

N d'ordre : 09/2011-M/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie «Houari Boumediene»
Faculté de Mathématiques



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

En : **Mathématiques**

Spécialité : **Modèles Stochastiques de Recherche Opérationnelle :**

Par : **Samira RAHIM**

Epouse de : Chaanane

Thème

**Séries Financières et Modèles de Mélange GARCH
Périodiques**

Soutenu publiquement le 18/10/2011, devant le jury composé de :

Mme.	GUERBYENNE Hafida	MC A	à l'U.S.T.H.B.	Présidente
M.	BENTARZI Mohamed	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
M.	BERKOUN Youcef	MC A	à l'U.M.M.T.O.	Examineur.
M.	HAMDI Fayçal	MC B	à l'U.S.T.H.B.	Invité.

Alà barakati Allah

Remerciements

Je remercie Dieu pour la force et la persévérance dont il m'a doté

« La reconnaissance est bien un devoir qu'il faut rendre » jean Jaque ROUSSOU

*A mon Directeur de mémoire Monsieur le Professeur **Mohamed BENTARZI** :*

Je vous remercie pour votre soutien, votre patience et votre intérêt au cours de l'élaboration de ce travail de recherche. La clarté et la richesse de votre savoir, votre esprit critique et vos raisonnements empreints de précision m'ont constamment inspirés. J'ai toujours apprécié votre modestie, vos précieux conseils et votre effort incessant afin de me permettre d'élaborer au mieux ce travail. Veuillez trouver ici, l'expression de ma profonde gratitude et de ma sincère reconnaissance.

*Je tiens à exprimer mes remerciements à Madame **Hafida GUERBYENNE** Maître de Conférence A pour l'honneur qu'elle ma fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire pour ses qualités pédagogiques et ses précieux conseils en Post Graduation.*

*Mes remerciements chaleureux s'adressent également à Monsieur **Youcef BERKOUN** Maître de Conférence A à l'UMMTO et à Monsieur **Fayçal HAMD**I Maître de Conférence B (USTHB) pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'accepter de faire partie de mon jury de soutenance.*

Je tiens aussi à remercier tous ceux qui m'ont aider de près ou de loin à achever ce travail.

Enfin, il ne me paraît pas possible de citer ici nommément tous ceux avec qui j'ai eu contact durant la préparation de ce mémoire, mais qu'ils ne seront jamais oubliés et qu'ils en soient aussi chaleureusement remerciés.

Dédicaces

A ma *très chère* mère, pour tout ce qu'elle a fait et continue à faire pour moi,

A mon cher père, *pour les sacrifices qu'il a consentis à mon égard,*

A mon mari, *pour son aide, sa patience et surtout sa compréhension,*

A mes adorables enfants, Maria et Mohamed Rahim (âgé de 14 jours le jour de la
soutenance),

A mes *très chers* frères et sœurs, pour leur soutien et incessants encouragements, je citerai
en particulier Naima,

A mes charmants neveux et nièces et à toute la famille RAHIM,

A la Mémoire de mes beaux parents,

A mes beaux frères et belles sœurs,

A toute la famille CHAANANE,

A toutes mes amies,

Je dédie ce modeste travail.

Table Des Matières

Introduction	1
1 Modélisation des séries financières	1
1.1 Introduction	1
1.2 Caractéristiques des séries chronologiques financières	3
1.2 1 Propriétés des Processus de prix et de rendement	3
1.2 2 La volatilité et son comportement en "clusters"	4
1.2 3 Excès de Kurtosis (coefficient d'aplatissement élevé)	4
1.2 4 Skewness(Asymétrie)	5
1.2 5 Multimodalité de la distribution des innovations .	6
1.2 6 Persistance (propriété de longue mémoire)	7
1.2 7 Périodicité dans la structure des covariances	7
1.3 Modélisation non linéaire	8
1.3.1 Modèles bilinéaires .	8
1.3.2 Modèles à changement de régimes, Hamilton(1989)	9
1.3.3 Modèles à volatilité stochastique .	9
1.3.4 Modèle ARCH	12
1.3.5 Propriétés d'un modèle ARCH	14
1.3.6 Modèles GARCH .	18
1.3.7 Modèles IGARCH	19
1.3.8 Modèles EGARCH	19
1.3.9 Modèles TGARCH	20
1.3.10 Modèles à erreurs GARCH	21
1.3.11 Modèles ARCH-M	21

2	Modélisation linéaire des séries chronologiques périodiques	23
2.1	Introduction	23
2.2	Processus périodiquement corrélés	25
2.2.1	Définition 2.2.1 : Processus périodiquement strictement stationnaire .	26
2.2.2	Définition 2.2.2 : Processus périodiquement corrélé	26
2.2.3	Fonction d'autocovariance d'un processus périodiquement corrélé .	27
2.2.4	Fonction d'autocovariance empirique d'un processus	27
	périodiquement corrélé.	
2.2.5	Processus périodiquement corrélé et processus multivarié	28
	stationnaire qui lui correspond.	
2.2.6	Relation entre les autocovariances d'un processus périodiquement.	29
	corrélé et celles d'un processus multivarié stationnaire qui lui correspond	
2.3	Modèles autorégressifs moyennes mobiles périodiques	29
2.3.1	Représentation linéaire de Wold-Cramer	29
2.3.2	Modèles autorégressifs moyennes mobiles périodiques PARMA	30
2.4	Etude des modèles PARMA	31
2.4.1	Technique "Period Span Lumping".	32
2.4.2	Modèle PARMA(p_t ; q_t) univarié et modèle ARMA.	33
	multivarié correspondant	
2.4.3	Condition de stationnarité périodique	34
2.4.4	Technique "Order Span Lumping".	37
3	Mélange de Modèles GARCH Périodiques (MPGARCH).	44
3.1	Introduction	44
3.2	Quelques modèles de mélange.	45

