

N° D'ordre : 27/2011 – M/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté des Mathématiques



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en
Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle
Option : Mathématiques de Gestion

Par : LAZARI Nassima

***Contribution au Choix d'une Méthode
dans un Environnement Multicritère.***

Soutenue publiquement, le 03/07/2011 devant le jury composé de :

M.	BERRACHEDI	Abdelhafid	Professeur	à l'USTHB	Président
M.	ABBAS	Moncef	Professeur	à l'USTHB	Directeur de mémoire
M.	SEMRI	Ahmed	Maître de conférence(A)	à l'USTHB	Examineur
M ^{me} .	BENMEZIANE	Zineb	Maître de conférence(B)	à l'USTHB	Invitée



*Louange A Dieu, le miséricordieux, sans Lui, rien de tout cela
n'aurait pu avoir lieu.*

Je voudrais tout d'abord exprimer toute ma gratitude au professeur M. ABBAS pour l'honneur qu'il m'a fait de m'encadrer. Ses conseils précieux, ses orientations et ses commentaires pertinents m'ont donné suffisamment de confiance et de motivation pour pouvoir estimer avoir réussi la réalisation de ce modeste travail.

Je tiens aussi à remercier le professeur A. BERRACHEDI pour l'honneur qu'il m'a fait d'être le président de jury de ma soutenance.

J'adresse un grand merci au professeur A. SEMRI qui m'a fait l'honneur d'être parmi les examinateurs de mon travail.

Je tiens à remercier M^{me} Z. BENMEZIANE pour avoir accepté notre invitation et avoir participé à ce jury.

Je rends hommage à mes parents qui m'ont apporté un soutien infini, qui m'ont encouragée tout au long de mes études et qui m'ont conseillée scientifiquement.

Je tiens à remercier infiniment et chaleureusement mes frères pour leurs encouragements très fortifiants.

Je remercie sincèrement M. MOULWA Habib pour m'avoir soutenu, et qui a su me conseiller amicalement. Merci beaucoup d'être toujours avec moi.

J'exprime ma reconnaissance et mes remerciements à tous mes amis pour leur soutien. Enfin, merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des figures

1.1	La problématique de choix P_α	12
1.2	La problématique de tri P_β	13
1.3	La problématique de rangement P_γ	13
1.4	La représentation graphique de la structure de préférence	16
1.5	Le vrai critère	18
1.6	Le quasi-critère	19
1.7	Le pseudo-critère	19
1.8	Représentation schématique du tableau de performance	21
1.9	Schéma de résolution	24
1.10	Le processus de décision multicritère	28
2.1	Organigramme de l'algorithme de classement direct	39
2.2	Construction de l'indice de concordance par critères	41
2.3	Construction de l'indice de discordance	42
2.4	Algorithme de classement : distillation descendante (première version)	45
2.5	Types de critères généralisés	54
3.1	Démarche générale proposée	67
3.2	Partitionnement de l'ensemble des méthodes de surclassement	75
3.3	Organigramme du choix d'une méthode de surclassement	78
3.4	Stratégie : cas où la méthode n'est pas choisie	79
4.1	Les graphes de surclassement G_F et G_f	83

4.2	Le préordre partiel	83
4.3	graphe de surclassement inverse G^* avec $c = 0.5$	86
4.4	graphe de surclassement inverse G^* avec $c = 0.55$	87
4.5	graphe de surclassement inverse G^* avec $c = 0.6$	87
4.6	graphe de surclassement inverse G^* avec $c = 0.65, 0.7$	88

Table des matières

Table des figures	3
Table des matières	6
<i>Introduction</i>	7
1 Notions fondamentales de l'aide multicritère à la décision	10
1.1 L'ensemble des actions	11
1.2 Les problématiques de référence	12
1.3 Modélisation des préférences	14
1.4 Le concept de critère	18
1.4.1 Le pouvoir discriminant d'un critère	18
1.4.2 La cohérence des critères	20
1.5 Le tableau de performance	20
1.6 Problème multicritère	21
1.7 Problématique d'un problème multicritère	22
1.8 Les approches multicritères	22
1.8.1 L'approche d'articulation a priori des préférences	22
1.8.2 L'approche d'articulation a posteriori des préférences	23
1.8.3 L'approche d'articulation progressive des préférences	24
1.9 Le processus d'aide multicritère à la décision	25

2	Les méthodes de surclassement	29
2.1	Définitions	30
2.2	La méthode ELECTRE	32
2.2.1	La méthode ELECTRE I	33
2.2.2	La méthode ELECTRE II	36
2.2.3	La méthode ELECTRE III	40
2.2.4	La méthode ELECTRE IV	46
2.2.5	La méthode ELECTRE IS	49
2.2.6	La méthode ELECTRE TRI	50
2.3	Les méthodes PROMETHEE	52
2.3.1	Le critère généralisé et la fonction de préférence	52
2.3.2	Principes des méthodes PROMETHEE	53
2.4	La méthode ADAM	56
3	Choix d'une méthode multicritère	58
3.1	Etat de l'art sur le problème du choix d'une méthode multicritère	59
3.2	Approches pour traiter le problème du choix d'une méthode multicritère	61
3.3	Nature du problème de choix d'une méthode multicritère	63
3.4	Importance du choix d'une méthode multicritère	63
3.5	Règles générales pour aider au choix d'une méthode multicritère	64
3.6	Comment choisir une méthode multicritère	66
3.6.1	Les éléments qui caractérisent un problème multicritère	67
3.6.2	Stratégie pour aider le décideur lors de la caractérisation du problème multicritère	69
3.6.3	Les éléments qui caractérisent les méthodes de surclassement	70
3.6.4	Etude comparative des méthodes de surclassement	71
3.7	Partitionnement de l'ensemble des méthodes de surclassement	72
3.7.1	Les critères de sélection	75
3.8	Organigramme pour le choix d'une méthode de surclassement	76

TABLE DES MATIÈRES	6
<hr/>	
4 Programmation et application	80
<i>Conclusion</i>	89
<i>Bibliographie</i>	91

Introduction

Souvent, la plupart des problèmes rencontrés sont à plusieurs points de vue antagonistes. Dans ce cadre, nous faisons recours aux approches multicritères.

L'approche multicritère a donné naissance à plusieurs méthodes multicritères appartenant à trois grandes familles : théorie de l'utilité multi-attributs, méthodes de surclassement et méthodes interactives. L'importance de ces méthodes a été montrée dans plusieurs cas concrets.

L'aide à la décision multicritère sous-entend la prise en compte de plusieurs critères souvent contradictoires. Elle consiste à considérer un ensemble de critères de natures différentes. L'aide à la décision multicritère a pour but général non pas la recherche de l'optimum, mais la recherche du meilleur compromis qui puisse prendre plusieurs formes : un sous-ensemble d'actions, un rangement partiel, une affectation partielle ; c'est pourquoi le mot '*aide*' nous paraît important.

Vu la diversité des problèmes de décision dans un environnement multicritère et le nombre important de méthodes multicritères, une analyse est souvent confrontée au problème de choix de la méthode convenable au problème posé, sachant que le choix de la méthode est une étape cruciale dans le processus décisionnel. A ce stade, nous nous y sommes intéressés de manière précise, tout en contribuant à l'élaboration d'un processus d'évaluation et de choix d'une méthode multicritère.

Dans la plupart des applications, le choix de la méthode à utiliser se fait de manière assez arbitraire : on opte pour celle maîtrisée par l'analyste, celle disponible sous forme d'un logiciel. Cependant, chaque méthode multicritère possède ses avantages et ses inconvénients de telle sorte qu'une méthode puisse être appliquée dans un type

particulier de problèmes mais pas dans d'autres. D'où la nécessité d'une approche formelle pour traiter le problème de choix d'une méthode multicritère.

L'importance du problème du choix de la méthode multicritère a été soulevée par différents auteurs et démontrée dans plusieurs cas pratiques ; nous en citons quelques uns : MacCrimmon (1973), *Hwang et Masud* (1979), *Hwang et Yoon* (1981), *Gershon* (1981), *Gershon et Duckstein* (1984), *Teghem et al.* (1989), *Teclé et Duckstein* (1992), *Guitouni et Martel* (1998), et *Caillet* (2003).

Dans la littérature, nous distinguons quatre approches pour traiter le problème du choix d'une méthode multicritère : choix ad hoc ou non assisté, utilisation d'un arbre de classification, utilisation d'une méthode multicritère et utilisation d'un système informatisé d'aide à la décision (SIAD). Dans le cadre de ce travail, nous avons opté pour la deuxième approche puis pour la quatrième. A ce niveau, nous allons présenter un arbre basée sur quelques règles proposées par *Guitouni et Martel*(1998) et pour discriminer encore mieux entre les méthodes, on a ajouté une règle (**R7**), cet arbre constitue un ensemble de tests dont le principe est d'éliminer une ou plusieurs méthodes au niveau de chaque test non vérifié ; le processus d'élimination continue dès que la sélection d'une méthode appropriée aux caractéristiques du problème à traiter est effective. Cet arbre est présenté sous forme d'un algorithme ; ce dernier a été utilisé comme base pour le développement du Système Informatisé d'Aide à la Décision (SIAD) en langage C++ destiné à assister le décideur/l'analyste dans son choix systématique de la méthode multicritère dans un problème donné. Ce système englobe quelques méthodes de surclassement, principalement les méthodes ELECTRE, PROMETHEE et ADAM.

Le présent rapport est organisé en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous allons donner un aperçu général sur les notions fondamentales liées à la théorie de la décision.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de quelques méthodes de surclassement.

Dans le troisième chapitre, nous allons présenter un état de l'art sur le problème du choix d'une méthode multicritère. Ensuite nous aborderons notre contribution ; en premier lieu, nous partitionnerons les méthodes de surclassement considérées selon

leurs caractéristiques ; en deuxième lieu, nous présenterons un arbre pour aider le décideur dans le choix d'une méthode multicritère.

Le quatrième chapitre sera consacré à une présentation de quelques exemples.

On terminera ce travail par une conclusion et quelques perspectives.

1

Notions fondamentales de l'aide multicritère à la décision

Ce chapitre introductif récapitule d'une manière générale les définitions et les concepts fondamentaux de l'aide multicritère à la décision, domaine très vaste sur lequel nous orientons le lecteur intéressé aux références : [34], [48], [42] et [49].

Comme son nom l'indique, l'aide multicritère va apporter à la personne chargée de prendre une décision des outils qui lui permettront de prendre une décision face à un problème où il faut analyser plusieurs points de vue souvent contradictoires.

Contrairement à certaines techniques d'optimisation dans la recherche opérationnelle où on veut absolument trouver la meilleure solution, l'aide multicritère à la décision apporte une *aide*, une *piste* au décideur pour progresser vers la meilleure solution.

1.1 L'ensemble des actions

L'ensemble des actions est l'ensemble des éléments que l'on va exploiter dans le processus de décision. Selon la nature du problème posé, ces éléments peuvent être un ensemble de sites pour une localisation d'une usine, de stratégies d'investissement, de plans d'aménagement, plans de production, de candidats, de matériels,...

L'ensemble des actions sur lequel l'aide à la décision prend appui au cours du processus de décision est noté \mathbf{A} , cet ensemble peut être défini :

1. **en extension** lorsqu'il est fini et suffisamment petit pour que l'énumération soit possible ;
2. **en compréhension** lorsqu'il est infini ou fini mais trop grand pour que l'énumération soit possible, grâce à des contraintes mathématiques.

Parfois la définition de A se fait progressivement au cours de la procédure d'aide à la décision. Donc, l'ensemble A peut être :

1. **stable** : il est défini à priori et n'est pas susceptible d'être changé en cours de la procédure ;
2. **évolutif** : il peut être modifié en cours de la procédure, soit à cause des résultats intermédiaires que cette procédure fait apparaître, soit parce que le problème de décision se pose dans un environnement naturellement changeant.

Selon *B. Roy* [34], la modélisation de l'ensemble A diffère selon que chaque action est exclusive de toutes les autres ou bien que plusieurs actions peuvent être combinées. Dans le premier cas l'ensemble A est considéré **globalisé** tandis que dans le second il est considéré **fragmenté**.

Exemple 1

Soit une société qui cherche un média publicitaire pour publier ses produits ; les médias retenus sont : la presse, la radio, la télévision et l'affichage ; l'ensemble des actions A est l'ensemble des médias considérés, cet ensemble est :

- défini en extension puisque il est fini et suffisamment petit pour que l'énumération soit possible ;
- stable car il ne sera pas modifié au cours de la procédure du choix ;
- globalisé car chacun de ses éléments ne dépend pas de tout autre.

Exemple 2

Considérons le problème qui traite l'affectation de vingt(20) étudiants selon leurs moyennes et leurs choix sur cinq(5) spécialités de quatre(4) postes chacune. A est l'ensemble des étudiants, cet ensemble est :

- défini en extension ;
- évolutif puisque un ou plusieurs étudiants peuvent se désister pendant la procédure d'affectation ;
- fragmenté puisque l'affectation d'un étudiant à une spécialité ne dépend pas uniquement de son choix et de sa moyenne, elle dépend ainsi du choix et de la moyenne des autres étudiants.

1.2 Les problématiques de référence

La problématique est l'objectif poursuivi qu'on adopte pour un problème de décision donné ; elle exprime les termes dans lesquels le décideur pose le problème et traduit le type de la prescription qu'il souhaite obtenir. Autrement dit, la problématique est la façon dont le problème de décision est posé. On distingue trois problématiques de référence :

1. La problématique de choix P_α

elle consiste à poser le problème en termes de recherche d'un sous-ensemble propre des actions de A , de cardinal aussi faible que possible et contenant les actions les plus satisfaisantes ; on parle alors de la procédure de sélection. Formellement, le résultat de cette procédure est un sous-ensemble $N \subset A$. Par exemple, le problème qui consiste à choisir un projet pour la réalisation d'une raffinerie.

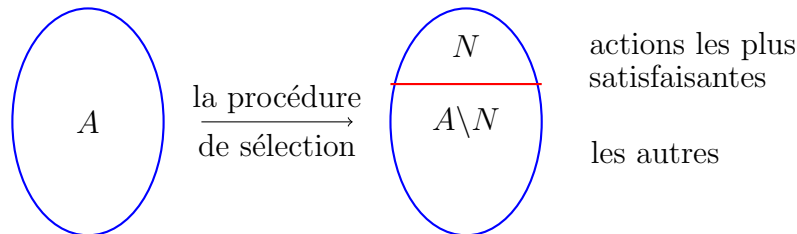


FIG. 1.1: La problématique de choix P_α

2. La problématique de tri P_β

elle consiste à poser le problème en termes de tri des actions à des catégories prédéfinies ; on parle alors de la procédure d'affectation, cette affectation doit être définie de telle sorte que chaque action soit affectée à une seule catégorie. Formellement, le résultat de cette procédure est une partition de l'ensemble des actions A . Par exemple, le problème de diagnostic médical suivant les symptômes, il faut associer chaque patient (action) à une maladie (classe) ;

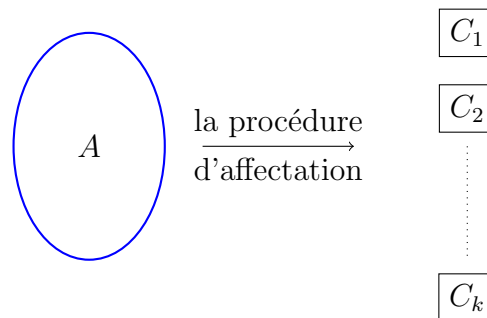


FIG. 1.2: La problématique de tri P_β

3. La problématique de rangement P_γ

elle consiste à poser le problème en termes de rangement des actions de la meilleure à la moins bonne ; on parle alors de la procédure de rangement. Formellement, la prescription recherchée est un préordre partiel. Par exemple, ranger les différents sites (actions) historiques en vue d'une restauration échelonnée sur plusieurs années, qui commence par le site le plus urgent.

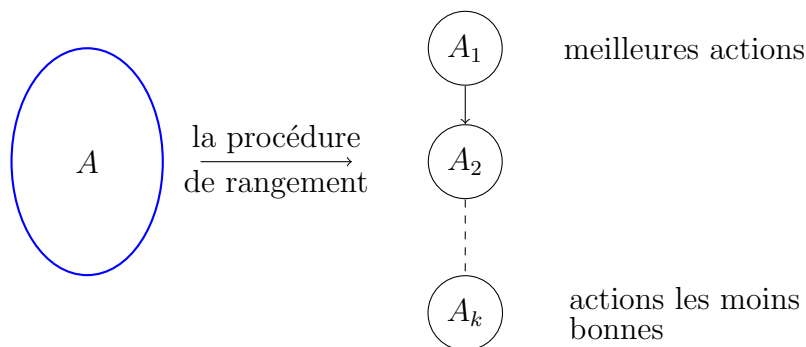


FIG. 1.3: La problématique de rangement P_γ

L'output désiré par le décideur

Généralement, le décideur désire obtenir :

- soit la meilleur solution ;
- soit une affectation des actions aux différentes catégories prédéfinies ;
- soit un rangement complet ou partiel des actions.

1.3 Modélisation des préférences

La modélisation des préférences constitue une étape importante dans l'aide à la décision, elle sert à la comparaison des actions potentielles.

Tout d'abord, nous allons donner un bref aperçu sur les relations binaires.

Définition 1.3.1 (*Relation binaire [33]*) soit A un ensemble fini non vide, une relation binaire R définie sur A est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times A$, c'est-à-dire :

$$R = \{(a, b) \in A^2 \mid aRb\}.$$

La relation complémentaire de la relation R est : $R^c = \{(a, b) \in A^2 \mid (a, b) \notin R\}$.

Propriétés : soit R une relation binaire définie sur un ensemble fini A , R est dite [1] :

- | | |
|-----------------------|--|
| 1. réflexive | $ssi \forall a \in A : aRa ;$ |
| 2. irréflexive | $ssi \forall a \in A : a \not R a ;$ |
| 3. symétrique | $ssi \forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bRa ;$ |
| 4. antisymétrique | $ssi \forall a, b \in A : aRb \text{ et } bRa \Rightarrow a = b ;$ |
| 5. asymétrique | $ssi \forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bR^c a ;$ |
| 6. transitive | $ssi \forall a, b, c \in A : aRb \text{ et } bRc \Rightarrow aRc ;$ |
| 7. complète ou totale | $ssi \forall a, b \in A, a \neq b : aRb \text{ ou } bRa ;$ |
| 8. fortement complète | $ssi \forall a, b \in A : aRb \text{ ou } bRa \text{ (} R \text{ complète et réflexive).}$ |

Certaines classes de relations appelées ordres, préordres ou équivalences sont caractérisées au moyen des propriétés ci-dessus énumérées, elles nous seront particulièrement utiles :

1. un **préordre partiel** est une relation binaire réflexive et transitive ;
2. un **préordre total** est une relation binaire fortement complète et transitive ;
3. un **ordre partiel** est une relation binaire réflexive, transitive et antisymétrique ;
4. un **ordre partiel strict** est une relation binaire asymétrique et transitive ;
5. un **ordre total** est une relation binaire antisymétrique, fortement complète et transitive ;
6. un **ordre total strict** est une relation binaire asymétrique, complète et transitive ;
7. une **relation d'équivalence** est une relation réflexive, symétrique et transitive.

Remarque : soit R une relation binaire définie sur un ensemble fini A .

la relation R est un **ordre partiel** si R est un préordre partiel antisymétrique.

Supposons la question suivante : **l'objet a_i est-il préféré à l'objet a_k ?**
on peut avoir l'une des réponses suivantes :

- l'objet a_i est préféré à l'objet a_k ou l'inverse ;
- l'objet a_i ne diffère pas de l'objet a_k ;
- l'objet a_i est incomparable avec l'objet a_k .

Ces trois situations peuvent être représentées par des relations binaires comme suit :

$$\begin{cases} a_i P a_k & \text{si } a_i \text{ est préféré à } a_k ; \\ a_i I a_k & \text{s'il y a indifférence entre } a_i \text{ et } a_k ; \\ a_i J a_k & \text{s'il y a incomparabilité entre } a_i \text{ et } a_k . \end{cases}$$

où

- P relation de préférence, constitue l'ensemble des couples (a_i, a_k) tels que $a_i P a_k$:

$$P = \{(a_i, a_k) \in A^2 \mid a_i P a_k\}$$

- I relation d'indifférence, constitue l'ensemble des couples (a_i, a_k) tels que $a_i I a_k$:

$$I = \{(a_i, a_k) \in A^2 \mid a_i I a_k\}$$

- J relation d'incomparabilité, constitue l'ensemble des couples (a_i, a_k) tels que $a_i J a_k$:

$$J = \{(a_i, a_k) \in A^2 \mid a_i J a_k\}$$

Définition 1.3.2 (Structure de préférence [48]) une structure de préférence sur un ensemble non vide A est un triplet $\{P, I, J\}$ de relations binaires sur A telles que :

- $\forall a_i, a_k \in A : a_i P a_k$ ou $a_k P a_i$ ou $a_i I a_k$ ou $a_i J a_k$ (ou exclusifs);
- les propriétés ci-dessous sont vérifiées.

Propriétés $\forall a_i, a_k \in A :$

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_i P a_k \Rightarrow a_k \not P a_i & P \text{ est asymétrique;} \\ a_i I a_i & I \text{ est réflexive;} \\ a_i I a_k \Rightarrow a_k I a_i & I \text{ est symétrique;} \\ a_i \not J a_i & J \text{ est irréflexive;} \\ a_i J a_k \Rightarrow a_k J a_i & J \text{ est symétrique.} \end{array} \right.$$

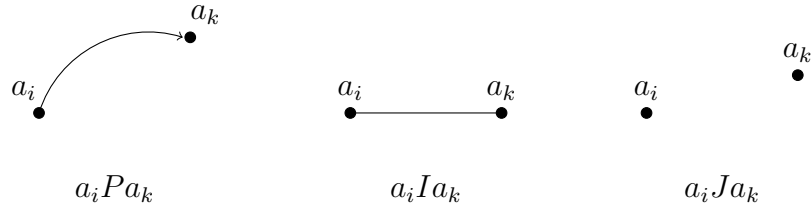


FIG. 1.4: La représentation graphique de la structure de préférence

Remarques :

1. dans un **préordre total** les actions sont toujours comparables (incomparabilité exclue);
2. dans un **préordre partiel** l'incomparabilité est permise.

Structures de préférence les plus usitées

Soient :

- la fonction g où $g : A \rightarrow \mathbb{R}$;
- la structure de préférence $\{P, I, J\}$ définie sur un ensemble non vide A .

Dans ce qui suit, nous supposons que la fonction g est à maximiser.

