

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE
U.S.T.H.B



FACULTE DES MATHÉMATIQUES

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle (M. D. Optimisation)

Par : BENHADJ Sakina

Thème

*Etude de quelques invariants dans une
nouvelle classe de posets*

Soutenu le: 16 - octobre – 2007, Devant le jury composé de:

AIDER Méziane

Professeur à L'U.S.T.H.B

Président

BOUCHEMAKH Isma

Maître de conférences à L'U.S.T.H.B

Directrice de Thèse

AIT HADDADENE Hacène

Professeur à L'U.S.T.H.B

Examineur

MOULAI Mustapha

Maître de conférences à L'U.S.T.H.B

Examineur

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier madame Bouchemakh, ma directrice de thèse, qui a accepté de diriger ce modeste travail. Je la remercie aussi de m'avoir proposé un sujet de thèse passionnant.

Je remercie M^r M. Aider, professeur à l'USTHB, pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Mes remerciements vont également à M^r H. Ait Haddadene professeur à l'USTHB et M^r M. Moulay maître de conférences à l'USTHB, qui ont bien voulu examiner le travail.



~ Dédicaces ~

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents et je les remercie pour leur amour, leur support inconditionnel, leur dévotion généreuse de tous les instants et aussi pour leurs sacrifices.

À la mémoire de ma chère soeur Merieme.

À mes frères.

Et à tous ceux qui m'aiment.

Merci

Table des Matières

INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE 1: Définitions et concepts généraux	3
1. Concepts de poset et notations	4
2. Quelques opérations sur les posets	13
3. Généralités sur les hypergraphes	17
4. Hypergraphe des intervalles d'un poset.....	23
5. Quelques définitions sur les graphes.....	24
6. Graphe représentatif des intervalles maximaux d'un poset	25
CHAPITRE 2: La propriété duale de König et/ou duale de König de l'hypergraphe des intervalles d'un poset	27
1. Ordres Séries parallèles	28
2. Posets sans N.....	29
3. Généralisation de la classe des posets sans N.....	30
4. Ordre d'intervalles	31
5. Ordre de trapèzes	32
6. Classes des ordres SSSC et SSC.....	33
6.1 Propriété duale de König dans le cas général	33
6.2 Ordre SSSC	33
6.3 Ordre SSC	34
7. Treillis linéaire, treillis des faces du n -cube et poset $L(m, n)$	35
7.1 Treillis linéaire	35

7.2 Treillis des faces de n-cube	35
7.3 Poset $L(m, n)$	36
CHAPITRE 3 : La classe de posets sans cycle induit.....	37
1. Posets sans cycle induit.....	38
2. Posets sans cycle induit et ensemble d'articulation.....	40
3. Extension linéaire et dimension.....	41
4. Paramètres $L(P)$, $s(P)$ et $dim(P)$ dans la classe des posets sans cycles induits.....	47
5. Fonction de Möbius et poset sans cycle induit.....	49
6. Construction des posets sans cycle induit.....	51
CHAPITRE 4 : Propriété duale de König de la poset sans cycle induit.....	53
1. Poset sans cycle induit	54
2. Poset sans cycle.....	65
Conclusion générale	67
Perspectives	68
Références	70

Introduction

Générale

INTRODUCTION GENERALE

La théorie de Sperner est un des domaines les plus vastes en combinatoire dont l'origine remonte à l'année 1928 lorsque Emanuel Sperner résolut le problème consistant à trouver la plus grande cardinalité d'une famille \mathcal{F} de sous ensembles de $\{1, 2, \dots, n\}$ incomparables par inclusion. Il prouva que :

$$\text{Max } |\mathcal{F}| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

Plus tard, ce résultat a été généralisé à un ordre partiel fini, ayant une fonction de rang et vérifiant certaines conditions. Ainsi, le théorème de Sperner en découle comme un cas particulier où l'ordre ne sera autre que l'inclusion et la fonction de rang la cardinalité.

La Théorie de Sperner est l'étude des structures discrètes ordonnées. Elle représente un outil puissant dans la modélisation et son application est en expansion croissante. Nous pouvons citer: l'ordonnancement, l'intelligence artificielle, les sciences sociales, ainsi que dans les réseaux informatiques où les posets série-parallèles en particulier, ont fait l'objet d'un certain nombre de travaux récents [22, 23],

Un des pionniers de la théorie de Sperner est Dilworth. Il prouva en 1950 que la taille maximum d'une antichaîne dans un poset P est égale au nombre minimum de chaînes qui partitionnent P . En remplaçant chaîne par intervalle et antichaîne par intervalle-stable (un sous ensemble A de sommets tel que tout intervalle contient au plus un élément de A), on peut étudier la relation min-max semblable a celle de Dilworth. Il s'agira de l'égalité :

$$\text{Max } \{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \text{ est un stable } \mathcal{H}(P)\} = \text{Min } \{|\mathcal{J}| : \mathcal{J} \text{ est un recouvrement par arêtes de } \mathcal{H}(P)\}$$

où $\mathcal{H}(P)$ est un hypergraphe ayant comme sommets les éléments de P et comme arêtes les intervalles maximaux de P .

Cette relation appelée propriété duale de *König* est vérifiée pour la classe des ordres d'intervalle [5], séries-parallèles [4], ceux dont la classe des graphes de comparabilité contient les graphes distance héréditaire [7], ...

Notre recherche se focalise autour de la classe des ordres sans cycles induits et nous prouvons que la propriété duale de *König* reste vérifiée.

Le mémoire s'articule autour de quatre chapitres:

Le premier chapitre est divisé en trois parties. La première partie se veut une introduction générale sur les posets. La seconde est consacrée à l'étude des hypergraphes de manière générale et en particulier les hypergraphes des intervalles d'un poset. Dans la dernière partie, nous passons en revue quelques notions sur la théorie des graphes.

Au second chapitre, nous donnons quelques classes des posets où la propriété de *König* et /ou duale de *König* sont vérifiées.

Dans le troisième chapitre, nous étudions la nouvelle classe des posets sans cycles induits. Nous citons également quelques résultats connus dans la littérature liés à cette classe.

Le dernier chapitre est réservé essentiellement à la démonstration de la propriété duale de *König* de l'hypergraphe des intervalles d'un poset sans cycle induit.

Enfin, nous terminons notre travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Définitions et concepts généraux

Introduction

Dans ce chapitre, nous énonçons quelques notions générales sur les posets et les hypergraphes. Une attention particulière sera réservée à l'hypergraphe des intervalles d'un poset.

1. Concepts de poset et notations

Définitions 1.1

Un *ensemble partiellement ordonné* (P, \leq) , en abrégé *poset* (partially ordered set), est un ensemble P où la relation « \leq » est réflexive, antisymétrique et transitive.

Si $x \leq y$ ou $y \leq x$, on dit que x et y sont *comparables*, sinon ils sont dits *incomparables* et on note alors $x // y$.

Dans tout ce qui suit, les posets sont supposés finis et on note brièvement P au lieu de (P, \leq) si aucune confusion n'est à craindre.

Un élément y de P *couvre* x , noté $x < y$, si $y > x$ et si $y \geq z > x$, alors $y = z$. Cette notation de couverture permet de représenter tout poset P sous la forme d'un diagramme, appelé *diagramme de HASSE*, son tracé est comme suit :

- A chacun des éléments de P est associé, de façon injective, un point du plan.
- Si un élément y couvre un élément x , le point x sera relié au point y par un segment de droite ascendant.

Exemples 1.1

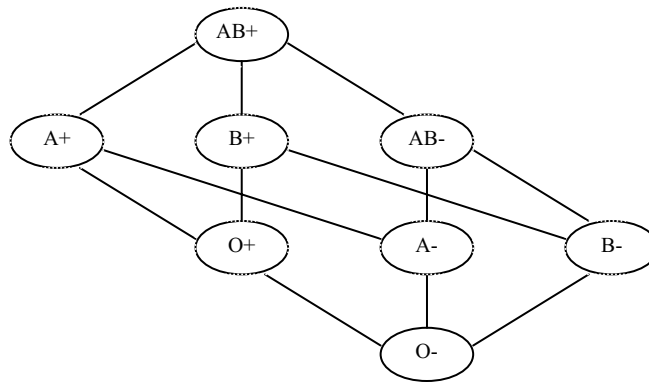
- a. Soit C une famille des sous ensembles de $\{1, 2, \dots, n\}$. Alors (C, \subseteq) est un poset.
- b. L'ensemble D_n des entiers positifs non nuls inférieurs ou égaux à n muni de la relation : $x \leq y$ si x divise y , forme un poset.

- c. Poset du groupe sanguin :

On peut construire le poset du groupe sanguin à partir des éléments qui représentent les groupes sanguins. Deux sommets sont reliés si l'un des deux peut donner ou recevoir de l'autre.

(O-) peut donner à tous les groupes.

(AB+) peut recevoir de tous les groupes.



Poset du groupe sanguin
Figure 1-1

Un *sous poset* Q induit d'un poset P est un sous-ensemble d'éléments de P avec la relation d'ordre induite, c'est-à-dire, deux éléments de Q sont comparables si et seulement si, ils sont comparables dans P .

Exemple 1.2

Q est un sous poset induit du poset illustré dans Figure 1-1.

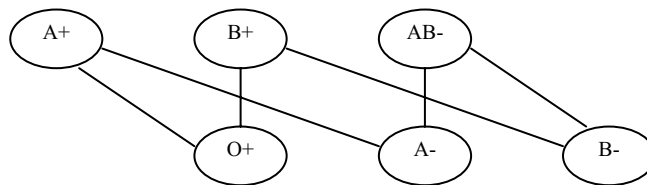


Figure 1-2

Le *dual* de P noté P^* , est un poset ayant les mêmes sommets que P mais ordonné par la relation « \leq_{P^*} » définie par :

$$x \leq_{P^*} y \text{ si et seulement si } x \geq_P y$$

Définitions 1.2

Soient $m, M \in P$. L'élément m (resp. M) est un élément *minimal* (resp. *maximal*) dans P si :

$$\forall y \in P, y \not\prec m \text{ (resp. } M \not\prec y).$$

L'ensemble des éléments minimaux (resp. maximaux) dans P est noté par: $Min(P)$ (resp. $Max(P)$).

Si l'élément minimal m (resp. maximal M) est comparable à tous les éléments de P , alors m (resp. M) est un élément minimum (resp. maximum). L'élément minimal (resp. maximal) est unique et noté par $\hat{0}$ (resp. $\hat{1}$).

Exemple 1.3

Dans Figure 1-3(a), les éléments a et b (resp. c et d) représentent les éléments minimaux (resp. maximaux) et dans Figure 1-3(b), l'élément s (resp. k) représente un minimum (resp. maximum).

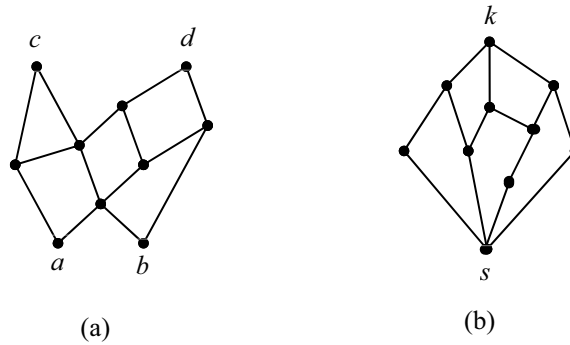


Figure 1-3

Définitions 1.3

Une *fonction de rang* est une fonction $r : P \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ telle que $r(x) = 0$ si x est un élément minimal de P et $r(z) = r(y) + 1$ si z couvre y dans P .

Le *rang* du poset P noté $r(P)$, est : $\max_{x \in P} r(x)$. Si une telle fonction existe, le poset est dit *rangé*.

Naturellement les posets ne possèdent pas toujours une fonction de rang. En effet, considérons le poset illustré dans la Figure 1-4:

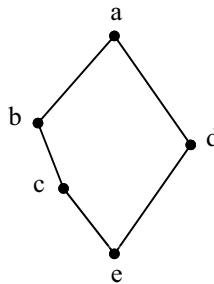


Figure 1-4

e est un élément minimal donc $r(e) = 0$. Par ailleurs $r(a) = r(b) + 1 = r(c) + 2 = r(e) + 3 = 3$ d'une part et $r(a) = r(d) + 1 = r(e) + 1 + 1 = 2$ d'autre part, ce qui est absurde.

Si P est rangé, on définit son *niveau* i par :

$$N_i(P) = \{x \in P : r(x) = i\}$$

Et son $i^{\text{ième}}$ nombre de Whitney par $W_i(P) = |N_i(P)|$ pour tout $i = 0, \dots, r(P)$.

Exemple 1.4

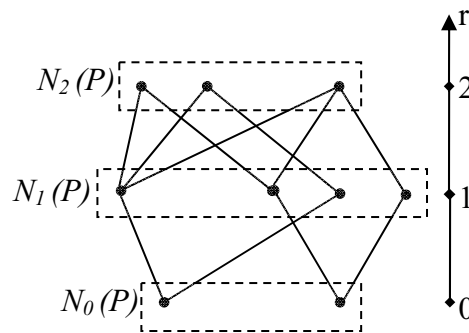


Figure 1-5

Définitions 1.4

P est de *rang unimodal* s'il existe un entier m vérifiant :

$$W_0 \leq \dots \leq W_{m-1} \leq W_m \geq W_{m+1} \geq \dots \geq W_n$$

P est de *rang symétrique* si pour tout $i, 0 \leq i \leq n$, on a :

$$W_i = W_{n-i}$$

Exemple 1.5

Le poset de la Figure 1-5 est de rang unimodal mais non symétrique.

Définitions 1.5

Une *chaîne* dans le poset P est un ensemble $C \subseteq P$ avec la propriété :

$$(\forall c_i, c_j \in C, c_i \leq c_j \text{ ou } c_j \leq c_i).$$

On note une chaîne par $C = (c_0 < \dots < c_k)$.

Une chaîne C est dite *maximale* si et seulement si quel que soit l'élément c dans P , l'ensemble $C \cup \{c\}$ n'est pas une chaîne.

Une chaîne est *symétrique* si $r(c_0) + r(c_k) = r(P)$, et *semi-symétrique* si $r(c_0) + r(c_k) \geq r(P)$.

La *hauteur* d'un poset est le nombre d'éléments d'une chaîne de taille maximum dans P .

Une *antichaîne* A de P est un sous ensemble où deux éléments quelconques de A sont incomparables. La *largeur* de P , notée $w(P)$ c'est la taille maximum d'une antichaîne.

Une antichaîne A est dite *maximale* si et seulement si quel que soit l'élément a dans P , l'ensemble $A \cup \{a\}$ n'est pas une antichaîne.

Notons que si P est rangé, alors chaque niveau représente une antichaîne maximale.

Comme chaque antichaîne A rencontre chaque chaîne C en au plus un seul élément, on a :

$$|A \cap C| \leq 1.$$

Une k -famille est une famille d'éléments de P ne contenant pas une chaîne de longueur k .

Une 1-famille est donc une antichaîne.

Notons par $d(P)$ et $s(P)$ les invariants suivants :

$$d(P) = \max \{|A| : A \text{ est une antichaîne de } P\}, s(P) = \max \{|N_i(P)| : i = 0, 1, \dots, n\}$$

Comme $N_i(P)$ représente une antichaîne, l'inégalité $s(P) \leq d(P)$ est toujours vérifiée.

On dit que P a la propriété de *Sperner* si $s(P) = d(P)$. Plus généralement, P a la propriété forte de Sperner si pour tout k la taille maximum d'une k -famille est égale à la somme maximum de k nombres de Whitney. Un poset P est appelé un poset de *Peck* si P est de rang unimodal, de rang symétrique et a la propriété *forte de Sperner*.

Théorème 1 [12]

Soit P un poset, alors :

$$\max \{|A| : A \text{ est une antichaîne de } P\} = \min \{|C| : C \text{ est une partition de } P \text{ en chaînes}\}.$$

Définitions 1.5

Un *treillis* est un poset où chaque sous ensemble $\{x, y\}$ de P possède une borne inférieure et une borne supérieure.

Exemples 1.5

- a. Le poset $(\mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\}), \subseteq)$, dont les éléments représentent toutes les parties de $\{1, 2, \dots, n\}$, est un treillis. Ce poset est appelé treillis booléen et est noté par \mathcal{B}_n .

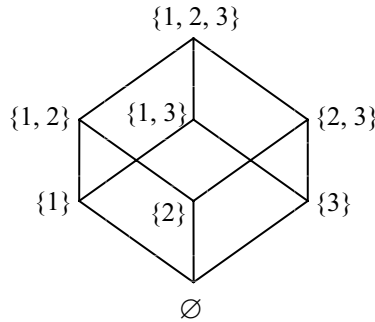


Figure 1-6

Pour le treillis \mathcal{B}_3 de la Figure 1-6 les chaînes $C_1 = (\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\})$, $C_2 = (\{2\}, \{2, 3\})$ et $C_3 = (\{3\}, \{1, 3\})$ forment une partition en chaînes ($\{1\}, \{2\}, \{3\}$) représente une antichaîne de taille maximum.

- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le poset $(D_n, |)$ dont les éléments sont tous les diviseurs de n , ordonné par divisibilité, est un treillis.

