

N° d'ordre : 11/2013-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI  
BOUMEDIENE  
FACULTE DE MATHEMATIQUES



MÉMOIRE  
Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN : MATHEMATIQUES  
SPÉCIALITÉ : PROBABILITÉ ET STATISTIQUE

Par : Nawel KHELLOUF

Sujet

**Modélisation Stochastique et Statistique  
dans les Risques de Dégradation  
Structurelle**

Soutenu publiquement le 18/12/2013, devant le jury composé de :

Mm. Zohra GUESSOUM	Maître de Conférences/A	à l'USTHB	Président.
Mr. Kamal BOUKHETALA	Professeur	à l'USTHB	Directeur de Mémoire.
Mr. Abdelkader TATACHAK	Maître de Conférences/A	à l'USTHB	Examineur.

# Remerciements

**T**out d'abord je tiens à remercier Dieu de m'avoir donné le courage, la morale et la santé pour mener à bien ce travail.

**J**e tiens à remercier avec tous mes sentiments de respectueuse gratitude mon promoteur Mr. Kamal BOUKHETALA Professeur à l'USTHB pour sa proposition de sujet ainsi pour son soutien, ses orientations et ses précieux conseils.

**J**'exprime aussi ma profonde gratitude à Mm. Zohra GUESSOUM Maître de conférences à l'USTHB, pour avoir acceptée de présider le jury de soutenance.

**J**e remercie également : Mr. Abdelkader TATACHAK Maître de conférences à l'USTHB, pour avoir accepté d'examiner cette thèse.

**E**nfin, je remercie chaleureusement toutes les personnes qui m'ont aidé, et qui ont contribué de proche ou de loin à la réalisation de ce travail.



# Résumé

Dans ce travail, Nous décrivons le niveau de dégradation caractéristique d'une structure à l'aide d'un processus stochastique appelé processus de dégradation. La dynamique de ce processus est modélisée par une équation différentielle stochastique de type « Stratonovich ». Une description détaillée du phénomène et la définition de ses paramètres physiques sont représentés. Des solutions analytiques du processus  $L(t)$  désignant la taille de la dégradation probable sont examinées. Nous étudions la fiabilité du système en considérant la défaillance de la structure lorsque le processus de dégradation dépasse un seuil fixe. La loi du temps d'atteindre un seuil de dégradation indésirable est estimée. Le problème de la fiabilité de la structure est étudié en fonction d'un semble de facteurs de risque significativement détermine. Une mise en œuvre par simulation est effectuée.

**Mots clés :** Dégradation structurelle, Diffusion, Modélisation, Simulation, Fiabilité.



# Abstract

In this work, The characteristic level of degradation of a given structure is modeled through a stochastic process called the degradation process. The random evolution of the degradation process is governed by a Stratonovich stochastic differential equation. A detailed discription of phenomenon and the definition of its physical parameters are presente. Analytical solutions of the process  $L(t)$  the length of dominant crack are discussed. We put the associated reliability framework by considering the failure of the structure once the degradation process reaches a critical threshold.Implemented by a simulation is performed.

**Keywords :** Structural degradation, Diffusion, Modeling, Simulation, Reliability.

# Table des matières

Table des matières . . . . .	viii
<b>Introduction Générale</b>	<b>3</b>
<b>I Modélisation Stochastique</b>	<b>5</b>
<b>1 Processus Stochastique</b>	<b>6</b>
1.1 Introduction . . . . .	6
1.2 Caractéristique Générales . . . . .	7
1.3 Convergence de variables aléatoires . . . . .	7
1.3.1 Convergence presque sûre . . . . .	8
1.3.2 Convergence en probabilité . . . . .	8
1.3.3 Convergence en loi . . . . .	8
1.3.4 Convergence en moyenne quadratique . . . . .	8
1.4 Processus stochastique . . . . .	9
1.5 Quelques Modèles importants de processus aléatoires . . . . .	10
1.5.1 Processus Gaussien . . . . .	10
1.5.2 Processus de Poisson . . . . .	11
1.5.3 Processus Markovien . . . . .	13
1.5.4 Processus de Martingale . . . . .	14
<b>2 Mouvement Brownien</b>	<b>16</b>
2.1 Introduction . . . . .	16
2.2 Définitions et Propriétés . . . . .	17
2.3 Approximation la dérive d'un mouvement brownien par un bruit blanc gaussien . . . . .	19
2.4 Construction du Mouvement Brownien . . . . .	20
2.4.1 Construction par marche aléatoire . . . . .	20
2.4.2 Construction par Martingale . . . . .	22
2.5 Propriété de Markov . . . . .	22
2.6 Continuité des trajectoires . . . . .	23
2.7 Mouvement Brownien Bridge (pont) . . . . .	23
2.8 Mouvement Brownien Géométrique . . . . .	24
2.9 Conclusion . . . . .	25

<b>3</b>	<b>Processus de Diffusion</b>	<b>26</b>
3.1	Introduction . . . . .	26
3.2	Intégrale stochastique . . . . .	27
3.2.1	Construction de l'intégrale stochastique . . . . .	27
3.2.2	Intégrale de Stratonovich . . . . .	30
3.3	Processus d'Itô . . . . .	31
3.3.1	Formule d'Itô . . . . .	31
3.4	Processus de diffusion . . . . .	33
3.4.1	La continuité au sens de critère de Kolmogorov pour un processus de diffusion : . . . . .	33
3.5	Équations Différentielles stochastiques . . . . .	35
3.5.1	Existence et Unicité des solutions des équations différentielle stochastique . . . . .	35
3.5.2	Equations différentielles stochastiques linéaires . . . . .	38
3.5.3	Equations différentielles stochastiques de Stratonovich . . . . .	40
3.5.4	Equation de Kolmogorov (Fokker- Planck) . . . . .	41
3.5.5	Processus de diffusion stationnaire . . . . .	42
3.5.6	Schémas numérique . . . . .	43
3.6	Conclusion . . . . .	44
<b>II</b>	<b>Modélisation des Risques de Dégradation Structurelle</b>	<b>45</b>
<b>4</b>	<b>Généralité sur Processus de Dégradation</b>	<b>46</b>
4.1	Introduction . . . . .	46
4.2	Définitions générales . . . . .	47
4.3	Complexité des phénomènes physiques de dégradation . . . . .	47
4.4	Caractéristiques des processus de dégradation . . . . .	48
4.5	Quelques modèles stochastiques existantes . . . . .	48
4.5.1	Modèle Déterministe . . . . .	49
4.5.2	Modèles Stochastiques . . . . .	50
4.6	Conclusion . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Modélisation stochastique de risque de dégradation par processus de diffusion</b>	<b>53</b>
5.1	Introduction . . . . .	53
5.2	Modèle de diffusion pour la propagation des fissures . . . . .	54
5.3	Étude de l'équation (5.1) dans le cas de $p = 1$ . . . . .	54
5.3.1	Etude de l'existence et l'unicité de solution de l'équation (5.3) . . . . .	55
5.3.2	La solution associée à la condition initial $L_0 > 0$ . . . . .	55
5.3.3	Estimation des paramètres . . . . .	57
5.3.4	L'instant de Premier Passage . . . . .	62
5.4	Étude de l'équation (5.1) dans le cas de $p > 1$ . . . . .	66
5.4.1	Simulation . . . . .	68
5.4.2	Calculs de l'instant de premier passage . . . . .	70
5.5	Influence de la variabilité des paramètres du modèle de dégradation (5.1) . . . . .	73



5.5.1	Influence du rapport de charge . . . . .	73
5.5.2	Influence de paramètre $p$ . . . . .	74
5.5.3	Influence de l'environnement . . . . .	75
5.6	Étude de la Fiabilité du Système . . . . .	77
5.7	Conclusion . . . . .	80
	<b>Conclusion générale</b>	<b>81</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>82</b>
	<b>Index</b>	<b>85</b>

# Liste des tableaux

5.1	Statistique descriptive. . . . .	60
5.2	Estimation des paramètres. . . . .	61
5.3	Les valeurs d'AIC. . . . .	65
5.4	Estimation des paramètres. . . . .	65
5.5	Statistique descriptive. . . . .	69
5.6	Estimation des paramètres. . . . .	69
5.7	Estimation des paramètres. . . . .	71
5.8	Influence du Rapport de Charge. . . . .	73
5.9	Influence de paramètre $p$ . . . . .	75

# Table des figures

1.1	Trajectoire de Processus de Poisson. . . . .	13
2.1	Trajectoire brownienne construite par une marche aléatoire. . . . .	21
2.2	Trajectoire de Mouvement Brownien Bridge. . . . .	24
2.3	Trajectoire de Mouvement Brownien Géométrique. . . . .	25
4.1	Courbe de propagation de Paris. . . . .	49
5.1	Trajectoire de propagation de fissure simulée pour $p = 1$ . . . . .	57
5.2	Flux de trajectoires de propagation de fissure simulées pour $p = 1$ . . . . .	57
5.3	Simulation d'un échantillon de taille 50 à partir du modèle de dégradation. . . . .	60
5.4	Ajustement de la distribution du modèle de dégradation par la méthode d'histogramme. . . . .	61
5.5	Ajustement de la distribution du modèle de dégradation par la méthode du noyau. . . . .	61
5.6	L'instant de premier passage du modèle de dégradation. . . . .	65
5.7	Ajustement de la distribution de L'instant de premier passage par la méthode du noyau. . . . .	66
5.8	Ajustement de la distribution de L'instant de premier passage par la méthode d'histogramme. . . . .	66
5.9	Trajectoire de propagation de fissure simulée pour $p = 2, 6$ . . . . .	68
5.10	Flux de trajectoires de propagation de fissure simulées pour $p = 2, 6$ . . . . .	68
5.11	Simulation un échantillon du taille 50 à partir du modèle de dégradation. . . . .	69
5.12	Ajustement de la distribution du modèle de dégradation par la méthode du noyau. . . . .	70
5.13	Ajustement de la distribution du modèle de dégradation par la méthode d'histogramme. . . . .	70
5.14	L'instant de premier passage du modèle de dégradation. . . . .	71
5.15	Ajustement de la distribution de L'instant de premier passage par la méthode du noyau. . . . .	72
5.16	Ajustement de la distribution de L'instant de premier passage par la méthode d'histogramme. . . . .	72
5.17	Influence du rapport de charge $R$ . . . . .	74
5.18	Influence de paramètre $p$ . . . . .	75

# Introduction Générale

L'historique des recherches de la dégradation des structures est intéressant dans la mesure où les lois expérimentales bâties sur des hypothèses phénoménologiques des mécaniques ont fait intégrer une composante aléatoire pour reproduire la variabilité du phénomène. Cette problématique est un exemple canonique de l'apport de l'option stochastique pour la modélisation de mécanismes complexes.

Il est important de souligner que l'étude du phénomène de dégradation structurelle, a motivé les recherches de résultats théoriques pour la modélisation et l'estimation des systèmes dynamiques stochastiques. En effet, la propagation des fissures est au cœur des problèmes de la durée de vie en mécanique des structures, particulièrement dans les domaines d'application où les structures fonctionnent en environnement extrême.

La dégradation d'une structure est traduction d'une évolution lente et irréversible de ses variables d'état, conduisant à la diminution des marges de sûreté nécessaires pour assurer son bon fonctionnement. La modélisation de la dégradation des structures est essentielle pour la maîtrise des risques industriels, pour la gestion de leur durée de vie, pour l'optimisation des opérations d'inspections, de maintenance et de réparation, ainsi que pour le choix des engagements sur la garantie et la qualité des équipements. Toutefois, le manque de données, les incertitudes sur les propriétés physiques et les variations des conditions d'exploitation conduisent à des incertitudes plus ou moins importantes qui se répercutent sur l'évaluation de l'état de dégradation réel. Ceci rend difficile la prise de décision quant à une intervention appropriée. La situation est aggravée lorsque les enjeux sont importants, les données trop rares, la prévision très éloignée de l'observation et lorsque les conditions d'exploitation ne sont pas bien contrôlées. Ce constat ne fait qu'accroître l'intérêt de disposer d'une méthodologie de modélisation de la dégradation et de la prévision de la durée de vie des structures.

La modélisation des mécanismes de dégradation implique l'utilisation d'outils mathématiques permettant une bonne représentation de leur évolution temporelle. Comme la fiabilité des structures.

L'objectif principal de cette thèse est le fait de développer le système en le plaçant dans le contexte de la modélisation des dégradations structurelles par un processus de diffusion qui fonctionne par une équation différentielle stochastique interprétée au sens de Stratonovich et d'étudier la fiabilité des structures. Les résultats obtenus portent sur le calcul de fiabilité et d'estimation des paramètres constituant le système.

Ce travail est structuré de façon suivant :

La première partie est consacrée à l'étude détaillée de l'aspect théorique de modélisation stochastique, cette partie est composée de trois chapitres :

Dans **le premier chapitre** nous rappelons quelques notions de base concernant le calcul stochastique et les principaux aspects théoriques des processus stochastiques, plus particulièrement les martingales, qui sont un outil essentiel et important.

**Le second chapitre** est consacré principalement à l'étude détaillée du mouvement brownien, ses propriétés, ses caractéristiques, ainsi que sa construction mathématique. Ce mouvement constitue la base de la théorie classique des équations différentielles stochastiques, et comme sa trajectoire est non différentiable, alors il était indispensable de se tourner vers une nouvelle discipline mathématique qui est l'intégration stochastique. Pour cela, on donne dans **le troisième chapitre**, un sens à l'intégrale stochastique, et on présente des notions sur le calcul d'Itô et l'intérêt majeur qu'il apporte à la résolution des EDS (équations différentielles stochastiques).

Dans la dernière partie de ce chapitre, on a exposé, en résumé, les grandes lignes concernant les équations différentielles stochastiques. De plus on introduit un autre type d'EDS dite de Stratonovich.

La deuxième partie est consacrée à présenter la modélisation stochastique des risques de dégradation structurelle, en utilisant les aspects théoriques qui nous avons présenté dans la partie précédente. Cette partie est composée de deux chapitres :

Dans **le quatrième chapitre**, nous introduisons des généralités du processus de dégradation, les complexités et les caractéristiques de ce phénomène, puis nous indiquons des principes de quelques familles de modèle déterministe et stochastique utilisées pour la modélisation des risques de dégradation.

**Le dernier chapitre**, nous présentons en détails le modèle de dégradation qui s'appuie sur l'approximation asymptotique de processus de diffusion gouverné par une équation différentielle stochastique, interprétée au sens de Stratonovich, nous montrons comment construire la trajectoire de processus  $L_t$  solution du système différentielle. Nous montrons, dans certains cas, que ce modèle permet une solution unique et que cette solution est explicitement analytique. Dans d'autres cas la solution exacte est difficile à déterminer, les packages *Sim.Diffproc* et *Sim.diffprocGUI* (Boukhetala et Guidoum (2011)), sont utilisés pour effectuer de l'échantillonnage trajectoires, solutions du modèle. Une étude statistique est réalisée, permettant d'approximer la solution et certaines grandeurs d'intérêt pratique. La loi de probabilité du processus de dégradation, à tout instant, ainsi que la loi de la variable aléatoire, premier instant de franchissement de la taille de la fissure d'un seuil de dégradation indésirable, sont déterminées selon des méthodes non paramétriques.

**Première partie**  
**Modélisation Stochastique**

# Chapitre 1

## Processus Stochastique

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>Caractéristique Générales</b>	<b>7</b>
<b>1.3</b>	<b>Convergence de variables aléatoires</b>	<b>7</b>
<b>1.4</b>	<b>Processus stochastique</b>	<b>9</b>
<b>1.5</b>	<b>Quelques Modèles importants de processus aléatoires</b>	<b>10</b>

---

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques base de calcul stochastique en vue d'obtenir des outils applicables au nombreux domaines, à savoir le concept général de processus stochastique (filtration, processus adapté...) en premier lieux.

Nous abordons en suite les processus de Markov [13], processus Gaussien [12] et ceux de poisson avant de présenter celui de martingale [14, 15].

## 1.2 Caractéristique Générales

**Définition 1.1** : Un espace probabilisable est un couple  $(\Omega, \mathfrak{S})$  où  $\Omega$  est un ensemble,  $\mathfrak{S}$  une tribu de  $\Omega$ , appelée tribu des événements, c'est-à-dire une classe de parties de  $\Omega$ , contenant  $\Omega$  et l'ensemble vide, stable pour les opérations de complémentation, intersection et de réunion dénombrables.

Une famille  $\mathfrak{S}$  de partie de  $\Omega$  est une tribu si :

- $\emptyset \in \mathfrak{S}$
- $A \in \mathfrak{S} \Rightarrow \bar{A} \in \mathfrak{S}$
- $A_n \in \mathfrak{S} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{S}$

**Définition 1.2** : Un espace de probabilité est un triplet  $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$  où  $(\Omega, \mathfrak{S})$  est l'espace probabilisable et  $\mathbb{P}$  une probabilité sur  $(\Omega, \mathfrak{S})$ .

Une probabilité est une application  $\mathbb{P} : \mathfrak{S} \mapsto [0, 1]$  vérifié par :

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0; \mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $A, B \in \mathfrak{S}$  et  $A \cap B = \emptyset$  alors  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
- si les  $A_n$  sont disjoint,  $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$

**Définition 1.3** : Une filtration sur  $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$  est une famille croissante  $(\mathfrak{S}_t)_{t \in T}$  de sous tribus de  $\mathfrak{S}$  avec  $T$  un espace des instants :

$$\mathfrak{S}_s \subset \mathfrak{S}_t \subset \mathfrak{S} \quad \text{pour tout } 0 \leq s \leq t \text{ dans } T$$

$\mathfrak{S}_t$  est interprétée comme information connue à la date  $t$  qui augmente avec le temps. Le quadruplet  $(\Omega, \mathfrak{S}, (\mathfrak{S}_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$  est appelé espace de probabilité filtré.

**Définition 1.4** : Soient  $(\Omega, \mathfrak{S})$  et  $(E, \mathfrak{B})$  deux espaces probabilisables et  $\mathbb{P}$  une loi de probabilité sur  $(\Omega, \mathfrak{S})$ .

On appelle variable aléatoire (v.a.) définie sur  $(\Omega, \mathfrak{S})$  à valeurs dans  $(E, \mathfrak{B})$ , toute application  $X$  de  $(\Omega, \mathfrak{S})$  dans  $(E, \mathfrak{B})$ , vérifiant :

$$\forall B \in \mathfrak{B}, \quad X^{-1}(B) \in \mathfrak{S}$$

On appelle loi de probabilité de variable aléatoire  $X$ , la mesure image de  $\mathbb{P}$  par  $X$  :

$$\forall A \in \mathfrak{S}, \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A d\mathbb{P}_X$$

**Définition 1.5** : Une variable aléatoire  $\tau : \Omega \mapsto [0, +\infty[$ , i.e. un temps aléatoire, appelé temps d'arrêt (par rapport à la filtration  $(\mathfrak{S}_t)_{t \in T}$ ) si pour tout  $t \in T$  :

$$\{\tau \leq t\} := \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathfrak{S}_t$$

## 1.3 Convergence de variables aléatoires

De nombreuses notions de convergence de variables aléatoires existent. Elles sont essentielles pour les applications. Elles servent surtout à montrer que les phénomènes aléatoires présentent certaines régularités, à partir desquelles sont identifiés certaines de leurs propriétés.



### 1.3.1 Convergence presque sûre

Une suite de variables aléatoires réelles  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , définie sur  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ , converge presque sûrement (p.s.) vers la variable aléatoire  $X$ , définie sur  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  si :

$$\mathbb{P} \{ \omega \in \Omega, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \} = 1$$

Dans ce cas on note  $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X$  p.s.

### 1.3.2 Convergence en probabilité

Soient  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $X$  des variables aléatoires réelles sur  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ . On dit que  $X_n$  converge en probabilité (cv.p) vers la variable aléatoire  $X$ , si pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \{ |X_n - X| \geq \varepsilon \} = 0$$

On note  $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X$  en Probabilité.

### 1.3.3 Convergence en loi

Soient  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $X$  des variables aléatoires réelles sur  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ . on dit que  $X_n$  converge en loi vers  $X$  si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t),$$

où  $F$  fonction de répartition. On note alors  $X_n \xrightarrow{l} X$

### 1.3.4 Convergence en moyenne quadratique

Une suite de variables aléatoires réelles  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , définie sur  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ , on dit que  $X_n$  converge en moyenne quadratique vers  $X$  si pour  $\mathbb{E}(X_n^2) < +\infty$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} |X_n - X|^2 = 0$$

## 1.4 Processus stochastique

Dans toute la suite, on considère un espace de probabilité  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ,  $(E, \mathfrak{B})$  espace probabilisable et  $T \subseteq \mathbb{R}$ ,  $T$  espace des paramètres ( peut être l'espace des instants).

**Définition 1.6 :** Un processus aléatoire est une famille de variables aléatoires  $(X_t)_{t \in T}$  définie sur un espace de probabilité de base  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ , à valeurs réelles. Il peut aussi être considéré comme une application  $X : \Omega \times T \longrightarrow E$ .

pour tout  $\omega \in \Omega$  fixé,  $X_t(\omega)$  est une réalisation où une trajectoire du processus. À  $t$  fixé, la fonction  $X_t$  est une variable aléatoire.

Comme pour une variable aléatoire, la loi de probabilité d'un processus aléatoire est entièrement caractérisée par la fonction de distribution conjointe, définie par : Pour tout  $n$  et pour toutes discrétisation  $t_1, t_2, \dots, t_n$  de  $T$ , on a :

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_n} \leq x_n)$$

pour tout  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^n$

**Définition 1.7 (Processus adapté)** Un processus  $\{X_t, t \geq 0\}$  est dit adapté à la filtration  $(\mathfrak{F}_t, t \geq 0)$  si pour chaque  $t$ ,  $X_t$  est  $\mathfrak{F}_t$ -mesurable.

Un processus adapté est celui pour lequel une description probabiliste est réalisable.

**Définition 1.8 (Processus strictement stationnaire)** Un processus  $(X_t)_{(t \in T)}$  est stationnaire au sens strict si pour tout  $t_1, t_2, \dots, t_n$  avec  $t_i \in T$ ,  $i = 1, \dots, n$ , et pour tout  $h \in T$  avec  $t_{i+h} \in T$ , les variables aléatoires  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  et  $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$  ont même loi.

**Définition 1.9 (Processus stationnaire)** Un processus  $X_t$  est stationnaire (ou faiblement stationnaire) si :

- son espérance  $\mathbb{E}(X_t)$  est une constante indépendante du temps  $t$ .
- sa fonction de corrélation  $R(s, t)$  ne dépend que de la différence  $\tau = t - s$ .
- $R(s, \tau)$  est continue (à l'origine).

Si  $X_t$  est un processus stationnaire, sa fonction de corrélation est continue en 0 et définie positive.

**Définition 1.10 (Processus à accroissements indépendants)** Un processus  $X_t$  est un processus à accroissements indépendants si pour tous réels  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , les variables aléatoires  $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  sont indépendantes. Si  $X_t$  est un processus à accroissements indépendants, alors pour tout  $s$  et  $t$  tels que  $0 \leq s \leq t$ ,  $X_t - X_s$  est indépendant de  $\mathfrak{F}_s = \sigma(X_u, u \leq s)$ . La loi de  $X_t$  est entièrement déterminée par la loi de  $X_t - X_s$ .

**Définition 1.11 (Processus à accroissements indépendants stationnaires)** Un processus  $X_t$  est un processus à accroissements indépendants stationnaires si  $X_t$  est un processus à accroissements indépendants et si  $X_t - X_s$  a même loi que  $X_{t-s}$ . Si  $X_t$  est un processus à accroissements indépendants, alors sa fonction caractéristique s'écrit

$$\Phi_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \Phi_{t_1}(x_1 + \dots + x_n) \Phi_{t_1, t_2}(x_2 + \dots + x_n) \dots \Phi_{t_{n-1}, t_n}(x_n)$$

avec

$$\Phi_{t_k, t_{k+1}}(x) = \mathbb{E}[\exp ix(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})]$$

si  $X_t$  est un processus à accroissement indépendants stationnaires alors sa loi est indéfiniment divisible. La loi du processus  $X_t$  est entièrement déterminée par la loi de  $X_1$ .

**Théorème 1.1** Soit  $X_t$  un processus à accroissement indépendants stationnaires,  $(\mathfrak{F}_t)$  la filtration engendrée par le processus  $X_t$  et  $T$  un temps d'arrêt. Alors le processus  $Y_t = X_{T+t} - X_t$  est un processus à accroissements indépendants stationnaires de même loi que  $X_t$  et indépendant de  $\mathfrak{F}_T$ .

