) :

$$\mu_1 c_1 + \mu_2 c_1 = 1 \quad (2.6)$$

et pour $m+1 \leq j \leq n-m$ et en identifiant les $j^{\text{èmes}}$ coordonnées dans (2.5) :

$$\mu_1 c_2 - \mu_2 c_2 = 1 \quad (2.7)$$

D'après (2.6) et (2.7), on a :

$$(\mu_1 + \mu_2)c_1 = (\mu_1 - \mu_2)c_2 = 1.$$

Au final :

$$\begin{aligned} By = \rho(A)x &\Leftrightarrow \sum_{j=m+1}^n a_{ij} c_2 = \rho(A)c_1, \forall i = \overline{1, m} \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=m+1}^n a_{ij} = \rho(A) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \forall i = \overline{1, m} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B^t x = \rho(A)y &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^m a_{ij}c_1 = \rho(A)c_2, \forall i = \overline{m, n-m} \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^m a_{ij} = \rho(A)\left(\frac{c_2}{c_1}\right), \forall i = \overline{m, n-m}. \end{aligned}$$

Ainsi G est $(2, \rho(A)^2)$ -régulier, donc G est bien semi-régulier. \diamond

Avec la même définition que celle de J. A. De La Penã, I. Gutman [9] a montré que le vecteur $(\sqrt{\deg(x_1)}, \dots, \sqrt{\deg(x_n)})^t$ est un vecteur propre de A si et seulement si G est soit régulier soit semi-régulier.

2.4 Résultats sur la semi-régularité de type1

En fait, la définition des graphes semi-réguliers de type1 (selon J. A. De La Penã) est équivalente à celle de M. Mollard [12].

N. Bourras [3] a montré l'équivalence entre la définition des graphes semi-réguliers de M. Mollard [12] et celle de D. L. Power [15]. D. L. Power définit cette classe de graphes comme suit :

Définition 2.3. *Une partition de l'ensemble $V(G)$ des sommets de G en sous-ensembles $V_1(G), V_2(G), \dots, V_k(G)$ est dite équitable si pour tout i et j , tout sommet x dans $V_i(G)$ est adjacent au même nombre de sommets b_{ij} dans $V_j(G)$.*

Définition 2.4. *Soit $G = (V_1(G) \cup V_2(G), E(G))$ un graphe connexe biparti. G est dit semi-régulier si la décomposition en couches à partir de tout sommet u dans $V_1(G)$ est une partition équitable et la matrice d'intersection $B = [b_{ij}]$ de cette partition est indépendante de u .*

Par conséquent, les graphes semi-réguliers de type1 [5] sont équivalents aux graphes semi-réguliers selon M. Mollard [12] et selon D. L. Power [15].

N. Bourras [3] a également montré la semi-régularité de type1 de certaines familles de graphes :

Définition 2.5. *Un graphe est distance-régulier si la décomposition en couches à partir de chaque sommet du graphe est une partition équitale et la matrice d'intersection de la partition est indépendante du sommet choisi.*

Proposition 2.4.1. *Si G est un graphe biparti distance-régulier alors G est semi-régulier.*

Définition 2.6. *Un graphe biparti est distance-birégulier si la décomposition en couches à partir de chaque sommet du graphe est une partition équitale et la matrice d'intersection de la partition ne dépend que des deux sous-ensembles de la bipartition.*

Il existe une autre définition de cette famille de graphes qui a été établie par C. Delorme [6] :

Définition 2.7. *Un graphe connexe biparti est distance-birégulier si pour toute paire de sommets x et y , le nombre de voisins z de y ne dépend que de la distance $d(x,y)$, en sachant que $d(x,z) = d(x,y) - 1$, et des sous-ensembles de la bipartition contenant x et y .*

Proposition 2.4.2. *Si G est un graphe distance-birégulier alors G est semi-régulier.*

Dans [8], les auteurs sont passés par les graphes distance-régularisés afin de définir les graphes distance-biréguliers :

Définition 2.8. *Un graphe est distance-régularisé si la décomposition en couches à partir de chaque sommet du graphe est une partition équitale et la matrice d'intersection de la partition peut dépendre du sommet choisi.*

Proposition 2.4.3. *Si G est un graphe distance-régularisé et non distance-régulier, alors le graphe est biparti et la matrice d'intersection ne dépend que des deux sous-ensembles de la bipartition. Ce qui donne un graphe distance-birégulier.*

Chapitre 3

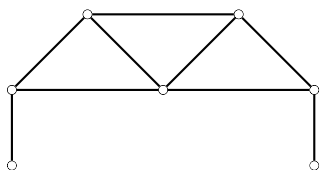
Graphes semi-réguliers de type2

Dans ce chapitre, nous exposerons la totalité des résultats de A. Northup [14] concernant les graphes semi-réguliers.

