



**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI  
BOUMEDIENE  
FACULTE DES MATHEMATIQUES  
DEPARTEMENT DE RECHERCHE OPERATIONNELLE**

**THESE**

Présentée par :

**KABYL KAMAL**

Pour l'obtention du diplôme de : **MAGISTER**

En : **MATHEMATIQUES**

Option : **RECHERCHE OPERATIONNELLE**

**THEME**

**SUR LA DIMENSION CUBIQUE DE QUELQUES CLASSES  
D'ARBRES**

Soutenu le 14 janvier 2003.

Devant le jury composé de :

M <sup>me</sup> . I. BOUCHEMAKH	Maître de conférences, USTHB	Présidente
M <sup>r</sup> . A.BERRACHEDI	Maître de conférences, USTHB	Directeur de thèse
M <sup>r</sup> . H. AITHADDADENE	Maître de conférences, USTHB	Examineur
M <sup>r</sup> . MS. MAAMRA	Chargé de cours, USTHB	Examineur
M <sup>r</sup> . M. MOULAI	Maître de conférences, USTHB	Examineur

**ALGER 2001/ 2002**

## REMERCIEMENTS

Je voudrais témoigner ici toute ma gratitude à Monsieur BERRACHEDI Abdelhafid, Maître de conférences à l'USTHB, qui m'a proposé ce sujet et qui m'a guidé dans ce travail avec beaucoup de patience et de disponibilité.

Je remercie Madame I. BOUCHEMAKH, Maître de conférences à l'USTHB, d'avoir bien voulu présider le jury de cette thèse.

Je tiens également à remercier Messieurs :H. AIT HADDADENE, Maître de conférences à l'USTHB, M. MOULAI , Maître de conférences à l'USTHB et M.S. MAAMRA, chargé de cours à l'USTHB, qui ont accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Mes remerciements vont tout autant à tous ceux qui, d'une manière ou d'une autre, m'ont aidé et encouragé.

# SOMMAIRE

	<b>PAGE</b>
<b>Introduction</b> .....	5
<b>Chapitre 1</b> Eléments de théorie des graphes.....	7
1.1 Définition de base.....	8
1.2 Opération sur les graphes.....	9
1.3 Distances et intervalles dans les graphes.....	12
1.4 Quelques graphes particuliers.....	14
<b>Chapitre 2</b> L'hypercube et quelques caractérisations.....	17
2.1 Le graphes de l'hypercube.....	18
2.2 Propriétés élémentaires de l'hypercube.....	19
2.3 Caractérisation de l'hypercube.....	20
2.4 Plongement dans l'hypercube.....	22
2.5 Distance de hamming.....	25
2.6 Notion de la $C_n$ -valuation.....	25
2.7 Quelques propriétés structurelles des cycles et chaînes hamiltoniens dans $Q_n$ .....	25
<b>Chapitre 3</b> Quelques classes de graphes plongeables dans l'hypercube.....	29

<b>3.1</b>	Arbres.....	30
<b>3.1.1</b>	Quelques propriétés des arbres.....	30
<b>3.1.2</b>	Quelques types d'arbres plongeables dans $Q_n$ .....	31
<b>3.2</b>	Autres graphes plongeables dans $Q_n$ .....	45
<b>3.2.1</b>	Plongement des grilles et des échelles.....	45
<b>3.2.2</b>	MD $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ graphes.....	48
<b>3.2.3</b>	MD $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ graphes subdivisés.....	48
<b>chapitre 4</b>	Trois nouvelles classes d'arbres.....	51
<b>4.1</b>	Définition de la première classe d'arbre.....	51
<b>4.2</b>	Définition de la deuxième classe d'arbre.....	58
<b>4.3</b>	Définition de la troisième classe d'arbre.....	58
<b>chapitre 5</b>	Compléments.....	62
$\circ, \backslash$	Quelques problèmes concrets.....	63
<b>5.2</b>	Prolongement isométrique.....	66
<b>Conclusion</b>	.....	70
<b>Références</b>	.....	71





**INTRODUCTION**

## Introduction

Dans l'avant propos de son livre «graphes», C.Berge note que la théorie des graphes a eu un développement bien étrange, d'abord apparue sous forme de curiosités mathématiques (« Les ponts de konigsberg »), puis devenue un outil pour l'étude des circuits électriques (kirchhof), elle a été utilisée par la chimie (modélisation des structures ), la psychosociologie et l'économie avant même d'avoir été constituée. Elle est devenue aujourd'hui une des branches les plus florissantes de l'algèbre moderne, celle à laquelle on fait appel dans la plupart des problèmes de type combinatoire, elle n'a pu prendre sa forme actuelle que sous l'impulsion de nombreux spécialistes de la recherche opérationnelle motivés par des problèmes concrets.

Le plongement des graphes dans l'hypercube est un problème très étudié en théorie des graphes. En effet de nombreux efforts ont été consacrés pour déterminer les conditions (nécessaires et suffisantes ) selon lesquels un graphe  $G$  est un sous- graphe de l'hypercube  $Q_n$ . Une classe importante à étudier est celles des arbres dans l'hypercube. Cette importance résulte de l'utilisation de ces arbres dans plusieurs domaines, à savoir : informatique, sciences sociales, recherche opérationnelle, théorie des réseaux électriques.

Tous les arbres sont plongeable dans un hypercube, le problème consiste à trouver la plus petite dimension de l'hypercube dans lequel un arbre donné  $y$  est plongeable (on parle alors d'hypercube optimal), ce problème a été traité par plusieurs auteurs : On peut citer : I. Havel [34,35,36,37], F.Harary [24,25,26] et M.Laborde[41]. Ces travaux ont permis de caractériser certaines classes d'arbres.

Ce manuscrit s'articule autour de cinq chapitres, dont le premier est consacré aux rappels et aux notations essentielles pour la suite.

Le chapitre deux est consacré à la présentation de L'hypercube et ses caractéristiques.

Nous donnerons les caractéristiques des chaînes hamiltoniennes de  $Q_n$  et par conséquent, nous aboutissons aux premiers résultats pour le problème de plongement.

Le chapitre trois s'intéresse à certaines classes de graphes plongeables dans l'hypercube. Nous présentons les résultats connus. La dimension d'un graphe  $G$ , notée  $\dim(G)$  est la plus petite dimension d'un hypercube dans lequel  $G$  est plongeable. La notion de  $C_n$ -valuation est utilisée, pour déterminer les dimensions de certaines classes d'arbres, nous introduisons au chapitre quatre, trois nouvelles classes d'arbres obtenus à partir de l'arbre binaire complet dont les éléments sont :  $R_n$ ,  $H_n$  et  $M_n$  ayant respectivement les dimensions suivantes :  $n+2$ ,  $n+3$  et  $n+3$ . Enfin, dans le dernier chapitre nous présentons deux problèmes concrets utilisant le plongement d'arbres dans l'hypercube.

**INTRODUCTION**

# CHAPITRE 1

## *ELEMENT DE LA THEORIE DES GRAPHES*

Nous donnons ici les définitions nécessaires et quelques propriétés fondamentales qui seront utilisées le long de ce manuscrit, nous adopterons la terminologie de Berge [ 7].

## 1, 1) DEFINITIONS ET CONCEPTS DE BASE :

### 1.1.1 Un graphe :

Un graphe  $G$  est constitué d'un ensemble  $V$  fini d'éléments  $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ , appelés sommets, et d'une famille  $E$  de paires distinctes de  $V$  ; appelées arêtes.

Le nombre de sommets du graphe  $G$  est appelé ordre de  $G$ . On note par  $V(G)$  l'ensemble des sommets et par  $E(G)$  l'ensemble des arêtes de  $G$ .

### 1.1.2 Relation d'adjacence :

Dans un graphe  $G$ , une arête  $e$  reliant un sommet  $u$  à un sommet  $v$  est notée par  $uv$  et dans ce cas, on dit :

- $u$  et  $v$  sont adjacents.
- $u$  et  $v$  sont les extrémités de  $e$  ;  $e$  incidente à  $u$  et  $v$
- Deux arêtes sont dites adjacentes si elles sont incidentes à un même sommet.

### 1.1.3 Voisinage d'un sommet :

Si  $uv \in E$ , on dit que  $u$  est voisin de  $v$  et vice versa.

On note  $N(u)$  l'ensemble de tous les voisins de  $u$  :

$$N(u) = \{ v \in V / uv \in E \}$$

### 1.1.4 Degré d'un sommet :

On appelle degré d'un sommet  $u \in V(G)$ , et on note  $d_G(u)$ , le nombre des arêtes incidentes à  $u$ , c'est-à-dire  $d_G(u) = |N(u)|$ , et on note :

$$\delta(G) = \min_{u \in V} d_G(u) \text{ ( Degré minimum de } G \text{)}$$

$$\Delta(G) = \max_{u \in V} d_G(u) \text{ ( degré maximum de } G \text{)}$$

### 1.1.5 Chaînes et cycles :

Une chaîne entre deux sommets  $u$  et  $v$  d'un graphe  $G$  est une suite de sommets  $u = u_1, u_2, \dots, u_k = v$ , dont deux sommets consécutifs sont adjacents.

Une chaîne reliant deux sommets  $u$  et  $v$  de  $G$  sera dite une  $(u, v)$  – chaîne. Une chaîne simple est une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête. Une chaîne élémentaire est une chaîne qui n'utilise pas deux fois le même sommet .

La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes formant cette chaîne.

On appelle un cycle dans un graphe  $G$ , une chaîne simple dont les extrémités sont confondues.

- Une chaîne hamiltonienne (resp. Cycle hamiltonien) est une chaîne (resp. Cycle) utilisant tous les sommets une et une seule fois.
- Un graphe  $G = (V, E)$  qui possède un cycle hamiltonien est dit graphe hamiltonien.

### 1.1.6 Couplage :

Un couplage d'un graphe  $G = (V, E)$  est un sous-ensemble d'arêtes  $M \subseteq E$

Deux à deux non adjacentes.

Un sommet  $u$  est saturé par un couplage  $M$ , s'il existe une arête de  $M$  incidente à  $u$ ,

Un couplage qui sature tous les sommets de  $G$  est appelé couplage parfait.

### 1.1.7 Connexité :

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit connexe si pour toute paire de sommet  $(u, v)$ , il existe une chaîne joignant  $u$  à  $v$ .

## 1.2 OPERATION SUR LES GRAPHES

### 1.3.1 Somme cartésienne de deux graphes :

On appelle somme cartésienne de deux graphes  $G = (V(G), E(G))$  et  $H = (V(H), E(H))$ , notée  $G \square H$ , le graphe dont l'ensemble des sommets est le produit cartésien  $V(G) \times V(H)$  et où deux sommets  $(u, u')$  et  $(v, v')$  sont adjacents si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

i)  $u = v$  et  $u'v' \in E(H)$  ou

ii)  $uv \in E(G)$  et  $u'=v'$

La figure suivante montre la somme cartésienne de  $H = K_2 \square K_4$

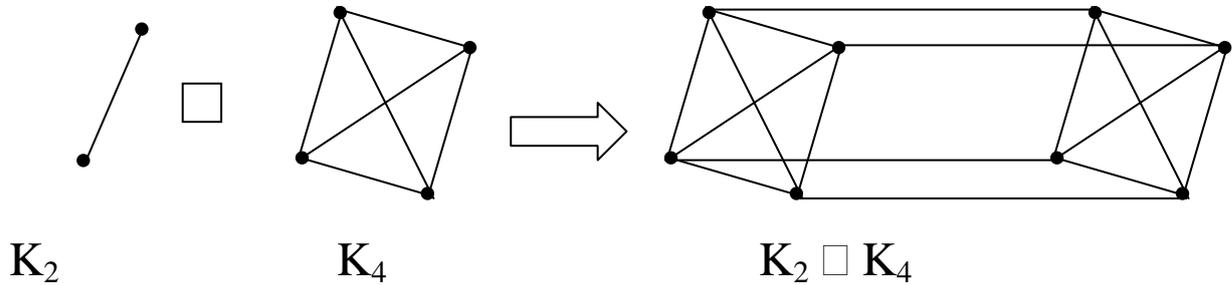


Figure 1.3

On note que le nombre de sommets dans  $G \square H$  est  $|V(G)| \cdot |V(H)|$ , et que le nombre d'arêtes est  $|V(G)| \cdot |E(H)| + |V(H)| \cdot |E(G)|$ .

### 1.2.2 Produit cartésien de deux graphes :

Le produit cartésien de deux graphes  $G = (V(G), E(G))$  et  $H = (V(H), E(H))$ , est le graphe noté  $G \times H$  où :  $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ .

Deux sommets  $(u, v)$  et  $(u', v')$  sont adjacents si et seulement si :

$$uu' \in E(G) \text{ et } vv' \in E(H)$$

Exemple :

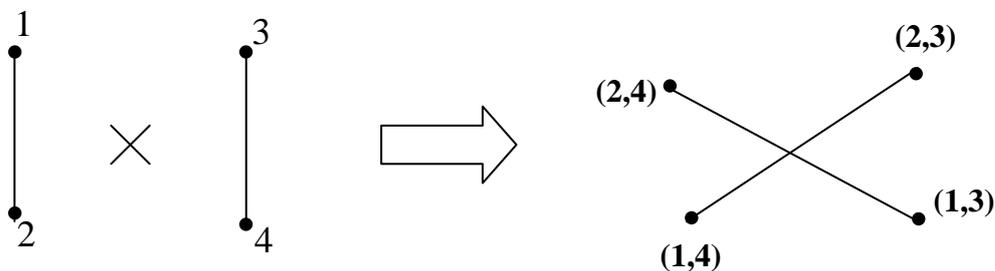


Figure 1.4

### 1.2.3 Homomorphisme de graphes :

Soient  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$  deux graphes.

Un homomorphisme de  $G$  dans  $G'$  est une application :

$$f: V \longrightarrow V' \text{ telle que :}$$

$$uv \in E \implies f(u) f(v) \in E'$$

### 1.2.4 Isomorphisme de graphes :

Une application  $f: V \longrightarrow V'$  définit un isomorphisme de  $G$  dans  $G'$  s'il existe une application  $g: V' \longrightarrow V$  tel que :

- i)  $f$  et  $g$  sont des homomorphismes
- ii)  $f \circ g = \text{id}_{G'}$  et  $g \circ f = \text{id}_G$ .

**Remarque :** Un homomorphisme bijectif n'est pas nécessairement un isomorphisme.

**Exemple :**

$$f: V(G) \longrightarrow V(G')$$

$$f(1) = b$$

$$f(2) = a$$

$$f(3) = c$$

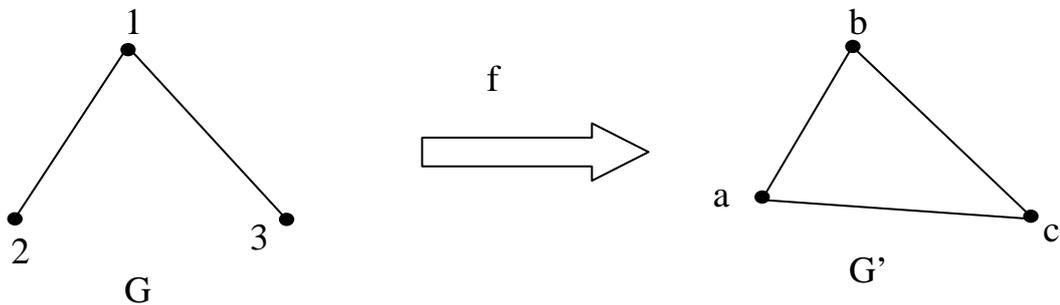


Figure 1.5

On ne peut pas trouver un homomorphisme  $g$  de  $G'$  dans  $G$ , donc  $f$  n'est pas isomorphisme.

### 1.2.5 Automorphisme de graphes :

Un automorphisme est un isomorphisme de  $G$  dans lui même. (Isomorphisme intérieur).

## 1,3 DISTANCES ET INTERVALLES DANS LES GRAPHES :

### 1.3.1 Distance dans les graphes :

Etant donné deux sommets  $u$  et  $v$  d'un graphe  $G = (V, E)$ , on appelle distance entre  $u$  et  $v$ , la longueur d'une plus courte  $(u, v)$  - chaîne. Une telle distance est notée  $d_G(u, v)$  (ou  $d(u, v)$  s'il n'y a pas de confusion).