3.2.1	Définition d'un modèle de mélange de distributions.....	46
3.2.2	Mélange de modèles autorégressifs avec erreurs autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (MAR-ARCH).	47
3.2.3	Mélange de modèles (GARCH).....	49
3.2.4	Mélange de modèles autorégressifs conditionnellement..... hétéroscédastiques périodiques (MPARCH).....	52
3.3	Mélange de modèles GARCH Périodiques, (MPGARCH).....	55
3.3.1	Condition de stationnarité périodique du second ordre.....	57
3.3.2	Moment d'ordre quatre d'un modèle MPGARCH..... périodiquement stationnaire au second ordre.....	66
4	Estimation du modèle	77
4.1	Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance.	78
4.1.1	Principe de la méthode.	78
4.1.2	Méthode du quasi-maximum de vraisemblance.	78
4.1.3	L'algorithme EM.	79
4.1.4	L'algorithme EM généralisé (GEM).	80
4.1.5	L'algorithme GEM basé sur la seule étape de Newton-Raphson.	81
4.1.6	Avantages et inconvénients de l'algorithme EM.	81
4.2	Estimation des paramètres dans le cas classique, MGARCH.	82
4.2.1	L'algorithme EM.	84
4.3	Estimation des paramètres dans le cas périodique, MPGARCH.	87
4.3.1	L'algorithme EM.	89
4.3.2	Matrice d'information.	91

5 Identification du modèle et Application	97
5.1 Identification du modèle, MPGARCH	97
5.2 Application numérique.	98
5.2.1 Etude de simulation	98
5.2.2 Application sur des données réelles	105
6 Conclusion Générale	112
Bibliographie	114

0.1 Introduction Générale

Voulant mettre sous contrôle tout phénomène, y compris ceux qui sont aléatoires, venant par exemple de : l'économie, l'hydrologie, la biologie, ..., la météorologie, l'être humain a développé l'analyse des séries chronologiques. Une telle analyse était conçue, initialement, pour des buts de description, c'est à dire représenter ces phénomènes aléatoires qui évoluent, généralement, dans le temps et dégager les caractéristiques particulières désirables de la série de données, et ce à l'aide de méthodes et techniques mathématiques permettant la conception de modèles adéquats décrivant le mieux possible les caractéristiques et la structure de dépendance empirique du dit phénomène. Le modèle mathématique qui pourrait représenter ce phénomène, de la sorte, est le processus stochastique. Celui-ci obtenu, sera, par ailleurs, utilisé selon les objectifs tracés tels que : la prévision ou le contrôle.

L'analyse des séries chronologiques fut l'objet d'intérêt de nombreux chercheurs. Toutefois, après la parution du fameux ouvrage de Box et Jenkins (1976) et le développement des modèles autorégressifs moyennes mobiles (*ARMA*), et par la suite, leur généralisation aux modèles *ARMA* périodiques, la littérature des séries chronologiques été submergée de travaux intéressés par ces modèles et leur évolution.[Box et Jenkins (1976); Hallin et Puri (1991); Tiao et Grupe(1980); Djuric et Kay(1992); Osborn(1992); Franses(1996)...etc].

En effet, en proposant une méthodologie intéressante et d'usage facile, permettant la construction du modèle adéquat de manière à aider l'utilisateur dans le choix du modèle (étape d'identification), l'estimation de ses paramètres et sa validation, Box et Jenkins (1976) ont popularisé la modélisation (*ARMA*) classique.

Cependant, l'application de cette méthodologie exige l'hypothèse de stationnarité faible, alors qu'en pratique plusieurs séries chronologiques présentent un aspect saisonnier. A cet effet, les modèles *SARIMA* ont été développés. Ces derniers effectuent une transformation tendancielle, saisonnière, ou mixte, sur les séries non stationnaires pour les rendre stationnaires et les soumettre, par suite, à cette méthodologie.

Bien que ces modèles ont réussi à représenter de nombreuses séries chronologiques, ils se sont montrés inefficaces et inadéquats dans la modélisation de beaucoup d'autres, présentant un comportement non régulier. Pour remédier à ce problème, les chercheurs ont développé les modèles linéaires évolutifs dans le temps. Trouvant le support théorique dans la généralisation de la décomposition linéaire de Wold (1938) des modèles stationnaires, aux modèles non stationnaires, par Cramer (1961), la classe des modèles autorégressifs moyennes mobiles à coefficients constants s'est étendue à la classe des modèles autorégressifs moyennes mobiles à coefficients évolutifs dans le temps. Une classe particulière de cette dernière est celle dont les paramètres sont périodiques dans le temps, notée *PARMA*.