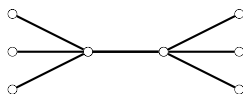
On appelle les graphes semi-réguliers de A. Northup [14], des graphes semi-réguliers de **type2**.

3.1 Définition

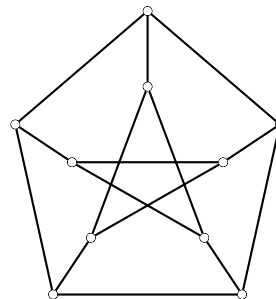
Pour A. Northup, un graphe est semi-régulier si chaque sommet du graphe est à distance deux d'un même nombre de sommets. Autrement dit, si pour tout sommet $x \in V(G)$, $\deg_2(x) = r$, alors G est r -semi-régulier. Par conséquent, on prend en compte que les chaînes élémentaires simples contrairement à J. A. De La Penã [5].



2-semi-régulier



3-semi-régulier



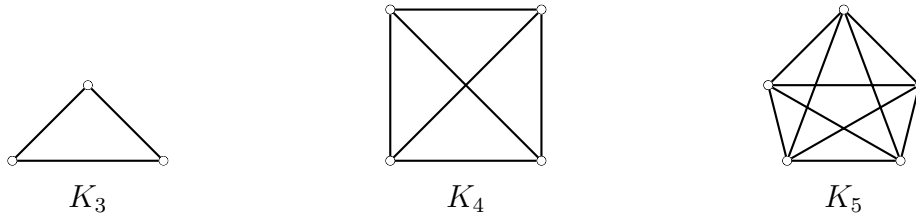
6-semi-régulier

3.2 Quelques résultats

Dans ce qui suit, nous allons énoncer les principaux résultats de A. Northup pour ce type de graphe.

Théorème 3.2.1. *Le graphe n -barbell est n -semi-régulier pour tout $n \geq 0$.*

Théorème 3.2.2. *Un graphe connexe est 0-semi-régulier si et seulement si c'est un graphe complet K_n , pour $n \geq 1$.*

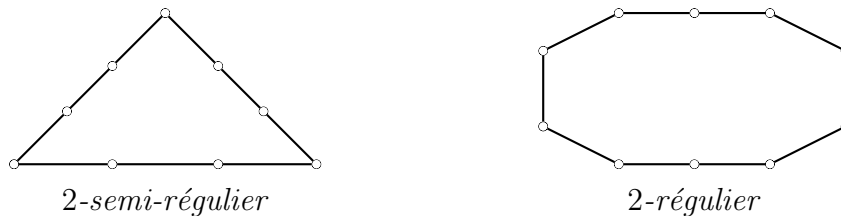


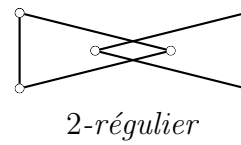
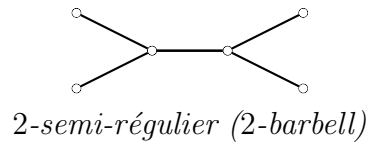
Lemme 3.2.1. *Chaque graphe 1-semi-régulier fini possède un nombre paire de sommets.*

Théorème 3.2.3. *Un graphe connexe est 1-semi-régulier si et seulement si c'est un graphe formé d'une chaîne élémentaire simple de longueur trois (il possède donc quatre sommets) ou bien du complément de l'union de n chaînes élémentaires simples de longueur deux, pour $n \geq 2$.*

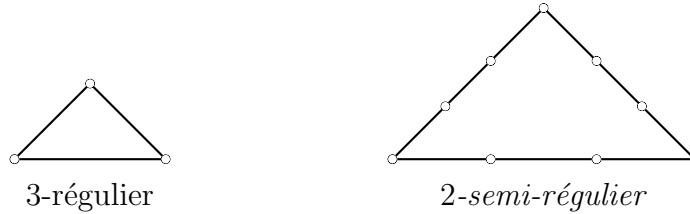
Théorème 3.2.4. *Un arbre fini est semi-régulier si et seulement si il est n -barbell, $n \geq 0$.*

Théorème 3.2.5. *Soit G un graphe n -semi-régulier. Soit G^* le graphe ayant les mêmes sommets que G et dans lequel deux sommets sont adjacents s'ils sont à distance deux l'un de l'autre dans G . Le graphe G^* est alors n -régulier.*





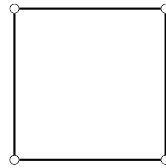
Théorème 3.2.6. Soit G un graphe n -régulier. Soit G^* le graphe obtenu à partir de G par l'ajout de deux sommets sur chaque arête. Le graphe G^* est alors n -semi-régulier.