Définition 1.3.3 (Structure de préordre total [48])

la structure de préférence $\{P, I, J\}$ est une **structure de préordre total** si elle est représentable par le modèle suivant :

$$\forall a_i, a_k \in A \left\{ \begin{array}{l} a_k P a_i \Leftrightarrow g(a_k) > g(a_i) \\ a_k I a_i \Leftrightarrow g(a_k) = g(a_i) \end{array} \right\} \sim \text{modèle traditionnel} \sim$$

Définition 1.3.4 (Structure d'ordre total [48])

la structure de préférence $\{P, I, J\}$ est une **structure d'ordre total** si c'est une structure de préordre total et la relation I se limite aux couples identiques, c'est-à-dire :

$$\forall a_i, a_k \in A \left\{ \begin{array}{l} g(a_k) > g(a_i) \Leftrightarrow a_k P a_i \\ g(a_k) = g(a_i) \Leftrightarrow i = k \end{array} \right.$$

Définition 1.3.5 (Structure de quasi-ordre [48])

la structure de préférence $\{P, I, J\}$ est une **structure de quasi-ordre** si elle est représentable par le modèle suivant :

\exists une fonction $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et une constante positive q telles que :

$$\forall a_i, a_k \in A \left\{ \begin{array}{l} a_k P a_i \Leftrightarrow g(a_k) > g(a_i) + q \\ a_k I a_i \Leftrightarrow |g(a_k) - g(a_i)| \leq q \end{array} \right\} \sim \text{modèle à seuil d'indifférence constant} \sim$$

Définition 1.3.6 (Structure d'ordre d'intervalle [48])

la structure de préférence $\{P, I, J\}$ est une **structure d'ordre d'intervalle** si et seulement si :

\exists deux fonctions $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $q : A \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telles que :

$$\forall a_i, a_k \in A \left\{ \begin{array}{l} a_k P a_i \Leftrightarrow g(a_k) > g(a_i) + q(g(a_i)) \\ a_i I a_k \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} g(a_k) \leq g(a_i) + q(g(a_i)) \\ g(a_i) - q(g(a_k)) \leq g(a_k) \end{array} \right. \end{array} \right\} \sim \text{modèle à seuil variable} \sim$$

Définition 1.3.7 (Structure de pseudo-ordre [48])

la structure de préférence $\{P, I, J\}$ est une structure de **pseudo-ordre** si et seulement si :

\exists trois fonctions $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $q : A \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $p : A \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telles que :

$$\forall a_i, a_k \in A \left\{ \begin{array}{l} a_k P a_i \Leftrightarrow g(a_k) > g(a_i) + p(a_i) \\ a_k Q a_i \Leftrightarrow g(a_i) + q(a_i) < g(a_k) \leq g(a_i) + p(a_i) \\ a_k I a_i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} g(a_k) \leq g(a_i) + q(a_i) \\ g(a_i) - q(a_k) \leq g(a_k) \end{array} \right. \end{array} \right\} \sim \text{modèle à deux seuils} \sim$$

1.4 Le concept de critère

Un critère est un outil permettant la comparaison des actions selon un certain point de vue¹ ; généralement représenté par une fonction à valeurs réelles.

A chaque critère est associée une variable en valeurs cardinales lorsque le critère est quantitatif (exemple : le salaire des employés d'une entreprise) ou ordinale lorsque le critère est qualitatif (exemple : la mention attribuée aux étudiants : excellent, très bien, bien).

Définition 1.4.1 nous appelons critère une fonction g , définie sur l'ensemble des actions A , prenant ses valeurs dans un ensemble totalement ordonné, et qui représente les préférences du décideur selon un point de vue [48].

1.4.1 Le pouvoir discriminant d'un critère

Le pouvoir discriminant d'un critère est l'introduction ou non des seuils pour nuancer la préférence au niveau local de chaque critère ; un critère sera qualifié de vrai critère, quasi-critère, critère d'intervalle ou pseudo-critère selon leur pouvoir de discrimination.

1. **Le vrai critère** : ce modèle est défini dans le cas où aucun seuil est introduit, ce qui implique que sa structure de préférence est une structure de préordre total.

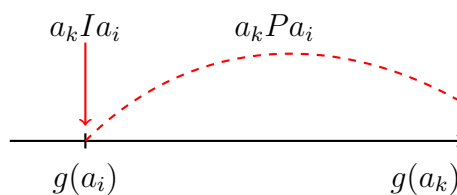


FIG. 1.5: Le vrai critère

¹On appelle **point de vue** tout élément pouvant servir à caractériser les actions potentielles

2. **Le quasi-critère** : ce modèle correspond à la situation où le décideur introduit le seuil d'indifférence q et admet que l'écart $|g(a_k) - g(a_i)|$ inférieur à q traduit l'indifférence des actions a_i et a_k et que l'écart supérieur strictement à q traduit également une préférence stricte de a_k par rapport à a_i .

La structure de préférence à ce modèle est alors un quasi-ordre.

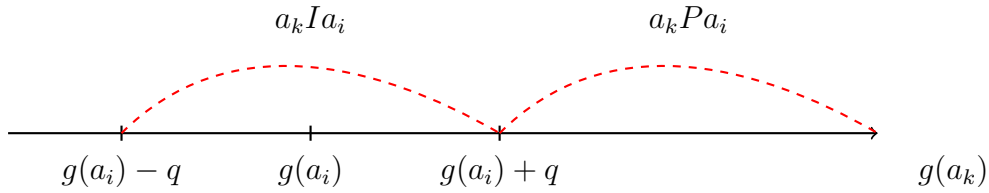


FIG. 1.6: Le quasi-critère

3. **Le critère d'intervalle** : on parle de critère d'intervalle lorsque le seuil d'indifférence varie selon l'échelle considérée. Par exemple, une différence de 100 euros n'a pas la même importance selon que l'on considère des sommes s'exprimant en centaines ou en milliers d'euros.

La structure de préférence à ce modèle est une structure d'ordre d'intervalle.

4. **Le pseudo-critère** : nous parlons de pseudo-critère lorsque le décideur fait intervenir deux seuils de discrimination distincts :

- un seuil d'indifférence associé au critère g qui indique la limite supérieure en dessous de laquelle le décideur marque une indifférence nette entre deux actions ;
- un seuil de préférence, au dessus duquel le décideur montre une préférence stricte entre deux actions.

Ainsi, une zone d'hésitation entre la préférence stricte et l'indifférence est définie ; c'est la zone de préférence faible, notée Q .

La structure de préférence à ce modèle est une structure de pseudo-ordre.

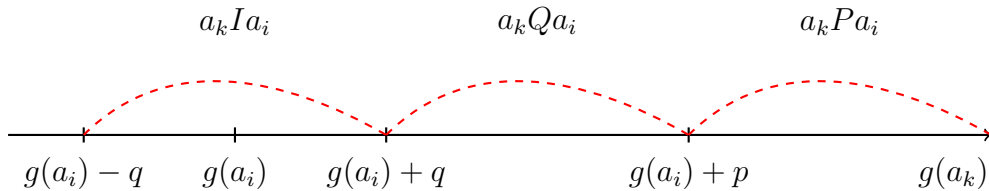


FIG. 1.7: Le pseudo-critère

1.4.2 La cohérence des critères

Soit F la famille regroupant les critères retenus par le décideur, $F = \{g_1, \dots, g_m\}$. Cette famille doit être définie de telle sorte que toutes les facettes du problème soient représentées sans qu'il y ait redondance. Ce qui constitue la partie la plus délicate d'un problème de décision. Pour que la famille de critères choisie constitue un système de référence fondamental permettant de représenter, de bâtir et de modéliser les préférences globales du décideur, elle doit être cohérente. A ce niveau, F doit remplir les trois exigences suivantes [31] :

1. **Exhaustivité** : étant donnée deux éléments de l'ensemble des actions ; si elles ont la même évaluation selon tous les critères, alors elles sont indifférentes, c'est-à-dire :

$$\forall g_j \in F : g_j(a_i) = g_j(a_k) \Rightarrow a_i I a_k$$

2. **Cohésion** : elle concerne la cohérence entre les préférences locales de chaque critère et les préférences globales ; si l'évaluation de a_i est égale à celle de a_k selon tous les critères sauf un et qu'elle est meilleure sur ce seul critère alors a_i est préférée à a_k , c'est-à-dire :

$$\forall g_j \in F, j \neq l : g_j(a_i) = g_j(a_k) \text{ et } g_l(a_i) > g_l(a_k) \Rightarrow a_i P a_k$$

où P est la relation de préférence.

3. **Non-redondance** : cette condition vise à éliminer les critères superflus. Pour ce faire, il faudrait vérifier que F ne comporte aucun critère redondant en ce sens que le retrait de n'importe quel critère de F définit une famille qui met en défaut l'une au moins des deux exigences précédentes.

1.5 Le tableau de performance

Le *tableau de performance*, noté E , également appelé *matrice d'évaluation* ou *matrice de jugements* ou encore *matrice de décision* est un tableau de dimensions $n \times m$ où n est le nombre d'actions et m le nombre de critères, dans lequel chaque ligne i exprime les performances de l'action a_i relatives aux m critères considérés et chaque colonne j exprime les évaluations de toutes les actions relatives au critère g_j , l'évaluation de l'action a_i selon le critère g_j est symbolisé par $g_j(a_i)$. Une représentation schématique du tableau de performance est donnée dans la *figure 1.8*.

A	$F \rightarrow$	g_1	\dots	g_j	\dots	g_m
a_1	\downarrow	$g_1(a_1)$	\dots	$g_j(a_1)$	\dots	$g_m(a_1)$
\vdots		\vdots		\vdots		\vdots
a_i		$g_1(a_i)$	\dots	$g_j(a_i)$	\dots	$g_m(a_i)$
\vdots		\vdots		\vdots		\vdots
a_n		$g_1(a_n)$	\dots	$g_j(a_n)$	\dots	$g_m(a_n)$

FIG. 1.8: Représentation schématique du tableau de performance

1.6 Problème multicritère

Lorsque nous avons un ensemble de possibilités (offres, matériels, candidats,...) parmi lesquelles nous voulons choisir la meilleure possibilité par rapport à certains critères (prix, fiabilité, confort,...), nous sommes alors face à un problème **multi-critère**.

Généralement, un tel problème multicritère est formulé par le modèle suivant :

$$\langle A, F, E \rangle \quad (1.1)$$

où

- A est l'ensemble des actions potentielles ;
- F une famille cohérente de critères ;
- E le tableau de performance.

Lorsque la prise de décision se base sur un seul critère, on parle alors d'un problème **monocritère** qui se formule comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Optimiser } g(a) \\ a \in A \end{array} \right. \quad (1.2)$$

où g est la fonction critère à optimiser (minimiser ou maximiser) et A est l'ensemble des actions (possibilités).

Définition 1.6.1 *un problème de décision multicritère est une situation où, ayant défini un ensemble A d'actions et une famille F cohérente de critères sur A , on désire résoudre l'une des problématiques suivantes [48] :*

- problématique de choix (P_α);
- problématique de tri (P_β);
- problématique de rangement (P_γ).

1.7 Problématique d'un problème multicritère

La difficulté principale d'un problème multicritère est qu'il s'agit d'un problème mathématiquement mal posé c'est-à-dire il n'existe pas, en général, d'action meilleure que toutes les autres simultanément sur tous les critères; le concept de solution optimale n'a donc pas de sens dans un contexte multicritère.

Dès lors résoudre un problème multicritère ne consiste pas à chercher la solution optimale mais l'ensemble des solutions satisfaisantes pour lesquelles on ne pourra pas effectuer une opération de classement. Les méthodes multicritères sont donc des méthodes d'aide à la décision car le choix final sera laissé au décideur.

1.8 Les approches multicritères

Trois grandes approches sont considérées dans le domaine de l'aide multicritère à la décision [48] :

1.8.1 L'approche d'articulation a priori des préférences

Les méthodes d'articulation a priori des préférences nécessitent, comme entrée, l'introduction des paramètres de préférence du décideur.

Principalement, cette approche repose sur l'axiome suivant : tout décideur essaye implicitement de maximiser une fonction, appelée fonction d'utilité ou d'agrégation : $U = U(g_1, \dots, g_m)$ qui agrège tout les critères à prendre en compte en leur attribuant d'éventuels poids p_j qui caractérisent l'importance relative de chaque critère, indiqué par le décideur.

La fonction U peut prendre plusieurs formes analytiques, citons-en quelques unes :

1. **le modèle additif** : est le plus simple et le plus utilisé, il est défini par :

$$U(a) = \sum_{j=1}^m U_j(g_j(a))$$

avec U_j fonction strictement croissante à valeur réelle.

2. **le modèle multiplicatif** : est sous la forme suivante :

$$U(a) = \prod_{j=1}^m U_j(g_j(a))$$

Nous citons quelques méthodes appartenant à cette approche :

La Théorie de l'Utilité Multiattribut(MAUT) par [Keeney et Raiffa, 1976], Utilités Additives(UTA) par [Jacquet, Lagrèze et Siskos, 1978], Analytic Hierarchy Process (AHP) par [Saaty, 1984],...

1.8.2 L'approche d'articulation a posteriori des préférences

Dans cette approche, le décideur intervient en aval du processus décisionnel, après lui avoir présenté toutes les solutions efficaces sur lesquelles il exerce son choix final.

Les principales méthodes ou familles de méthodes appartenant à cette approche sont :

ELECTRE [Roy et al., 1970], ORESTE [Roubens, 1979], PROMETHEE [Brans, Mareschal et Vincke, 1984], La méthode MELCHOIR [Leclercq, 1984],...

La différence entre ces deux approches s'exprime dans le schéma ci-après.

- Dans la première approche, le décideur intervient dès le début de la définition du problème en exprimant sa préférence afin de transformer le problème multicritère en un problème monocritère.
- Dans la deuxième approche, le décideur effectue son choix dans l'ensemble des solutions proposées par l'analyste.

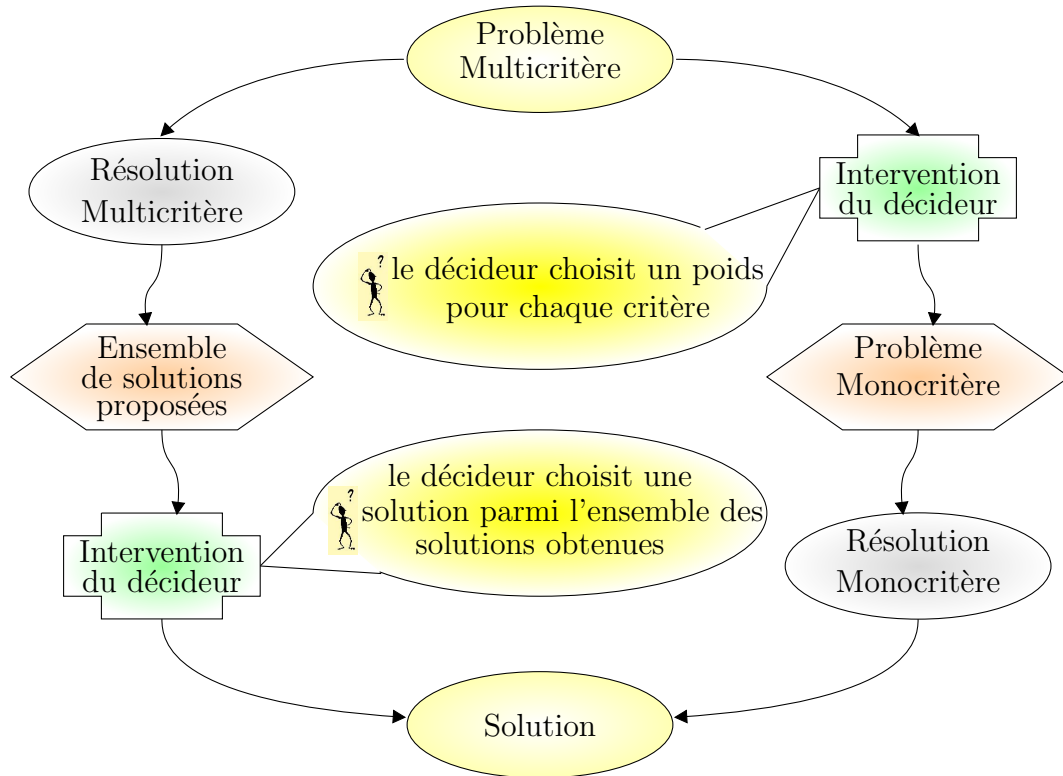


FIG. 1.9: Schéma de résolution

1.8.3 L'approche d'articulation progressive des préférences

Cette approche consiste en une alternance de deux types d'étapes :

1. les étapes de calcul exécutées par l'analyste ;
2. les étapes de dialogue avec le décideur.

La première étape de calcul fournit un ou plusieurs compromis. Ceux-ci sont présentés au décideur qui réagit en apportant des informations complémentaires sur ses préférences. Cette information est injectée dans le modèle utilisé et permet de construire de nouveaux compromis.

Les méthodes les plus connues dans cette approche sont :
 STEM [Benayoun et Tergny, 1969], POINT DE MIRE [Roy, 1976], PRFCALC [Jacquet-Lagrèze, 1983,...

L'intérêt des méthodes multicritères a été montré dans plusieurs problèmes concrets, à savoir :

1. Choix d'un site d'implantation d'une nouvelle usine, d'un magasin,
2. Choix d'une stratégie d'investissement.
3. Choix de l'utilisation d'une technologie ou d'un système d'information.
4. Sélection de fournisseurs.
5. Elaboration du plan de production d'une usine.

1.9 Le processus d'aide multicritère à la décision

Nous présentons les différentes étapes principales de l'aide multicritère à la décision [29] :

1. **Définition du problème** : la première étape de l'aide multicritère à la décision consiste à cerner la nature du problème auquel le décideur se trouve confronté en le formulant soit en une problématique de choix P_α , de tri P_β ou de rangement P_γ et le type de solution qu'il souhaite dégager.
2. **Définition de l'ensemble des actions potentielles** : cette étape consiste à identifier l'ensemble des actions ou alternatives sur lesquelles va porter la décision.
3. **Construction des critères** : la construction des critères est une étape délicate qui nécessite une compréhension du problème posé ; tout d'abord il s'agit d'identifier les caractéristiques des actions considérées et puis de dégager les critères qui peuvent évaluer les actions et peuvent décrire le résultat de la comparaison de deux actions à partir de leurs évaluations ; les critères construits doivent former une famille cohérente de critères.
4. **Evaluation des actions** : il s'agit de mesurer, de juger chaque action suivant tous les critères considérés.
5. **Définir les différents seuils** : cette étape consiste à estimer les seuils d'indifférence q_j , de préférence p_j et de veto v_j lorsque le décideur marque une incertitude dans l'évaluation des performances liées au $j^{\text{ème}}$ critère :
 - (a) le seuil d'indifférence q_j est la plus grande valeur en dessous de laquelle le décideur considère qu'il y a indifférence de deux actions a_i et a_k selon le critère g_j .

$$a_i I a_k \Leftrightarrow |g_j(a_i) - g_j(a_k)| \leq q_j$$

- (b) le seuil de préférence p_j est la plus petite valeur au dessus de laquelle le décideur considère qu'il y a préférence stricte d'une action par rapport à une autre selon le critère g_j .

$$a_i P a_k \Leftrightarrow g_j(a_i) - g_j(a_k) > p_j$$

- (c) le seuil de veto v_j est la plus grande valeur au dessus de laquelle le décideur considère ne plus pouvoir accepter qu'une action a_i surclasse l'action a_k selon le critère g_j .

$$a_i \not\mathcal{S} a_k \Leftrightarrow g_j(a_i) - g_j(a_k) \geq v_j$$

Tous ces paramètres ont, pour le décideur, une signification économique.

Par exemple : choix d'une offre, on considère dans ce cas le critère prix,

- $q_1 = 50$ signifie que si une offre a_1 coûte 50 unités monétaires en plus que l'offre a_2 , alors a_1 et a_2 sont indifférentes ;
- $p_1 = 500$ signifie que si une offre a_1 coûte 500 unités monétaires en moins que l'offre a_2 , alors a_1 sera strictement préférée à a_2 ;
- $v_1 = 800$ signifie que si une offre a_1 coûte 800 unités monétaires en moins que l'offre a_2 , alors a_1 ne surclasse pas a_2 .

Le choix de ces seuils peut se faire par des calculs d'erreurs qui reflètent l'incertitude des données dont nous disposons ; mais dans la plupart des cas, ces seuils sont fixés arbitrairement.

6. **Pondération des critères** : cette étape a pour but de préciser l'importance (poids) relative aux critères ; parmi de nombreuses techniques de pondération [43], en voici quelques unes :
- (a) **la notation**, qui demande au décideur de noter sur une échelle de 1 à 10 l'importance qu'ils attribuent à chaque critère, cette méthode étant la plus communément utilisée ;
 - (b) **la méthode de distribution des points**, qui demande au décideur de répartir 100 points en fonctions de l'importance accordée aux critères ;
 - (c) **hiérarchisation des critères (catégorisation)**, cette technique demande au décideur de placer les critères dans des catégories telles que : très important, moyennement important, peu important.
7. **Choix d'une méthode** : il s'agit de définir la méthode la plus appropriée pour traiter un problème bien défini ; une étude précise concernant le choix d'une méthode est détaillée dans le chapitre 3.

8. **Analyse de robustesse** : l'analyse de robustesse consiste à sensibiliser la solution de base en faisant varier les différents paramètres : le poids des critères, le seuil d'indifférence q_j , le seuil de préférence p_j et le seuil de veto v_j ; si les résultats ne sont pas sensibles aux variations des valeurs des paramètres alors la solution est robuste.

Remarque

Les évaluations des actions peuvent être quantitatives ou qualitatives ; dans le cas où elles sont qualitatives, on doit les transformer en évaluations quantitatives en appliquant *l'opération de quantification*. Cette dernière nécessite la définition d'une échelle ordinale ; l'échelle de mesure la plus utilisée est celle de *Likert-type*[44].

Un exemple d'échelle ordinale à cinq points est le suivant : très défavorable, défavorable, neutre, favorable, très favorable. Ensuite, pour quantifier cette échelle, on associe à chaque niveau de l'échelle une valeur numérique. Par exemple, on peut associer les nombres 1, 2, 3, 4 et 5 à l'échelle précédente en allant de très défavorable à très favorable.

D'autres échelles plus détaillées, à sept ou à neuf points peuvent également être utilisées.