- L'excentricité d'un sommet  $u$  notée  $e_G(u)$  (ou  $e(u)$  s'il n'y a pas de confusion), est le nombre suivant :  $e_G(u) = \max_{v \in V(G)} d(u, v)$ .
- Le diamètre de  $G$  noté  $D(G)$  (ou  $D$  s'il n'y a pas de confusion) est la plus grande excentricité : 
$$D(G) = \max_{u \in V} [e(u)].$$
- Le rayon de  $G$  noté  $R(G)$  (ou  $R$  s'il n'y a pas de confusion), est la plus petite excentricité : 
$$R(G) = \min_{u \in V} [e(u)].$$
- Le centre de  $G$  est l'ensemble des sommets de  $G$  dont l'excentricité est égale au rayon.

### 1.3.2 Intervalles :

L'intervalle  $I_G(u, v)$  (ou  $I(u, v)$  s'il n'y a pas de confusion) est l'ensemble des sommets de  $G$  appartenant aux plus courtes  $(u, v)$  - chaîne.

$$I_G(u, v) = \{ w \in V, w \text{ est sur une plus courte } (u, v) \text{ - chaîne} \}.$$

#### Proposition 1.3.2.1 (Mulder) [45] :

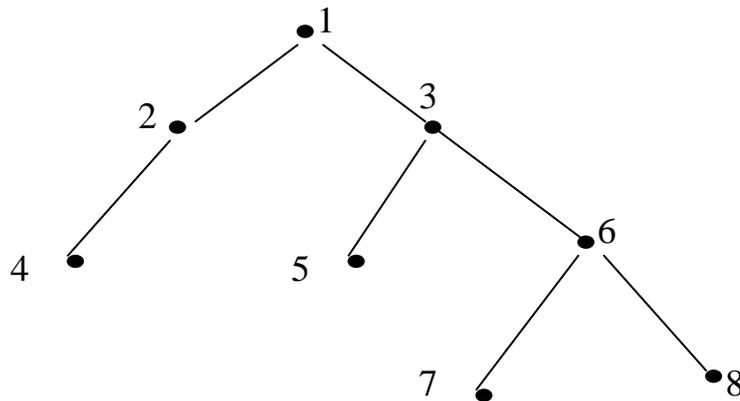
Soient  $u$  et  $v$  deux sommets d'un graphe  $G$ , alors :

- 1)  $u, v \in I(u, v)$
- 2)  $I(u, v) = I(v, u)$
- 3) Si  $w \in I(u, v)$ , alors  $I(u, w) \subset I(u, v)$
- 4) Si  $w \in I(u, v)$ , alors  $I(u, w) \cap I(w, v) = \{w\}$
- 5) Si  $w \in I(u, v)$ , et  $z \in I(u, w)$  alors  $w \in I(z, v)$

### 1.3.3 Décomposition en niveaux (couches) :

On appelle décomposition en niveaux à partir d'un sommet donné  $u$  la partition de  $V(G)$  en  $N_0(u), N_1(u), N_2(u), \dots, N_{e(u)}(u)$  tel que :  $N_i(u) = \{v \in V(G) / d(u,v) = i\}$ . L'ensemble des sommets de  $V$  qui sont à distance  $i$  de  $u$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, e(u)$ .

Exemple :



La décomposition relative au sommet 1.

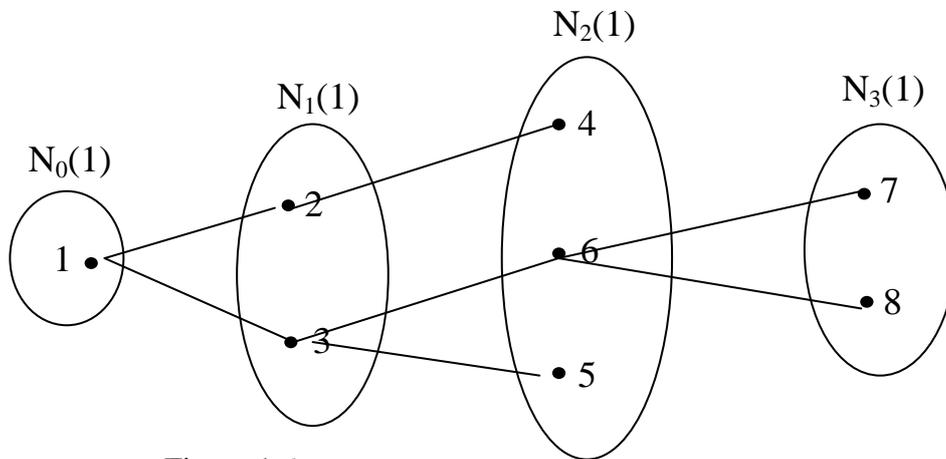


Figure 1.6

### 1.3.4 Décomposition en niveaux par rapport à un intervalle :

Le  $i$ -ème niveau de  $I(u,v)$  noté  $N_i(u,v)$  est défini comme suit :

$$N_i(u,v) = N_i(u) \cap I(u,v) \quad \text{pour tout } i = 0, 1, \dots, d(u,v).$$

D'après la définition de  $I(u,v)$  on a :  $N_i(u,v) = N_{d(u,v)-i}(v,u)$ .

### 1.4.1 Quelques graphes particuliers :

#### 1.4.1.1 Sous graphes :

Soit  $G = (V, E)$  un graphe, alors un graphe  $G' = (V', E')$  est dit sous-graphe de  $G$  si l'ensemble des sommets  $V'$  inclut dans  $V$  et l'ensemble des arêtes  $E'$  est formé par toutes les arêtes de  $E$  dont les extrémités sont dans  $V'$ .

De plus si  $V=V'$ , on dit que  $G' = (V', E')$  est un graphe partiel de  $G$ .

Le complémentaire du graphe  $G$  est le graphe  $\bar{G}$  où  $V(\bar{G}) = V(G)$  et on relie deux sommets de  $\bar{G}$  par une arête si et seulement s'ils ne sont pas adjacents dans  $G$ .

#### 1.4.2 Graphe $K$ – régulier :

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit  $K$  – régulier si :

$$\forall v \in V \text{ on a } d_G(v) = K.$$

#### 1.4.3 Graphe complet :

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit complet si tous les sommets sont deux à deux adjacents. Le graphe complet à  $n$  sommets est noté  $K_n$ .

#### 1.4.4 Graphe biparti :

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit biparti s'il existe une partition de l'ensemble des sommets de  $G$  en deux sous-ensembles  $V_1$  et  $V_2$  tels que toute arête de  $G$  a une extrémité dans  $V_1$  et l'autre extrémité dans  $V_2$ .

Si de plus  $|V_1| = |V_2|$ ,  $G$  est appelé graphe biparti équilibré (balancé).

Un graphe biparti  $G = (V_1 \cup V_2 ; E)$  est complet si tout sommet de  $V_1$  est adjacent à tout sommet de  $V_2$ . Un tel graphe est noté :  $K_{p,q}$  avec  $q = |V_2|$  et  $p = |V_1|$ .

**Exemple :**

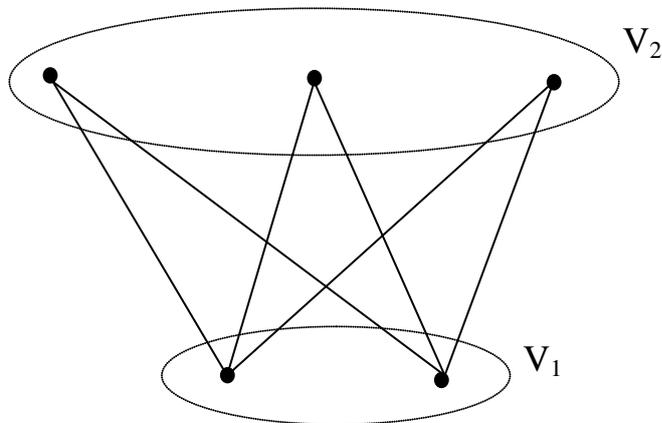


Figure 1.7

Le graphe biparti  $K_{2,3}$ .

**Proposition 1.4.4.1 (Berge) [7]**

Un graphe  $G$  est biparti si et seulement si  $G$  ne contient pas de cycle de longueur impaire.

**1.4.5 Arbres :**

Un arbre est un graphe connexe sans cycle. Un tel arbre est noté  $T$ .

**1.4.6 Graphes intervalles réguliers :**

Un graphe  $G = (V, E)$  est dit intervalle régulier si et seulement si pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$  de  $G$ , le nombre de voisins de  $u$  appartenant à  $I(u,v)$  est égale à la distance entre  $u$  et  $v$ .

**1.4.7 graphes impairs (Biggs) [11]**

Soit  $E$  un ensemble à  $2K-1$  éléments. On désigne par  $O_K = (P_{K-1}(E), V)$  le graphe dont l'ensemble des sommets représentent les parties de  $E$  à  $K-1$  éléments.

Deux sommets sont adjacents si et seulement si les parties correspondantes sont disjointes.

**Exemple :**

La figure suivante représente le graphe  $O_3$  associé à l'ensemble  $E = \{a, b, c, d, e\}$ .

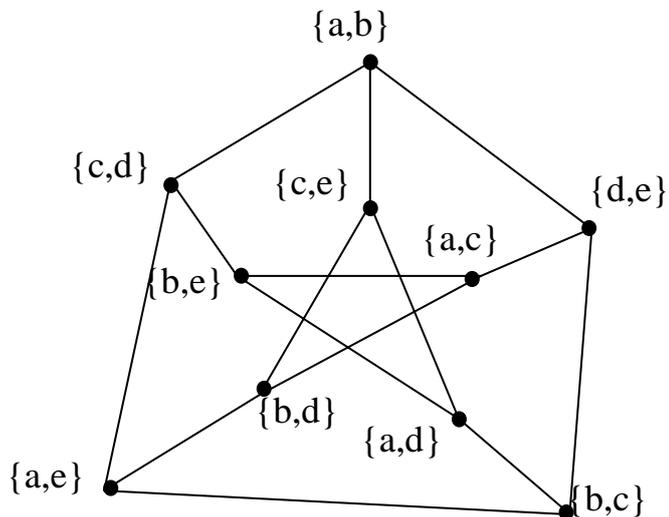


Figure 1.8  
Le graphe  $O_3$

**1.4.8 Graphes impairs étendus [ Extended odd graph ] :**

Le graphe impair étendu, noté  $E_K$  où  $K$  est un entier supérieur à 2, est le graphe qui a pour ensemble de sommets  $\{ A \subset \{1,2, \dots, 2K-1\} \text{ tel que } |A| \leq K-1 \}$ .

Deux sommets  $A_1$  et  $A_2$  sont adjacents si et seulement si :

$$|A_1 \Delta A_2| = 1 \text{ ou } |A_1 \Delta A_2| = 2K-2.$$

$A_1 \Delta A_2$  est la différence symétrique de  $A_1$  et  $A_2$ .

**1.4.9 GRAPHES MEDIANS :**

**Définition 1.4.9.1**

Un graphe médian est un graphe tel que pour tout triplet de sommets  $(u,v,w)$ , l'intersection des trois intervalles  $I(u,v)$ ,  $I(v,w)$  et  $I(u,w)$  est réduit à un seul sommet ie :

$$|I(u,v) \cap I(v,w) \cap I(u,w)| = 1.$$









# **CHAPITRE 4**

***TROIS NOUVELLES CLASSES***

***D'ARBRES***

## TROIS NOUVELLES CLASSES D'ARBRES

Tous les arbres sont plongeables dans l'hypercube. Le problème consiste à trouver la plus petite dimension de l'hypercube dans lequel un arbre donné y est plongeable, on parle alors d'hypercube optimal.

Ce problème fait l'objet de plusieurs études ce qui a permis de trouver des résultats pour un certain nombre de classes d'arbres.

Dans ce chapitre on introduira trois nouvelles classes d'arbres, obtenues à partir de l'arbre binaire complet  $D_n$ , dont les éléments sont  $R_n$ ,  $H_n$  et  $M_n$  ayant respectivement les dimensions suivantes :  $n+2$ ,  $n+3$  et  $n+3$ .

### 4.1 Définition de la première classe d'arbre :

On définit un arbre binaire de la façon suivante :

Pour  $n \geq 1$ ,  $R_n$  est obtenu inductivement comme suit :

$R_1$  : c'est l'arbre de la figure suivante :

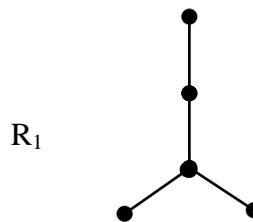


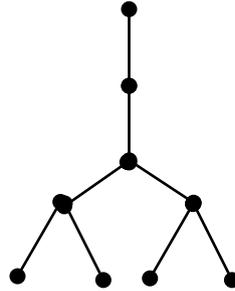
Figure 4.1

Pour  $n \geq 2$ ,  $R_n$  est obtenu à partir de  $R_{n-1}$ , tel que chaque sommet pendant reliant un sommet de degré 3 est relié à deux nouveaux sommets. Ces sommets sont pendants dans l'arbre  $R_n$ .

$R_n$  possède  $2^n + 1$  sommets pendants, un sommet de degré 2, et  $2^n - 1$  sommets de degré 3, donc  $R_n$  a  $2^{n+1} + 1$  sommets.

**Exemple :**

$R_2$  est montré dans la figure suivante :



$R_2$

Figure4.2

Le théorème suivant donne la dimension de  $R_n$ .

**Théorème 4.1.1:**

Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\dim(R_n) = n+2$ .

**Preuve :**

Il est facile de voir que  $R_n$  est plongéable dans  $\hat{D}_n$ , et que l'arbre binaire complet  $D_n$  est plongéable dans  $R_n \forall n \geq 2$ , comme  $\dim(\hat{D}_n) = \dim(D_n) = n+2$  ; alors  $\dim(R_n) \leq n+2$ , mais  $D_n \subset R_n$  donc  $\dim(R_n) = n+2$ .

Pour  $n=1$ , la  $C_3$  - valuation de  $R_1$  est montrée dans la figure suivante.

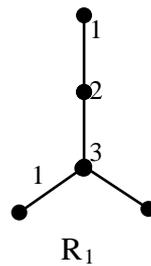


Figure 4.3

Comme le nombre de sommets de  $R_1$  est égale à 5, alors  $R_1$  ne peut pas être plongeable dans  $Q_2$  par suite  $\dim(R_1) = 3$ .

On peut généraliser cette classe en définissant l'arbre  $R_n^{(k)}$ , obtenu de la manière suivante:

$R_n^{(0)}$  est l'arbre binaire  $B_{n+1}$ ;

$R_n^{(1)}$  est l'arbre  $R_n$ ;

$R_n^{(k)}$  ( $k \geq 2$ ) est obtenu à partir de  $R_n$  en insérant  $(k-1)$  nouveaux sommets de degré 2 au niveau de l'arête pendante incidente au sommet de degré 2 de  $R_n$ .

**Proposition 4.1.1:**

Pour tout  $n \geq 1$ ,  $2 \leq k \leq n+2$   $\dim(R_n^{(k)}) = n+2$ .

La démonstration se fait d'une manière analogue à celle de théorème précédent.

c'est -à-dire que  $\forall 2 \leq k \leq n+2$   $R_n^{(k)}$  est plongeable dans  $\wedge D_n$  et que  $R_n$  est plongeable dans  $R_n^{(k)}$  pour tout  $k \geq 2$ . Comme  $\dim(R_n) = \dim(\wedge D_n) = n+2$  alors  $R_n^{(k)}$  est aussi  $C_{n+2}$ -valué  $\forall 2 \leq k \leq n+2$ .

**4.2 Définition de la deuxième classe d'arbre :**

On définit un arbre binaire de la façon suivante :

Pour  $n \geq 1$ ,  $H_n$  est un arbre binaire défini inductivement comme suit :

$H_1$  c'est le graphe de la figure suivante :

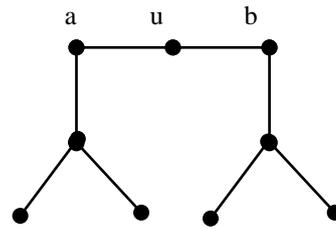


Figure 4.4

Pour  $n \geq 2$ ,  $H_n$  est obtenu à partir de  $H_{n-1}$ , tel que chaque sommet pendant est relié à deux nouveaux sommets. Ces nouveaux sommets seront appelés sommets pendants de l'arbre  $H_n$ .