Les preuves de ces théorèmes sont reportées en détail dans [14].

Remarque 3.1.

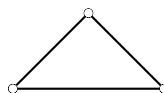
1. Si G est un n -cycle, alors G est r -semi-régulier (semi-régulier de type2), avec $0 \leq r \leq 2$. Si le cycle est impair, ceci implique que G n'est pas biparti, donc G ne peut jamais être un graphe semi-régulier de type1. Par contre, si le cycle est pair, alors G est biparti et donc G est un graphe semi-régulier de type1.



1-semi-régulier et (2, 4)-régulier

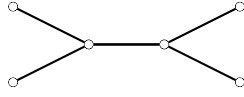
(ce graphe est semi-régulier de type1 car il est biparti)

2. Si G est un graphe complet, alors G est 0-semi-régulier (semi-régulier de type2) et comme tout graphe complet n'est jamais biparti alors G ne peut être semi-régulier de type1. Ceci dit, G peut être semi-régulier de type2 et (s, r) -régulier de type1 (non semi-régulier de type1).

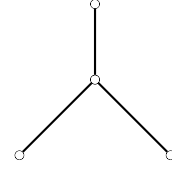


0-semi-régulier et (s, r) -régulier de type1 et non semi-régulier de type1

3. Le graphe G peut être semi-régulier de type1 et non de type2 et vice versa.



2-semi-régulier mais pas $(2, r)$ -régulier



$(2, 3)$ -régulier mais pas 2-semi-régulier

3.3 Algorithme pour déterminer la semi-régularité

L'algorithme suivant est conçu pour déterminer si un graphe G est semi-régulier :

1. Calculer la matrice A , matrice d'adjacence de G .
2. Calculer A^2 .
3. Annuler la diagonale de A^2 et remplacer ses éléments supérieurs à 1 par 1. Nommer la matrice résultante A_2 .
4. Calculer $A^* = A_2 - A$.
5. Si le nombre de 1 est le même sur chaque ligne de A^* et est égal à n , alors le graphe G est n -semi-régulier.

Chapitre 4

Graphes (s, r) -réguliers de type 2

Dans ce chapitre, nous introduirons une nouvelle classe de graphes, qui est une généralisation des graphes semi-réguliers de A. Northup [14]. Nous généraliserons aussi certains de ses résultats.

4.1 Définition

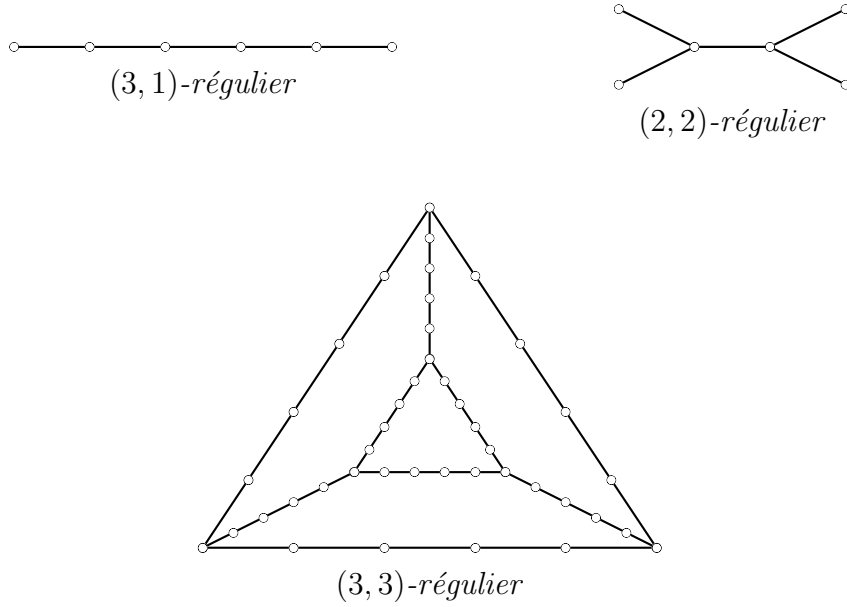
On résonne en termes de chaînes élémentaires simples, et non en termes de chaînes comme dans [5].

Soit G un graphe simple avec $V(G) = \{1, \dots, n\}$ l'ensemble des sommets et $E(G) = \{1, \dots, m\}$ l'ensemble des arêtes.