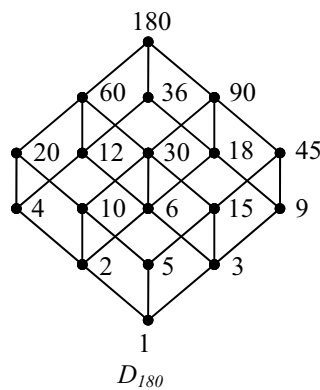


Figure 1-7

- c. Treillis de logique

Considérons un ensemble de propositions G . Les sommets du treillis de logique G' sont toutes les propositions formées par des opérations de conjonction ou disjonction des propositions de G . La relation d'ordre est définie par :

$[X, X' \in G', X \leq X']$ si et seulement si $[(X \Rightarrow X')$ est vrai].

La relation " \leq " ainsi définie est une relation d'équivalence. Pour l'antisymétrie, on suppose ce qui suit :

$$(p \Rightarrow q \text{ et } q \Rightarrow p) \text{ si et seulement si } (p \Leftrightarrow q) \text{ si et seulement si } (p=q)$$

Ceci est dû en fait que si p et q sont équivalents, on peut remplacer p par q , sans changer les valeurs de vérités. On peut montrer que $r(P) = 2(n-1)$ où n est le nombre de proposition.

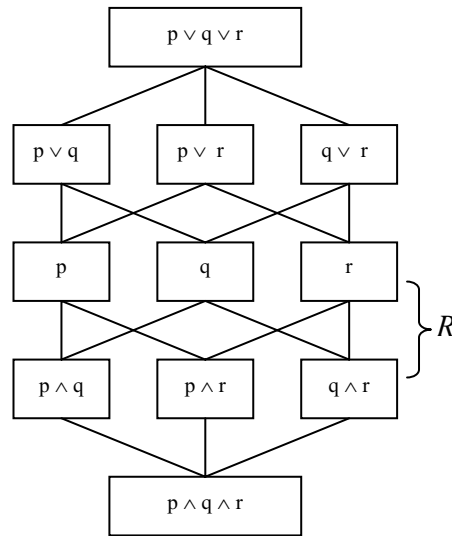
Le treillis de logique est de rang unimodal pour $(m = n-1)$ et de rang symétrique.

Le nombre de *Whitney* vaut $W_i(P) = |N_i(P)| = C_n^{n-i}$ pour $i = \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Pour $G = \{p, q, r\}$, on a $G' = \{p, q, r, p \wedge q, p \wedge r, q \wedge r, p \wedge q \wedge r, p \vee q, q \vee r, p \vee r, p \vee q \vee r\}$

Considérons le tableau de vérité de la partie (R) qui représente le sous poset induit par les niveaux N_1 et N_2 .

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge q \Leftrightarrow p$	$p \wedge q \Leftrightarrow q$	$p \wedge q \Leftrightarrow r$	$p \wedge r \Leftrightarrow p$	$p \wedge r \Leftrightarrow q$	$p \wedge r \Leftrightarrow r$	$q \wedge r \Leftrightarrow p$	$q \wedge r \Leftrightarrow q$	$q \wedge r \Leftrightarrow r$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V



Treillis de logique

Figure 1-8

Le rang de ce treillis est $r(P) = 2 \times (3-1) = 4$.

d. le treillis des partition de Young $M(n)$ [25]

Le treillis $M(n)$ (Young partition lattice) est l'ensemble :

$M(n) = \{a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n : 0 = a_1 = \dots = a_j < a_{j+1} < \dots < a_n \leq n\}$, donné par $a \leq b \Leftrightarrow a_i \leq b_i$ pour tout i .

$M(n)$ est rangé et la fonction de rang est donnée par:

$$r(a) = \sum_{i=1}^n a_i \text{ pour } a \in M(n).$$

Le rang de $M(n)$ est [25]:

$$r(M(n)) = \binom{n+1}{2}$$

La fonction génératrice de nombres de Whitney W_i est donnée par :

$$\sum_{i=0}^{r(M(n))} W_i q^i = (1 + q) (1 + q^2) \dots (1 + q^n)$$

Cette formule nous permet de calculer les nombres de Whitney, par exemple pour $n = 4$,

on a :

$$\sum_{i=0}^{10} W_i q^i = (1 + q) (1 + q^2) (1 + q^3) (1 + q^4)$$

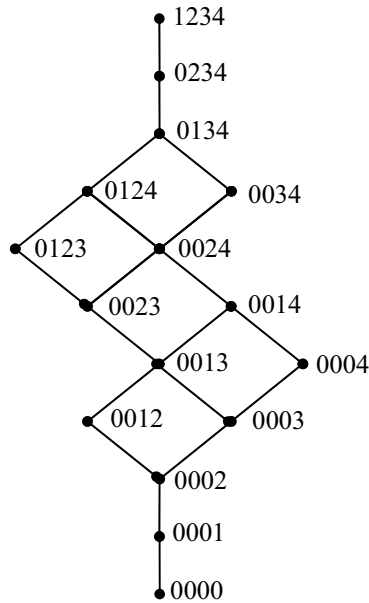
C'est à dire

$$W_0q^0 + W_1q^1 + W_2q^2 + W_3q^3 + W_4q^4 + W_5q^5 + W_6q^6 + W_7q^7 + W_8q^8 + W_9q^9 + W_{10}q^{10} = 1 + q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 2q^6 + 2q^7 + q^8 + q^9 + q^{10}$$

Par identification:

$$W_0 = 1, W_1 = 1, W_2 = 1, W_3 = 2, W_4 = 2, W_5 = 2, W_6 = 2, W_7 = 2, W_8 = 1, W_9 = 1, W_{10} = 1.$$

De plus, Stanley en 1978 [25] a montré que $M(n)$ est de Sperner.



$M(4)$

Figure 1-9

Exemple 1.6

Le poset illustré dans la Figure 1-10 n'est pas un treillis car le sous ensemble $\{b, c\}$ n'a pas de borne supérieure.

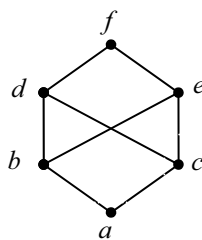


Figure 1-10

Définitions 1.6

Soient $x, y \in P$ tels que $x \leq y$, un *intervalle* $[x, y]$ est le sous poset induit :

$$[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$$

Un intervalle $[x, y]$ est dit *maximal* s'il n est contenu dans aucun autre intervalle.

Exemple 1.7

Dans Figure 1-11, $C = 2 < 10 < 20 < 60$ représente un chaîne maximale et $[3, 90]$ représente un intervalle maximal.

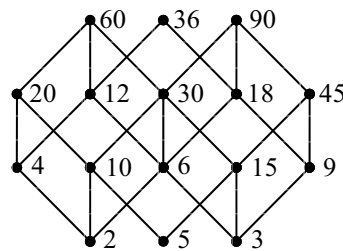


Figure 1-11

Soient P et P' deux posets, P et P' sont *isomorphes* et on note $P \sim P'$ si il existe une *bijection* φ de P dans P' , telle que :

$$p \leq_P q \Leftrightarrow \varphi(p) \leq_{P'} \varphi(q).$$

2. Quelques opérations sur les posets

a. Somme directe

La *somme directe* ou *union disjointe* de deux posets P et Q est le poset $P + Q$ sur $P \cup Q$ tel que :

$$x \leq_{P+Q} y \Leftrightarrow (x, y \in P \text{ et } x \leq_P y) \text{ ou } (x, y \in Q \text{ et } x \leq_Q y).$$

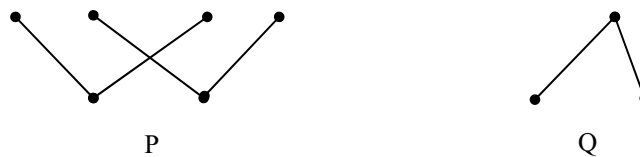


Figure 1-12

La Figure 1-13 représente le diagramme de Hasse of $P + Q$.

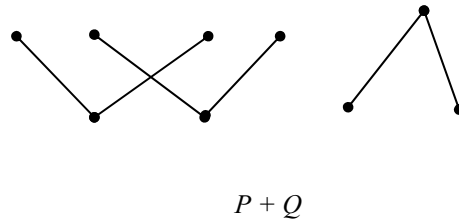


Figure 1-13

b. Somme linéaire

La *somme linéaire* de P et Q est le poset $P \oplus Q$ sur $P \cup Q$ tel que :

$$x \leq_{P \oplus Q} y \Leftrightarrow (x, y \in Q \text{ et } x \leq_Q y) \text{ ou } (x \in P \text{ et } y \in Q) \text{ ou } (x, y \in P \text{ et } x \leq_P y).$$

Une chaîne de longueur n est isomorphe à $1 \oplus \dots \oplus 1$ (n fois). Pour tracer le diagramme de $P \oplus Q$ on trace d'abord celui de P puis au dessus de lui celui de Q et on relie tous les éléments maximaux de P à tous les éléments minimaux de Q .

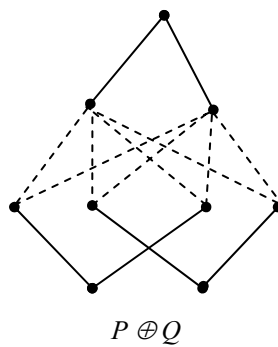


Figure 1-14

c. Produit direct

Le *produit direct* (ou *cartésien*) de deux posets P et Q est le poset $P \times Q$ sur l'ensemble $\{(x, y) : x \in P \text{ et } y \in Q\}$ tel que:

$$(x, y) \leq_{P \times Q} (x', y') \Leftrightarrow x \leq_P x' \text{ et } y \leq_Q y'.$$

La Figure 1-15 représente le diagramme de Hasse du produit de deux chaînes C_2 et C_3 .

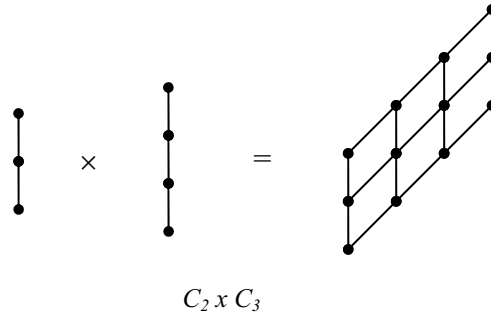


Figure 1-15

d. Construction de « gluig »

Soient P_1 et P_2 deux posets. Considérons le sous ensemble $Q_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ de $\text{Max } P_1$ et $Q_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ de $\text{Min } P_2$.

Nous notons par $P_1 * P_2 (Q_1, Q_2)$ le poset obtenu à partir de P_1 et P_2 , en identifiant les couples $(x_i, y_i), i = 1, \dots, r$. cette construction [28] est appelée la construction de *gluig*.

Si $Q_1 = Q_2 = \emptyset$ alors $P_1 * P_2 (Q_1, Q_2) = P_1 + P_2$

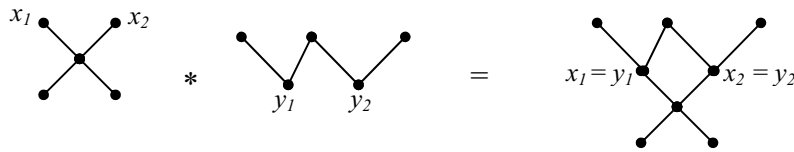


Figure 1-16

Exemple 7

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. n se décompose en nombres premiers sous la forme $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$ où $\forall i, p_i$ est un nombre premier.

Notons par D_n l'ensemble de diviseurs de n ordonné par divisibilité. D_n est isomorphe au produit de m_k chaînes $C_{m_1} \times C_{m_2} \times \dots \times C_{m_k}$. En effet :

Soit ψ l'application

$$\psi: D_n \rightarrow C_{m_1} \times C_{m_2} \times \dots \times C_{m_k}$$

$$d = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$$

ψ Surjective :

En effet

Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \prod_{i=1}^k C_{m_i}$, alors $\alpha_i \cdot m_i \forall i = 1, \dots, k$. Par suite $p_i^{\alpha_i} / p_i^{m_i} \forall i = 1, \dots, k$.

Ainsi, $d = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} / n$ et $\psi(d) = \alpha$.

ψ Injective :

Soient $d_1, d_2 \in D_n$ tels que: $\psi(d_1) = \psi(d_2)$

$$d_1, d_2 \in D_n \Rightarrow d_1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \text{ et } d_2 = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$$

$$\psi(d_1) = \psi(d_2) \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \beta_i \forall i.$$

D'où $d_1 = d_2$.

Soient p et q dans D_n montrons que $p \leq q$ dans $D_n \Leftrightarrow \psi(p) \leq \psi(q)$ dans $\prod_{i=1}^k C_{m_i}$.

Comme $p, q \in P$ alors p et q se décomposent en nombres premiers sous la forme :

$$p = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \text{ et } q = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} \text{ où } \alpha_i, \beta_i \cdot m_i \forall i = 1, \dots, k.$$

Si $p \leq q$ alors q divise p et donc $\alpha_i \leq \beta_i \forall i$. par suite $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \leq (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$.

Donc $\psi(p) \leq \psi(q)$ dans $\prod_{i=1}^k C_{m_i}$.

Pour $n = 12$, $12 = 2^2 \times 3$, la Figure 1-17 illustre cet isomorphisme.

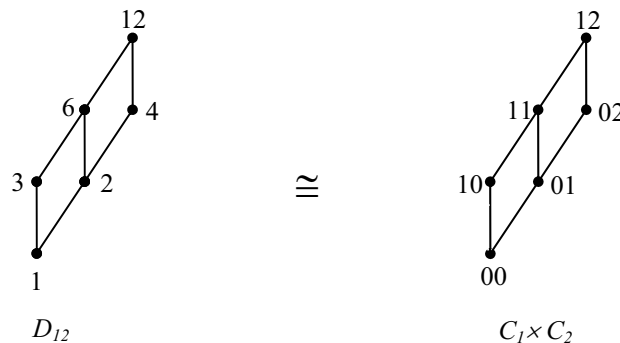
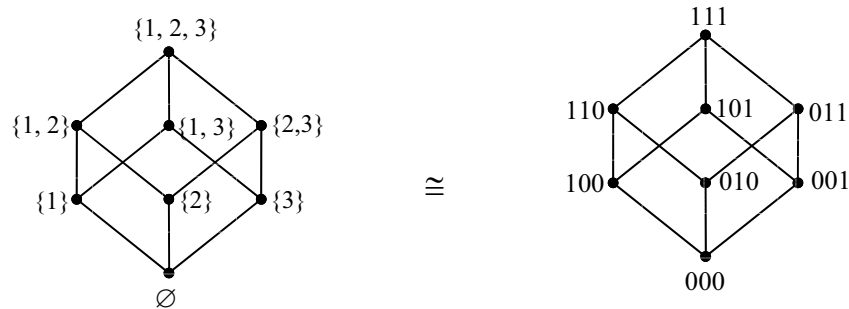


Figure 1-17

(b) Le treillis $\mathcal{B}_n = \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ ordonné par inclusion est isomorphe à $\{0, 1\}^n$ ordonnée par l'ordre usuelle $(a_1, \dots, a_n) \leq (b_1, \dots, b_n)$ si et seulement si $a_i \leq b_i \forall i$. En effet, il suffit de considérer l'application suivante :

$$\varphi: \{0, 1\}^n \rightarrow \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$$

$$\underline{a} \rightarrow \varphi(\underline{a}) = \{i : a_i = 1\}$$



$$\mathcal{B}_3 \cong \{0, 1\}^3$$

Figure 1-18

3. Généralités sur les hypergraphes

Définitions 3.1

1. Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un ensemble fini, et $\mathcal{E} = (E_i / i \in I)$ une famille de parties de X . On dit que \mathcal{E} constitue un hypergraphe sur X si l'on a :

$$1) E_i \neq \emptyset, \forall i \in I$$

$$2) \bigcup E_i = X, i \in I$$

2. Le couple $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ s'appelle un *hypergraphe*, les éléments x_1, x_2, \dots, x_n de X sont les sommets de l'hypergraphe, et les ensembles de \mathcal{E} , sont les arêtes de l'hypergraphe (appelées aussi hyperarêtes). L'ordre de \mathcal{H} est le nombre de ses sommets c'est-à-dire n .

Remarques 3.1

1. Sur une figure, on représente E_i par un trait plein entourant ses éléments si $|E_i| > 2$, par un trait continue joignant ses deux éléments si $|E_i| = 2$, et par une boucle si $|E_i| = 1$.
2. Dans un hypergraphe, deux sommets x et y sont dits adjacents s'il existe une arête E_i qui les contient tous les deux. Deux arêtes E_i et E_j sont dites adjacentes si leur intersection est non vide.

Exemple 3.1

La Figure 1-19 illustre l'hypergraphe $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ où $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ est l'ensemble de ses sommets et $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4, E_5)$ avec $E_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $E_2 = \{x_3, x_4, x_5\}$, $E_3 = \{x_2, x_5\}$, $E_4 = \{x_4, x_6\}$, $E_5 = \{x_6\}$ est l'ensemble de ses arêtes.