**Définition 1.12 (Processus Homogène)** On appelle fonction de distribution de transition pour un processus aléatoire :

$$F(s, x; t, A) = \mathbb{P}(X_t \in A / X_s = x) = \int_A f(s, x; t, y) dy \quad (1.1)$$

où  $f(s, x; t, y)$  est appelée fonction de densité de probabilité de transition.

On dit que le processus est homogène si :

$$F(s, x; t, A) = F(0, x; t - s, A) = \mathbb{P}(X_{t-s} \in A / X_0 = x) \quad (1.2)$$

pour tout  $t$  et  $s$  ( $t > s$ ).

Ce qui veut dire que la probabilité ne dépend que de l'instant considéré  $t$  et non pas de la position de l'intervalle par rapport à l'axe temporel.

## 1.5 Quelques Modèles importants de processus aléatoires

Nous présentons quelques processus stochastiques : Processus Gaussien, Poisson, Markovien et Martingale à l'exception du processus de diffusion qui fait l'objet d'un chapitre séparé.

### 1.5.1 Processus Gaussien

**Définition 1.13** Une variable aléatoire réelle suit une loi gaussienne  $N(m, \sigma^2)$  de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$  si elle admet une densité donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}$$

Sa fonction caractéristique s'écrit alors :

$$\mathbb{E}(e^{itx}) = \varphi(t) = e^{-imt - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

**Définition 1.14**  $(X_t)_{(t \in T)}$  est un processus Gaussien si pour toute discrétisation  $t_1, t_2, \dots, t_n$  de  $T$ , le vecteur  $(X_{(t_1)}, X_{(t_2)}, \dots, X_{(t_n)})$  est Gaussien, c'est-à-dire la variable aléatoire  $Z = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_{t_i}$  est Gaussienne, pour tout  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  scalaires dans  $\mathbb{R}$ .

En particulier, si la matrice de covariance  $C$  du vecteur  $X = X_{(t_1)}, X_{(t_2)}, \dots, X_{(t_n)}$  est non singulière, alors la densité de probabilité du vecteur  $X$  est exprimée par :

$$f_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{(\sqrt{\det C})^{-1}}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (C')_{ij} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \right\}$$

où  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  est le vecteur des espérances et  $C' = C^{-1}$

## 1.5.2 Processus de Poisson

**Définition 1.15** Un processus de comptage ou un processus ponctuel est un processus  $N_t$  dont les trajectoire  $N_t(\omega)$  à valeur dans  $\mathbb{N}$  sont croissantes, continues à droite, nulles en 0 et dont les sauts sont de taille 1.

**Propriété 1.1** Le processus de comptage est vérifié par les propriétés suivantes :

- $N_t \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0$ ;
- La fonction  $t \rightsquigarrow N_t$  est une fonction croissante c'est-à-dire  $\forall t, s$  et  $s < t \Rightarrow N_s \leq N_t$ ;
- $\forall t, s$  et  $s < t, N_t - N_s$  est le nombre d'occurrences se produisant dans l'intervalle  $]s, t]$ .

**Définition 1.16** Un processus de Poisson  $N_t$  d'intensité  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) est un processus ponctuel qui suit une loi de poisson de paramètre  $\lambda t$ . Il est équivalent de dire que le processus  $N_t$  est un processus de poisson d'intensité  $\lambda$  si :

- a.  $N_0 = 0$ ;
- b. Pour tous réel  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , les variables aléatoire  $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$  sont indépendantes.
- c. Pour tous réels  $s$  et  $t, s \leq t, N_t - N_s$  a même loi que  $N_{t-s}$
- d.  $N_t$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$

$$\mathbb{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N}$$

**Propriétés des processus de Poisson :**

- L'espérance et la variance d'un processus de Poisson sont égales.

$$\mathbb{E}(N_t) = \text{var}(N_t) = \lambda t$$

- La fonction de corrélation d'un processus de Poisson vaut  $K(t, s) = \lambda \min(s, t)$
- Si  $N_t$  est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ , alors pour tous  $s < t$  la variable  $N_t - N_s$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda(t - s)$ .

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = n) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^n}{n!}$$

**Définition 1.17 (Instant d'occurrences et temps d'interoccurrences)** Les variables aléatoires  $S_1, S_2, \dots, S_n$  telles que  $S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n$  sont appelées les instants successifs d'occurrences.

Etant données  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , les variables aléatoires  $X_i = S_i - S_{i-1}$  sont appelés les temps d'interoccurrence où  $S_0 = 0$ .

**Propriété 1.2 :** Si  $N = N_t, t \geq 0$  est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ , donc les temps d'interoccurrence  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

Les instantes d'occurrences sont des variables aléatoires non indépendantes (car  $S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n$ ) suivent une loi Gamma  $\Gamma(n, \lambda)$  :

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \rightsquigarrow \Gamma(n, \lambda)$$

**Définition 1.18 (Processus de poisson Composé)** Soit  $Y_n$  une suite de variables aléatoires indépendante de même loi  $F$  et  $N_t$  un processus de poisson de taux  $\lambda$ , on appelle *processus de poisson composé* le processus :

$$X_t = \sum_{n=0}^{N_t} Y_n$$

### Simulation d'un Processus de Poisson :

Instauration d'une fonction dont l'argument est un temps  $t$  et qui simule les temps d'occurrence entre  $[0, t]$  d'un processus de Poisson de taux  $\lambda = 1$ .

Les temps inter-occurrence sont distribués suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

```
Programme 1.1 R> poissonproc<-function(lambda,T,N){
R> t.step<-T/N # T duration of simulation
R> Xt<-rep(0,T/t.step+1) # N size of process
R> time<-seq(from=0,T, by=t.step) # time step
R> for(t in 1:N+1){
  l<-(-lambda*time[t])
  m<-0
  k<-0
  repeat{ k<-k+1
    u<-runif(k) # uniform distribution
    M<-log(prod(u))
    if(l<=M | l>m){ m<-M }
    else { break() }
  }
  Xt[t]<-Xt[t-1]+k-1
}
R> Xt
R> table<-data.frame(time,Xt)
# Repr\{e}sentation graphique
```

```
R> plot(seq(from=0,T,by=t.step),Xt,type='s',xlab='time',ylab='Xt',col='blu')
R> title(paste('Poisson Process Simulation. rate:', lambda))
R> table
    }
R> poissonproc(1,1,100)
```

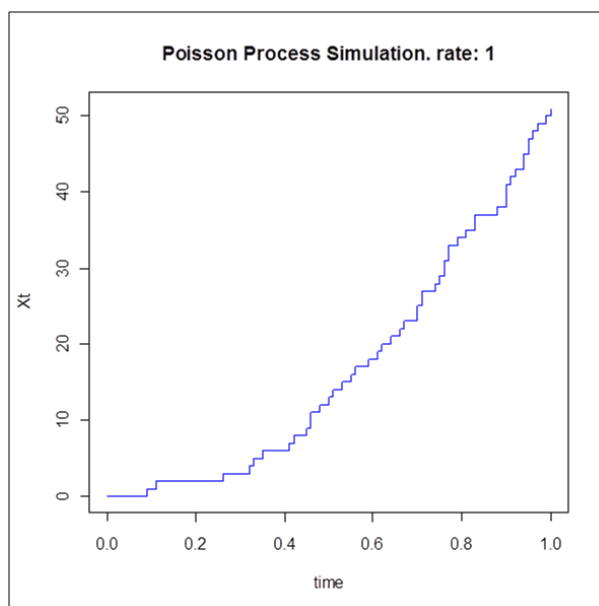


FIGURE 1.1 – Trajectoire de Processus de Poisson.

### 1.5.3 Processus Markovien

Les définitions de Processus Markovien :

Soit  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et  $(E, \mathfrak{B})$  l'espace des états,  $\mathfrak{B}$  désigne la tribu des boréliens de  $E$ , Un processus  $X_t$  est un processus de *Markov* si pour tout  $u$  et  $t \geq 0$  et pour tout  $\mathfrak{S} \in \mathfrak{B}$ , on a

$$\mathbb{P}(X_{t+u} \in \mathfrak{S} | X_s, s \leq t) = \mathbb{P}(X_{t+u} \in \mathfrak{S} | X_t)$$

Ce qui signifie que le processus ne dépend que du dernier instant et non de toute son histoire

$$\mathbb{P}(X_{t_n} < x_n | X_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_1} = x_{t_1}) = \mathbb{P}(X_{t_n} < x_n | X_{t_{n-1}} = x_{t_{n-1}})$$

Pour démontrer qu'un processus est un processus de *Markov*, il suffit de montrer par le théorème de classe monotone que pour tout  $n$ , pour tous réels  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$  et pour toute fonction  $f$  borélienne bornée

$$\mathbb{E}(f(X_{t_n})) = \mathbb{E}(f(X_{t_n}) | X_{t_{n-1}})$$

La probabilité de transition pour passer de l'état  $x$  au temps  $s$  à un état appartenant à  $\mathfrak{S}$  à l'instant  $t$  est notée pour  $s < t$

$$P_{s,t}(x, \mathfrak{S}) = p(s, x; t, \mathfrak{S}) = \mathbb{P}(X_t \in \mathfrak{S} | X_s = x)$$

La fonction  $\mathfrak{S} \mapsto p(s, x; t, \mathfrak{S})$  est une probabilité sur  $\mathfrak{B}$ . La probabilité de transition vérifie l'équation de *Chapman-Kolmogorov* qui s'écrit sous les formes suivantes. Soit  $s < u < t$  tel que  $X_u = y$ , on a

$$P_{s,t}(x, \mathfrak{S}) = \int_E P_{s,u}(x, dy) P_{u,t}(y, \mathfrak{S})$$

et dans le cas d'un espace  $E$  dénombrable

$$P_{s,t}(x, z) = \sum_{y \in E} P_{s,u}(x, y) P_{u,t}(y, z)$$

Si on note  $p_{t_0}(\mathfrak{S})$  la distribution de  $X_{t_0}$

$$p_{t_0}(\mathfrak{S}) = \mathbb{P}(X_{t_0} \in \mathfrak{S})$$

alors pour tous réels  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ,

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n) = \int_E p_{t_0}(dx_0) \prod_{k=1}^{n-1} \int_{B_k} p(t_{k-1}, x_{k-1}; t_k, dx_k) p(t_{n-1}, x_{n-1}; t_n, B_n)$$

En particulier,

$$\mathbb{P}(X_t \in B) = \int_E p(t_0, x; t, B) p_{t_0}(dx)$$

Le processus  $X_t$  est un processus de *Markov homogène* si pour tout  $s$  et  $t$  de  $T$ , la transition

$$p(s, x; t, B) = p(x, \tau, B)$$

ne dépend que de  $\tau = t - s$ . Les opérateurs  $P_{s,t} = P_{t-s}$  sont notés simplement  $P_t$ . Ils forment dans le cas homogène un semi-groupe. On a  $P_t P_s = P_{t+s}$ , pour tout  $s, t > 0$ .

## 1.5.4 Processus de Martingale

Les martingales à temps discret ou à temps continu sont l'outil essentiel du probabiliste. Elles permettent d'établir de nombreux résultats.

**Définition 1.19** Soit  $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité, muni d'une filtration  $(\mathfrak{S}_t)_{t \geq 0}$ . Un processus à valeurs réelles  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une  $\mathfrak{S}_t$ -martingale si :

- il est adapté à la filtration  $(\mathfrak{S}_t)_{t \geq 0}$ , ce qui veut dire que pour tout  $t$ ,  $M_t$  est  $\mathfrak{S}_t$ -mesurable.
- chaque variable  $M_t$  est intégrable, et :

$$s \leq t \Rightarrow \mathbb{E}(M_t | \mathfrak{S}_s) = M_s$$

on dit que  $M_t$  est une  $\mathfrak{S}_t$ -sur-martingale (resp.  $\mathfrak{S}_t$ -sous-martingale) si l'égalité ci-dessus est remplacée par :

$$\mathbb{E}(M_t | \mathfrak{S}_s) \leq M_s \quad (\text{resp. } \mathbb{E}(M_t | \mathfrak{S}_s) \geq M_s)$$

En particulier, l'espérance  $\mathbb{E}(M_t)$  d'une martingale, (resp. d'une sur-martingale, sous-martingale), est une fonction constante du temps (resp. décroissante, croissante).

**Théorème 1.2 (Inégalité de Doob)** : Soit  $(M_t)_{(t \geq 0)}$  une martingale nulle en 0. Alors, pour tout entier  $p > 1$  :

$$\mathbb{P} [\sup_{s \leq t} |M_t|]^p \leq \left( \frac{p}{1-p} \right)^p \mathbb{E} (|M_t|^p)$$

**Propriété 1.3** 1.  $(M_t)_{(t \geq 0)}$  est une martingale si et seulement si  $(M_t)_{(t \geq 0)}$  est à la fois une surmartingale et une sous-martingale.

2. Si  $(M_t)_{(t \geq 0)}$  est une martingale  $E(M_t) = E(M_0), \forall t$ .

3. La somme de deux martingales (resp. sous-martingale, sur-martingale) est une martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale).

**Théorème 1.3 (Théorème d'arrêt des martingales)** Soit  $M_t$  une martingale. Si  $S$  et  $T$  sont deux temps d'arrêt et si  $a \in \mathbb{R}$ , alors :

$$\mathbb{E}(M_T | \mathfrak{F}_S) = M_S \quad \text{sur l'ensemble} \{S \leq T \leq a\} \quad (1.3)$$

En particulier, si  $T$  est un temps d'arrêt qui est borné, on a :

$$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0) \quad (1.4)$$

Quand  $M_t$  désigne de nouveau le gain d'un joueur au temps  $t$ , la propriété (1.4) peut être interprétée comme suit. Quelle que soit la stratégie non anticipante que le joueur choisit pour arrêter le jeu, et s'il doit finir de jouer avant un temps déterministe donné (aussi grand que soit ce temps), alors la valeur espérée de son gain est constante et égale à son capital initial.

Observons que la relation (1.3) est, en général, fautive sur l'ensemble  $\{S \leq T\}$ , et de même (1.4) est fautive si  $T$  n'est pas borné. Par exemple si  $M_t = B_t$  ou  $B_t$  est un mouvement brownien et si  $T = \inf(t : M_t = 1)$ , alors  $\mathbb{E}(M_0) = 0 < \mathbb{E}(M_T) = 1$ . Dans ce cas, le temps aléatoire  $T$  est presque sûrement fini, mais n'est pas borné et a même une espérance infinie.



# Chapitre 2

## Mouvement Brownien

### Sommaire

---

<b>2.1 Introduction</b>	<b>16</b>
<b>2.2 Définitions et Propriétés</b>	<b>17</b>
<b>2.3 Approximation la dérive d'un mouvement brownien par un bruit blanc gaussien</b>	<b>19</b>
<b>2.4 Construction du Mouvement Brownien</b>	<b>20</b>
<b>2.5 Propriété de Markov</b>	<b>22</b>
<b>2.6 Continuité des trajectoires</b>	<b>23</b>
<b>2.7 Mouvement Brownien Bridge (pont)</b>	<b>23</b>
<b>2.8 Mouvement Brownien Géométrique</b>	<b>24</b>
<b>2.9 Conclusion</b>	<b>25</b>

---

### 2.1 Introduction

C'est le botaniste Robert Brown [10] qui donna son nom au mouvement brownien en observant vers 1827 les mouvements erratiques de particules de pollen en suspension dans un liquide. Quelques années plus tard en 1905, Albert Einstein mit en évidence les étranges relations que le processus entretenait avec l'équation de chaleur. Vers 1909, Jean Perrin entreprit son étude expérimentale et Paul Langevin posa la première équation. Mais il faudra attendre 1925 et les travaux de Norbert Wiener pour que le mouvement brownien ait véritablement un sens mathématique comme un modèle d'un bruit blanc. A partir des années 1950, Kiyoshi Itô l'utilisa pour définir l'intégrale qui porte son nom et jeta les bases du calcul stochastique.

Ce chapitre est consacré principalement à l'étude du mouvement brownien [4, 16], ses propriétés, ses caractéristiques, ainsi que sa construction mathématique [6] et sa simulation.

## 2.2 Définitions et Propriétés

La définition la plus usuelle du mouvement brownien est la suivante :

**Définition 2.1** Soit  $(w_t)_{t \in [0, T]}$  un processus aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $(\mathbb{R}^n, (\mathfrak{S})_t, \mathbb{P}_{w_t}(\omega))$ ,  $w_t$  est un processus de mouvement brownien si et seulement si :

- $w_0 = 0$  probabilité presque sûrement.

Cette condition exprime que l'on impose à la perturbation de ne pas agir aléatoirement à l'origine des temps. L'état initial du système est supposé connu.

- $w_t$  est un processus Gaussien.

- $w_t$  est à accroissements indépendants et stationnaires.

L'indépendance est définie par les fluctuations antérieures n'influant pas sur d'éventuelles futures.

La stationnarité est définie par les fluctuations qui interviennent dans le phénomène modélisé pouvant apparaître à tout moment sans qu'un instant ne soit privilégié.

- $E(w_t) = 0, var(w_t) = ct$  ( $c > 0$ )

**Remarque 2.1** 1. Pour  $c = 1$  : Il s'agit d'un processus de mouvement Brownien Standard, dont la distribution de probabilité est :

$$\begin{aligned} f(s, x, t, y) &= \mathbb{P}(w_t < x \mid w_s = y) \quad s < t \\ &= \mathbb{P}(w_t - w_s < x - y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{1}{2(t-s)}(y-x)^2} \end{aligned}$$

La densité de transition d'un processus de mouvement brownien vérifie les équations différentielles partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 & (s, x) \text{ fixé fonction de kolmogorov retardée} & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 & (t, y) \text{ fixé fonction de kolmogorov avancée} & (2). \end{cases}$$

La première équation porte aussi le nom "équation de la chaleur", qui décrit la variation en température de la chaleur qui diffuse à travers un milieu physique.

- 2. Le mouvement Brownien est presque sûrement à trajectoire continue.

**Propriété 2.1** Soit  $(w_t)_{t \in [0, T]}$  un mouvement Brownien, alors pour tout  $t, s \geq 0$

$$cov(w_t, w_s) = t \wedge s$$

**Démonstration 2.1** Si  $s < t$  :

$$\begin{aligned} cov(w_t, w_s) &= \mathbb{E}(w_t w_s) - \mathbb{E}(w_t) \mathbb{E}(w_s) \\ &= \mathbb{E}(w_s (w_s + w_t - w_s)) \\ &= \mathbb{E}(w_s^2) + \mathbb{E}(w_s (w_t - w_s)) \\ &= s \end{aligned}$$

Par indépendance de  $w_s$  et  $(w_t - w_s)$

**Propriété 2.2** Soit  $(w_t)_{t \in [0, T]}$  un mouvement brownien, les processus ci dessous sont également considérés, des mouvements Brownien :

1.  $\frac{1}{a}w_{a^2t}$  pour  $a$  constante non nulle (invariance par changement d'échelle).
2.  $tw_{\frac{1}{t}}$  pour  $t > 0$  et  $X_0 = 0$  (invariance par inversion de temps).
3.  $w_{t-s} - w_t$ ,  $t > 0$  et  $s \in [0, t]$  (invariance par retournement du temps).

**Démonstration 2.2** Il suffit de vérifier que le processus est gaussien et de même covariance que  $w_t$ .

Vérifions (1), on a

$$\frac{1}{a^2} \mathbb{E}(w_{a^2s} w_{a^2t}) = \frac{1}{a^2} \min(a^2s, a^2t) = \min(s, t)$$

De même pour (2), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(tw_{\frac{1}{t}}sw_{\frac{1}{s}}\right) &= st \mathbb{E}\left(w_{\frac{1}{s}}w_{\frac{1}{t}}\right) \\ &= st \inf\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right) \\ &= \inf(t, s) \end{aligned}$$

et pour (3), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((w_{t-s} - w_t)(w_{t-m} - w_t)) &= \mathbb{E}(w_{t-s}w_{t-m}) - \mathbb{E}(w_{t-s}w_t) - \mathbb{E}(w_t w_{t-m}) + \mathbb{E}(w_t^2) \\ &= \min(t-s, t-m) - t + s + m \end{aligned}$$

Si  $t > s$ ,  $\mathbb{E}((w_{t-s} - w_t)(w_{t-m} - w_t)) = t - m - t + s + m = s$

Si  $t < s$ ,  $\mathbb{E}((w_{t-s} - w_t)(w_{t-m} - w_t)) = t - s - t + s + m = m$

d'où :  $\mathbb{E}((w_{t-s} - w_t)(w_{t-m} - w_t)) = \min(s, m)$ .

**Proposition 2.1**  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{w_t}{t} = 0$  probabilité presque sûrement ( $\mathbb{P}.ps$ ).

**Démonstration 2.3**  $\mathbb{E}\left(\frac{w_t}{t}\right) = 0$

et  $\text{var}\left(\frac{w_t}{t}\right) = \frac{1}{t^2} \text{var}(w_t) = \frac{1}{t}$  donc la variance tend vers 0 lorsque  $t \rightarrow +\infty$

**Proposition 2.2**  $w_t$  est non différentiable  $\mathbb{P}.ps$

**Démonstration 2.4** D'après la loi du logarithme itéré qui stipule que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{w_t}{\sqrt{2t \log \log(t)}} = +1 \quad \mathbb{P}.ps$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf \frac{w_t}{\sqrt{2t \log \log(t)}} = -1 \quad \mathbb{P}.ps$$

De plus,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{w_t}{\sqrt{2t \log \log \left( \frac{1}{t} \right)}} = +1 \quad \mathbb{P}.ps$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf \frac{w_t}{\sqrt{2t \log \log \left( \frac{1}{t} \right)}} = -1 \quad \mathbb{P}.ps$$

Alors la relation fonctionnelle s'écrit ainsi :

$$\frac{w(t+s) - w(s)}{t} \geq (1 + \varepsilon) \sqrt{\frac{2}{t \log \log \left( \frac{1}{t} \right)}} \quad \mathbb{P}.ps \rightarrow +\infty$$

$$\frac{w(t+s) - w(s)}{t} \leq (-1 + \varepsilon) \sqrt{\frac{2}{t \log \log \left( \frac{1}{t} \right)}} \quad \mathbb{P}.ps \rightarrow -\infty$$

Et ce qui démontre que la relation  $\frac{w(t+s) - w(s)}{t}$  n'existe pas. De ce fait, le mouvement Brownien standard n'est pas dérivable, et  $\frac{w_t}{t}$  n'a pas de sens.

### 2.3 Approximation la dérive d'un mouvement brownien par un bruit blanc gaussien

Un bruit blanc est une réalisation d'un processus aléatoire dans lequel la densité spectrale est la même pour toutes les fréquences, on parle souvent de bruit blanc gaussien, il s'agit d'un bruit blanc qui suit une loi normale de moyenne et variance données.

**Définition 2.2** Un processus  $\varepsilon_t$  est qualifié de bruit blanc gaussien si :

- $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$  et  $\mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$
- $\varepsilon_t$  et  $\varepsilon_s$  sont indépendants  $\forall t \neq s$
- $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

Par analogie avec le bruit blanc en temps discret, défini comme une suite de variables aléatoires, centrées, du second ordre et indépendants, on cherche à définir  $\{\varepsilon_t\}_{t \geq 0}$  comme un processus stochastique vérifiant  $\forall t > 0$  et  $\forall h > 0$  :

- $\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$
- $\mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h}) = \delta_0(h)$

où  $\delta_0$  est la mesure de Dirac en 0.

Un tel processus n'existe pas. Son idéalisation est la dérivée d'un mouvement brownien standard.

Si pour  $\Delta t > 0$  fixé, on considère le processus

$$\varepsilon_t = \frac{w_{t+\Delta t} - w_t}{\Delta t}$$

Il est facile de montrer grâce aux propriétés données par la définition de mouvement brownien que :

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h}) = \frac{1}{\Delta t} \left(1 - \frac{|h|}{\Delta t}\right) 1_{[0,1]} \left(\frac{|h|}{\Delta t}\right)$$

Quand  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h})$  converge vers  $\delta_0(h)$ . Il est donc clair que la dérivée formelle  $\frac{dw_t}{dt}$  a les propriétés d'un bruit blanc gaussien. Ce qui justifie l'affirmation concernant l'idéalisation du bruit blanc.

Donc on peut écrire formellement :

$$\varepsilon_t = \frac{dw_t}{dt}$$

## 2.4 Construction du Mouvement Brownien

### 2.4.1 Construction par marche aléatoire

Une caractérisation du mouvement brownien indique qu'il peut voir en tant que limite d'une marche aléatoire dans le sens suivant. Considérons une suite de variables aléatoires indépendantes  $X_i$  centrées de variance  $\sigma^2$  et la marche aléatoire  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , où

$$X_i = \begin{cases} +1 & \text{si } p = 1/2 \\ -1 & \text{si } p = 1/2 \end{cases}$$

On définit une suite de variables  $Y_n$  par la formule suivante :

$$Y_n(t) = \frac{S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1}}{\sigma\sqrt{n}}$$

où  $[.]$  est la partie entière.