$H_2$  est Montré dans la figure ci - dessous :

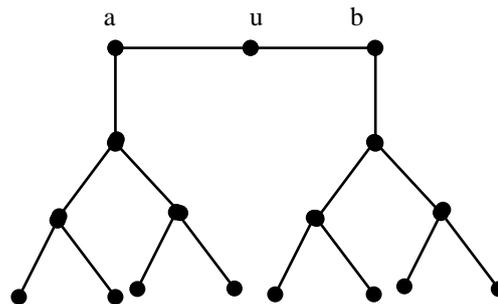


Figure 4.5

$H_n$  possède  $2^{n+1}$  sommets pendants,  $2^{n+1} - 2$  sommets de degré 3 et 3 sommets de degré 2, donc  $H_n$  a  $2^{n+2} + 1$  sommets .

Le théorème suivant donne la dimension de  $H_n$ .

**Théorème 4.2.1:**

Pour tout  $n \geq 1$ ,  $H_n$  est plongéable dans  $Q_{n+3}$  et  $\dim(H_n) = n+3$  .

**Preuve :**

1) comme  $H_n$  contient  $2^{n+2} + 1$  sommets qui est strictement supérieur au nombre de sommet de  $Q_{n+2}$ , alors  $H_n$  ne peut pas être plongé dans  $Q_{n+2}$  et par suite  $\dim(H_n) \geq n + 3$ . Aussi, pour montrer que  $H_n$  est plongé dans  $Q_{n+3}$ , il suffit de montrer que  $H_n$  est  $C_n$ -valué.

L'arbre  $H_n$  peut être obtenu à partir de deux copies disjointes  $T_1, T_2$  de l'arbre binaire  $B_{n+1}$  est d'un nouveau sommet  $u$ , tel que  $u$  est relié par une arête à la racine de  $T_1$ , et par un autre arête à la racine de  $T_2$ .

Essayons de donner une  $C_{n+3}$ -valuation pour  $H_n$ .

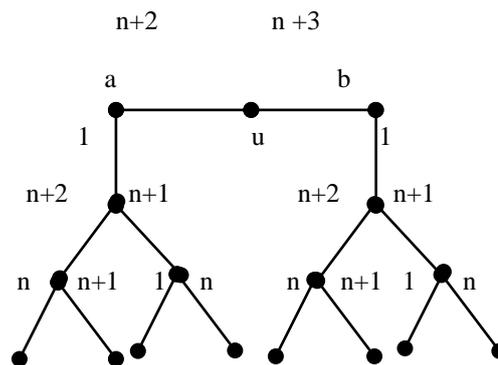


Figure 4.6

On montre que pour n'importe qu'elle chaîne  $P$  de  $H_n$  il existe  $K \in \{1, 2, \dots, n+3\}$ , pour lequel un nombre impair d'arêtes de  $P$  sont marquées par  $K$ .

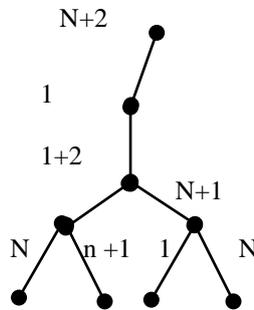


Figure 4.7

- a) Si  $P$  appartient à l'arbre ci-dessus (figure 4.7), alors il existe  $K \in \{1, 2, \dots, n+2\}$  pour lequel un nombre impair d'arêtes de  $P$  sont marquées par  $K$ , puisque cet arbre est un  $R_n$ .
- b) si  $P$  appartient à l'arbre  $B_{n+1}$ , alors il existe  $K \in \{1, 2, \dots, n+2\}$ , pour lequel un nombre impair d'arêtes de  $P$  sont marquées par  $K$ .

Comme aucune arête de  $R_n$ , ni de  $B_{n+1}$  n'est marquée par  $n+3$ , donc si on marque l'arête  $ub$  par  $n+3$  on aura une  $C_{n+3}$ -valuation de  $H_n$ .

**Conclusion :**

Pour tout  $n \geq 1$ ;  $\dim(H_n) = n+3$ .

**Exemple :**

La  $C_n$ -valuation de  $H_2$  et montrée dans la figure ci-dessous :

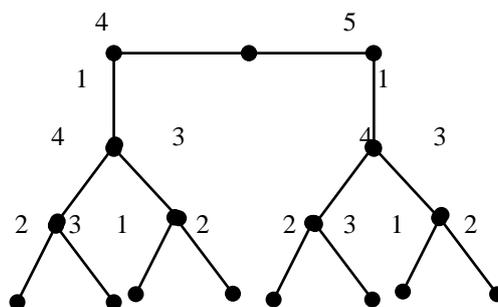


Figure 4.8

### 4.3 Définition de la troisième classe d'arbre :

On définit une nouvelle classe d'arbre dont les éléments sont obtenus à partir de deux copies disjointes de  $T'_1, T'_2$  de  $R_n$  dont leurs sommets de degré 2 sont reliés par une arête. Un élément de cette classe est noté  $M_n$ .

#### Exemple :

$M_2$  est donné dans la figure suivante :

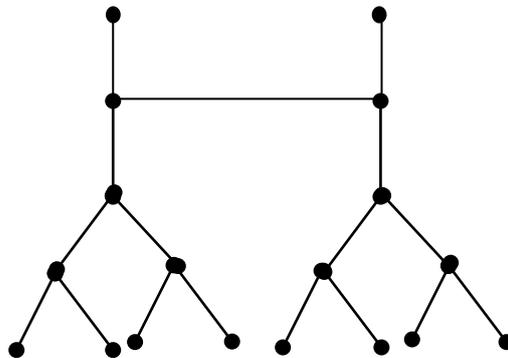


Figure 4.9

$M_n$  possède  $2^{n+1} + 2$  sommets pendants,  $2^{n+1}$  sommets de degré 3. Donc  $M_n$  possède  $2^{n+2} + 2$  sommets.

Le théorème suivant donne la dimension de  $M_n$ .

#### Théorème 4.3.1 :

Pour tout  $n \geq 1$  ;  $\dim(M_n) = n + 3 \quad \forall n \geq 1$ .

#### Preuve :

On a  $M_n$  contient  $2^{n+2} + 2$  sommets, alors cet arbre ne peut pas être plongé dans  $Q_{n+2}$  par suite  $\dim(M_n) \geq n + 3$ . Il reste maintenant à donner une  $C_{n+3}$ -valuation pour  $M_n$ .

Soit la valuation suivante :

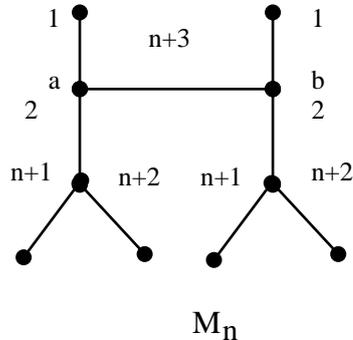


Figure 4.10

Montrons que pour n'importe quelle chaîne P de  $M_n$ , il existe  $K \in (1, 2, \dots, n+3)$  pour lequel un nombre impair d'arêtes de P sont marquées par K.

Comme  $T'_1$  et  $T'_2$  sont  $C_{n+2}$ -valués, alors  $\forall P$  appartient à  $T'_1$  ou à  $T'_2$  il existe  $K \in (1, 2, \dots, n+2)$ , pour lequel un nombre impair d'arêtes sont marquées par K, par suite le choix de la marque de l'arête ab ne viole pas la propriété de  $C_{n+3}$ -valuation de  $M_n$  puisque aucune arête de  $T'_1$  et  $T'_2$  n'est marquée par  $n+3$ , résultat voulu.

**Conclusion :**

Il existe une  $C_{n+3}$ -valuation pour  $M_n$  et  $\dim(M_n) \geq 3+n$  alors  $\dim(M_n) = n+3$ .

On peut généraliser cette classe en définissant l'arbre  $M_n^{(k)}$  comme suit:

$M_n^{(k)}$  est l'arbre obtenu à partir de deux copies disjointes,  $T^*_1, T^*_2$  de  $R_n^{(k)}$  tel que un sommet de degré 2 adjacent à un sommet de degré 3 de  $T^*_1$  est relié par une arête à un sommet de degré 2 adjacent à un sommet de degré 3 et  $T^*_2$ .

Si  $k=1$  ;  $M_n^{(k)} = M_n$

**Exemple :**

$M_2^2$  est montré dans la figure suivante.

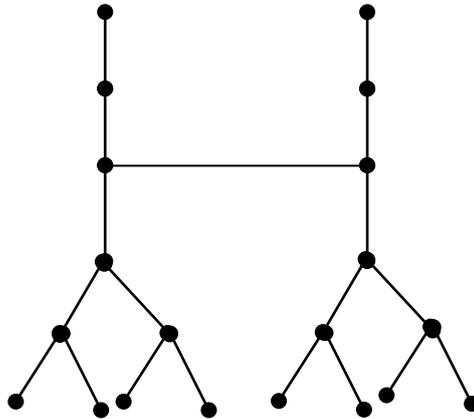


Figure 4.11

**Proposition 4.3.1 :**

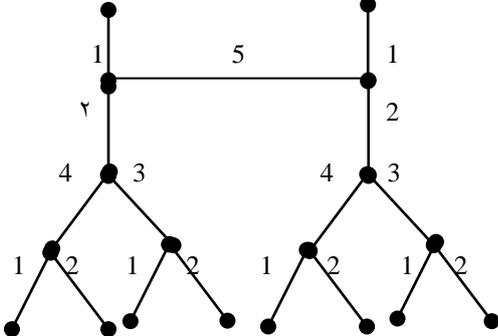
Pour tout  $n \geq 1$ ,  $2 \leq k \leq n+2$ ,  $M_n^{(k)}$  est plongeable dans  $Q_{n+3}$  et que  $\dim (M_n^{(k)})=n+3$

**Preuve :**

Comme  $T^*_1$  et  $T^*_2$  sont  $C_n$ -valuées, alors  $\forall p$  appartient à  $T^*_1$  ou à  $T^*_2$ , il existe  $K \in (1, 2, \dots, n+2)$ , pour lequel un nombre impair d'arêtes de  $p$  sont marquées par  $K$ , alors si on marque l'arête reliant  $T^*_1$  et  $T^*_2$  par  $n+3$  on aura une  $C_{n+3}$ -évaluation puisque aucune arête de  $T^*_1$ , ni de  $T^*_2$  n'est marquée par  $n+3$ .

**Exemple :**

La  $C_5$ -évaluation de  $M_2$  et donnée dans la figure suivante :



$M_2$   
Figure 4.12





# **CHAPITRE 5**

## ***COMPLEMENTS***

## 5.1 Problèmes concrets

Le développement des algorithmes parallèles efficaces sur des architectures à mémoire distribuée a conduit au développement de la notion de plongement d'arbres dans un hypercube.

### Problème :1

Une puce dans un microprocesseur ne peut traiter qu'une seule opération par exemple la multiplication ou l'addition, et que les puces reliées par des liaisons électroniques ne peuvent pas traiter une même opération. On veut chercher une chaîne d'opérations qui ne possède pas de cycle, alors ce problème peut être modéliser comme suit :

Représenter le microprocesseur par une structure d'hypercube, dont les sommets correspondent aux puces, et deux sommets sont adjacents dans l'hypercube s'ils correspondent aux puces liées par des liaisons électroniques.

Comme un arbre est sans cycle donc le problème revient à la recherche d'un arbre d'ordre  $2^n$  plongeable dans  $Q_n$  avec  $n$  est le nombre d'opérations traitées.

### Problème : 2 (Nicos) [50]

Pour véhiculer de l'information entre un groupe de  $n$  personnes, on structure sous forme d'un graphe  $G$  à  $n$  sommets  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  tel que  $x_i x_j \in E(G)$  si une communication entre les personnes est possible (de  $x_i$  à  $x_j$  et vice versa ).

Il existe une probabilité  $P_{ij}$  d'interception d'un message transmis entre  $x_i$  et  $x_j$ .

Les séquences des messages transmis forment un arbre  $T$  plongeable dans  $G$ .

Donc le problème revient à trouver un arbre  $T$  plongeable dans  $G$  qui minimise la fonction

$$1 - \prod_{i,j \in T} (1 - P_{ij}).$$

Cet exemple général peut être appliqué au cas où  $G$  est un hypercube de dimension  $n$  et où  $T$  est un arbre particulier.

#### 5.1.1 Algorithme de prim

algorithme de recherche d'un plongement d'arbre de poids minimum dans un graphe.

(the shortest spanning tree of the graph ) (SST).

**Etape 1 :**

soit  $T_S = \{x_S\}$ , où  $x_S$  est un sommet choisit arbitrairement,

$A_S = \emptyset$  ( $A_S$  est l'ensemble des arêtes qui forment le (SST)

**Etape 2 :**

Pour tout sommet  $x_j \notin T_S$ , chercher un sommet  $\alpha_j \in T_S$ , tel que  $C(x_i, x_j) = \min [C(x_i, x_j)] = B_j$

$$x_j \in T_S$$

où  $C(x_i, x_j)$  est le coût de l'arête  $x_i x_j$ .

Si  $N(x_j) \cap T_S = \emptyset$  alors  $B_j = \infty$

**Etape 3 :**

Choisir un sommet  $x_{j^*}$ , tel que  $B_{j^*} = \min [B_j]$ .

$$x_j \notin T_S$$

$$T_S = T_S \cup \{x_{j^*}\}, A_S = A_S \cup \{\alpha_j x_{j^*}\}$$

Si  $|T_S| = n$ , terminé,  $A_S$  forme le (SST)

Si  $|T_S| < n$ , aller en 4.

**Etape 4**

Pour tout sommet  $x_j \notin T_S$  et  $x_j \in N(x_{j^*})$ , alors :

Si  $B_j > C(x_{j^*}, x_j)$ ,  $B_j = C(x_{j^*}, x_j)$ ,  $\alpha_j = x_{j^*}$  et aller en 3.

Si  $B_j < C(x_{j^*}, x_j)$  aller en 3.

**Exemple**

Dans le graphe  $G$  illustré dans la figure ci-dessous chaque sommet représente une personne et on relie  $x_i$  à  $x_j$  si une communication entre  $x_i$  et  $x_j$  est possible (de  $x_i$  à  $x_j$  et vice versa). Il existe une probabilité  $P_{ij}$  d'interception d'un message transmis entre  $x_i$  et  $x_j$  évidemment les séquences de ces messages forment un arbre  $T$  plongeable dans  $G$ , dont la fonction

$$1 - \prod_{i,j \in T} (1 - P_{ij}) \text{ est minimisée.}$$

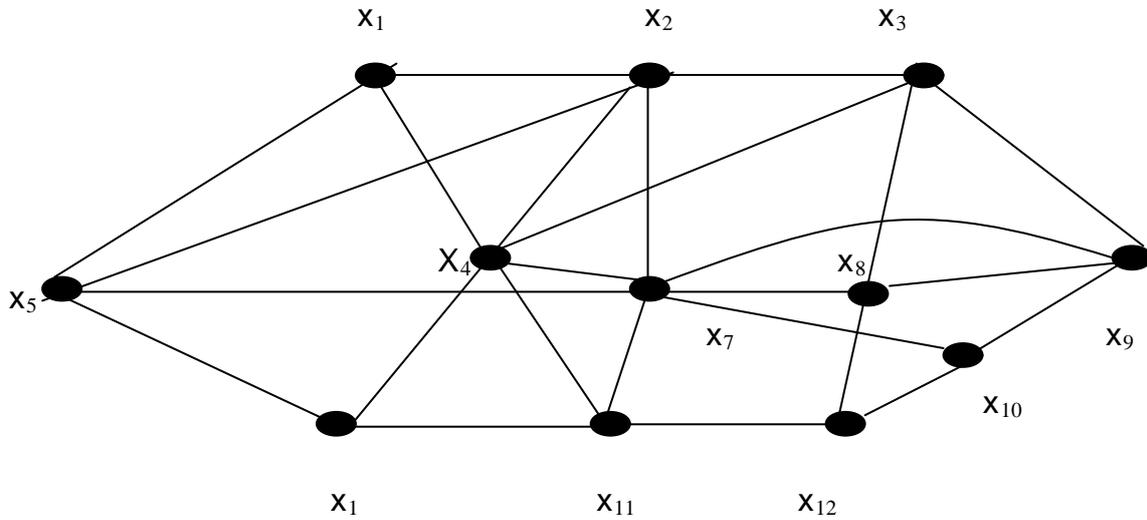


Figure5.1

Tel que :  $P_{1,5} = 0,05$ ,  $P_{1,2} = 0,06$ ,  $P_{1,4} = 0,11$ ,  $P_{2,5} = 0,08$ ,  $P_{2,3} = 0,15$ ,  $P_{2,4} = 0,18$ ,  $P_{2,7} = 0,11$   
 $P_{3,4} = 0,18$ ,  $P_{3,8} = 0,18$ ,  $P_{3,9} = 0,06$ ,  $P_{4,6} = 0,1$ ,  $P_{4,7} = 0,07$ ,  $P_{4,11} = 0,17$ ,  $P_{5,6} = 0,15$ ,  
 $P_{5,7} = 0,09$ ,  $P_{6,11} = 0,03$ ,  $P_{7,8} = 0,09$ ,  $P_{7,9} = 0,04$ ,  $P_{7,10} = 0,13$ ,  $P_{7,11} = 0,12$ ,  $P_{8,9} = 0,14$ ,  
 $P_{8,12} = 0,05$ ,  $P_{9,10} = 0,19$ ,  $P_{10,12} = 0,02$ ,  $P_{11,12} = 0,07$

On utilise l'algorithme de prim.