Soient s, r deux entiers ≥ 1 . Le graphe G est (s, r) -régulier si pour tout sommet $x \in V(G)$, $\deg_s(x) = r$. Cela veut dire que le nombre de sommets à distance s de x est égal à r .

Le graphe G est régulier si pour tout sommet $x \in V(G)$, $\deg(x) = r$, autrement dit G est $(1, r)$ -régulier.

Le graphe G est semi-régulier si pour tout sommet $x \in V(G)$, $\deg_2(x) = r$, ceci représente bien un graphe $(2, r)$ -régulier.



4.2 Généralisation des résultats de A. Northup

Théorème 4.2.1. *Si G est r -régulier, alors en ajoutant $2(s - 1)$ sommets à chacune des arêtes de G , on obtient un graphe G^* qui est (s, r) -régulier.*

Démonstration.

On doit arriver à prouver qu'en ajoutant les $2(s - 1)$ sommets à chacune des arêtes de G , nous obtenons bien un graphe G^* qui est (s, r) -régulier.

Nous avons deux cas possibles, soit $x \in V(G)$, soit $x \in V(G^*) \setminus V(G)$.

Cas 1 :

Comme $x \in V(G)$, alors $\deg(x) = r$. Quand on ajoute $2(s - 1)$ sommets aux r arêtes incidentes à x , nous avons exactement r sommets qui sont à distance s de x .

Cas 2 :

Posons $v_1, v_2 \in V(G)$ et x l'un des $2(s - 1)$ sommets ajoutés à l'arête v_1v_2 .

Cas 2.1 :

Si x est incident à v_1 , alors $\deg_s(x) = \deg(v_1) - 1 + 1$. Comme $\deg(v_1) = r$ et comme on ajoute $2(s - 1)$ sommets aux arêtes incidentes à v_1 , alors v_1 est à distance s de r sommets et

donc forcément x est à distance s de $r - 1$ sommets. On soustrait un 1 car x est à distance 1 de v_1 . On ajoute un 1 car x est à distance s d'un et un seul sommet qui se trouve sur l'arête v_1v_2 . Ceci implique que $\deg_s(x) = r$.

Cas 2.2 :

Si x se trouve à distance $(s - 1)$ de v_1 , on retombrera sur le Cas 2.1 sauf qu'on ajoutera un 1 car x est à distance s de v_2 . Par conséquent $\deg_s(x) = r$.

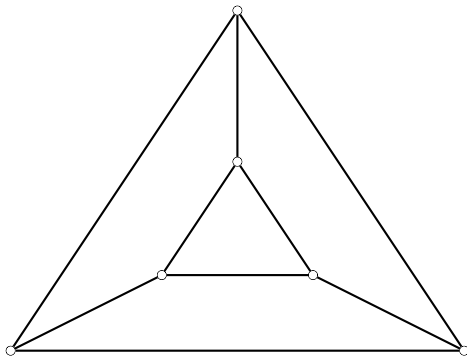
Cas 2.3 :

Sinon, $\deg_s(x) = r$ (x se trouve entre le sommet du Cas 2.1 et celui du Cas 2.2).

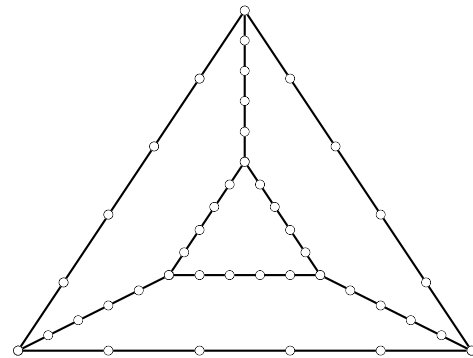
Nous développons le même raisonnement du coté de v_2 .

Par conséquent, pour tout sommet $x \in V(G^*)$, $\deg_s(x) = r$, ce qui implique que G^* est bien (s, r) -régulier. \diamond

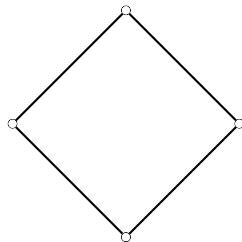
Remarque 4.1. Dans le cas où G est un cycle, on n'ajoute aucun sommet si $s < \frac{n-1}{2}$, sinon l'ajout de $2(s - \frac{n-1}{2})$ sommets dans tout le graphe suffit à ce que G^* soit $(s, 2)$ -régulier.



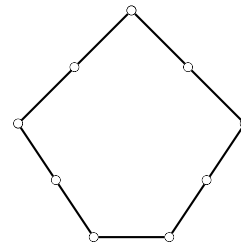
3-régulier



(3,3)-régulier



2-régulier



(4,2)-régulier

Corollaire 4.2.1. *Quels que soient les entiers $s, r \geq 1$, il existe un graphe (s, r) -régulier.*

Démonstration.