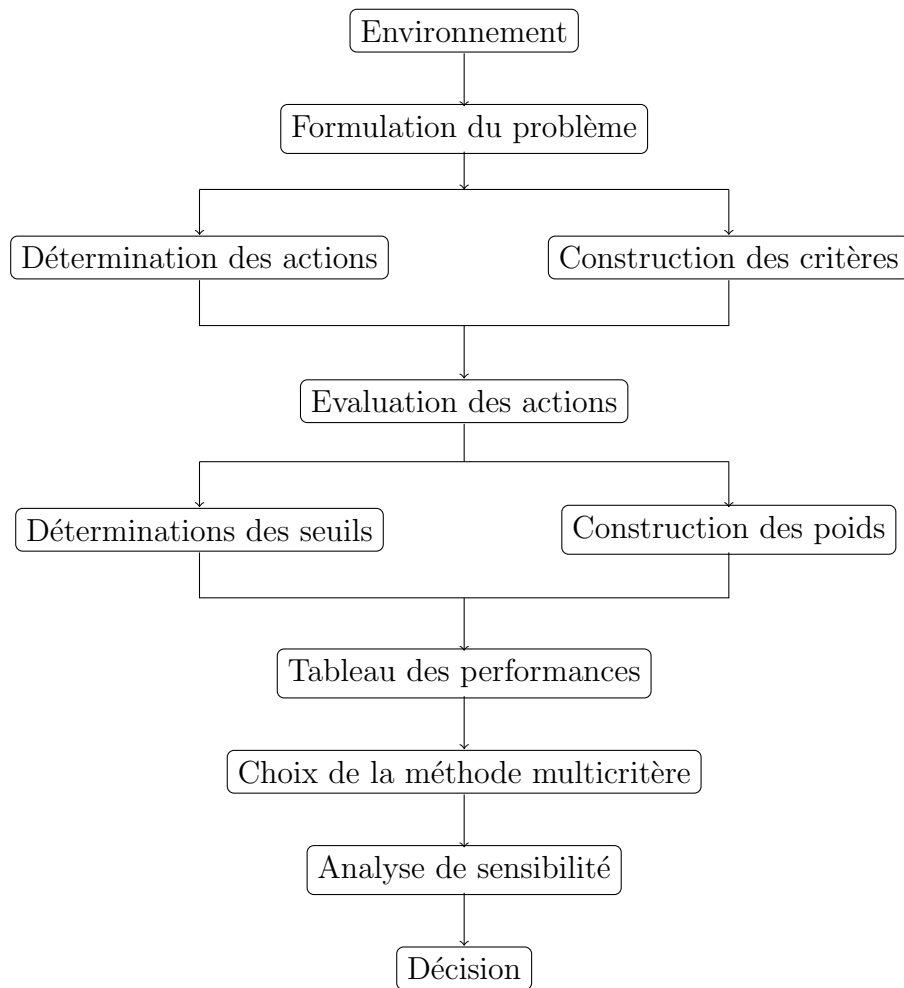


FIG. 1.10: Le processus de décision multicritère

2

Les méthodes de surclassement

Ce chapitre décrit d'une manière précise quelques méthodes de surclassement. Y sont retenues principalement les méthodes ELECTRE, les méthodes PROMETHEE et la méthode ADAM.

Les diverses méthodes ELECTRE sont inspirées de l'ouvrage de *Maystre et al.*[31]. Concernant les méthodes PROMETHEE, nous nous sommes basés sur l'article de *Ph. Vincke, J.P. Brans et B. Mareschal* [7]. Toutefois, certaines modifications y sont apportées.

Nous renvoyons le lecteur intéressé aux références citées plus haut ainsi qu'à [11], [41],[35], [37], [36], [39],[40]et [38].

Les méthodes de surclassement se basent sur la comparaison des différentes actions deux à deux en considérant, pour chaque critère, les avantages et les inconvénients d'une action par rapport à l'autre. On peut, dès lors, déterminer une relation pour chaque couple d'actions ; il s'agit soit d'une relation de préférence P , d'indifférence I ou d'incomparabilité J . Pour ce faire, nous calculons un indice qui reflète la dominance d'une action vis-à-vis d'une autre.

L'avantage fondamental de ces méthodes se situe dans la richesse des relations possibles entre deux actions. De plus, elles n'imposent pas au décideur des contraintes de rationalité mathématique. Comme nous pouvons analyser les critères séparément ; ils peuvent être de natures très différentes. Autrement dit, il est tout à fait possible de traiter simultanément des critères qualitatifs et des critères quantitatifs dans un même problème.

Ces méthodes peuvent être scindées en deux étapes [35] :

1. la construction d'une relation de surclassement (application d'une procédure d'agrégation¹ partielle) ;
2. l'exploitation de la relation de surclassement : cette procédure dépend du type de la problématique ; pour chaque type de problématique, il existe plusieurs procédures d'exploitation en fonction de la méthode choisie.

Avant de présenter les méthodes de surclassement, nous clarifions quelques notions.

2.1 Définitions

Définition 2.1.1 (*La relation de surclassement [31]*)

la relation de surclassement est une relation binaire S définie sur l'ensemble A des actions dont la signification est la suivante :

une action a_i surclasse une action a_k ($a_i S a_k$) s'il est possible d'affirmer, avec des arguments convaincants, que l'action a_i est au moins aussi bonne que a_k .

Toute relation de surclassement S peut être définie comme suit :

$$a S b \Leftrightarrow a P b \text{ ou } a I b \quad (S = P \cup I),$$

où P est la relation de préférence et I la relation d'indifférence.

Définition 2.1.2 (*Hypothèse de surclassement [31]*)

l'hypothèse de surclassement est l'hypothèse posée pour tout couple d'actions (a_i, a_k) :

" l'action a_i surclasse l'action a_k ", qu'il s'agit de vérifier.

¹La procédure d'agrégation est une opération permettant d'obtenir des informations sur la préférence globale entre les actions potentielles, à partir d'informations sur les préférences par critère.

Définition 2.1.3 (Concordance [31])

supposons que l'hypothèse de surclassement pour le couple (a_i, a_k) est acceptée, on dit que le critère g_j est un critère **concordant** avec l'hypothèse de surclassement si l'action a_i est au moins aussi bonne que l'action a_k selon le critère g_j , c'est-à-dire

$$g_j(a_i) \geq g_j(a_k)$$

Définition 2.1.4 (Non-discordance [31])

la condition de non-discordance permet de refuser une hypothèse de surclassement obtenue après l'application de la relation de concordance lorsqu'il existe une opposition trop forte sur au moins un critère.

Définition 2.1.5 (Indice de concordance et indice de discordance [31])

1. **indice de concordance par critère**, généralement noté $c_j(a_i, a_k)$ exprime dans quelle mesure le critère g_j est en accord avec l'hypothèse de surclassement ;
2. **indice de concordance globale**, généralement noté c_{ik} affirme dans quelle mesure il y a concordance avec l'hypothèse de surclassement ;
3. **indice de discordance par critère**, généralement noté $d_j(a_i, a_k)$ désigne la mesure de l'opposition du critère g_j avec l'hypothèse de surclassement ;
4. **indice de discordance globale**, généralement noté d_{ik} exprime la mesure de l'opposition globale avec l'hypothèse de surclassement.

Définition 2.1.6 (Graphe²) un graphe $G = (X, U)$ est déterminé par :

1. un ensemble $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets ;
2. une famille $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ du produit cartésien :

$$X \times X = \{(x, y) | x \in X, y \in X\},$$

dont les éléments sont appelés arcs [4].

Définition 2.1.7 (Graphe réciproque [12]) soit le graphe $G = (X, U)$, on appelle graphe réciproque de G le graphe $G^* = (X, U^*)$ où

$$U^* = \{(y, x) | (x, y) \in U\}.$$

²Pour plus de détails sur les graphes, nous renvoyons le lecteur intéressé aux références [4], [22] et [12]

Définition 2.1.8 (Noyau du graphe [5])

soit le graphe $G = (X, U)$, le noyau du graphe G est un sous-ensemble de sommets noté N , satisfait aux deux propriétés :

1. la stabilité

$$\forall x, y \in N : (x, y) \notin U \text{ et } (y, x) \notin U;$$

2. l'absorption

$$\forall y \in X \setminus N : \exists x \in N \text{ tel que } (y, x) \in U.$$

Théorème 2.1.1 un 1-graphe³ sans circuits admet un noyau; en outre, ce noyau est unique [4].

Définition 2.1.9 (Graphe de surclassement [31]) le graphe de surclassement est obtenu en représentant la relation de surclassement sous forme d'un graphe $G = (X, U)$ où

$$\begin{cases} X = A \\ U = \{(a_i, a_k) \in U | (a_i S a_k)\}. \end{cases}$$

2.2 La méthode ELECTRE

La méthode ELECTRE (Elimination et Choix Traduisant la Réalité) a été développée par *B.Roy* dont le but général vise à construire et exploiter des relations de surclassement pour représenter les préférences du décideur. Elle adopte le principe de majorité en tenant compte d'une minorité éventuelle qui serait assez forte pour contester la majorité et ceci dans les différents points de vue. En d'autres termes, lorsqu'une action a_i est au moins aussi bonne qu'une autre action a_k selon la plupart des critères et il n'existe pas de critère pour lequel a_i est beaucoup plus mauvaise que a_k , alors a_i surclasse a_k .

La méthode ELECTRE a évolué en une famille de méthodes :

- la méthode **ELECTRE I** : développée par *B.Roy* en 1968 [35];
- la méthode **ELECTRE II** : développée par *B.Roy* et *Bertier* depuis 1968 jusqu'à 1973 [37];
- la méthode **ELECTRE III** : développée par *B.Roy* en 1978 [36];
- la méthode **ELECTRE IV** : développée par *B.Roy* et *Hugonnard* en 1982 [39];
- la méthode **ELECTRE IS** : développée par *B.Roy* et *Skalka* en 1985 [40];
- la méthode **ELECTRE TRI** : développée par *B.Roy* et *Bouyssou* en 1992 [38].

³Un 1-graphe est un graphe dans lequel il y a au maximum un arc entre chaque paire de sommets

Soient

- $A = \{a_1, \dots, a_i, \dots, a_n\}$ l'ensemble des actions potentielles ;
- $F = \{g_1, \dots, g_j, \dots, g_m\}$ une famille cohérente de critères ;
- $I = \{1, \dots, i, \dots, n\}$ l'ensemble des indices des actions potentielles ;
- $J = \{1, \dots, j, \dots, m\}$ l'ensemble des indices des critères ;
- $g_j(a_i)$ l'évaluation de l'action a_i suivant le critère g_j ;
- w_j le poids associé au critère g_j ;
- q_j le seuil d'indifférence associé au critère g_j ;
- p_j le seuil de préférence associé au critère g_j ;
- v_j le seuil de veto associé au critère g_j .

2.2.1 La méthode ELECTRE I

La méthode ELECTRE I est conçue pour la problématique de choix : elle vise à sélectionner la *meilleure* action.

En premier lieu, une relation de surclassement est construite en prenant appui sur une notion de concordance et une notion de discordance : pour chaque couple d'actions (a_i, a_k) , l'hypothèse de surclassement " a_i surclasse a_k " est validée si un test de concordance et un test de non-discordance sont satisfaits.

En second lieu, à l'aide de la relation de surclassement construite, l'ensemble des actions A sera partitionné en deux sous-ensembles : l'ensemble N qui présente le noyau du graphe réciproque du graphe de surclassement dans lequel se trouve la meilleure action et l'ensemble complémentaire noté $A \setminus N$ tels que :

- toute action appartenant à l'ensemble $A \setminus N$ est surclassée par au moins une action appartenant à l'ensemble N ;
- les actions appartenant à l'ensemble N sont incomparables entre elles.

Les différentes étapes de la méthode ELECTRE I

Nous présentons d'une manière formelle, les différentes étapes de la méthode ELECTRE I ci-dessous énumérées.

Étape 1 : pour chaque couple d'actions $(a_i, a_k) : a_i, a_k \in A$ et $i \neq k$,

1. construire les sous-ensembles $J^+(a_i, a_k), J^-(a_i, a_k), J^0(a_i, a_k)$ de J où
 - $J^+(a_i, a_k) = \{j \in J | g_j(a_i) > g_j(a_k)\}$: l'ensemble des indices des critères pour lesquels l'action a_i est préférée à l'action a_k ;

- $J^=(a_i, a_k) = \{j \in J | g_j(a_i) = g_j(a_k)\}$: l'ensemble des indices des critères pour lesquels l'action a_i est équivalente à l'action a_k ;
 - $J^-(a_i, a_k)$ l'ensemble des indices des critères pour lesquels l'action a_k est préférée à l'action a_i .
2. définir l'ensemble de concordance $J(a_i, a_k)$ où

$$J(a_i, a_k) = J^+(a_i, a_k) \cup J^=(a_i, a_k)$$

3. calculer l'indice de concordance c_{ik} où

$$c_{ik} = \frac{P^+(a_i, a_k) + P^=(a_i, a_k)}{P}$$

et

- $P = P^+(a_i, a_k) + P^=(a_i, a_k) + P^-(a_i, a_k)$;
- $P^+(a_i, a_k) = \sum w_j, j \in J^+(a_i, a_k)$;
- $P^=(a_i, a_k) = \sum w_j, j \in J^=(a_i, a_k)$;
- $P^-(a_i, a_k) = \sum w_j, j \in J^-(a_i, a_k)$.

Etape 2 : pour chaque critère g_j , définir l'amplitude δ_j où

$$\begin{aligned} \delta_j &= \max_{g_j} - \min_{g_j} ; \\ \max_{g_j} &= \max\{g_j(a_i) | a_i \in A\} ; \\ \min_{g_j} &= \min\{g_j(a_i) | a_i \in A\}. \end{aligned}$$

Etape 3 : pour chaque couple d'actions $(a_i, a_k) : a_i, a_k \in A$ et $i \neq k$,

1. définir l'ensemble de discordance $J^-(a_i, a_k)$ où

$$J^-(a_i, a_k) = \{j \in J | g_j(a_i) < g_j(a_k)\}$$

2. calculer l'indice de discordance d_{ik} donné par :

$$d_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{si } J^-(a_i, a_k) = \emptyset ; \\ \frac{1}{\delta_{j_{max}}} \max\{g_j(a_k) - g_j(a_i)\} & \text{si } j \in J^-(a_i, a_k). \end{cases}$$

où $\delta_{j_{max}}$ l'amplitude associée au critère g_j pour lequel existe le maximum de désaccord,

$$\delta_{j_{max}} = \delta_j | g_j(a_k) - g_j(a_i) = \max_{j \in J^-} \{g_j(a_k) - g_j(a_i)\}$$

Etape 4 : pour chaque couple d'actions $(a_i, a_k) : a_i, a_k \in A$ et $i \neq k$, construire la relation de surclassement S de type binaire,

$$a_i S a_k \Leftrightarrow \begin{cases} c_{ik} \geq c \\ d_{ik} \leq d \end{cases}$$

où

c le seuil de concordance ;

d le seuil de discordance.

Etape 5 : construire le graphe de surclassement et sa réciproque.

Etape 6 : sélectionner le noyau : pour ce faire, on doit tester l'existence du circuit dans le graphe de surclassement

1. si le graphe de surclassement possède au moins un *circuit* (en appliquant l'algorithme 2.2.1), alors on détecte tous les circuits du graphe et on *rétrécit* le graphe en remplaçant chaque circuit par une action fictive qui regroupe toutes les actions qui le composent.
2. sélectionner le noyau du graphe réciproque réduit, en appliquant l'algorithme 2.2.1.

Remarques :

1. Le **seuil de concordance c** exprime le minimum de concordance requise pour que l'hypothèse " a_i surclasse a_k " ne soit pas rejetée.
2. Le **seuil de discordance d** exprime le maximum de discordance requise pour que l'hypothèse " a_i surclasse a_k " ne soit pas rejetée.
3. Dans la pratique :
 - le seuil de concordance prend les valeurs : 0.5, 0.6, 0.65 ($0.5 \leq c < 1$);
 - le seuil de discordance prend les valeurs : 0.3, 0.35, 0.4 ($0 < d < 0.5$).

Soient le graphe $G = (X, U)$, M sa matrice d'adjacence et I l'ensemble des indices des sommets du graphe G .

Algorithme 1 : algorithme permettant de tester l'existence de circuits [12]

Etape 0 : *Initialisation* : poser $M^* = M$;

Etape 1 : s'il existe une ligne i tel que :

$\forall j \in I : M^*[i, j] = 0$ alors supprimer la ligne i et la colonne i ;

soit M^{**} la matrice résultante ;

poser $M^* = M^{**}$ et aller à l'étape 2 ;

sinon il existe au moins un circuit, terminer ;

Etape 2 : si $\forall i, j \in I : M^*[i, j] = 0$, alors le graphe est sans circuit, terminer ;

sinon retourner à l'étape 1.

Algorithme 2 : obtention d'un noyau d'un graphe sans circuit [12]

Etape 0 : *Initialisation* : poser $N = \emptyset; \bar{N} = \emptyset$;

choisir une ligne $i \in I$ où $\forall j \in I : M[i, j] = 0$;

Etape 1 : poser $N = N \cup \{i\}$;

si $\exists k \in I | M[k, i] = 1$ alors

poser $\bar{N} = \bar{N} \cup \{k\}$ et $I = I \setminus \{N \cup \bar{N}\}$;

Etape 2 : tester, si $I \neq \emptyset$ alors

choisir une ligne $i \in I$ où $\forall j \in I : M[i, j] = 0$, aller à l'étape 1 ;

sinon, terminer le noyau du graphe est le sous-ensemble N .

2.2.2 La méthode ELECTRE II

La méthode ELECTRE II relève de la problématique de rangement ($P\gamma$), première méthode ELECTRE conçue pour traiter les problèmes de classement, visant à ranger les actions potentielles de la *meilleure* action à la *moins bonne*. Cette méthode consiste à construire deux relations de surclassement :

- une relation de surclassement forte S_F : cette relation signifie l'acceptation de l'hypothèse de surclassement avec une certitude forte ;
- une relation de surclassement faible S_f : cette relation signifie l'acceptation de l'hypothèse de surclassement avec une certitude faible.

Ces deux relations sont construites sur la base des notions de concordance et de discordance ; ce qui implique l'existence d'une relation de surclassement. Pour établir une telle relation, on effectue le test de concordance et le test de non-discordance qui sont imbriqués l'un dans l'autre. On exploite ces deux relations de surclassement pour construire deux préordres complets à partir de quoi on fait extraire un préordre partiel.

Les étapes principales de la méthode ELECTRE II

Etape 1 : pour chaque couple d'actions $(a_i, a_k) : a_i, a_k \in A$ et $i \neq k$, calculer l'indice de concordance c_{ik} défini par :

$$c_{ik} = \frac{P^+(a_i, a_k) + P^-(a_i, a_k)}{P}$$

Etape 2 : pour chaque couple d'actions $(a_i, a_k) : a_i, a_k \in A$ et $i \neq k$, calculer l'indice de discordance par critère $d_j(a_i, a_k)$ donné par :

$$d_j(a_i, a_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin J^-(a_i, a_k) \\ g_j(a_k) - g_j(a_i) & \text{si } j \in J^-(a_i, a_k) \end{cases}$$

Etape 3 : établir les relations de surclassement forte et faible pour chaque couple d'actions $(a_i, a_k) : a_i, a_k \in A$ et $i \neq k$, en appliquant les étapes ci-dessous énumérées :

- 3.1.** si $\frac{P^+(a_i, a_k)}{P^-(a_i, a_k)} < 1$ ou $\exists j \in J | d_j(a_i, a_k) > D_{1(j)}$ ou $c_{ik} > c^-$ alors $a_i \mathcal{S}_F a_k$ et $a_i \mathcal{S}_f a_k$
sinon aller à l'étape 3.2 ;
- 3.2.** si $c_{ik} < c^0$ alors $a_i \mathcal{S}_f a_k$;
sinon aller à l'étape 3.3 ;
- 3.3.** si $c_{ik} \geq c^+$ alors $a_i \mathcal{S}_F a_k$
sinon aller à l'étape 3.4 ;
- 3.4.** si $\forall j \in J | d_j(a_i, a_k) \leq D_{2(j)}$ alors $a_i \mathcal{S}_F a_k$;
sinon $a_i \mathcal{S}_f a_k$.

où $D_{1(j)}$ et $D_{2(j)}$ deux seuils de discordance par critère.

Soient G_F, G_f les graphes associés aux relations de surclassement forte \mathcal{S}_F et faible \mathcal{S}_f , respectivement.

Etape 4 : construction du premier préordre complet :

pour construire le premier préordre complet, on applique l'algorithme de classement direct ci-après en prenant appui sur les deux relations de surclassement déjà construites.

Etape 5 : construction du second préordre complet : pour ce faire, l'algorithme du classement direct est appliqué à condition d'effectuer les modifications suivantes :

- inverser le sens des arcs dans les graphes G_F et G_f ;

- inverser le rang des actions, c'est-à-dire, le rang d'une action déjà classée étant obtenue de la manière suivante :

$$r'_2(a_i) = 1 + r_{2_{max}} - r_2(a_i)$$

où

$r_2(a_i)$ le rang initial de l'action a_i ;

$r_{2_{max}}$ le rang de la dernière action ;

$r'_2(a_i)$ le nouveau rang de l'action a_i .

Etape 6 : construction du préordre partiel final : la construction du préordre partiel est basée sur les deux préordres complets déjà construits en faisant les combinaisons entre eux comme suit :

- si a_i surclasse a_k dans les deux préordres complets, alors a_i surclasse a_k dans le préordre partiel ;
- si a_i est équivalente à a_k dans l'un des préordres complets et a_i est préférée à a_k dans le deuxième, alors a_i sera préférée à a_k dans le préordre partiel ;
- si dans le premier préordre complet a_i est préférée à a_k et l'inverse dans le second, alors les deux actions seront incomparables au préordre partiel.

Algorithme 3 : algorithme de classement direct

0. Initialisation poser $l = 0$; $Y_l = A$ et $A_l = A$,

1. sélectionner l'ensemble D des sommets qui sont dans Y_l et qui ne sont pas surclassés, i.e.

$$D = \{a_i | a_i \in Y_l \text{ et } \nexists a_k \in Y_l : a_k S_F a_i\}$$

2. former l'ensemble U des sommets qui sont surclassés entre eux,

$$U = \{a_i, a_k | a_i, a_k \in D \text{ et } \exists a_i S_f a_k \text{ ou } a_k S_f a_i\}$$

3. former l'ensemble B des sommets de U qui ne sont surclassés par aucun sommet de U ,

$$B = \{a_i | a_i \in U \text{ et } \nexists a_k \in U : a_k S_f a_i\}$$

4. construire l'ensemble A_l où $A_l = \{D \setminus U\} \cup B$

5. affecter le rang $l + 1$ à toutes les actions classées à la $l^{\text{ième}}$ étape, i.e.

$$r_1(a_i) = l + 1 : \forall a_i \in A_l$$

poser : $Y_{l+1} = Y_l - A_l$;

si $Y_{l+1} = \emptyset$, alors le classement est terminé ;

sinon poser $l = l + 1$, et aller à l'étape 4.1.