L'incapacité des modèles *SARIMA* dans la représentation de certaines séries saisonnières et en particulier celles qui se caractérisent par une fonction d'autocovariance périodique, notamment après le travail de Tiao et Grupe (1980) dans lequel ils montrèrent qu'appliquer cette formulation à de telles séries conduit à une modélisation erronée, a poussé beaucoup de chercheurs à se pencher sur l'étude des modèles *PARMA* ainsi que leurs propriétés algébriques et probabilistes tels que la causalité, l'inversibilité, la stationnarité périodique stricte, l'existence des moments d'ordres supérieurs...etc.

Dans la pratique, les modèles *ARMA*, particulièrement, après le développement des modèles *ARMA* périodiques, ont bien réussi à expliquer de nombreuses séries chronologiques, venant de divers domaines, ainsi qu'à étudier leurs propriétés. Toutefois, il y a des domaines où cette modélisation se révèle insuffisante et incapable de représenter et bien expliquer leurs données. L'économie, et précisément la finance, en constitue un. En effet, les séries financières exhibent certaines caractéristiques dont la plus remarquable est la variabilité instantanée de la série, nommée "**volatilité**". Du fait que les modèles *ARMA* supposent que la volatilité est constante, ignorant sa dynamique dans ce genre de séries, leur traitement par cette formulation serait erroné.

Il existe d'autres faits stylisés caractérisant les séries financières. Parmi ceux, le regroupement de la volatilité : les fortes (faibles) périodes sont suivies par de fortes (faibles) périodes, ce qui peut être expliqué par le fait que la volatilité dépend d'une manière importante du passé (constat mis empiriquement en évidence de puis longtemps [Mandelbrot (1963), Fama(1965)]),

En effet, il y a quelques décennies, la modélisation des séries financières se faisait essentiellement par le biais du moment conditionnel du premier ordre sans aucune référence à une dépendance temporelle des moments d'ordre supérieurs. Cependant, l'importance du risque et de l'incertitude dans la dynamique du comportement des agents économiques a donné lieu à de nouvelles théories économiques permettant d'introduire les moments du second ordre dépendants du temps. Plusieurs chercheurs se sont penché sur cette voie, et ont introduit d'autres modèles donnant la possibilité à la variance conditionnelle de dépendre du temps, précisément des réalisations passées. A titre d'exemple, on cite : les modèles bilinéaires de Granger et Andersen (1978).

Des années plus tard, exactement en 1982, Engle, avec une optique originale, introduit une classe de modèles appelée : Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques, notée *ARCH*. Celle-ci a permis à la volatilité de changer dans le temps et dépendre du passé. En sus, ces modèles ont bien représenté le fait que les données se regroupent selon des périodes (expliquer par des périodes d'incertitude, de guerre, de krachs....etc).

Cette nouvelle classe, du fait qu'elle s'avère très flexible pour les données financières, a reçu jusqu'à nos jours, l'intérêt de beaucoup de chercheurs. Après sa première application par son innovateur Engle (1982) sur l'inflation au Royaume Uni, de nombreux auteurs ont exploité ces modèles, par exemple : Pagan et al (1983); Coulson et Robins (1985) Notons, aussi, que les propriétés statistiques de cette classe furent étudiées par [Weiss (1986); Milhoj (1985); Bera et Higgins (1994); Bollerslev (1994)].

Suivant le principe de parcimonie dans les modèles de séries chronologiques, et par analogie aux modèles *ARMA*, Bollerslev(1986) a introduit le modèle Autorégressif Conditionnellement Hétéroscédastique généralisé d'ordre p, q , noté *GARCH*(p, q).

L'analyse des séries chronologiques financières, appliquée à cette nouvelle modélisation, n'a cessé et ne cesse de progresser. Une variété d'extensions, aussi multiple qu'intéressante, a été exploitée pour résoudre les différents problèmes rencontrés. Une liste non exhaustive de ces extensions serait la suivante : Le modèle *GARCH* intégré, noté *IGARCH* (p, q), introduit par Engle et Bollerslev(1986) pour résoudre le problème de racine unitaire; Quant au problème de l'évaluation du risque, Engle et al(1987) ont proposé le modèle *ARCH* – *M*, " *ARCH* in mean", pour présence de la variance conditionnelle dans l'équation de la

moyenne conditionnelle ; Le modèle Exponentiel *GARCH*, noté *EGARCH* (p, q), proposé par Nelson(1990.c) afin d'introduire une asymétrie dans la modélisation ; Enfin, on peut citer le modèle *ARCH* multivarié introduit par Kraft et Engle(1983), puisque dans la plupart des cas, l'évaluation des actifs ou la décision d'allocation des portefeuilles doit être étudiée dans un contexte multivarié pour être plus significative.