Dans le théorème ci-dessus, il suffit de prendre G un graphe complet à $(r + 1)$ sommets, ou aussi un r -cube. On ajoute donc $2(s - 1)$ sommets aux arêtes de G afin d'obtenir un graphe (s, r) -régulier. \diamond

Théorème 4.2.2. *Soit G un graphe (s, r) -régulier. Soit G^* le graphe ayant le même ensemble de sommets que G et dans lequel deux sommets sont adjacents si dans G ils sont à distance s l'un de l'autre. Le graphe G^* est alors r -régulier.*

Démonstration.

Soit G un graphe (s, r) -régulier, cela implique que pour tout $x \in V(G)$, $\deg_s(x) = r$. Il existe donc r sommets qui sont à distance s de x . Dans G^* , x est adjacent à tous les sommets qui sont à distance s de lui dans G . Comme il existe exactement r sommets, alors G^* est r -régulier. \diamond

4.3 Algorithme pour déterminer la (s, r) -régularité

Les étapes de l'algorithme deviennent logiques une fois qu'on a bien assimilé la définition d'un graphe (s, r) -régulier.

Nous voulons donc savoir si un graphe G est (s, r) -régulier, pour cela nous pouvons par exemple suivre l'algorithme suivant :

1. Déterminer la matrice d'adjacence A associée à G .
2. Calculer les matrices A^2, A^3, \dots, A^s . Annuler leurs diagonales et changer tous les éléments qui sont supérieurs à 1 en 1. On note A_2, A_3, \dots, A_s les matrices respectivement obtenues.
3. Calculer $A^* = A_s - A_{s-1} - \dots - A_2 - A$.
4. Si le nombre de 1 est le même sur toutes les lignes de A^* et est égal à r , alors G est (s, r) -régulier.

Ci-dessous, une brève explication de l'algorithme :

L'élément $a_{ij}^{(s)}$ de A^s , $i = \overline{1, n}$ et $j = \overline{1, n}$, représente le nombre de chaînes de longueur s existantes entre i et j de longueur s . Ces chaînes ne sont pas nécessairement élémentaires simples.

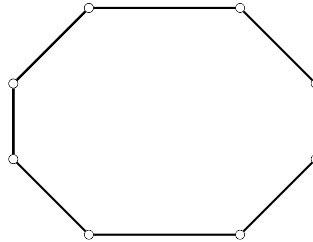
Soit $\alpha_{ij}^{(s)}$ l'élément de A^s , $i = \overline{1, n}$ et $j = \overline{1, n}$. Si $\alpha_{ij}^{(s)} > 1$, cela implique qu'il existe plus d'une chaîne entre i et j . On suppose que parmi ces chaînes il existe une qui soit élémentaire simple (i est à distance s de j), alors $\alpha_{ij}^{(s)} := 1$ (2^{ème} point).

Afin de vérifier si notre supposition est vraie, nous passons au 3^{ème} point. Cette étape nous permet de garder que les sommets qui sont réellement à distance s les uns des autres.

Au 4^{ème} et dernier point, nous comptons le nombre de sommets qui sont à distance s de i , pour tout $i \in V(G)$. Si $a_{ij}^{(*)} = 1$, alors i est sûrement à distance s de j . Dans le cas où pour tout $i \in V(G)$, le nombre d'éléments $a_{ij}^{(*)}$ tels que $a_{ij}^{(*)} = 1$ est r , alors G est (s, r) -régulier.

Afin de mieux comprendre l'algorithme, nous développons un exemple :

Soit G un cycle de longueur 8, nous voulons savoir si G est $(3, 2)$ -régulier, voici le graphe :



1. La matrice d'adjacence :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Calcul de A^2 et A_2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ devient } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de A^3 et A_3 :

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ devient } A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Calcul de A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Chaque ligne de la matrice A^* possède exactement deux éléments qui sont égaux à 1, donc G est bien $(3, 2)$ -régulier.

Par le même principe, nous pouvons démontrer que G est $(1, 2)$ -régulier, $(2, 2)$ -régulier et aussi $(4, 1)$ -régulier.

4.4 Les cycles dans les graphes (s, r) -réguliers

Sachant que les graphes r -barbell sont $(2, r)$ -réguliers d'une part et ne possèdent pas de cycles d'autre part (du fait qu'ils soient des arbres), alors on est amené à nous poser la suivante question :

Peut-il exister des graphes (s, r) -réguliers, $s > 2$, sans cycle.