Ce résultat fondamental est donné par le théorème de Donsker (1951) et est, en fait, au niveau des processus, une version du théorème usuel de la limite centrale

**Théorème 2.1 (Principe d'invariance de Donsker)** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, identiquement distribuées, avec  $\mathbb{E}(X_n) = 0$  et  $\mathbb{E}(X_n^2) = 1$ . Soit  $S_n = \sum_{1 \leq i \leq n} X_i$  avec  $S_0 = 0$ .

Les processus des sommes normalisées  $Y_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}$  (où  $[nt]$  désigne la partie entière de  $nt$ ) convergent en loi, en tant que processus, vers le mouvement brownien.

Cette convergence donne une définition du mouvement brownien comme l'unique limite (en loi) de marches aléatoires.

#### Simulation :

Le package **Sim.DiffProc** [2] permet de simuler un mouvement brownien standard comme unique limite de marche aléatoire. La figure (2.1) montre la représentation de l'approximation d'un mouvement brownien par une marche aléatoire :

```

Programme 2.1 R> simMBS<-function(N,T,c){
R> t.step<-T/N
R> s<-sqrt(t.step*c)
R> w<-rep(0,T/t.step)
R> w[1]<-0
R> for (i in 1:N){
      choix<-runif(1)
      ifelse(choix<0.5,x<-1,x<--1)
      w[i+1]<-w[i]+x*s
    }
R> w
R> time<-seq(from=0,T, by=t.step)
R> table<-data.frame(time,w)
# Repr\ '{e}sentation graphique
R> plot(seq(from=0,T, by=t.step),w, type = "l",xlab = "times", ylab = "Xt"
      ,col='blue')
R> title(paste('Brownian Montion '),cex.main = 1,font.main= 4,col.main= "black")
R> mtext("by a Random walk", line=1, at=50, cex=0.9, font=3,col="red")
R> mtext(paste("dt:",T/N),, line=1, at=89, cex=0.9, font=3,col="red")
R> mtext(paste("and c:",c),, line=1, at=100, cex=0.9, font=3,col="red")
R> abline(h = 0, v = 0, col = "gray60")
R> print(table)
      }
R> w<-simMBS(1,100,1)

```

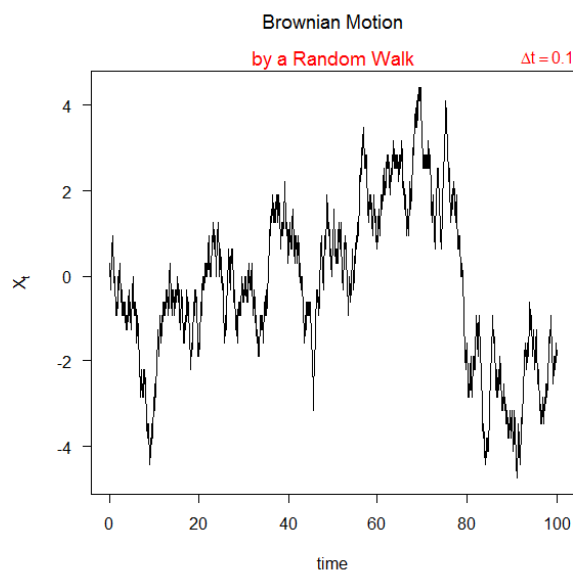


FIGURE 2.1 – Trajectoire brownienne construite par une marche aléatoire.

## 2.4.2 Construction par Martingale

Soit  $\{w_t, t \geq 0\}$  un mouvement Brownien. Les processus suivantes sont des martingales continues relativement à la filtration  $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$  :

- $w_t$  est  $\mathfrak{F}_t$  martingale.
- $w_t^2 - t$  est  $\mathfrak{F}_t$  martingale.
- $e^{\sigma w_t - \frac{\sigma^2 t}{2}}$  est  $\mathfrak{F}_t$  martingale.

**Preuve** : ces trois processus sont adaptés à la filtration  $\mathfrak{F}_t$

- $\forall s < t$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(w_t | \mathfrak{F}_s) &= \mathbb{E}((w_t - w_s + w_s) | \mathfrak{F}_s) \\ &= \mathbb{E}((w_t - w_s) | \mathfrak{F}_s) \mathbb{E}(w_s | \mathfrak{F}_s) \\ &= w_s \end{aligned}$$

- Puisque  $w_t$  est martingale :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(w_t^2 - t | \mathfrak{F}_s) &= \mathbb{E}((w_t - w_s + w_s)^2 | \mathfrak{F}_s) - t \\ &= \mathbb{E}((w_t - w_s)^2 | \mathfrak{F}_s) + \mathbb{E}((w_s)^2 | \mathfrak{F}_s) - 2\mathbb{E}(w_s(w_t - w_s) | \mathfrak{F}_s) - t \\ &= t - s + w_s^2 - t \\ &= s - w_s^2 \end{aligned}$$

- $w_t$  est martingale, donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{\sigma w_t - \frac{\sigma^2 t}{2}} | \mathfrak{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(e^{\sigma(w_t - w_s + w_s) - \frac{\sigma^2 t}{2}} | \mathfrak{F}_s\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{\sigma(w_t - w_s) - \frac{\sigma^2 t}{2}} | \mathfrak{F}_s\right) \mathbb{E}\left(e^{\sigma w_s} | \mathfrak{F}_s\right) \\ &= e^{\sigma w_s - \frac{\sigma^2 t}{2}} \end{aligned}$$

## 2.5 Propriété de Markov

Considérons un mouvement brownien  $w_t$  sur  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ , et la filtration  $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$  qu'il engendre. Puisqu'il est à accroissements indépendants, la variable  $w_{t+h} - w_t$  est indépendante de la tribu  $\mathfrak{F}_t$ . On a pour chaque fonction  $f$  borélienne bornée sur  $\mathbb{R}$  :

$$\mathbb{E}(f(w_{t+h}) | \mathfrak{F}_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} f(w_t + x) e^{-\frac{x^2}{2h}} dx \quad (2.1)$$

Cette formule montre que la loi de  $w_{t+h}$  ne dépend pas de tout le passé, mais seulement de la valeur présente  $w_t$ . Donc le mouvement brownien est un **processus de Markov**.

**Définition 2.3** Un processus  $X_t$  est un processus Markov si étant donnée la filtration  $\mathfrak{F}_t$  est engendrée par le processus, qui vérifie la propriété de Markov, à savoir : pour tous  $h, t \geq 0$  et pour toute fonction  $f$  borélienne bornée sur  $\mathbb{R}$  :

$$\mathbb{E}(f(X_{t+h})|\mathfrak{F}_t) = \mathbb{E}(f(X_{t+h}|X_t)) \quad (2.2)$$

Dans le cas du mouvement brownien, les variables  $w_s$  pour  $s > t$  sont indépendantes, conditionnellement à la valeur de  $w_t$ .

En plus, la loi  $w_{t+h}$  sachant  $\mathfrak{F}_t$  dépend bien sûr de  $h$ , mais pas de  $t$ . On dit que le mouvement brownien est un **processus de Markov homogène**.

## 2.6 Continuité des trajectoires

Dire qu'un processus aléatoire  $\{X_t, t \geq 0\}$  est continu c'est, par définition dire que

$$\lim_{h \rightarrow 0} |X_{t+h} - X_t| = 0$$

Selon le type de convergence de cette variable aléatoire, on obtient une continuité plus ou moins forte. La plus faible des notions de continuité est liée à la convergence en loi. Elle est évidemment vérifiée. Nous allons démontrer une continuité en probabilité pour le mouvement brownien standard.

**Proposition 2.3** Soit  $\{w_t, t \geq 0\}$  un mouvement brownien standard et  $\varepsilon > 0$ . On a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(|w_{t+h} - w_t| > \varepsilon) = 0 \quad (2.3)$$

**Démonstration 2.5** Soit  $h > 0$ , par définition, l'accroissement  $w_{t+h} - w_t$  admet la loi  $N((0, h))$ , alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \mathbb{P}(|w_{t+h} - w_t| > \varepsilon) &= \frac{2}{h} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} e^{-\frac{x^2}{2h}} dx \\ &< 2 \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi h^{\frac{3}{2}}}} e^{-\frac{\varepsilon x}{2h}} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{h^{\frac{3}{2}}} \frac{2h}{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2h}} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

## 2.7 Mouvement Brownien Bridge (pont)

On appelle pont brownien standard sur  $[0, T]$ , le processus du mouvement brownien standard conditionné par  $\left\{ \beta_{s,x}^{T,y}(0) = x, \beta_{s,x}^{T,y}(T) = y \right\}$ .

Le processus pont mouvement Brownien standard (Bridge) est défini par :

$$\beta_{s,x}^{T,y}(t) = x + w_t + \frac{t}{T} (w_T - y + x) \quad (2.4)$$



Avec :  $\mathbb{E} \left( \beta_{s,x}^{T,y}(t) \right) = x + \frac{t}{T} (y + x), \quad t \leq T$   
 et :  $cov(t, s) = \min(s, t) - st$

Pour simuler un pont brownien, on utilise le packages **Sim.DiffProc** [2] avec  $x_0 = 1$ ,  $y = 3$  et  $\Delta t = 0,001$  :

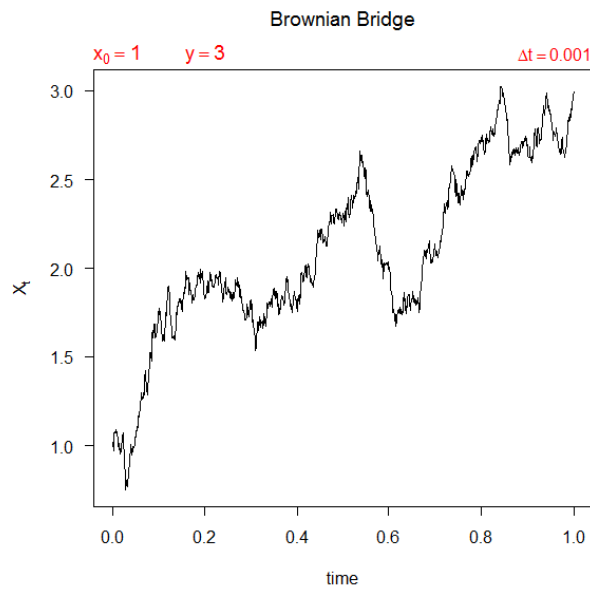


FIGURE 2.2 – Trajectoire de Mouvement Brownien Bridge.

## 2.8 Mouvement Brownien Géométrique

Soit  $w_t$  un mouvement brownien, et que  $b$  et  $\sigma$ , deux constantes.  
 Le processus  $X_t = X_0 \exp \{ (b - \sigma^2/2)t + \sigma w_t \}$  est appelé mouvement brownien géométrique, appelé aussi processus “log normale”.

La simulation est réalisée pour  $b = 4$ ,  $\sigma = 1$ ,  $X_0 = 1$  et  $t \in [0, 1]$  ( en utilisant le packages **Sim.DiffProc**[2]). A noter que ce processus est toujours strictement positif.

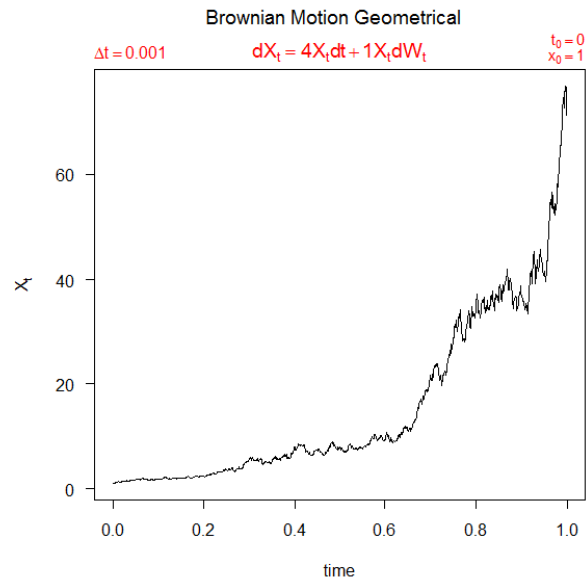


FIGURE 2.3 – Trajectoire de Mouvement Brownien Géométrique.

## 2.9 Conclusion

Le mouvement Brownien "Processus de Wiener", joue un rôle fondamental dans de nombreux domaines. Les raisons fondamentales qui caractérisent ce processus et qui deviennent plus intéressantes du point de vue modélisation :

- Sa définition permet d'effectuer et simplifier certains calculs.
- Le mouvement brownien est un processus markovien. Il hérite donc des propriétés de cette classe.
- Il peut être utilisé comme une étape élémentaire pour construire des processus plus élaborés, telles que les fonctionnelles du mouvement brownien.

De plus, ce processus constitue la base de la théorie classique d'équation différentielle stochastique qui fait l'objet de chapitre suivant.

# Chapitre 3

## Processus de Diffusion

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>26</b>
<b>3.2</b>	<b>Intégrale stochastique</b>	<b>27</b>
<b>3.3</b>	<b>Processus d'Itô</b>	<b>31</b>
<b>3.4</b>	<b>Processus de diffusion</b>	<b>33</b>
<b>3.5</b>	<b>Équations Différentielles stochastiques</b>	<b>35</b>
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>44</b>

---

### 3.1 Introduction

Afin de prendre en compte les modélisations de force aléatoires qui interviennent dans les équations de la dynamique comme des termes complémentaires, on a cherché à donner un sens à l'intégrale lorsque celle-ci est prise par rapport à un processus stochastique. Ce chapitre est consacré dans un premier temps à étudier l'intégrale stochastique au sens d'Itô [1] et de Stratonovich.

La théorie des équations différentielles stochastiques est introduite dans ce chapitre. L'accent est mis sur les équations différentielles stochastiques d'Itô, pour lesquels l'existence et le théorème d'unicité sont établies, et nous étudions les propriétés de leurs solutions. Les techniques de résolution des classes linéaires sont ainsi présentées. Enfin, les équations différentielles stochastiques de Stratonovich et leurs relations aux équations d'Itô sont examinées.

## 3.2 Intégrale stochastique

Dans cette section, on a étudié l'intégrale :

$$\int_0^t f(s, \omega) dw_s \quad (3.1)$$

Dans laquelle  $w_t$  est un mouvement Brownien standard et  $f$  un processus stochastique.

Si  $f$  est une fonction déterministe de classe  $C^1$ , l'intégrale est une intégrale de Stieltjes classique.

Si  $f$  dépend aléatoirement de la variable  $\omega$ , comme le mouvement brownien standard n'est nulle part différentiable et que presque toutes ses réalisations n'ont pas variations bornées, l'intégrale n'a pas de sens.

K. Itô a été le premier à donner un sens à cette intégrale. À la suite des travaux d'Itô, Stratonovitch a proposé une autre définition de l'intégrale stochastique.

### 3.2.1 Construction de l'intégrale stochastique

Soit  $(w_t)_{(t \geq 0)}$  un mouvement brownien standard dans un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{(t \geq 0)}, \mathbb{P})$  et  $f(u, w)$  est un processus aléatoire,  $F_t$ -mesurable.

**Définition 3.1** On appelle processus élémentaire (fonction en escalier)  $(H_t)_{(0 \leq t \leq T)}$  un processus de la forme :

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^p f(t_i, \omega) \chi(t)_{]t_{i-1}, t_i]} \quad (3.2)$$

où,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T$  et que  $\phi_i$  est une variable aléatoire  $F_{t_{i-1}}$  mesurable et bornée. et  $\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in ]t_{i-1}, t_i] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

L'intégrale stochastique d'un processus élémentaire  $H_t$  est alors, par définition, un processus continu  $(I(H)_t)_{(0 \leq t \leq T)}$ , défini par :

$$I(H)_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k f(t_i, \omega) (w_{t_i} - w_{t_{i-1}}) \text{ pour } t \in ]t_k, t_{k+1}] \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^k f(t_i, \omega) (w_{t_i} - w_{t_{i-1}}) \right) &= \sum_{i=1}^k \mathbb{E} (f(t_i, \omega) (w_{t_i} - w_{t_{i-1}})) \\ &= \sum_{i=1}^k f(t_i, \omega) \mathbb{E} ((w_{t_i} - w_{t_{i-1}})) \\ &= 0 \end{aligned}$$

en outre :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^k |f(t_i, \omega)(w_{t_i} - w_{t_{i-1}})|^2 \right) &= \text{var} \left( \sum_{i=1}^k f(t_i, \omega)(w_{t_i} - w_{t_{i-1}}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^k f(t_i, \omega)^2 (t_i - t_{i-1}) \\ &= \int_0^\infty f(t)^2 dt \end{aligned}$$

Or :

$$I(H)_t = \int_0^t f(s, \omega) dw_s \quad (3.4)$$

Dans ce cas le résultat essentiel obtenu est le suivant :

**Proposition 3.1**  $-\int_0^t f(s, \omega) dw_s$  est une  $\mathfrak{S}_t$  martingale.

- $\mathbb{E} \left( \int_0^t f(s, \omega) dw_s \right)^2 = \int_0^t \mathbb{E} (f(s, \omega))^2 du$
- $\mathbb{E} \left( \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t f(s, \omega) dw_s \right|^2 \right) \leq 4 \left| \int_0^T \mathbb{E} (f(s, \omega))^2 du \right|$

**Démonstration 3.1** 1. Pour que  $\int_0^t H_u dw_u$  soit une  $F_t$  martingale, il faut que  $s < t$  et cette équation est :

$$\mathbb{E} \left( \int_0^t f(s', \omega) dw_{s'} | \mathfrak{S}_s \right) = \int_0^s f(u, \omega) dw_u \quad (3.5)$$

Pour cela, il suffit de démontrer que le processus  $M_n = \int_0^{t_n} f(u, \omega) dw_u$  est une  $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_{t_n}$  martingale.

Pour toute discrétisation  $0 = t_0 \leq \dots \leq t_n = T$  avec  $n \leq p$ , et en supposant également que  $t$  et  $s$  sont dans l'intervalle  $(t_i)_{i=1 \dots p}$

Donc :

$$M_n = \sum_{i=1}^n f(t_i, \omega) \Delta w_{t_i} \quad (3.6)$$

Où  $\phi_i$  est une variable aléatoire  $\mathfrak{S}_{i-1}$  mesurable et borné.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_n - M_{n-1} | \mathfrak{S}_{n-1}) &= \mathbb{E}(f_n(w_{t_n} - w_{t_{n-1}} | \mathfrak{S}_{n-1})) \\ &= f_n \mathbb{E}((w_{t_n} - w_{t_{n-1}} | \mathfrak{S}_{n-1})) \end{aligned}$$

Car  $\phi_n$  est  $\mathfrak{S}_{n-1}$  mesurable et borné.

$\mathbb{E}(M_n - M_{n-1} | \mathfrak{S}_{n-1}) = 0$  donc  $\mathbb{E}(M_n | \mathfrak{S}_{n-1}) = M_{n-1}$  alors  $M_n$  martingale.

D'où  $\int_0^t f(s, \omega) dw_s$  est  $\mathfrak{S}_t$  martingale.

2. Lorsque :

$$M_n = \int_0^{t_n} f(u, \omega) dw_u = \sum_{i=1}^n f(t_i, \omega) \Delta w_{t_i}$$

$$\text{Alors : } \mathbb{E} \left( \int_0^{t_n} f(u, \omega) dw_u | \mathfrak{S}_s \right)^2 = \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(t_i, \omega) f(t_j, \omega) \Delta w_{t_i} \Delta w_{t_j} \right)$$

- Dans le cas où :  $i < j$ , l'équation est :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (f(t_i, \omega) f(t_j, \omega) \Delta w_{t_i} \Delta w_{t_j}) &= \mathbb{E} (\mathbb{E} (f(t_i, \omega) f(t_j, \omega) \Delta w_{t_i} \Delta w_{t_j} | \mathfrak{S}_{j-1})) \\ &= \mathbb{E} (\mathbb{E} (f(t_i, \omega) f(t_j, \omega) \Delta w_{t_i}) \mathbb{E} (\Delta w_{t_j} | \mathfrak{S}_{j-1})) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Car  $w_t$  est  $\mathfrak{S}_t$  martingale.

- Même démonstration pour le cas  $j < i$ .
- Si  $i = j$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \int_0^{t_n} f(u, \omega) dw_u | \mathfrak{S}_s \right)^2 &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} (\mathbb{E} (f(t_i, \omega)^2 \Delta w_{t_i}^2 | \mathfrak{S}_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} (f(t_i, \omega)^2 \mathbb{E} (\Delta w_{t_i}^2 | \mathfrak{S}_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} (f(t_i, \omega)^2) (t_i - t_{i-1}) \\ &= \int_0^t \mathbb{E} (f(s, \omega))^2 ds \end{aligned}$$

3. D'après la proposition (3.1),  $\int_0^t f(s, \omega) dw_s$  est une  $\mathfrak{S}_t$  martingale, et si le théorème de Doob est appliqué ; un résultat est obtenu.

**Remarque 3.1** L'étendu de la notion d'intégrale stochastique à des espaces plus larges est obtenu par :

$$r = \{(H_t)_{T \geq t \geq 0} \text{ adapté à } \mathfrak{S}_t, \mathbb{E} \left( \int_0^t f(s, \omega)^2 ds \right) < +\infty\}$$

**Proposition 3.2** Pour un mouvement brownien standard  $\mathfrak{S}_t$  mesurable. Il existe une application linéaire unique  $J : r \rightarrow$  espace des processus martingale continu sur  $[0, T]$  telle que :

- Pour  $(H_t)$  processus élémentaire :  $J(H_t) = I(H_t)$ , Propriété de prolongement.
- $\mathbb{E} (J(H_t))^2 = \mathbb{E} \left( \int_0^t f(s, \omega)^2 ds \right)$ , Propriété de continuité.

Cette application linéaire est unique dans la mesure où, si  $J$  et  $J'$  sont deux prolongements linéaires vérifiant les propriétés précédentes pour avoir ainsi :

$$\forall 0 \leq t \leq T, J(H_t) = J'(H_t) \quad \mathbb{P}.p.s$$

et :

$$J(H_t) = \int_0^t f(s, \omega) dw_s$$

**Remarque 3.2**  $r' = \{(H_t)_{T \geq t \geq 0} \text{ adapté à } \mathfrak{S}_t, \int_0^T f(s, \omega)^2 ds < +\infty\}$   $\mathbb{P}.ps$

**Proposition 3.3** Il existe une seule application linéaire  $J'$  de l'espace  $r'$  dans l'espace vectoriel des processus continus définis sur  $[0, T]$ , telle que :

- Propriété de prolongement, Pour  $(H_t)$  processus élémentaire :  $J'(H_t) = I(H_t)$
- Propriété de continuité. Pour une suite  $(H_t^n)_{T \geq t \geq 0}$  d'éléments de  $r'$  :

$$\int_0^t (f(s, \omega)^n)^2 ds \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{en probabilité}$$

Si :  $\sup J'(H_t^n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$  en probabilité

Alors :

$$J'(H_t) = \int_0^t f(s, \omega) dw_s$$

### 3.2.2 Intégrale de Stratonovich

L'intégrale de Stratonovich développée par Ruslan L. Stratonovich et D.L. Fisk est une intégrale stochastique. Bien que, généralement l'intégrale d'Itô est la plus utilisée, l'intégrale de Stratonovich est toute fois utilisée pour sa simplicité.