Ainsi, ces modèles se montrent très fructueux du fait qu'ils procurent une explication de certaines non-linéarités. Cependant, d'autres faits stylisés des séries financières tels que la multimodalité, l'excès de Kurtosis, restent mal expliqués par cette représentation (d'où l'opposition à l'hypothèse de normalité des innovations imposée par les modèles *ARCH* et leurs extensions classiques). Pour remédier à cette inconsistance, Wong et Li (2001), en généralisant le modèle Mélange de Distributions de Transition introduit par Le et al.(1996), ont proposé le mélange de modèles autorégressifs avec erreurs autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (*MAR – ARCH*). Une fois cette voie fut ouverte, plusieurs travaux s'en suivirent ((Ding et Granger (1993) ; Baillie et al. (1996) ; Levi(1988) Alexander et Lazar(2004);Zhang et al.(2006);Ausin et Galiano(2007);Fong et al.(2007);Bauwens et al.(2007);Giannikis et al.(2008) etc)

Toujours dans le but de représenter le mieux les données réelles, Bentarzi et Hamdi (2008) ont introduit un mélange de modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques périodiques (*MPARCH*)et un mélange de modèles autorégressifs périodiques avec erreurs autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques périodiques(*MPAR–MPARCH*) pour capturer l'aspect périodique caractérisant la fonction d'autocovariance de certaines séries. Dans le même esprit de cette formulation et en suivant le principe de parcimonie, nous proposons un mélange de Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques Généralisés Périodiques, *MPGARCH*.

La construction de toute modélisation fait appel à l'étape, d'importance particulière, d'estimation des paramètres du modèle. Une variété de méthodes et d'approches ont été proposées dans la littérature de l'analyse des modèles (*PARMA*), telles que la méthode des moments (Pagano (1978) ; Boshnakov (1996) ; Anderson et Meerschaert (2005)), l'approche bayésienne (Andel (1983)), la technique des moindres carrées (Adams et Goodwin (1995);Basawa et Lund (2001) ; Bentarzi et Aknouche (2006)) et la méthode du maximum

de vraisemblance exact (Vecchia (1985a); Li et Hui (1988); Jymenez et al (1989)). Ces techniques peuvent être classifiées dans deux classes générales, à savoir les méthodes qui emploient les données directement, et les méthodes qui appliquent quelques transformations préliminaires aux données. Parmi les méthodes dans la première classe, nous mentionnons en particulier le maximum de vraisemblance exact et ses nombreuses variantes et la méthode des moindres carrés avec ses variantes particulières (ordinaire, généralisée...etc). Typiquement, ces méthodes sont visées préservant quelques propriétés asymptotiques souhaitables, à savoir uniformité, efficacité asymptotique et normalité asymptotique, tout en réduisant leur complexité informatique. Parmi la deuxième classe des méthodes, l'approche la plus commune, connue sous le nom de méthode des moments, qui consiste à transformer les données en ensemble fini de statistiques et puis d'estimer les paramètres de ces statistiques. Comme cas spécial, nous mentionnons la méthode périodique de Yule-Walker (Pagano 1978), leurs formulations ordre-récurrentes de Durbin-Levinson (Sakai (1982); Boshnakov (1996)), et l'algorithme d'innovations (Anderson et al (1999); Anderson et Meerschaert (2005)).

Finalement, il est indispensable de signaler qu'il existe de nos jours, des procédures d'estimation en ligne. C'est à dire que ces méthodes sont basées sur des données de série chronologique de taille non fixe; elles sont plutôt progressivement disponibles en temps réel. Ces techniques d'estimation sont basées sur la construction itérative des paramètres de Durbin (1960), développées par Boshnakov (1996), tout en généralisant l'algorithme de Levinson-Durbin au compte des modèles (*PARMA*). De plus, d'autres chercheurs ont proposé l'approche bayésienne.

Apport et présentation de la thèse

Ce travail, dont le titre est "Séries financières et Modèles de mélange GARCH périodiques", se compose de quatre chapitres que nous allons présenter, brièvement, tout en exposant les aspects étudiés.

Chapitre 1 : Modélisation des séries financières

Dans ce chapitre, nous présentons les séries chronologiques financières et leurs caractéristiques. Ensuite nous exposerons quelques modèles de l'analyse des séries chronologiques pour la modélisation de telles séries, notamment la classe des modèles *ARCH/GARCH* ainsi que

ses multiples extensions linéaires et non linéaires .

Chapitre 2 : Processus Périodiquement Corrélés et Modèles ARMA Périodiques

Ce chapitre est consacré à l'étude des processus périodiquement corrélés et les modèles autorégressifs moyennes mobiles périodiques. Nous donnerons, en premier lieu, les définitions de ces processus. Par la suite, nous exposerons les modèles autorégressifs moyennes mobiles à coefficients périodiques. Enfin, nous présenterons les approches servant à étudier les propriétés de base de ces modèles, tout en passant en revue les supports théoriques sur lesquels reposent ces approches telle que la décomposition de *Wold*(1938), et celle de *Wold – Cramer*(1961).

Chapitre 3 : Modèles de Mélange Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques Généralisés Périodiques (MPGARCh)

L'objectif de ce chapitre est la présentation du modèle étudié, à savoir “ Mélange de Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques Généralisés Périodiques, *MPGARCh*.” Tout d'abord, nous procédons par exposer quelques modèles de mélange dans la classe des modèles *ARCH/GARCH*. Puis, nous nous attardons sur la présentation du modèle étudié, mélange de modèles *GARCH* périodique, dont la condition de stationnarité périodique du second ordre est établie, sous laquelle, on obtient l'expression de la variance du processus. L'étude de la condition d'existence du moment d'ordre quatre et son expression, sous cette condition, constituera la dernière partie de ce chapitre.