Et bien la réponse est oui, nous pouvons construire un graphe qui possède cette propriété, en voici la preuve :

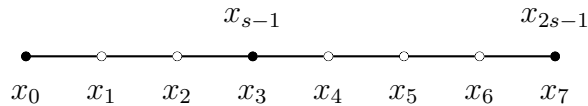
Démonstration.

Soit $[x_0x_{2s-1}]$ une chaîne de longueur $2s - 1$.

Le sommet d'une branche représente le sommet du quel sort cette branche.

Une branche d'un sommet x_i représente la chaîne $[x_jx_k]$ tel que la chaîne $[x_ix_k]$ est de longueur s et sachant que x_j est le sommet de cette branche, $x_k \notin [x_0x_{2s-1}]$ et $x_i \in [x_0x_{2s-1}]$.

Soit f , un sommet qui est à distance s de x_{2s-1} et qui se trouve sur une branche. Nous supposons que les branches de n'importe quel sommet sont concentrées en un seul.



Exemple de chaîne avec $s = 4$

Remarques 2. Dans toutes les démonstrations qui suivent, nous avons raisonné par la contraposé.

Cas 1.1 :

Le sommet f ne peut pas appartenir à une branche qui n'est pas celle de x_{s-1} car :

Soit x_j le sommet d'une branche de x_{2s-1} et tel que f lui appartient, alors : $x_j \leq x_{s-1+\lfloor \frac{s}{2} \rfloor_-}$.

Soit x_l le sommet d'une branche d'un sommet x_i , tel que :

$$s - (l - i) + (2s - 1 - l) \geq s$$

alors x_{2s-1} est à distance s d'un sommet de cette branche.

Si f peut être sur une branche qui n'est pas celle de x_{s-1} , alors f sera à distance s de toutes les branches de x_{s-1} et du sommet x_{2s-1} , donc $deg_s(f) = r$. De plus, f est à distance s d'au moins un sommet $x_i \in [x_1x_{s-2}]$ et donc $deg_s(f) > r$, ce qui est impossible.

Sinon, f ne peut être à distance s d'une branche entre x_s et x_{2s-2} en dehors de celles de x_{s-1} , donc :

Si f est à distance s d'un sommet d'une branche $x_l \in [x_1x_{s-1}]$ tel que :

$$s - (l - i) + (f - l) \geq s$$

alors $d_s(f) > r$, ce qui est impossible (ce cas est aussi vrai pour les sommets qui appartiennent aux branches de x_{s-1} et qui sont à distance s d'un sommet $\in [x_sx_{2s-1}]$).

Donc, f est clairement sur l'une des branches de x_{s-1} .

Cas 1.2 :

Les branches de x_1 ne peuvent pas être en x_s car nous avons :

Soit f le sommet qui est à distance s de x_{2s-1} et qui se trouve sur l'une des branches de x_1 .

Les branches de x_{s-1} sont obligatoirement en x_s car sinon on retombe sur le cas 1.1. Dans

ce cas, le sommet x_0 ne peut être à distance s des branches de x_1 , alors ses branches sont

$\leq x_{s-1}$ et $\geq \lfloor \frac{s}{2} \rfloor_+$. Soit x_i un sommet qui appartient à l'une des branches de x_{s-1} , x_i est à

distance s d'un certain sommet sur chacune des branches de x_{s-1} en x_s ($deg_s(x_i) = r-2$), et

à distance s d'un sommet qui $\in [x_{s+1}x_{2s-2}]$ ($deg_s(x_i) = r-1$), et d'un autre qui $\in [x_0x_{s-1}]$,

ce qui donne $deg_s(x_i) = r$. On peut toujours trouver un sommet x_i qui soit à distance s

d'un sommet qui appartient à l'une des branches de x_0 (car le premier sommet d'une des

branches en x_s est à distance s de x_0 et le dernier sommet est à distance s de x_{s-1}).

Donc, f est sur l'une des branches de x_{s-1} et les branches de x_1 ne sont pas en x_s (les branches de x_{s-1} sont $> x_s$).

Cas 1.3 :

Les branches de x_0 ne peuvent pas être en x_{s-1} car :

Comme les branches de x_1 ne peuvent pas être en x_s (cas 1.2), alors elles sont obligatoirement en x_{s-1} (car sinon x_0 serait également à distance s des $r - 1$ bifurcations de x_1).