**Définition 3.2** Soit  $(t_n)_{(n \geq 0)}$  une suite de subdivision de  $[0, t]$  et  $X, Y$  deux semi martingales continues :

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^k \frac{X_{t_{i+1}} + X_{t_i}}{2} (Y_{t_{i+1}} + Y_{t_i}) \quad (3.7)$$

Si  $\lim_{k \rightarrow \infty} I(H)_t$  existe en probabilité alors :

$$\int_0^t X_s \circ dY_s = \sum_{i=1}^k \frac{X_{t_{i+1}} + X_{t_i}}{2} (Y_{t_{i+1}} + Y_{t_i}) \quad (3.8)$$

Il ya une différence entre cette intégrale et celle d'Itô. Une relation existe entre les deux intégrales. Elle est montrée par la proposition suivante :

**Proposition 3.4** Soit  $X$  et  $Y$  deux semi martingales continues et  $f$  de classe  $C^1$  alors,

1.  $\int_0^t X_s \circ dY_s = \int_0^t X_s dY_s + \frac{1}{2} \langle X, Y \rangle_t$

où

$$\langle X, Y \rangle_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (X_{t_{i+1}} + X_{t_i}) (Y_{t_{i+1}} + Y_{t_i})$$

2.  $\int_0^t f(X_s) \circ dY_s = \int_0^t f(X_s) dY_s + \frac{1}{2} \int_0^t f'(X_s) dY_s \langle X, Y \rangle_t$

3. Dans le cas où  $(w_t, t \geq 0)$  est un mouvement Brownien,  $\sigma$  est de classe  $C^2$  telle que les fonctions  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont Lipschitziennes, cette proposition devient :

$$X_t = \int_0^t \sigma(X_s) \circ dw_s \quad (3.9)$$

Alors :

$$X_t = \int_0^t \sigma(X_s) dw_s + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(X_s) \sigma'(X_s) ds \quad (3.10)$$

### 3.3 Processus d'Itô

**Définition 3.3** Soit  $w = (w^1, \dots, w^d)$  un mouvement brownien d-dimensionnel défini sur un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{(t \geq 0)}, \mathbb{P})$ . On appelle processus d'Itô, un processus  $X = (X^1, \dots, X^n)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  tel que :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dw_s \quad (3.11)$$

Où :

- $K_t$  et  $H_t$  sont adaptés à  $\mathfrak{F}_t$
- $\int_0^t K_s ds < +\infty$  P.p.s
- $\int_0^t H_s^2 ds < +\infty$  P.p.s

#### 3.3.1 Formule d'Itô

Pour un processus stochastique  $X_t$  vérifiant

$$X(t_2) - X(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sigma(t) dw_t$$

on note sous forme différentielle

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dw_t$$

Si  $f(t, x)$  est une fonction de classe  $C^2$ , alors  $f(t, X_t)$  admet une intégrale stochastique par rapport au même processus de Wiener donnée par la *formule d'Itô*

$$df(t, X_t) = \left( \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t} + \mu(t) \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t) \frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(t) \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} dw_t \quad (3.12)$$

Cette formule permet de trouver les solutions de l'équation différentielle stochastique, et le calcul d'espérance d'un processus donné. Elle permet aussi de montrer que certains processus sont des martingales (puisque l'intégrale stochastique est une martingale).

**Exemple 3.1** Soit à calculer la dérivée stochastique du processus  $Y_t = e^{w_t}$ , où  $w_t$  est un mouvement brownien standard. Posons  $X_t = w_t$ ,  $f(t, x) = e^x$  et appliquons la formule (3.12). Il vient

$$d(e^{w_t}) = \frac{1}{2} e^{w_t} dt + e^{w_t} dw_t$$

soit sous forme intégrale

$$e^{w_t} = 1 + \frac{1}{2} \int_0^t e^{w_s} ds + \int_0^t e^{w_s} dw_s$$

En prenant l'espérance de chaque membre et en appliquant les règles de calcul du paragraphe précédent (l'espérance de l'intégrale en  $dw_s$  est nulle).

$$\mathbb{E}(e^{w_t}) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^t \mathbb{E}(e^{w_s}) ds$$



En posant

$$y(t) = \mathbb{E}(e^{w_t})$$

l'équation précédente est une équation différentielle du premier ordre déterministe en  $y(t)$  avec comme condition initiale  $y(0) = 1$

$$y'(t) = \frac{1}{2}y(t)$$

qui admet comme solution

$$y(t) = \mathbb{E}(e^{w_t}) = e^{t/2}$$

Remarquons que l'application de la formule d'Itô à la fonction  $f(t, x) = e^{iux}$  permet le calcul de la fonction caractéristique de  $w_t$ .

$$\mathbb{E}(e^{i u w_t}) = e^{-t u^2 / 2}$$

La formule d'intégration par parties est utile pour démontrer l'unicité de la solution d'une équation différentielle stochastique.

**Théorème 3.1 (Intégrale par partie)** Soient  $(X_t)_{(t \in [0, T])}$  et  $(Y_t)_{(t \in [0, T])}$  deux processus d'Itô définies sur le même espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{(t \geq 0)}, \mathbb{P})$  avec :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_{1,s} ds + \int_0^t H_{1,s} dw_s \quad (3.13)$$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K_{2,s} ds + \int_0^t H_{2,s} dw_s \quad (3.14)$$

Alors :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t \quad (3.15)$$

Où :  $\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_{1,s} H_{2,s} ds$

**Démonstration 3.2**

$$(X_t + Y_t)^2 = (X_0 + Y_0)^2 + 2 \int_0^t (X_t + Y_t) d(X_t + Y_t) + \int_0^t (H_{1,s} + H_{2,s})^2 ds \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} X_t^2 = X_0^2 + 2 \int_0^t X_t dX_t + \int_0^t H_{1,s}^2 ds \\ Y_t^2 = Y_0^2 + 2 \int_0^t Y_t dY_t + \int_0^t H_{2,s}^2 ds \end{cases} \quad (3.17)$$

Après simplification, en retranchant (3.16) de (3.17), on a :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t \quad (3.18)$$

### 3.4 Processus de diffusion

**Définition 3.4** On appelle un processus Markovien, processus de diffusion s'il vérifie les conditions suivantes :

- $\lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|x-y| > \varepsilon} f(s, x, t, y) dy = 0$  Condition de régularité de processus.
- $\lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|x-y| \leq \varepsilon} (x-y) f(s, x, t, y) dy = a(s, x)$  Direction du processus.
- $\lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|x-y| \leq \varepsilon} (x-y)^2 f(s, x, t, y) dy = \sigma^2(s, x)$  Taux de variabilité

Les fonctions  $a(s, x)$  et  $\sigma^2(s, x)$  sont appelés respectivement coefficient de dérive et de diffusion.

**Corollaire 3.1** a.  $\lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \mathbb{E}(X_t - X_s / X_s = x) = a(s, x)$

b.  $\lim_{t \rightarrow s} \frac{1}{t-s} \mathbb{E}((X_t - X_s)^2 / X_s = x) = \sigma^2(s, x)$

La fonction  $a$  est le taux instantané de changement du processus, en moyenne, sachant que  $X_s = x$ .  $\sigma^2$  est le taux instantané des fluctuations du processus, sachant  $X_s = x$ .

**Propriété 3.1** La fonction  $f(s, x, t, y)$  de densité de transition de processus de diffusion  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  vérifie l'une des équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [\sigma^2(t, y) f]}{\partial y^2} - \frac{\partial [a(t, y) f]}{\partial y} \quad (s, x) \text{ fixé} \\ \frac{\partial f}{\partial s} = a(s, x) \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} \sigma^2(s, x) \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] \quad (t, y) \text{ fixé} \end{array} \right.$$

Ceci montre que : La première équation désigne l'évolution avancée par rapport à l'état final  $(t, y)$ , appelée simultanément équations de "Fokker-Planck" et de "Kolmogorov avancée". La seconde donne l'évolution retardée par rapport à l'état initial  $(s, x)$ , dénommée équation de "Kolmogorov retardée".

#### 3.4.1 La continuité au sens de critère de Kolmogorov pour un processus de diffusion :

Soit  $\{X_t, t \geq 0\}$  un processus aléatoire indexé par un intervalle  $[0, T]$ , à valeur dans l'espace métrique complète  $(\mathbb{E}, d)$ , si les constants  $\alpha, \beta, c > 0$  existent, de sorte que  $s, t \in [0, T]$  :

$$\mathbb{E}(X_t - X_s)^\alpha \leq c(t-s)^{1+\beta} \quad (3.19)$$

Alors,  $(X)_t$  est continue en  $t = s$ , une suite de trajectoire.

**Exemple 3.2** pour  $\alpha = 4$ ,  $c = 3$  et  $\beta = 1$

Le processus de mouvement Brownien continu au sens de Kolmogorov :  $E(X_t - X_s)^4 \leq 3(t-s)^2$

### 3.5 Équations Différentielles stochastiques

Les équations différentielles stochastiques sont des équations différentielles qui contiennent un ou plusieurs termes qui sont des processus stochastiques. La solution de ces équations est également un processus stochastique. Nous nous intéresserons ici plus particulièrement au processus de diffusion. Normalement, les EDS [6](ou équations différentielles stochastiques) incorporent du bruit blanc qui ici peut être vue comme la dérivée formelle d'un mouvement brownien.

**Définition 3.5** Une équation différentielle stochastique est une généralisation de la notion d'équation différentielle ordinaire :

$$X(t) = b(X(t)), X_0 = x \quad (3.20)$$

Cette équation est perturbée par la dérivée d'un mouvement Brownien  $w_t$ (modulée par un coefficient de diffusion  $\sigma(x)$ )pour :

$$\dot{X} = b(X_t) + \sigma(X_t) \dot{w}_t, \quad (3.21)$$

où  $\dot{w}_t$  est un bruit blanc.

Cette écriture n'a pas grand sens, car le mouvement brownien n'est pas dérivable, et l'on préfère écrire cette équation sous une forme intégrée :

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s, s) ds + \int_0^t \sigma(X_s, s) dw_s \quad (3.22)$$

Ou

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t) dw_t \\ X_0 = x \end{cases} \quad (3.23)$$

Où :  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\{w_t, t \geq 0\}$  Un mouvement brownien par rapport à la filtration  $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ . Tel que :

$$\begin{cases} \forall t \quad \mathbb{E} \left( \int_0^t |b(X_s)|^2 ds \right) < +\infty \\ \forall t \quad \mathbb{E} \left( \int_0^t |\sigma(X_s)|^2 ds \right) < +\infty \end{cases} \quad (3.24)$$

La solution  $(X(t), t \geq 0)$  de l'équation (3.22) est appelée "*processus de diffusion*".

#### 3.5.1 Existence et Unicité des solutions des équations différentielle stochastique

Nous étudions dans cette section l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles stochastiques (EDS). Lorsque la solution de l'EDS ne change pas pour une autre valeur du processus de Wiener, alors on parle de solution forte. Dans le cas contraire, c'est-à-dire que si on trouve une solution correspondante à un processus de Wiener bien particulier, alors elle est dite solution faible. Certaines équations différentielles stochastiques admettent des solutions faibles et non fortes.

### 3.5.1.1 Solutions fortes d'une équation différentielle stochastique

**Définition 3.6** Une solution forte de l'équation différentielle stochastique (3.23) est un processus  $X_t$  à trajectoires presque sûrement continues tel que :

- i.  $(X_t)$  est adapté à la filtration  $\mathfrak{F}_t$
- ii.  $X_0 = x$  p.s
- iii. Pour tout  $i = 1, \dots, d$ ,  $\int_0^t [|b^i(X_s, s)| + \sum_{k=1}^r |\sigma_k^i(X_s)|] ds < +\infty$  p.s
- iv. Pour tout  $t \geq 0$ , et pour  $i = 1, \dots, d$ ,

$$X_t^i = X_0^i + \sum_{k=1}^r \int_0^t \sigma_k^i(X_s) dw_s^k + \int_0^t b^i(X_s, s) ds \quad (3.25)$$

Le théorème suivant est fondamentale, qui donne des conditions suffisantes d'existence et d'unicité d'une solution forte de l'EDS (3.23) :

**Théorème 3.2** Soit  $\sigma(x, t)$  une fonction mesurable de  $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $b(x, t)$  une fonction mesurable de  $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  vérifiant :

- **Condition de croissance** : il existe une constante  $C$  telle que :

$$|b(x, t)| + |\sigma(x, t)| \leq C(1 + |x|) \quad (3.26)$$

- **Condition de Lipschitz** : il existe une constante  $K$  telle que :

$$|b(x, t) - b(y, t)| + |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| \leq K|x - y| \quad (3.27)$$

- $X_0$  est une variable indépendante de la tribu  $\mathfrak{F}_\infty = \sigma(w_s, s \geq 0)$  et  $\mathbb{E}|X_0|^2 < \infty$

Alors, l'équation différentielle stochastique (3.23) admet une solution unique  $X_t$  dont presque toutes les réalisations sont continues, qui est un processus de Markov de loi initiale  $X_0$  et de probabilité de transition :

$$p(s, x; t, A) = \mathbb{P}(X_t \in A / X_s = x) \quad (3.28)$$

De plus, si les fonctions  $b$  et  $\sigma$  sont continues, alors  $X_t$  est un processus de diffusion de dérive  $b(t, x)$  et de matrice de diffusion  $\sigma\sigma^T$  (symétrique et semi-définie positive). En particulier lorsque  $b$  et  $\sigma$  sont lipschitziennes, l'équation (3.23) admet une solution unique.

Les solutions de l'équation différentielle stochastique (3.23) sont des processus de Markov homogènes où leurs probabilités de transitions  $p(s, x, t, A)$  dépendent seulement de la période écoulée  $(t - s)$ ,  $t \leq s$ . Dans ce cas :  $p(s, x; t, A) = p(0, x; t - s, A) = p(x; t - s, A)$ .

La solution de l'équation différentielle stochastique (3.23) est un processus de Markov ayant une distribution stationnaire s'il existe une mesure de probabilité  $\pi$  tel que :

$$\pi(A) = \int_{\mathbb{R}} p(x; t - s, A) d\pi(x) \quad (3.29)$$

Pour assurer l'existence de la fonction de densité  $\pi$ , des conditions sont à imposer sur les coefficients  $b$  et  $\sigma$ .

Généralement, les solutions de l'EDS (3.23) sont des processus de diffusion où les probabilités de transitions vérifient les trois limites de la définition (3.4)(section 3.4).

### 3.5.1.2 Solutions faibles d'une équation différentielle stochastique

**Définition 3.7** Soient  $w_t$  un mouvement Brownien définie sur un espace de probabilité filtré,  $\hat{X}_t$  un processus adapté à la filtration  $\mathfrak{F}_t$ . Pour tout  $t$ , les processus  $\hat{X}_t$  existent et satisfait :

$$\hat{X}_t = \hat{X}_0 + \int_0^t b(\hat{X}_s, s) ds + \int_0^t \sigma(\hat{X}_s, s) d\hat{w}_s \quad (3.30)$$

Alors,  $\hat{X}_t$  est appelé une solution faible de l'équation différentielle stochastique :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s, s) ds + \int_0^t \sigma(X_s, s) dw_s \quad (3.31)$$

**Définition 3.8** Une solution faible est appelée unique si  $X_t$  et  $X'_t$  sont deux solutions (peut être dans espace de probabilité différente) telles que les distributions de  $X_0$  et  $X'_0$  sont les même, donc les distributions  $X_t$  et  $X'_t$  sont les même.

Il est clair, par définition, une solution forte est aussi une solution faible. Unicité de la solution forte implique l'unicité de la solution faible (Résultat de Yamada et Watanabe(1971)).

### 3.5.1.3 Construction de solution faible

**Théorème 3.3** Si pour tout  $t \geq 0$ , les fonctions  $b(t, x)$  et  $\sigma(t, x)$  sont bornées et continus alors l'équation différentielle stochastique possède au moins une solution faible initiale à l'instant  $s$  au point  $x$ , pour tout  $s$  et  $x$ .

De plus, Si leurs dérivées partielles secondes par rapport à  $x$  sont aussi bornées et continues, alors l'EDS a une solution faible unique à l'instant  $s$  au point  $x$ .

**Théorème 3.4** Si  $\sigma(t, x)$  est positive et continu ; pour chaque  $T \geq 0$ , il existe  $K_T$  tel que pour  $x \in \mathbb{R}$  :

$$|b(x, t)| + |\sigma(x, t)| \leq K_T (1 + |x|) \quad (3.32)$$

Alors il existe une solution faible unique de l'EDS à partir de n'importe quel point de  $x \in \mathbb{R}$  et pour tout  $s > 0$ .

### 3.5.2 Equations différentielles stochastiques linéaires

**Définition 3.9** L'équation différentielle stochastique :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s, s) ds + \int_0^t \sigma(X_s, s) dw_s \quad (3.33)$$

est linéaire, si  $b$  et  $\sigma$  sont de la forme :

$$\begin{aligned} b(x, t) &= \alpha(t) + \beta(t)x \\ \sigma(x, t) &= \gamma(t) + \delta(t)x \end{aligned}$$

où les fonctions  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont des processus continus.

#### 3.5.2.1 Solution de l'équation différentielle stochastique linéaire

Lorsque  $\alpha(t) = 0$  et  $\gamma(t) = 0$ , l'expression (3.33) se réduit à l'équation différentielle stochastique homogène et linéaire :

$$dX_t = \beta(t)X_t dt + \delta(t)X_t dw_t \quad (3.34)$$

Quand  $\delta(t) = 0$ , le bruit apparaît comme un terme additif et l'équation (3.33) devient :

$$dX_t = (\beta(t)X_t + \alpha(t)) dt + \delta(t)X_t dw_t \quad (3.35)$$

Dans ce cas là l'EDS est dit linéaire dans sens limité (linear in the narrow sense) et l'équation homogène obtenue à partir de (3.35) est une équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dX_t}{dt} = \beta(t)X_t \quad (3.36)$$

où la solution fondamentale est donnée par :

$$\phi_t = \exp\left(\int_0^t \beta(s) ds\right) \quad (3.37)$$

En appliquant la formule d'Itô à la transformation  $U(t, x) = \phi_t^{-1}x$ , on obtient :

$$d\phi_t^{-1}X_t = \left[ \frac{d\phi_t^{-1}}{dt}X_t + (\beta(t)X_t + \alpha(t))\phi_t^{-1} \right] dt + \gamma(t)\phi_t^{-1}dw_t$$

$$\text{or } \frac{d\phi_t^{-1}}{dt} = -\phi_t^{-1}\beta(t) \Rightarrow d\phi_t^{-1}X_t = \left( \alpha(t)\phi_t^{-1} \right) dt + \left( \gamma(t)\phi_t^{-1} \right) dw_t$$

Cette dernière expression peut se mettre sous la forme intégrale :

$$\phi_t^{-1}X_t = \phi_t^{-1}X_0 + \int_{t_0}^t (\alpha(s)\phi_s^{-1}) ds + \int_{t_0}^t (\gamma(s)\phi_s^{-1}) dw_s \quad (3.38)$$

Sous la condition  $\phi_0 = 1$ , la solution de (3.35) est :

$$X_t = \phi_t \left( X_0 + \int_{t_0}^t (\alpha(s)\phi_s^{-1}) ds + \int_{t_0}^t (\gamma(s)\phi_s^{-1}) dw_s \right) \quad (3.39)$$

où

$$\phi_t = \exp\left(\int_{t_0}^t \beta(s) ds\right) \quad (3.40)$$

**Proposition 3.5** La solution fondamentale de (3.34) est donnée par :

$$\phi_t = \phi_0 \exp \left( \int_{t_0}^t \left( \beta(s) - \frac{1}{2} \delta^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t \delta(s) dw_s \right) \quad (3.41)$$

où  $\phi_0$  est généralement égal 1.

**Démonstration 3.3** La solution fondamentale (3.40) d'une équation linéaire au sens limité satisfait l'équation différentielle ordinaire  $d \ln \phi_t = \beta(t) dt$ .

En utilisant cette définition, la formule d'Itô appliqué à la transformée de la solution fondamentale  $\ln \phi_t$  de (3.34) sera :

$$\begin{aligned} d \ln \phi_t &= \left( \beta(t) \phi_t \phi_t^{-1} - \frac{1}{2} \delta^2(t) \phi_t^2 \phi_t^{-2} \right) dt + \delta(t) \phi_t \phi_t^{-1} dw_t \\ &= \left( \beta(t) - \frac{1}{2} \delta^2(t) \right) dt + \delta(t) dw_t \end{aligned}$$

donc

$$\ln \phi_t = \int_{t_0}^t \left( \beta(s) - \frac{1}{2} \delta^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t \delta(s) dw_s \quad (3.42)$$

lorsque  $\delta(t) = 0$ , (3.41) se réduit à (3.40).

**Proposition 3.6** Le processus  $\phi_t^{-1} X_t$  qui est fonction de la solution  $X_t$  de l'équation général (3.33) possède une forme explicite de l'intégrale stochastique de la forme :

$$\phi_t X_t = X_0 + \int_{t_0}^t (\alpha(s) - \delta(s) \gamma(s)) \phi_s^{-1} ds + \int_{t_0}^t \gamma(s) \phi_s^{-1} dw_s \quad (3.43)$$

Similairement, on applique la formule d'Itô à  $\phi_t^{-1}$  et on obtient :

$$d\phi_t^{-1} = (-\beta(t) - \delta^2(t)) \phi_t^{-1} dt - \delta(t) \phi_t^{-1} dw_t \quad (3.44)$$

ce qui implique que la solution de l'équation générale (3.33) est donnée par :

$$X_t = \phi_t \left[ X_0 + \int_{t_0}^t (\alpha(s) - \delta(s) \gamma(s)) \phi_s^{-1} ds + \int_{t_0}^t \gamma(s) \phi_s^{-1} dw_s \right] \quad (3.45)$$

où  $\phi_t$  est donnée par l'expression (3.44).

**Démonstration 3.4** Les deux terme  $\phi_t^{-1}$  et  $X_t$  possèdent des différentielles stochastiques incluant le même processus  $w_t$ , ce qui implique que la différentielle de leur produit :  $U(X_t^1, X_t^2) = X_t^1 \cdot X_t^2$  avec  $X_t^1 = \phi_t^{-1}$  et  $X_t^2 = X_t$  donne :

$$\begin{aligned} d\phi_t^{-1} X_t &= \phi_t^{-1} [(\beta(t) X_t + \alpha(t)) dt + (\delta(t) X_t + \gamma(t)) dw_t] \\ &\quad + X_t [(-\beta(t) + \delta^2(t)) \phi_t^{-1} dt - \delta(t) \phi_t^{-1} dw_t] - \delta(t) \phi_t^{-1} [\delta(t) X_t + \gamma(t)] dt \\ &= (\alpha(t) - \delta(t) \gamma(t)) \phi_t^{-1} dt + \gamma(t) \phi_t^{-1} dw_t \end{aligned}$$

En intégrant sur l'intervalle de temps  $[t_0, t]$  et en supposant que  $\phi_0 = 1$ , on obtient :

$$\phi_t^{-1} X_t = X_0 + \int_{t_0}^t (\alpha(s) - \delta(s) \gamma(s)) \phi_s^{-1} ds + \int_{t_0}^t (\gamma(s) \phi_s^{-1}) dw_s \quad (3.46)$$



### 3.5.2.2 Solutions générales de quelques équations différentielles stochastiques de type linéaire

Nous exposons dans cette partie la solution générale de diverses équations différentielles stochastiques linéaires.

Nous rappelons que la solution générale d'une équation linéaire est donnée par :

$$X_t = \phi_t \left( X_0 + \int_{t_0}^t (\alpha(s) - \delta(s)\gamma(s)) \phi_s^{-1} ds + \int_{t_0}^t (\gamma(s)\phi_s^{-1}) dw_s \right) \quad (3.47)$$

où la solution fondamentale est :

$$\phi_t = \exp \left( \int_{t_0}^t \left( \beta(s) - \frac{1}{2} \delta^2(s) \right) ds + \int_{t_0}^t \delta(s) dw_s \right) \quad (3.48)$$

a.  $\beta(t) = -\beta, \gamma(t) = \sigma, \alpha(t) = \delta(t) = 0$  :

$$X_t = e^{-\beta t} \left( X_0 + \sigma \int_{t_0}^t e^{\beta s} dw_s \right) \quad (3.49)$$

b.  $\gamma(t) = 0$  :

$$X_t = \phi_t \left( X_0 + \int_{t_0}^t \phi_s^{-1} \alpha(s) ds + \int_{t_0}^t \phi_s^{-1} \delta(s) dw_s \right) \quad (3.50)$$

où  $\phi_t = \exp \left( \int_{t_0}^t \beta(s) ds \right)$

c.  $\beta(t) = \beta, \gamma(t) = \gamma, \alpha(t) = \alpha, \delta(t) = \delta$  :

$$X_t = \phi_t \left( X_0 + (\alpha - \gamma\delta) \int_{t_0}^t \phi_s^{-1} ds + \gamma \int_{t_0}^t \phi_s^{-1} dw_s \right) \quad (3.51)$$

où  $\phi_t = \exp \left( \left( \beta - \frac{1}{2} \delta^2 \right) t + \delta w_t \right)$

d.  $\beta(t) = \beta, \gamma(t) = \delta, \alpha(t) = \delta(t) = 0$  :

$$X_t = X_0 \exp \left( \left( \beta - \frac{1}{2} \delta^2 \right) t + \delta w_t \right) \quad (3.52)$$

### 3.5.3 Equations différentielles stochastiques de Stratonovich

Nous présentons dans cette partie un ensemble d'EDS bien particuliers que nous pouvons résoudre non pas au moyen de l'intégrale d'Itô mais par celui de Stratonovich [6].