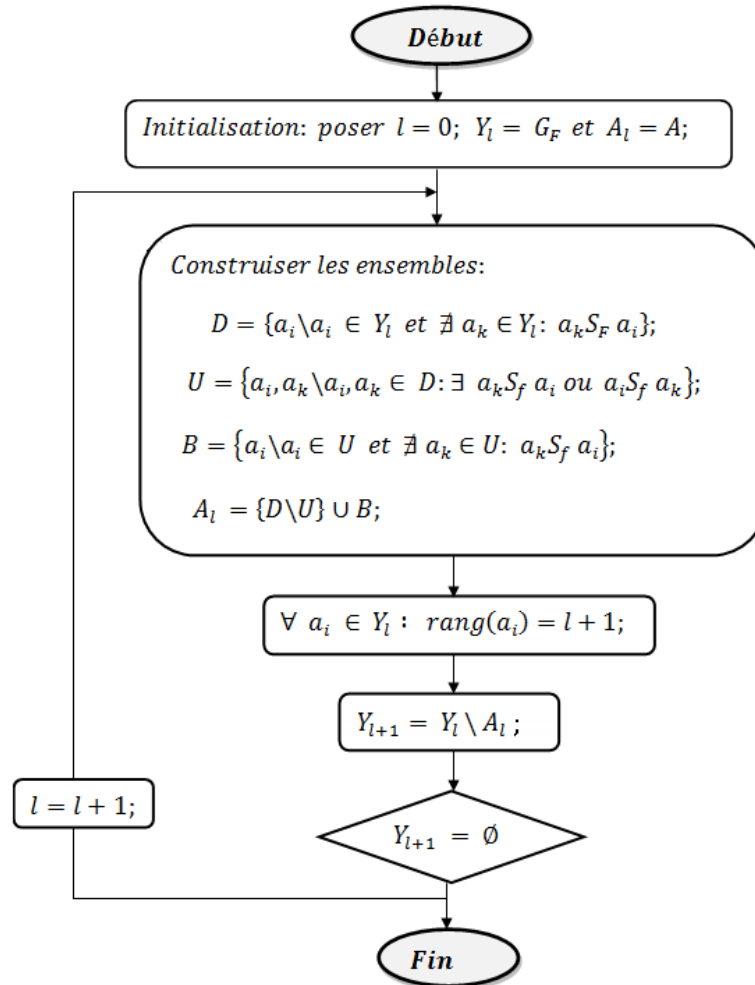


FIG. 2.1: Organigramme de l'algorithme de classement direct

2.2.3 La méthode ELECTRE III

Cette méthode entre dans le cadre de la problématique de rangement (P_γ) qui vise à classer les actions potentielles par ordre de préférence. ELECTRE III prend les mêmes principes que les deux versions précédentes, à savoir la définition de l'hypothèse de surclassement, et l'introduction de l'indice de concordance et celui de discordance.

Les nouveautés apportées par ELECTRE III sont l'utilisation du pseudo-critère et l'introduction d'un seuil d'indifférence et d'un seuil de préférence pour chacun des critères ; ces deux seuils permettent l'apparition d'une nouvelle notion : celle de la préférence faible. Un autre seuil est introduit pour la concrétisation de la notion de discordance ; c'est le seuil de veto.

La méthode ELECTRE III repose principalement sur la construction d'une relation de surclassement floue pour chaque couple d'actions ; cette relation est exprimée par le degré de crédibilité de surclassement, ce dernier est évalué à travers deux indices : l'indice de concordance et l'indice de discordance ; ensuite deux préclassements (préordres totaux) antagonistes sont élaborés après l'application de deux procédures de distillation : distillation ascendante et distillation descendante (première version), le croisement de ces deux préclassements aboutit à un classement final (préordre partiel).

Les étapes principales de la méthode ELECTRE III

Etape 1.1 évaluation de la matrice de concordance par critère :

pour chaque critère, évaluer la matrice de concordance C^j de coordonnées $\mathbb{R}^{n \times n}$ dont l'élément général est noté $c_j(a_i, a_k) : j \in J, a_i, a_k \in A$ et $i \neq k$ où :

$$c_j(a_i, a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_j(a_k) - g_j(a_i) \leq q_j \\ x & \text{si } q_j \leq g_j(a_k) - g_j(a_i) \leq p_j \\ 0 & \text{si } p_j \leq g_j(a_k) - g_j(a_i) \end{cases}$$

où

$$x = \frac{g_j(a_k) - g_j(a_i) + p_j}{p_j - q_j}$$

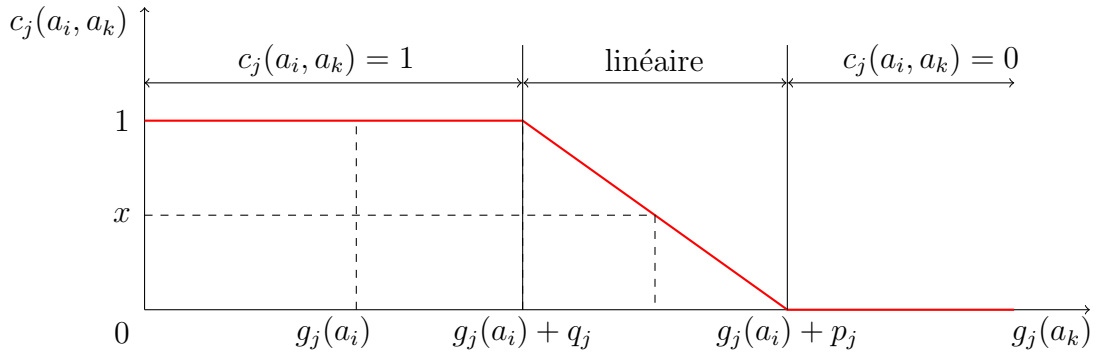


FIG. 2.2: Construction de l'indice de concordance par critères

Etape 1.2 évaluation de la matrice de concordance globale :

évaluer la matrice de concordance globale C de coordonnées $\mathbb{R}^{n \times n}$ dont l'élément général noté c_{ik} est défini par la formule suivante :

$$c_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^m w_j c_j(a_i, a_k)}{\sum_{j=1}^m w_j}$$

Etape 2 : évaluation de la matrice de discordance par critère :

pour chaque critère, évaluer la matrice de discordance par critère D^j de coordonnées $\mathbb{R}^{n \times n}$ dont l'élément général noté $d_j(a_i, a_k) : j \in J, a_i, a_k \in A$ et $i \neq k$ est défini comme suit :

$$d_j(a_i, a_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_j(a_k) - g_j(a_i) \leq p_j \\ x & \text{si } p_j \leq g_j(a_k) - g_j(a_i) \leq v_j \\ 1 & \text{si } v_j \leq g_j(a_k) - g_j(a_i) \end{cases}$$

où

$$x = \frac{g_j(a_k) - g_j(a_i) - p_j}{v_j - p_j}.$$

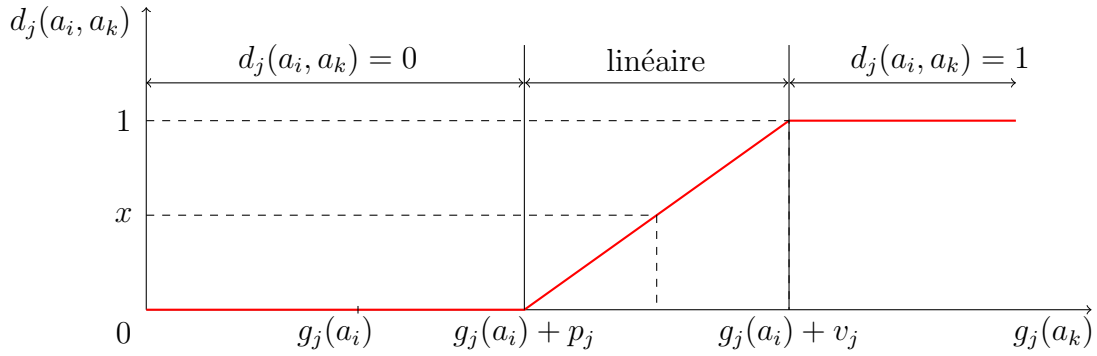


FIG. 2.3: Construction de l'indice de discordance

Etape 3 : évaluation de la matrice des degrés de crédibilité :

évaluer la matrice des degrés de crédibilité Δ de coordonnées $\mathbb{R}^{n \times n}$, dont l'élément général noté $\delta_{ik} : i, k \in I$ et $i \neq k$ est donné par la formule suivante :

$$\delta_{ik} = c_{ik} \prod_{j \in \bar{J}} \frac{1 - d_j(a_i, a_k)}{1 - c_{ik}}$$

où \bar{J} un sous-ensemble de J contient tous les indices des critères pour lesquels l'indice de discordance par critère est supérieur à l'indice de concordance globale, est donnée par :

$$\bar{J} = \{j | j \in J : d_j(a_i, a_k) > c_{ik}\}$$

Etape 4 : construction des deux préordres totaux :

1. pour construire le premier préordre total, on applique l'algorithme de classement : distillation descendante (première version), page 44 ;
2. concernant la construction du deuxième préordre total, on applique l'algorithme de classement : distillation ascendante, qui procède de la même manière que l'algorithme de distillation descendante (première version) sauf que les actions retenues sont celles de la qualification minimale (au lieu de calculer \bar{q} , on calcule \underline{q} où $\underline{q} = q^{\lambda+1}(a_i), a_i \in D_l$) et à la fin de l'application, on inverse le rang des actions.

Etape 5 : construction du préordre partiel final : voir la dernière étape de la méthode ELECTRE II, page 38.

Remarques :

1. S'il existe au moins un critère g_j pour lequel l'indice de discordance équivaut à l'unité, le degré de crédibilité sera nul, i.e.

$$\exists !j \in J : d_j(a_i, a_k) = 1 \iff \delta_{ik} = 0.$$

2. Si pour tout critère, l'indice de discordance est inférieur ou égal à l'indice de concordance, le degré de crédibilité est égal à l'indice de concordance, i.e.

$$\forall j \in J : d_j(a_i, a_k) \leq c_{ik} \iff \delta_{ik} = c_{ik}.$$

3. Lorsque l'indice de concordance globale est égal à l'unité, le degré de crédibilité est aussi égal à l'unité et tous les indices de discordance sont nuls, i.e

$$c_{ik} = 1 \iff \begin{cases} \delta_{ik} = 1 \\ \forall j \in J : d_j(a_i, a_k) = 0 \end{cases}$$

4. Le degré de crédibilité est, en fait, l'indice de concordance diminué par la force de l'indice de discordance.

Algorithme 4 : algorithme de classement : distillation descendante (première version)

Etape 0 : Initialisation, poser $n = 0$; $A_n = A$;

Etape $n, n \geq 0$: pour chaque distillation n , exécuter les étapes ci-dessous énumérées :

Etape $n.l$: poser $l = 0$; $D_l = A_n$;

1. calculer la valeur maximale qu'atteint le degré de crédibilité λ_l donnée par :

$$\lambda_l = \max \delta_{ik} \text{ où } a_i, a_k \in D_l, i \neq k$$

2. calculer le niveau de séparation exprimé par :

$$\lambda_{l+1} = \max \delta_{ik} \text{ avec } \begin{cases} \delta_{ik} < \lambda_l - s(\lambda_l) & a_i, a_k \in D_l \\ s(\lambda_l) = \alpha + \beta \lambda_l \end{cases}$$

3. pour chaque couple d'actions $a_i, a_k \in D_l$, établir la relation de surclassement $S^{\lambda_{l+1}}$ définie par :

$$a_i S^{\lambda_{l+1}} a_k \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_{ik} > \lambda_{l+1} \\ \delta_{ik} > \delta_{ki} + s(\delta_{ik}) \end{cases}$$

4. pour chaque action a_i , calculer :

- sa puissance $P^{\lambda_{l+1}}(a_i)$ où

$$P^{\lambda_{l+1}}(a_i) = |\{a_k \in D_l : a_i S^{\lambda_{l+1}} a_k\}|$$

- sa faiblesse $f^{\lambda_{l+1}}(a_i)$ où

$$f^{\lambda_{l+1}}(a_i) = |\{a_k \in D_l : a_k S^{\lambda_{l+1}} a_i\}|$$

- sa qualification $q^{\lambda_{l+1}}(a_i)$ où

$$q^{\lambda_{l+1}}(a_i) = P^{\lambda_{l+1}}(a_i) - f^{\lambda_{l+1}}(a_i)$$

5. déterminer la valeur de la qualification maximale \bar{q} exprimée par :

$$\bar{q} = \max q^{\lambda_{l+1}}(a_i), a_i \in D_l$$

6. construire l'ensemble des actions pour lesquelles la qualification maximale est atteinte, noté D_{l+1} , i.e.

$$D_{l+1} = \{a_i \in D_l | q^{\lambda_{l+1}}(a_i) = \bar{q}\}$$

7. si $D_{l+1} \neq 1$ et $\lambda_{l+1} \neq 0$ alors poser $l = l + 1$ et aller à l'étape 2
sinon construire les sous-ensembles A_{n+1} et C_{n+1} (C_{n+1} possède les actions à classer au niveau de chaque distillation n) où

$$C_{n+1} = D_{l+1} \text{ et } A_{n+1} = A_n \setminus C_{n+1}$$

8. si $A_{n+1} = \emptyset$ alors terminer ;
sinon poser $n = n + 1$ et aller à l'étape $n.l$.
-

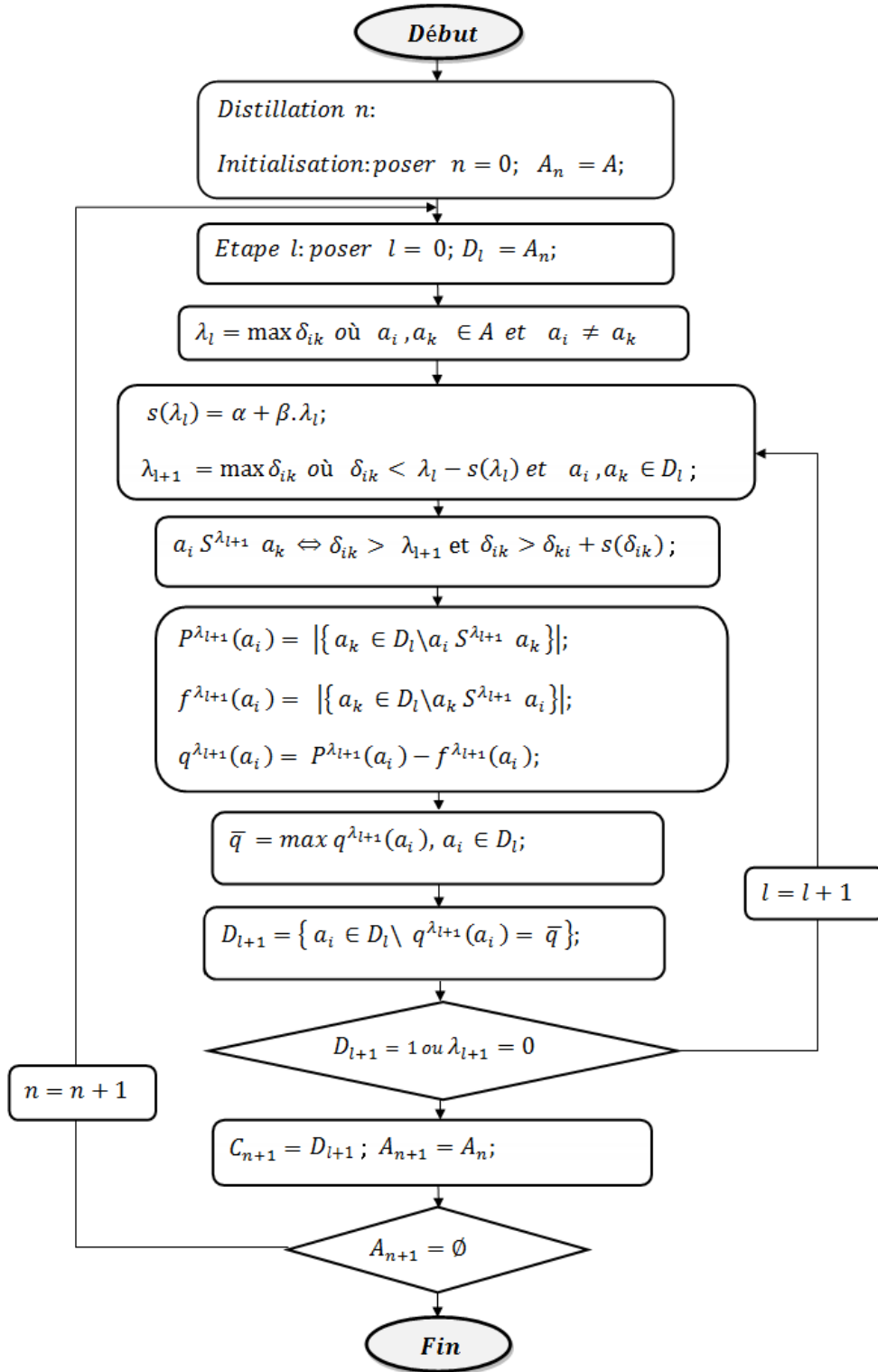


FIG. 2.4: Algorithme de classement : distillation descendante (première version)

2.2.4 La méthode ELECTRE IV

La méthode ELECTRE IV relève de la problématique de rangement (P_γ). Les nouveautés portées par cette méthode sont l'abondance de l'étape de pondération (il n'y a plus de poids attribué à chaque critère) et la non émission de l'hypothèse de surclassement qui rend inutiles les notions de concordance et de discordance.

A partir de la matrice d'évaluation, les actions sont comparées deux à deux, relativement à chaque critère; ensuite il s'agit de construire deux relations de surclassement : une relation de surclassement forte S_F et une relation de surclassement faible S_f .

A partir de ce moment-là, on applique deux procédures de distillation : distillation ascendante et distillation descendante (deuxième version) pour construire deux préordres partiels.

Les étapes principales de la méthode ELECTRE IV

Etape 1 : pour chaque couple d'actions $(a_i, a_k) : a_i, a_k \in A$ et $i \neq k$, calculer les indices suivants :

1. le nombre de critères pour lesquels a_i est strictement préférée à a_k ($a_i P a_k$), noté $m_p(a_i, a_k)$, i.e

$$m_p(a_i, a_k) = |\{j | j \in J : p_j < g_j(a_i) - g_j(a_k)\}|$$

2. le nombre de critères pour lesquels a_i est faiblement préférée à a_k ($a_i Q a_k$), noté $m_q(a_i, a_k)$, i.e.

$$m_q(a_i, a_k) = |\{j | j \in J : q_j < g_j(a_i) - g_j(a_k) \leq p_j\}|$$

3. le nombre de critères pour lesquels a_i et a_k sont indifférentes ($a_i I a_k$), noté $m_{in}(a_i, a_k)$, i.e.

$$m_{in}(a_i, a_k) = |\{j | j \in J : -q_j \leq g_j(a_i) - g_j(a_k) < q_j\}|$$

4. le nombre de critères pour lesquels a_i et a_k ont la même évaluation, noté $m_0(a_i, a_k)$, i.e.

$$m_0(a_i, a_k) = |\{j | j \in J : g_j(a_i) = g_j(a_k)\}|$$

Etape 2 : construction de la relation de surclassement :**1. définition des relations de surclassement emboîtées :**

pour chaque couple d'actions $(a_i, a_k) : a_i, a_k \in A$ et $i \neq k$, construire les relations de surclassement suivantes :

– **pseudo-dominance** S_p : a_i surclasse a_k avec *pseudo-dominance* si et seulement si :

- le nombre de critères pour lesquels a_i est strictement préférée à a_k est nul ;
- le nombre de critères pour lesquels a_k est faiblement préférée à a_i est au plus égal au nombre de critères pour lesquels a_i est faiblement ou strictement préférée à a_k .

$$a_i S_p a_k \iff \begin{cases} m_p(a_k, a_i) = 0 \\ m_q(a_k, a_i) \leq m_q(a_i, a_k) + m_p(a_i, a_k) \end{cases}$$

– **veto-dominance** S_v : a_i surclasse a_k avec *veto-dominance* si et seulement si :

- soit il n'existe aucun critère conduisant à préférer strictement a_k à a_i et la condition additionnelle requise pour qu'il y ait pseudo-dominance n'est pas vérifiée ;
- soit il existe un unique critère conduisant à préférer a_k à a_i et l'écart de leurs évaluations reste inférieur au seuil de veto et a_i est strictement préférée à a_k pour la moitié des critères au moins.

$$a_i S_v a_k \iff \begin{cases} \text{soit } m_p(a_k, a_i) = 0 \\ \text{soit } m_q(a_k, a_i) = 1 \text{ et } \forall j \in F : g(a_i) - g(a_k) \leq v_j \\ \text{et } m_p(a_i, a_k) \geq m/2 \end{cases}$$

2. construction des relations de surclassement : cette étape consiste à construire deux types de relations pour chaque couple d'actions $(a_i, a_k) : a_i, a_k \in A$ et $i \neq k$

– **la relation de surclassement forte** S_F dont la définition est la même que celle de la pseudo-dominance S_p , c'est-à-dire

$$a_i S_F a_k \iff a_i S_p a_k$$

– **la relation de surclassement faible** S_f dont la définition coïncide avec celle de la veto-dominance S_v , c'est-à-dire

$$a_i S_f a_k \iff a_i S_v a_k$$

Etape 3 : construction du premier préordre complet :

pour construire le premier préordre complet, on applique l'algorithme de classement : distillation descendante (deuxième version) voir la page 48.

Etape 4 : construction du deuxième préordre complet :

pour ce faire, on applique l'algorithme de classement, distillation descendante (deuxième version) sauf qu'au lieu de calculer \bar{q} , on calcule \underline{q} où $\underline{q} = q(a_i)$, $a_i \in D_l$ et à la fin de l'application, on inverse le rang des actions.

Etape 5 : construction du préordre partiel final : consulter la dernière étape de la méthode ELECTRE II, page 38.

Algorithme 5 : algorithme de classement, distillation descendante (deuxième version)

Etape 0 : Initialisation, poser $n = 1$; $A_n = A$;

Etape $n, n \geq 1$: pour chaque distillation n , exécuter les étapes ci-dessous énumérées :

Etape $n.l$: poser $l = 0$; $D_l = A_n$;

1. pour chaque action a_i , calculer :
 - sa puissance $P(a_i)$ où $P(a_i) = |\{a_k \in D_l : a_i S_F a_k\}|$;
 - sa faiblesse $f^{\lambda_{l+1}}(a_i)$ où $f(a_i) = |\{a_k \in D_l : a_i S_f a_k\}|$;
 - sa qualification $q(a_i)$ où $q(a_i) = P(a_i) - f(a_i)$;
2. déterminer la valeur de la qualification maximale \bar{q} exprimée par :

$$\bar{q} = \max q(a_i), a_i \in D_l$$

3. construire l'ensemble des actions pour lesquelles la qualification maximale est atteinte, noté D_{l+1} , i.e.

$$D_{l+1} = \{a_i \in D_l | q(a_i) = \bar{q}\}$$

4. si $|D_{l+1}| = 0$ alors construire les sous-ensembles A_{n+1} et C_{n+1} (C_{n+1} possède les actions à classer au niveau de chaque distillation n) où

$$C_{n+1} = D_{l+1} \text{ et } A_{n+1} = A_n \setminus C_{n+1}$$

sinon poser $l = l + 1$;

pour chaque action a_i , calculer :

- sa puissance $P(a_i)$ où $P(a_i) = |\{a_k \in D_l : a_i S_F a_k\}|$;
 - sa faiblesse $f^{\lambda_{l+1}}(a_i)$ où $f(a_i) = |\{a_k \in D_l : a_i S_f a_k\}|$;
 - sa qualification $q(a_i)$ où $q(a_i) = P(a_i) - f(a_i)$;
- aller à l'étape 2;

5. si $A_{n+1} = \emptyset$ alors terminer;
 - sinon poser $n = n + 1$ et aller à l'étape $n.l$.
-

2.2.5 La méthode ELECTRE IS

La méthode ELECTRE IS est une adaptation de ELECTRE I (problématique de choix P_α) à la logique floue, permettant d'utiliser des pseudo-critères.