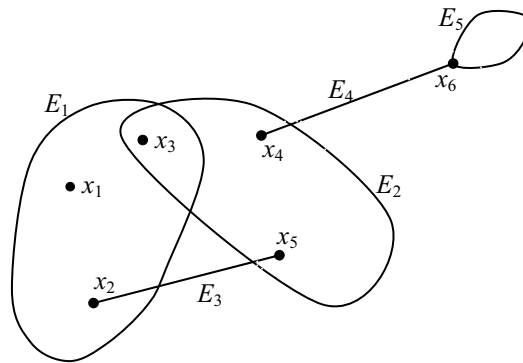


Figure 1-19

Définitions 3.2

La *matrice d'incidence* de l'hypergraphe $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ est une matrice $A = (a_{i,j})$, avec m vecteurs colonnes représentant les arêtes, n vecteurs lignes représentant les sommets, et des coefficients :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in E_j \\ 0 & \text{si } x_i \notin E_j \end{cases}$$

Exemple 3.2

Soit \mathcal{H} l'hypergraphe de la Figure 1-19.

Sa matrice d'incidence est :

$$A = \begin{matrix} & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Définition 3.3

A tout hypergraphe $\mathcal{H} = (X; E_1, \dots, E_m)$, on peut faire correspondre un hypergraphe $\mathcal{H}^* = (E; X_1, \dots, X_n)$, dont les sommets sont des points e_1, e_2, \dots, e_m (représentant respectivement E_1, E_2, \dots, E_m), et dont les arêtes des ensembles X_1, X_2, \dots, X_n (représentant respectivement x_1, x_2, \dots, x_n), où :

$$X_j = \{e_i / i \leq m, x_j \in E_i\} \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

On a $X_j \neq \emptyset, \cup X_j = E$, donc \mathcal{H}^* est bien un hypergraphe, appelé l'hypergraphe dual de \mathcal{H} .

Exemple 3.3

L'hypergraphe dual \mathcal{H}^* de l'hypergraphe illustré dans Figure 1-19 est :

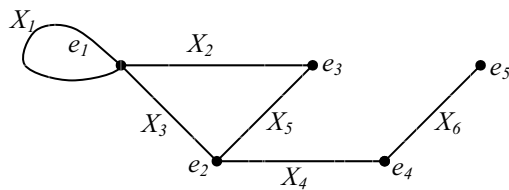


Figure 1-20

Remarques 3.2

1. De toute évidence, la matrice d'incidence de \mathcal{H}^* est la transposée de la matrice d'incidence de \mathcal{H} . On a donc en particulier :

$$(\mathcal{H}^*)^* = \mathcal{H}.$$

2. Si deux sommets x_j et x_k sont adjacents dans \mathcal{H} , les arêtes X_j et X_k sont adjacentes dans \mathcal{H}^* . De même si deux arêtes E_i et E_j sont adjacentes dans \mathcal{H} , les sommets e_i et e_j sont adjacents dans \mathcal{H}^* .

Définition 3.4

Le line graphe (encore appelé graphe représentatif des arêtes de \mathcal{H}) d'un hypergraphe

$\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ est le graphe $L(\mathcal{H}) = (V, \mathcal{E})$ tel que :

- $V = \mathcal{E}$
- $e = (e_i, e_j) \in E \Leftrightarrow E_i \cap E_j \neq \emptyset$ pour $i \neq j$

Exemple 3.4

Soit \mathcal{H} l'hypergraphe illustrer dans la Figure 1-19.

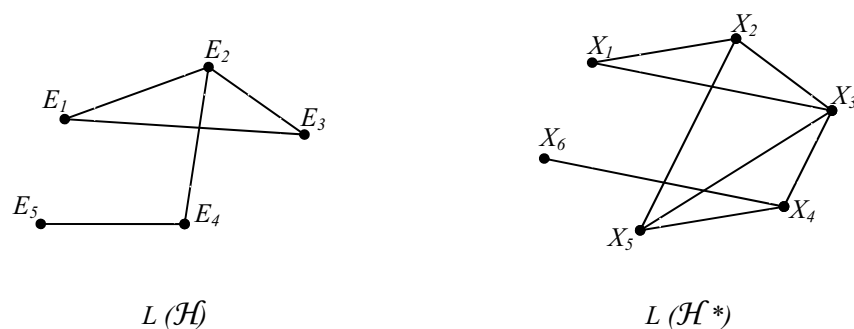


Figure 1-21

Définitions 3.5

Le graphe *2-section* de l'hypergraphe $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$ est un graphe $G = (X, \mathcal{G})$ ayant le même ensemble de sommets que \mathcal{H} et une arête lie une paire de sommets $x, y \in X$ s'il existe une hyperarête $E_i \in \mathcal{E}$ telle que $x, y \in E_i$. Bien sûr, $G = L(\mathcal{H}^*)$.

On appelle *hypergraphe partiel* de \mathcal{H} engendré par un ensemble $J \subset \{1, 2, \dots, m\}$, la famille :

$$\mathcal{H}' = \{E_j / j \in J\}.$$

L'ensemble de sommets de \mathcal{H}' est un sous ensemble non vide de X .

On appelle *sous-hypergraphe* de \mathcal{H} induit par un ensemble $A \subset X$ la famille :

$$\mathcal{H}_A = \{E_j \cap A / 1 \leq j \leq m, E_j \cap A \neq \emptyset\}.$$

Notons que le dual d'un sous-hypergraphe de \mathcal{H} est un hypergraphe partiel de l'hypergraphe dual \mathcal{H}^* .

Soit $\mathcal{H}(x)$ un hypergraphe partiel formé par les arêtes contenant x . On appelle degré de x le nombre d'arêtes de $\mathcal{H}(x)$, noté par $d_{\mathcal{H}}(x) = m(\mathcal{H}(x))$. Le degré maximum de \mathcal{H} est noté par :

$$\Delta(\mathcal{H}) = \max_{x \in X} d_{\mathcal{H}}(x)$$

L'*indice chromatique* $q(\mathcal{H})$ de l'hypergraphe \mathcal{H} est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier les arêtes de \mathcal{H} de sorte que deux arêtes qui s'intersectent ont toujours des couleurs différentes.

On dit que \mathcal{H} a la propriété *des arêtes colorées* si $q(\mathcal{H}) = \Delta(\mathcal{H})$, c'est-à-dire on peut effectivement colorier les arêtes de \mathcal{H} avec $\Delta(\mathcal{H})$ couleurs.

\mathcal{H} à la propriété de *Helly* si pour tout $J \subset \{1, 2, \dots, m\}$, $E_j \cap E_k \neq \emptyset \forall j, k \in J$, alors

$$\bigcap_{j \in J} E_j \neq \emptyset, j \in J$$

On dit qu'un hypergraphe \mathcal{H} est *normal* si tout hypergraphe partiel \mathcal{H}' à la propriété des arêtes colorées c'est-à-dire :

$$q(\mathcal{H}') = \Delta(\mathcal{H}')$$

Un hypergraphe est dit *conforme* si et seulement si pour toute famille de trois arêtes E_1, E_2, E_3 de \mathcal{H} , il existe une arête E_0 de \mathcal{H} telle que :

$$\{(E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3)\} \subset E_0$$

Théorème 2 [2]

Une condition suffisante pour qu'un hypergraphe $\mathcal{H} = (X, \mathfrak{E})$ soit conforme est que pour trois arêtes E_1, E_2, E_3 , il existe toujours une arête de \mathcal{H} qui contienne l'ensemble

$$(E_1 \cap E_2) \cup (E_2 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_3)$$

Théorème 3 [2]

Un hypergraphe \mathcal{H} est conforme si et seulement si son dual \mathcal{H}^* vérifie la propriété de Helly.

Définitions 3.6

Un ensemble $S \subset X$ est dit *stable* si chaque arête de \mathfrak{E} contient au plus un élément de S .

Notons:

$$\alpha(\mathcal{H}) = \max \{ |S| : S \text{ est un ensemble stable de } \mathcal{H} \}$$

Un ensemble *transversal* (ou *recouvrement par sommets* de \mathcal{H}) d'un hypergraphe \mathcal{H} est un ensemble $T \subset X$ avec $T \cap E_i \neq \emptyset$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Notons:

$$\tau(\mathcal{H}) = \min \{ |T| : T \text{ est un recouvrement par sommets de } \mathcal{H} \}$$

Un sous ensemble \mathcal{M} de \mathfrak{E} est appelé un *couplage* si chaque sommet de X appartient à au plus un membre de \mathcal{M} . Notons:

$$\nu(\mathcal{H}) = \max \{ |\mathcal{M}| : \mathcal{M} \text{ est un couplage de } \mathcal{H} \}$$

Un sous ensemble \mathcal{R} de \mathcal{E} est appelé d'un *recouvrement par arêtes* de \mathcal{H} si chaque sommet de X appartient à au moins un membre de \mathcal{R} . Notons:

$$\rho(\mathcal{H}) = \min\{|\mathcal{R}| : \mathcal{R} \text{ est un recouvrement par arêtes } \mathcal{H}\}$$

Pour tout hypergraphe \mathcal{H} , on a :

$$\alpha(\mathcal{H}) \leq \rho(\mathcal{H}) \text{ et } \nu(\mathcal{H}) \leq \tau(\mathcal{H})$$

car chaque arête d'un recouvrement par arêtes contient au maximum un élément d'un stable et chaque sommet d'un transversal appartient à au plus une arête d'un couplage.

On dit que \mathcal{H} à la propriété de *König* si :

$$\nu(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H})$$

et à la propriété *duale de König* si :

$$\alpha(\mathcal{H}) = \rho(\mathcal{H}) \text{ ou } \nu(\mathcal{H}^*) = \tau(\mathcal{H}^*)$$

Puisque $\alpha(\mathcal{H}) = \nu(\mathcal{H}^*)$ et $\rho(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H}^*)$

4. Hypergraphe des intervalles d'un poset

Soit P un poset et $\mathcal{I}(P)$ l'ensemble de ses intervalles maximaux. L'hypergraphe

$\mathcal{H}(P) = (P, \mathcal{I}(P))$ dont les sommets sont les éléments de P et les arêtes sont les intervalles maximaux de P est appelé *l'hypergraphe des intervalles* de P .

Notons que $\mathcal{H}(P)$ n'a pas toujours les propriétés de *König* et *duale de König*. En effet, deux contre exemple sont illustrés dans la Figure 1-22.

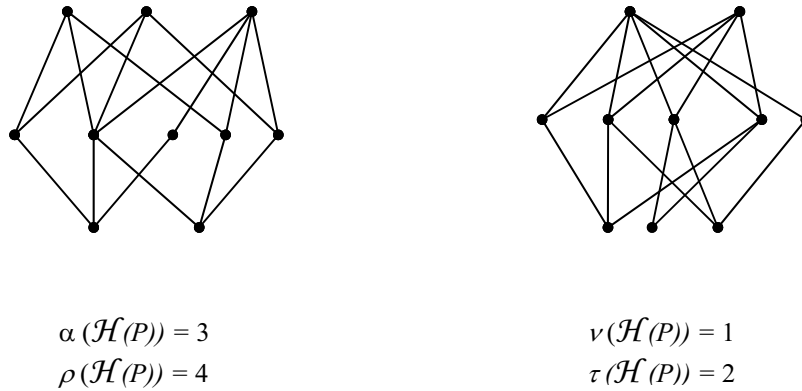


Figure 1-22

5. Quelques définitions sur les graphes

Définitions 5.1

Soit $G = (V, E)$ un graphe où V désigne l'ensemble de ses sommets et E désigne l'ensemble de ses arêtes.

Deux sommets x_1, x_2 se trouvant dans une même arête sont dits adjacents dans G . L'arête est notée simplement x_1x_2 ou $\{x_1, x_2\}$. Les sommets x_1 et x_2 sont appelés les extrémités de cette arête.

On appelle graphe *complémentaire* de G , le graphe $\bar{G} = (V, \bar{E})$ où $(u, v) \in \bar{E}$ si et seulement si $(u, v) \notin E$.

Une *chaîne* (élémentaire) de longueur k est une séquence $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ de sommets distincts tels que x_i est adjacent à x_{i+1} pour tout indice $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$. Les sommets x_0 et x_p sont appelés les extrémités de la chaîne. Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite simple.

Un *cycle* (élémentaire) est une séquence $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ de sommets distincts tels que $\{x_i, x_{i+1}\}$ est une arête de G , pour $i \leq p-1$ $\{x_0, x_p\} \in E$. La longueur d'un tel cycle est $p+1$. En d'autres termes, un cycle est une chaîne dont les extrémités sont adjacentes.

Toute arête d'un graphe G qui relie deux sommets non consécutifs d'une chaîne donnée (resp. d'un cycle donné) est appelée une *corde* de la chaîne (resp. du cycle).

Un cycle sans corde ayant k sommets (de longueur k) est désigné par C_k . Un cycle élémentaire de longueur au moins quatre sans corde est appelé *trou*. Un *anti-trou* est le complémentaire d'un trou.

Les graphes ne contenant pas comme sous-graphe induit, un trou impair ou anti-trou impair sont appelés graphes de *Berge*.

Un graphe *parfait* est un graphe G pour lequel $\alpha(G') = \theta(G')$ pour tout sous graphe induit G' de G , où $\alpha(G')$ (resp. $\theta(G')$) représente la cardinalité maximum d'un ensemble stable de G' (respectivement la cardinalité minimum d'un recouvrement de G' par des cliques). De manière équivalent, G est parfait si $\gamma(G') = \omega(G')$ où $\omega(G')$ (resp. $\gamma(G')$) est le nombre maximum de sommets qui forment une clique dans G' (respectivement le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier les sommets de G' de sorte que deux sommets adjacents ne soient pas de même couleur).

Théorème 4 [11]

Un graphe est parfait si et seulement s'il est de Berge.

Une condition suffisante pour qu'un hypergraphe satisfait la propriété de *König* est sa normalité [2]. la normalité est caractérisé par le théorème 5.

Théorème 5 [2]

Un hypergraphe \mathcal{H} est normal si et seulement si \mathcal{H} satisfait la propriété de Helly et $L(\mathcal{H})$ est un graphe parfait.

Le lien existant entre la normalité et la propriété de *König* est donné par le théorème suivant :

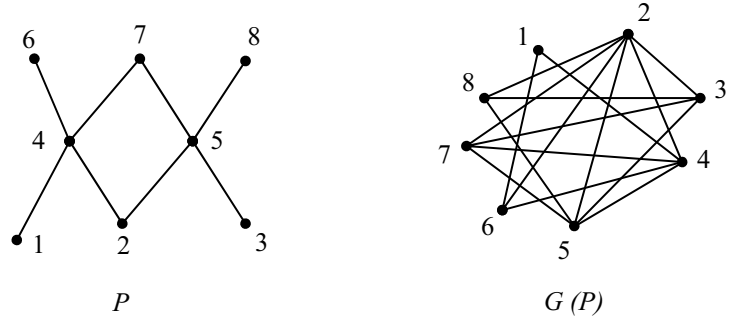
Théorème 6 [2]

Un hypergraphe normal possède la propriété de König.

6. Graphe représentatif des intervalles maximaux d'un poset

Définitions 6.1

Soit P un poset et $\mathcal{H}(P)$ l'hypergraphe dont les sommets sont les points de P et dont les arêtes sont ses intervalles maximaux. Le *graphe représentatif* des intervalles maximaux de P , noté $G(P)$ (ou graphe 2-section de $\mathcal{H}(P)$)= (V, A) est le graphe dont les sommets sont les éléments de P et deux sommets sont adjacents si et seulement si il appartiennent a un même intervalle de P .



$$G(P) = L(\mathcal{H}^*(P))$$

Figure 1-23

Le graphe de comparabilité $G_P = (X_P, E_P)$ du poset P est le graphe simple où deux sommets sont reliés s'ils sont comparable dans P . En d'autre terme, $\{x, y\} \in E_P$ si $x < y$ ou $y < x$.

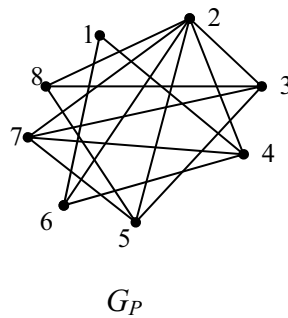


Figure 1-24

Exemple 6.1

Les graphes sans P_4 (chaîne élémentaire à 4 sommets et sans corde) sont les graphes de comparabilité des posets sans N (N représente un sous ensemble à quatre éléments $\{a, b, c, d\}$ tels que les seules relations de comparabilité sont $a < c, b < c, b < d, a // b, a // d, c // d$).

Chapitre 2

**Propriétés de König et duale
de König de l'hypergraphe
des intervalles
d'un poset**

Introduction

Dans ce chapitre nous donnons quelques classes d'ordres dont l'hypergraphe de leurs intervalles maximaux vérifiant la propriété de König et/ou duale de König.

1. Ordres Séries parallèles

Définition 1.1

Un poset est dit *série-parallèle* s'il peut être construit à partir des singletons en utilisant seulement la somme disjointe (+) et la somme linéaire (\oplus). De manière équivalente, P peut être décomposé en singletons en utilisant que ces deux opérations.

Exemple 1.1

Le poset illustré dans la Figure 2-1 est un ordre série-parallèle.