Etape 1 :  $x_s = x_1, T_1 = \{x_1\}, A_1 = \emptyset$

Etape 2 :  $C(x_1, x_2) = 0,06$ ,  $C(x_1, x_4) = 0,11$ ,  $C(x_1, x_5) = 0,05$ ,  $\alpha_i = x_1$

Pour les autres sommets on a  $B_j = \infty$

Etape 3  $B_j^* = 5$  alors  $x_j^* = x_5, T_1 = \{x_1, x_5\}, A_1 = \{x_1x_5\}$

Etape 4

$N(x_5) = \{x_2, x_6, x_7\}$

$B_2 = 0,06 < C(x_5, x_2) = 0,08$ ,  $x_4 \notin N(x_5)$ ,  $C(x_1, x_4) = 0,11$

$B_6 = \infty > C(x_5, x_6) = 0,15$

$B_7 = \infty > C(x_5, x_7) = 0,09$

Etape 3

$$\alpha_j = x_1, x_j^* = x_2, T_1 = \{x_1, x_5, x_2\}, A_1 = \{x_1, x_5, x_1, x_2\}$$

Etape 4

$$N(x_2) = \{x_3, x_4, x_7\}.$$

$$B_3 = \infty > C(x_1, x_3) = 0.15$$

$$B_4 = 0,11 < C(x_2, x_4) = 0,18$$

$$B_7 = 0,09 < C(x_2, x_7) = 0,11$$

Etape 3

$$\alpha_j = x_5, x_j^* = x_7, T_1 = \{x_1, x_5, x_2, x_7\},$$

$$A_1 = \{x_1x_5, x_1x_2, x_5x_7\}$$

On continue ce processus jusqu'à voir  $|T_1| = 12$  et on obtient l'arbre suivant :

$$A_1 = \{x_1x_5, x_1x_2, x_5x_7, x_7x_9, x_9x_3, x_7x_6, x_7x_8, x_8x_{12}, x_{12}x_{10}, x_{12}x_{11}, x_{11}x_6\}$$

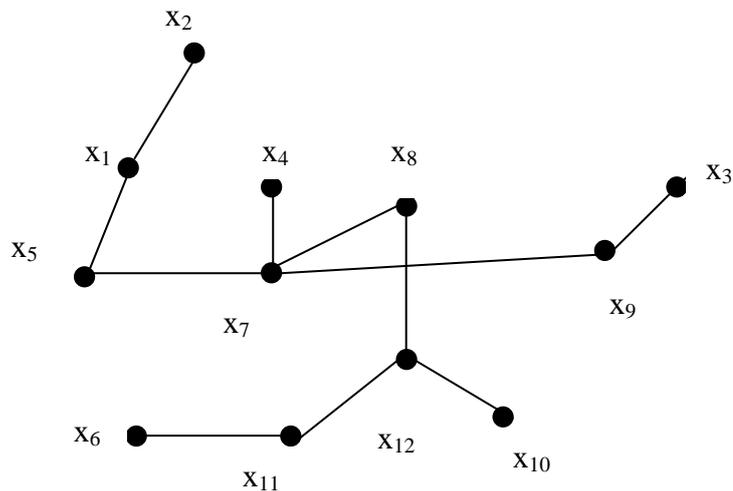


Figure : 5.2

$$\prod_{i,j \in T} (1 - P_{ij}) = 0.5214. \text{ La probabilité minimum est } 0.4768.$$

## 5.2 Plongements isométriques

### Définition:

Soit  $f$  un plongement de  $G$  dans  $H$ , alors on dit que  $f$  est un plongement isométrique si  $d_G(u,v) = d_H(f(u),f(v))$  pour tout  $u,v \in V(G)$ .

Etant donné un graphe  $G = (V(G), E(G))$ , donnons l'algorithme suivant :

### Algorithme (wilkeit)

#### Première étape:

- 1,1) calculer la distance  $d(u,v)$  ; pour tout  $u,v \in V(G)$  ;
- 1,2)  $R(u,v) = d(u,v)$  pour tout  $u,v \in V(G)$ .

#### Deuxième étape (concerne la recherche des cliques dans G)

- 2,1)  $c = 1$ , aucune arête n'est marquée ;
- 2,2) Choisir une arête non encore marquée ;
- 2,3) Poser  $K^{\circledast} := \{w \in V(G) / wu, wv \in E(G)\} \cup \{u,v\}$  ;
- 2,4) Pour tout  $u,v \in K^{\circledast}$  alors: si  $uv$  est une arête non marquée on marque  $uv$ , si non terminé,  $G$  ne peut pas être plongeable;
- 2,5) S'il existe une arête non marquée, alors poser  $C := C+1$  et aller en 2,2 ;
- 2,6) Ordonner les cliques de  $G$  par ordre de leurs tailles.

#### Troisième étape

- 3,1) Poser  $S := 1$  ;
- 3,2) Choisir la plus grande clique  $K_{a(S)} = \{v_0, \dots, v_{a(S)-1}\}$  de  $G$  telle que  $R(v_0, v_1) = 1$ , si un tel sous graphe n'existe pas terminé,  $G$  ne peut pas être plongeable;
- 3,3) Pour tout  $u \in V(G)$  noter  $z \in K_{a(S)}$  pour lequel  $d(u,z) = d(u, K_{a(S)})$  par  $g_S(u)$ .  
Si  $g_S(u)$  n'est pas unique, terminé;  $G$  ne peut pas être plongeable;
- 3,4) Pour tout  $0 \leq j \leq a(S)-1$ , poser  $\prod_S(v_j) = j$ , pour tout  $u \in V(G) - K_{a(S)}$ , poser

$$\prod_S(u) = \prod_S(g_S(u)).$$

#### Quatrième étape

- 4,1) Pour tout  $u,v \in V(G)$ : si  $\prod_S(u) \neq \prod_S(v)$ , alors poser  $R(u,v) := R(u,v)-1$  si  $R(u,v) < 0$ , terminé ;  $G$  ne peut pas être plongeable;
- 4,2) S'il reste des sommets  $u,v \in V(G)$  avec  $R(u,v) > 0$  alors poser  $S := S+1$  et aller en 1,2.

**Cinquième étape**

5,1) L'application  $U \longrightarrow (\prod_1(u), \prod_2(u), \dots, \prod_S(u))$  est un plongement isométrique de  $G$  dans le graphe  $H = K_{a(1)} \square K_{a(2)} \square \dots \square K_{a(S)}$ .



**CHAPITRE 2**  
**L'HYPERCUBE ET QUELQUES**  
**CARACTERISATIONS**

Dans ce chapitre nous donnons quelques propriétés sur les hypercubes qui seront utilisées dans la suite. Nous décrivons aussi quelques caractérisations différentes d'un hypercube.

### 2.1 LE GRAPHE DE L'HYPERCUBE :

#### Définition 2.1.1 :

L'hypercube de dimension  $n$ , noté  $Q_n$  est le graphe dont l'ensemble des sommets est formé des  $n$ -uplets binaires, et deux sommets sont adjacents si et seulement s'ils diffèrent exactement en une seule composante (coordonnée).

Notons que  $Q_0 = K_1$ ,  $Q_1 = K_2$  et d'une manière générale,  $Q_n$  peut être défini récursivement en utilisant la somme cartésienne par  $Q_{n+1} = Q_n \delta K_2$ .

Il est clair que  $Q_n$  ( $n > 1$ ) est isomorphe à  $\underbrace{K_2 \delta K_2 \square \dots \delta K_2}_{n \text{ fois}}$ .

Donc  $Q_{n+s} = Q_n \delta Q_s$ .

#### Exemple :

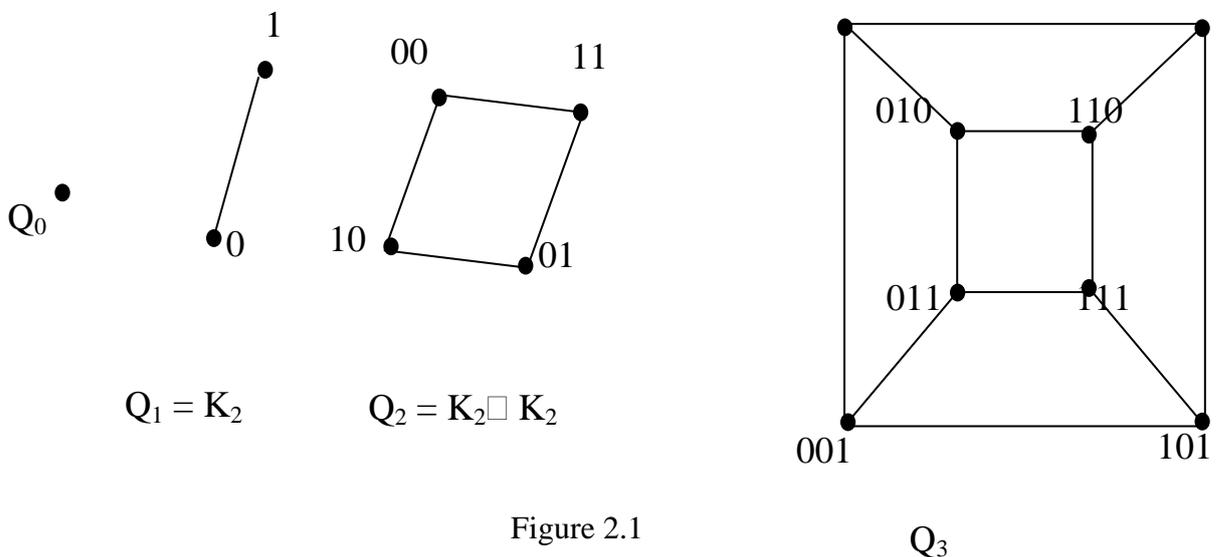
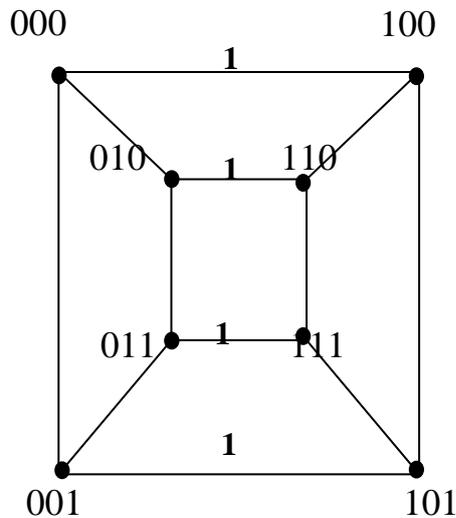


Figure 2.1

Une direction  $i$  dans l'hypercube de dimension  $n$  ( $i \leq n$ ), est l'ensemble des arêtes de  $Q_n$  dont les extrémités ont des vecteurs associés qui diffèrent à la  $i$ -ème composante.

Exemple :



$Q_3$

Figure 2.2

Cette figure montre une décomposition de  $Q_3$  en deux copies de  $Q_2$  suivant-la direction 1.

Il est facile de voir qu'une direction définit un couplage parfait de  $2^{n-1}$  arêtes qui décompose  $Q_n$  en deux copies disjointes (notée par  $Q'_{n-1}$ ,  $Q''_{n-1}$ ). Une telle décomposition s'appelle canonique suivant la direction  $i$ . Des arêtes de même direction sont appelées arêtes parallèles. Il existe  $n$  directions distinctes dans l'hypercube de dimension  $n$ .

## 2.2 Propriétés élémentaires de l'hypercube :

L'hypercube de dimension  $n$  est un graphe biparti équilibré,  $n$ -régulier ayant  $2^n$  sommets et  $n \cdot 2^{n-1}$  arêtes.

### Théorème 2.2.1(Mulder)[45]

Un graphe  $G$  est intervalle - régulier si et seulement si pour tout couple de sommets  $(u,v)$  de  $G$ , le sous graphe induit par l'ensemble des arêtes entre niveaux de  $I(u, v)$  est un hypercube de dimension  $d(u, v)$ .

### Proposition 2.2.1 (Foldes) [19]

Pour deux sommets  $u$  et  $v$  qui sont à distance  $K$  dans  $Q_n$ , il existe  $K!$  plus courtes  $(u, v)$ -chaînes.

### 2.2.1 Décomposition en niveaux de l'hypercube :

Soit  $\{u, N_1(u), N_2(u), \dots, N_{e(u)}(u)\}$  une décomposition en niveaux à partir d'un sommet  $u$  choisit arbitrairement dans  $Q_n$ . On a les propriétés suivantes :

- i) Pour tout sommet  $v$  de  $N_i(u)$ ,  $v$  admet exactement  $i$  voisins dans  $N_{i-1}(u)$ .
- ii)  $|N_i(u)| = C_n^i \quad \forall i=1,2,\dots,e(u)$

Il est facile de voir que le nombre de sommets qui sont à distance impaire d'un sommet  $u$  dans  $Q_n$  est égal à  $2^{n-1}$ , et que le nombre de sommets qui sont à distance paire de  $u$  est égal à  $2^{n-1}-1$ .

**Exemple :**

Décomposition en niveau de  $Q_3$

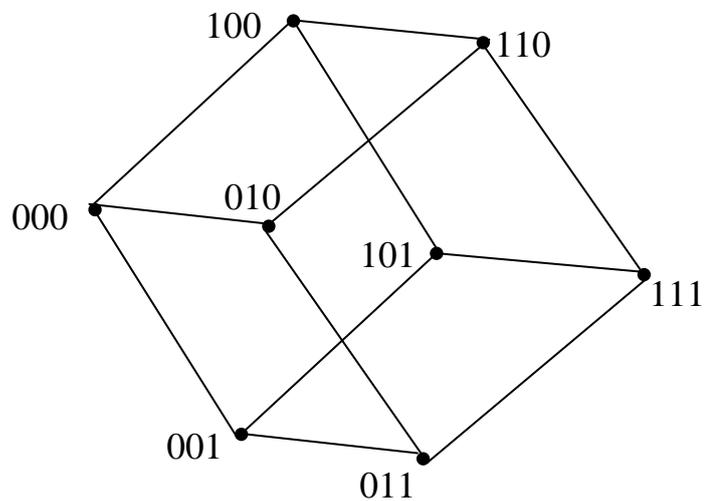


Figure 2.2

### 2.3 Caractérisation de l'hypercube :

Une première caractérisation de l'hypercube est due à Foldes [19].

#### Théorème 2.3.1 (Foldes) [19]

Un graphe connexe  $G = (V,E)$  est un hypercube si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes :

- 1)  $G$  est biparti.
- 2) Pour tout couple de sommets  $u$  et  $v$  de  $G$ , le nombre de plus courtes  $(u,v)$  - chaînes est  $d(u,v) !$ .