Chapitre 4 : Estimation du modèle MPGARCh

Ce chapitre traite le problème de l'estimation des paramètres d'un modèle de mélange de deux Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques Généralisés Périodiques, 2-périodique, d'ordres(1, 1; 1, 1), noté *MPGARCh*₂(2; 1, 1; 1, 1), ainsi ceux d'un modèle de mélange de deux Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques Généralisés classiques, d'ordres(1, 1; 1, 1), noté *MGARCh*(2; 1, 1; 1, 1). Dans une première phase nous avons exposé la méthode d'estimation qu'on a adopté, qui est celle du quasi-maximum de vraisemblance via l'algorithme EM. En outre, nous avons calculé la matrice d'informations des estimations. La deuxième phase est consacrée à l'identification du modèle : du fait que ces modèles possèdent une structure d'autocovariance ARMA, nous avons

adopté le critère d'identification $P - BIC^*$ adapté au cas périodique. Enfin et dans le but de faire une comparaison entre les deux modèles, classique et périodique, une application sur des séries chronologiques périodiques : une séries générée et des séries financières réelles est effectuée.

Chapitre 1

Modélisation des séries financières

1.1 Introduction

Depuis longtemps, la théorie financière fait recours de façon significative aux outils statistiques. Cela a commencé aux années soixantes après la traduction anglaise du remarquable travail de Louis Bachelier dans sa thèse de doctorat défendue en Mars (1900), intitulée "Théorie de la spéculation" où il utilisa des modèles de marches aléatoires, des mouvements Browniens et des martingales. Jusque dans les années 50, les ouvrages consacrés à la finance furent très souvent descriptifs ayant pour but essentiel de décrire et d'informer sur les instruments financiers. Les travaux de *Markowitz* (1952, 1959); *Tobin* (1958) et ceux de *Modigliani* et *Miller* (1958) ont bouleversé cette situation. Désormais, l'analyse des séries financières s'est basée sur l'usage de différentes méthodes statistiques. L'utilisation des modèles de régression, ainsi que les modèles de séries chronologiques se retrouve dans pratiquement tous ses secteurs, tout particulièrement l'analyse des séries chronologiques et les modèles associés à la classe autorégressif moyenne mobile (*ARMA*). L'âge d'or de cette modélisation se situe dans les années (1970) avec le remarquable développement de cette classe. Son usage s'est trouvé facile par le recours à la méthodologie de *Box et Jenkins* dans la sélection de l'ordre, l'estimation des paramètres et la validation du modèle. Méthodologie qui, depuis, a engendré de nombreux travaux intéressants.

Cependant, les chercheurs, théoriciens ainsi que praticiens, ont constaté depuis longtemps que les marchés financiers réagissent nerveusement aux désordres et désaccords politiques, aux crises économiques, aux guerres et aux désastres naturels. En de telles instables périodes,

les prix d'actifs financiers tendent à être très fluctuants, exhibant une variabilité instantanée (appelée volatilité) qui se prête à se regrouper. Ce qui se traduit statistiquement par l'instabilité de la variance conditionnelle c'est à dire sa dépendance du temps. Ce fait constitue l'une des plus importantes caractéristiques des séries financières. Vu ce constat, la classe des modèles (*ARMA*), considérant la variance constante, se révèle insuffisante et incapable de modéliser de telles séries.

Néanmoins, il y a trois décennies, devant ces problèmes de modélisation des séries financières et de d'autres (telles que : les nombres de taches solaires ; des séries de biologie ; des séries monétaires) les modèles non linéaires, dont les principales classes sont : les modèles bilinéaires ; les modèles à seuil ; les modèles à changement de régimes ; les modèles ARCH et les modèles à volatilité stochastique, ont été envisagés. L'étude de ces modèles, qui ne s'arrête de se développer, marque de nos jours un progrès fulgurant.

En effet, il est bien connu que la classe des modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques "*ARCH*" introduite par Engle (1982) a montré une grande flexibilité dans la modélisation des séries financières, et a contribué, par ailleurs, à la refonte de la théorie financière de façon à inclure la dépendance temporelle de la volatilité. Engle est parti de la constatation suivante : Les travaux économétriques usuels effectués sur certaines séries, particulièrement les séries financières et monétaires, qui supposent une volatilité constante, laissent certaines données mal expliquées, et celles-ci sont souvent regroupées. Elles correspondent à des périodes où les variations deviennent plus fortes que celles constatées sur l'ensemble de la série, et sont donc considérées comme aberrantes par un modèle linéaire usuel. Ce qui rend ce dernier inadéquat pour prendre compte de ce type de processus. Dès lors, les modèles "*ARCH*" jouent un rôle prépondérant dans la gestion du risque financier et la prise de décision sur la base des prix d'actifs observés.

Dans ce chapitre, nous commençons par revoir les caractéristiques essentielles des séries chronologiques financières. Nous ferons ensuite un bref aperçu sur les modèles bilinéaires, les modèles à seuil, ainsi que les modèles à changement de régimes et les modèles à volatilité stochastique. Puis, nous nous attellerons à une présentation générale des modèles "*ARCH*" et leurs diverses extensions, qui se trouvent, d'ores et déjà, en plein développement, à savoir : Les modèles GARCH ; ARMA à erreurs ARCH ; ARCH-M ; EGARCH ; IGARCH.