Ce choix n'est pas arbitraire mais il est préférable dans certaines applications, plus particulièrement en physique, de mettre l'équation différentielle stochastique ordinaire (EDS d'Itô) sous la forme différentielle :

$$dX_t = b(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) \circ dw_t \quad (3.53)$$

Cette équation est appelée EDS de Stratonovich qu'on peut écrire sous la forme intégrale

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s, s) ds + \int_0^t \sigma(X_s, s) \circ dw_s \quad (3.54)$$

### 3.5.3.1 Relation entre l'EDS d'Itô et l'EDS de Stratonovich

La formule qui relie l'équation différentielle stochastique au sens de Stratonovich à celle au sens d'Itô existe.

En effet, l'équation différentielle de Stratonovich :

$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t) \circ dw_t \quad (3.55)$$

Correspond à l'EDS au sens d'Itô suivante :

$$dX_t = \tilde{b}(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t) dw_t \quad (3.56)$$

Avec :

$$\tilde{b}_i(X_t, t) = b(X_t, t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^d \frac{\partial}{\partial X_t} [\sigma(X_t, t)]_{ij} [\sigma(X_t, t)]_{jk} \quad (3.57)$$

Où  $i \in \{1, \dots, d\}$

Par exemple l'EDS d'Itô :  $dX_t = 2X_t dt + 2X_t dw_t$  est équivalente à l'EDS de Stratonovich :

$$dX_t = 2X_t \circ dw_t$$

Ces deux équations possèdent la même solution donné par :

$$X_t = X_{t_0} \exp(2(w_t - w_{t_0})).$$

### 3.5.4 Equation de Kolmogorov (Fokker-Planck)

À chaque équation d'Itô

$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t) dw_t \quad (3.58)$$

correspond une équation aux dérivées partielles que vérifie la probabilité de transition  $p(t, x) = p$ .

Cette équation est appelée équation de **Fokker-Planck** ou équation de Kolmogorov progressive [1] qui est sous la forme suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [\sigma(t, y)p]}{\partial^2 y} - \frac{\partial [b(y, t)p]}{\partial y} \quad (x, s) \text{ fixe} \quad (3.59)$$

Il existe une autre équation vérifiée par la densité de probabilité  $p$ , appelée équation de Kolmogorov rétrograde. Elle porte sur la variable  $x$  de départ :

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{2} \sigma(x, s) \frac{\partial^2 [p]}{\partial^2 x} + b(x, s) \frac{\partial [p]}{\partial x} \quad (t, y) \text{ fixe} \quad (3.60)$$

L'équation de Fokker-Planck suppose que le processus est markovien et que le bruit est un processus gaussien. Elle n'est donc pas valable pour tous les types de bruits.

**Exemple 3.3** On considère l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dX_t = a dt + b(X_t, t) dw_t \\ X_0 = 0 \end{cases} \quad (3.61)$$

La densité de probabilité de solution satisfait l'équation de Kolmogorov :

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 [p]}{\partial^2 x} - a \frac{\partial [p]}{\partial x}$$

La solution de cette équation aux dérivées partielle est :

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2 t}} \exp\left(-\frac{(x - at + x_0)^2}{2b^2 t}\right) \quad (3.62)$$

### 3.5.5 Processus de diffusion stationnaire

Un processus aléatoire de diffusion est dit stationnaire si sa densité de probabilité de transition  $\mathbb{P}(s, x; t, y)$ , vérifie l'équation suivante :

$$\pi(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(s, x; t, y) \pi(x) dx \quad (3.63)$$

Où  $\pi(x)$  est appelée distribution stationnaire du processus si il existe. Pour laquelle on a :

$$\frac{dp}{dt} = 0$$

Donc les équations de Kolmogorov devient :

$$\frac{\partial [b(y, t)p]}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [\sigma(t, y)p]}{\partial^2 y} = 0 \quad (x, s) \text{ fixe} \quad (3.64)$$

Et

$$b(x, s) \frac{\partial [p]}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma(x, s) \frac{\partial^2 [p]}{\partial^2 x} = 0 \quad (t, y) \text{ fixe} \quad (3.65)$$

**Exemple 3.4** On considère l'équation différentielle stochastique :

$$2(1 - X_t) dt + \sqrt{3X_t} dw_t \quad (3.66)$$

D'après l'équation ((3.64)), on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} (2(1-x)\pi(x)) - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} (3x\pi(x)) = 0 &\Leftrightarrow 2 \frac{d}{dx} ((1-x)\pi(x)) - \frac{3}{2} \frac{d^2}{dx^2} (x\pi(x)) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2(1-x)\pi(x) - \frac{3}{2} \frac{d}{dx} (x\pi(x)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{4}{3} (1-x)\pi(x) = (\pi(x) + x\pi'(x)) \\
&\Leftrightarrow \left( \frac{4}{3} (1-x) - 1 \right) \pi(x) = x\pi'(x) \\
&\Leftrightarrow \frac{\pi'(x)}{\pi(x)} = \frac{1}{x} \left( \frac{4}{3} (1-x) - 1 \right) \\
&\Leftrightarrow \ln |\pi(x)| = \frac{1}{3} \ln |x| - \frac{4}{3} x + C \\
&\Leftrightarrow \pi(x) = Kx^{\frac{1}{3}} \exp \left( -\frac{4}{3} x \right)
\end{aligned}$$

Posant  $K = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{4}{3})}$ , on trouve la distribution stationnaire  $\pi(x)$  suit une loi Gamma( $\frac{4}{3}, \frac{4}{3}$ )

### 3.5.6 Schémas numérique

Nous décrivons dans cette section des méthodes numériques pour résolution d'équations différentielles stochastiques.

Pour rapprocher numériquement l'équation :

$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dw_t \quad (3.67)$$

On utilise des schémas aux différences classiques et le fait que pour un pas  $\Delta t$  donnée, les variables  $w_{(n+1)\Delta t} - w_{n\Delta t}$  suivent des lois gaussiennes indépendantes de variance  $\Delta t$ .

On note  $x_t$  le processus approché et on considère la subdivision :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T \quad (3.68)$$

de pas régulier

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n \quad (3.69)$$

**Schéma d'Euler :** L'approximation  $\frac{dX_t}{dt} \simeq \frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\Delta t}$  est utilisé lorsque  $\Delta t$  est suffisamment petite.

Sur un intervalle élémentaire  $[t, t + \Delta t]$ , le processus approché  $x_t$  devient

$$x_{t+\Delta t} = x_t + b(x_t, t)\Delta t + \sigma(x_t, t)\Delta w_t \quad (3.70)$$

Pour écrire le schéma sous cette forme suivante, on pose  $x_n = x_{t_n} = x_{n\Delta t}$ . On a :

$$x_{n+1} = x_n + b(x_n)\Delta t + \sigma(x_n)\Delta w_n \quad (3.71)$$

**Schéma de Milstein :** Remplacement du processus  $X_t$  par une approximation  $x_{t_n}$ . Pour avoir :

$$x_{t_{n+1}} = x_{t_n} + b(x_{t_n}, t_n)\Delta t + \sigma(x_{t_n}, t_n)\Delta w_{t_n} + \frac{1}{2}\sigma(x_{t_n}, t_n)\sigma'(x_{t_n}, t_n)(\Delta w_{t_n}^2 - \Delta t) \quad (3.72)$$

Dans le cas où  $x_{t_n} = x_n$  Ainsi :

$$x_{n+1} = x_n + b(x_n)\Delta t + \sigma(x_n)\Delta w_n + \frac{1}{2}\sigma(x_n)\sigma'(x_n)(\Delta w_n^2 - \Delta t) \quad (3.73)$$

**Schéma de Heun :** En rappel que l'équation de Stratonovich :

$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t) \circ dw_t \quad (3.74)$$

est équivalente à l'équation d'Itô :

$$dX_t = \left( b(X_t, t) + \frac{1}{2}\sigma(X_t, t)\partial_x\sigma(X_t, t) \right) dt + \sigma(X_t, t)dw_t \quad (3.75)$$

Discrétisée selon le schéma de Heun s'écrit :

$$x_{t_{n+1}} = x_{t_n} + \frac{1}{2}(b(x_{t_n}, t_n) + b(y_{t_n}, t_n))\Delta t + \frac{1}{2}(\sigma(x_{t_n}, t_n) + \sigma(y_{t_n}, t_n))\Delta w_{t_n} \quad (3.76)$$

Avec

$$y_{t_n} = x_{t_n} + b(x_{t_n}, t_n)\Delta t + \sigma(x_{t_n}, t_n)\Delta w_{t_n} \quad (3.77)$$

Soit  $x_n$  est le processus approché, donc

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(b(x_n) + b(y_n))\Delta t + \frac{1}{2}(\sigma(x_n) + \sigma(y_n))\Delta w_n \\ y_n = x_n + b(x_n)\Delta t + \sigma(x_n)\Delta w_n \end{cases} \quad (3.78)$$

Le schéma Heun converge en moyenne quadratique. Ce schéma d'ordre  $O(\Delta t^2)$ .

## 3.6 Conclusion

Nous avons donné, dans ce chapitre, les définitions et les propriétés essentielles de calcul différentielle et l'intégrale stochastique, ensuite nous avons présenté les processus de diffusion, et nous avons terminé ce chapitre par les principales propriétés des équations différentielles stochastiques.

**Deuxième partie**

**Modélisation des Risques de  
Dégradation Structurelle**

# Chapitre 4

## Généralité sur Processus de Dégradation

### Sommaire

---

<b>4.1 Introduction</b>	<b>46</b>
<b>4.2 Définitions générales</b>	<b>47</b>
<b>4.3 Complexité des phénomènes physiques de dégradation</b>	<b>47</b>
<b>4.4 Caractéristiques des processus de dégradation</b>	<b>48</b>
<b>4.5 Quelques modèles stochastiques existantes</b>	<b>48</b>
<b>4.6 Conclusion</b>	<b>52</b>

---

### 4.1 Introduction

La problématique de la fatigue des structures est issue de la révolution industrielle du XIXe siècle. Plus précisément un certain nombre de graves accidents(ferrovières pour la plupart) ont incité les ingénieurs à se pencher sur le sujet. La rupture brutale d'éléments mécaniques soumis à des charges cycliques, tels que les essieux sur le matériel roulant par exemple, a été un sujet d'étude de Rankine en Angleterre dès 1843 ou Andrean en Allemagne dès 1847.

Nous introduisons dans ce chapitre des généralités du processus de dégradation, ces complexités et ces caractéristiques de ce phénomène. Ensuite, nous indiquons des principes de quelques familles de modèles déterministes et stochastiques utilisées pour la modélisation de la dégradation des structures.

## 4.2 Définitions générales

La fatigue est un processus de dégradation des matériaux, la plupart des métaux, dans les composants et les structures soumises à temps variable des conditions de chargement externe.

La fatigue a fait l'objet de nombreuses recherches menées par des ingénieurs en mécanique, science des matériaux, physiciens, chimistes et mathématiciens depuis plus de 150 ans.

Une fissure se développe en générale à partir d'anomalies ayant une profondeur de l'ordre de quelques dixièmes de millimètre

Les structures soumises à des sollicitations variables répétées sont sensibles au phénomène de fatigue. Ce phénomène se manifeste par la propagation de fissure et se traduit par une perte de résistance au cours du temps.

L'évolution d'une fissure dépend de plusieurs paramètres intrinsèques au matériel, tel que les propriétés géométriques et mécaniques de la structure, ou extrinsèques comme l'étendue de cette fissure ou la nature des charges appliquées.

La propagation de la fissure peut amener à une rupture par plastification de la section nette ou par rupture fragile, ce ci en fonction notamment des caractéristique du matériel, de la géométrie de l'élément, de la température et de la vitesse de sollicitation de la section.

En mécanique des structures, le mécanisme majeur menant au vieillissement en fatigue des matériaux est la propagation de petit défauts en fissure dans les structures soumises à des cycles de charge au cours de la durée de vie de fonctionnement.

## 4.3 Complexité des phénomènes physiques de dégradation

Les composants mécaniques sont caractérisés par de multiples mécanismes de dégradation souvent complexes, d'origines variées (fissuration, fluage, usure, fissuration par fatigue, etc.).

Ces modes de dégradation font intervenir les paramètres suivants :

- Caractéristiques matériaux (limite élastique, limite à la rupture, limite d'endurance, limite de fatigue, ténacité, dureté, ...),
- Caractéristiques dimensionnelles (géométrie, ...),
- Sollicitations extérieures (température, chargement, pression, ...).
- Forte interaction entre le composant et son environnement, etc.

Le développement de modèles de dégradation fournit une information qui correspond à une meilleure appréhension des systèmes étudiés. En particulier :



- La description des phénomènes physiques réels par des modèles mathématiques permettant d'améliorer la compréhension ;
- Les modèles permettant de développer des méthodes d'estimation de la fiabilité des structures ;
- L'anticipation de l'évolution de la durée de vie, et élaboration d'une politique de maintenance à de moindre coût.

La qualité intrinsèquement dynamique des mécanismes de dégradation et d'usure implique l'utilisation d'outils mathématiques permettant une bonne représentation de leur évolution temporelle.

La fiabilité des structures permet de réévaluer les modèles qui permettent de faciliter l'évolution des connaissances de ce phénomène de dégradation. De plus, dans les champs d'applications industrielles où les structures fonctionnent dans un environnement extrême, les difficultés suivantes viennent s'ajouter :

- Les mécanismes physiques conduisant à la dégradation des structures et à la baisse de la fiabilité ont des origines et des échelles de temps physiques très différentes d'un mode de dégradation à un autre,
- Les dépendances entre les phénomènes de dégradation sont nombreuses et pas toujours bien connues,
- Les structures sont des systèmes complexes car elles sont constituées d'un grand nombre de composants aux interactions multiples.

## 4.4 Caractéristiques des processus de dégradation

Physiquement, la description d'un processus de dégradation implique les conséquences suivantes :

- Le processus de dégradation  $L_t$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  ;
- Le niveau de dégradation évolue de manière monotone croissante dans le temps ;
- Le domaine de défaillance se limite à un seuil critique à ne pas dépasser, c'est-à-dire à un réel noté  $\Delta$  ;

Les trajectoires du niveau de dégradation sont les seules données observables. Elles sont mesurées du début jusqu'au niveau de dégradation atteignant le seuil de défaillance  $\Delta$ .

Ces caractéristiques sont différentes selon le type de phénomène décrit, et motivés par la nature du mécanisme de dégradation relative à l'étude des modèles de dégradation de structure.

La défaillance est définie par une taille maximale de fissure acceptable.

## 4.5 Quelques modèles stochastiques existantes

Il existe plusieurs approches possibles pour modéliser la dégradation d'une structure dont deux grandes familles de modèles peuvent être distinguées :

- Modèle déterministe

– Modèles stochastiques

### 4.5.1 Modèle Déterministe

Le phénomène de propagation des fissures en fatigue est scindé en trois phases :

K1 : cycles nécessaires à l'initialisation des défauts.

K2 : cycles de charge au cours desquels est observé la propagation assez régulière des fissures.

K3 : La propagation s'accélère brutalement et devient très instable, jusqu'à une taille où l'on considère que la rupture est inévitable.

Les modèles classiques de propagation de fissure par fatigue donnent l'évolution de la vitesse de propagation en fonction du chargement appliqué en pointe de fissure par une approche empirique. Le modèle le plus utilisé est celui de [Paris et Erdogan 1963]. Pour ce modèle un essai de fissuration est nécessaire pour caractériser l'évolution de la vitesse de propagation en fonction de la variation du facteur d'intensité des contraintes (Figure 4.1).

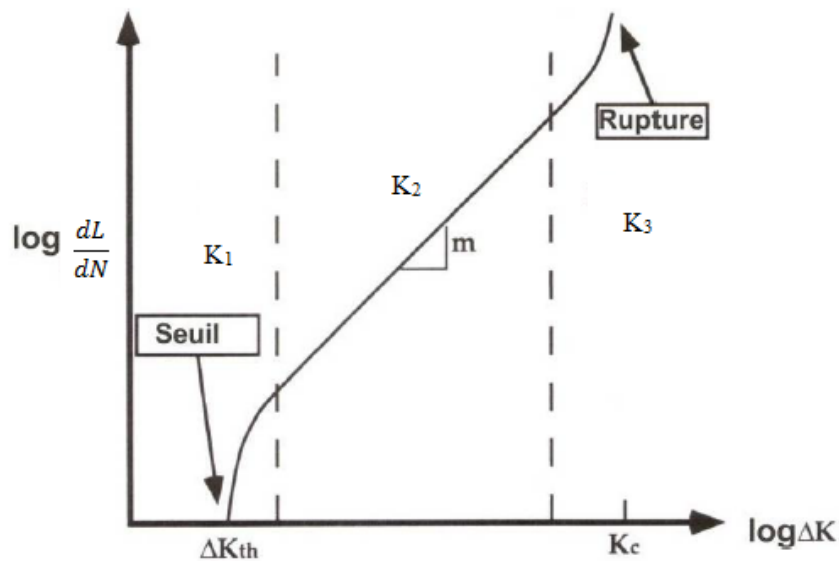


FIGURE 4.1 – Courbe de propagation de Paris.

La longueur de fissure ( $L$ ) est modélisé par la loi déterministe qui s'écrit sous la forme du (**Le modèle de Paris**)[24] :

$$\frac{dL}{dN} = \gamma(\Delta K)^p \quad (4.1)$$

$N$  le nombre de cycles, et  $\Delta K$  étant la variation du facteur d'intensité des contraintes au cours d'un cycle qui induit une avancée  $dL$  de la fissure définie par :

$$\Delta K = \sqrt{\pi L} \Delta S \quad (4.2)$$

Où  $\Delta S$  est le facteur d'intensité des contraintes.

$\gamma$  et  $p$  sont deux paramètres du matériau définissant respectivement la position et la pente de la droite de Paris.

## 4.5.2 Modèles Stochastiques

En mécanique de la rupture, la propagation des fissures est modélisée par des lois expérimentales dont la forme générale est la suivante :

$$dL_t = L(t, \Delta k, k_{max}, k_c, \sigma_{max}, R, L_t) \quad (4.3)$$

$L_t$  : est une fonction déterministe à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  décrivant la taille de la fissure à l'instant  $t$ .

$\Delta K$  : est la variation du facteur d'intensité des contraintes.

$K_{max}$  : La valeur maximum du facteur d'intensité des contraintes.

$k_c$  : est la ténacité

$\sigma_{max}$  : L'amplitude maximale des contraintes.

$R$  : Ratio des contraintes.

Plusieurs processus stochastiques ont été proposés dans la littérature pour la modélisation de la dégradation des structures.

### 4.5.2.1 Processus de saut cumulatif

Bagdanoff et Kozin (1985) puis Kirkner et al. (1999)[22] ont proposé de modéliser la taille de la fissure  $L_t$  par un Processus aléatoire de saut cumulatif construit à partir de chaînes de Markov.

Soit  $L(t, \gamma)$  la taille de fissure à l'instant  $t$  où  $\gamma$  est l'événement élémentaire appartenant à l'espace  $\Omega$  pour tout  $\gamma \in \Omega$ ,  $L(t, \gamma)$  est représentée comme une somme d'incrément aléatoire :

$$\begin{cases} L(t, \gamma) = L(0, \gamma) + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i(\gamma) \\ Y_i(\gamma) = \Delta A_i \end{cases} \quad (4.4)$$

Avec  $L(0, \gamma)$  comme taille de fissure initiale, suffisante pour propager (supposés connus à partir des données empiriques), elle peut être considérée comme une constante ou déterministe d'une variable aléatoire.  $Y_i(\gamma); i = 1 \dots N(t)$  sont des variables aléatoire caractérisant les amplitudes des incréments élémentaire de taille de fissure, et  $N(t)$  un processus de comptage caractérisant le nombre de saut de fissure (par incrément) dans l'intervalle  $[0, t]$ .

Le modèle de processus donné par l'équation (4.4) représente un schéma général probabiliste pour la croissance des fissures au hasard.

Soit la variable aléatoire  $\Theta$  est la durée de vie d'un échantillon soumis aux chocs comptés par le processus de poisson  $N_t$ . Si  $P_k(\xi)$  est la probabilité de survie des  $k$  premiers

sauts de fissure,  $k = 1, 2, \dots$  (la probabilité de quantité de dommage mesurées par  $L(t)$  après les chocs est inférieur ou égale à  $\xi$ ) alors la distribution de la durée de vie est :

$$P(\Theta > t) = \bar{F}_\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\xi) \exp(-\lambda t) \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (4.5)$$

$\lambda$  est le paramètre de processus de poisson, il est claire que :

$$P_k(\xi) = \int_0^\xi P_{k-1}(x) g(\xi - x) dx \quad P_0(\xi) = 1 \quad (4.6)$$

et  $g(x)$  est la densité de la quantité d'incrément élémentaires caractérisé par un variable aléatoire  $Y$ . donc la densité de probabilité du temps pour attendre une valeur critique  $\xi$  est :

$$f_\xi(t) = \lambda \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} (P_k(\xi) - P_{k+1}(\xi)) \quad (4.7)$$

Si la taille de l'incrément élémentaire suit une loi exponentielle, qui est  $g(x) = \beta \exp(-\beta x)$ ,  $x > 0$ . Alors

$$f_\xi(t) = \lambda \exp(-(\lambda t + \beta \xi)) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \frac{(\beta \xi)^k}{k!} \quad (4.8)$$

Ce qui donne la moyenne et la variance de l'instant de premier passage :

$$m(\Theta) = \frac{1}{\lambda} (1 + \beta \xi) \quad var(\Theta) = \frac{1}{\lambda^2} (1 + 2\beta \xi) \quad (4.9)$$

#### 4.5.2.2 Approximation log normale

La loi Paris- Endogan ci-dessous a été utilisée par Yang et al.(1987)[25], Yang et Manning(1990,1996) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \gamma (\Delta K)^p \times X_t \\ &= \gamma \Delta \sigma^n \pi^{\frac{n}{2}} L_t^{\frac{n}{2}} \times X_t \\ &= a (L_t^p) \times X_t \end{aligned}$$

Où  $p = n/2$  et  $a = \gamma \Delta \sigma^n \pi^{\frac{n}{2}}$  sont deux constantes réelles positives.

En s'appuyant sur des études expérimentales, les auteurs proposent de modéliser  $X_t$  par un processus **log normal** de médiane égale à 1 et de covariance :

$$cov(X_t, X_s) = \sigma_X^2 \exp\left(-\frac{|t-s|}{\lambda}\right) \quad (4.10)$$

Avec  $\lambda, \sigma_X^2$  à estimer sur les données expérimentales.

### 4.5.2.3 Processus de Markov déterministes par marceaux

L'accroissance de  $L_t$  est gouverné par le système différentiel stochastique suivant :

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = a(L_t)^p \times v(X_t) \\ L_0 = l \end{cases} \quad (4.11)$$

Le processus  $X_t$  est markovien de saut d'espace d'état fini  $\mathbb{E}$ , dont  $a$  est une constante strictement positive et  $v$  est une application qui associé à chaque élément de  $\mathbb{E}$  un élément de  $\mathbb{R}^n$ , permettant d'exercer un certain contrôle sur le processus  $X_t$ . Le point initial  $l$  est strictement positif. Les trajectoires des processus de saut sont constantes entre les sauts et continues à droite.

Ce modèle correspond à la réalité physique suivante : le niveau de dégradation  $L_t$  croît selon des trajectoires continues. Cependant la dynamique du processus varie à des instants discrets du temps suite à des chocs d'intensités aléatoires où à des variations des conditions environnementales, ce qui rend compte le processus markovien de saut  $X_t$ . Celui-ci décrit les variations de l'environnement du système, et on peut parler pour (4.11) d'*équation différentielle à environnement markovien*.

Par exemple, lorsque  $L_t$  représente la taille d'une fissure qui se propage dans un matériau au cours du temps, le processus  $X_t$  permet de modéliser des variations brutales dans la vitesse de propagation, dont l'occurrence et l'intensité sont aléatoires. On peut expliquer ces variations par des phénomènes de micro-ruptures instantanées à un niveau moléculaire dans le matériau dues à une structure non homogène, ou encore à des changements de conditions environnementales.

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné les définitions et les caractéristiques essentielles de la dégradation structurelle.

Puis nous avons présenté quelques familles des modèles stochastiques utilisées pour la modélisation de ce phénomène. Parmi ces modèles, il existe un modèle qui traite la dégradation des structures par des équations différentielles stochastiques associé aux processus de diffusion, où la composante aléatoire est modélisée par le Mouvement Brownien. Ce modèle est présenté en détail dans le chapitre suivant.