Soit x_i le sommet qui appartient à l'une des bifurcations en x_s et qui est à distance s de x_0 . Le sommet x_i est à distance s de toutes les bifurcations de x_{s-1} ($deg_s(x_i) = r - 1$), du sommet x_0 ($deg_s(x_i) = r$) et de x_{2s-2} ($deg_s(x_i) = r + 1$). Donc, $deg_s(x_i) > r$, ce qui est impossible.

Cas 1.4 :

Si on n'est pas dans les cas cités plus haut, alors il est possible de construire un graphe qui soit (s, r) -régulier, $s > 2$, et sans cycle :

Soit i , le nombre de sommets qui appartiennent à l'une des branches de x_{s-1} et p le sommet d'une branche de x_{s-1} . Soit le sommet x_l , tel que : $x_l \in \{x_{s-1-i+1}, x_{s-1-i+2}, x_{s-1-i+3}, \dots, x_{s-1}\}$ ou $x_l \in \{x_{s+p-i}, x_{s+p-i+1}, x_{s+p-i+2}, \dots\}$. Le sommet x_l est à distance s des branches de x_{s-1} et du sommet x_{l+s} , donc $deg_s(x_l) = r$.

Soit j , le nombre de sommets qui appartiennent à l'une des branches de x_1 et k le sommet d'une branche de x_1 . Soit $x_m \in \{x_{s-1+k}, x_{s-2+k}, x_{s-3+k}, \dots, x_{s-j+k}\}$. x_m est à distance s des branches de x_1 et du sommet x_{m-s} , donc $deg_s(x_m) = r$.

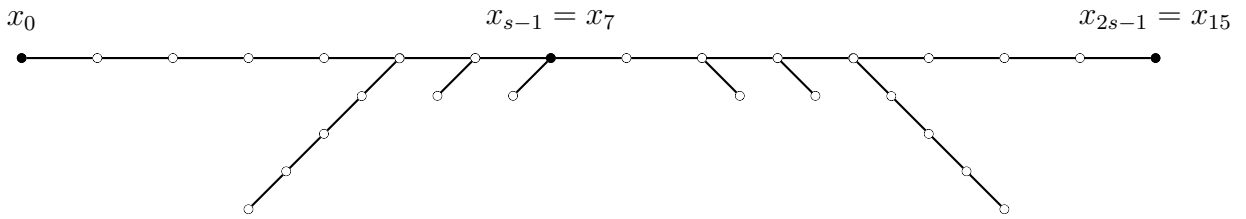
On a aussi :

$$deg_s(x_0) = deg_s(x_1) = r.$$

Tous les sommets restant, x_w , ont leur degré strictement inférieur à r . Les $r - 1$ branches de x_w sont de longueur une (sinon, le degré des sommets cités plus haut sera strictement supérieur à r), alors leur $deg_s(x_w) = r$. ◇

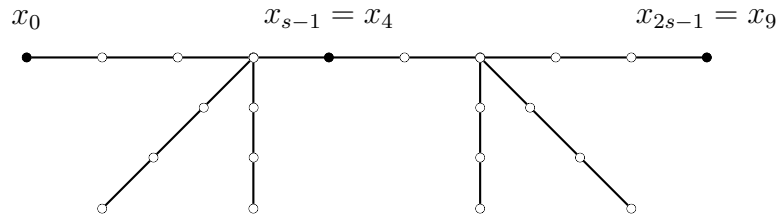
Remarques 3. On voit bien que dans le cas où $s = 3$ et $s = 4$, on ne peut pas construire un graphe qui soit (s, r) -régulier en suivant cette méthode car on tombera soit dans le Cas 1.2 ou dans le Cas 1.3 respectivement.

Exemples :