1.2 Caractéristiques des séries chronologiques financières

Les séries financières, comparées à d'autres séries chronologiques, ont quelques spécificités telles que : la volatilité et son comportement en "clusters" ; la persistance ; l'excès de kurtosis ; l'asymétrie (skewness) et d'autres. Avant de voir chacune de ces caractéristiques, on va rappeler la définition du rendement d'un actif et ses propriétés.

1.2.1 Propriétés des Processus de prix et de rendement

Il est bien connu que le processus stochastique représentant les prix d'actifs financiers, notés (p_t) est non stationnaire au sens faible, alors ils sont habituellement transformés en ce qu'on appelle rendements, notés (r_t) ("Returns" en anglais).

Définition 1.1 : rendement d'un actif financier

Soit p_t le prix d'un actif, à l'instant t .

Le rendement d'un actif financier, à l'instant t , noté r_t , est donné par :

$$r_t = \log\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) = \log(p_t) - \log(p_{t-1}).$$

Propriétés

a/-Absence de corrélation des rendements

L'application des différents tests de l'hypothèse de stationnarité, existant dans la littérature de l'analyse des séries chronologiques, montre que les processus des rendements des actifs financiers sont de la classe des processus, du second ordre, faiblement stationnaires, alors que les tests d'hypothèse de présence de corrélation n'indiquent aucune corrélation statistiquement significative. De plus, il est empiriquement constaté, depuis longtemps, que les logarithmes des processus aléatoires des prix des actifs financiers sont des processus stochastiques non corrélés. Ce fait est constaté par plusieurs analystes des séries chronologiques financières, théoriciens et praticiens, et est confirmé par les différents tests adéquats.

b/-Corrélation des carrés des rendements.

En dépit, du fait que le processus du rendement (r_t) est non corrélé, son carré, (r_t^2), est un processus corrélé(même constatation pour le processus $|r_t|$). D'où l'utilisation du processus carré du rendement du prix d'actif dans la modélisation des séries financières.

Passant à présent, à revoir les caractéristiques les plus importantes des séries financières.

1.2.2 La volatilité et son comportement en "clusters"

La caractéristique la plus marquante des séries chronologiques financières est la Volatilité Instantanée, qui peut être définie comme étant le changement instantané du rendement d'un actif financier. De plus, il est remarqué que cette volatilité tend à se regrouper "volatility clustering" : On sait que les périodes de forte variation sont souvent groupées (phase d'incertitude économique, tension sur les marchés,...) contrastant les périodes "calmes". Le développement important qu'a connu la modélisation du regroupement de la volatilité est dû essentiellement à l'observation de ce phénomène qui est, empiriquement, clairement constaté et bien mis en évidence depuis les travaux de Mandelbrot (1963) et de Fama (1965). Cela peut être statistiquement expliqué comme suit : Si on considère la modélisation "ARCH", la volatilité, h_t , dépend des carrés des valeurs passées du processus $\{X_{t-i}, i > 0\}$. Alors, si les X_{t-i} sont élevées en valeur absolue, h_t augmente, tandis que si elles sont petites en valeur absolue, h_t diminue. D'où, les fortes(faibles) variabilités ou fluctuations, sont fréquemment suivies par des fortes (faibles) fluctuations, ce qui engendre un certain regroupement des valeurs extrêmes en paquets de volatilité, surtout après un choc, qui est toujours suivi par une période de haute volatilité.

1.2.3 Excès de Kurtosis (coefficient d'aplatissement élevé)

Un autre phénomène observé dans la quasi-totalité des séries chronologiques financières concerne la distribution probabiliste des processus des innovations à savoir :distribution "leptokurtique". En effet, l'hypothèse de normalité des erreurs n'était pas mise en cause jusqu'aux années soixante. Parmi beaucoup d'investigateurs, en particulier Mandelbrot (1963) et Fama (1965) qui, dans son article montrait que la distribution des innovations, pour certains ac-

tifs, avait des queues plus épaisses et des pointes plus pointues qu'une loi normale. Avoir les queues épaisses signifie que les valeurs extrêmes se produisent plus fréquemment qu'indiquer par une distribution normale. Autrement dit, la probabilité d'un fort mouvement à la hausse ou à la baisse (krachs ou mini-krachs) est dans la réalité trop importante pour pouvoir être modélisée par une loi normale. D'où l'inconvénient de l'hypothèse de normalité, fréquemment imposée. En fait, cet aspect, entraîne une kurtosis relativement grande à celle de la loi normale. Alors, vu ce constat, plusieurs auteurs ont eu recours à des lois des innovations dont les queues sont plus lourdes que celles d'une loi de Gauss, comme la loi de Student. Pour remédier à cet inconvénient, une autre façon de faire augmenter la Kurtosis capturée par un modèle de la famille *ARCH /GARCH*, tout en gardant l'hypothèse de normalité des innovations, est la considération d'un modèle de mélange (qui sera proposé dans le chapitre 3).

On rappelle que le coefficient d'aplatissement (Kurtosis ou Coefficient de Fisher) d'une variable aléatoire X , de moyenne μ et de variance σ^2 , sous réserve que son moment d'ordre 4 existe, est donné par :

$$Kurt(X) = \frac{E(X - \mu)^4}{\sigma^4}$$

Notes :

-La kurtosis d'une loi normale est égale à 3. La distribution pour laquelle $Kurt(X) = 3$ est dite mésokurtique.