# Chapitre 5

## Modélisation stochastique de risque de dégradation par processus de diffusion

### Sommaire

---

5.1	Introduction . . . . .	53
5.2	Modèle de diffusion pour la propagation des fissures . . . . .	54
5.3	Étude de l'équation (5.1) dans le cas de $p = 1$ . . . . .	54
5.4	Étude de l'équation (5.1) dans le cas de $p > 1$ . . . . .	66
5.5	Influence de la variabilité des paramètres du modèle de dégradation (5.1) . . . . .	73
5.6	Étude de la Fiabilité du Système . . . . .	77
5.7	Conclusion . . . . .	80

---

### 5.1 Introduction

L'évolution temporelle de taille de dégradation est décrite par des processus stochastique, non seulement pour traduire l'incertitude sur la physique des phénomènes, mais aussi parce que certains mécanismes de dégradation ont une nature aléatoire intrinsèque.

Nous présentons en détail un modèle de dégradation qui s'appuie sur l'approximation asymptotique de processus de diffusion, de manière à construire les trajectoires du processus  $L_t$  solution du système différentielle.

Puis, nous décrivons des spécificités liées au contexte applicatif et au calcul de fiabilité : le niveau de dégradation d'une structure est observé depuis un état initial jusqu'à un seuil définissant la défaillance.

## 5.2 Modèle de diffusion pour la propagation des fissures

Sobczyk(1986) [20, 6, 19] a proposé un modèle de dégradation qui s'appuie sur l'approximation asymptotique de processus de taille de fissure  $L_t$  à diffusion, gouvernée par une équation différentielle stochastique, interprétée au sens de Stratonovich de la manière suivante :

Pour  $p > 0$  ;  $t \geq 0$  :

$$dL_t = mf(L_t)^p dt + f(L_t)^p \circ dw_t \quad (5.1)$$

où  $(w_t)_{t \geq 0}$  est le mouvement brownien standard,  $f = mcg(R)S^{2p} = constant$  et  $S$  : Facteur d'intensité de contraintes de fissuration, telle que définie :

$$S = \frac{1}{2}(S_{max} - S_{min}) ;$$

$m$  : la moyenne des influences extérieures comme la température ;

$g(R)$  : fonction de ratio des contraintes,  $R = \frac{S_{min}}{S_{max}}$  ;

et  $c, p$  sont des paramètres du matériaux ( $c$  et  $p$  sont supposés constants pour un matériel donné).

Lorsque  $p = 1$  l'équation (5.1) est linéaire et ses solutions existent pour tout  $t \geq 0$ . Si  $p > 1$ , l'équation (5.1) est une équation différentielle stochastique non linéaire et les résultats de cette équation sont définis pour un temps infini.

L'équation (5.1) interprétée comme l'équation différentielle de Stratonovich, qui est équivalent à l'équation différentielle stochastique d'Itô, (EDS), suivante :

$$dL_t = (mf(L_t)^p + \frac{p}{2}f^2(L_t)^{2p-1})dt + f(L_t)^p dw_t \quad (5.2)$$

## 5.3 Étude de l'équation (5.1) dans le cas de $p = 1$

Dans le cas de  $p = 1$ , l'équation (5.1) est linéaire, signifiant que la relation entre les charges appliquées et le taux de croissance des fissures sont presque linéaires. Physiquement, c'est le cas d'une fissure courte d'un matériel plastique, définie par la relation :

$$dL_t = mfL_t dt + fL_t \circ dw_t \quad (5.3)$$

qui est équivalente à l'équation différentielle stochastique d'Itô suivante :

$$dL_t = \left( mf + \frac{1}{2}f^2 \right) L_t dt + fL_t dw_t \quad (5.4)$$

### 5.3.1 Etude de l'existence et l'unicité de solution de l'équation (5.3)

L'équation (5.3) à une solution unique si elle satisfait les conditions suivantes (définition 3.6) :

$$b(x,t) = mfx \text{ et } \sigma(x,t) = fx$$

– **Condition de Lipchitz :**

$$\begin{aligned} |b(x,t) - b(y,t)| + |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| &= |mfx - mfy| + |fx - fy| \\ &= |mf||x - y| + |f||x - y| \\ &= |mf - f||x - y| = K|x - y| \end{aligned}$$

– **Borne à accroissement linéaire :**

$$\begin{aligned} |b(x,t)|^2 - |\sigma(x,t)|^2 &= |mfx|^2 + |fx|^2 \\ &= (m^2f^2 + f^2)x^2 \end{aligned}$$

$$\text{On a : } |x| \leq \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ x^2 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases} \leq \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 1 + x^2 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Alors :

$$|b(x,t)|^2 - |\sigma(x,t)|^2 \leq \text{Max}(m^2f^2 + f^2)(1 + x^2)$$

$$\text{Si : } K = \text{Max}(m^2f^2 + f^2)$$

$$\text{Donc : } |b(x,t)|^2 - |\sigma(x,t)|^2 \leq K(1 + x^2)$$

Il est donc facile de vérifier que l'équation (5.3) satisfait les conditions d'existence et d'unicité d'une solution.

### 5.3.2 La solution associée à la condition initial $L_0 > 0$

En posant  $\tilde{L}(t) = \log L(t)$  et en appliquant la formule d'Itô à la fonction  $\tilde{L}(t)$  :

$$d \ln(L_t) = \left[ 0 + \left( mf + \frac{1}{2}f^2 \right) L_t \frac{1}{L_t} + \frac{1}{2} L_t^2 \frac{-1}{L_t^2} \right] dt + \left[ f L_t \frac{1}{L_t} \right] dw_t$$

L'équation différentielle stochastique est obtenus comme suit :

$$d \ln(L_t) = mfdt + fdw_t \tag{5.5}$$

Ce qui résulte que  $\tilde{L}_t = \ln L_t$  est le processus de taux d'accroissement de fissure, de drift  $mf$  et de diffusion  $f^2$  ; donné sous la forme intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \ln(L_t) &= \ln(L_0) + mf \int_0^t ds + f \int_0^t dw_s \\ &= \ln(L_0) + mft + fw_t \end{aligned}$$



D'où la solution de l'équation(5.3) pour  $t \geq 0$  et  $L_0 > 0$  est la suivante :

$$L_t = L_0 \exp(mft + fw_t) \quad (5.6)$$

La solution (5.6) est un processus de diffusion de Markov, formulée par l'équation de Fokker-Planck régissant la densité de transition  $p = p(t, L, t', L')$  de  $L_t$ , où  $L'$  étant l'état initial du processus (5.3) :

$$\frac{\partial p}{\partial t'} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [f^2 L'^2 p]}{\partial L'^2} - \frac{\partial \left[ \left( mf + \frac{1}{2} f^2 \right) L' p \right]}{\partial L'} \quad (t, L) \text{ fixe} \quad (5.7)$$

Sous l'hypothèse de la taille de fissure de fatigue  $L_t$ , considérée comme processus de diffusion, la solution de l'équation (5.7) est donné par [23] :

$$p(t, L, t', L') = \frac{1}{fL' \sqrt{2\pi(t-t')}} \exp \left[ \frac{\left[ -\log \left( \frac{L}{L'} \right) - mf(t-t') \right]^2}{2f^2(t-t')} \right] \quad (5.8)$$

$L_t$  suit une loi Log-Normale, dont la fonction de répartition est donnée par :

$$F(L_t) = \Phi \left( \frac{\left[ -\log \left( \frac{L}{L'} \right) - mf(t-t') \right]}{\sqrt{2f^2(t-t')}} \right), \quad (5.9)$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi Normale.

### 5.3.2.1 Simulation

Pour simuler une seule trajectoire du processus de dégradation, on utilise la solution (5.6) sur un intervalle de temps  $[t_0, T]$  avec un pas  $\Delta t = \frac{T-t_0}{N}$ . Cette trajectoire est présentée dans la figure (5.1) (en utilisant le package **Sim.DiffProc**[2]). Un flux de 100 trajectoires de la solution (5.6) est illustré par la figure (5.2).

**Programme 5.1** # Génère N valeur de l'équation(5,6) avec m, f>0 connus, et longueur de fissuration initiale l  
# input:n,f,m,l outputs: série générée et graphique  
R> t.step<-T/N # N size of process  
R> Lt<-rep(0,T/t.step+1) # time step  
R> time<-seq(from=0,T, by=t.step)  
R> for(t in 1:N+1){  
w <-runif(t) # uniform distribution  
Lt <-l\*exp(t\*mf+f\*w)  
table <-data.frame(time,Lt)

```

    }
# Représentation graphique
R> plot(seq(from=0,T,by=t.step),Lt,type='s',xlab='time',ylab='Lt',col='blu')

```

Dans notre exemple, on pose  $mf = 0,0065$ ,  $f = 0,00182$  et  $l_0 = 9mm$

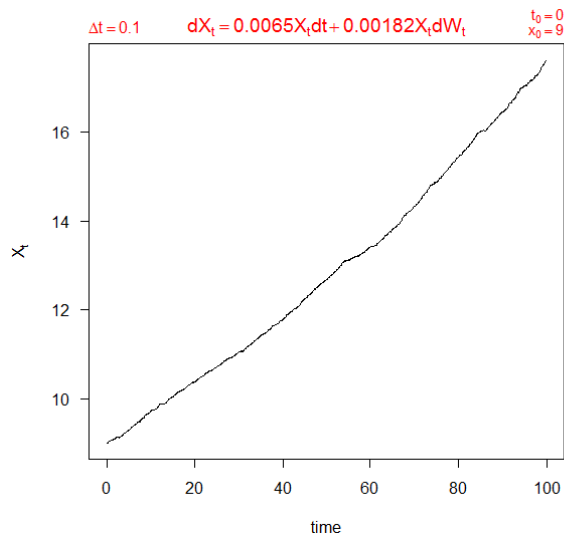


FIGURE 5.1 – Trajectoire de propagation de fissure simulée pour  $p = 1$ .

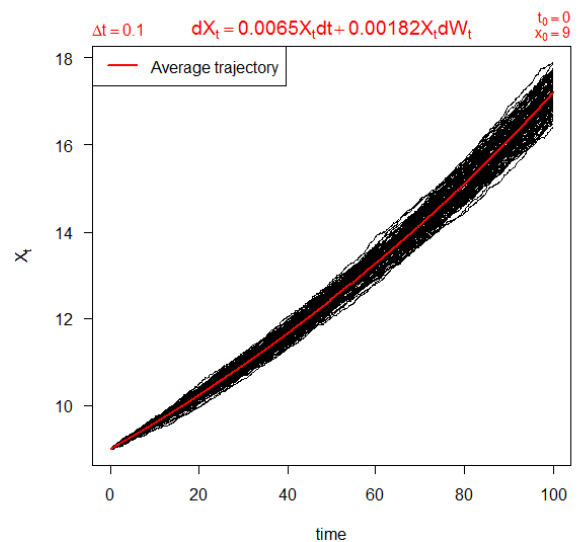


FIGURE 5.2 – Flux de trajectoires de propagation de fissure simulées pour  $p = 1$ .

Les résultats obtenus montrent que le processus de dégradation  $L_t$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  et la taille de dégradation évolue de manière monotone croissante dans le temps, ce qui justifie le caractère de dégradation physique de la structure.

### 5.3.3 Estimation des paramètres

Soit  $L_t$  satisfait l'équation différentielle stochastique :

$$L_t = L_0 \exp(mft + fw_t) \quad (5.10)$$

qui est une solution de :

$$dL_t = mfL_t dt + fL_t \circ dw_t \quad (5.11)$$

Le modèle contient deux paramètres inconnus :  $\mu = mf$  et  $\sigma = f$  à estimer.

Nous présentons maintenant technique d'estimation sur la base de la fonction du vraisemblance. Cette méthode consiste à estimer les paramètres  $\mu = mf$  et  $\sigma^2 = f^2$  du processus de diffusion  $L_t$ , par construction de la fonction de vraisemblance à partir de la densité de transition.

### 5.3.3.1 Principe du Maximum de Vraisemblance

Soit  $L_1, \dots, L_n$  des observations dont la loi jointe possède une densité  $f(\cdot, \theta)$ , où les paramètres  $\theta$  appartiennent à un ensemble  $\Omega \in \mathbb{R}^k$ . La fonction de vraisemblance  $\mathbb{L}(\theta)$  est définie par :

$$\mathbb{L}(\theta) = f(l_1, \dots, l_n, \theta)$$

La méthode de maximum de vraisemblance (MVS) est utilisée pour l'estimation de  $\theta$ , la valeur  $\hat{\theta}$  maximise la fonction de vraisemblance  $\mathbb{L}$ , c'est-à-dire :

$$\hat{\theta} = \arg_{\tilde{\theta} \in \Omega} \max \mathbb{L}(\tilde{\theta}),$$

où dans le cas échéant,  $\Omega$  définit les contraintes que  $\tilde{\theta}$  doit respecter.

**Remarque 5.1** Comme la fonction de vraisemblance peut s'exprimer sous forme de produit, il est souvent plus facile de maximiser la Log-vraisemblance (logarithme de la fonction de vraisemblance).

On a :

$$\hat{\theta} = \arg_{\tilde{\theta} \in \Omega} \max \ln \mathbb{L}(\tilde{\theta})$$

De façon équivalente, on peut minimiser  $-\ln(\mathbb{L})$ , dans ce cas :

$$\hat{\theta} = \arg_{\tilde{\theta} \in \Omega} \min \left( -\ln \mathbb{L}(\tilde{\theta}) \right)$$

Si  $\hat{\theta}$  est à l'intérieur de  $\Omega$ , pour cela, pour  $1 \leq i \leq k$ ,

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \mathbb{L}(\theta) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0,$$

Ou bien

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln(\mathbb{L}(\theta)) \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0.$$

### 5.3.3.2 Estimation des paramètres de modèle de Dégradation

On applique la méthode du Maximum de Vraisemblance pour estimer les paramètres du modèle (5.6).

Soit  $L(0) = l_0, L(h) = l_1, \dots, L(nh) = l_n$ .

d'où l'apparition de l'accroissement des fissures  $x_j = -\log \frac{l_j}{l_{j-1}}$ .

Comme la taille de la fissure de dégradation suit une loi Log-normale, la fonction de vraisemblance est représentée comme suit :

$$\mathbb{L}(\mu, \sigma) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sigma l_{j-1} \sqrt{2\pi h}} \exp \left[ \frac{\left[ -\log \left( \frac{l_j}{l_{j-1}} \right) - \mu h \right]^2}{2\sigma^2 h} \right] \quad (5.12)$$

qu'on cherche à maximiser cette fonction, pour  $\mu = mf \in \mathbb{R}$  et  $\sigma = f > 0$ , , ce qui revient à minimiser  $g(\mu, \sigma) = -\ln(\mathbb{L}(\mu, \sigma))$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} g(\mu, \sigma) &= -\ln(\mathbb{L}(\mu, \sigma)) \\ &= \frac{n}{2} \ln(2\Pi h) + n \ln(\sigma) + \frac{1}{2\sigma^2 h} \sum_{j=1}^n \left( -\log\left(\frac{l_j}{l_{j-1}}\right) - h\mu \right)^2 \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\frac{\partial}{\partial \mu} g = \frac{n}{\sigma^2} \left( \mu h - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( -\log \frac{l_j}{l_{j-1}} \right) \right) \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} g = \frac{n}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^3 h} \sum_{j=1}^n \left( -\log \frac{l_j}{l_{j-1}} - h\mu \right)^2 \quad (5.14)$$

Les deux dérivées sont nulles pour  $\hat{\mu}$  et  $\hat{\sigma}$  et où :

$$\hat{\mu} = \hat{m} \hat{f} = \frac{\bar{x}}{h} \quad (5.15)$$

$$et \hat{\sigma} = \hat{f} = \sqrt{\frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (5.16)$$

Donc

$$\hat{m} = \frac{\bar{x}}{\sqrt{h} s_x} \quad (5.17)$$

$$\hat{f} = \sqrt{\frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{s_x}{\sqrt{h}} \quad (5.18)$$

En pratique, on utilise  $\frac{1}{(n-1)h} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  pour estimer  $f^2$ , car cet estimateur est très proche de  $\frac{s_x}{\sqrt{h}}$ , et sans biais.

### Simulation numérique de la distribution du modèle (5.6)

On Simule un flux de M trajectoires pour un temps  $t$  donnée. On obtient donc un échantillon de  $M$  observations à un temps  $t = v$ .

On effectue une analyse statistique de  $L_v$ , et un ajustement de distribution de la variable aléatoire  $L_v$ , en utilisant deux méthodes à savoir la méthode de l'histogramme et celle du noyau.

Le package **Sim.DiffProc** plus précisément la fonction **AnaSimX** permet de simuler numériquement un échantillon  $L_v$  de taille  $M = 50$  à partir de l'équation différentielle stochastique (5.4).

```
R> f <- expression( 0.0065*x )
R> g <- expression( 0.00182*x )
R> AnaSimX(N = 1000, M = 50, t0 = 0, Dt = 0.1, X0 = 9, v = 80,
+ drift = f, diff = g)
```

On obtient les résultats ci-après :

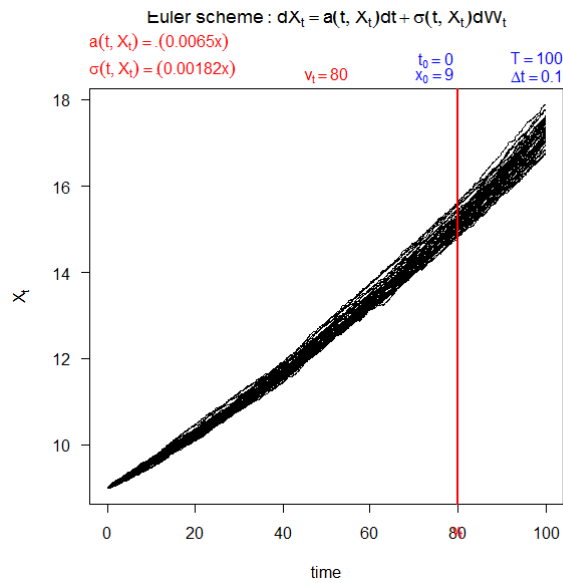


FIGURE 5.3 – Simulation d'un échantillon de taille 50 à partir du modèle de dégradation.

**Statistique descriptive :**

Min.	1st Qu.	Variance	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
14.68	15.00	0.057	15.16	15.14	15.27	15.82

TABLE 5.1 – Statistique descriptive.

### Estimation des paramètres

Cette estimation est obtenue par la méthode de maximum de vraisemblance, avec intervalle de confiance pour  $\alpha = 0,95$ .

	Estimateur	Std.Error
meanlog (moyenne)	2.71723849	0.002241636
sdlog (écart-type)	0.01569145	0.001563943

TABLE 5.2 – Estimation des paramètres.

### L'ajustement de la distribution de l'échantillon $L_V$

Pour ajuster la distribution de l'échantillon  $L_V$ , on utilise deux méthodes, la méthode de l'histogramme et la méthode du noyau.

```
R> hist_general(Data = X, Breaks = 'Sturges', Law = "Normlog")
R> Kern_general(Data = X, bw='Bcv', k = "gaussian", Law = "Normlog")
```

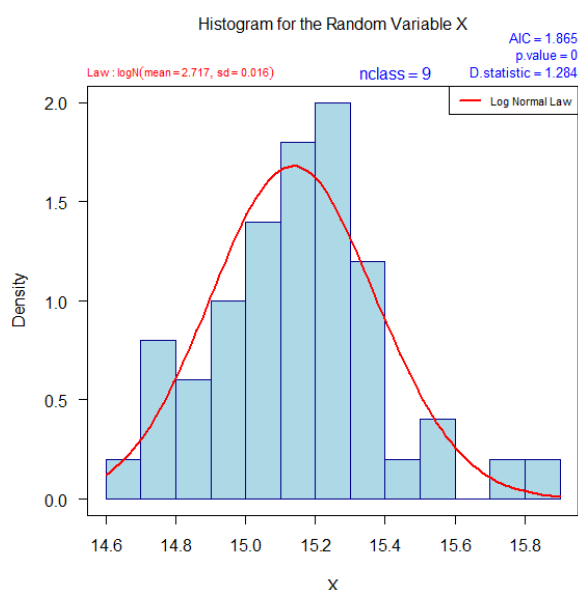


FIGURE 5.4 – Ajustement de la distribution du modèle de dégradation par la méthode d'histogramme.

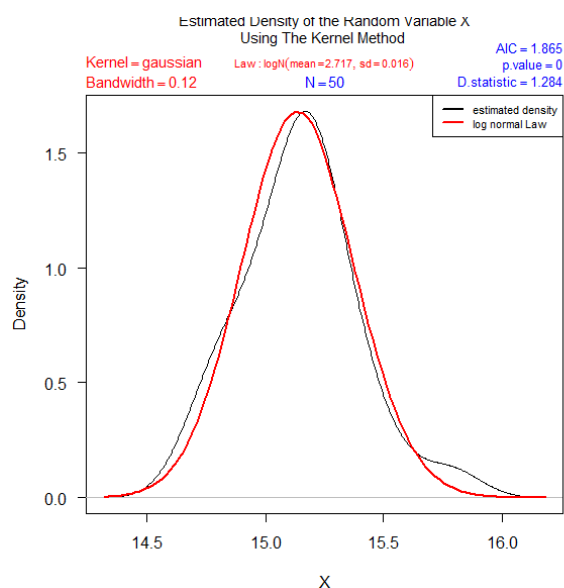


FIGURE 5.5 – Ajustement de la distribution du modèle de dégradation par la méthode du noyau.

D'autre part, le test de Kolmogorov-Smirnov (K. S) donne un niveau de significativité proche de 90% ( $D = 0.0847$ ,  $p\text{-value} = 0.8359$ ) d'accepter la loi log-normal comme distribution de probabilité de la variable aléatoire  $L_V$ .

Donc Les deux méthodes montrent que la loi Log-Normale ajuste la distribution de  $L_V$ . Le test de Kolmogorov-Smirnov confirme ce résultat.

### 5.3.4 L'instant de Premier Passage

Les instants de premier passage jouent un rôle très important en pratique. L'objectif de cette étude est de déterminer la densité de probabilité de la variable  $T$  : l'instant de premier passage d'un processus de dégradation (diffusion) $L_t$ .

Les modèles de l'instant de premier passage se basent essentiellement sur :

- Une fonction de dégradation stochastique  $L_t$  qui représente l'évolution d'une taille de fissure au cours du temps ;
- Un seuil  $c$  à partir duquel la dégradation est considérée comme étant critique.

A partir de ces deux critères, le premier instant d'atteinte  $T_c$  du seuil de dégradation critique est :

$$T_c = \inf \{t \geq 0, L_t \in \delta\Delta, L_t = c\} \quad (5.19)$$

$\{L_t, t \geq 0\}$  un processus de diffusion solution de l'équation différentielle stochastique (5.3),  $\Delta$  une partie de  $\mathbb{R}$  supposé ouvert et bornée et  $c$  un élément de  $\Delta$ .

L'équation (5.3) est utilisée pour déterminer explicitement la loi de probabilité  $T_c$ . La probabilité de transition  $P(c/a)$  représente la densité de  $L_t$  avec  $L_0 = a$ , , qui est solution de l'équation (5.7). Ce qui donne :

$$p(c, t_c/a, t_0) = \frac{1}{fc\sqrt{2\pi}(t_c - t_0)} \exp \left[ \frac{\left[ -\log\left(\frac{c}{a}\right) - mf(t_c - t_0) \right]^2}{2f^2(t_c - t_0)} \right] \quad (5.20)$$

Où la variable aléatoire  $T_c$  est définie par :

$$T_c = \inf \{t \geq 0, L_t \leq c, L_0 = a\} \quad (5.21)$$

Pour des petites valeurs de  $c$  :

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T_c > t) \\ &= P(L_t \leq c) \\ &= 1 - F_{T_c}(t) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(T_c \leq t) &= 1 - P(L_t \leq c) \\ &= 1 - \Phi \left( \frac{\left[ -\log\left(\frac{c}{a}\right) - mft \right]^2}{2f^2 t} \right) \end{aligned}$$

La distribution de probabilité de premier l'instant de passage est Gaussienne Inverse, et représentée par la fonction de densité suivante :

$$f_{T_c}(t) = \frac{\log\left(\frac{c}{a}\right)}{f\sqrt{2\pi}t^{\frac{3}{2}}} \exp \left( -\frac{\left[ -\log\left(\frac{c}{a}\right) - mft \right]^2}{2f^2 t} \right) \quad (5.22)$$

L'espérance et la variance de  $T$  sont données par les formules ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(T) = \frac{\log\left(\frac{c}{a}\right)}{\left(mf - \frac{1}{2}f^2\right)} \\ var(T) = \frac{f^2 \log\left(\frac{c}{a}\right)}{\left(mf - \frac{1}{2}f^2\right)^3} \end{array} \right.$$

En pratique, il est connu que la loi de la durée de vie d'une structure, dont le comportement réel est observé par des données, suit approximativement l'une de ces lois : Exponentielle, Lognormale ou Weibull.