**Définition 2.3.1 (Mulder) [44]**

Un graphe connexe  $G$  est un  $(0, 2)$  - graphe si et seulement si pour tout couple de sommets  $(u,v)$  de  $G$ , il existe soit exactement deux chaînes de longueur 2 reliant  $u$  à  $v$ , soit aucune chaîne de longueur 2 reliant  $u$  à  $v$ .

Mulder [44] a donné les propositions suivantes sur les  $(0, 2)$  graphes.

**Proposition 2.3.1 (Mulder) [44]**

Si  $G$  est un  $(0, 2)$  - graphe ; alors  $G$  est régulier.

**Proposition 2.3.2 (Mulder) [44]**

Si  $G$  est un  $(0, 2)$  - graphe de degré  $n$ , alors  $|V(G)| \leq 2^n$ .

**Théorème 2.3.3 (Mulder, Laborde, Rao) [41]**

Soit  $G = (V,E)$  un  $(0, 2)$  - graphe, alors

- 1)  $G$  est régulier de degré  $n$
- 2)  $|V(G)| \leq 2^n$
- 3)  $|V(G)| = 2^n$  si et seulement si  $G$  est un hypercube de dimension  $n$ .

Une autre caractérisation de l'hypercube est en terme d'intervalle donnée par Mulder et Bandelt [6].

**Théorème 2.3.2 (Bandelt et Mulder) [6]**

Soit  $G$  un graphe biparti connexe, les conditions suivantes sont équivalentes :

- i)  $G$  est un hypercube ;
- ii) Tout intervalle dans  $G$  engendre un hypercube ;
- iii) Tout intervalle dans  $G$  engendre un  $(0,2)$  - graphe ;
- iv) Tout intervalle  $I(u,v)$  dans  $G$  contient exactement  $2^{d(u,v)}$  sommets ;
- v) Tout intervalle  $I(u,v)$  dans  $G$  engendre un graphe avec exactement  $d(u,v) \cdot 2^{d(u,v)-1}$  arêtes.

**Théorème 2.3.3 (Mulder) [44]**

Un graphe  $G$  connexe  $G = (V, E)$  est un hypercube si et seulement si  $G$  est un graphe médian régulier.

**Proposition 2. 3.3 (Mulder) [44]**

L'hypercube est hamiltonien, de plus par toute arête passe un cycle hamiltonien.

D'autres caractérisations de l'hypercube en terme d'intervalles ont été données, en particulier des caractérisations en terme de graphes distance monotones [12], en terme de graphes intervalles réguliers et des graphes sphériques [8] peuvent être trouvés.

**Définition 2.3.2**

Une projection (resp. anti projection) d'un sommet  $u$  d'un graphe  $G$  sur un ensemble de sommets  $S$  de  $G$  est un sommet  $v$  de  $S$  à distance minimum (resp. maximum) de  $u$ .

Pour tout ensemble de sommets  $S$  de  $G$  et pour tout sommet  $u$ , on désigne par  $P(u,S)$  (resp.  $AP(u,S)$ ) l'ensemble des projections (resp. anti projections) de  $u$  sur  $S$ .

Considérons les propriétés suivantes :

- 1) Pour tout triplet de sommets  $(u,v,w)$  on a  $|P(u, I(v,w))| = 1$ .
- 2) Pour tout triplet de sommets  $(u,v,w)$  on a  $|AP(u, I(v,w))| = 1$ .

Un graphe vérifiant l'une de ces deux propriétés est un graphe biparti.

Mollard [42] a donné une caractérisation de l'hypercube en termes d'anti projection sur les intervalles.

**Proposition 2.3.4**

Un graphe  $G = (V, E)$  est un hypercube si et seulement s'il vérifie la propriété P2.

Berrachedi [8] a donné un résultat analogue en considérant les projections sur les intervalles.

**Proposition 2. 3.5**

Un  $(0,2)$  - graphe qui vérifie la propriété P1 est un hypercube.

**2.4 Plongement dans  $Q_n$  :**

Le problème de plongement de graphes dans l'hypercube a été traité par plusieurs auteurs.

On peut citer : Havel [34,35,36,37], Harary [24,25,26] et Nébesky' [46,47] et plusieurs auteurs ont donné des familles de graphes qui sont plongeables dans  $Q_n$ .

Dans ce Pragraphe, nous donnons quelques résultats connus concernant les plongements dans l'hypercube.

### 2.4.1 DEFINITIONS GENERALES :

a) Un plongement de  $G (V,E)$  dans l'hypercube est défini par la donnée d'une application injective  $\varphi$  de l'ensemble des sommets de  $G$  dans l'ensemble des sommets  $Q_n$ , et d'une application  $P\varphi$  de l'ensemble des arêtes de  $G$  dans l'ensemble des arêtes de  $Q_n$ , qui associe à chaque arête  $uv$  de  $G$  une arête  $\varphi(u)\varphi(v)$  dans  $Q_n$ . D'une manière générale, l'étude d'un plongement de graphe  $G$  dans l'hypercube revient à voir si  $G$  est isomorphe à un sous graphe de  $Q_n$ .

b) La recherche d'un plongement optimal d'un graphe  $G$  dans un hypercube  $Q_n$  consiste à trouver la plus petite dimension  $n$  de l'hypercube dans lequel  $G$  y est plongable, l'entier  $n$  sera appelé dimension de  $G$  est notée  $\dim (G)$ .

c) Un graphe  $G = (V, E)$  est dit cubique s'il est plongable dans  $Q_n$  pour un certain  $n$ .

Firsov [18] a remarqué que les arbres sont des graphes cubiques, il a aussi montré que tout graphe cubique est nécessairement biparti, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Un exemple de graphe biparti qui n'est pas cubique c'est le graphe  $K_{2,3}$  montré ci-dessous.

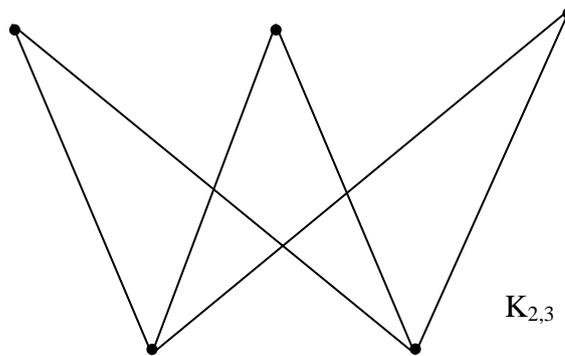


Figure 2.3

Dans notre étude, nous cherchons les dimensions de quelques classes d'arbres.

Le graphe de  $Q_n$  est biparti connexe et équilibré.

Si  $G$  est plongable dans  $Q_n$ , tel que  $G$  est connexe, alors  $G$  est biparti. Si de plus  $|V(G)| = 2^n$ , alors  $G$  est aussi équilibré.

Si un graphe  $G$  est plongé dans un graphe  $H$ ,  $H$  est plongé dans  $Q_n$  alors  $G$  est aussi plongé dans  $Q_n$  et que  $\dim(G) \leq n$ .

Arfati, Papadimitriou et Papageorgiou [5] ont montré le résultat suivant :

Le problème de décider si un graphe  $G$  est plongé dans  $Q_n$  est N.P complet.

Wagner et Corneille [51] ont montré que ce problème reste N.P complet même dans le cas où  $G$  serait un arbre.

### 2.4.1 Conditions nécessaires pour un graphe $G$ plongement dans $Q_n$ :

Si un graphe  $G = (V, E)$  est plongé dans le graphe  $Q_n$ , alors :

- 1)  $|V(G)| \leq 2^n$
- 2)  $G$  est biparti
- 3) Le degré maximum de  $G$ ,  $\Delta(G) \leq n$

Toutes ces conditions sont nécessaires pour qu'un graphe  $G$  soit plongé dans  $Q_n$ , mais ne sont pas suffisantes, comme le montre l'exemple suivant (figure 2.4).

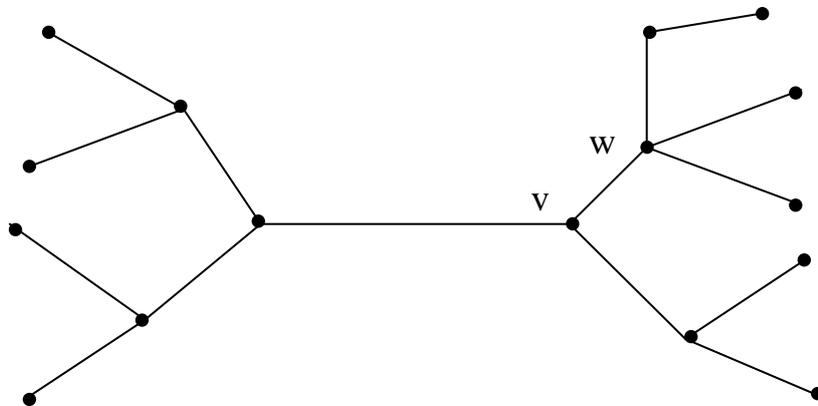


Figure 2.4

Arbre équilibré à  $2^4$  sommets qui n'est pas plongé dans  $Q_4$ .

Cet arbre n'est pas plongé dans  $Q_4$ . En effet, dans  $T$  tous les sommets sont à distance au plus 3 du sommet  $v$ , alors que dans le graphe  $Q_n$ , pour tout sommet donné  $v$ , il existe un unique sommet  $u$  tel que  $d(u,v) = n$  ( $Q_n$  est antipodal) donc l'antipodal de  $v$  devrait être à distance 4 dans  $Q_4$ .

**Remarque :**

Tout graphe  $G$  d'ordre  $2^n$ , plongeable dans  $Q_n$ , est équilibré.

**2.5 DISTANCE DE HAMMING :**

La distance de hamming entre deux sommets  $u, v$  de  $Q_n$  est le nombre de composantes dont ils diffèrent, une telle distance est notée  $\mathfrak{H}(u,v)$ .

Soient  $u$  et  $v$  deux sommets d'un cycle  $C$  donné. On désigne par  $d_1$  et  $d_2$  les longueurs des deux chaînes reliant  $u$  et  $v$  parcourant le cycle  $C$ .

**2.6 NOTION DE LA  $C_n$ -VALUATION :**

Cette notion a été introduite par I – Havel et J-Moravek [37].

La définition et les propriétés utilisées aux cas des arbres sont :

**Définition 2.6.1**

Un arbre  $T$  est  $C_n$ -valué si les arêtes de  $T$  sont marquées par les entiers de l'ensemble  $\{1,2,3,\dots,n\}$  de sorte que pour toute chaîne  $P$  de  $T$ , il existe un entier  $K \in \{1,2,3,\dots,n\}$  pour lequel un nombre impair d'arêtes de  $P$  sont marquées par  $K$ .

Etant donné une  $C_n$ -valuation d'un arbre  $T$ . Soit  $P$  une chaîne de  $T$ , on définit l'ensemble impair de  $P$  par :

$O(P) = \{K \in \{1,2,3,\dots,n\} ; \text{pour lequel un nombre d'arêtes de } P \text{ sont marquées par } K\}$ .

Par la  $C_n$ -valuation d'arbres certains plongements d'arbres dans  $Q_n$  peuvent être associés.

(ie) Une injection  $\varphi : V(T) \longrightarrow V(Q_n)$  tel que

$$u \longrightarrow \varphi(u)$$

Si  $(u, v) \in E(T)$ , alors  $(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(Q_n)$

**3.7 QUELQUES PROPRIÉTÉS STRUCTURELLES DES CYCLES ET CHAÎNE**

**HAMILTONIENS DANS  $Q_n$  :**

Soient  $s, t, d$  et  $n$  des entiers positifs. Si la propriété suivante est satisfaite :

$\forall u, v \in V(Q_n)$  tel que :  $\mathfrak{H}(u,v) = d$ , il existe un cycle hamiltonien  $HC(s, t, d, n)$  dans  $Q_n$ , tel que l'une des distances reliant  $u$  à  $v$  dans  $HC(s, t, d, n)$  est égale à  $s$  et l'autre distance est égale à  $t$ , alors  $s, t, d$  et  $n$  vérifient les trois propriétés suivantes :

$$1) s + t = 2^n$$

$$2) d \leq \min(s, t), d \leq n$$

$$3) d \equiv s \equiv t [2]$$

I. Havel [31] a étudié les chaînes et les cycles hamiltoniens dans  $Q_n$ . Parmi ces résultats nous présentons :

**Proposition 3.7.1 (Havel) [31]**

Soit  $n \geq 2$ ,  $u, v \in V(Q_n)$  avec  $u \neq v$

Soit  $r \equiv \mathfrak{G}(u, v) [2]$  ;  $\mathfrak{G}(u, v) \leq r \leq 2^n - \mathfrak{G}(u, v)$

Alors il existe un cycle hamiltonien  $HC(r, 2^n - r, \mathfrak{G}(u, v), n)$

Sa démonstration repose sur les deux lemmes suivants :

**Lemme 2.7.1 (Havel et Moraveke) [37]**

$$HC(s, t, d, n) \Rightarrow HC(s, t+2^n, d, n+1).$$

**Lemme 2.7.2 (Havel) [31]**

$$HC(s, t, d, n) \text{ et } 0 \leq q \leq t \Rightarrow HC(s+2q+1, s+2t-2q-1, d+1, n+1).$$

Le corollaire suivant est une conséquence de la proposition (3.7.1).

**Corollaire 2.7.1 (Havel) [31]**

Soit  $n \geq 1$  considérant la chaîne  $P$  de longueur  $2^n - 1$   $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, i \neq j$

$1 \leq L \leq 2^n - 1$  Soit  $P_L$  une sous chaîne de  $P$  de longueur  $L$ , alors il est possible de construire une  $C_n$ -valuation de  $P_L$ , tel que :

$$\begin{cases} O(P_L) = \{i\} \text{ si } L \text{ est impair} \\ O(P_L) = \{i, j\} \text{ si } L \text{ est pair.} \end{cases}$$

**Proposition 2.7.2 (I-Havel) [31]**

Soient  $u, v \in V(Q_n)$ ,  $\mathfrak{G}(u, v) \equiv 1[2]$ , alors il existe une chaîne hamiltonienne  $P$  dans  $Q_n$  dont les extrémités sont  $u$  et  $v$ .

De plus, si  $\mathfrak{G}(u, v) < n$  alors la chaîne  $P$  peut être construite de sorte que la distance de  $u$  à  $v$  parcourant la chaîne  $P$  soit égale à  $n - \mathfrak{G}(u, v)$ .

Ivan. havel s'est intéressé à l'hamiltonicité des deux couches centrales d'un hypercube.

Soit  $L_n^k$  le sous graphe biparti de  $Q_n$  induit par les sommets du niveau  $K, K+1; K < n$

$V(L_n^k)$  est constitué de  $C_n^k$  sommets du niveau  $k$  et  $C_n^{k+1}$  sommets de niveau  $k+1$ .

Deux sommets sont adjacents si et seulement s'il diffèrent exactement en une seule composante.

$L_n^k$  est un graphe  $K+1$ -régulier si et seulement si  $n = 2k + 1$ , il suffit d'étudier le cas où  $k < n/2$  )

Une chaîne maximale dans  $L_n^k$  est une chaîne qui utilise tous les sommets de niveau  $k$  et dont les extrémités sont dans le niveau  $k + 1$

Une chaîne  $P$  est maximale dans  $L_n^k$  si et seulement si  $L_{2k+1}^k$  est hamiltonien.

Lors de la conférence « Discrete Mathematic Rostock, avril 1981 » c'est à propos d'immersion optimale d'arbre dans le  $n$ - cube, Ivan havel [38] a conjecture l'existence de cycle hamiltonien dans  $L_{2k+1}^k$  .

### Conjecture :

$L_{2k+1}^k$  est un graphe hamiltonien

J.M Laborde a montré que  $L_{2k+1}^k = O_{k+1} \square K_2$  et par suite, a formulé la conjecture de la manière suivante :

Le graphe  $O_{k+1}$  est hamiltonien si et seulement s'il existe une séquence de sommets de  $O_{k+1}$  de longueur  $2 \cdot C_{2k+1}^k$  tels que :

- 1) Chaque sommet de  $O_{k+1}$  apparaît deux fois dans la séquence.
- 2) Deux sommets consécutifs de la séquence (y compris le premier et le dernier sommet) sont adjacents.
- 3) La distance d'apparence d'un sommet dans la séquence est impaire.