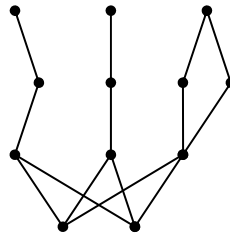
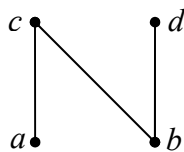


Figure 2-1

$$P = (1 + 1) \oplus ((1 \oplus 1 \oplus 1) + (1 \oplus 1 \oplus 1) + (1 \oplus (1 + 1) \oplus 1))$$

Proposition 1.1 [27]

Les posets séries-parallèles sont caractérisés par le fait de ne pas contenir de sous poset isomorphe à N . (N représente un sous ensemble à quatre éléments $\{a, b, c, d\}$ tels que les seules relations de comparabilité sont $a < c, b < c, b < d, a // b, a // d, c // d$).



N

Figure 2-2

Remarque 1.1

Cette caractérisation permet de dire que si P est en plus connexe, alors chaque élément maximal est au dessus de chaque élément minimal. En effet, soit x (resp. y) un élément maximal (resp. minimal) dans P . comme P est connexe, il existe un plus court 'zig-zig' $x = p_0 > p_1 < p_2 > \dots < p_{k-1} > p_k = y$, $k \geq 1$, connectant x à y . Or P ne contient pas de sous poset induit isomorphe à N , donc $k = 1$ et par suite $x > y$.

Théorème 1.1 [6]

Si P est un poset série parallèle, alors $\mathcal{H}(P)$ a la propriété de König et la propriété duale de König.

2. Posets sans N

Définition 2.1

Soit P un poset, P est dit sans N s'il ne contient pas la forme N dans son diagramme de Hasse.

Exemple 2.1

Le poset de la Figure 2-3 est sans N mais n'est pas série parallèle

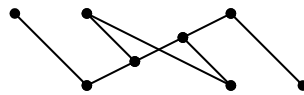


Figure 2-3

I. RIVAL et N. ZAGUIA [28] montrent que les posets sans N peuvent être construits à partir de la somme directe et l'opération de gluig.

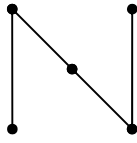
Remarque 2.1

La classe des posets sans N contient la classe des posets séries parallèles.

Théorème 2.2 [24]

Soit P un poset

P est série parallèle $\Leftrightarrow P$ est sans N et P ne contient pas N' comme sous poset induit.



N'

Figure 2-4

Remarque 2.2

Notons que la propriété de König n'est pas vérifiée en général pour les posets sans N , le poset illustré dans la Figure 2-5 vérifié $\nu(\mathcal{H}(P)) = 1$ et $\tau(\mathcal{H}(P)) = 2$.

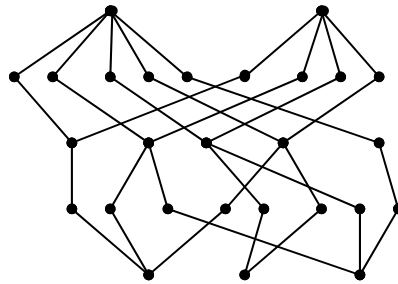


Figure 2-5

3. Généralisation de la classe des posets sans N

Définition 3.1

Un poset est dit de la classe C [21] (resp. C' [7]) s'il n'a pas un sous poset induit isomorphe à P_1, P_2, P_3 (resp. P_1, P_2, P_3, P_4) de la Figure 2.6 et à leurs duaux où P_3 est à n sommets $n \geq 6$.

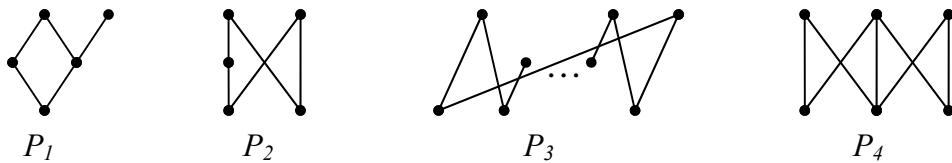


Figure 2-6

Remarque 3.1

La classe C contient les posets sans N et par conséquent les posets séries parallèles.

Théorème 3.1 [21]

L'hypergraphe des intervalles d'un poset de la classe C a la propriété duale de König

Définition 3.2

G est un graphe distance héréditaire si et seulement si G n'a pas un sous graphe induit isomorphe à un diamant, une maison, un trou (cycle de longueur supérieure ou égale à 4) et un domino.

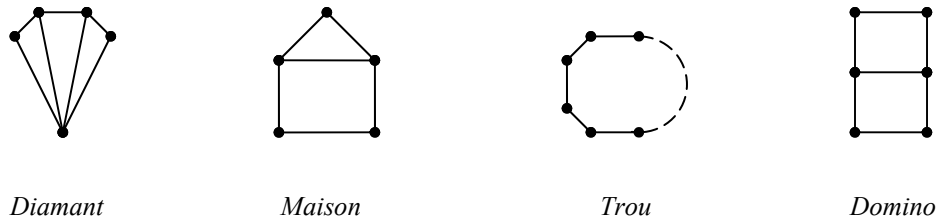


Figure 2-7

Les graphes de comparabilité pour les posets de la classe C' sont caractérisés par le fait de ne pas contenir les quatre sous graphes de la Figure 2-7.

Proposition 3.1 [7]

Soit P un poset. $P \in C'$ si et seulement si le graphe de comparabilité de P est un graphe distance héréditaire.

4. Ordre d'intervalles

Définition 4.1

Un poset P est un ordre d'intervalles s'il existe un bijection $\varphi : P \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$ qui associe à chaque sommet de P un intervalle de la droite réelle tel que, pour tout couple (u, v) de P , on a:

$$u < v \text{ dans } P \Leftrightarrow \sup\varphi(u) < \inf\varphi(v)$$

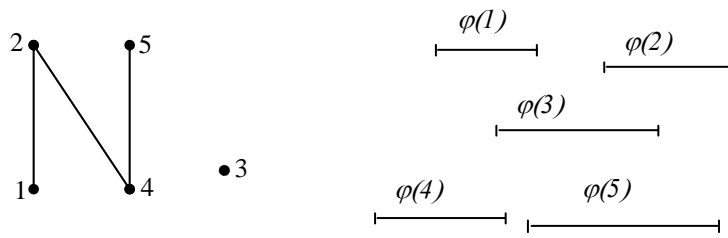


Figure 2-8

Remarque 4.1

P. C. Fishburn en 1985 [6], a caractérisé les ordres d'intervalles par la non existence d'un sous poset induit isomorphe au poset illustré dans Figure 2-9.

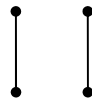


Figure 2-9

I. Bouchemakh et K. Engel ont montré en 1997 que si P est un poset d'intervalles, alors la détermination des invariants ν , α , ρ et τ dans $\mathcal{H}(P)$ est polynomiale. Aussi ils ont montré qu'un hypergraphe $\mathcal{H}(P)$ possède la propriété de König et la propriété duale de König quand P est un poset d'intervalles.

Théorème 4.1 [6]

Si P est un ordre d'intervalles, alors $\mathcal{H}(P)$ a la propriété de König et la propriété duale de König.

5. Ordre de trapèzes

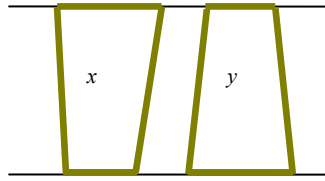
Définition 5.1

P est un ordre de trapèzes s'il existe une application bijective $\psi : P \rightarrow T$

$$x \rightarrow T_x$$

où T l'ensemble des trapèzes. L'ordre sur P est donné par :

$$x <_P y \Leftrightarrow T_x \text{ est complètement à gauche de } T_y$$



$x < y$ dans P

Figure 2-10

$x // y$ si et seulement si $T_x \cap T_y \neq \emptyset$

Remarque 5.1

Un ordre d'intervalles est un ordre de trapèzes mais un ordre de trapèzes peut ne pas être un ordre d'intervalles.

Théorème 5.1 [1]

Si P est un ordre de trapèzes, alors $\mathcal{H}(P)$ a la propriété duale de König, autrement dit :

$$\alpha(\mathcal{H}(P)) = \rho(\mathcal{H}(P))$$

6. Classes des ordres SSSC et SSC

6.1. Propriété duale de König dans le cas général

Théorème 6.1 [4]

Soit P un poset rangé et $\mathcal{H}(P)$ l'hypergraphe des intervalles maximaux de P . $\mathcal{H}(P)$ a la propriété de König et duale de König si une des conditions suivantes est réalisée :

- 1) $W_0 = 1$ ou $W_{r(P)} = 1$.
- 2) $r(P) = 1$.
- 3) Le diagramme de Hasse est un arbre.
- 4) $W_0 = W_{r(P)} = 2$.

6.2. Ordre SSSC

Définition 6.2

Soit P un poset rangé de rang n . Nous disons que P est un ordre à chaînes semi-symétriques spéciales ou brièvement un ordre SSSC s'il existe une décomposition de P en chaînes semi-symétriques avec la propriété supplémentaire suivante :

Si $C = (c_1 \cup \dots \cup c_h)$ est une chaîne de la décomposition où h n'est pas un élément maximal de P alors il existe une chaîne D de la décomposition telle que $D = (d_0 \cup \dots \cup d_{h+1})$ avec $d_0 \cup c_1$ et $c_h \cup d_{h+1}$

Exemple 6.2

P est un ordre SSSC.

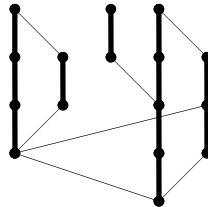


Figure 2-11

Théorème 6.2 [11]

Si P est un ordre SSSC alors :

$$\alpha(\mathcal{H}(P_{l,u})) = \rho(\mathcal{H}(P_{l,u})) = \text{Max} \{ |N_l|, |N_u| \}$$

pour tout l, u avec $0 \leq l \leq u \leq n-1$.

6.3. Ordre SSC

Définition 6.3

Nous disons que P est un ordre à chaînes symétriques spéciales (brièvement SSC) s'il existe une décomposition de P en chaînes symétriques avec la propriété suivante :

Si $C = (c_1 \cup \dots \cup c_h)$ est une chaîne de la décomposition qui n'est pas de longueur maximum alors il existe une chaîne D de la décomposition telle que $D = (d_0 \cup \dots \cup d_{h+1})$ avec $d_0 \cup c_1$ et $c_h \cup d_{h+1}$

Exemple 6.3

P est un ordre SSC.

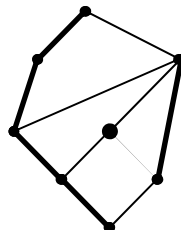


Figure 2-12

Théorème 6.3 [11]

Si P est un ordre SSC alors $\mathcal{H}(P)$ alors :

$$\alpha(\mathcal{H}(P_{l,u})) = \rho(\mathcal{H}(P_{l,u})) = \text{Max} \{ |N_l|, |N_u| \}$$

pour tout l, u avec $0 \leq l \leq u \leq n$.

7. Treillis linéaire, treillis des faces du n -cube et poset $L(m, n)$

7.1 Treillis linéaire

Le treillis linéaire $L_n(q)$ est constitué de tous les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel V de dimension n sur le corps de Galois, ordonné par inclusion. La Figure 2-13 illustre $L_3(2)$.

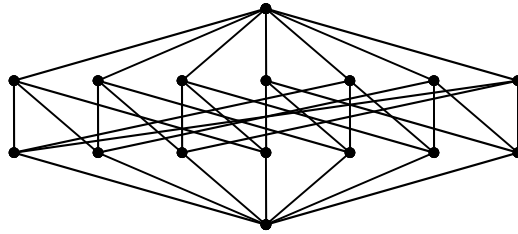


Figure 2-13

La fonction de rang représente la dimension. Le nombre de Whitney W_i est égal au nombre de sous-espaces vectoriels de dimension i sur V , c'est-à-dire la valeur du coefficient de Gauss

$$\binom{n}{i}_q = \frac{(q^n - 1) \dots (q^{n-i+1} - 1)}{(q^i - 1) \dots (q - 1)}$$

pour tout l, u avec $0 \leq l \leq u \leq n$.

Théorème 7.1 [4]

L'hypergraphe des intervalles du treillis linéaire vérifie :

$$\alpha(\mathcal{H}(L_n(q)_{l,u})) = \text{Max} \left\{ \binom{n}{l}_q, \binom{n}{u}_q \right\}.$$

7.2 Treillis des faces de n -cube

Soit le n -cube suivant $Q_n = \{ \underline{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; 0 \leq x_i \leq 1 \}$. Une face de Q_n est un sous ensemble F de la forme suivante :

$F = \{ \underline{X} \in Q_n : x_i = 0 \text{ pour } i \text{ dans } I, x_i = 1 \text{ pour } i \text{ dans } J \text{ et } 0 \leq x_i \leq 1 \text{ sinon} \}$

où I et J sont des sous ensembles de $[n]$, vérifiant $I \cap J = \emptyset$. Le treillis C_n est l'ensemble de toutes les faces de Q_n ordonné par inclusion auquel on rajoute un élément qui soit inférieur à tous les éléments du niveau N_0 . La fonction de rang est la fonction qui associe à une face F de Q_n , le nombre de ses composantes libres (celles dont l'indice n'appartient pas à $I \cup J$). Par suite, le i^{ieme} nombre de Whitney W_i est égal à $2^{n-i} \binom{n}{i}$.

Théorème 7.2 [8]

L'hypergraphe des intervalles du treillis des faces du n -cube vérifie:

$$\alpha(\mathcal{H}(C_n)_{l,u}) = \text{Max} \left\{ 2^{n-l} \binom{n}{l}, 2^{n-u} \binom{n}{u} \right\}$$

pour tout l, u avec $0 \leq l \leq u \leq n$.

7.3 Poset $L(m, n)$

Les éléments $L(m, n)$ sont les n -uples $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ avec $a_1 \leq \dots \leq a_n \leq m$ ordonnés par :

$$\underline{a} \leq \underline{b} \text{ si et seulement si } a_i \leq b_i \text{ pour tout } i$$

$L(m, n)$ est rangé et $r(P) = mn$. L'application r définie par $r(\underline{a}) = a_1 + \dots + a_n$ est une fonction de rang.

Théorème 7.3 [4]

$\mathcal{H}(L(m, n))$ vérifié :

$$\alpha(\mathcal{H}(L(m, n))_{l,u}) = \rho(\mathcal{H}(L(m, n))_{l,u}) = \text{Max} \{ |N_l|, |N_u| \} \text{ pour tout } l, 0 \leq l \leq m.$$

Chapitre 3

Classe des posets

sans cycle

induit

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la classe des posets sans cycles induits. Nous exposons quelques résultats connus dans la littérature.

1. Posets sans cycle induit

Définitions 1.1

1. Soit P un poset et n un entier non nul. Un sous ensemble $C_{2n} = \{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\}$ de P est un *cycle induit* de P s'il vérifie : $x_1 < x_2 > x_3 < x_4 > \dots > x_{2n-1} < x_{2n} > x_1$ et il n'existe pas d'autre relations de comparabilité entre ces $2n$ éléments, (voir la Figure 3-1). En particulier un C_4 est appelé un *papillon*.

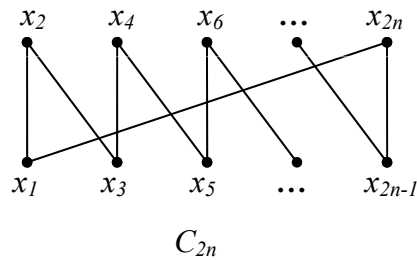


Figure 3-1

2. On dit qu'un poset est *sans cycle induit* s'il ne contient pas C_{2n} .

Exemples 1.1

Les deux posets illustrés dans la Figure 3-2 sont sans cycles induits.

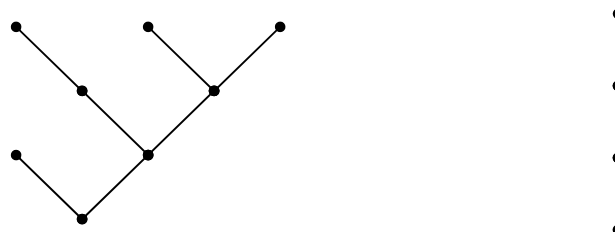


Figure 3-2

Définitions 1.2

On dit qu'un poset P' est une *subdivision* de P si le sous poset induit par les éléments de l'ensemble $\{z \in P'; x \leq z \leq y \text{ dans } P'\}$ est une chaîne de P dès que y couvre x dans P .

Exemple 1.2

La Figure 3-3 représente un cycle subdivisé.

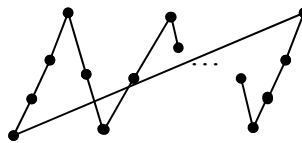


Figure 3-3

Remarque 1.1

1. Notons qu'un poset est sans cycle induit si et seulement si son graphe de comparabilité est un graphe *triangulé* (tout cycle de longueur ≥ 4 contient une corde). Comme il existe un algorithme linéaire pour examiner si un graphe donné est un graphe triangulé ou non [9], alors on peut affirmer qu'il existe un algorithme linéaire de reconnaissance des posets sans cycle induit.
2. La classe des posets sans cycle intersecte une autre classe de posets appelé *ordres à seuils* un ordre à seuils est un ordre partiel P sur l'ensemble $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tel qu'il existe des poids w_1, w_2, \dots, w_n sur ses sommets et un seuil t avec la propriété : C est une chaîne maximale de P si et seulement si $\sum_{v_i \in C} w_i \leq t$. Un ordre à seuil est caractérisé par le fait de ne pas contenir C_4 , $(1 \oplus 1) + (1 \oplus 1)$ et N comme sous poset induit [10].