Cependant la durée de vie résiduelle moyenne (mean residual life) s'obtient comme suit :

$$\begin{aligned} MRL(t) &= E(T_c - t / T_c > t) \\ &= \int_t^\infty (y - t) d\mathbb{P}(T_c \leq y / T_c > t) \\ &= \int_t^\infty (y - t) d\left(\frac{R(t) - R(y)}{R(t)}\right) \\ &= \int_t^\infty (y - t) d\left(\frac{-R'(y)dy}{R(t)}\right) \\ &= \frac{-(y - t)R(y)|_t^\infty + \int_t^\infty R(t)dy}{R(t)} \end{aligned}$$

Ce qui montre que  $yR(t) \rightarrow 0$  quand  $y \rightarrow \infty$ , donc le premier terme du membre de droite s'annule, ce qui donne :

$$MRL(t) = \frac{\int_t^\infty R(y)dy}{R(t)} \quad (5.23)$$

### 5.3.4.1 Taux de rupture par fatigue :

Une autre approche pour caractériser la fiabilité des matériaux est définie par le concept du taux de rupture par fatigue (fatigue instantanée).

Soit  $T$  une durée de vie d'un échantillon aléatoire. Soit  $F(t)$  la fonction de répartition de  $T$  et  $f(t)$  sa densité de probabilité.

On définit la fonction  $\mu(t)$ , appelée fonction d'intensité de fatigue ou taux de rupture par fatigue (**fonction de risque**) par :

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}. \quad (5.24)$$

Pour  $\mu(t)$  donnée, la fonction de distribution est caractérisée par :

$$\frac{d}{dt} \ln(1 - F(t)) = -\mu(t) \quad (5.25)$$



Donc :

$$\begin{aligned} 1 - F(t) &= \overline{F(t)} \\ &= \overline{F(t_0)} \exp \left\{ - \int_{t_0}^t \mu(\tau) d\tau \right\} \end{aligned}$$

Si  $\overline{F(t_0)} = 1$ , alors :

$$F(t) = 1 - \exp \left\{ - \int_{t_0}^t \mu(\tau) d\tau \right\} \quad (5.26)$$

$$f(t) = F'(t) = \mu(t) \exp \left\{ - \int_{t_0}^t \mu(\tau) d\tau \right\} \quad (5.27)$$

Si  $\mu(t) = \lambda = \text{constant}$ ,  $t \geq t_0$ ,  $\lambda > 0$ , alors la durée de vie d'un échantillon est une loi exponentielle.

#### 5.3.4.2 Simulation l'instant de premier passage

L'estimation de la densité de probabilité de la variable  $T_c$  sera effectuée sur la base de la simulation d'un flux de trajectoires. Pour estimer sa densité, nous traitons statistiquement les observations simulées par deux méthodes, la méthode de l'histogramme et la méthode de noyau.

On utilise le package `Sim.DiffProc` [2] pour simuler un échantillon de taille  $M=100$  de la variable  $T_c$ . Avec le pas  $\Delta t = T/N$ , et  $c = 16mm$ .

```
R>drift <- expression(0.0065*x)
R>diff <- expression(0.00182*x)
R>AnaSimFPT(N=1000, M=50, t0=0, Dt=0.1, T = 100, X0=9, v=16, drift,
+ diff,ELRENA ="No", Output = FALSE)
R> tau
```

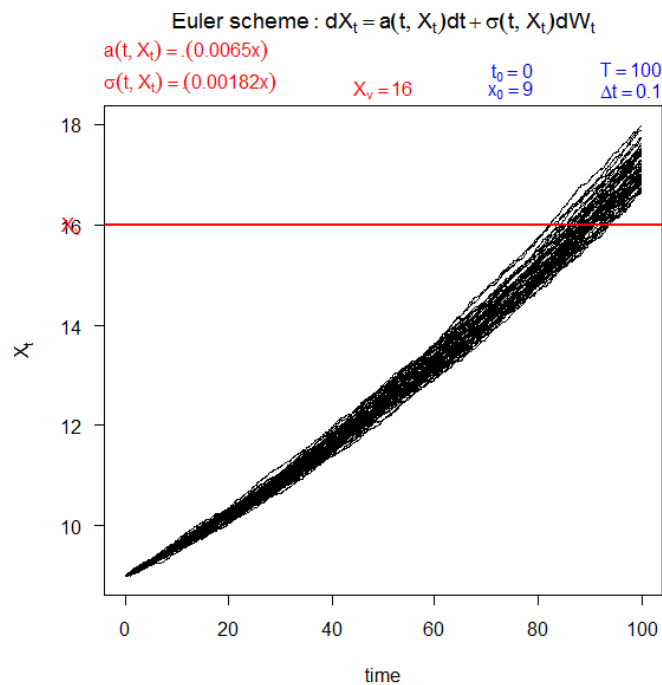


FIGURE 5.6 – L’instant de premier passage du modèle de dégradation.

**Estimation de la distribution de  $T_c$**

On ajuste d’une façon non paramétrique la loi de la variable  $T_c$ , par référence à l’ensemble des lois log-normale, exponentielle et Weibull. On montre que le minimum, selon le critère AIC, est donné par la loi weibull . Les résultats de ce test sont donnés dans le tableau suivant et illustrés par les graphique ci-après.

	Log-normale	Weibull	Exponentielle
AIC	450.1383	251.0115	982.7383

TABLE 5.3 – Les valeurs d’AIC.

	Estimateur	Std.Error
shape	33.11267	3.4524937
scale	90.34790	0.4118172

TABLE 5.4 – Estimation des paramètres.

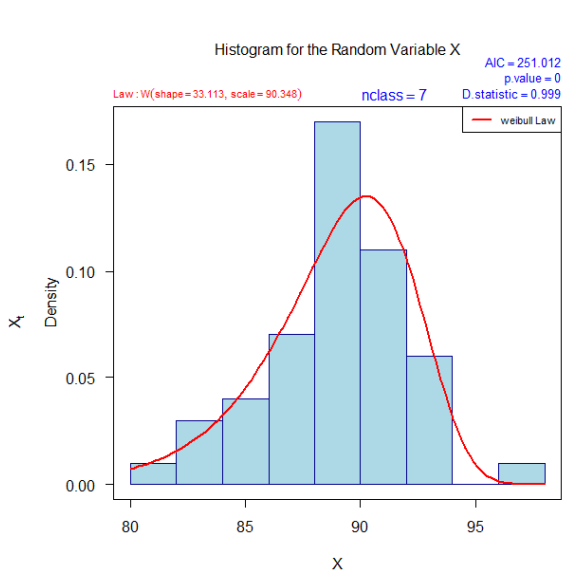


FIGURE 5.7 – Ajustement de la distribution de L’instant de premier passage par la méthode du noyau.

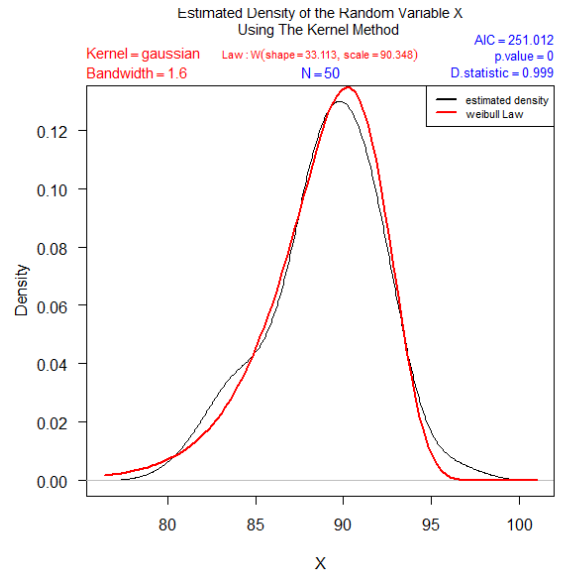


FIGURE 5.8 – Ajustement de la distribution de L’instant de premier passage par la méthode d’histogramme.

**Test de Kolmogorov-Smirnov :**

One-sample Kolmogorov-Smirnov test  
 data: X  
 D = 0.0737, p-value = 0.9488

Alternativement le test de Kolmogorov-Smirnov confirme ce résultat.

### 5.4 Étude de l’équation (5.1) dans le cas de $p > 1$

L’équation (5.1) est une EDS, non linéaire. Dans la pratique, ce modèle est rencontré dans les matériaux à base d’alliage métallique dont la valeur de  $p$  est telle que,  $2 \leq p \leq 4$ .

Cette équation est équivalente à l’équation différentielle stochastique d’Itô suivante :

$$dL_t = \left( m f L_t^p + \frac{p}{2} f^2 L_t^{2p-1} \right) dt + f L_t^p dw_t \tag{5.28}$$

En posant

$$\begin{cases} Y_t = \phi(L_t) = \frac{1}{L_t^{p-1}} \\ Y_0 = \frac{1}{L_0^{p-1}} \end{cases} \tag{5.29}$$

et en appliquant la formule d'Itô 3.3.1 à la fonction  $\phi(L)$  :

$$\begin{aligned} dY_t &= \left( -(p-1)mf - (p-1)\frac{P}{2}f^2L_t^{p-1} + (p-1)\frac{P}{2}f^2L_t^{p-1} \right) dt - (p-1)fdw_t \\ &= -(p-1)mf dt - (p-1)fdw_t \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$Y_t = Y_0 - (p-1) \int_{t_0}^t m f ds - (p-1) \int_{t_0}^t f dw_s \quad (5.30)$$

$$= Y_0 - (p-1)mf(t-t_0) - (p-1)f(w_t - w_{t_0}) \quad (5.31)$$

Donc

$$\Lambda_t = \frac{1}{L_0^{p-1}} - \frac{1}{L_t^{p-1}} = (p-1) \int_{t_0}^t m f ds - (p-1) \int_{t_0}^t f dw_s \quad (5.32)$$

Lorsque  $L_0$  est déterministe, l'équation (5.32) présente une distribution Normale avec,

$$E(\Lambda_t) = (p-1) \int_{t_0}^t m f ds \quad \text{var}(\Lambda_t) = (p-1)^2 \text{var} \left( \int_{t_0}^t f dw_s \right). \quad (5.33)$$

Dans le cas stationnaire, on a :

$$E(\Lambda_t) = (p-1)mf(t-t_0) \quad \text{var}(\Lambda_t) = (p-1)^2(t-t_0). \quad (5.34)$$

D'où la solution de l'équation (5.28), pour  $t \geq 0$  et  $L_0 > 0$  :

$$L_t = \frac{1}{Y_t^{\frac{1}{p-1}}} \quad (5.35)$$

où  $Y_t$ , donnée par l'équation (5.30), est la solution de l'équation (5.32).

L'équation (5.1) est résolvable et formulée par celle de Fokker-Planck, régissant la densité conditionnelle  $\rho = p(t, L, t', L')$  de  $L_t$ , où  $L'$  est l'état initial du processus (5.1).

L'équation (5.28) [23] devient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial L'^2} \left( f^2 L'^{2p} \rho \right) - \frac{\partial}{\partial L'} \left[ \left( mf L_t^p + \frac{P}{2} f^2 L_t^{2p-1} \right) \rho \right] \quad (5.36)$$

On peut montrer que cette équation admet une solution explicite, donnée pour  $p \neq 1$  par

$$p(t, L, t', L') = \frac{p-1}{L^p f \sqrt{2\pi(t-t')}} \exp \left\{ -\frac{\left( L'^{1-p} - L^{1-p} - mf(t-t') \right)^2}{(p-1)^2 2f^2(t-t')} \right\} \quad (5.37)$$

La fonction de répartition de  $L_t$  est donnée par

$$F(L_t) = \Phi \left( \frac{\left( L'^{1-p} - L^{1-p} - mf(t-t') \right)}{(p-1) \sqrt{2f^2(t-t')}} \right) \quad (5.38)$$

Où  $\phi$  est la fonction de répartition de la loi Normale.

A partir de cette densité, on peut définir la probabilité de transition de la taille de fissure pour toute valeur supérieure à un seuil critique  $L^*$  :

$$P(L_t > L^*/L_0, t_0) = \int_{L^*}^{\infty} p(t, x, t_0, L_0) dx \quad (5.39)$$

La fonction de répartition de la variable aléatoire  $T_{L^*}$ , qui représente le temps nécessaire pour atteindre  $L^*$  est donnée par :

$$P(T_{L^*} < \theta) = G_T(\theta) = \int_{L^*}^{\infty} p(t + \theta, x, t_0, L_0) dx \quad (5.40)$$

### 5.4.1 Simulation

La simulation numérique, en utilisant le package **Sim.DiffProc**, détermine une seule trajectoire de l'équation (5.28), représentée par la figure (5.9), et un flux de  $M=50$  trajectoires, figure (5.10).

Dans le cas où :  $mf = 0.0057$ ,  $f = 0.0043$ ,  $\Delta t = 0.1$ , la valeur initial  $l_0 = 0.9cm$ .

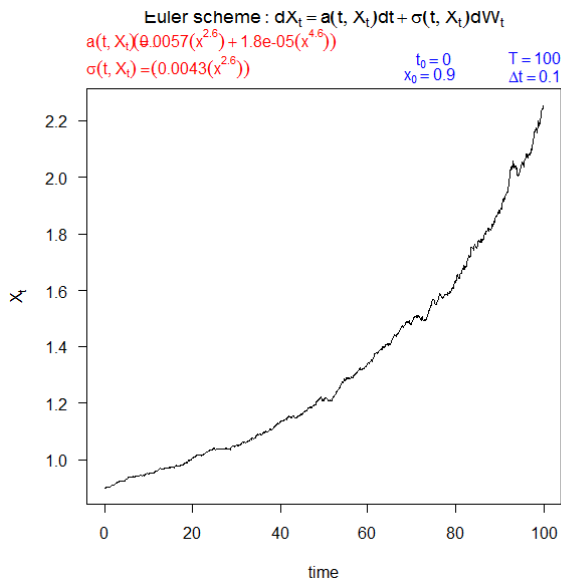


FIGURE 5.9 – Trajectoire de propagation de fissure simulée pour  $p = 2, 6$ .

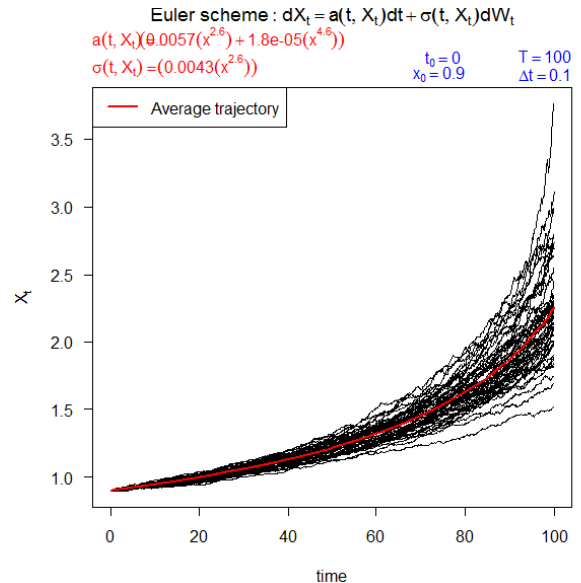


FIGURE 5.10 – Flux de trajectoires de propagation de fissure simulées pour  $p = 2, 6$ .

Ce qui simule un échantillon de la quantité aléatoire  $L_v$  de taille  $M$  à partir de l'équation différentielle stochastique (5.28).

```
R> AnaSimX(N = 1000, M = 50, t0 = 0, Dt = 0.1, X0 = 0.9, v = 86,
+ drift = f, diff = g)
```

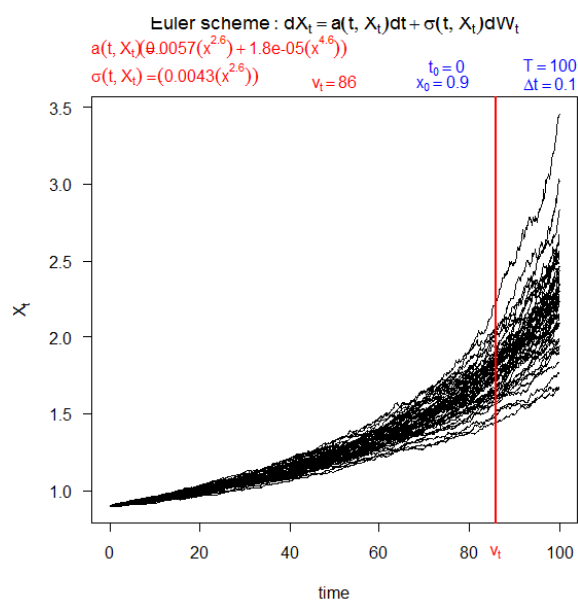


FIGURE 5.11 – Simulation un échantillon du taille 50 à partir du modèle de dégradation.

Une analyse statistique de cette échantillon donne les résultats graphiques et numériques suivants :

Min.	1st Qu.	Variance	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
1.526	1.729	0.033	1.802	1.834	1.923	2.305

TABLE 5.5 – Statistique descriptive.

Une estimation des paramètres de la loi  $L_\nu$  est donnée par le tableau suivant :

	Estimateur	Std.Error
meanlog (moyenne)	0.6042312	0.013750472
sdlog (écart-type)	0.0962533	0.009718821

TABLE 5.6 – Estimation des paramètres.

Cette loi est significativement ajustée par une distribution de probabilité de type log normale, avec une valeur minimum de l'AIC. L'application de test d'ajustement de lois de Kolmogorov-Smirnov confirme également ce résultat.

```
R> hist_general(Data = X, Breaks = 'Sturges', Law = "Normlog")
R> Kern_general(Data = X, bw='Bcv', k = "gaussian", Law = "Normlog")
```

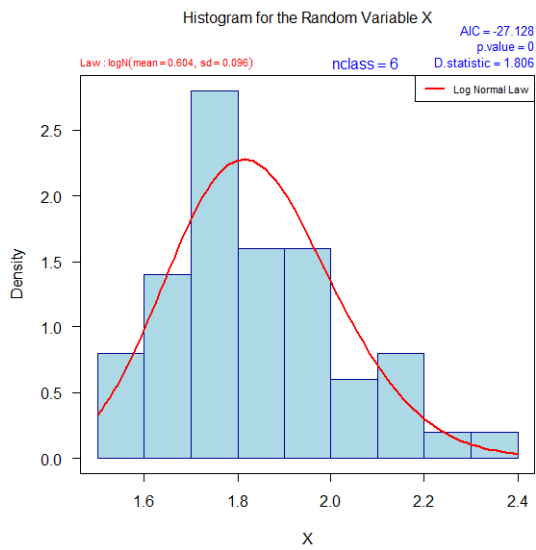


FIGURE 5.12 – Ajustement de la distribution du modèle de dégradation par la méthode du noyau.

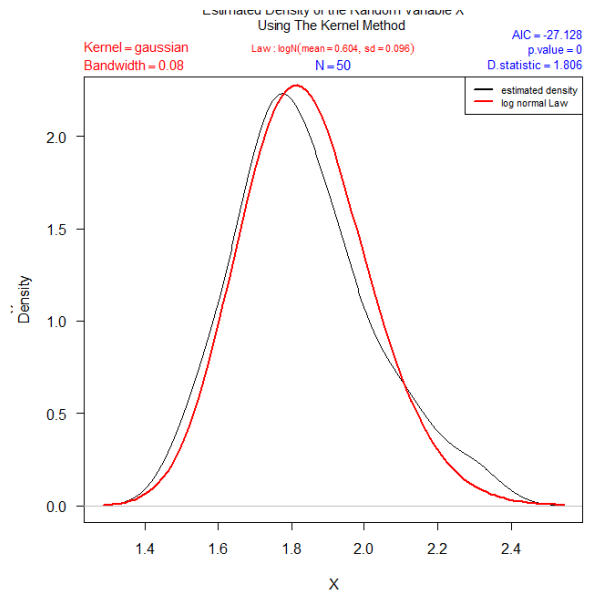


FIGURE 5.13 – Ajustement de la distribution du modèle de dégradation par la méthode d’histogramme.

Le test de Kolmogorov-Smirnov donne : $D = 0.0962$ ,  $p\text{-value} = 0.7076$

### 5.4.2 Calculs de l’instant de premier passage

L’estimation de la densité de la variable aléatoire  $T_c$  est effectuée sur la base de la simulation d’un flux de  $M=50$  trajectoires avec  $mf = 0.0057$ ,  $f = 0.0043$  et  $c = v = 1,7cm$

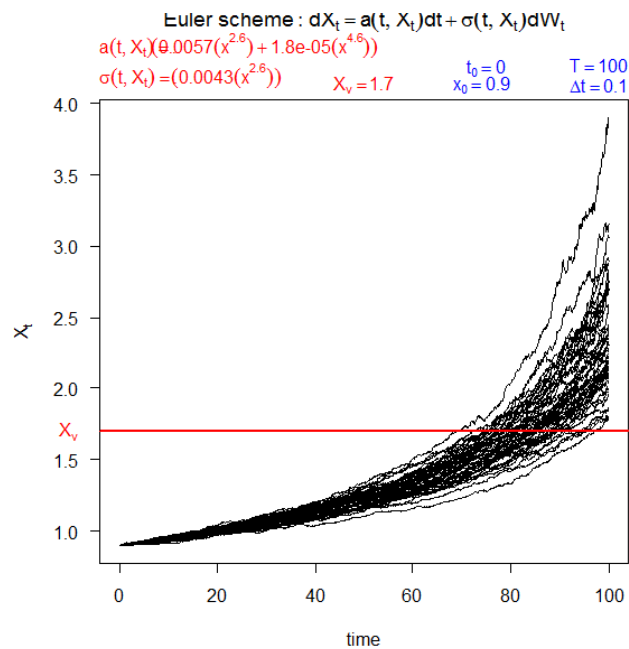


FIGURE 5.14 – L'instant de premier passage du modèle de dégradation.

L'ajustement de la variable  $T_c$  est faite par les lois : gamma, exponentiel, lognormale et weibull. Le meilleur modèle est choisi par le critère AIC (minimum AIC). On remarque que la loi Weibull ajuste mieux la distribution de la variable aléatoire  $T_c$ .  
AIC = 327.3488

	Estimateur	Std.Error
shape	13.86520	1.4077241
scale	86.92809	0.9505529

TABLE 5.7 – Estimation des paramètres.



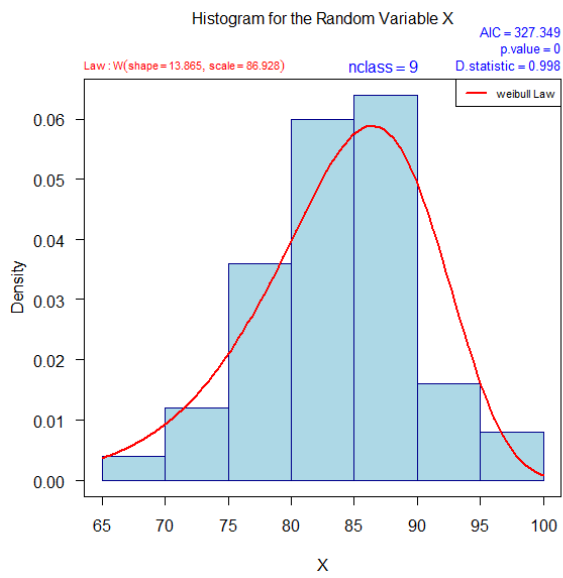


FIGURE 5.15 – Ajustement de la distribution de L’instant de premier passage par la méthode du noyau.

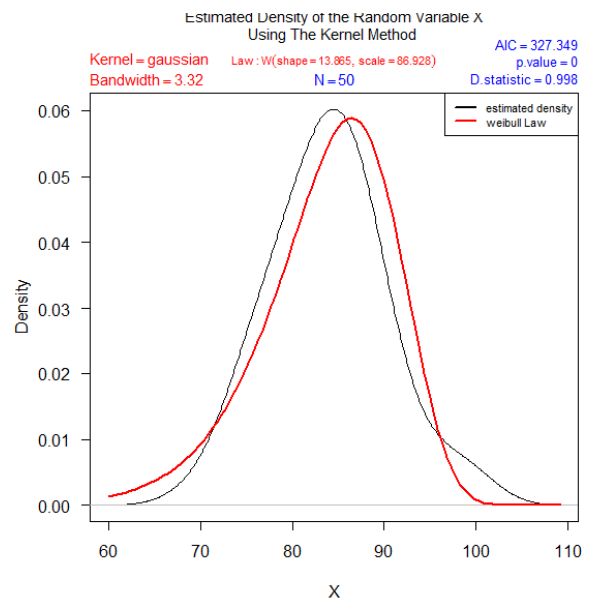


FIGURE 5.16 – Ajustement de la distribution de L’instant de premier passage par la méthode d’histogramme.