Les étapes principales de la méthode ELECTRE IS

Etape 1 : évaluation des matrices de concordance :

1. évaluer la matrice de concordance par critère, cette matrice est évaluée de la même manière que celle de la méthode ELECTRE III, voir *page 40* ;
2. évaluer la matrice de concordance globale en procédant de la même manière que dans la méthode ELECTRE III, voir *page 41*.

Etape 2 : évaluation des matrices de discordance :

1. pour chaque critère, calculer la matrice de discordance D^j de coordonnées $\{0, 1\}^{n \times n}$ dont l'élément général noté $d_j(a_i, a_k)$ est défini comme suit :

$$d_j(a_i, a_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_j(a_k) - g_j(a_i) \leq v_j(a_i, a_k) - q_j(a_i, a_k) \frac{1-c_{ik}}{1-c} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

où c est le seuil de concordance : $0.5 \leq c < 1$;

2. calculer la matrice de discordance globale D de coordonnées $\{0, 1\}^{n \times n}$ dont l'élément général est noté $d_{ik} : i, k \in I$ et $i \neq k$ où

$$d_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall j \in J : d_j(a_i, a_k) = 0 ; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Etape 3 : construction de la relation de surclassement :

évaluer la matrice de surclassement S de coordonnées $\{0, 1\}^{n \times n}$ dont l'élément général noté $s_{ik} : i, k \in I$ et $i \neq k$ est défini comme suit :

$$s_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } c_{ik} \geq c \text{ et } d_{ik} = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Etape 4 : sélection du noyau : consulter la dernière étape de la méthode ELECTRE I, *page 35*.

2.2.6 La méthode ELECTRE TRI

La méthode ELECTRE TRI est conçue pour la problématique de $\text{tri}(P_\beta)$ dont le but est l'affectation de chaque action à une catégorie prédéfinie.

En premier lieu, cette méthode consiste à segmenter l'espace des critères en catégories : chaque catégorie est bornée inférieurement et supérieurement par deux actions de référence.

En deuxième lieu, cette méthode procède de la même façon que la méthode ELECTRE III jusqu'à l'obtention de la matrice des degrés de crédibilité. L'affectation des actions potentielles à une catégorie se fait selon deux procédures d'affectation distinctes, appelées optimiste et pessimiste : elles servent à comparer chaque action potentielle avec les actions de référence en commençant par la plus contraignante.

Soient :

- $B = \{b_1, \dots, b_p\}$ l'ensemble des actions de référence⁴ ;
- p le nombre d'actions de référence.

Les étapes principales de la méthode ELECTRE TRI

Etape 1 : évaluation de la matrice de concordance par critère :

pour chaque critère, évaluer la matrice de concordance C^j de coordonnées $\mathbb{R}^{n \times p}$ dont l'élément général est noté $c_j(a_i, b_k) : j \in J, a_i \in A$ et $b_k \in B$, où

$$c_j(a_i, b_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_j(b_k) - g_j(a_i) \leq q_j \\ x & \text{si } q_j \leq g_j(b_k) - g_j(a_i) \leq p_j \\ 0 & \text{si } p_j \leq g_j(b_k) - g_j(a_i) \end{cases}$$

où

$$x = \frac{g_j(a_i) - g_j(b_k) + p_j}{p_j - q_j}.$$

Etape 2 : évaluation de la matrice de concordance globale :

évaluer la matrice de concordance globale C de coordonnées $\mathbb{R}^{n \times p}$ dont l'élément

⁴Les actions de référence servent de limites à des catégories auxquelles les actions seront affectées.

général est noté $c(a_i, b_k)$, $a_i \in A$ et $b_k \in B$ où

$$c(a_i, b_k) = \frac{\sum_{j=1}^m w_j c_j(a_i, b_k)}{\sum_{j=1}^m w_j}$$

Etape 3 : évaluation de la matrice de discordance par critère :

pour chaque critère, évaluer la matrice de discordance D^j de coordonnées $\mathbb{R}^{n \times p}$ dont l'élément général est noté $d_j(a_i, b_k) : j \in J, a_i \in A$ et $b_k \in B$ où

$$d_j(a_i, b_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_j(b_k) - g_j(a_i) \leq p_j \\ x & \text{si } P_j \leq g_j(b_k) - g_j(a_i) \leq v_j \\ 1 & \text{si } v_j \leq g_j(b_k) - g_j(a_i) \end{cases}$$

où

$$x = \frac{g_j(b_k) - g_j(a_i) - p_j}{v_j - p_j}.$$

Etape 4 : évaluation de la matrice des degrés de crédibilité

évaluer la matrice des degrés de crédibilité Δ de coordonnées $\mathbb{R}^{n \times p}$ dont l'élément général est noté $\delta(a_i, b_k)$, $a_i \in A$ et $b_k \in B$ où

$$\delta(a_i, b_k) = c(a_i, b_k) \prod_{j \in J} \frac{1 - d_j(a_i, b_k)}{1 - c(a_i, b_k)}$$

et

$$\bar{J} = \{j | j \in J : d_j(a_i, b_k) > c(a_i, b_k)\}.$$

Etape 5 : construction de la relation de surclassement :

cette étape consiste à établir une relation de surclassement entre chaque action potentielle a_i et chaque action de référence b_k en suivant le chemin ci-dessous :

1. si $\delta(a_i, b_k) \geq \lambda$, alors aller à l'étape 2, sinon aller à l'étape 3 ;
2. si $\delta(b_k, a_i) \geq \lambda$, alors $a_i I b_k$, sinon $a_i P b_i$;
3. si $\delta(b_k, a_i) \geq \lambda$, alors $b_i P a_i$, sinon $a_i J b_k$.

où

- λ le seuil de coupe, en général, prend les valeurs 0.5, 0.6, 0.75 : $0.5 \leq \lambda < 1$;
- P est la relation de préférence, I la relation d'indifférence et J la relation d'incomparabilité.

Etape 6 : affectation des actions aux catégories : on en distingue deux procédures

1. **la procédure d'affectation pessimiste :** elle vise à pousser les actions dans les catégories les plus basses possibles ; si une action surclasse l'action de référence basse d'une catégorie, alors affecter cette action à cette catégorie, c'est-à-dire

$$a_i S b^k \Rightarrow a_i \in C^{k+1}$$

2. **la procédure d'affectation optimiste :** elle vise à pousser les actions dans les catégories les plus hautes possibles ; si une action de référence haute d'une catégorie est préférée à une action, alors affecter cette action à cette catégorie, c'est-à-dire

$$b^{k+1} S a_i \Rightarrow a_i \in C^{k+1}$$

2.3 Les méthodes PROMETHEE

Les méthodes PROMETHEE sont introduites par *J.P BRANS* en 1982. Elles reposent sur la définition de critères généralisés permettant une bonne modélisation des préférences du décideur et sur la construction d'une relation de surclassement évaluée. La différence principale entre ELECTRE et PROMETHEE est que cette dernière construit une relation de surclassement évaluée traduisant une intensité de préférence [7].

2.3.1 Le critère généralisé et la fonction de préférence

Lorsque on associe au critère g_j une fonction de préférence $p_j : A \times A \rightarrow [0, 1]$, on obtient un critère généralisé noté (g_j, p_j) . Cette fonction permet de modéliser les préférences du décideur selon le critère g_j ; elle exprime le résultat de la comparaison des actions deux à deux selon le critère g_j . Cette fonction pourrait être interprétée comme suit :

- $p_j(a_i, a_k) = 0$ si a_i n'est pas préférée à a_k ou si a_i et a_k sont indifférentes ;
- $p_j(a_i, a_k) \cong 0$ si a_i est faiblement préférée à a_k ;
- $p_j(a_i, a_k) \cong 1$ si a_i est fortement préférée à a_k ;
- $p_j(a_i, a_k) = 1$ si a_i est faiblement préférée à a_k .

2.3.2 Principes des méthodes PROMETHEE

Cette méthode peut être scindée en trois grandes phases.

1. **Détermination et choix de critères généralisés** : cette phase consiste à présenter chaque critère par un critère généralisé ; ce dernier doit être sélectionné à partir d'une famille de six types présentés dans *la figure 2.5*.

Chacun des types de critères généralisés est ainsi défini en fonction de un ou deux paramètres, à savoir :

- le seuil d'indifférence q_j ;
- le seuil de préférence p_j ;
- le seuil gaussien σ_j .

Pour guider le décideur dans le choix d'un critère généralisé, voici quelques conditions à prendre en considération :

- (a) les types I, II et IV sont adaptés à la modélisation des critères qualitatifs ;
- (b) les types III, V et VI sont adaptés à la modélisation des critères quantitatifs.

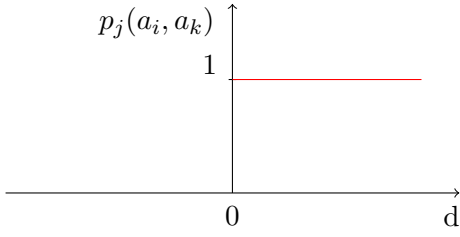
2. **Détermination d'une relation de surclassement** : cette phase consiste à déterminer une relation de surclassement par le biais d'un indice multicritère qui quantifiera l'intensité (degré) de préférence d'une action sur une autre.

3. **Evaluation des préférences** : l'évaluation de la préférence du décideur s'effectue à partir de trois flux :

- flux sortant : il exprime dans quelle mesure une action surclasse les autres actions,
- flux entrant : il exprime dans quelle mesure une action est surclassée par les autres,
- flux net : il représente la différence entre les flux sortants et les flux entrants.

Ces flux nous permettent de construire un préordre partiel dans le cas de la méthode PROMETHEE I et un préordre complet dans le cas de la méthode PROMETHEE II.

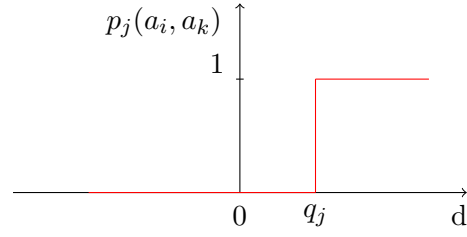
Soit $d = g_j(a_i) - g_j(a_k)$.



Type I : vrai critère

pas de paramètre à fixer

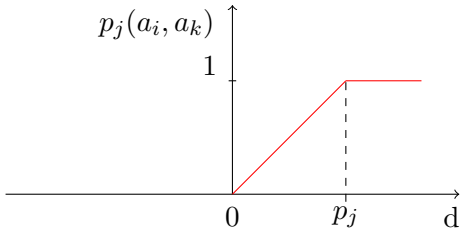
$$\begin{cases} p_j(a_i, a_k) = 0 & \text{si } d = 0 \\ p_j(a_i, a_k) = 1 & \text{si } d > 0. \end{cases}$$



Type II : quasi-critère

q_j seuil d'indifférence à fixer

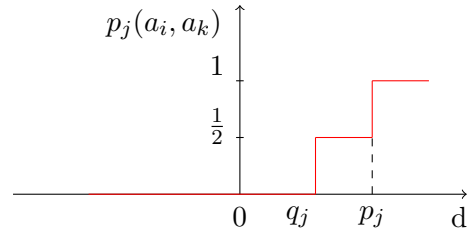
$$\begin{cases} p_j(a_i, a_k) = 0 & \text{si } d \leq q_j \\ p_j(a_i, a_k) = 1 & \text{si } d > q_j. \end{cases}$$



Type III : critère linéaire

p_j seuil de préférence à fixer

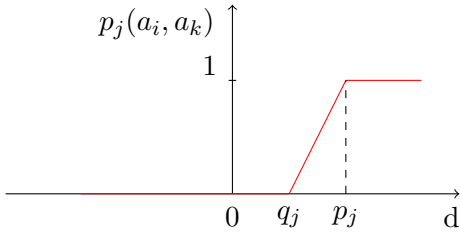
$$\begin{cases} p_j(a_i, a_k) = \frac{d}{p_j} & \text{si } d \leq p_j \\ p_j(a_i, a_k) = 1 & \text{si } d > p_j. \end{cases}$$



Type IV : pseudo-critère

q_j et p_j deux seuils à fixer

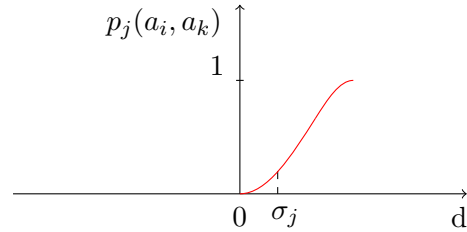
$$\begin{cases} p_j(a_i, a_k) = 0 & \text{si } d \leq q_j \\ p_j(a_i, a_k) = \frac{1}{2} & \text{si } q_j < d \leq p_j \\ p_j(a_i, a_k) = 1 & \text{si } d > p_j. \end{cases}$$



Type V : critère linéaire avec indifférence

q_j et p_j deux seuils à fixer

$$\begin{cases} p_j(a_i, a_k) = 0 & \text{si } d \leq q_j \\ p_j(a_i, a_k) = \frac{d-q_j}{p_j-q_j} & \text{si } q_j < d \leq p_j \\ p_j(a_i, a_k) = 1 & \text{si } d > p_j. \end{cases}$$



Type VI : critère gaussien

σ_j seuil gaussien à fixer

$$p_j(a_i, a_k) = 1 - e^{-\frac{d^2}{2\sigma_j^2}}.$$

FIG. 2.5: Types de critères généralisés

Les étapes principales des méthodes PROMETHEE

Etape 1 : présenter chaque critère $g_j : j = 1, \dots, m$ sous forme d'un critère généralisé $(g_j, p_j) : j = 1, \dots, m$.

Etape 2 : pour chaque couple d'actions (a_i, a_k) , calculer l'indice multicritère $\Pi(a_i, a_k)$ donné par :

$$\pi(a_i, a_k) = \frac{1}{w} \sum_{j=1}^m w_j p_j(a_i, a_k) \quad \text{où} \quad w = \sum_{j=1}^m w_j$$

Etape 3 : pour chaque action a_i , déterminer :

- le flux sortant $\phi^+(a_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{a_k \in A} \Pi(a_i, a_k)$;
- le flux entrant $\phi^-(a_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{a_k \in A} \Pi(a_k, a_i)$;
- le flux net $\phi(a_i) = \phi^+(a_i) - \phi^-(a_i)$.

Etape 4 (PROMETHEE I) : déterminer le préordre partiel (P, I, J) tels que :

- $a_i P a_k \Leftrightarrow \phi^+(a_i) \geq \phi^+(a_k)$ et $\phi^-(a_k) \geq \phi^-(a_i)$, avec au moins une inégalité stricte ;
- $a_i I a_k \Leftrightarrow \phi^+(a_i) = \phi^+(a_k)$ et $\phi^-(a_k) = \phi^-(a_i)$;
- $a_i J a_k \Leftrightarrow a_i \not P a_k, a_k \not P a_i, a_i \not I a_k$.

Etape 4 (PROMETHEE II) : déterminer le préordre complet (P, I) tels que :

- $a_i P a_k \Leftrightarrow \phi(a_i) > \phi(a_k)$;
- $a_i I a_k \Leftrightarrow \phi(a_i) = \phi(a_k)$.

Etape 5 : présenter les résultats en appliquant l'algorithme d'obtention des niveaux d'un graphe sans circuit.

Remarques

- $\pi(a_i, a_k) \approx 0$ si la préférence globale de a_i sur a_k est faible ;
- $\pi(a_i, a_k) \approx 1$ si la préférence globale de a_i sur a_k est forte.

Soient $G = (X, U)$ le graphe associé au préordre obtenue et I l'ensemble des indices des sommets du graphe G .

Algorithme 6 : algorithme d'obtention des niveaux d'un graphe sans circuit [12]

Etape 1 : évaluer la matrice L de coordonnées $\mathbb{N}^{n \times n}$ dont l'élément général est noté $l[i, j]$ qui désigne la cardinalité du chemin maximal entre chaque couple de sommets (x_i, x_j) où $i \neq j$ et $i, j \in I$;

Etape 2 : évaluer le tableau L_{max} de coordonnées \mathbb{N}^n dont l'élément général est noté $l_{max}[i]$ qui signifie la cardinalité du chemin maximal issu du sommet x_i où

$$l_{max}[i] = \max_{j=1, \dots, n} \{l[i, j]\}$$

Etape 3 : ranger les éléments du tableau L_{max} selon l'ordre décroissant ;

Etape 4 : ranger les sommets selon l'ordre décroissant du tableau L_{max} dans un tableau noté X_{ord} ;

Etape 5 : construire les sous-ensembles $X_i : i = 0, \dots, n - 1$ où

$$X_i = \{X_{ord}[k] | L_{max}[k] = i : k = 1, \dots, n\}$$

X_i représente les sommets de niveau d'ordre i .

2.4 La méthode ADAM

La méthode ADAM est introduite par *M. ABBAS* en 1999 ; elle vise à ranger les actions potentielles de la *meilleure* action à la *moins bonne*.

La méthode ADAM exploite les notions introduites dans la méthode ELECTRE, à savoir les notions d'indice de concordance et d'indice de discordance et utilise aussi la notion du préordre total introduite dans la méthode PROMETHEE. D'autre part, cette méthode porte deux nouvelles notions : le poids flou associé aux différents critères et le degré de surclassement flou [2].

Les différentes étapes de la méthode ADAM

Etape 1 : évaluation de la matrice de concordance

évaluer la matrice de concordance C de coordonnées $\mathbb{R}^{n \times n}$ dont l'élément général noté c_{ik} représente la proportion des poids des critères pour lesquels l'action a_i est préférée à l'action a_k , exprimé par :

$$c_{ik} = \frac{1}{p} \sum_{j \in J^+} w_j$$

où

$$\begin{aligned} - J^+ &= \{j \in J \mid g_j(a_i) > g(a_k)\}; \\ - p &= \sum_{j \in J} w_j. \end{aligned}$$

Etape 2 : évaluation de la matrice de discordance

évaluer la matrice de discordance D de coordonnées $\mathbb{R}^{n \times n}$ dont l'élément général est noté d_{ik} où

$$d_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{si } J^-(a_i, a_k) = \emptyset \\ \frac{1}{\delta_{max}} \max_{j \in J^-(a_i, a_k)} \{g_j(a_k) - g_j(a_i)\} & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\delta_{max} = \max\{g_j(a_i) - g_j(a_k)\} : j \in J \text{ et } a_i, a_k \in A$.

Etape 3 : construction de la relation de surclassement

1. pour chaque couple d'actions (a_i, a_k) , établir la relation de surclassement S de la manière suivante :

$$a_i S a_k \iff \begin{cases} c_{ik} \geq c \\ d_{ik} \leq d \end{cases}$$

où c est le seuil de concordance et d le seuil de discordance.

2. associer à chaque couple d'actions (a_i, a_k) un degré de surclassement noté $d_s(a_i, a_k)$ défini par :

$$d_s(a_i, a_k) = \frac{c_{ik} - d_{ik}}{n}.$$

Etape 4 : rangement des actions

cette étape consiste à ranger les actions selon l'ordre décroissant des rangs ; pour cela, on définit pour chaque action a_i :

- le flux sortant $R^+(a_i) = \sum_{a_k \in A} d_s(a_i, a_k)$;
- le flux entrant $R^-(a_i) = \sum_{a_k \in A} d_s(a_k, a_i)$;
- le flux net $R(a_i) = R^+(a_i) - R^-(a_i)$.

Pour les exemples d'application des différentes méthodes nous proposons au lecteur intéressé les références : [26], [8], [6], [29], [3], [14], [27] et [28].

3

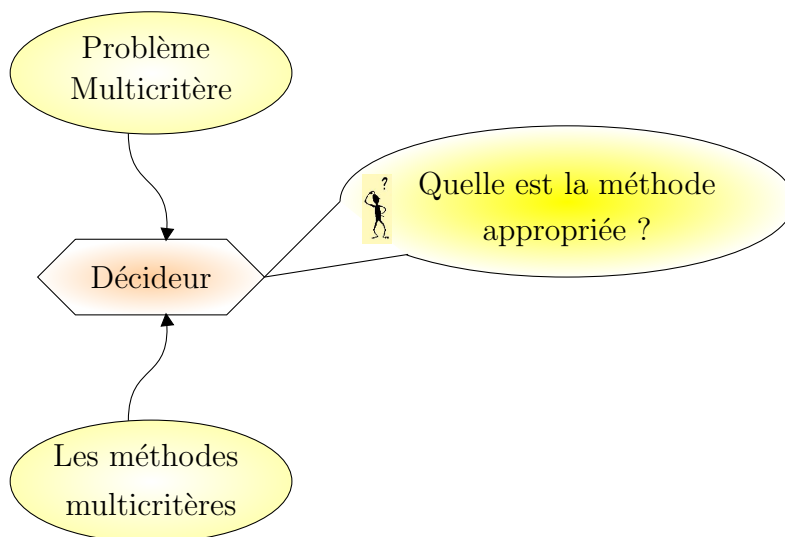
Choix d'une méthode multicritère

On peut recenser un très grand nombre de méthodes multicritères, ce qui peut être vu comme une force ou une faiblesse [17]. La diversité des problèmes de décision et le nombre important de méthodes multicritères génèrent un autre problème, celui du choix de la méthode à appliquer pour un problème bien spécifique.

Dans la plupart des cas, le choix de la méthode à appliquer se fait de manière assez arbitraire : on opte pour celle maîtrisée par l'analyste, celle disponible sous forme d'un logiciel. Par conséquent la manière de structurer et de modéliser une situation décisionnelle est conditionnée par la méthode à appliquer. Ce comportement est traduit dans la pratique par l'adaptation de la situation à la méthode. Mais ceci à notre avis n'est pas productif, alors ***il est important de savoir quelle est la méthode à appliquer pour un problème bien spécifique***. En plus, plusieurs applications ont montré que différentes méthodes sont incapables de manipuler correctement certaines situations. Par exemple, nous mentionnons le travail de *Wenstop et Carlsen* : ils ont appliqué deux méthodes différentes pour classer 542 projets (hydro-électricité) en Norvège, le résultat des deux méthodes étant antagonistes (deux ordres opposés).

L'étude des méthodes multicritères indique que chaque méthode a ses prétentions et ses hypothèses ; ces dernières, à notre avis, sont les frontières au delà desquelles une telle méthode ne peut pas être employée. Cependant, chaque méthode multicritère

possède ses avantages et ses inconvénients de telle sorte qu'une méthode puisse être appliquée dans un type particulier de problèmes mais pas dans d'autres.