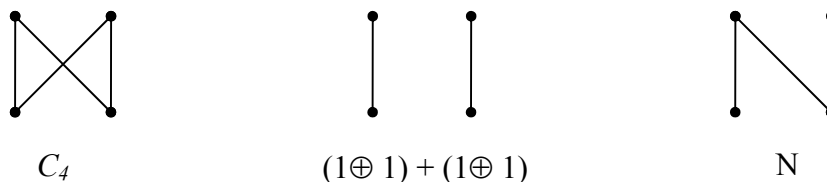


Figure 3-4

Proposition 1.1 [19]

Soit P un poset. Si P possède un sous poset induit isomorphe à P' où P' est un diamant ou un cycle subdivisé avec une hauteur supérieure ou égale à 3 ou un C_{2k} , $k \geq 3$ ou un double papillon dans son diagramme de Hasse, alors P n'est pas sans cycle induit.



Figure 3-5

2. Posets sans cycle induit et ensemble d'articulation**Définitions 2.1**

Soit P un poset. Un sous ensemble K de sommets de P est dit ensemble d'articulation si pour chaque chaîne maximale C , on a :

$$K \cap C \neq \emptyset.$$

Exemple 2.1

Soit N poset illustré dans la Figure 3-6, ses ensembles d'articulations sont $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, d\}$ avec $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$ sont des antichaînes.

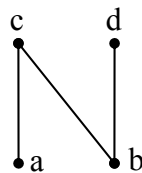


Figure 3-6

Définitions 2.2

Soit P un poset rangé, on dit que P est *régulier* si pour tout élément x de P le nombre de sommets qui couvrent (resp. couverts par) x ne dépend que de niveau de x . En d'autres termes :

$$|\{y \in P : y \succ x\}| = |\{y \in P : y \succ x'\}| \quad \forall x, x' \in N_i, i = 0, \dots, r(P) - 1.$$

et

$$|\{y \in P : y \prec x\}| = |\{y \in P : y \prec x'\}| \quad \forall x, x' \in N_i, i = 1, \dots, r(P) - 1.$$

Exemple 2.2

$L_3(2)$ est un poset régulier.

Il existe une relation liant les ensembles d'articulations et les posets sans cycles induits.

Théorème 2.1 [26]

Soit P un poset régulier fini. P est une union d'ensembles d'articulations qui sont des antichaînes si et seulement si P ne contient pas un cycle induit.

3. Extension linéaire et dimension

La notion de *dimension* d'un poset apparaît pour la première fois dans le livre de *Dushnik et Miller* [14]. Rappelons l'essentiel de cet invariant.

Définition 3.1

Soit $(P, <)$ un poset. Une *extension linéaire* L de P est un ordre totale sur P telle que :

$$\forall (x, y) \in P \times P, x < y \implies x <_L y$$

Exemple 3.1

L est une extension linéaire de P .

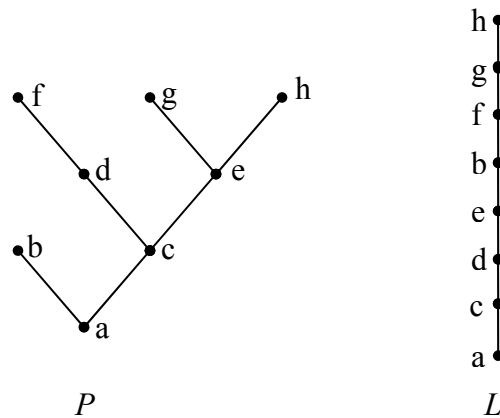


Figure 3-7

Lemme 3.1

Soit $P = (P, <)$ un poset et soient x et y deux éléments incomparables de P . Alors il existe une extension linéaire de P telle que $x <_L y$.

Ce lemme a pour conséquence directe le théorème de *Dushnik & Miller*.

Théorème 3.1 [14]

Tout poset est l'intersection de ses extensions linéaires.

Définition 3.2

On appelle réalisateur du poset P tout ensemble (L_1, L_2, \dots, L_k) d'extensions linéaires de P telles que :

$$P = \bigcap L_i$$

La dimension de P , noté par $\dim(P)$, est la taille minimum d'un réalisateur de P .

Lemme 3.2

Soit M un ensemble d'extensions linéaires d'un poset P , alors M est un réalisateur de P si et seulement si pour chaque paire (x, y) de P , il existe une extension linéaire $L \in M$ telle que $y <_L x$.

Hiraguchi a prouvé que la dimension d'un poset ne peut excéder la moitié de sa taille.

Théorème 3.2 [18]

Soit P un poset à n éléments, $n \geq 4$. La dimension de P est au plus égale à $n/2$.

Algorithme de détermination des extensions linéaire

Des applications successives produisent une extension linéaire :

- soit $P = P_1$. Si P_1 contient deux éléments incomparables a_1 et b_1 , alors on construit P_2 avec la relation $a_1 < b_1$.
- Si P_2 contient deux éléments incomparables a_2 et b_2 , alors on construit P_3 avec la relation $a_2 < b_2$.
- Répétez cette procédure jusqu'à ce que il n'y ait pas des pairs incomparables.

D'après cet algorithme, on commence avec un élément minimal x_1 de P et on rejointe progressivement des relations de comparabilité pour définir l'ordre linéaire $x_1 <_L x_2 <_L \dots$, et on termine par l'élément maximal x_n de P .

Exemples 3.2

Soit N le poset de la Figure 3-6. N admet 5 extensions linéaires.

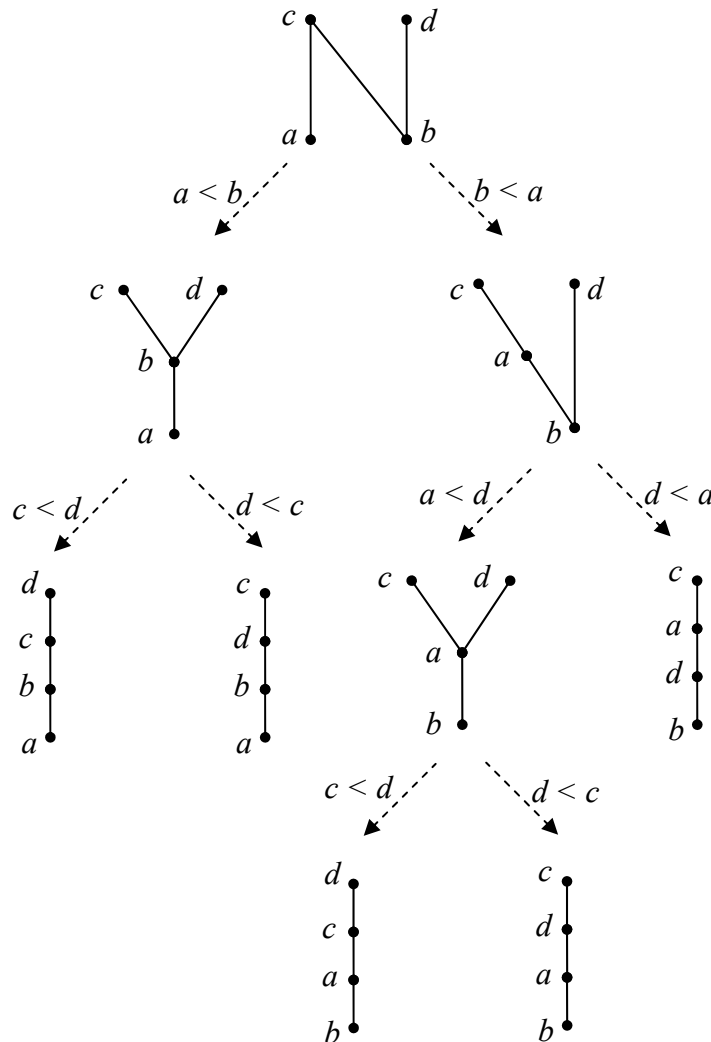


Figure 3-8

Remarque 3.1

Si P un poset et $L(P)$ le nombre de ses extensions linéaires, alors on a:

$$L(P) = \sum_{m \text{ minimal}} L(P \setminus \{m\}) \quad (*) \quad [29]$$

Exemple 3.3

1. Soit P poset sans cycle induit et soit $L^{xy\dots}$ la sténographie de la notation $L(P \setminus \{x, y, \dots\})$, alors :

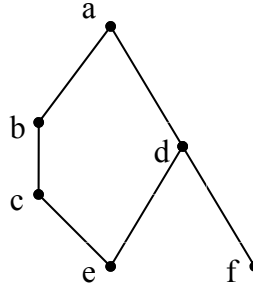


Figure 3.9

On retrouve les 9 extensions par la formule (*).

$$\begin{aligned}
 L(P) &= L^e + L^f \\
 &= (L^{ec} + L^{ef}) + L^{fe} \\
 &= ((L^{ecb} + L^{ecf}) + (L^{efc} + L^{efd})) + (L^{fec} + L^{fed}) \\
 &= ((L^{ecbf} + (L^{ecfb} + L^{ecfd})) + ((L^{efcb} + L^{efcd}) + L^{efdc})) + ((L^{fecb} + L^{fecd}) + L^{fedc}) \\
 &= L^{ecbfd} + L^{ecfbd} + L^{ecfdb} + L^{efcbd} + L^{efcdb} + L^{efdcb} + L^{fecbd} + L^{fecdb} + L^{fedcb} \\
 &= L^{ecbfda} + L^{ecfbda} + L^{ecfdba} + L^{efcbda} + L^{efcdba} + L^{efdcba} + L^{fecbda} + L^{fecdba} + L^{fedcba} \\
 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9
 \end{aligned}$$

On obtient les chaînes:

- $L_1: e < c < b < f < d < a$
- $L_2: e < c < f < b < d < a$
- $L_3: e < c < f < d < b < a$
- $L_4: e < f < c < b < d < a$
- $L_5: e < f < c < d < b < a$
- $L_6: e < f < d < c < b < a$
- $L_7: f < e < c < b < d < a$
- $L_8: f < e < c < d < b < a$
- $L_9: f < e < d < c < b < a$

Notons que l'union des deux extensions $L_1: e < c < b < f < d < a$ et $L_9: f < e < d < c < b < a$ donnent P , comme P n'est pas une chaîne alors $\dim(P) = 2$.

Si $\{L_1, L_9\}$ forment P , alors $x <_P y$ si et seulement si $x <_{L_1} y$ et $x <_{L_9} y$.

2. On peut retrouver les 5 extensions linéaires et son nombre de ces extensions de l'exemple de la Figure 3-8 par la formule (*).

$$\begin{aligned}
 L(N) &= L^a + L^b \\
 &= (L^{ab} + L^{ba}) + L^{bd} \\
 &= (L^{abc} + L^{abd}) + (L^{bac} + L^{bad} + L^{bda}) \\
 &= L^{abcd} + L^{abdc} + L^{bacd} + L^{badc} + L^{bdac} \\
 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5.
 \end{aligned}$$

On obtient les chaînes:

$$L_1: a < b < c < d$$

$$L_2: a < b < d < c$$

$$L_3: b < a < c < d$$

$$L_4: b < a < d < c$$

$$L_5: b < d < a < c$$

$L_1: a < b < c < d$ et $L_5: b < d < a < c$ forment N , alors $\dim(N) = 2$.

Remarques 3.2

- Une chaîne n'admet qu'une seule extension linéaire (elle-même).
- Chaque poset qui n'est pas une chaîne a plus d'une extension linéaire, et toute antichaîne à n éléments a $n!$ extensions linéaires.
- La restriction de l'extension linéaire à quelques éléments est aussi une extension linéaire d'un sous poset.
- La dimension est croissante, c'est à dire si P est un poset, alors :

$$\dim(Q) \leq \dim(P)$$

pour tout sous poset Q de P .

- Il existe un poset avec un petit nombre d'éléments mais avec une dimension élevée
- Considérons deux posets P et Q avec $\dim(P) = p$ et $\dim(Q) = q$, nous avons :

$$\dim(P \oplus Q) = \max\{p, q\}, \dim(P \cup Q) = \max\{p, q, 2\} \text{ et } \dim(P \times Q) \leq p+q.$$

4. Paramètres $L(P)$, $s(P)$ et $dim(P)$ dans la classe des posets sans cycles induits

Soit L une extension linéaire de P . L peut s'écrire sous la forme d'une somme linéaire

$$L = C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_m$$

de chaînes disjointes C_1, C_2, \dots, C_m dans P , dont l'union est P et tels que : $x \in C_i, x' \in C_j$ et $x < x'$ implique que $i < j$.

On peut supposer que les chaînes sont maximales, c'est-à-dire le dernier élément de C_i ($\max C_i$) est incomparable avec le premier élément de C_{i+1} ($\min C_{i+1}$). Les paires $(\max C_i, \min C_{i+1})$ sont appelés les sauts de P .

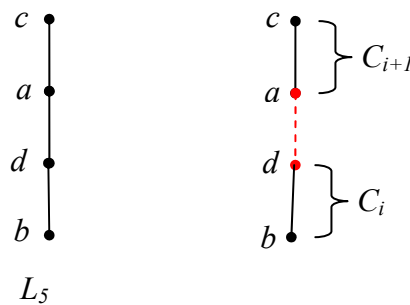


Figure 3-10

Notons par $s_p(L)$ le nombre de sauts de L .

Le nombre de sauts de P est la valeur :

$$s(P) = \min \{s_p(L) : L \text{ est l'extension linéaire de } P\}$$

Exemple 4.1

N le poset de la Figure 3-8. $s_p(L_1) = 2, s_p(L_2) = 2, s_p(L_3) = 2, s_p(L_4) = 3, s_p(L_5) = 1$ donc $s(P) = 1$.

Définition 4.1

Soit P un poset de largeur $w(P)$, P est dit poset de Dilworth si $s(P) = w(P) - 1$.

Théorème 4.1 [13]

Si P un poset sans cycle induit, alors P est un poset de Dilworth.

Définition 4.2

Soit P un poset et $C = \{C_1, \dots, C_{w(P)}\}$ un recouvrement de P . La chaîne C_i est dite initiale si pour $j \in [1, w(P)]$, $j \neq i$, $\forall x \in C_i - \cup C_j$, $\forall y \in C_j - C_i$, $x \dots y$.

Duffus, Rival et Winkler [13] ont prouvé que pour un poset sans cycle induit il existe toujours une telle chaîne initiale. Celle-ci permet de écrire l'algorithme qui détermine le saut optimal $s(P)$.

Algorithme :

Entrée : un poset P et une collection C ensemble de $w(P)$ chaînes maximales qui couvrent P .

Sortie : L est une extension linéaire de saut optimal.

Tant que (C est non vide)

Faire

Etape 1 :

Trouver la chaîne initiale C_i dans C

Etape 2 :

$D \leftarrow \{x \in C_i / x \leq \max \{C_i - \cup C_j\}\}$;

$P \leftarrow P - D$;

$C \leftarrow C - C_i$;

$L \leftarrow L \oplus D$;

Fin

Exemple 4.2

Soit P le poset de la Figure 3-6, $C_1 = \{a < c\}$ et $C_2 = \{b < d\}$ présentent une couverture de P avec $w(P) = 2$.

$\forall x \in C_2 - C_1 = \{b, d\}$ et $\forall y \in C_1 - C_2 = \{a, c\}$. On a $y \dots x$.

C_1 n'est pas une chaîne initiale.

C_2 est une chaîne initiale.

1^{ère} itération

$L = \emptyset$, C_2 une chaîne initiale.

$$D = \{x \in C_2, x \leq C_2 - C_1\} = \{b, d\}$$

$$P = \{a, c\}$$

$$C = C - C_2 = C_1$$

$$L = L \oplus D = \{b, d\}$$



2^{ème} itération

$$P = \{a, c\}$$

$$C_1 = \{a, c\}$$

$$D = C_1$$

$$L = \{b, d\} \oplus \{a, c\}$$



Donc on obtient une extension linéaire avec un saut optimal

Théorème 4.2 [9]

Soit P un poset sans cycle induit, alors $s(P) = w(P) - 1$. De plus, l'extension linéaire de saut optimal de P peut être calculer linéairement dès qu'il existe un recouvrement de poset par $w(P)$ chaîne maximales.

Quand le recouvrement de P en chaînes est donné, l'algorithme ci-dessus peut être exécuté en $O(|P| + m)$, où m est le nombre d'arêtes du diagramme de Hasse de P .

V. Bouchitte et M. Habib [9] ont conjecturé que $L(P)$ et $dim(P)$ sont polynomiaux pour les poset sans cycle induit.

5. Fonction de Möbius et poset sans cycle induit

Définition 5.1

Soit P un poset et $Int(P)$ l'ensemble de ses intervalles.