Le problème de l'hamiltonicité du graphe  $L_{2k+1}^k$  est ouvert.

### Lemme 2.7.3

Soit  $u, v$  deux sommets à distance impaire dans l'hypercube de dimension  $n$  ( $n \geq 2$ ) alors il existe une chaîne hamiltonienne  $P$  de  $Q_n$ , d'extrémités  $u$  et  $v$ .

Conséquence directe du fait que l'hypercube est hamiltonien et par toute arête passe un cycle hamiltonien.

**Proposition 2.7.3 (Havel) [31]**

Soient  $u, v \in V(Q_n)$  avec  $u \neq v$  ;  $\mathfrak{G}(u,v) \equiv 0$  [2]

Soient  $L_1, L_2$  deux entiers impairs tel que,  $L_1, L_2 \geq 1, L_1 + L_2 = 2^n - 2$ ; alors il existe deux chaînes sommets – disjoints de longueurs  $L_1$  et  $L_2$  dans  $Q_n$  .

**Proposition 2.7.4 (Havel) [31]**

Soient  $u, v, u', v' \in V(Q_n)$  tel que  $u, v, u', v'$  sont différents,

Si  $\mathfrak{G}(u, u') = \mathfrak{G}(v, v') = 1$  et  $\mathfrak{G}(u, v) = \mathfrak{G}(u', v')$  ; alors il existe une paire de chaîne sommets disjointes  $P_1$  et  $P_2$  dans  $Q_n$  tel que  $P_1$  relie  $u$  à  $u'$  et  $P_2$  relie  $v$  à  $v'$  et les deux chaînes  $P_1$  et  $P_2$  ont la même longueur  $L_1 = L_2 = 2^{n-1} - 1$ .

## CHAPITRE 3

### *QUELQUES CLASSES DE GRAPHS PLONGEABLES DANS L'HYPERCUBE*

Ce chapitre est consacré à la présentation de certains résultats connus sur les plongements de quelques classes de graphes dans  $Q_n$ .

### 3.1 Arbres

#### 3.1.1 Quelques propriétés des arbres

##### **Théorème 3.1.1.1 (Berge) [7]**

Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- 1)  $G$  est sans cycle et connexe
- 2)  $G$  est sans cycle et possède  $n-1$  arêtes
- 3)  $G$  est connexe et possède  $n-1$  arête
- 4)  $G$  est sans cycles et minimale pour cette propriété (lorsqu'on lui ajoute une arête on crée un cycle et un seul)
- 5)  $G$  est connexe et maximale pour cette propriété (lorsqu'on lui supprime une arête quelconque on va le déconnecter).
- 6) Tout couple de sommet  $(u, v)$  est relié par une chaîne et une seule.

Un graphe  $G=(V, E)$  vérifiant au moins l'une des propriétés ci-dessus est un arbre  $T$  d'ordre  $n$ .

##### **Théorème 3.1.1.2 (Berge) [7]**

Un graphe  $G=(V, E)$  admet un arbre  $T$  comme graphe partiel si et seulement si  $G$  est connexe.

##### **Théorème 3.1.1.3 (Berge) [7]**

Un arbre  $T$  admet au moins deux sommets pendants.

##### **Théorème 3.1.1.4 (Havel) [37]**

Un arbre  $T$  est plongeable dans  $Q_n$  si et seulement s'il existe une  $C_n$  – valuation de  $T$ .

**Remarque :**

Tous les arbres sont plongeables dans l'hypercube.

**Définition 3.1.1.1**

La dimension cubique d'un arbre  $T$ , notée  $\dim(T)$ , est le plus petit entier  $n$  pour lequel  $T$  est plongeable dans  $Q_n$ .

**3.1.2 : Quelques types d'arbres plongeables dans  $Q_n$  :**

Soit  $T$  un arbre d'ordre  $n$ . L'hypercube  $Q_{\dim(T)}$  est appelé hypercube optimal de  $T$ . D'après la remarque précédente tout arbre est plongeable dans l'hypercube, donc on s'intéressera à la recherche de dimension de ces arbres (plongement optimal de ces arbres dans l'hypercube).

**3.1.2.1 Arbre Binaires :**

**Définition 3.1.2.1.1 :**

Un arbre  $T$  est dit binaire si son degré maximum  $\Delta(T) \leq 3$ .

Un résultat concernant les arbres binaires a été donné par I.Havel [31].

**Proposition 3.1.2.1.1(Havel) [31]**

Soit  $T$  un arbre binaire d'ordre  $2^n$  avec  $n \geq 3$ . Si  $T$  est équilibré et possède deux sommets de degré 3 alors  $T$  est plongeable dans  $Q_n$ .

**Définition 3.1.2.1.2**

L'arbre binaire complet  $D_n$  est le graphe défini inductivement comme suit :

- Pour  $n=1$ .  $D_1 = K_{1,2}$  est un graphe biparti complet .
- Pour  $n \geq 2$ ,  $D_n$  est obtenu à partir de deux copies disjointes  $T_1, T_2$  de  $D_{n-1}$  et d'un nouveau sommet  $u$ , tel que  $u$  est relié par une arête à un sommet de degré 2 de  $T_1$  et par une autre arête à un sommet de degré 2 de  $T_2$ .

$D_n$  possède  $2^n$  sommets pendants,  $2^n - 2$  sommets de degré 3 et un seul sommet de degré 2. Le sommet de degré 2 sera appelé la racine de  $D_n$ , donc  $D_n$  possède  $2^{n+1} - 1$  sommets.

**Exemple :**

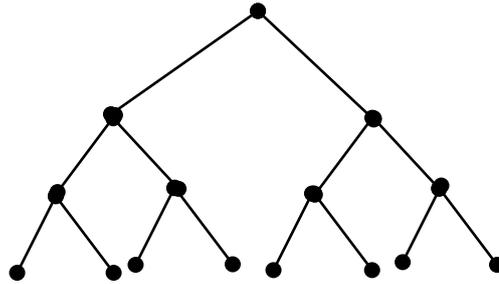


Figure 3.1

L'arbre  $D_3$

$D_n$  peut être défini aussi de la manière suivante

$D_n = (V, E)$  où  $V$  est l'ensemble  $(1, 2, \dots, 2^{n+1}-1)$  de sommets, deux sommets  $P$  et  $q$  sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée

- 1)  $1 \leq \min(p, q) \leq 2^n - 1$  et  $\max(p, q) = 2 \min(p, q)$ .
- 2)  $1 \leq \min(p, q) \leq 2^n - 1$  et  $\max(p, q) = 2 \min(p, q) + 1$ .

Le résultat suivant est dû à Havel [33].

**Théorème 3.1.2.1.1(Havel) [33]**

Soit  $n \geq 2$ .  $D_n$  est plongeable dans  $Q_{n+2}$  et  $\dim(D_1) = 2$ ,  $\dim(D_n) = n+2$ .

A partir de l'arbre binaire complet  $D_n$ , on définira d'autres arbres plongeables dans l'hypercube.

- 1) Pour  $n \geq 2$ ,  $B_n$  est un arbre binaire obtenu à partir de l'arbre binaire complet  $D_{n-1}$ , et d'un sommet  $u$ , tel que  $u$  soit relié à la racine de  $D_{n-1}$  par une arête.  $B_n$  possède  $2^{n-1} + 1$  sommets pendants et  $2^{n-1} - 1$  sommets de degré 3, donc  $B_n$  possède  $2^n$  sommets.

**Exemple :**

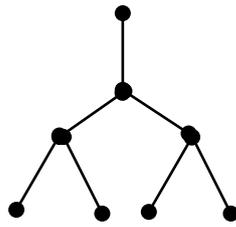


Figure 3.2

L'arbre  $B_3$

Il est facile de vérifier que  $B_n$  n'est pas équilibré. Havel [31] a montré que  $B_n$  est plongeable dans  $Q_{n+1}$ , donc  $D_n$  est plongeable dans  $Q_{n+2}$ .

**Théorème 3.1.2.1.2 (Havel) [31]**

Pour tout  $n \geq 2$ ,  $B_n$  est plongeable dans  $Q_{n+1}$ ,  $\dim(B_n) = n + 1$ .

L'arbre  $B_n$  peut être généralisé comme suit :

soit  $n \geq 2$  et  $k \geq 1$ , on peut définir l'arbre noté  $B_n^{(k)}$  de la manière suivante :

$B_n^1 = B_n$ , et  $B_n^{(k)}$  est l'arbre obtenu par subdivision de chaque arête de l'arbre binaire complet  $D_{n-1}$  par  $k-1$  sommets et l'arête pendante de  $B_n$  adjacente à la racine de  $D_{n-1}$  par  $k$  sommets.

Il est clair que  $|V(B_n^{(k)})| = K \cdot 2^{n+1}$ .

I. Havel [31] a démontré aussi la proposition suivante, qui concerne le plongement de  $B_n^2$  dans l'hypercube.

**Proposition 3.1.2.1.2(Havel) [31]**

Pour  $n \geq 2$ ,  $|V(B_n^2)| = 2^{n+2}$ , et  $B_n^2$  est plongeable dans  $Q_{n+2}$ ,  $\dim(B_n^2) = n+2$ .

**Exemple :**

$B_2^2$  est représenté dans la figure ci-dessous

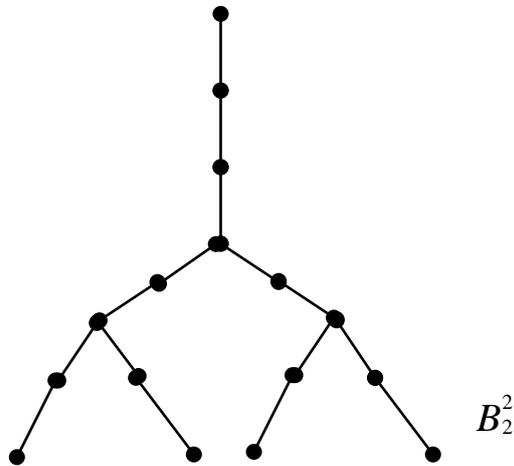


Figure 3.3

Une généralisation de cette proposition est donnée comme suit :

**Proposition 3.1.2.1.3(Havel) [31]**

Pour  $n \geq 2$ , et  $K \geq 1$ ,  $|V(B_n^{(2k)})| = 2^{n+1+K}$ , et  $B_n^{(2k)}$  est plongeable dans  $Q_{n+k+1}$  avec  $\dim(B_n^{(2k)}) = n+k+1$ .

γ) pour  $n \geq 1$ , on désigne par  $\hat{\hat{D}}_n$  l'arbre formé à partir de deux copies disjointes de  $D_n$ , tel que leurs racines sont reliées par une arête appelée arête axiale de  $\hat{\hat{D}}_n$  cet arbre possède  $2^{n+1}$  Sommets pendants, et  $2^{n+1} - 2$  sommets de degré 3, donc  $\hat{\hat{D}}_n$  a  $2^{n+2} - 2$  sommets.

**Exemple :**

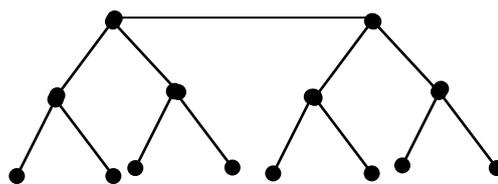


Figure 3.4

L'arbre  $\hat{\hat{D}}_2$

**Théorème 3.1.2.1.3 ( Havel) [33]**

L'arbre  $\wedge\wedge D_n$  est plongeable dans  $Q_{n+2}$  ;  $\dim (\wedge\wedge D_n) = n+2$  pour tout  $n \geq 1$ .

3) Soit  $n \geq 1$ , on désigne par  $\wedge D_n$  l'arbre formé à partir de  $\wedge\wedge D_n$  en insérant deux nouveaux sommets au niveau de l'arête axiale, et la chaîne obtenue à partir de l'arête axiale sera appelée chaîne axiale de  $\wedge D_n$ .

- L'arbre  $\vee D_n$  peut être défini à partir de  $\wedge\wedge D_n$  en insérant deux nouveaux sommets de degré 2 au niveau d'une arête pendante de  $\wedge\wedge D_n$ .

Il est clair que  $\vee D_n$  et  $\wedge D_n$  possèdent le même nombre de sommets  $\wedge\wedge D_n$  possède deux sommets de degré 2,  $2^{n+1}$  sommets pendants et  $2^{n+1} - 2$  sommets de degré 3.

**Exemple :**

Les arbres  $\wedge D_2$  et  $\vee D_2$  sont donnés dans la figure ci dessous.

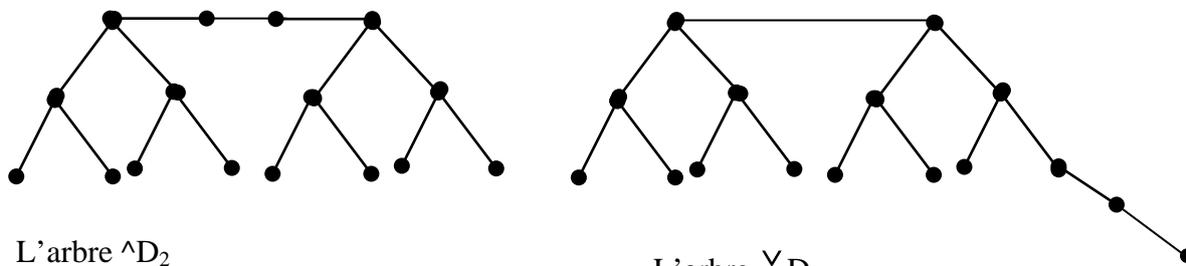


Figure 3.5

Le théorème suivant est dû à Ladislav Nežbýš [46].

**Théorème 3.1.2.1.4 (Nébésky') [46]**

$\wedge D_n$  et  $\vee D_n$  sont plongeables dans  $Q_{n+2}$ , pour tout  $n \geq 1$ ,  
 $\dim (\wedge D_n) = \dim (\vee D_n) = n+2$ .

4) M. NEKRI [49] a introduit l'arbre suivant :

Soit  $n \geq 2$ , l'arbre  $D_n^2$  est formé à partir de  $D_n$  en supprimant deux sommets pendants ayant le même père.

$D_n^2$  possède  $2^n - 1$  sommets pendants  $2^n - 3$  sommets de degré 3 et un sommet de degré 2

**Exemple :**

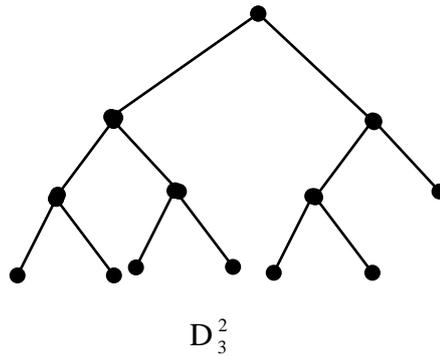


Figure 3.6

**Théorème 3.1.2.1.5 (Nekri) [49]**

$D_n^2$  est plongeable dans  $Q_{n+1}$  et  $\dim(D_n^2) = n+1$ .

◊) P. Arbouz [3] a introduit une classe d'arbres  $F_n$  dont les éléments sont définies de la manière suivante :

Pour  $n = 1$  :  $F_n$  est donné dans la figure suivante :

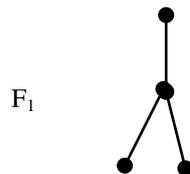


Figure :3.7

Pour  $n = 2$  :  $F_2$  c'est l'arbre illustré dans la figure ci-dessous.

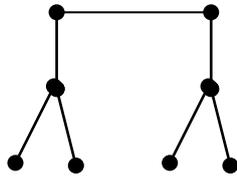


Figure 3.8

Et  $\forall n \geq 3$ ,  $F_n$  est obtenu en joignant un sommet de degré 2 de  $F_{n-1}$  à un sommet pendant de  $F_1$ .

$F_n$  possédera alors  $4n$  sommets parmi lesquels :

$2n-2$  sommets de degré 3.