3.1 Etat de l'art sur le problème du choix d'une méthode multicritère

Comparativement au nombre considérable de travaux de recherche accomplis dans le domaine de l'analyse multicritère, il y a relativement peu d'études qui ont été entreprises pour le problème du choix d'une méthode multicritère [20].

La nécessité de comparer les différentes méthodes multicritères et l'importance du problème de choix d'une méthode sont reconnues pour la première fois par *MacCrimmon en 1973*. Ce dernier a proposé une taxonomie (classification) des méthodes multicritères qui sont alors groupées selon leurs structures (multiattribut ou multiobjective) et selon la nature et le type de l'information à obtenir auprès du décideur. L'auteur a également développé un diagramme de spécification sous forme d'un arbre ¹ permettant d'assister le décideur lors du choix de la méthode [25].

Hwang et Masud en 1979 ont développé une classification (sous forme d'un diagramme en arbre similaire à celui de MacCrimmon) de vingt méthodes multiobjectifs

¹ Une arbre un graphe non orienté connexe sans cycle.

en six groupes, en se basant sur le moment où l'information préférentielle est articulée (a priori, progressive ou a posteriori) et le type de l'information (cardinale ou ordinale ; explicite ou implicite) [19].

Le modèle de choix de *Gershon en 1981* se base sur 27 critères de sélection (prise en compte de critères qualitatifs ou quantitatifs, prise de décision de groupe, nombre d'objectifs, nombre de contraintes, ...) Le modèle construit un tableau de performance où les lignes correspondent aux différents critères et les colonnes aux différentes méthodes disponibles. Ensuite ces méthodes sont évaluées par rapport aux différents critères. Enfin la technique de Compromise Programming est appliquée sur ce tableau pour identifier la méthode appropriée au problème posé [15].

Gershon et Duckstein en 1984 ont utilisé la technique du Compromise Programming afin d'identifier la méthode appropriée. Le problème de choix est alors considéré comme un problème multicritère où les techniques multicritères constituent les actions que l'on évalue sur la base d'un ensemble de critères relatifs aux caractéristiques du problème et des techniques. Cette procédure de sélection a été appliquée à un problème de planification d'un bassin de rivière (comme cas discret) et à un problème de planification de ressources minières (comme cas continu). Notons que cette technique bien qu'elle ait été appliquée à deux problèmes à référence spatiale, elle ne s'adresse pas particulièrement aux problèmes décisionnels à référence spatiale [16].

Teghem et al. en 1989 proposent un Système Informatisé d'Aide à la Décision (SIAD), nommé **Choice**, pour le choix de la méthode à utiliser dans un problème particulier. En premier lieu, les auteurs identifient les caractéristiques principales de différentes méthodes et développent les différentes règles de sélection. Ensuite ils utilisent ces règles pour comparer plusieurs méthodes connues. Enfin les auteurs traduisent les règles précédentes sous forme d'une arborescence de décision. Ce dernier a été utilisé comme base pour le développement du SIAD [47].

Teclé et Duckstein en 1992 ont proposé une formulation multicritère du problème du choix de la méthode à utiliser dans un problème de gestion de ressources forestières. La procédure commence par identifier un ensemble de techniques susceptibles d'être utilisées et les évaluer par rapport à deux ensembles de critères :

- critères relatifs au problème de décision ;
- critères relatifs aux techniques (méthodes).

Les 15 techniques identifiées sont alors évaluées en terme de 24 critères et rangées

selon leur pertinence pour le problème considéré [46].

Ozernoy en 1992 propose un Système Informatisé d'Aide à la Décision (SIAD) permet d'aider le décideur dans le choix d'une méthode multicritère à son problème [30].

Une classification des méthodes discrètes a été proposée par *Hwang et Yoon en 1995*. Treize (13) méthodes discrètes sont alors classées en six groupes selon le type et la nature de l'information à obtenir du décideur. Les auteurs ont présenté également un ensemble de règles de choix sous forme d'un arbre pour identifier la ou les méthodes les plus appropriées [50].

Guitouni et Martel en 1998 proposent un cadre conceptuel qui a servi de base pour l'articulation d'un certain nombre de règles générales pour le choix de la méthode multicritère. Ils ont présenté également une étude comparative de plusieurs méthodes connues. Selon les auteurs, ce travail constitue la première étape d'une approche méthodologique pour le choix d'une méthode multicritère [17].

Caillet en 2003 a présenté une étude comparative de nombreuses méthodes multicritères discrètes (qui sont ELECTRE I, III et IV, PROMETHEE I et II, MAUT, AHP, MACBETH et la somme pondérée) dans le but d'en choisir une en vue d'une application en analyse de cycle de vie. Pour ce faire, l'auteur a utilisé les logiciels de ces différentes méthodes à des données réelles. L'auteur a conclu son rapport par remarquer que chaque problème a une méthode adaptée et que, s'il fallait choisir une méthode applicable à tout, ce serait la méthode PROMETHEE. Il justifie ce choix par la facilité de son logiciel [8].

3.2 Approches pour traiter le problème du choix d'une méthode multicritère

Dans la littérature, nous distinguons quatre approches pour traiter le problème du choix d'une méthode multicritère :

1. **Choix ad hoc ou non assisté** : la première approche est de loin la plus utilisée en pratique; elle se base simplement sur le principe que le choix est guidé par les connaissances, souvent limitées, du décideur dans le domaine

de l'analyse multicritère. Cependant *Ozernoy* [30] affirme que le problème du choix de la méthode appropriée ne peut être résolu de manière adéquate qu'à travers une formalisation appropriée.

2. **utilisation d'un arbre de classification** : l'approche basée sur un arbre de classification vient en second lieu du point de vue utilisation ; elle se base sur le développement d'une structure hiérarchique où chaque nœud représente une question, un fait ou une recommandation (i.e. une méthode ou un groupe de méthodes) ; cette approche a été adoptée par plusieurs auteurs dont *Yoon et Hwang* [50] et *Laaribi et al.*[21].
3. **Utilisation d'une méthode multicritère** : l'approche basée sur l'utilisation d'une méthode multicritère a été adoptée par quelques auteurs (*Gershon* [15], *Gershon et Duckstein* [16], *Teclé et Duckstein* [46], *Al-Shemeri et al.*, 1997). Dans cette approche, le problème de choix est formulé comme un problème multicritère où les actions sont les différentes méthodes multicritères et les critères sont les différents facteurs de sélection. La critique principale qu'on peut adresser à cette approche est relative au choix de la méthode à utiliser pour évaluer les autres méthodes. Afin d'éviter le cercle vicieux, plusieurs auteurs (*Guitouni et al.*, *Laaribi*[20]) ont déconseillé cette approche. Par exemple, *Guitouni et al.* remarquent que l'utilisation d'une approche multicritère pour le problème de choix demandera l'évaluation des différentes méthodes multicritères (en tant qu'actions potentielles) par rapport aux critères de sélection, ce qui n'est pas une tâche facile.
4. **Utilisation d'un Système Informatisé d'Aide à la Décision (SIAD)** : l'approche basée sur l'utilisation d'un SIAD est la plus récente du point de vue utilisation pratique. Certains chercheurs pensent qu'en aucun cas un tel système n'est justifié, étant donné que le problème du choix de la méthode la plus appropriée peut être résolu de manière simple par un arbre de classification ; d'autres pensent que le problème de choix est assez complexe pour qu'il soit traité par un SIAD. Néanmoins, la nécessité d'un SIAD pour une analyse systématique du problème de choix a été reconnue depuis la fin des années 1980. Parmi les travaux basés sur l'utilisation d'un SIAD, celui de *Ozernoy* [30]. Plus récemment, *Poh* [32], *Lu et al.*[24] et *Lu et al.* [23].

3.3 Nature du problème de choix d'une méthode multicritère

Le problème de choix d'une méthode multicritère consiste à sélectionner la méthode la plus appropriée pour faire face à un problème multicritère parmi un ensemble fini de méthodes multicritères, donc il est clair que nous sommes devant une situation décisionnelle qu'on peut définir par :

1. sa problématique : cette situation décisionnelle est posée selon la problématique de choix ;
2. l'ensemble des actions : c'est l'ensemble des méthodes multicritères considérée, cet ensemble est un ensemble réduit d'éléments (méthodes) donc il est défini en *extension* ;
3. critères : nous avons pris en considération tous les éléments qui peuvent servir à caractériser les méthodes multicritères et le problème décisionnel.

Par ailleurs, nous partageons l'avis de plusieurs auteurs (*Gershon, Teclé, Duckstein et Guitouni*) qui considèrent que le choix d'une méthode multicritère pour un problème donné est un problème multicritère puisque les critères utilisés pour la sélection sont conflictuels par nature. Nous indiquons aussi que le problème du choix de *la meilleure* méthode ne peut être résolu ni par une bonne structuration du problème, ni par le développement d'une méthode parfaite. Une formalisation rigoureuse et systématique du problème de choix s'avère donc nécessaire.

3.4 Importance du choix d'une méthode multicritère

Le choix d'une méthode multicritère est une étape cruciale dans toute démarche d'aide multicritère à la décision. Ce constat se confirme par :

- le cadre économique où les problèmes traités sont souvent de nature complexe et ont des enjeux et des impacts plus importants ;
- la grande diversité des méthodes disponibles de complexité différente ;
- l'existence de différents types de problèmes ;
- la disponibilité des données relatives au problème multicritère ;
- différentes méthodes peuvent paraître adéquates pour un problème particulier mettant le décideur face au problème du choix de la méthode la plus appropriée ;

- il n'existe aucune méthode qui puisse être appliquée à tous les problèmes multicritères.

Ozernoy (1992) va plus loin en remarquant que le choix de *la meilleure* méthode est un problème aussi important que celui de la structuration de la situation décisionnelle [30].

Tous ces éléments montrent la nécessité d'une approche formelle pour traiter le problème de choix d'une méthode multicritère.

3.5 Règles générales pour aider au choix d'une méthode multicritère

Quelques règles ont été proposées par *Guitouni et Martel*[17] pour aider au choix d'une méthode appropriée à un problème multicritère, ces règles sont basées sur quelques aspects :

1. **La partie donnée** : cette partie concerne la nature des informations à introduire pour qu'une telle méthode puisse être manipulée ; les méthodes diffèrent entre elles au niveau :
 - (a) du type de la problématique : le type de la problématique spécifiée par le décideur constitue un élément intéressant pour départager entre les méthodes multicritères ;
 - (b) de l'ensemble des actions : la description du problème conduit à définir l'ensemble des actions ; la cardinalité de cet ensemble constitue un paramètre important pour discriminer entre les méthodes multicritères. Cette caractéristique peut prendre deux valeurs :
 - finie lorsque la méthode suppose un ensemble limité d'actions ;
 - infinie lorsque la méthode est appropriée pour un très grand nombre d'actions.

Le premier cas correspond généralement aux méthodes discrètes, le deuxième plutôt aux méthodes continues qui sont utilisables lorsque l'ensemble des actions est défini de façon indirecte via un ensemble de contraintes explicites.

- (c) de la nature des critères : il est possible d'utiliser un vrai critère, un quasi-critère, un pseudo-critère, etc. Cependant, pas toutes les méthodes peuvent manipuler un vrai critère ou un pseudo-critère ; il est clair que

si le décideur exige des seuils pour quelques critères, il est approprié de penser à une méthode multicritère conçue pour un tel type de critère.

- (d) de l'incertitude des données : ces données peuvent être exprimées de manière certaine (déterministe) ou incertaine (non-déterministe) ou mixte.
- (e) de l'importance relative aux critères : dans la pratique, certains décideurs ne peuvent pas assigner les coefficients d'importance aux critères, à ce niveau, il est intéressant de prendre les méthodes qui excluent l'étape de pondération des critères.

2. Le type de résultat fourni par la méthode : chaque méthode est adressée à une problématique de décision spécifique. Ainsi le résultat de chaque méthode prend l'une des formes suivantes :

- (a) un sous-ensemble d'actions non dominées ;
- (b) un préordre complet ou partiel ;
- (c) une affectation partielle.

Voici quelques règles à prendre en considération pour choisir la méthode appropriée pour un problème multicritère particulier :

Règle 1 : elle consiste à déterminer le nombre de décideurs, s'il existe plusieurs décideurs, alors l'idée est de prendre en considération les méthodes de décision par groupe ;

Règle 2 : elle concerne le moment d'articulation des préférences ; la distinction de base entre les méthodes multicritères s'effectue à partir de l'articulation a priori, l'articulation progressive et l'articulation a posteriori des préférences, si le décideur impose ses préférences à la fin du processus décisionnel (c'est-à-dire le décideur choisit une action parmi un sous-ensemble des actions les plus satisfaisantes proposées par l'analyste) donc nous sommes censés de prendre les méthodes d'articulation a posteriori.

Règle 3 : elle consiste à déterminer les méthodes conçues pour une telle problématique définie par le décideur ; s'il s'agit de la problématique de rangement (P_γ), alors la méthode appropriée est celle du rangement et vice versa ;

Règle 4 : elle concerne l'information disponible et qui sera traitée adéquatement par la méthode ; il s'agit de choisir une méthode multicritère conforme correctement à la qualité et à la quantité des données ; ce sont des facteurs principaux dans le choix d'une méthode ;

Règle 5 : elle concerne la pondération des critères; si le décideur ne peut pas déterminer le poids relatif aux critères, alors beaucoup de méthodes ne seront pas prises en considération ;

Règle 6 : elle concerne les hypothèses sur lesquelles repose la méthode ; toute méthode a un ensemble d'hypothèses qui doivent être vérifiées pour pouvoir l'appliquer ; cette règle indique que si ces hypothèses ne sont pas acceptées, on devrait opter pour une autre méthode.

3.6 Comment choisir une méthode multicritère

Pour choisir une méthode multicritère, nous considérons quelques points relatifs au problème multicritère et aux méthodes :

1. Les éléments qui caractérisent le problème décisionnel, à savoir :
 - le type de la problématique ;
 - la nature et le type de l'information à obtenir auprès du décideur.
 - le résultat que nous souhaitons obtenir.
2. Les caractéristiques des méthodes multicritères.

Démarche générale proposée

1. Caractériser tous les éléments qui composent le problème de décision multicritère, à savoir :
 - le type de la problématique (choix, tri ou rangement) ;
 - le type des critères (vrai critère, pseudo-critère ou critère généralisé) ;
 - le poids des critères (poids net ou poids flou) ;
 - le résultat que nous souhaitons obtenir.
2. Caractériser les conditions d'application des méthodes multicritères : pour établir ces caractéristiques, nous nous sommes basés sur la littérature disponible.
3. Sélectionner une méthode multicritère dans laquelle ces conditions d'application sont appropriées aux caractéristiques du problème à traiter.

De ce fait, la sélection de la méthode la plus appropriée pour un problème donné peut être considérée comme une recherche des meilleurs arguments supportant la correspondance entre :

1. les caractéristiques des problèmes multicritères ;
2. les caractéristiques des méthodes multicritères.

L'objectif est donc de construire un système qui permettra au décideur de relier ces éléments et d'établir cette correspondance.

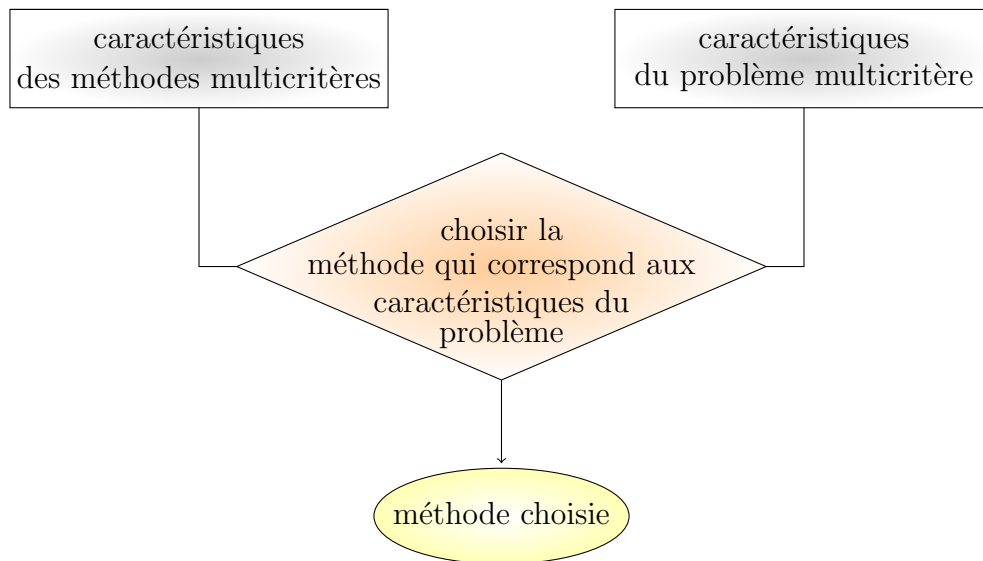


FIG. 3.1: Démarche générale proposée

Nous considérons qu'une méthode multicritère est la plus appropriée si [18] :

- Le décideur accepte les hypothèses et la rationalité derrière la méthode.
- Le décideur peut fournir, sans un effort cognitif important, les informations nécessaires à l'application de la méthode.
- L'application de la méthode produit le résultat souhaité par le décideur.

3.6.1 Les éléments qui caractérisent un problème multicritère

Dans cette section, nous présentons les différentes caractéristiques des problèmes de décision que nous jugeons pertinents pour le choix d'une méthode multicritère à appliquer dans un problème donné.

1. **Identification de la problématique** : tout problème multicritère peut être posé selon l'une des problématiques suivantes :

- problématique de choix (P_α);
- problématique de tri (P_δ);
- problématique de rangement (P_γ).

Une fois la problématique est cernée, il est important de demander au décideur le résultat qu'il souhaite obtenir ; ce résultat peut prendre plusieurs formes en fonction de la problématique définie :

- Une seule action non dominée qui soit la meilleure possible, un sous-ensemble contenant les actions les plus satisfaisantes parmi lesquelles le décideur est appelé à choisir la meilleure.

Selon les multiples cas rapportés dans la littérature, le deuxième cas est le plus fréquent dans un contexte pratique [35].

- Une affectation partielle dans le cas de la problématique de tri.
- Un rangement partiel ou complet dans le cas de la problématique de rangement.

2. Les actions : comme nous l'avons déjà mentionné dans le chapitre 1, l'ensemble des actions peut être spécifié de deux manières différentes :

- spécification explicite ;
- spécification implicite.

Une définition explicite demande généralement moins de calcul et moins d'effort cognitif de la part du décideur.

3. Les critères :

(a) Nature de l'information à obtenir sur les critères : l'information sur les critères peut être de différents types :

- cardinal (ou quantitatif) par exemple le coût de la construction de l'autoroute, la superficie de la zone de construction ;
- ordinal (ou qualitatif) par exemple le niveau de service d'une ligne de métro, le niveau d'intégration de l'ouvrage dans le paysage ;
- mixte.

(b) Le type de critère : le type de critère est très lié à la perception qu'en fait le décideur :

- si le décideur n'introduit aucun seuil, alors on aura une structure de préordre total (modèle traditionnel), il s'agit de vrai critère ;
- si le décideur introduit un seuil d'indifférence q_j , on parle de quasi-critère ;
- si le décideur introduit un seuil d'indifférence q_j et un seuil de préférence p_j (modèle à deux seuils), on parle alors de pseudo-critère.

- (c) **La pondération des critères** : il est intéressant de demander au décideur s'il y a une possibilité d'attribuer les différents poids aux critères.
4. **Type de l'information** : les données disponibles peuvent être déterministes (certaines) ou non déterministes (incertaines). Nous pouvons distinguer deux types de non déterminisme : probabiliste et flou. Il se peut également qu'un problème de décision fasse intervenir de l'information déterministe et de l'information non déterministe. Nous pouvons donc distinguer quatre catégories :
- information de type déterministe, par exemple : la superficie d'une zone ;
 - information de type probabiliste, par exemple : l'information sur les précipitations ;
 - information de type flou, par exemple : le risque de crue peut être qualifié par des termes linguistiques de type : faible, moyen, élevé ;
 - information mixte, par exemple : la probabilité qu'un glissement de terrain *important* se produise dans une zone donnée est de 50%.

3.6.2 Stratégie pour aider le décideur lors de la caractérisation du problème multicritère

La caractérisation d'une situation de décision particulière est accomplie par une série de questions qui seront posées au décideur successivement jusqu'à l'identification d'une méthode appropriée à son problème. En se basant sur les caractéristiques générales des problèmes de décision, nous avons établi une liste de questions :

- Quelle est la problématique de votre problème ?
- Quel résultat voulez-vous obtenir ?
- Quelle est la nature de l'ensemble des actions ?
- Le problème nécessite-t-il la définition de contraintes ?
- Quels sont les différents critères ?
- Quel est le nombre de critères ?
- Quelle est l'importance relative aux différents critères ?
- Voulez-vous utiliser des seuils aux différents critères ?

Ces questions seront posées au décideur afin de caractériser le problème considéré ; pour réduire l'effort cognitif du décideur, chaque question est accompagnée d'une liste de réponses possibles.

Hypothèses

Comme notre étude est basée sur quelques méthodes de surclassement, nous considérons quelques points relatifs au problème multicritère :

1. le nombre de décideurs est limité à un ;
2. le moment d'articulation est a posteriori ;
3. l'ensemble des actions est défini en extension ;
4. le type d'information est déterministe ou flou.

Une fois le problème est caractérisé, nous récapitulons ces caractéristiques dans le tableau ci-dessous :

		critères				
		g_1	\dots	g_j	\dots	g_m
actions	a_1	$g_1(a_1)$	\dots	$g_j(a_1)$	\dots	$g_m(a_1)$
	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
	a_i	$g_1(a_i)$	\dots	$g_j(a_i)$	\dots	$g_m(a_i)$
	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
	a_n	$g_1(a_n)$	\dots	$g_j(a_n)$	\dots	$g_m(a_n)$
poids	w_j	w_1	\dots	w_j	\dots	w_m
seuils	q_j	q_1	\dots	q_j	\dots	q_m
	p_j	p_1	\dots	p_j	\dots	p_m
	v_j	v_1	\dots	v_j	\dots	v_m

TAB. 3.1: Matrice des données relatives au problème multicritère

Plusieurs méthodes ont été élaborées pour faire face aux problèmes multicritères. Dans le cadre de notre travail, nous nous sommes concentrés sur les méthodes de surclassement, principalement, les méthodes ELECTRE, PROMETHEE et ADAM.

3.6.3 Les éléments qui caractérisent les méthodes de surclassement

Nous présentons ici, les éléments permettant de différencier les méthodes de surclassement.