La fonction de Möbius $\mu : Int(P) \rightarrow \mathbb{Z}$ est définie par :

$$\mu(x, x) = 1, \text{ pour } x \in P.$$

$$\mu(x, y) = - \sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) \text{ pour } x < y \text{ dans } P.$$

Où $\mu(x, y)$ représente l'image de l'intervalle $[x, y]$.

Exemple 5.1

Soit la chaîne $C = c_0 < c_1 < \dots < c_n$.

$$\mu(c_i, c_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i + 1 = j \\ 0 & \text{sin on} \end{cases}$$

Théorème 5.1 [17]

Soit P un poset fini et soit \vee le poset obtenu à partir de P en joignant \hat{o} et \hat{i} .

Soit c_i le nombre de chaînes $\hat{o} = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \hat{i}$ de longueur i entre \hat{o} et \hat{i} . alors:

$$\mu_{\vee}(\hat{o}, \hat{i}) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \dots$$

Définition 5.2

Le nombre $\mu_{\vee}(\hat{o}, \hat{i})$ défini dans le théorème 5.1 est appelé *nombre de Möbius* et noté $\mu(P)$

Définition 5.3

Un poset est dit μ -positif si $\mu(Q) \geq 0$ pour tout sous poset non vide Q de P .

Les posets μ -positifs peuvent être complètement caractérisé

Théorème 5.2 [20]

Un poset est μ -positive si et seulement si il est sans cycle induit.

Définition 5.4

Soit R la relation d'équivalence dans P définie par :

$$x R y \Leftrightarrow \text{il existe un zig zag de } P \text{ reliant } x \text{ à } y.$$

Les classes d'équivalence de la relation R sont appelées composantes connexes de P .

Comme interprétation combinatoire, nous avons :

Théorème 5.3 [20]

Supposons que P est μ -positive (ou sans cycle induit) alors :

$\mu(Q) = (\text{nombre de composantes connexe de } Q) - 1$, pour tout sous poset induit Q de P .

Il est possible d'obtenir une caractérisation constructive des posets sans cycle induit. Pour se faire, introduisons quelques résultats intermédiaires.

6. Construction des posets sans cycle induit

Définition 6.2

Soit P un poset sans cycle induit. Notons par $Top(P)$ (resp. $Bot(P)$) l'ensemble des éléments $x \in P$ tels que les éléments supérieurs à x (resp. inférieurs) sont linéairement ordonnés.

Puisque l'existence d'un élément $x \in P$ plus grand que deux éléments a, b avec $a // b$ et plus petit que deux autres éléments c, d avec $c // d$ produit un cycle P_2 .



Figure 3-11

Lemme 6.2 [20]

Si P est un poset sans cycle induit, alors :

$$Top(P) \cup Bot(P) = P$$

Par ailleurs, tout graphe triangulé contient un sommet dont les voisins forment une clique [20]. En terme de poset, ce résultat se traduit par :

Lemme 6.3 [20]

Si P est un poset sans cycle induit, alors :

$$Top(P) \cap Bot(P) \neq \emptyset$$

En d'autres termes, il existe un élément $x \in P$ tel que l'ensemble de tous les éléments y qui sont comparables à x forment une chaîne.

Corollaire 6.1 [20]

Soit P est un poset sans cycle induit. Alors P peut être construit en adjoignant successivement une séquence d'éléments $x_1, x_2, \dots, x_{|P|}$, tel que pour tout i , l'ensemble des éléments comparables à x_i dans $\{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ forme une chaîne.

Par le corollaire 6.1, on construit l'algorithme traduit en algorithme suivant :

Algorithme récursif de construction d'un poset sans cycle induit

Pour obtenir un poset sans cycle induit de taille $n+1$, commençons avec un poset P sans cycle induit de la taille n , et puis faire une des opérations suivantes:

- Choisir un élément $y \in Bot(P)$ et ajouter un élément x couvrant y .
- Choisir un élément $z \in Top(P)$ et ajouter un élément x couvert par z .
- Choisir des éléments $y \in Bot(P)$ et $z \in Top(P)$ avec $y < z$, et ajouter un élément x couvrant y et couvert par z .
- Ajouter un sommet isolé x .

Le diagramme suivant illustre un poset sans cycle induit. Par symétrie on se représente que la partie droite des étapes de l'algorithme.

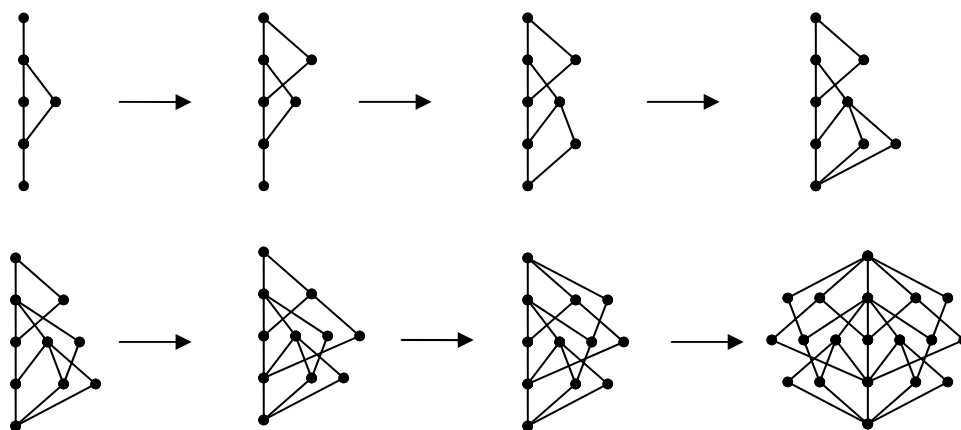


Figure 3-12

Chapitre 4

**Propriété duale de König
pour la classe des posets
sans cycle induit**

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons montrer la propriété duale de König de l'hypergraphe des intervalles d'un poset sans cycle induit. Cette classe intersecte la classe des ordres séries-parallèles [6], et la classe des posets [7] dont les graphes de comparabilité sont des graphes distance héréditaire. Il est prouvé que les deux dernières classes possèdent la propriété duale de König.

1. Poset sans cycle induit

Définition 1.1

Soit P un poset et k un entier non nul. Un sous ensemble $V_k = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ de P est un zig zag induit de P s'il vérifie : $x_1 < x_2 > x_3 < x_4 > \dots > x_k$ et il n'existe pas d'autre relations de comparabilité entre ces k éléments.

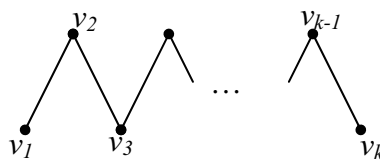


Figure 4.1

Définition 1.2

Classons les zig zag en quatre classes

Soient Z_{2n} et Z_{2n+1} les deux zig zag suivants :

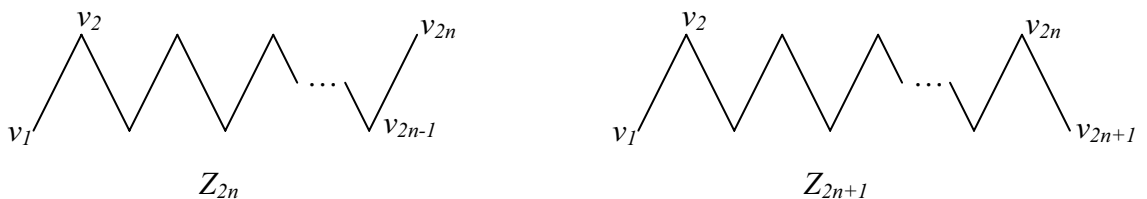


Figure 4.2

Z_{2n} (resp. Z_{2n+1}) est un poset à $2n$ (resp. $2n+1$) sommets $\{v_1, v_2, \dots, v_{2n}\}$ (resp. $\{v_1, v_2, \dots, v_{2n+1}\}$) où les seules relations de comparabilité sont $v_1 < v_2 > \dots < v_{2n}$ (resp. $v_1 < v_2 > \dots > v_{2n+1}$).

Notons par $\mathcal{Z}_1 = \{P : \exists n \in \mathbb{N}^* P \text{ est isomorphe à } Z_{2n}\}$ et par $\mathcal{Z}_2 = \{P : \exists n \in \mathbb{N}^* P \text{ est isomorphe à } Z_{2n+1}\}$, $\mathcal{Z}_3 = \{Z^* : Z \in \mathcal{Z}_1\}$ et $\mathcal{Z}_4 = \{Z^* : Z \in \mathcal{Z}_2\}$.

Proposition 1.1

Si $L(\mathcal{H}^*)$ contient un cycle $C_k = (x_1 e_1 x_2 e_2 \dots x_k e_k x_1)$ de longueur k impair, alors P contient un zig zag reliant x_1 à x_k dont les sommets sont dans $\{x_1, \dots, x_k\} \cup \{p_i, q_i, i = 1, \dots, k\}$ où $[p_i, q_i]$ est un intervalle maximal contenant x_i et x_{i+1} .

Preuve

Soit x_1 le premier sommet du zig zag Z et soit $i \geq 2$. Supposons qu'on a construit $i-1$ sommets $v_1 \dots v_{i-1}$ du Z .

Si v_{i-1} est un élément maximal, alors $v_{i-1} = x_j$ ou $v_{i-1} = q_j, j \geq i-1$.

Nous examinerons que le cas où $v_{i-1} = x_j$. L'autre cas est similaire.

Cas 1 : $x_j > x_{j+1}$

Si x_{j+1} est non comparable aux autres éléments de Z , on rajoute le sommet x_{j+1} à Z . On obtient un autre zig zag $Z' = Z \cup \{x_{j+1}\}$

Dés que x_{j+1} est comparable à un certain élément de Z , soit i_0 le plus petit indice tel que x_{j+1} est comparable à v_{i_0} . On transforme Z en un autre zig zag en supprimant toute la partie entre v_{i_0} et x_{j+1} et on ajoute x_{j+1} et v_{i_0-1} (resp. v_{i_0} et x_{j+1}) à Z si v_{i_0} est minimal (resp. maximal).

Cas 2 : $x_j < x_{j+1}$

Si x_{j+1} est non comparable aux autres éléments de Z , on rajoute le sommet x_{j+1} à Z . On obtient un autre zig zag $Z' = Z \cup \{x_{j+1}\} - \{x_j\}$.

Lorsque x_{j+1} est comparable à un certain élément de Z , soit i_0 le plus petit indice tel que x_{j+1} est comparable à v_{i_0} . On transforme Z en un autre zig zag en supprimant toute la partie

entre v_{i_0} et x_{j+1} et on ajoute x_{j+1} et v_{i_0-1} (resp. v_{i_0} et x_{j+1}) à Z si v_{i_0} est maximal (resp. minimal).

Cas 3 : $x_j // x_{j+1}$

Si x_{j+1} sont incomparable aux éléments de Z , On modifie Z en $Z' = (Z \cup \{q_j, x_{j+1}\}) - \{x_j\}$.

Si x_{j+1} est comparable à un certain élément de Z , soit i_0 le plus petit indice tel que v_{i_0} comparable à x_{j+1} . On transforme comme précédemment Z en un autre zig zag en supprimant toute la partie entre v_{i_0} et x_{j+1} et on ajoute x_{j+1} (resp. v_{i_0} et x_{j+1}) à Z si v_{i_0} est maximal (resp. minimal).

Si v_{i-1} est un élément minimal, le résultat en découle par dualité.

Définition 1.1

Un poset P est dit sans cycle induit, s'il ne contient pas de sous poset induit isomorphe au poset C_{2k} de la Figure 4.1.

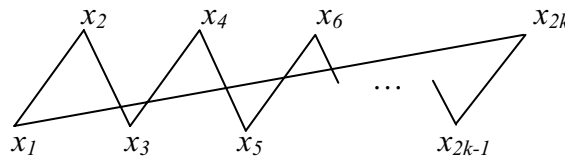


Figure 4 -3

C_{2k} est le poset induit par l'ensemble $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}\}$ où les seules relations de comparabilité sont : $x_1 < x_2 > x_3 < x_4 > \dots > x_{2k-1} < x_{2k} > x_1$.

Nous allons prouver que $L(\mathcal{H}^*(P))$, noté brièvement $L(\mathcal{H}^*)$, est parfait et que $\mathcal{H}^*(P)$ vérifie la propriété de Helly. Les deux conditions nous impliquent la normalité de $\mathcal{H}(P)$ et par suite la propriété duale de König. Rappelons que $L(\mathcal{H}^*)$ est un graphe dont les sommets sont les points de P et deux sommets sont adjacents s'ils appartiennent à un même intervalle de P .

Théorème 1.1

Si P est un poset sans cycle induit, alors $\mathcal{H}^*(P)$ satisfait la propriété de Helly.

Démonstration

Pour montrer que $\mathcal{H}^*(P)$ a la propriété de *Helly*, nous utilisons le résultat de Gilmore [3] qui stipule qu'un hypergraphe satisfait la propriété de *Helly* si et seulement si pour chaque trois arêtes I_1, I_2 et I_3 , il existe une arête de \mathcal{H} contenant $(I_1 \cap I_2) \cup (I_1 \cap I_3) \cup (I_2 \cap I_3)$.

Ainsi, il suffit de montrer que :

$$(I_1 \cap I_2) \subseteq I_3 \text{ ou } (I_1 \cap I_3) \subseteq I_2 \text{ ou } (I_2 \cap I_3) \subseteq I_1,$$

avec $I_1 = [p_1, q_1]$, $I_2 = [p_2, q_2]$ et $I_3 = [p_3, q_3]$

Supposons que ce n'est pas vrai donc :

$$(I_1 \cap I_2) \not\subseteq I_3, (I_1 \cap I_3) \not\subseteq I_2 \text{ et } (I_2 \cap I_3) \not\subseteq I_1$$

Soient x_1, x_2 et x_3 trois sommets de P tels que : $x_1 \in I_2 \cap I_3$ et $x_1 \notin I_1$, $x_2 \in I_1 \cap I_3$ et $x_2 \notin I_2$, $x_3 \in I_1 \cap I_2$ et $x_3 \notin I_3$, c'est-à-dire $x_1, x_2 \in I_3$ et $x_3 \notin I_3$, $x_1, x_3 \in I_2$ et $x_2 \notin I_2$, $x_2, x_3 \in I_1$ et $x_1 \notin I_1$.

Supposons sans perte de généralité $p_1 \not\leq x_1$ et donc $x_1 > x_2$ est impossible car sinon

$$p_1 \not\leq x_1 < x_2.$$

Cas 1: $x_1 // x_2$

Cas 1-1: $x_2 < x_3$

Nous avons soit $x_3 > x_1$ soit $x_3 // x_1$ et donc le poset induit par $\{x_1, q_3, x_2, x_3\}$ ou par $\{x_1, q_3, x_2, q_2\}$ est isomorphe à C_4 .

Cas 1-2: $x_2 > x_3$

Lorsque $x_3 < x_1$ (resp. $x_3 // x_1$), le poset induit par $\{p_3, x_1, x_3, x_2\}$ (resp. $\{p_3, x_1, p_2, x_2\}$) est isomorphe à C_4 .

Cas 1.3: $x_2 // x_3$

Pour les cas $x_3 > x_1$ (resp. $x_3 < x_1$), le poset induit par $\{x_1, q_3, x_2, q_1\}$ (resp. $\{x_2, q_3, x_3, q_1\}$) est isomorphe à C_4 . Pour le cas $x_3 // x_1$, le poset induit par $\{x_1, q_3, x_2, q_1, x_3, q_2\}$ est isomorphe à C_6 .

Cas 2: $x_1 < x_2$

Nous avons soit $x_2 > x_3$ soit $x_2 // x_3$.

Cas 2.1: $x_2 > x_3$

Le poset induit par $\{x_1, x_2, x_3, q_2\}$ est isomorphe à C_4 lorsque $x_1 // x_3$. Le cas $x_1 < x_3$ implique $x_3 \in I_3$ et $x_1 > x_3$ implique $x_1 \in I_1$. De plus, $x_2 // q_2$ car si $x_2 < q_2$ avec $p_2 < x_3 < x_2 < q_2$, on obtient $x_2 \in I_2$.

Cas 2.2: $x_2//x_3$

Lorsque $x_3 < x_1$ (resp. $x_3//x_1$), le poset induit par $\{x_1, x_2, p_1, x_3\}$ (resp. $\{x_1, x_2, p_1, q_2\}$) est isomorphe à C_4 .

Théorème 1.2

Si P est un poset sans cycle induit, alors $L(\mathcal{H}^*)$ est un graphe sans cycle de longueur supérieure à 3.

Preuve

Soit Z un zig zag construit comme dans la preuve de Proposition 1.1 qui relie x_l à x_{k-1} (resp. p_{k-1}, q_{k-1}) si x_{k-1} est comparable (resp. incomparable) à x_k . On considère sans perte de généralité que $Z \in \mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_4$. Par dualité, on pourra déduire le résultat pour $Z \in \mathcal{Z}_2 \cup \mathcal{Z}_3$.

Ainsi Z relie x_l à x_{k-1} ou x_l à q_{k-1} .

Cas 1: $x_l < x_2$,

Ce cas signifie que $Z \in \mathcal{Z}_1$.

Suivant les relations de comparabilité entre x_k et x_{k-1} , on distinguera trois cas.