Alternativement le Test de Kolmogorov-Smirnov donne :  $D = 0.1171$ ,  $p\text{-value} = 0.4988$

## 5.5 Influence de la variabilité des paramètres du modèle de dégradation (5.1)

Plusieurs paramètres mécaniques et micro-structuraux influent sur la propagation des fissures. Cette influence est plus ou moins importante suivant le domaine de fissuration étudié et les conditions d'essais, regroupés en deux catégories : les paramètres intrinsèques (micro-structures) et extrinsèques (rapport de charge (contraintes appliquées) et l'environnement. . .).

Cette section a pour objectif l'étude de la durée de vie en fatigue en tenant compte de la variabilité des paramètres du modèle de dégradation des structures.

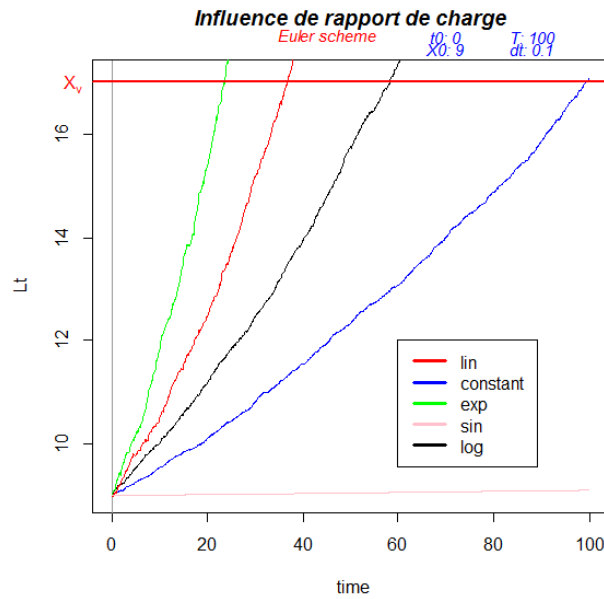
### 5.5.1 Influence du rapport de charge

On simulé des trajectoires de la taille des fissures en tenant compte des cinq fonctions du rapport de charge suivantes : constant, linéaire, exponentielle, logarithme et trigonométrie, pour les valeurs des paramètres :  $p = 1$ ,  $m = 3,6$ ,  $c = 2,63 \cdot 10^{-7}$  et  $\Delta S = 80$ . Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau ci-dessous :

Fonction de $g(R)$	$g(R)$	Moyenne	Variance	Max(mm)	L'instant de premier passage
Constant	0,3	12,52	5,34	17,10	<b>96,5</b>
Linéaire	0,8	23,66	127,76	48,26	<b>38,9</b>
Logarithme	0,52	16,49	28,25	27,59	<b>58,8</b>
Trigonométrie	0,0052	9,05	0,00087	9,10	-
Exponentielle	1,34	37,33	1406,07	142,80	<b>21,3</b>

TABLE 5.8 – Influence du Rapport de Charge.

Les résultats du rapport de charge est illustré par le graphique suivant :

FIGURE 5.17 – Influence du rapport de charge  $R$ .

Ainsi, les résultats obtenus démontrent que le rapport de charge  $R$  est important et caractérise la vitesse de propagation des fissures. Lorsqu'une structure est sollicitée d'une charge plus élevée, sa résistance devient plus faible, ce qui fait diminuer la durée de vie de la structure en question.

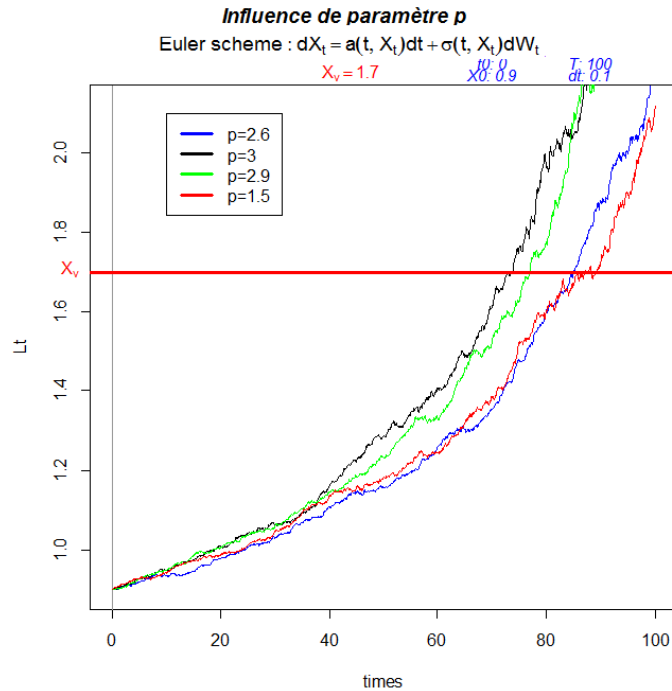
Si le rapport de charge se rapproche de 0, l'intensité de la contrainte de fissuration minimum est plus petite que celle de la contrainte maximum, donc la vitesse de fissuration est faible et la durée de vie augmente.

Par contre, si le rapport de charge se rapproche de 1, l'intensité de contrainte minimum est proche du maximum, par suite, la vitesse de fissure augmente et la durée de vie diminue.

### 5.5.2 Influence de paramètre $p$

En réalisant des simulations trajectoires pour différentes valeurs de  $p$  avec  $R = 0,2$ ,  $m = 3,6$ ,  $c = 2,63 \cdot 10^{-7}$  et  $\Delta S = 80$ , on obtient les résultats suivants :

$p$	Moyenne	Variance	Max(cm)	L'instant de premier passage
2.6	1.27	0.118	2.18	<b>84</b>
3	1.51	0.47	4.59	<b>75</b>
1.5	1.19	0.042	1.62	<b>90</b>
2.9	1.46	0.41	4.22	<b>78</b>

TABLE 5.9 – Influence de paramètre  $p$ .FIGURE 5.18 – Influence de paramètre  $p$ .

On remarque que la vitesse de dégradation de la structure est extrêmement sensible à la variation de paramètre  $p$ , ce qui montre son importance physique pour la détermination du degré de fiabilité de la structure.

### 5.5.3 Influence de l'environnement

Généralement l'effet de l'environnement est l'action du milieu corrosif sur le matériau : air sec ou humide, oxygène, vapeur d'eau, hydrogène... Cet effet se manifeste à la fois sur la durée de vie et sur les vitesses de propagation de fissure, comparés à ceux obtenus sous vide ou atmosphère neutre.

Les essais de propagation de fissures de fatigue menés sur l'acier sous chargements à amplitude constante dans différents environnements (eau domestique ordinaire et traitée) montrent que la vitesse de propagation des fissures est plus faible pour les échantillons en

contact avec l'eau domestique traitée.

Dans un alliage d'aluminium, Chubb a montré que la vitesse de propagation des fissures dans un milieu humide est supérieure à celle d'un milieu sec. D'autres études, menés sur des alliages d'aluminium, ont montré que le seuil de propagation sous air est plus faible que celui obtenu sous vide.

Les observations menées par Wadsworth et Bradshaw sur le comportement en fatigue d'un alliage d'aluminium une accélération de la vitesse de fissuration sous vapeur d'eau et sous atmosphère humide, ce qui ramène à des durée de vie plus faibles que celle sous atmosphère sèche.

Pour la plupart des matériaux, la résistance à la fissuration sous vide est, en général, meilleure que sous air.

La durée de vie augmente avec la diminution de la température ou à faible charge, par conséquent, la fatigue est plus présente à température élevée qu'à température ambiante.

## 5.6 Étude de la Fiabilité du Système

Trois approches principales pour l'estimation de la durée de vie d'une structure :

La première basée sur la modélisation physique des processus de défaillance. Ces modèles impliquent une connaissance du phénomène de dégradation (de son évolution et du seuil critique) par des tests expérimentaux.

La seconde, sur la fiabilité statistique (statistical reliability models) qui consiste à établir des lois de fiabilité sur la base de la collection des temps de défaillance.

Et la troisième, sur la surveillance des indicateurs d'état (condition monitoring) dont le principe est le suivi de l'évolution des enregistreurs de dégradation (taille de fissure, rapport de charge, température ...) par rapport au temps. La défaillance est relative aux dépassements des seuils fixés dans les indicateurs de surveillance.

Deux méthodes permettent d'augmenter la précision de l'estimation de la fiabilité :

L'une, du modèle dénommé, instant de première passage (First Hitting Threshold Time) dont le principe est de déterminer le temps du seuil critique des courbes de dégradation stochastique, mentionné dans le chapitre (5) section(5.3.4).

Et l'autre, du modèle à risque proportionnel. Ce modèle fait partie de la famille de ce à risques multiplicatif, introduit par Cox en 1972. Il est type semi paramétrique spécifiant que la modélisation est relative à l'influence des covariables via un vecteur de régression et qui évite ainsi le choix parfois difficile de celui totalement paramétrisé.

L'expression mathématique de ce modèle se basé sur la fonction de risque  $h(t, Z)$  :

$$h(t, Z) = h_0(t) \phi(\beta_i Z_i) \quad (5.41)$$

Où  $h_0(t)$  définie la fonction du risque de base,  $\phi$  une fonction qui fait intervenir les variables d'influence mesurées  $Z_i$  pondérées par leur paramètre  $\beta_i$  :

$$\phi(\beta_i Z_i) = \exp\left(\sum_{i=1}^p \beta_i Z_i\right) \quad (5.42)$$

Alors :

$$h(t, Z) = h_0(t) \exp(\beta' Z) \quad (5.43)$$

La fonction de survie est représentée comme suit :

$$S(t, Z) = \exp\left[-\int_0^t h_0(u) \exp(\beta' Z) du\right] \quad (5.44)$$

La relation entre le risque instantané et les covariables est log-linéaire, est formulée ainsi :

$$\log(h(t, Z)) = \log(h_0(t)) + \sum_{i=1}^p \beta_i Z_i \quad (5.45)$$

La fonction de risque cumulé conditionnel aux covariable  $Z$  pour  $t \in \mathbb{R}^+$  est :  $H(t) = \int_0^t h(s)ds$ , introduite dans le modèle de Cox, sous la forme de l'équation :

$$H(t) = H_0(t) \exp(\beta' Z) \quad (5.46)$$

Dont,  $H_0(t) = \int_0^t h_0(s)ds$ , est la fonction de risque cumulé de base.

Dans cette section , on utilise le modèle de Cox pour étudier l'influence de différents variables intervenant dans le processus de dégradation.

Dans notre cas, Ces variables peuvent être la température, le rapport de charge et les paramètres de matériaux :  $Z = (Z_1, Z_2, Z_3) = (m, g(R), p)$ , et on suppose que le risque de base  $h_0(t)$  d'un loi de Weibull( fonction de hasard monotone) :

$$h_0(t) = \frac{\alpha}{\gamma} \left( \frac{t}{\gamma} \right)^{\alpha-1} \quad (5.47)$$

Alors :

$$h(t, Z) = \frac{\alpha}{\gamma} \left( \frac{t}{\gamma} \right)^{\alpha-1} \exp(\beta_1 m + \beta_2 g(R) + \beta_3 p) \quad (5.48)$$

#### L'estimation des coefficients du modèle de Cox :

Pour estimer les coefficients de régression  $\beta$ , Cox (1972) a proposé de basé l'inférence statistique sur une approche utilisant la vraisemblance : une interprétation heuristique de la fonction de risque conditionnelle est utilisée pour construire une Vraisemblance partielle.

La vraisemblance partielle de Cox,  $L(\beta)$  se calcule comme produit de toutes les contributions, pour les différents temps de défaillances, représentée par l'équation ci-après :

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^k \frac{\exp(\beta' Z_{(i)})}{\sum_{l \in R_i} \exp(\beta' Z_{(l)})} \quad (5.49)$$

dont,  $R_i$  est l'ensemble d'individus à risque à un temps  $t$ .

Pour faciliter la résolution du problème de maximisation, le calcul de logarithme de cette fonction de vraisemblance est :

$$\ln L(\beta) = \ln \prod_{i=1}^k \frac{\exp(\beta' Z_{(i)})}{\sum_{l \in R_i} \exp(\beta' Z_{(l)})} \quad (5.50)$$

$$= \sum_{i=1}^k \beta' Z_{(i)} - \sum_{i=1}^k \ln \left( \sum_{l \in R_i} \exp(\beta' Z_{(l)}) \right) \quad (5.51)$$

Recherche de la solution de l'équation de la vraisemblance par :

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \ln L(\beta) = 0 \quad (5.52)$$

Ainsi la log de vraisemblance est :

$$\ln L(\beta) = \ln \prod_{i=1}^k \frac{\exp(\beta' Z_{(i)})}{\sum_{l \in R_i} \exp(\beta' Z_{(l)})} \quad (5.53)$$

$$= \sum_{i=1}^k \beta' Z_{(i)} - \sum_{i=1}^k \ln \left( \sum_{l \in R_i} \exp(\beta' Z_{(l)}) \right) \quad (5.54)$$

Le maximum de vraisemblance est la solution du système de l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial \beta_j} \ln L(\beta) = 0 \quad \text{pour } j = 1, \dots, p \quad (5.55)$$

Ainsi, les premières dérivées se calculent par la fonction suivante :

$$\begin{aligned} U_j(\beta) &= \frac{\partial}{\partial \beta_j} \ln L(\beta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left( \sum_{i=1}^k \beta' Z_{(i)} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left( \sum_{i=1}^k \ln \left( \sum_{l \in R_i} \exp(\beta' Z_{(l)}) \right) \right) \end{aligned}$$

Or, la dérivée du premier terme s'écrit sous forme de :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left( \sum_{i=1}^k \beta' Z_{(i)} \right) &= \frac{\partial}{\partial \beta_j} \\ &= \sum_{i=1}^k Z_{ij} \end{aligned}$$

Et le second terme est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left( \sum_{i=1}^k \ln \left( \sum_{l \in R_i} \exp(\beta' Z_{(l)}) \right) \right) &= \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left( \sum_{i=1}^k \ln \left( \sum_{l \in R_i} \exp \left( \sum_{m=1}^p \beta_m Z_{ml} \right) \right) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta_j} \frac{\frac{\partial}{\partial \beta_j} \left( \sum_{i=1}^k \ln \left( \sum_{l \in R_i} \exp \left( \sum_{m=1}^p \beta_m Z_{ml} \right) \right) \right)}{\sum_{i=1}^k \ln \left( \sum_{l \in R_i} \exp \left( \sum_{m=1}^p \beta_m Z_{ml} \right) \right)} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\left( \sum_{i=1}^k \ln \left( \sum_{l \in R_i} Z_{il} \exp \left( \sum_{m=1}^p \beta_m Z_{ml} \right) \right) \right)}{\sum_{i=1}^k \ln \left( \sum_{l \in R_i} \exp \left( \sum_{m=1}^p \beta_m Z_{ml} \right) \right)} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\left( \sum_{i=1}^k \ln \left( \sum_{l \in R_i} Z_{il} \exp(\beta' Z_{(l)}) \right) \right)}{\sum_{i=1}^k \ln \left( \sum_{l \in R_i} \exp(\beta' Z_{(l)}) \right)} \end{aligned}$$

Donc, en finalité :

$$U_j(\beta) = \sum_{i=1}^k \left( Z_{ij} - \frac{\left( \sum_{i=1}^k \ln \left( \sum_{l \in R_i} Z_{il} \exp(\beta' Z_{(l)}) \right) \right)}{\sum_{i=1}^k \ln \left( \sum_{l \in R_i} \exp(\beta' Z_{(l)}) \right)} \right) \quad (5.56)$$

En pratique, l'estimation de  $\beta$  par le maximum de vraisemblance est obtenue à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson, qui est une méthode itérative de gradient. Elle s'appuie sur la relation suivante :



$$\beta^{i+1} = \beta^i + I^{-1}(\beta^i) U(\beta^i)$$

- $\beta^i$  est la solution courante à l'étape  $i$ . ( $\beta^0 = (0, \dots, 0)$  est une initialisation possible)
- $U(\beta)$  est le vecteur des dérivées partielles premières de la vraisemblance.
- $-I(\beta)$  est la matrice des dérivées partielles secondes de la vraisemblance.
- Les itérations sont interrompues lorsque la différence entre deux vecteurs de solutions successifs est négligeable.

Les propriétés de convergences presque sûrement et de normalité asymptotique de  $\hat{\beta}$  ont été établis par A.Tsiatras(1981) sous les hypothèses suivantes :

( $H_1$ )  $\tau$  est la durée maximale d'observation à laquelle l'expérience est interrompue, de sorte que :  $P(T > \tau) > 0$ ,  $c \leq \tau$ .

( $H_2$ )  $Z$  est un vecteur de variables aléatoires continus telle que :

$$E(Z_i Z_j \exp(\beta Z)) < +\infty$$

Suite à l'estimation des coefficients de régression, la fonction du risque cumulé de base par l'estimateur de Breslow, extension de celui de Nelson-Aalen, est comme suit :

$$\hat{\Lambda}_0(t) = \sum_{i \geq 1} \frac{d_i}{\sum_{j \in R_i} \exp(\hat{\beta}' Z_j)} \quad (5.57)$$

$d_i$  étant le nombre de défaillance en  $t$ .

D'où, la possibilité de déduire l'estimateur de la fonction de survie par un vecteur de covariable  $Z$  :

$$\hat{S}(t) = \exp\left(\hat{\Lambda}_0(t) \exp(\hat{\beta}' Z_j)\right) \quad (5.58)$$

## 5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une famille de processus de dégradation, construite par des équations différentielles stochastiques de type de Stratonovich. Nous avons développé quelques éléments théoriques fondamentaux du modèle, utiles dans le cadre de la modélisation des mécanismes de dégradation. Enfin, nous avons proposé un exemple de simulation numérique, ainsi que l'estimation des fonctions caractéristiques du processus solution à partir de trajectoire simulées. Ainsi, nous avons calculé la fiabilité (l'instant de premier passage).

# Conclusion générale

De nombreux matériels ou systèmes se dégradent dans le temps avant de tomber en panne. Pour modéliser ces dégradations et pour mieux comprendre les causes de panne de ces systèmes ou de ces matériels, nous avons besoin de développer des modèles permettant de prendre en compte les données de dégradation et de les lier à d'éventuelles pannes. Les modèles de dégradation ont fait l'objet de nombreuses publications sur les dernières décennies. Ces modèles sont à l'origine des processus qui déterminent les échecs dans ces systèmes. De plus, ils jouent un rôle central dans les efforts visant à améliorer la fiabilité et les maintenances des systèmes.

Dans ce travail, nous avons présenté une famille de modèles de processus de dégradation, construite par des équations différentielles stochastiques de type Stratonovich. Nous avons également développé quelques éléments théoriques fondamentaux du modèle, utiles pour la modélisation du processus de dégradation et l'étude de la fiabilité des structures physiques en question. Ainsi, à travers quelques exemples pratiques, nous avons montré l'importance et l'intérêt de la simulation, ainsi que l'adéquation de ce modèle avec les phénomènes réels de dégradation. L'échantillonnage trajectoires généré par le modèle nous a permis d'estimer statistiquement certaines grandeurs d'intérêt physique, liées à la fiabilité de la structure, en matière de durée de vie probable et de résistance aux effets internes et externes sur la structure.

# Bibliographie

- [1] Allen E (2007). *Modeling with Itô Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, New York. ISBN 13 : 978-1-4020-5953-7.
- [2] Boukhetala K, Guidoum A (2012). **Sim.DiffProc** : *Simulation of Diffusion Processes*. R package version 2.5, <http://CRAN.R-project.org/package=Sim.DiffProc>.
- [3] Douglas H, Peter P (2006). *Stochastic Differential Equations in Science and Engineering*. World Scientific Publishing. ISBN 981-256-296-6.
- [4] Franck J (2009). *Modèles aléatoires et physique probabiliste*. Springer-Verlag, New York. ISBN 13 : 978-2-287-99307-7.
- [5] Heinz S (2011). *Mathematical Modeling*. Stochastic Evolution, pp. 295–334, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-20310-7.
- [6] Peter E, Eckhard P (1995). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations (Second Edition)*. Imperial College Press. ISBN 0-387-54062-8.
- [7] Fima C Klebaner (2005). *Introduction to stochastic calculus with applications*. Springer-Verlag, New York. ISBN 1-86094-555-4.
- [8] Saito Y, Mitsui T (1993). *Simulation of Stochastic Differential Equations. The Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **3**, pp. 419–432.
- [9] Hui-Hsiung Kuo (2000). *Introduction to Stochastic Integration*. Springer. ISBN 978-0387-28720-1.
- [10] Brown R(1828). *A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants ; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. Philosophical Magazine*, **4**, pp. 161–173. <http://sciweb.nybg.org/science2/pdfs/dws/Brownian.pdf>.
- [11] Huyên Pham (2000). *Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance*. Springer-Berlin Heidelberg, New York. ISBN-10 3-540-73736-7.
- [12] Jean-Christophe Breton (2006). *Processus Gaussiens. Cours Master IMA 2ème année, Université de La Rochelle*.
- [13] Bernard L, Etienne P, Rémi S(1998). *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York . ISBN 3-540-63393-6 .
- [14] L. C. G.Rogers , David Williams(1994 ). *Diffusions, Markov Processes, and Martingales Volume 2 : Itô Calculs*. Cambridge University Press. ISBN 0 521 77593 0

- 
- [15] Sylvie MÉLÉARD(2008). *Mouvement brownien et calcul stochastique. Université Paris 10, MODALX* .
- [16] Domien Lamberton, Bernard Lapeyer (1996). *Introduction to stochastic calculus : Applied to finance*. Library of congress cataloging in publication data.
- [17] Risken H (2001). *The Fokker-Planck Equation : Methods of Solutions and Applications*. 2nd edition, Springer Series in Synergetics. ISBN 9783540615309.
- [18] Stefano M (2008). *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, New York. ISBN 978-0-387-75838-1.
- [19] K. Sobczyk(1987). *Stochastic models for fatigue damage of materials. Advances in Applied Probability*, **19**, pp. 652–673
- [20] K. Sobczyk(1986). *Modelling of random fatigue crack growth. Engineering Fracture Mechanics*, **24**, pp. 606–623
- [21] K. Sobczyk(2006). *Stochastic dynamics and reliability of degrading systems. Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences* , **1**, pp. 125-137
- [22] K. Sobczyk, D.J. Kirknera, B.F. Spencer Jr (1999). *On the relationship of the cumulative jump model for random fatigue to empirical data. Probabilistic Engineering Mechanics*, **14**, pp. 257–267
- [23] Akira Tsurui, Hiroshi Ishikawa(1986). *Application of the Fokker-Planck equation to a stochastic fatigue crack growth model. Structural Safety*, **4**, pp. 15-29
- [24] Lukas Nespurek(2009). *Stochastic Crack Propagation Modelling using the Extended Finite Element Method. Université Blaise Pascal, Clermont II*.
- [25] Ying Leia, W.Q. Zhu(2000). *Fatigue crack growth in degrading elastic components of nonlinear structural systems under random loading. International Journal of Solids and Structures*, **37**, pp. 649–667
- [26] M.S. Nikulin, N. Limnios (2000). *Advances in Degradation Modeling :Applications to Reliability, Survival Analysis, and Finance*. Statistics for Industry and Technology, Birkhäuser. ISBN 978-0-8176-4923-4.
- [27] Sigge Eggwertz, Niels C. Lind (1985). *Probabilistic Methods in the Mechanics of Solids and Structures*. Springer-Verlag, New York, pp 111-119. ISBN 978-3-642-82421-0.
- [28] K. P. Oh (1979). *A Diffusion Model for Fatigue Crack Growth. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, **1728**, pp. 47-58
- [29] Asok Ray , Sekhar Tangirala, Shashi Phoha (1998). *Stochastic modeling of fatigue crack propagation. Applied Mathematical Modelling*, **22**, pp. 197-204





## **Résumé :**

ici...

...  
...  
...  
...  
...  
...  
...

## **Mots clés :**

mot 1, mot 2, mot 3, ...

## **Abstract :**

here...

...  
...  
...  
...  
...  
...  
...

## **Keywords :**

word 1, word 2,...