1. **La nature de la problématique** : chacune des méthodes de surclassement considérée est conçue pour l'une des problématiques : choix (P_α), tri(P_δ) ou rangement(P_γ).
2. **Le type de critères à utiliser** : chacune des méthodes considérées utilise l'un des critères ci-dessous énumérés :
 - vrai critère ;
 - pseudo-critère ;
 - critère généralisé.
3. **Le poids** : certaines méthodes
 - exigent la pondération des critères ; cette étape consiste à attribuer l'importance (poids) relative aux différents critères, ce poids peut être flou ou net ;
 - excluent la pondération des critères.
4. **Le seuil** : chacune des méthodes considérées prend en considération un ou plusieurs seuils, à savoir :
 - le seuil de concordance c ;
 - le seuil de discordance d ;
 - le seuil d'indifférence q_j ;
 - le seuil de préférence p_j ;
 - le seuil de veto v_j ;
5. **Le type de résultat** : le résultat fourni par chaque méthode de surclassement prend l'une des formes suivantes :
 - un sous-ensemble d'actions (un noyau) ;
 - une affectation partielle ;
 - un préordre partiel ;
 - un préordre complet.

3.6.4 Etude comparative des méthodes de surclassement

Les méthodes de surclassement appartiennent à la même approche, celle de l'articulation a posteriori des préférences, mais elles diffèrent au niveau de :

- la partie donnée ;
- les différentes techniques des étapes de calcul ;
- la partie résultat.

Nous récapitulons les caractéristiques de ces méthodes dans *le tableau 3.2*. Elles peuvent nous aider à progresser dans le problème de choix d'une méthode de surclassement.

Méthode		Problématique	Critère	Poids	Seuil	Résultat
ELECTRE	I	P_α	vrai critère	net	concordance discordance	noyau
	IS		pseudo-critère		indifférence préférence veto	
	TRI	P_γ			vrai critère	concordance discordance
	II		pseudo-critère	/	indifférence préférence veto	
	III					critère généralisé
	IV		vrai critère	flou	concordance flou	
PROMETHEE	I					
	II					
ADAM						

TAB. 3.2: Etude comparative des méthodes de surclassement

3.7 Partitionnement de l'ensemble des méthodes de surclassement

Soit S l'ensemble des méthodes de surclassement considérées dans notre travail. Nous partitionnons l'ensemble S à base des caractéristiques des méthodes de surclassement.

En premier lieu, nous partitionnons l'ensemble S par rapport au type de la problématique cernée puisque la définition de la problématique est la première étape qui apparaît dans tout processus de décision multicritère ; à ce niveau, nous partitionnons l'ensemble S en trois sous-ensembles :

1. S_1 représente l'ensemble des méthodes conçues pour la problématique du choix (P_α), on a deux méthodes :

$$S_1 = \{\text{ELECTRE I, ELECTRE IS}\}$$

2. S_2 représente l'ensemble des méthodes conçues pour la problématique du rangement (P_γ), il y en a six :

$$S_2 = \{\text{ELECTRE II, ELECTRE III, ELECTRE IV, PROMETHEE I ET II, ADAM}\}$$

3. S_3 représente l'ensemble des méthodes conçues pour la problématique d'affectation (P_β), une seule méthode :

$$S_3 = \{\text{ELECTRE TRI}\}$$

En second lieu, nous partitionnons l'ensemble S_1 en deux sous-ensembles S_{11} et S_{12} suivant le type des critères où :

1. S_{11} représente l'ensemble des méthodes qui utilisent une famille cohérente de vrais critères, il n'y en a qu'une seule :

$$S_{11} = \{\text{ELECTRE I}\}$$

2. S_{12} représente l'ensemble des méthodes qui utilisent une famille cohérente de pseudo-critères et qui correspond à une seule méthode :

$$S_{12} = \{\text{ELECTRE IS}\}$$

et nous partitionnons l'ensemble S_2 en trois sous-ensembles S_{21} , S_{22} et S_{23} selon le type des poids relatifs aux critères :

1. S_{21} représente l'ensemble des méthodes qui traitent le cas où le poids n'existe pas, une seule méthode :

$$S_{21} = \{\text{ELECTRE IV}\}$$

2. dans le cas où le poids existe, il y a deux situations :

- (a) le cas où ce poids prend des valeurs certaines (nettes) ; quatre méthodes y sont appropriées :

$$S_{22} = \{\text{ELECTRE II, ELECTRE III, PROMETHEE I et II}\}$$

- (b) le cas où ce poids prend des valeurs incertaines (floues) ; la seule méthode appropriée est la méthode ADAM, d'où

$$S_{23} = \{\text{ADAM}\}.$$

Finalement, il reste à partitionner le sous-ensemble S_{22} en trois sous-ensembles selon le type des critères :

1. S_{221} : représente l'ensemble des méthodes qui traitent le cas où le type des critères diffèrent, on a deux méthodes :

$$S_{221} = \{\text{PROMETHEE I, PROMETHEE II}\}$$

et on a deux situations :

- (a) le cas où la relation d'incomparabilité est acceptée, une seule méthode :

$$S_{221}^a = \{\text{PROMETEE I}\}$$

- (b) le cas où la relation d'incomparabilité n'est pas acceptée, une seule méthode :

$$S_{221}^b = \{\text{PROMETHEE II}\}$$

2. S_{222} : représente l'ensemble des méthodes qui utilisent une famille cohérente de vrais critères et qui correspond à une seule méthode :

$$S_{222} = \{\text{ELECTRE II}\}$$

3. S_{223} : représente l'ensemble des méthodes qui utilisent le seuil de veto, il n'y en a qu'une seule :

$$S_{223} = \{\text{ELECTRE III}\}$$

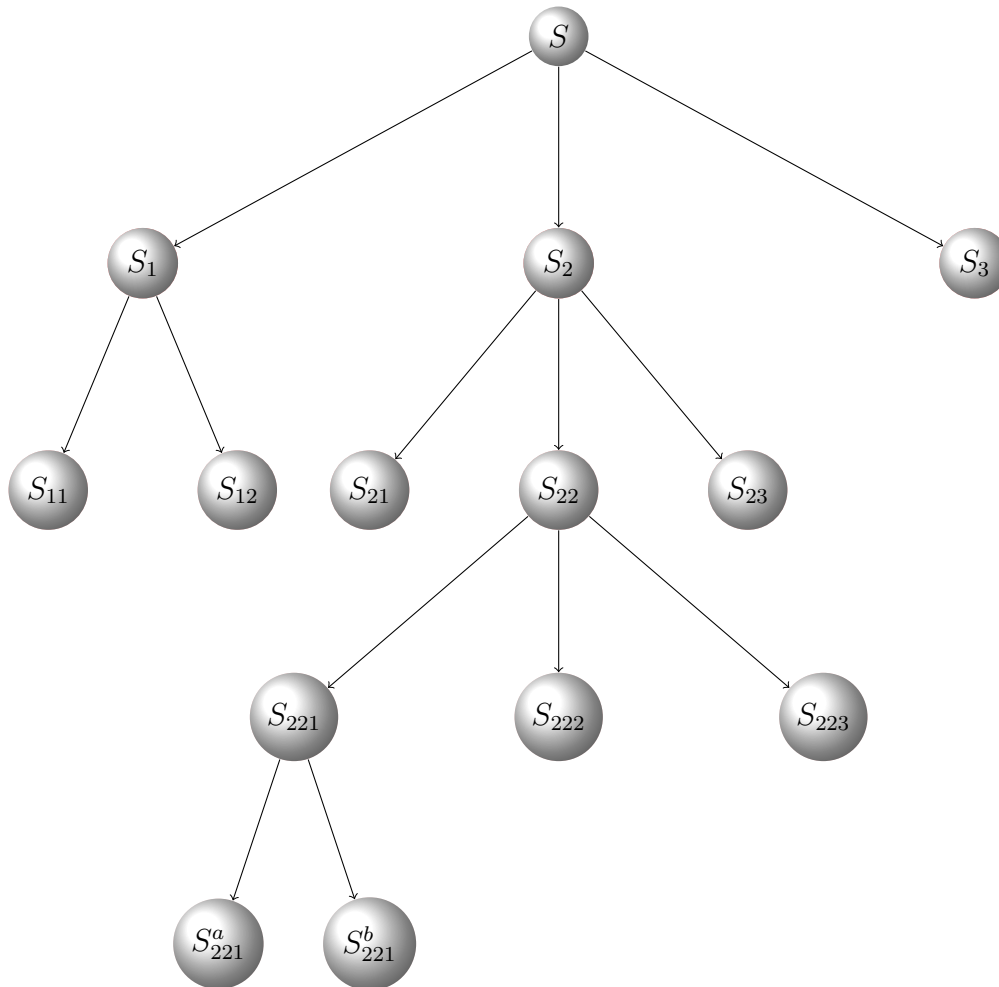


FIG. 3.2: Partitionnement de l'ensemble des méthodes de surclassement

3.7.1 Les critères de sélection

L'étude comparative des méthodes de surclassement et le partitionnement de l'ensemble des méthodes de surclassement nous ont permis de déduire les critères principaux à retenir pour la sélection de la méthode de surclassement la plus appropriée pour un problème donné, ces critères sont :

1. le type de la problématique (choix P_α , rangement P_γ ou tri P_β) ;
2. le type des critères (vrai critère, pseudo-critère ou critère généralisé) ;
3. le poids associé aux différents critères ;
4. le seuil de veto v_j ;

5. la relation d'incomparabilité J (J est vide ou non).

Remarque : dans le cas où le décideur veut obtenir un rangement des actions, il sera intéressant de lui demander si la relation d'incomparabilité est acceptée ou non.

On peut ajouter la règle suivante :

Règle 7 : cette règle consiste à déterminer les méthodes appropriées pour un problème multicritère, selon le type du préordre ; si le décideur accepte la relation d'incomparabilité, il sera intéressant de prendre en considération les méthodes qui ont comme résultat un préordre partiel et vice versa.

3.8 Organigramme pour le choix d'une méthode de surclassement

Quelques règles (Règle 3, Règle 4, Règle 5) proposées par *Guitouni et Martel* et la Règle 7 nous ont aidés à construire un organigramme sous forme d'un arbre qui constitue un ensemble de tests dont le principe est d'éliminer une ou plusieurs méthodes au niveau de chaque test non vérifié ; le processus d'élimination continue dès que la sélection d'une méthode appropriée aux caractéristiques du problème à traiter est effective. Voici les tests principaux effectués :

1. le premier (Règle 3) consiste à déterminer la ou les méthodes conçues pour une telle problématique ;
2. le deuxième (Règle 5) sert à sélectionner la ou les méthodes selon l'existence du poids relatif aux critères ;
3. le troisième (Règle 4) consiste à sélectionner la ou les méthodes selon l'incertitude du poids relatif aux critères ;
4. le quatrième (Règle 4) permet de choisir la ou les méthodes selon le type de critères ;
5. le cinquième (Règle 4) sert à choisir la ou les méthodes selon la disponibilité du seuil de veto ;
6. le dernier (Règle 7) consiste à choisir entre la méthode PROMETHEE I et la méthode PROMETHEE II selon le type du préordre souhaité par le décideur.

Algorithme 7 : choix d'une méthode de surclassement

Etape 0. Introduire la matrice de données ;

Introduire le type de la problématique ;

Introduire le type des critères ;

Introduire le type du poids ;

Introduire la relation d'incomparabilité J .

Etape 1. Si la problématique est celle du choix (P_α), alors aller à l'étape 2
sinon aller à l'étape 4.

Etape 2. Si F est une famille cohérente de vrais critères, alors appliquer la méthode ELECTRE I sinon aller à l'étape 3.

Etape 3. Si F est une famille cohérente de pseudo-critères, alors appliquer la méthode ELECTRE IS sinon pas de méthode.

Etape 4. Si la problématique est celle du rangement (P_γ), alors aller à l'étape 6
sinon aller à l'étape 5.

Etape 5. Si F est une famille cohérente de pseudo-critères, alors appliquer la méthode ELECTRE TRI
sinon pas de méthode.

Etape 6. Si le poids n'existe pas, alors aller à l'étape 7
sinon aller à l'étape 8.

Etape 7. Si F est une famille cohérente de pseudo-critères, alors appliquer la méthode ELECTRE IV
sinon pas de méthode.

Etape 8. Si le poids est flou, alors appliquer la méthode ADAM
sinon aller à l'étape 9.

Etape 9. Si le type des critères est généralisé, alors aller à l'étape 10
sinon aller à l'étape 11.

Etape 10. Si la relation d'incomparabilité(J) est acceptée, alors appliquer la méthode PROMETHEE I sinon appliquer la méthode PROMETHEE II.

Etape 11. Si F est une famille cohérente de vrais critères, alors appliquer la méthode ELECTRE II sinon aller à l'étape 12.

Etape 12. Si le seuil de veto v_j existe, alors appliquer la méthode ELECTRE III
sinon pas de méthode.

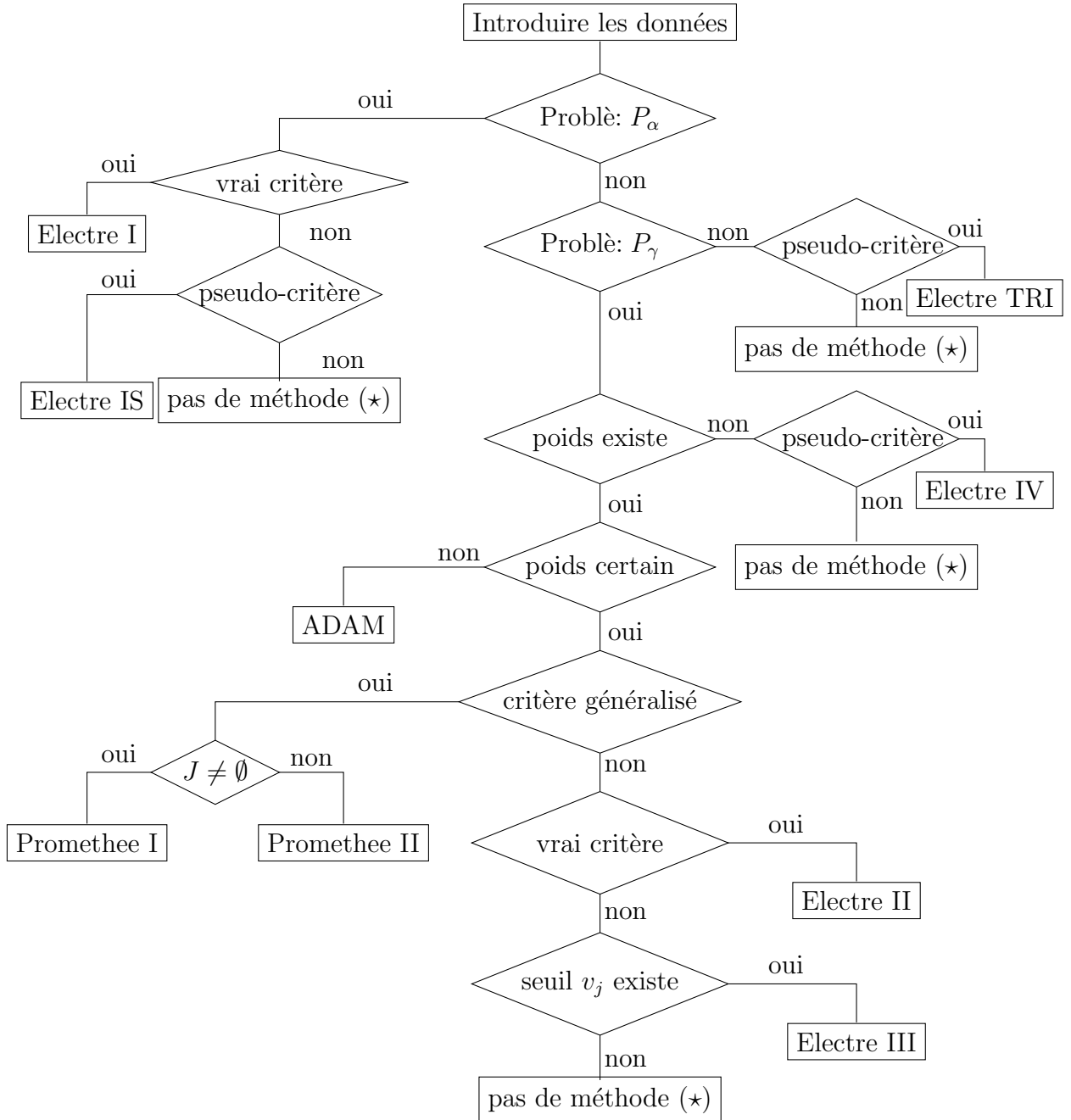


FIG. 3.3: Organigramme du choix d'une méthode de surclassement

(*) Dans le cas où il n'existe pas une correspondance complète entre les caractéristiques du problème et les caractéristiques d'une méthode particulière, nous proposons la stratégie illustrée par la *figure 3.4*. Le processus commence d'abord par chercher une méthode qui soit complètement en accord avec les caractéristiques fournies par le décideur. Si une telle méthode n'est pas trouvée, alors la caractéristique la moins importante est ignorée et le système (l'organigramme présenté dans la *figure 3.3*) cherche à nouveau une méthode en utilisant les caractéristiques restantes. Et ainsi de suite jusqu'à l'identification d'une méthode adéquate.

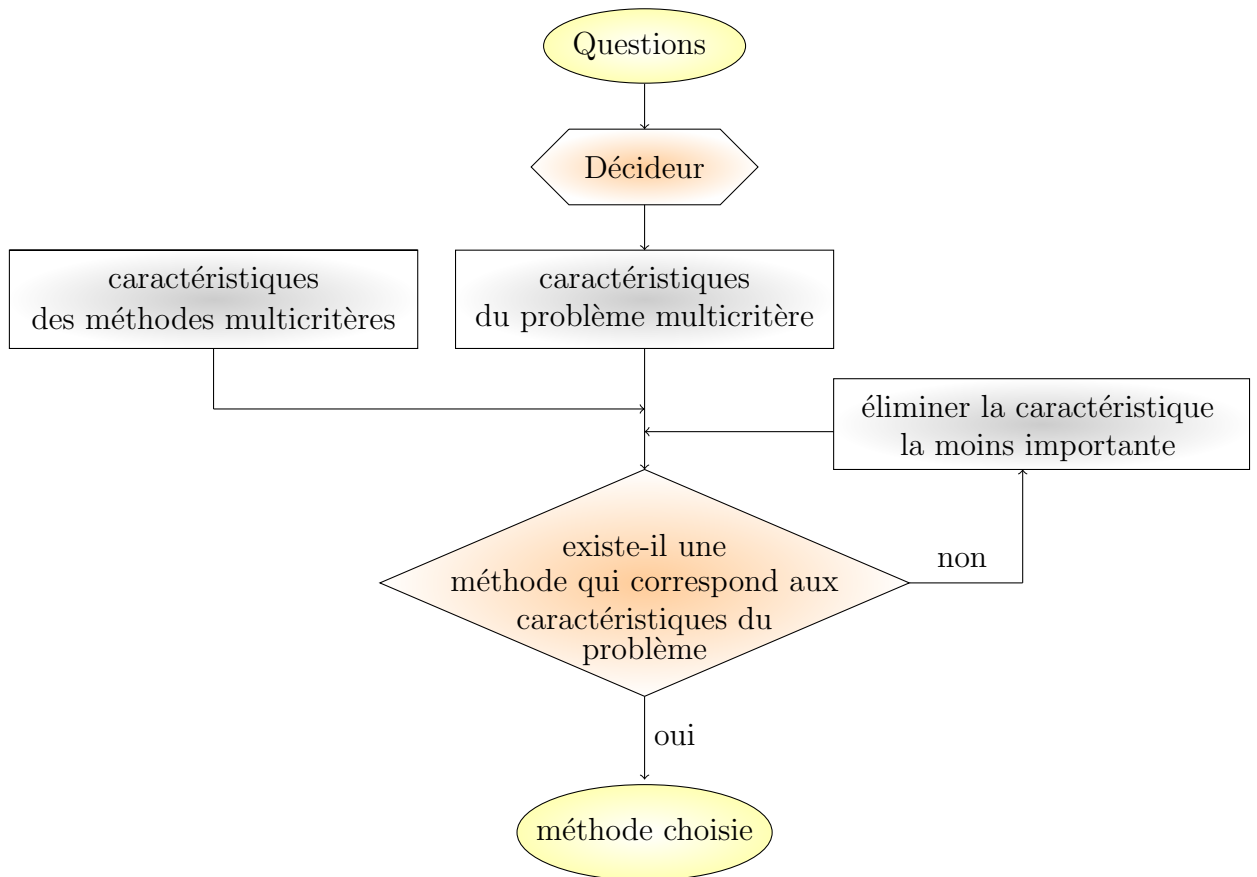


FIG. 3.4: Stratégie : cas où la méthode n'est pas choisie

4

Programmation et application

Le langage C++ a été conçu à partir de 1982 par *Bjarne Stroustrup*. Principalement, le C++ est une endrapolation du langage C. En plus des types simples et des types complexes du langage C, on peut définir des classes qui sont des structures évoluées dont certains champs(membres) sont des fonctions(méthodes).

Le C++ est l'un des langages de programmation les plus utilisés actuellement. Il est à la fois facile à utiliser et très efficace. On pourrait caractériser le C++ par les trois points suivants :

- c'est un langage orienté objet ;
- c'est un langage idéal pour certains types de projets ;
- il permet de réaliser de grands programmes.

Les principaux avantages du C++ sont :

- la facilité de convertir des programmes C en C++, en particulier, la possibilité d'utiliser toutes les fonctionnalités du langage C ;
- c'est un langage séquentiel amélioré ;
- il contrôle les erreurs accrues.

Nous estimons que toutes ces caractéristiques et avantages sont des atouts à une programmation certaine des méthodes de surclassement présentées dans le chapitre 2 et de l'algorithme(choix d'une méthode de surclassement) présenté dans le chapitre 3 en langage $C++$.

Pour plus de détails sur le langage $C++$, nous renvoyons le lecteur intéressé aux références : [10], [45], [9] et [13]

Illustrations numériques

Nous allons illustrer l'organigramme proposé dans le chapitre 3 par quelques exemples.

Exemple : classement de six offres

Le problème posé consiste à ranger six(6) offres qui sont en concurrence. Chaque offre est évaluée sur la base de cinq(5) critères environnementaux :

- g_1 : coût d'investissement en unité monétaire,
- g_2 : durée moyenne d'entretien par jour en minutes,
- g_3 : coût estimé de la maintenance en unité monétaire,
- g_4 : nombre moyen de pannes estimé par an,
- g_5 : niveau de sécurité.

Le décideur n'impose aucun seuil aux différents critères donc les seuils d'indifférence q_j , de préférence p_j et de veto v_j sont nuls, ce qui implique que le type des critères est un vrai critère ; à chaque critère est associé un poids p_j .

Les données considérées sont présentées dans le tableau ci-après.

$A \setminus F$	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
a_1	600	80	54	8	5
a_2	300	65	97	1	1
a_3	400	83	72	4	7
a_4	1000	40	75	7	10
a_5	600	52	20	3	8
a_6	700	94	36	5	6
a_6	700	94	36	5	6
poids	35	12	18	25	10
$q_j = p_j = v_j = 0$	0	0	0	0	0

Quelle est la méthode appropriée au problème posé ?