Cas 1.1: $x_{k-1} < x_k$

Nous avons $x_{k-1}//x_{k-2}$ car sinon $x_{k-2} < x_{k-1} < x_k$ implique l'existence d'une corde $x_{k-2}x_k$.

De même, $x_k < x_l$ implique l'existence de trois cordes x_lx_k, x_2x_{k-1} et x_2x_k . Donc $x_k > x_l$ (resp. $x_k//x_l$). Par suite, l'ensemble $\{x_l, x_2, \dots, p_{k-2}, x_k\}$ (resp. $\{x_l, x_2, \dots, p_{k-2}, q_k\}$) forme un cycle.

Si x_k ou q_k ou tous les deux en même temps sont comparables à un ou plusieurs éléments.

Notons par i_0 le plus petit indice tel que v_{i_0} comparable à x_k ou à q_k ou à x_k et q_k , nous avons :

Si v_{i_0} est un élément minimal, le poset induit par $\{x_l, x_2, \dots, v_{i_0}, x_k\}$ (resp. $\{x_l, x_2, \dots, v_{i_0}, q_k\}$) dès que $x_l < x_k$ (resp. $x_l//x_k$) est un cycle.

Si v_{i_0} est un élément maximal avec $v_{i_0} \neq x_2$, le poset induit par $\{x_l, x_2, \dots, v_{i_0-1}, x_k\}$ (resp. $\{x_l, x_2, \dots, v_{i_0-1}, q_k\}$) pour le cas $x_l < x_k$ (resp. $x_l//x_k$) est un cycle.

Cas 1.2: $x_{k-1} > x_k$

Nous avons $x_1 // x_k$. Ainsi, le poset induit par $\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, q_k\}$ est un cycle.

Lorsque x_k ou q_k est comparable à un certain élément de Z ou à au moins un élément. Alors, si v_{i_0} est un élément maximal (resp. minimal) le poset induit par $\{x_1, x_2, \dots, v_{i_0}, x_k\}$ (resp. $\{x_1, x_2, \dots, v_{i_0-1}, x_k\}$) est isomorphe à C_4 .

Cas 1.3: $x_{k-1} // x_k$

Nous avons $x_1 < x_k$ (resp. $x_1 // x_k$) donc l'ensemble $\{x_1, x_2, \dots, q_{k-1}\}$ (resp. $\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, q_k\}$) induit un cycle.

Si x_k est comparable à un élément de Z , notons par i_0 le plus petit indice tel que v_{i_0} est comparable à x_k , nous avons :

Si v_{i_0} est un élément minimal, le poset induit par $\{x_1, x_2, \dots, v_{i_0}, q_{k-1}\}$ (resp. $\{x_1, x_2, \dots, v_{i_0}, q_k\}$) dès que $x_1 < x_k$ (resp. $x_1 // x_k$) contient un cycle.

Si v_{i_0} est un élément maximal avec $v_{i_0} \neq x_2$, le poset induit par $\{x_1, x_2, \dots, v_{i_0-1}, q_{k-1}\}$ (resp. $\{x_1, x_2, \dots, v_{i_0-1}, x_k\}$) pour le cas $x_1 < x_k$ (resp. $x_1 // x_k$) contient un cycle.

Cas 2 : $x_1 > x_2$

Ce cas signifie que $Z \in \mathcal{Z}_4$

Cas 2.1: $x_{k-1} < x_k$

Nous avons $x_{k-1} // x_{k-2}$ car sinon $x_{k-2} < x_{k-1} < x_k$ qui implique l'existence d'une corde $x_{k-2}x_k$.

Les cas $x_k < x_1$ et $x_k // x_1$ sont impossibles car ils impliquent l'existence de cordes, et donc l'ensemble $\{x_2, \dots, p_{k-2}, q_k\}$ est un cycle pour le cas $x_k // x_1$.

Si x_k est comparable à un ou plusieurs éléments, soit i_0 le plus petit indice tel que v_{i_0} est comparable à x_k , nous avons :

Si v_{i_0} est un élément minimal défient a x_2 (resp. maximal) le poset induit par $\{x_2, \dots, v_{i_0}, q_k\}$ (resp. $\{x_2, \dots, v_{i_0-1}, q_k\}$) est un cycle. Si v_{i_0} est un élément minimal, avec $v_{i_0} = x_2$, le poset par $\{p_k, x_1, x_2, x_k\}$ induit un cycle.

Cas 2.2: $x_{k-1} > x_k$

Nous avons $x_l > x_k$ (resp. $x_l // x_k$) donc le poset $\{x_2, x_l, \dots, x_{k-1}, x_k\}$ (resp. $\{x_2, x_l, \dots, x_{k-1}, p_k\}$) induit un cycle.

Lorsque x_k ou q_k est comparable à un certain élément de Z , alors nous obtenons :

Si v_{i_0} est un élément minimal, le poset induit par $\{x_2, x_l, \dots, v_{i_0-1}, x_k\}$ (resp. $\{x_l, x_2, \dots, v_{i_0-1}, p_k\}$) dès que $x_l > x_k$ (resp. $x_l // x_k$) est un cycle.

Si v_{i_0} est un élément maximal, le poset induit par $\{x_l, x_2, \dots, v_{i_0}, x_k\}$ (resp. $\{x_l, x_2, \dots, v_{i_0}, p_k\}$) pour le cas $x_l > x_k$ (resp. $x_l // x_k$) est un cycle.

Cas 2.3: $x_{k-1} // x_k$

Nous avons $x_l > x_k$ (resp. $x_l // x_k$), le poset $\{x_2, x_l, \dots, x_{k-1}, p_{k-1}\}$ (resp. $\{x_2, x_l, \dots, x_{k-1}, p_{k-1}, q_k\}$) induit un cycle.

Si v_{i_0} est un élément minimal, le poset induit par $\{x_2, \dots, v_{i_0-1}, x_k\}$ (resp. $\{x_l, \dots, v_{i_0-1}, p_k\}$) dès que $x_l > x_k$ (resp. $x_l // x_k$) est un cycle.

Si v_{i_0} est un élément maximal, le poset induit par $\{x_2, \dots, v_{i_0}, x_k\}$ (resp. $\{x_2, \dots, v_{i_0}, p_k\}$) pour le cas $x_l > x_k$ (resp. $x_l // x_k$) est un cycle.

Cas 3 : $x_l // x_2$ **Cas 3.1 :** $x_{k-1} < x_k$

Dès que $x_l < x_k$ (resp. $x_l // x_k$), nous avons alors le poset induit par $\{x_l, q_1, x_2, \dots, p_{k-2}, x_k\}$ (resp. $\{x_l, x_2, \dots, p_{k-2}, q_k\}$) est un cycle.

Si v_{i_0} est un élément minimal, le poset induit par $\{x_l, q_1, x_2, \dots, v_{i_0}, x_k\}$ (resp. $\{x_l, q_1, x_2, \dots, v_{i_0}, q_k\}$) dès que $x_l < x_k$ (resp. $x_l // x_k$) est un cycle.

Si v_{i_0} est un élément maximal, le poset induit par $\{x_l, q_1, x_2, \dots, v_{i_0-1}, x_k\}$ (resp. $\{x_l, q_1, x_2, \dots, v_{i_0-1}, q_k\}$) pour le cas $x_l < x_k$ (resp. $x_l // x_k$) est un cycle.

Cas 3.2 : $x_{k-1} > x_k$

L'ensemble $\{q_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k\}$ (resp. $\{q_1, x_2, \dots, x_{k-1}, p_k\}$) est un cycle pour le cas $x_k < x_l$ (resp. $x_l // x_k$).

Si v_{i_0} est un élément minimal, le poset induit par $\{q_1, x_2, \dots, v_{i_0-1}, x_k\}$ (resp. $\{q_1, x_2, \dots, v_{i_0-1}, p_k\}$) dès que $x_l > x_k$ (resp. $x_l // x_k$) est un cycle.

Si v_{i_0} est un élément maximal, le poset induit par $\{q_1, x_2, \dots, v_{i_0}, x_k\}$ (resp. $\{q_1, x_2, \dots, v_{i_0}, p_k\}$) est un cycle dès que $x_1 > x_k$ (resp. $x_1 // x_k$).

Cas 3.3 : $x_{k-1} // x_k$

Lorsque $x_k > x_1$ (resp. $x_1 // x_k$, $x_k < x_1$), le poset induit par $\{x_1, q_1, x_2, \dots, x_{k-1}, q_{k-1}\}$ (resp. $\{x_1, q_1, x_2, \dots, x_{k-1}, q_{k-1}, x_k, q_k\}, \{x_2, q_1, x_2, \dots, q_{k-1}, x_k\}$) est un cycle.

Si v_{i_0} est un élément minimal et $x_k > x_1$ (resp. $x_1 // x_k$, $x_k < x_1$), le poset induit par $\{x_1, q_1, x_2, \dots, v_{i_0}, q_{k-1}\}$ (resp. $\{x_1, q_1, x_2, \dots, v_{i_0-1}, x_k, q_k\}, \{x_2, q_1, x_2, \dots, v_{i_0-1}, x_k\}$) est un cycle.

Si v_{i_0} est un élément maximal et $x_k > x_1$ (resp. $x_1 // x_k$, $x_k < x_1$), le poset induit par $\{x_1, q_1, x_2, \dots, v_{i_0-1}, q_{k-1}\}$ (resp. $\{x_1, q_1, x_2, \dots, v_{i_0}, x_k, q_k\}, \{q_1, x_2, \dots, v_{i_0}, x_k\}$) est un cycle.

Théorème 1.3

Si P est un poset est sans cycle induit, alors $L(\mathcal{H}^*)$ est un graphe sans anti trou.

Preuve

Supposons le contraire, c'est-à-dire que $L(\mathcal{H}^*)$ a un anti trou. Soit $\{x_i, i = 1, \dots, k\}$ l'ensemble des sommets de l'anti trou où $k \geq 5$, x_i non adjacent à x_{i+1} , $i = 1, \dots, k-1$, et x_k non adjacent à x_1 .

Notons par $I_{ij} = [p_{i,j}, q_{i,j}]$ l'intervalle contenant x_i et x_j avec $i, j = 1, 2, \dots, k$, $i \neq j$.

Dans P cela se traduit par : deux sommets sont non adjacents alors il n'existe pas un intervalle qui les contiennent.

Cas 1: $x_1 < x_3$

La relation $x_3 < x_k$ ne peut avoir lieu car sinon $x_1 < x_k$ et alors x_1 et x_k seraient adjacents.

Cas 1.1: $x_3 > x_k$

x_2 et x_3 sont non adjacents donc deux cas se présentent, soit $x_k < x_2$, soit $x_k // x_2$.

Cas 1.1.1: $x_k < x_2$

Nous avons soit $x_{k-1} < x_2$ soit $x_{k-1} // x_2$. Si $x_{k-1} < x_2$, les posets induit par $\{x_k, x_3, x_{k-1}, x_2\}$ (resp. $\{p_{1,k-1}, x_3, x_k, x_2\}$) est isomorphe à C_4 pour le cas $x_{k-1} < x_1$ (resp. $x_{k-1} // x_1$). Si $x_{k-1} // x_2$, le poset induit par $\{x_1, x_3, x_k, q_{2,k-1}\}$ (resp. $\{x_k, x_3, x_{k-1}, q_{2,k-1}\}, \{p_{1,k-1}, x_3, x_k, q_{2,k-1}\}$) est isomorphe à C_4 pour le cas $x_{k-1} > x_1$ (resp. $x_{k-1} < x_1$ et $x_{k-1} // x_1$).

Cas 1.1.2: $x_k // x_2$

Si $x_{k-1} > x_2$, le poset induit par le poset $\{x_1, x_3, p_{2,k}, x_{k-1}\}$ (resp. $\{x_1, x_3, p_{2,k}, q_{1,k-1}\}$) est isomorphe à C_4 lorsque $x_{k-1} > x_1$ (resp. $x_{k-1} // x_1$).

Si $x_{k-1} < x_2$. Le cas $x_{k-1} > x_1$ est impossible car x_1 et x_2 ne sont pas dans un même intervalle. Le poset induit par $\{x_k, x_3, x_{k-1}, q_{2,k}\}$ (resp. $\{x_k, x_3, p_{1,k-1}, q_{2,k}\}$) est isomorphe à C_4 pour le cas $x_{k-1} < x_1$ (resp. $x_{k-1} // x_1$). Dès que $x_{k-1} // x_2$, le poset induit par le poset $\{x_1, x_3, p_{2,k}, q_{2,k-1}\}$ (resp. $\{p_{2,k}, x_3, x_{k-1}, q_{2,k-1}\}$, $\{p_{1,k-1}, x_3, p_{2,k}, q_{2,k-1}\}$) est isomorphe à C_4 pour le cas $x_{k-1} > x_1$ (resp. $x_{k-1} < x_1$ et $x_{k-1} // x_1$).

Cas 1.2: $x_3 // x_k$ **Cas 1.2.1:** $x_k > x_2$

Comme l'arête $x_{k-1}x_k$ n'existe pas, alors nous avons soit $x_{k-1} > x_2$ soit $x_{k-1} // x_2$.

Si $x_{k-1} > x_2$, le poset $\{x_1, q_{3,k}, x_2, x_{k-1}\}$ (resp. $\{x_1, q_{3,k}, x_2, q_{1,k-1}\}$) est isomorphe à C_4 pour $x_{k-1} > x_1$ (resp. $x_{k-1} // x_1$).

Si $x_{k-1} // x_2$, le poset induit par $\{x_1, q_{3,k}, p_{2,k-1}, x_{k-1}\}$ (resp. $\{x_1, q_{3,k}, x_2, q_{2,k-1}\}$, $\{x_1, q_{3,k}, p_{2,k-1}, q_{1,k-1}\}$) sont isomorphes à C_4 pour le cas $x_{k-1} > x_1$ (resp. $x_{k-1} < x_1$, $x_{k-1} // x_1$).

Cas 1.2.2: $x_k < x_2$

Puisque x_{k-1} et x_k ne sont pas dans un même intervalle, alors on a deux cas possibles $x_{k-1} < x_2$ ou $x_{k-1} // x_2$.

Si $x_{k-1} < x_2$, le poset induit par $\{x_k, q_{3,k}, x_{k-1}, x_2\}$ resp. ($\{x_k, q_{3,k}, p_{1,k-1}, x_2\}$) sont isomorphes à P_2 pour le cas $x_{k-1} < x_1$ resp. ($x_{k-1} // x_1$).

Si $x_{k-1} // x_2$, pour le cas $x_{k-1} > x_1$ (resp. $x_{k-1} < x_1$ et $x_{k-1} // x_1$) le poset induit par l'ensemble $\{x_1, q_{3,k}, p_{3,k}, q_{2,k-1}\}$ (resp. $\{x_k, q_{3,k}, x_{k-1}, q_{2,k-1}\}$ et $\{x_k, q_{3,k}, p_{1,k-1}, q_{2,k-1}\}$) est isomorphe à C_4 .

Cas 1.2.3: $x_k // x_2$

Si $x_{k-1} < x_2$, pour $x_{k-1} < x_1$ (resp. $x_{k-1} // x_1$) le poset induit par l'ensemble $\{p_{2,k}, q_{3,k}, x_{k-1}, q_{2,k}\}$ (resp. $\{p_{2,k}, q_{3,k}, p_{1,k-1}, q_{2,k}\}$) est isomorphe à C_4 .

Si $x_{k-1} > x_2$, le poset induit par $\{x_1, q_{3,k}, p_{k,2}, x_{k-1}\}$ (resp. $\{p_{1,k-1}, q_{3,k}, p_{k,2}, x_{k-1}\}$) est isomorphe à C_4 lorsque $x_{k-1} > x_1$ (resp. $x_{k-1} // x_1$).

Si $x_{k-1} // x_2$, le poset induit par $\{x_1, q_{3,k}, p_{k,2}, q_{2,k-1}\}$ (resp. $\{p_{k,2}, q_{3,k}, x_{k-1}, q_{2,k-1}\}$, $\{p_{k,2}, q_{3,k}, p_{1,k-1}, q_{2,k-1}\}$) est isomorphe à C_4 pour le cas $x_{k-1} > x_1$ (resp. $x_{k-1} < x_1$, $x_{k-1} // x_1$).

Cas 2: $x_1 > x_3$

Par dualité, ce cas est similaire au premier cas.

Cas 3: $x_1 // x_3$ **Cas 3.1:** $x_3 < x_k$

Le cas $x_k < x_2$ signifie qu'il y a une arête entre x_2 et x_3 , contradiction. Alors nous avons deux cas possibles $x_k > x_2$ ou $x_k // x_2$.

Cas 3.1.1: $x_k > x_2$

Pour le cas $x_{k-1} > x_1$ (resp. $x_{k-1} // x_1$) le poset induit par l'ensemble $\{p_{1,3}, x_k, x_2, x_{k-1}\}$ (resp. $\{p_{1,3}, x_k, x_2, q_{1,k-1}\}$) est isomorphe à C_4 lorsque $x_{k-1} > x_2$.