2 sommets de degré 2.

$2n$  sommets pendants.

**Proposition 3.1.2.1.4 (Arbouz) [3]**

$$\forall k \geq 0 \dim(F_{2^k}) = K+2.$$

La démonstration de cette proposition repose sur la notion de  $C_n$ - valuation.

Le corollaire suivant donne la dimension de  $F_n$  pour  $n$  quelconque :

**Corollaire 3.1.2.1.1 (Arbouz) [3]**

$\forall n \geq 1$ ,  $\dim(F_n) = 2 + \lceil \log_2 n \rceil$  ou'  $\lceil K \rceil$  désigne la partie entière supérieure du réel  $K$ .

En effet si  $K-1 < \log_2 n \leq K$  alors  $\dim F_n \geq K+2$  mais  $F_n$  est un sous - graphe

de  $F_{2^k}$  donc  $\dim F_n = K+2 = 2 + \lceil \log_2 n \rceil$ .

Arbouz a généralisé cette classe d'arbre comme suit :

$F(n,1) = F_n \quad \forall n \geq 1$  et

- Pour  $K \geq 2$ ,  $F(n, k)$  est obtenue à partir de  $F_n$  en dupliquant ses sommets  $K$  fois, il est clair que  $V(F(n, k)) = 4.K.n$ .

**Proposition 3.1.2.1.5 (Arbouz) [3]**

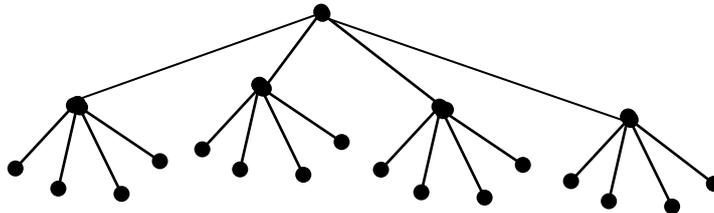
$$\forall K \geq 1 \text{ et } \forall s \geq 0 \dim F(2^K, 2^s) = K + s + 2.$$

Pour n quelconque nous avons le corollaire suivant :

**corollaire 3.1.2.1.2 (Arbouz) [11]**

$$\forall K \geq 2 \text{ et } \forall s \geq 1, \dim F(n, 2^s) = 2 + s + \lceil \log_2 n \rceil$$

↳ Les arbres n-aires complets sont tout naturellement une généralisation des arbres binaires complets, un élément de cette classe est noté  $T_k^n$ .  $T_k^n$  est considéré comme une n-étoile de k rayons, chaque point final d'un rayon devient le centre d'une nouvelle n-étoile, cette procédure est répétée k fois.



L'arbre  $T_2^4$

Figure 3.9

I. Havel [33] a donné le résultat suivant qui concerne le plongement de ces arbres dans l'hypercube  $Q_n$ .

**Proposition 3.1.2.1.5 (Havel) [33]**

$$T_2^n \text{ est plongeable dans l'hypercube et } \dim(T_2^n) = \left\lceil \frac{3n+1}{2} \right\rceil.$$

**3.1.2. 2 Chenilles :**

**Définition 3.1.2.2.1**

Une chenille  $C$  est un arbre avec au moins trois sommets, qui devient une chaîne  $P$  si tous les sommets pendants de cet arbre sont supprimés.

Cette chaîne est appelée colonne de  $C$  (ou épine dorsale), les sommets de  $P$  sont appelés sommets vertébraux (ou sommets épineux).

A noter que la colonne d'une chenille n'est pas unique.

**Exemple :**

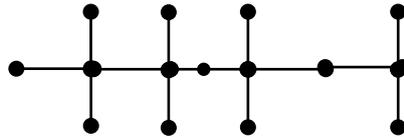


Figure 3.10

Le graphe d'une chenille de degré 4

Pour  $K \geq 1$  soient  $L_i$  ( $i=1,2,\dots,K$ ) des entiers positifs tel que  $K + L_1 + L_2 + \dots + L_K \geq 3$

On note par  $CAT(L_1, L_2, \dots, L_K)$  la chenille à  $K$  vertèbres ou bien une chenille qui est formée par une épine  $P$  à  $K$  sommets.  $L_i$  étant le nombre de sommets adjacent au  $i$ -ème vertèbre. Le nombre de sommets dans  $CAT(L_1, L_2, \dots, L_K)$  est  $K + L_1 + L_2 + \dots + L_K$ , la chenille  $CAT(0, L_2, \dots, L_K)$  est isomorphe à  $CAT(L_2 + 1, \dots, L_K)$ .

Pour simplifier la notation, dans certains cas on utilisera des parenthèses et des puissances

**Exemple :**

$$CAT(3,3,3) = CAT((3)^3)$$

$$CAT(0,2,0,2,0,2,0,2,0,2) = CAT(0, (2,0)^3, (0,2)^2)$$

$$CAT(0,2,0,2) = CAT((0,2)^2)$$

### 3.1.2.2.1 : Quelques plongements connus concernant les chenilles :

Soit  $\zeta$  l'ensemble des chenilles de degré au plus 3, et soit  $C_n$  le sous-ensemble de  $\zeta$  formé par les chenilles équilibrées à  $2^n$  sommets.

Soit  $C$  une chenille de  $\zeta$  et soit  $P$  une colonne de  $C$ . On note par  $(V_1, V_2, \dots, V_s)$  l'ensemble des sommets parcourants la colonne  $P$ .

Pour deux sommets de  $P$   $V_x, V_y$ , on note par  $C_{x, y}$  le sous-graphe de  $C$  engendré par les sommets  $V_x, \dots, V_y$

I-Havel et Liebl [36] ont montré le théorème suivant sur les chenilles de degré maximum 3.

#### **Théorème 3.1.2.2.1.1 (Havel) [36]**

Toute chenille équilibrée à  $2^n$  sommets de degré maximum 3 est plongeable dans  $Q_n$ .  
La démonstration repose sur le lemme suivant :

#### **lemme 3.1.2.2.1.1(Havel) [36]**

Pour  $n \geq 2$ , soit  $C \in C_{n+1}$ , soit  $P$  une colonne de  $C$  et  $S = |V(P)|$ , alors il existe  $V_x, V_y$  dans  $P$  ( $1 < x < y < s$ ) tel que  $C_{x,y}$  soit dans  $C_n$ .

Harary et Lewinter [29] ont montré un résultat identique pour les chenilles de degré maximum 4.

#### **Théorème 3.1.2.2.1.2 (Harary) [29]**

Toute chenille équilibrée à  $2^n$  sommets de degré 4 est plongeable dans  $Q_n$ .

#### **Définition 3.1.2.2.1.1**

Une  $K$ -chenille  $C$ ,  $K \geq 1$ , est une chenille de degré maximum  $K+2$ . Si le degré des sommets de  $C$  égal à 1, 2 ou  $K+2$ ,  $C$  est appelée une stricte  $K$ -chenille.

**Exemple :**



Une stricte 3 - chenille

Figure 3.11

**Théorème 3.1.2.3.2.4 (Harary, Lewinter, Widulski) [29]**

Une 1- chenille équilibrée à  $2^n$  sommets est plongeable dans  $Q_n$

**Théorème 3.1.2.3.2.5 (Harary, Lewinter, Widulski) [29]**

Une stricte 2- chenille d'ordre  $2^n$  CAT  $(0,2,2,0,0,2,2,0,0,2,2,0)$  est plongeable dans  $Q_n$ .

**3.1.2.3 Couplage parfait et plongement des arbres :**

P .Arbouz (4) a introduit une classe d'arbre  $K$  vérifiant la conjecture formulée par Ivan HaveI [31]. La classe  $K$  est définie comme suit :

Soit  $G = (V, E)$  une 1- Chenille ayant une épine de longueur  $|V|/2 - 1$  ou  $|V|/2$  est le nombre de sommets pendants, ce type d'arbre est appelé une complète 1- chenille (complete legged caterpillars) (C.O.C).

Soit  $\xi$  une famille de C.O.C et  $H$  un arbre de la classe  $K$ , obtenu comme suit :

Remplacer chaque sommet  $u$  de  $H$  par  $P_u \in \xi$  avec  $P_u$  doit être d'ordre supérieur ou égal à  $2 d_H(u)$  Si  $(u, v) \in E(H)$ , alors on identifie une arête pendante de  $P_u$  à une arête pendante de  $P_v$ .

K est Montré dans la figure suivante :

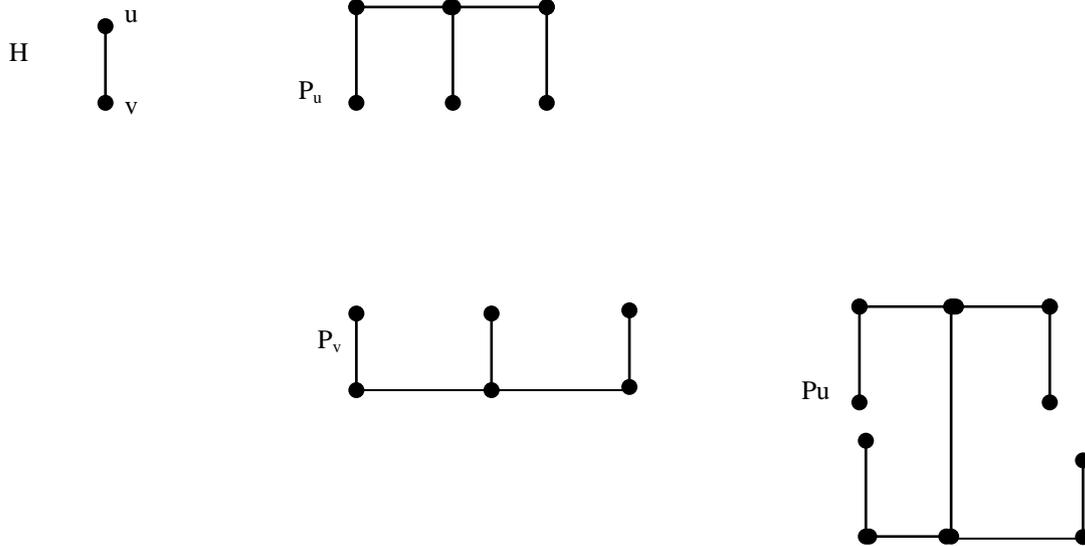


Figure 3.12

**Théorème 3.1.2.3.1 (Arbouz) [4]**

Un arbre binaire  $G = (V, E)$  admet un couplage parfait si et seulement si il appartient à la classe K .

Soit T un arbre binaire d'ordre  $2^n$  qui contient un couplage parfait M,( ie.  $T \in K$  ).

Considérons deux sous- arbres  $T_1, T_2$  de T défini ainsi.

$T_i \quad i = 1,2$  n'est pas forcément connexe donc il possède aux moins deux composantes connexes qui sont soit une chaîne, soit un sommet isolé. Ainsi, soit  $p_i$  le nombre de composantes connexes de  $T_i$  alors :

$$p_1 + p_2 = 2^{n-1} + 1$$

Si  $p_1 = K$  avec  $K \geq 1$ , on dira que T appartient à la classe  $\Gamma_K$ .

**Théorème 3.1.2.3.2 (Arbouz) [4]**

Un arbre binaire T à  $2^n$  sommets,  $n \geq 1$  est plongeable dans l'hypercube  $Q_n$  si  $T \in \Gamma_K$  avec  $K \leq 2$  .

Une conséquence directe de ce théorème est que tous les arbres binaires d'ordre  $2^n$  appartenant aux classes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont plongeable dans  $Q_n$ .

Définissons les paramètres suivants :

- λ-  $\pi(r)$  est une (C.O.C) pour laquelle l'épine est de longueur  $r$ .
- Υ-  $r_1$  et  $r_2$  deux entiers tels que  $r_1+r_2 = 2^{n-1} - 2$ , joignant le sommet pendant  $y_1$  du graphe isomorphe à  $\pi(r_1)$  à un sommet  $y_2$  du graphe isomorphe à  $\pi(r_2)$ .
- Ψ- Soit  $x_i$  le voisin de  $y_i$  appartient à l'épine de  $\pi(r_i)$ , le paramètre  $P_i$  représente la longueur de la plus courte épine de  $\pi(r_i)$  qui possède  $x_i$  comme sommet pendant.

**Proposition 3.1.2.3.1 (Arbouz) [4]**

Si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1 :  $r_1$  et  $r_2$  impairs.

2 :  $P_1$  et  $P_2$  ont la même parité.

Alors tout arbre appartenant à  $\Gamma_2 \setminus \Gamma_1$  est plongeable dans l'hypercube de dimension  $n$ .

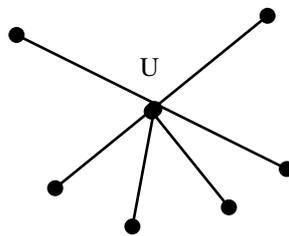
**3.1.2.4 : plongement des quasi - étoiles et des doubles quasi - étoiles dans l'hypercube**

**Définitions 3.1.2. 4.1:**

Une étoile est un arbre avec exactement un sommet  $u$  qui n'est pas pendant, ce sommet est appelé jonction, et son degré est le nombre d'arêtes qui sont incidentes à  $u$ .

Un tel arbre est noté  $K_{1,n}$ . de plus  $\dim(K_{1,n}) = n$

**Exemple :**



L'arbre  $K_{1,6}$

Figure 3.13

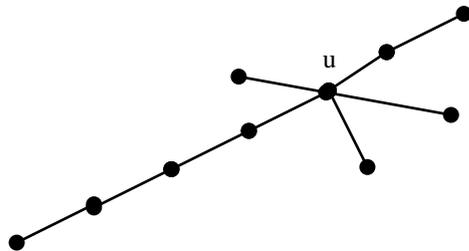
Une quasi-étoile est une étoile dont les arêtes sont subdivisées.

**lemme 3.1.2.4.1(Havel) [31]**

Une quasi -étoile est équilibrée si et seulement si elle possède exactement une seule chaîne de longueur impaire.

Le degré d'une quasi - étoile est le nombre de chaînes ayant u comme une jonction commune. On notera par  $S(a_1, a_2, \dots, a_K)$  une quasi - étoile de degré  $K$ , dont les chaînes sont d'ordres respectifs  $a_1, a_2, \dots, a_K$ .

Une quasi- étoile de degré  $K$ , à  $2^n$  sommets, est appelée  $K$ - quasi - étoile.



La quasi - étoile (1.1.1.2.4 )

Figure 3.14

**Définition 3.1.2.5.2**

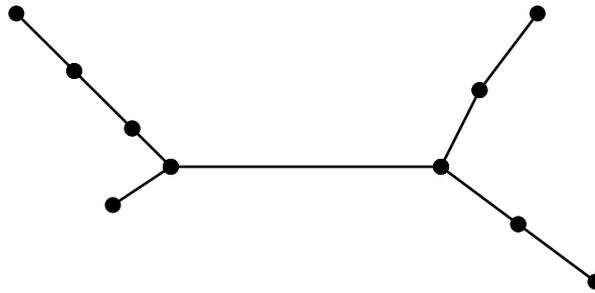
Une double étoile est formée de deux étoiles dont les jonctions  $u$  et  $v$  sont reliées par une arête.

A noter que  $u$  et  $v$  ne sont pas de même degré.

Une double quasi – étoile est une subdivision d'une double étoile, dans laquelle l'arête reliant  $u$  et  $v$  n'est pas subdivisée.

Une double quasi – étoile dont les sommets  $u$  et  $v$  sont de degré respectif  $k$  et  $s$  ( $k \geq s$ ), est notée  $S(a_1, a_2, \dots, a_K, b_1, b_2, \dots, b_s)$ .

**Exemple :**



La double quasi - étoile  $S(1.3.2.2)$

Figure 3.15

Une double quasi - étoile est équilibrée si et seulement si le nombre de chaînes d'ordres impairs qui sont incidentes à  $u$  est égale au nombre de chaînes d'ordres impairs incidentes à  $v$ .

Une double quasi - étoile équilibrée  $S(a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_s)$  est appelé  $K$  - double quasi - étoile équilibrée.

Havel [31] a montré que les 3 - quasi - étoiles équilibrées à  $2^n$  sommet sont plongeables dans  $Q_n$ .