On peut justifier le choix de la méthode la plus appropriée à ce problème par l'algorithme 6 :

Etape 1 la problématique n'est pas celle du choix (P_α), alors aller à l'étape 4 ;

Etape 4 la problématique est celle du rangement (P_γ), alors aller à l'étape 6 ;

Etape 6 le poids existe, alors aller à l'étape 8 ;

Etape 8 le poids n'est pas flou, alors aller à l'étape 9 ;

Etape 9 le type des critères n'est pas généralisé, alors aller à l'étape 11 ;

Etape 11 F est une famille cohérente du vrai critère, alors appliquer la méthode ELECTRE II.

On applique la méthode ELECTRE II au problème posé ; cette méthode exige deux seuils de discordance par critère et trois seuils de concordance. Nous considérons les seuils suivants :

$D_{1(j)}$	250	60	40	4	6
$D_{2(j)}$	80	20	10	1	1

$c^- = 0.5$, $c^0 = 0.55$ et $c^+ = 0.65$.

Après le déroulement de la méthode ELECTRE II, nous avons obtenu les résultats ci-dessous :

1. La matrice de concordance

action	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	-	0.28	0.3	0.53	0.35	0.47
a_2	0.72	-	0.72	0.6	0.6	0.72
a_3	0.7	0.28	-	0.78	0.35	0.82
a_4	0.47	0.4	0.22	-	0.22	0.22
a_5	1	0.4	0.65	0.78	-	1
a_6	0.53	0.28	0.18	0.78	0	-

2. Le graphe de surclassement fort et le graphe de surclassement faible

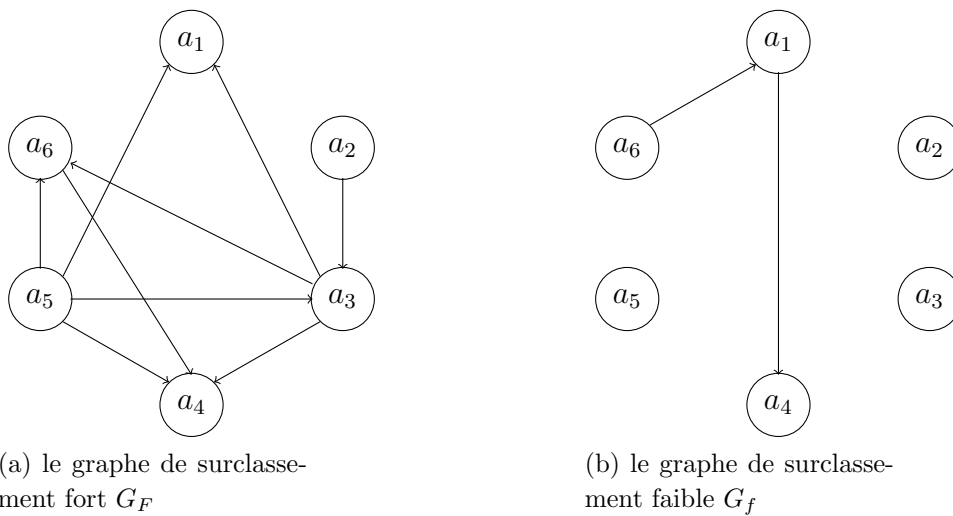


FIG. 4.1: Les graphes de surclassement G_F et G_f

3. **Les préordres** : on a deux préordres complets et un préordre partiel; ces préordres équivalents sont présentés dans la figure ci-dessous :

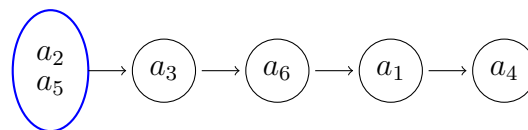


FIG. 4.2: Le préordre partiel

Exemple : problème de location d'un logement

Dans cet exemple, nous considérons le problème de location d'un logement parmi cinq (5) logements prédéfinis. Chaque logement est évalué selon quatre (4) critères :

- g_1 : montant du loyer mensuel en unité monétaire,
- g_2 : durée du trajet domicile lieu de travail, en minutes,
- g_3 : superficie en mètres carrés,
- g_4 : numéro de l'étage.

Les caractéristiques liées à ce problème

1. **Définition de la problématique** : le problème posé consiste à sélectionner un sous-ensemble d'actions (logements) contenant les plus satisfaisantes ; alors il s'agit de la problématique du choix P_α .

2. **L'ensemble des actions** : les actions considérées présentent les cinq logements prédéfinis donc :

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

3. **Type de critères** : tout d'abord nous définissons les seuils d'indifférence q_j et les seuils de préférence p_j liés aux différents critères :

(a) **Le critère g_1** : le décideur juge non significative une différence de loyer de 20 unités monétaires, donc le seuil d'indifférence $q_1 = 20$; et toute différence à partir de 80 est jugée clairement significative par le décideur d'où le seuil de préférence $p_1 = 80$. Donc il s'agit d'un pseudo-critère.

Le décideur juge qu'une différence de loyer de l'ordre de 300 unités monétaires est pénalisante donc le seuil de veto est $v_1 = 300$.

(b) **Le critère g_2** : la plus grande valeur en dessous de laquelle le décideur considère qu'il y a indifférence de deux actions a_i et a_k est de 5 minutes du fait que $q_2 = 5$ et la plus petite valeur au dessus de laquelle le décideur considère qu'il y a préférence stricte d'une action par rapport à une autre est de 10 minutes d'où $p_2 = 10$. Donc g_2 est un pseudo-critère.

(c) **Le critère g_3** : le décideur considère que si un logement a_i est plus large qu'un autre logement a_k de $2m^2$ au plus, alors a_i et a_k sont indifférentes ($q_3 = 2$), et si un logement a_i est plus large qu'un autre logement a_k de $5m^2$ au moins, alors a_i sera strictement préférée à a_k ($p_3 = 5$). Donc g_3 est un pseudo-critère.

Le décideur considère que les critères durée du trajet (g_2) et superficie (g_3) n'exercent pas un pouvoir de veto donc il suppose que $v_2 = v_3 = 100$.

(d) **Le critère g_4** : $q_4 = 0$, $p_4 = 2$ et $v_4 = 5$. Donc g_4 est un pseudo-critère.

Par conséquent, on a une famille cohérente F de **pseudo-critères** où
 $F = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$

4. **Pondération des critères** : les différents critères sont pondérés par la technique de **catégorisation**, ici le décideur considère que :

le critère prix (g_1) est le plus important ;

le critère superficie (g_3) est important ;

les critères durée du trajet (g_2) et numéro d'étage (g_4) sont les moins importants.

Donc $w_2 = w_4 = 1$;

d'où le critère g_3 contrebalance g_2 et g_4 ;

$\Rightarrow w_3 = w_2 + w_4 = 2$;

d'où le critère g_1 contrebalance g_2 et g_3 ;

$\Rightarrow w_1 = w_2 + w_3 = 3$.

Nous récapitulons les données relatives à ce problème dans le tableau ci-après énumérées :

$A \setminus F$	g_1	g_2	g_3	g_4
a_1	600	20	35	2
a_2	750	25	32	3
a_3	1200	35	55	1
a_4	700	25	40	4
a_5	500	40	30	0
w_j	3	1	2	1
q_j	20	5	2	0
p_j	80	10	5	2
v_j	300	100	100	5

Quelle est la méthode appropriée à ce problème ?

On peut justifier le choix de la méthode la plus appropriée par l'algorithme 6 :

Etape 1 : le type de problématique est celui du choix (P_α), alors aller à l'étape 2 ;

Etape 2 : F n'est pas une famille cohérente de vrais critères, alors aller à l'étape 3 ;

Etape 3 : F est une famille cohérente de pseudo-critères, alors appliquer la méthode ELECTRE IS.

Après l'application de la méthode ELECTRE IS à ce problème nous avons obtenu les résultats suivantes :

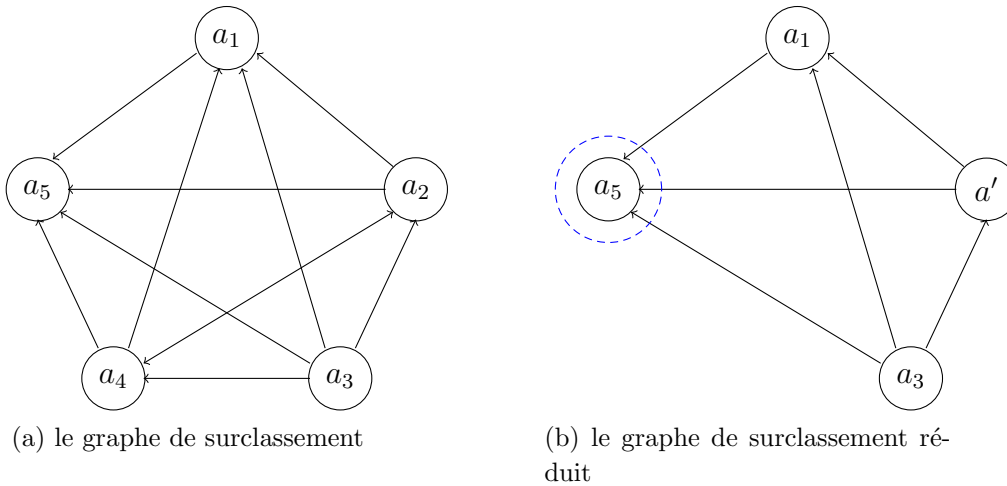
1. La matrice de concordance globale :

action	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	-	1	0.64	0.71	0.43
a_2	0.33	-	0.57	0.5	0.43
a_3	0.43	0.43	-	0.43	0.5
a_4	0.43	0.93	0.57	-	0.43
a_5	0.57	0.85	0.71	0.57	-

2. La matrice de discordance globale

action	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	-	0	0	0	0
a_2	0	-	0	0	0
a_3	1	1	-	1	1
a_4	0	0	0	-	0
a_5	0	0	0	0	-

3. Le graphe de surclassement inverse

FIG. 4.3: graphe de surclassement inverse G^* avec $c = 0.5$ 4. Le noyau du graphe : le noyau N de ce graphe constitue uniquement l'action a_5 , $N = \{a_5\}$.

Analyse de sensibilité : l'analyse de sensibilité a porté sur le seuil de concordance c .

– **Pour** $c = 0.55$ on aura le graphe suivant :

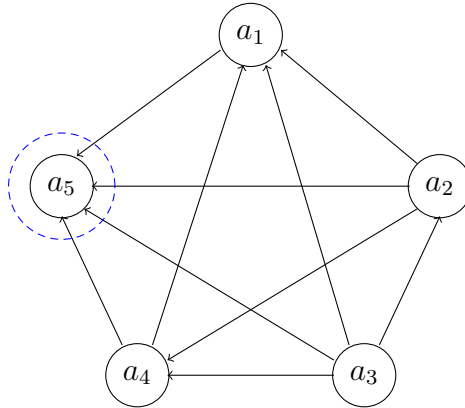


FIG. 4.4: graphe de surclassement inverse G^* avec $c = 0.55$

– **Pour** $c = 0.6$ on aura le graphe suivant :

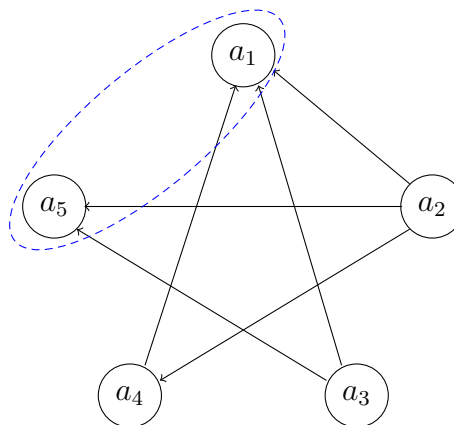


FIG. 4.5: graphe de surclassement inverse G^* avec $c = 0.6$

– Pour $c = 0.65, 0.7$ on aura le graphe suivant :

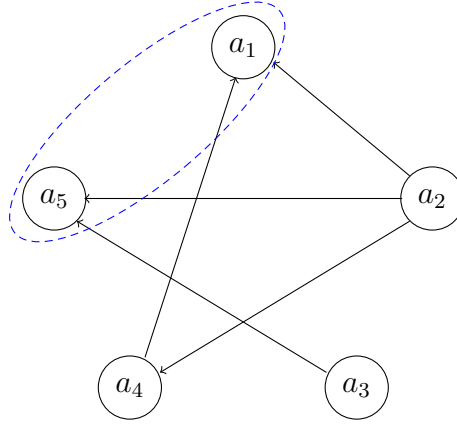


FIG. 4.6: graphe de surclassement inverse G^* avec $c = 0.65, 0.7$

Le noyau N de ce graphe constitue les actions a_1 et a_5 .

Analyse des résultats : dans tout les cas le logement a_5 est configuré dans le noyau du graphe de surclassement ; ce résultat implique qu'il est intéressant de louer le logement a_5 .

Conclusion

Le présent travail de recherche entre dans le domaine de l'aide multicritère à la décision ; ce domaine est vaste et offre quelques avantages par rapport aux autres outils : prise en compte des critères conflictuels.

Le grand nombre de méthodes a permis d'étendre le champ d'application des méthodes multicritères mais au même temps a généré un autre problème : celui du choix de la méthode à appliquer dans un problème spécifique. Nous indiquons que le problème du choix de *la meilleure* méthode ne peut être résolu ni par une bonne structuration du problème ni par le développement d'une méthode *parfaite*. Une formalisation rigoureuse et systématique du problème de choix s'avère donc nécessaire.

Notre étude bibliographique nous a permis de constater que, comparativement aux méthodes d'articulation a priori des préférences, les méthodes d'articulation a posteriori des préférences ont reçu peu d'attention dans les travaux consacrés au problème de choix d'une méthode. Or ces méthodes sont généralement mieux adaptées aux problèmes de décision sur le territoire dans le sens où elles permettent de prendre en compte l'aspect ordinal de ces problèmes.

Notre travail de recherche a pour objectif principal d'élaborer un processus pour le choix d'une méthode multicritère.

Le travail réalisé dans le cadre de ce mémoire peut se résumer en deux parties essentielles. En premier lieu, nous nous sommes contentés d'un bref aperçu sur les concepts de base de l'aide multicritère à la décision et sur quelques méthodes de surclassement. En deuxième lieu, nous avons présenté l'essentiel de notre travail qui a porté sur la construction d'un arbre (algorithme) sur la base de quelques règles.

Ce dernier a été utilisé comme base pour le développement du Système Informatisé d'Aide à la Décision (SIAD) en langage C++ destiné à assister le décideur/l'analyste dans son choix systématique de la méthode multicritère dans un problème donné.

Nous terminons cette conclusion en évoquant les différentes perspectives de recherche que nous envisageons aborder dans le futur :

- ajouter d'autres règles pour renforcer la discrimination entre les méthodes ;
- généraliser l'arbre proposé sur d'autres méthodes multicritères ;
- proposer d'autres outils permettant d'aider le décideur dans le choix d'une méthode multicritère.

Bibliographie

- [1] M. Abbas. *Contribution au Rapprochement de la Théorie des Graphes et de l'Aide à la Décision : graphes parfaits et modèles de préférences*. Thèse de Doctorat, Université Libre de Bruxelles, 1994.
- [2] M. Abbas. méthode adam de surclassement flou. *Communication privée*, 1999.
- [3] L. Alberto and F. Dutra. *Méthode multicritère d'Aide à la Décision : une approche pour la chaîne logistique verte intégrant le transport intermodal*. Université Paul Verlaine de Metz, 2007.
- [4] C. Berge. *Graphes*. BORDAS-Paris, 1983.
- [5] F. Bernard. *Traitement des Relations Intransitives : le noyau du graphe*. 1999.
- [6] J. Borken. Evaluation of environmental indicators for transport with electricity. *Seminar PIE of INRETS*, 2005.
- [7] J. P. Brans, Ph. Vincke, and B. Mareschal. The promethee method : how to select and how to rank projects. *European Journal of Operational Research*, 24 : 228-238, 1986.
- [8] R. Caillet. *Analyse multicritère : Étude et comparaison des méthodes existantes en vue d'une application en analyse de cycle de vie*. Série Scientifique 2003s-53, Centre Interuniversitaire de Recherche en Analyse des Organisation (CIRANO), Québec, Canada, 2003.
- [9] Ch. Casteyde. *Cours de C/C++*. Copyright edition, 2001.
- [10] C. Delannoy. *C++ pour les programmeurs*. Eyrolles edition, 2004.
- [11] M. Despontin, J. Moscarola, and J. Sprong. *A user-oriented listing of multiple criteria decision methods*. *Revue Belge de Statistique, d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, 1980.
- [12] F. Drosbeke, M. Hallin, and C. Lefevre. *Les Graphes par L'Exemple*. Ellipes-Paris, 1987.
- [13] B. Eckel. *Thinking In C++*. Mindview, inc edition, 1999.

-
- [14] E. Georgopoulou. A multiple criteria decision-aid approach in defining national priorities for greenhouse gases emissions reduction in the energy sector. *European Journal of Operational Research*, 146 : 199–215, 2003.
- [15] M. Gershon. *Model choice in multi-objective decision making in natural resource systems*. PhD thesis, University of Arizona, 1981.
- [16] M. Gershon and L. Duckstein. A procedure for selection of a multiobjective technique with application to water and mineral resources. *Applied Mathematics and Computation*, 14 :245–271, 1984.
- [17] A. Guitouni and J. M. Martel. Tentative guidelines to help choosing an appropriate mceda method. *European Journal of Operational Research*, 109 : 501-521, 1998.
- [18] B. F. Hobbs, V. Chankong, W. Hamadeh, and E. Z. Stakhiv. Does choice of multicriteria method matter? an experiment in water resource planning. *water resources research*. 238 :1767–1779, 1992.
- [19] C. L. Hwang and A. Masud. *Multiobjective decision making methods and applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [20] A. Laaribi. *Sig et analyse multicritère*. Hermès Sciences Publications, Paris, 2000.
- [21] A. Laaribi, J. J. Chevallier, and J. M. Martel. A spatial decision aid : A multi-criterion evaluation approach. *Computers : Environment and Urban Systems*, 20(6) :351–366, 1996.
- [22] M. Lorea and F. Droesbeke. *Eléments de la Théorie de Graphes : notions fondamentales, applications et extensions*. Presses Universitaires de Bruxelles, 1978.
- [23] J. Lu, M. A. Quaddus, and R. Williams. *Developing a knowledge-based multi-objective decision support system*. In Proceedings of the 33rd Hawaii International Conference on System Sciences, 2000.
- [24] J. Lu, M.A. Quaddus, K.L. Poh, and R. Williams. The design of a knowledge-based guidance system in intelligent multiple objective decision support system (imodsss). In B. Hope and P. Yoong, editors, *Proceedings of The 10th Australasian Conference on Information Systems*, 542–553, 1999.
- [25] R. K. MacCrimmon. *An overview of multiple objective decision making*. The University of South Carolina Press, 1973.
- [26] Ch. Martin and M. Legret. *La Méthode Multicritère ELECTRE III : définitions, principe et exemple d'application à la gestion des eaux pluviales en milieu urbain*. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, 2005.

-
- [27] V. Mousseau and L. Dias. Valued outranking relations in electre providing manageable disaggregation procedures. *European Journal of Operational Research*, 156 : 467–482, 2004.
- [28] V. Mousseau, R. Slowinski, and P. Zielniewicz. A user-oriented implementation of the electre-tri method integrating preference elicitation support. *Computers and Operations Research*, 27 : 757-777, 2000.
- [29] A. Nafi and C. Wery. Aide à la décision multicritère : introduction aux méthodes d’analyse multicritère de type electre. *Ingénierie financière (ENGEES)*, 2009.
- [30] V. M. Ozernoy. Choosing the ”best” multiple criteria decision-making method. *INFOR*, 32(2) :159–171, 1992.
- [31] J. Pictet, J. Simos, and L. Y. Maystre. *Méthodes Multicritère ELECTRE : Description, conseils pratiques et cas d’application à la gestion enviromentale*. Press Polytechnique et Universitaire Romandes.
- [32] K. L. Poh. Knowledge-based guidance system for multi-attribute decision making. *Artificial Intelligence in Engineering*, 12 : 315–326, 1998.
- [33] B. Roy. *Algèbre Moderne et Théorie des Graphe : Sous-Ensemble de Sommets Remarquables d’un Graphe*. Dunod, 1978.
- [34] B. Roy. *Méthodologie Multicritère d’Aide à la Décision*. Economica, Paris, 1985.
- [35] B. Roy. Classement et choix en présence de critères multiples. *Revue Francaise d’Informatique et de Recherche Opérationnelle n° 8*, 57-75, 1986.
- [36] B. Roy. *ELECTRE III : un algorithme de classement fondé sur une représentation floue des préférence de critères multiples*, volume 20 : 3-24. Cahiers du C.E.R.O, 1998.
- [37] B. Roy and P. Bertien. *La Méthode ELECTRE II : une application au média planing*, volume 291-302. In : M.Ross(ed.) :OR’72, North-Holland Publishing Company, 1973.
- [38] B. Roy and D. Bouyoussou. *Aide Multicritère à la Décision : Méthodes et cas*. Economica, paris, 1993.
- [39] B. Roy and J. Ch. Hugonnard. Classement des prolongements de lignes de métro en banlieue parisienne. *Transportation Research*, 6 : 301-312, 1982.
- [40] B. Roy and J. M. Skalka. *ELECTRE IS : aspects méthodologiques et guide d’utilisation*. Document du LAMASADE 24, 1984.

-
- [41] A. Scharlig. *Décider sur plusieurs critères*. Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1985.
- [42] A. Schäärli. *Décider sur Plusieurs Critères, Panorama de l'Aide à la Décision Multicritère*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1985.
- [43] J. Simos. *Evaluer l'Impact sur l'Environnement : une approche originale par l'analyse multicritère et la négociation*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1990.
- [44] P. E. Spector. *Summed rating scale construction : An introduction*. Sage University Paper Series on Quantitative Applications in the Social Sciences 07-82, Sage, Thousand Oaks, CA, 1992.
- [45] H. Sutter. *Mieux programmer en C++*. Eyrolles edition, 2000.
- [46] A. Teclé and L. Duckstein. A procedure for selecting mcdm techniques for forest resources management. *Springer-Verlag*, 1992.
- [47] J. Jr. Teghem, C. Delhaye, and P. L. Kunsch. An interactive decision support system idss for multicriteria decision-aid. *Mathematical and Computer Modelling*, 12(10/11) :1311– 1320, 1989.
- [48] Ph. Vincke. *Aide Multicritère à la Décision*. Université Libre de Bruxelles, 1989.
- [49] Ph. Vincke and H. Simsek. *Modularisation et comparaison de quelques méthodes de surclassement*. Université Libre de Bruxelles, 2006.
- [50] K. L. Yoon and C. L. Hwang. Multiple attribute decision making : An introduction. *Number 104 in Quantitative Applications in the Social Sciences*. SAGE Publications, Thousand Oaks, California, 1995.