Si $x_{k-1} // x_2$, le poset induit par $\{p_{1,3}, x_k, x_2, q_{2,k-1}\}$ (resp. $\{x_3, q_{1,3}, p_{2,k-1}, x_k\}$, $\{p_{1,3}, x_k, p_{2,k-1}, q_{1,k-1}\}$) est isomorphe à C_4 , pour les cas $x_{k-1} > x_1$, (resp. $x_{k-1} < x_1$ et $x_{k-1} // x_1$).

Cas 3-1-2: $x_k // x_2$

Si $x_{k-1} < x_2$, et $x_{k-1} < x_1$ (resp. $x_{k-1} // x_1$) le poset induit par le poset $\{p_{1,3}, x_1, x_{k-1}, q_{k,2}\}$ (resp. $\{p_{1,3}, x_1, p_{1,k-1}, q_{k,2}\}$) est isomorphe à C_4 . Si $x_{k-1} > x_2$, le poset $\{p_{1,3}, q_{2,k}, x_2, x_{k-1}\}$ (resp. $\{p_{1,3}, q_{k,2}, x_2, q_{1,k-1}\}$) représente un cycle si $x_{k-1} > x_1$ (resp. $x_{k-1} // x_1$).

Si $x_{k-1} // x_2$, le poset $\{p_{1,3}, q_{2,k}, p_{2,k-1}, x_{k-1}\}$ (resp. $\{p_{1,3}, x_1, p_{2,k-1}, q_{2,k}\}, \{p_{1,3}, q_{2,k}, p_{2,k-1}, q_{1,k-1}\}$) est isomorphe à C_4 pour $x_{k-1} > x_1$ (resp. $x_{k-1} < x_1, x_{k-1} // x_1$).

Cas 3.2: $x_3 > x_k$ **Cas 3.2.1:** $x_k < x_2$

Si $x_{k-1} < x_2$. Le cas $x_{k-1} > x_1$ est impossible car l'arête $x_1 x_2$ n'existe pas. Le poset induit par $\{x_k, q_{1,3}, x_{k-1}, x_2\}$ (resp. $\{x_k, q_{1,3}, p_{1,k-1}, x_2\}$) est isomorphe à C_4 pour le cas $x_{k-1} < x_1$ (resp. $x_{k-1} // x_1$). Si $x_{k-1} // x_2$, les posets induits par $\{x_1, q_{1,3}, x_k, q_{2,k-1}\}$, $\{x_k, q_{1,3}, x_{k-1}, q_{2,k-1}\}$ et $\{p_{1,k-1}, x_k, q_{1,3}, q_{2,k-1}\}$ sont isomorphes à C_4 pour les cas $x_{k-1} > x_1, x_{k-1} < x_1$ et $x_{k-1} // x_1$ respectivement.

Cas 3.2.2: $x_k // x_2$

Si $x_{k-1} < x_2$. Comme $x_1 x_2$ n'existe pas alors on a soit $x_{k-1} < x_1$ soit $x_{k-1} // x_1$. Si $x_{k-1} < x_1$ (resp. $x_{k-1} // x_1$), l'ensemble $\{p_{2,k}, q_{1,3}, x_{k-1}, x_2\}$ (resp. $\{p_{2,k}, q_{1,3}, p_{1,k-1}, x_2\}$) est isomorphe à C_4 .

Si $x_{k-1} > x_2$, le cas $x_{k-1} < x_1$ est impossible puisque x_1 et x_2 ne sont pas dans un même intervalle. Le poset induit par $\{p_{1,3}, x_3, p_{k,2}, x_{k-1}\}$ (resp. $\{p_{1,3}, x_3, p_{2,k}, q_{1,k-1}\}$) est isomorphe à C_4 pour le cas $x_{k-1} > x_1$ (resp. $x_{k-1} // x_1$).

Si $x_{k-1} // x_2$, pour les trois cas $x_{k-1} < x_1, x_{k-1} > x_1$ et $x_{k-1} // x_1$ les ensembles $\{p_{2,k}, q_{1,3}, x_{k-1}, q_{2,k-1}\}$,

$\{x_1, q_{1,3}, p_{2,k}, q_{2,k-1}\}$ et $\{p_{1,k-1}, q_{1,3}, p_{2,k}, q_{2,k-1}\}$ sont respectivement isomorphes à C_4 .

Cas 3-3: $x_3 // x_k$

Cas 3-3-1: $x_k > x_2$

Comme les sommets x_{k-1} et x_k n'appartiennent pas à un même intervalle alors nous avons soit $x_{k-1} > x_2$ soit $x_{k-1} // x_2$.

Si $x_{k-1} > x_2$, le poset induit par $\{p_{1,3}, q_{3,k}, x_2, x_{k-1}\}$ (resp. $\{p_{1,3}, q_{3,k}, x_2, q_{1,k-1}\}$) est isomorphe à C_4 pour le cas $x_{k-1} > x_1$ (resp. $x_{k-1} // x_1$).

Si $x_{k-1} // x_2$, le poset induit par $\{p_{1,3}, q_{3,k}, p_{2,k-1}, x_{k-1}\}$ (resp. $\{p_{1,3}, x_1, p_{2,k-1}, q_{3,k}\}$, $\{p_{1,3}, q_{3,k}, p_{2,k-1}, q_{1,k-1}\}$) est isomorphe à C_4 pour le cas $x_{k-1} > x_1$ (resp. $x_{k-1} < x_1$ et $x_{k-1} // x_1$).

Cas 3-3-2: $x_k < x_2$

Puisque $x_{k-1} < x_2$, le poset induit par $\{p_{3,k}, q_{1,3}, x_{k-1}, x_2\}$ (resp. $\{p_{3,k}, q_{1,3}, p_{1,k-1}, x_2\}$) est isomorphe à C_4 pour le cas $x_{k-1} < x_1$ (resp. $x_{k-1} // x_1$). Dès que $x_{k-1} // x_2$, l'ensemble $\{x_1, q_{1,3}, p_{3,k}, q_{2,k-1}\}$ (resp. $\{p_{3,k}, q_{1,3}, x_{k-1}, q_{2,k-1}\}$, $\{p_{3,k}, q_{1,3}, p_{1,k-1}, q_{2,k-1}\}$) est isomorphe à C_4 pour le cas $x_{k-1} > x_1$ (resp. $x_{k-1} < x_1$ et $x_{k-1} // x_1$).

Cas 3-3-3: $x_k // x_2$

Le poset $\{p_{3,k}, q_{1,3}, x_{k-1}, q_{k,2}\}$ (resp. $\{p_{3,k}, q_{1,3}, p_{1,k-1}, q_{k,2}\}$) induit un cycle C_4 dès que $x_{k-1} < x_1$ (resp. $x_{k-1} // x_1$) lorsque $x_{k-1} < x_2$. Dès que $x_{k-1} > x_2$, le cas $x_{k-1} < x_1$ implique que x_1 et x_2 sont dans un même intervalle, contradiction. Le poset induit par $\{p_{1,3}, q_{3,k}, p_{k,2}, x_{k-1}\}$ (resp. $\{p_{1,3}, q_{3,k}, p_{k,2}, q_{1,k-1}\}$) est isomorphe à P_2 pour le cas $x_{k-1} > x_1$ (resp. $x_{k-1} // x_1$).

Si $x_{k-1} // x_2$ et $x_{k-1} > x_1$ (resp. $x_{k-1} < x_1$), le poset induit par $\{p_{1,3}, q_{3,k}, p_{2,k}, q_{2,k-1}\}$ (resp. $\{p_{3,k}, q_{1,3}, p_{2,k-1}, q_{2,k}\}$) est isomorphe à C_4 . Maintenant si $x_{k-1} // x_1$ le poset induit par $\{p_{1,k-1}, q_{1,3}, p_{3,k}, q_{2,k}, p_{2,k-1}, x_{k-1}\}$ est isomorphe à C_6 .

Corollaire 1.1

L'hypergraphe des intervalles d'un poset sans cycle induit a la propriété duale de König.

Preuve

Soit P un poset sans cycle induit et $\mathcal{H}(P)$ L'hypergraphe des intervalles de P . nous avons d'une part, $\mathcal{H}^*(P)$ satisfait la propriété de Helly, et d'autre part $L(\mathcal{H}^*)$ est un graphe parfait d'après le théorème 1.1 et le théorème 1.2, nous déduirons que $\mathcal{H}^*(P)$ est normal et

par conséquent $\mathcal{H}^*(P)$ a la propriété de König. Ce qui revient à dire que $\mathcal{H}(P)$ a la propriété duale de König.

Remarque 1.1

L'exemple suivant montre que si un diagramme de Hasse d'un poset P n'a pas de cycle n'implique pas que P est sans cycle induit. Car le diagramme de la Figure 4-4 contient C_4 .

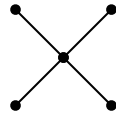


Figure 4-4

2. Poset sans cycle

Rappelons qu'un poset est sans cycle s'il ne contient pas un cycle dans son diagramme de Hasse. Cette classe contient la classe des posets sans cycle induit.

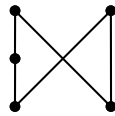


Figure 4-5

Remarque 2.1

La propriété de König n'est pas vérifiée en général pour cette classe. Dans la Figure 4-6. P représente un poset qui vérifié $\nu(\mathcal{H}(P)) = 1$ et $\tau(\mathcal{H}(P)) = 2$.

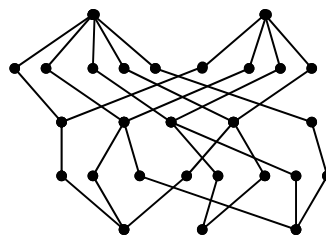


Figure 4-6

Conclusion

Générale

CONCLUSION GENERALE

Soit P un poset fini et $\mathcal{H}(P)$ un hypergraphe dont les sommets sont les points de P et dont les arêtes sont ses intervalles maximaux. Plusieurs paramètres classiques ont été étudiés pour cette classe d'hypergraphes. Nous pouvons citer la classe des ordres d'intervalle [5], séries-parallèles [4], ...

L'essentiel de la thèse s'articulait essentiellement autour de la propriété duale de *König* pour une nouvelle classe de posets, appelés posets sans cycles induits.

D'autres études ont été faites pour les posets sans cycles induits. Nous pouvons rappeler les travaux de Duffus, Rival et Winkler [13] qui ont prouvé que si P est un poset sans cycle induit, alors P est un poset de Dilworth, c'est-à-dire $s(P) = w(P) - 1$.

V. Bouchitte et M. Habib [9] ont établi un algorithme polynomial pour déterminer le saut optimal $s(P)$ et ils ont conjecturé que $L(P)$ et $\dim(P)$ sont polynomiaux pour les posets sans cycle induit. Rival et N. Zaguia ont montré que si un poset P est régulier et fini alors P est une union d'ensembles d'articulation qui sont des antichaînes si et seulement si P est sans cycle induit.

Nous avons vu que $\mathcal{H}^*(P)$ satisfait la propriété de *Helly* et ne contient ni trou ni anti trou impair. Les deux dernières conditions impliquent la normalité de $\mathcal{H}^*(P)$ et enfin la validation de la propriété duale de *König* dans la classe des posets sans cycle induit.

La classe des posets sans cycle (cycle-free) est une classe plus large que la classe des posets sans cycle induit. Par le biais d'un contre exemple, on a conclu que malheureusement la propriété duale de *König* n'est pas vérifiée en général.

Perspectives

1. Prouver la satisfaction de la propriété de König pour la classe des posets sans cycle induit.
2. Etudier les propriétés de König et duale de König pour la classe des posets sans cycle.
3. Sachant que la classe des posets sans cycle induit est une sous classe de la classe des posets sans cycle, trouver Z pour que les propriétés suivantes soient équivalentes :
 - P est sans cycle induit.
 - P est sans cycle et P est sans Z .

Références

Références

1. M. AOUANE
Approche algorithmique pour la résolution de quelques problèmes dans les posets. Thèse de Magister en Mathématiques. USTHB Faculté de Mathématiques Algérie, 2005.
2. C. BERGE
Hypergraphes, combinatoires des ensembles finis. Edition Gauthier-Villars, Bordas, Paris, 1987.
3. C. BERGE
Hypergraphs. North-Holland, Amesterdam, Tokyo, 1989.
4. I. BOUCHEMAKH, K. ENGEL
Interval stability and interval covering property in finite posets. Order 9, 163-175, 1992.
5. I. BOUCHEMAKH, K. ENGEL
The order-interval hypergraph of finite poset and the König property. Elsevier Discrete Mathematics 170 : 51-61, 1997.
6. I. BOUCHEMAKH
Sur quelques problèmes extrémaux dans les ordres partiel finis. Thèse d'état en Mathématiques, U.S.T.H.B, septembre 2001.
7. I. BOUCHEMAKH
On the dual König property of the order-interval hypergraph of a new class of Poset, Rostock. Math. Kolloq. 59, 19–27, 2005.
8. I. BOUCHEMAKH
On the k-independence number in the Boolean lattice. A paraître dans MMR.
9. V. BOUCHITTE, M. HABIB
The calculation of invariants for ordred sets, département Informatique et Réseau. Ecole nationale supérieure des télécommunication de Bretagne, 1987.

Références

10. A. BRANDSTÄDT, V. B. LE, G. T. SPINRAD
Graph classes. A survey, 1999.
11. M. CHUDNOVSKY, N. ROBERTSON, P. D. SEYMOUR et R. THOMAS
Progress on perfect graphs. Mathematics Programming.
12. R. P. DILWORTH
A decomposition theorem for partially ordered sets.
Ann of Math, 51: 161-166, 1950.
13. D. DUFFUS, I. RIVAL, P. WINKLER
Minimizing setups for cycle free ordered sets, Proc. Of the American Math. Soc.
Vol. 85, N°4, 509 – 513, 1982.
14. B. DUSHNIK, E. W. MILLER
Partially ordered sets. Amer. J. Math. 63, p.600-610, 1941.
15. P. C. FISHBURN
Interval order and interval graphs. John Wiley & Sons, New York, 1985.
16. M. GOLUBIC
Perfect Graphs and Algorithms, Academic Press, New York, 1980.
17. P. HALL
Iv. Enumerative meaning of Möbius function.
18. T. HIRAGUCHI
On the dimension of partially ordered sets. Sci. Rep. Kanazawa Univ. 1, p. 77-94, 1955.
19. J. ALLEN FILL, M. MACHIDA
Stochastic monotonicity and realizable monotonicity. The Annals of Probability
2001, Vol. 29, No. 2, 938–978. Johns Hopkins University and Utah State
University 2001.
20. J. DOLLHOPF, I. GOULDEN, G. CURTIS
Words avoiding reflexive acyclique relation

Références

- The electronic journal of combinatorics 11, December 24, 2004.
21. F. KACI
Propriété de König et duale de König dans l'hypergraphe des intervalle de quelques classes de posets. Thèse de Magister en Mathématiques.
USTHB Faculté de Mathématiques Algérie 2004.
 22. D. KUSKE.
A model theoretic proof of Büchi-type theorems and first-order logic for N-free posets. In Proc. of STACS 2001, number 2010 in Lecture Notes in Computer Science, pages 443–454. Springer Verlag, 2001.
 23. K. LODAYA, P.WEIL.
Series-parallel languages and the bounded-width property. Theoretical Computer Science, 237:347–380, 2000.
 24. R. H. MÖHRING
Computationally tractable classes of ordred sets. In: I. Rival (ed): Algorithms And ordreds, Kluwer. Academic. Publishers. P.105-193, 1989.
 25. Yi WANG
A Brief Introduction, Sperner theory.
Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei. yiwang@math.sinica.edu.tw.
 26. I. RIVAL, N. ZAGUIA
Antichain cutset, order 1, 235 – 247, 1985.
 27. I. RIVAL
Stories about the letter N. Contemporary Mathematics 57, 1986.
 28. I. RIVAL, N. ZAGUIA
Constructing N-free, jump-critical ordered sets. Congressus Numeratium 55.
199- 204, 1986.
 29. SCHRÖDER, S. W. BERND
Ordred sets. Birkhauser, Boston, 2004.



Faculté de Mathématiques
Département de Recherche Opérationnelle

THEME

*Etude de quelques invariants dans une nouvelle
classe de posets**

Présenté par

Benhadj Sakina**

Résumé :

Soit P un poset fini et $\mathcal{H}(P)$ un hypergraphe dont les sommets sont les points de P et dont les arêtes sont ses intervalles maximaux. Plusieurs paramètres classiques ont été étudiés pour cette classe d'hypergraphes. Il a été prouvé que pour les classes d'ordres d'intervalles, série-parallèles, et celle dont les graphes de comparabilité contiennent les graphes distance héréditaire, $\mathcal{H}(P)$ a la propriété de König ou duale de König. Dans notre mémoire, nous verrons une autre classe de posets, appelés sans cycles induits. Nous prouvons que si P est un ordre sans cycle induit, alors $\mathcal{H}(P)$ a la propriété duale de König. Nous verrons que le line graphe du dual de \mathcal{H} est parfait et satisfait la propriété de Helly. Concernant la classe des posets sans cycle dans leurs diagrammes de Hasse, une classe plus large, nous donnerons un contre exemple qui prouve que la propriété de König n'est pas toujours vérifiée.

* Thèse de Magistère

** Directrice de Thèse : I. Bouchemakh

Maître de conférence à l'U.S.T.H.B