**Théorème 3.1.2.4.1 (Harary et Lewinter) [26]**

Toute  $K$  quasi - étoile équilibrée à  $2^n$  sommets, avec  $K \leq n$  est plongeable dans  $Q_n$ .

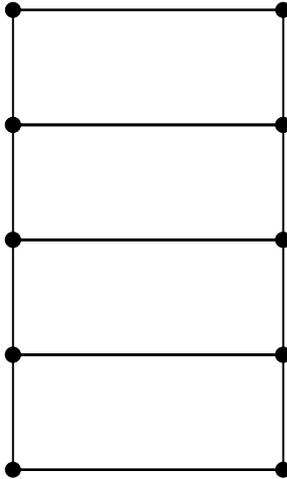
**3.2 Autres graphes plongeables dans  $Q_n$  :**

**3.2.1 plongements des grilles est des échelles :**

**Définition 3.2.1.1**

Une  $n$ - grille  $M = M(d_1 \times d_2 \times \dots \times d_n)$  est la somme cartésienne de  $n$  chaînes  $P_1, P_2, \dots, P_n$  d'ordres respectifs  $d_1, d_2, \dots, d_n$ .

**Exemple**



$$M(2 \times 5) = P_2 \square P_5$$

Figure 3.16

**3.2.1.2 Grilles binaires :**

Une grille est dite binaire si  $d_i$  est une puissance de 2 pour tout  $i$ , en particulier.

Si  $d_i = 2 \forall i$ , alors  $M$  est l'hypercube de dimension  $n$ .

Harary et Lewinter [27] ont montré que les grilles binaires sont des graphes cubiques. La démonstration repose sur le lemme suivant :

**lemme 3.2.1.2.1(Harary et Lewinter) [27]**

Si  $G$  et  $H$  deux graphes plongeables dans  $G'$  et  $H'$  respectivement, alors  $G \square H$  est plongeable dans  $G' \square H'$

Preuve : on a  $V(G \square H) \subseteq V(G' \square H')$ , et par définition de la somme cartésienne, on a  $E(G \square H) \subseteq E(G' \square H')$ .

**Théorème 3.2.1.2.1(Kobeissi) [39]**

La  $n$ - grille est plongeable dans  $Q_m$  si et seulement si  $d_1 \times \dots \times d_n \leq 2^m$

Preuve : ( M , Kobeissi ) [ 39]

### 3.2.1.3 Echelles :

#### Définition 3.2.1.3.1

Soient  $P_1 = a_1, a_2, \dots, a_k$  et  $P_2 = b_1, b_2, \dots, b_k$  deux chaînes d'ordres  $K$ , tel que les sommets  $a_i$ , et  $b_i$  ( $i=1, \dots, K$ ) sont reliés par des chaînes d'ordres  $r_1, r_2, \dots, r_k$  de sorte que les extrémités de  $r_i$  soient reliées l'une par une arête à  $a_i$  et l'autre par une autre arête à  $b_i$ .

Pour  $i=1, \dots, K$  ( $a_i$  et  $b_i$  seront reliés par une arête si  $r_i = 0$ ). Un tel graphe est appelé échelle et est notée par  $E$ . Les chaînes entre  $a_i$  et  $b_i$  sont appelées les rangs de  $E$ .

#### Exemple :

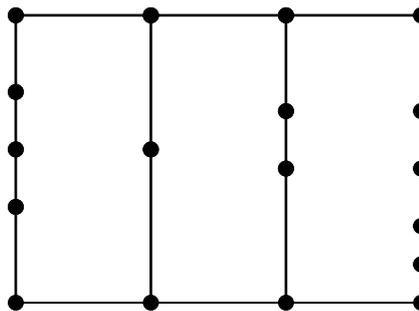


Figure 3.17 (une échelle de rangs 3.1.2.4)

Le résultat suivant qui concerne le plongement des échelles dans l'hypercube est dû à BEZRUKOV [9]

#### Théorème 3.2.1.3.1 (Berzrukov) [9]

Toute échelle équilibrée  $E$  est plongeable dans son hypercube optimal.

### 3. 2.2 MD ( a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, ..... , a<sub>k</sub> ) graphes

#### Définition 3.2.2.1

Soit uv une arête donnée, on désigne par MD ( a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, ..... a<sub>k</sub> ) graphe le graphe formé par l'arête uv et de K ( K ≥ 1 ) chaînes distinctes d'ordres respectifs a<sub>1</sub> , a<sub>2</sub> , ---- a<sub>k</sub> où les a<sub>i</sub> sont des entiers positifs pairs , tels que les extrémités de chaque chaîne soient reliées l'une par une arête à u et l'autre extrémité par une arête v et tels que  $a_1 + a_2 + ..... + a_k = 2^n - 2$  .

Exemple :

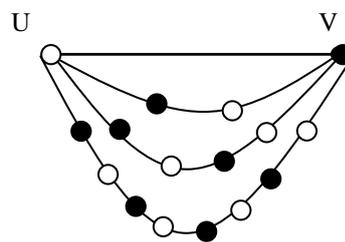


Figure 3.18

Graphe MD (2,4,8)

Il est claire que MD ( a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, ..... , a<sub>k</sub> ) est biparti.

Kobeissi a montré que les graphes MD ( a<sub>1</sub>, ..... a<sub>k</sub> ) équilibrés sont plongeables dans Q<sub>n</sub>.

#### Théorème 3.2.2.1(Kobeissi) [39]

Tout MD - graphe, K - équilibré à 2<sup>n</sup> sommets, avec K ≤ n-1, est plongeable dans Q<sub>n</sub>.

### 3.2.3 MD ( a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, ----, a<sub>k</sub> ) graphes subdivisés

Définition :

Un MD graphe subdivisé, noté MD ( a<sub>1</sub>, ..... , a<sub>k</sub> ), est un MD ( a<sub>1</sub>, ... a<sub>k</sub> ) graphe dans lequel l'arête uv est subdivisée en un nombre pair de sommet a<sub>0</sub> et tel que  $a_0 + a_1 + ..... + a_k = 2^n - 2$ .

**Exemple :**

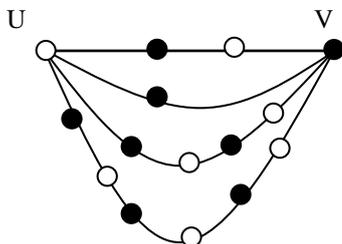


Figure 3.19

Le graphe MD (2,2,4,6)

Il est clair que si l'arête  $uv$  est subdivisée en un nombre impair de sommets, le graphe qui en résulte ne serait pas plongeable dans l'hypercube car il ne serait pas biparti.

Kobeissi s'est intéressé à une subdivision d'ordre pair de l'arête  $uv$ .

**Proposition 3.2.2.1[Kobeissi] (39)**

$MD(a_0, a_1, \dots, a_k)$  graphe est plongeable dans  $Q_n$  si  $K \leq n-2$ .

La démonstration repose sur le théorème Précédent (3.2.2.1) : il suffit de rajouter une arête entre  $u$  et  $v$ , on aura donc un  $MD(a_0, a_1, \dots, a_k)$  graphe avec  $K \leq n-1$ .

pour le cas ou  $K = n-1$  (supposons sans perte de généralité que  $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n-1}$ )

Kobeissi a donné des plongements de ces graphes pour  $n \leq 4$ , mais pour le cas on  $n \geq 5$  le problème n'a pas été résolu, il reste à ce jour ouvert.

**Conjecture :**

Un  $MD(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$  graphe est plongeable dans le graphe de  $Q_n$  si et seulement s'il ne contient pas le graphe de la figure suivante comme sous- graphe induit

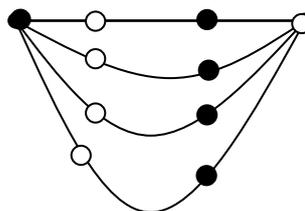


Figure 3.20

M- Kobeissi [39] a montré que les quasi - étoiles et doubles quasi-étoiles sont des graphes plongeables dans un certains MD - graphes , et comme les MD - graphes sont plongeables dans l'hypercube, alors les quasi étoiles et doubles quasi-étoiles sont aussi plongeables dans l'hypercube .

**Propriété 1 :**

Toute quasi - étoile  $K$  - équilibrée est plongeable dans un certain MD - graphe  $(K-1)$  - équilibré.

**Propriété 2 :**

Toute double quasi – étoile  $K$  équilibrée est plongeable dans un certain MD - graphe  $K$  - équilibré. Comme conséquence directe de théorème ( 3.2.2.1 ) Kobeissi [39], on a les deux corollaires suivants :

**Corollaire 1 :**

Toute quasi - étoile  $K$ - équilibrée à  $2^n$  sommets avec  $K \leq n$ , est plongeable dans  $Q_n$ .

**Corollaire 2 :**

Toute double quasi - étoile  $K$  - équilibrée à  $2^n$  sommets avec  $K \leq n-1$ , est plongeable dans  $Q_n$

Références

## Références

- [1] H.L. Abbott. Hamiltonian circuits and paths in the  $n$  cube, canad. Math. Bull.(9) : 557-562.1966.
- [2] L.R.Alvarez. Undirected graphs as graphs of Modular lattices .canad.jour.Math.(17) : 923-932,1965.
- [3] P.arbouz. Plongements de graphes dans l'hypercube prépublication n°4 (1990). Institut de Mathématiques, USTHB.
- [4] P. Arbouz. Perfect matching graph, prépublication n°55(1990), institut de Mathématiques ,USTHB
- [5] J.Arfaati ,C.H.Papadimitriou and P. Papageorgiou the complexity of cubical graphs.proceedings of 11 th international Kolloquium on automata , languages and programming. Pages 51-57, 1984
- [6] H.J. Bandelt and H.M. Mulder. Infinite median graphs,(0.2)-graphs and hypercubes. Journal of graph theory. (7) : 487-492 ; 1983.
- [7] C. Berge.Graphs and hypergraphs. Dunod.paris.1973.
- [8] A.Berrachedi. Sur quelques propriétés métriques du graphe de type hypercube. Thèse de doctorat d'état. Institut de Mathématiques, USTHB.1997
- [9] S. Bezrukov,B . Monien ,W.Unger,and G.Wechsung . Embedding ladders and caterpillars into hypercube-discrete applied mathematics , (83) : 21-29, 1992.
- [10] S.N. Bhatt, F.R.k. Chung ; F.T Leighton, and A.L Rosenberg. Efficient embedding of trees in hypercube. SIAM j.comput. 21 (1)1990 :551-162.
- [11] N. Biggs. An Edge colouring problem. Amer. Maths. Monthly 79 (1972), 1018-1020.
- [12] G.burosch. I Havel, and J.M. Laborde. Distance monotone graphs and a new characterization of hypercube. Discrete mathematics, (110) :9.16,1982.
- [13] R. Caha and v.koubek. Spanning regular caterpillars in hypercubes .europ .J. Combinatorics, (1997), 18 : 249-266.

- [14] S.A. Choudum and v.sunitha. Caterpillars with legs of length at most two span hypercubes.
- [15] D.Z. Djorkovic. Distance –preserving subgraphs of hypercubes. Jour. comb. Th. (b) 14 (1973), 263-267.
- [16] T.dvarak, I Havel, T.M. Laborde ,and M.Mollard .Spanning caterpillars of a hypercube.journal of Graph theory , 24 (1) :9-19,1997.
- [17] T. dvorak,I. Havel, J.M. Laborde, and P.Liebl. Generalised hypercubes and graph embedding with dilatation,rostok, Math .kollq .39 (1990),13-20 .
- [18] V. Firsov. On isometric embeddings of graph into a boolean cube. cyber – netics 1, pages 112-113,1965.
- [19] S.foldes : A characterisation of hypercubes discrete Math.17(1977).155-159.
- [20] M.R.Garey,R.I. Graham :on cubical graphs journal of combinatorial theory (B) 18,84-95 (1975).
- [21] M.R. Garey and D.S. Johnson. Computers and intractability : A guide to theory of NP-Completeness. Freeman. San francisco.1997.
- [22] F.Harary. Recent results and unsolved problems on hypercube theory ,in graph theory, combinatorics and applications ,vol –2(kalomazoo,MI,1988), wiley-interscience, Newyork.1991.pp 621-632
- [23] F. Harary : Graph Theory. Addison-wesley, 1961.
- [24] F. Harary and M.Lewinter. Spanning subgraphs of a hypercube vi : survey and unsolved problems ,in graph theory ,combinatocrics and applications vol-2 (Kalomazoo,MI 1998, wiley interscience Newyork 1991,pp.633-637.
- [25] F. Harary and M. Lewinter. Spanning subgraphs of a hypercube II : double starlike trees.Math . comput. Modelling. 11.216-217,1988.
- [26] F. Harary and M. Lewinter. The skarlike trees wich span a hypercube. Comput. Math.Appl ; (15) :299-302,1988.
- [27] F. Harary and M. Lewinter. Spanning subgraphs of hypercube II : Meshes. Inter. Jour. Computer Math. , 25 : 20-24, 1988.

- [28] F. Harary and M. Lewinter. Spanning subgraphs of hypercube IV : rooted trees. *Math. Comput. Modelling.* , 17 (11) : 85-88,1993.
- [29] F. Harary. M. Lewinter and W. Widolski. on two legged caterpillars wich span hypercube *congr. Numer.* 66 (1988) 103-108.
- [30] F. Harary and A.J. Schwenk, the number of caterpillars. *Discrete Math.* 6(1973),359-365
- [31] I. Havel. On hamiltonian circuit and spanning trees of hypercubes. *Cas.pést. Mat.* (109)(1984),
- [32] I. Havel. On certain trees in hypercube. R. Bodedick, R. Henn (eds). *topics in combinatorics and graph theory.* physica –verlag, heidelberg. pages 353-358,1990.
- [33] I. Havel. Embedding certain trees into hypercube, in *recent advances in graph theory* ,Academia ,praha,1974, pp.257-262.
- [34] I. Havel and P. Liebl. Embedding the dichotomic tree into the n-cubes .*Cas. pést. Mat.*, (97) : 201—205,1972.
- [35] I. Havel and P. Liebl. Embedding polytomic tree into the n –cube, *cas . Pést, Mat.* (98) : 307.314,1973.
- [36] I. Havel and P. Liebl. On legged caterpillars span hypercubes. *Journal of graph theory.* (10) : 69-77, 1986.
- [37] I. Havel and J. Moravek. B-valuation of graphs. *Czech- Math.jour.* , 22(1972),338-351.
- [38] I. Havel. Semi paths in directed cubes *Rostocker Mathematisches Kolloquium.* Avril 1981, Page 101-108.
- [39] M. kobeissi. Plongement de graphes dans l’hypercube thèse de doctorat, discipline informatique. l’université joseph fourier. 2001 grenoble.
- [40] M. kobeissi and M. Mollard. Spanning graphs of hypercubes :starlike and double starlike trees. *Accepté à discrete Math.*
- [41] J.M. Labord and S.P. Rao hebbar. Another characterisation of hypercube . *discrete Math.*, (39) : 161-166, 1982.
- [42] M . Mollard .Quelques problemes combinatoires sur l’hypercube et les graphes de hamming . *phd thesis, l’université joseph fourier*,1989.

[43] M. Mollard and A. Berrachedi. Median graphs and hypercubes, some New characterisation . discrete Mathematics 208/209 : 71-75,1999.

[44] H.M. Mulder. The interval function of a graph. mathematical centrum, amesterdam,1980.

[45] L. Nebesky. On cube and dichotomic trees. Cas.pést.Mat.,(99) :  
164-167,1974

[46] L. Nebesky. On quasistars in n-cubes. Cas. pést . Mat. , (109) :153-156,1984.

[47] L . Nebesky . On quasistars in n-cubes .cas. pést.Mat.,(109) :153-156,1984.

[48] L. Nebesky .Embedding m-quasistars into n-cubes. C zechoslovak mathematical, journal, praha,38 (113),1988.

[49] N. Nekri. Sur les problèmes de plongement dans l'hypercube. Thèse de magister.institut de mathématiques, USTHB, 2000.

[50] C. Nicos. Graph. theory an a algorithmic approach,1975.

[51] A. Wagner and D.G. Corneil. Embeding trees in a hypercube is NP- complet. siam j. comput 19 :1990),570-590