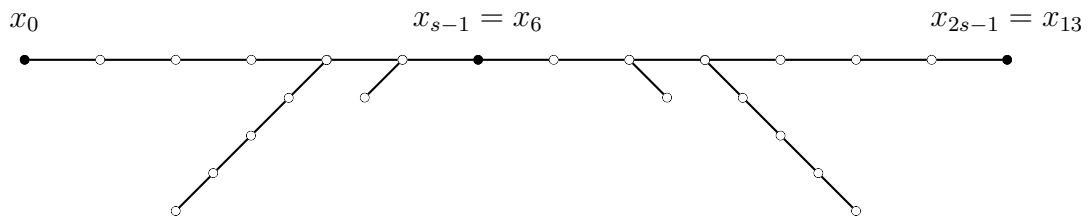


N'est pas $(8, 2)$ -régulier

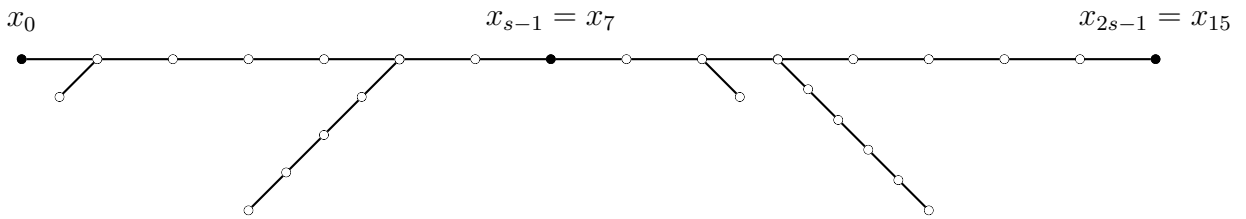
Le graphe au dessus n'est pas $(8, 2)$ -régulier car il existe une branche en x_{s-1} en dehors des $r - 1$ de x_0 (Cas 1.3).



$(5, 3)$ -régulier



$(7, 2)$ -régulier



$(8, 2)$ -régulier

Remarques 4. *Pour tout sommet x_i , $0 \leq i \leq s - 1$, chaque branche de x_i en un sommet x_l respecte la suivante configuration :*

$$\left[\frac{s+i}{2}\right]_+ \leq l \leq i + s - 1.$$

Conclusion et Perspectives

Dans ce mémoire, nous avons introduit une nouvelle classe de graphes, les graphes (s, r) -réguliers de type2, qui représente une généralisation des graphes semi-réguliers de A. Northup [14]. Nous avons généralisé un certain nombre de résultats obtenus par cette dernière, dont un algorithme pour déterminer la (s, r) -régularité de type2 d'un graphe donné.

Il y a deux perspectives essentielles qui se complètent, l'une est d'étudier plus en détails les graphes (s, r) -réguliers de type2 et l'autre est de tisser un lien entre cette nouvelle classe de graphes et la conjecture de I. Havel. En d'autres termes, essayer de voir si le sous-graphe engendré par les deux couches centrales d'un hypercube de degré impair est (s, r) -régulier de type2 et si c'est le cas, chercher ses caractéristiques afin d'avoir plus d'informations et d'outils pour mieux comprendre cette conjecture.

Bibliographie

- [1] H. J. BANDELT, H. M. MULDER : *Infinite Median Graphs, $(0,2)$ -graphs and Hypercubes*, *Journal of Graphs Theory* (7), 487-492, 1983.
- [2] A. BERRACHEDI : *Sur Quelques Propriétés Métriques du Graphe de Type Hypercube*, *PhD Thesis, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne*, 1997.
- [3] N. BOURRAS : *Etude de Quelques Graphes Semi-réguliers*, *Thèse de Magister, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne*, 2008.
- [4] D. CVETKOVIĆ, P. ROWLINSON, S. SIMIĆ : *Eigenspaces of Graphs*, *Cambridge University Press*, 1997.
- [5] J. A. De La PENÃ, I. GUTMAN, J. RADA : *Retarded Graphs are Regular or Semi-regular*, *Linear and Multilinear Algebra*, in Press.
- [6] C. DELORME : *Distance Biregular Bipartite Graphs*, *Europ. J. Combinatorics* (15), 223-238, 1994.
- [7] S. FOLDES : *A Characterization of Hypercubes*, *Discrete Mathematics* (17), 155-159, 1977.
- [8] C. GODSIL, SHAWE-TAYLOR : *Distance-regularized Graphs are Distance Regular or Distance Biregular*, *J. Combinatorial Theory, Ser. B* (43), 14-27, 1987.
- [9] I. GUTMAN : *A Spectral Property of Graphs*, *Graph Theory Notes* (44), 10-13, 2003.
- [10] I. HAVEL : *Semipaths in Directed Cubes*, *Graphs and Other Combinatorial Topics*, B.59 (*Teubnez zum Mathematik, Teubner, Leipzig*) (3^{ème} Symposium Tchécoslavaque de Théorie des Graphes), Nov 1982.

- [11] J. M. LABORDE, S.P. RAO HABBARE : *Another Characterization of Hypercubes*, *Discrete Mathematics* (39), 161-166, 1982
- [12] M. MOLLARD : *Cycle-regular Graphs*, *Discrete Mathematics* (89), 29-41, 1991.
- [13] H. M. MULDER : *$(0, \lambda)$ -graphs and n -cubes*, *Discrete Mathematics* (28), 179-188, 1979.
- [14] A. NORTHUP : *A Study of Semiregular Graphs*, Stetson University, 2002.
- [15] D. L. POWER : *Semiregular Graphs and their Algebra*, *Linear and Multilinear Algebra* (24), 27-37, 1988.