-Si $Kurt(X) > 3$, la distribution de X est plutôt pointue, en sa moyenne, que celle d'une normale et par conséquent ses queues sont plus épaisses, et la loi est dite leptokurtique .

-Si $Kurt(X) < 3$, la distribution de X est relativement plus aplatie que celle d'une loi normale et ses queues sont moins épaisses et la loi est dite platikurtique.

1.2.4 Skewness(Asymétrie)

Il est reconnu que la volatilité des rendements de plusieurs actifs financiers tend à réagir différemment selon l'arrivée de "bonnes "ou "mauvaises" nouvelles. c-à-d. selon le signe de l'innovation ε_t . Ce fait engendre une asymétrie au niveau de la loi des innovations d'un

modèle ajusté à une série chronologique financière. Black (1976) a noté, que les innovations de signe négatif (les mauvaises nouvelles) tendent à produire, dans le future, des périodes de volatilité plus grande comparées à celles produites par les innovations, de même grandeur, de signe positif (les bonnes nouvelles). ce phénomène qui se réfère comme un " effet de Levier " se traduit par cette asymétrie. Ceci renforce encore les raisons pour lesquelles l'hypothèse de normalité en analyse des séries chronologiques financières est mise en cause. D'où la nécessité de faire recours à des modèles plus adéquats pour capturer ce fait stylisé (comme les modèles EGARCH, TGARCH ou autres).

On rappelle que le coefficient d'asymétrie (Skewness) d'une variable aléatoire X , sous réserve que son moment d'ordre 3 existe, est donné par :

$$SK(X) = \frac{E(X - \mu)^3}{\sigma^3}$$

Notes :

-Le coefficient d'asymétrie est un indicateur de l'asymétrie de la loi de la variable aléatoire. Une valeur absolue statistiquement différente de zéro indique l'asymétrie de cette loi.

-Mais, $SK(X) = 0$, n'implique pas nécessairement que la distribution est symétrique. En effet, il existe des distributions ayant un coefficient d'asymétrie nul sans qu'elles soient symétriques.

-Si $SK(X) > 0$, alors la distribution de X est non symétrique. i.e. la probabilité que cette variable prend des valeurs supérieures à sa moyenne est plus importante que celle de prendre des valeurs plus petites.

-Si $SK(X) < 0$, la distribution est asymétrique et la variable aléatoire a tendance de prendre des valeurs inférieures à sa valeur moyenne avec une probabilité plus grande que celle associée aux valeurs supérieures.

1.2.5 Multimodalité de la distribution des innovations

Un autre fait stylisé des séries financières est que les distributions des résidus des modèles ajustés sont, souvent, multimodales. Ainsi, là encore, l'hypothèse de normalité des innovations est insuffisante et le recours à des modèles plus adéquats est indispensable. Les

mélanges de modèles peuvent être une issue.

1.2.6 Persistance (propriété de longue mémoire)

L'effet dit de "persistance" est souvent rencontré dans les séries chronologiques financières. Sur un processus générateur de telles séries, l'effet d'un choc persiste pour longtemps. En effet, contrairement à ce qui est connu que la fonction d'autocorrélation, d'une série chronologique faiblement stationnaire décroît d'une façon exponentielle vers 0, quand le retard augmente, il existe des processus, parmi ceux les générateurs des séries financières, dont la fonction d'autocorrélation a tendance à décroître, très lentement, vers 0. Ces processus sont dits de longue mémoire. Plus précisément, elle décroît vers 0 de façon polynomiale $\rho \simeq c(d)k^{2d-1}$, quand $k \rightarrow \infty$, $-0.5 < d < 0.5$.

Le plus simple modèle pour ce type de processus fractionnels est $(1 - B)^d X_t = \varepsilon_t$, $-0.5 < d < 0.5$.

1.2.7 Périodicité dans la structure des covariances

Beaucoup de séries chronologiques présentant l'effet de saisonnalité, s'apprêtent bien à être modéliser par l'approche traditionnelle de désaisonnalisation, largement popularisée par le fameux ouvrage de Box et Jenkins (1976). Cependant, elle s'avère inadéquate et insuffisante pour modéliser les séries chronologiques générées par des processus périodiquement corrélés. Très souvent, cette périodicité est cachée dans la structure de la fonction d'autocovariance, comme a été indiqué dans Tiao et Box. En effet, depuis la justification théorique par la décomposition de Wold-Cramér (1961), les chercheurs ne cessent d'étendre les différents modèles à coefficients constants aux modèles à coefficients évolutifs dans le temps. Développement bien enrichi durant les deux dernières décennies.

Chacune de ces caractéristiques des séries financières, et en premier lieu la volatilité et son regroupement, conduit à traiter ces séries d'une manière particulière. Pour ce faire, les modèles non linéaires se montrent adéquats. En effet, il y a plusieurs façons d'introduire des non linéarités dans un modèle de série chronologique. La première approche fondée sur des extensions non linéaires de processus ARMA qui permettent, notamment, d'appréhender

der les mécanismes d'asymétrie et de seuil. Parmi ceux : Les modèles bilinéaires, Modèles à changement de régimes, Modèles à seuils (TAR, SETAR, STAR, MA asymétriques etc...) développés depuis les travaux pionniers de Tong (1978). La seconde voie, introduite initialement par Engle (1982), consiste à proposer une représentation autorégressive de la variance conditionnellement à son information passée, permettant de tenir compte des phénomènes de volatilité. Ce qui a ouvert la voie à la modélisation ARCH et à ses nombreux développements. C'est sur cette voie que ce chapitre portera pour l'essentiel.

Dans cette section, nous commençons par présenter, les modèles bilinéaires, les modèles à changement de régimes et les modèle à volatilité stochastique suivis par une liste non exhaustive des extensions, classées parmi les plus importantes, des modèles ARCH/GARCH.

1.3 Modélisation non linéaire

1.3.1 Modèles bilinéaires

Les modèles bilinéaires de Granger et Andersen (1978) sont une généralisation des modèles ARMA introduisant des termes linéaires séparément en y et en ε , d'où leur appellation. L'équation du modèle bilinéaire, noté BL (p,q,P,Q) est donc :

$$y_t = \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^Q \lambda_{ij} y_{t-i} \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

où le processus ε_t est un bruit blanc gaussien (hypothèse qui peut être remplacée par celle d'un bruit blanc fort avec existence de la variance).

Avec $\theta_0 = 1$, et tous les paramètres sont des réels positifs.

Cette classe permet à la variance conditionnelle de dépendre du passé, pourtant la variance marginale vaut soit zéro soit l'infini (lorsque la variance marginale de ε_t est différente de un). chose qui rend cette modélisation peu intéressante.

1.3.2 Modèles à changement de régimes, Hamilton (1989)

Lorsqu'on ajuste des modèles autorégressifs ou même des modèles GARCH sur des sous périodes d'une très longue série, on constate des différences très importantes pour l'estimation des paramètres. Ces différences laissent penser que des changements de dynamique se produisent. De tels changements de dynamique peuvent s'expliquer par l'existence de cycles économiques, de successions de périodes de croissance et de récession. Un moyen (relativement) simple de modéliser ces changements dynamique est de postuler qu'ils se produisent selon une chaîne de Markov, dite cachée (HMM) car elle n'est pas directement observée [Baum et Petrie (1966) cas discret, Leroux (1992) cas général].

Modèles autorégressifs à changement de régimes markovien

Un processus stochastique $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$ à valeurs réelles est dit admettre une représentation autorégressive à changement de régimes markoviens s'il est solution de l'équation aux différences stochastique suivante :

$$\mathbf{y}_t = \phi_0(S_t) + \sum_{i=1}^p \phi_i(S_t) \mathbf{y}_{t-i} + \sigma(S_t) \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

où $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite i.i.d de moyenne nulle et de variance unité.

$\{S_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est une chaîne de Markov à espace d'états fini $E = \{1, \dots, K\}$, homogène, de matrice de probabilité de transition $P = (P_{ij})_{i,j \in E}$ avec $P_{ij} = P(S_{t+1} = j / S_t = i)$. On suppose que cette chaîne est irréductible, apériodique et récurrente, donc stable, et qu'elle est initialisée à partir de sa loi de probabilité invariante $P(S_t = i) = \pi_i$ avec $\pi_i = (\pi_1, \dots, \pi_K)$.

On rappelle que ces modèles à changement de régimes sont aussi appliqués aux séries financières, notamment en les coopérant avec les modèles de la classe *ARCH* (*GARCH*).

1.3.3 Modèles à volatilité stochastique

La volatilité, comme aspect des séries financières est constatée depuis longtemps. Cependant il y a peu de temps, depuis le fameux papier de Engle, que sa modélisation a connu un

développent satisfaisant et remarquable. Dès lors, plusieurs approches ont été conçues pour décrire et modéliser l'évolution, dans le temps, de la volatilité d'une série chronologique financière. La modélisation à volatilité stochastique constitue une de ces approches. Dans cette dernière, la volatilité devient, par le biais de l'introduction d'un autre processus d'innovation injecté dans la structure de la variance conditionnelle, une variable non observable (variable latente). Ce modèle peut capturer et décrire le phénomène de volatilité d'une manière plus flexible que les modèles de volatilité déterministe.

Le modèle est tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \\ z_t \sim N(0, 1) \\ \ln(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \ln(h_{t-i}) + v_t, t \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

où $\{v_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus non corrélé de loi normale de moyenne nulle et de variance σ_v^2 . De plus les processus $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ et $\{v_t, t \in \mathbb{Z}\}$ sont indépendants.

Les constantes $\alpha_i, i = 1, \dots, q$, sont telles que les racines de l'équation caractéristique :

$$z^q - \sum_{i=1}^q \alpha_i z^{q-i} = 0,$$

sont toutes à l'intérieur du cercle unité (Condition nécessaire et suffisante de stationnarité de $\ln(h_t)$).

Note

La positivité de la variance conditionnelle est assurée par le biais du logarithme. L'introduction du deuxième processus d'innovation, $\{v_t, t \in \mathbb{Z}\}$, dans l'expression de $\ln(h_t)$, a permis la relaxation des contraintes, $\alpha > 0 \geq 0, i = 1, \dots, q$, imposées dans le modèle à volatilité déterministe.

Remarque

Comme toute modélisation, celle à volatilité stochastique, a des avantages et des inconvénients : L'introduction de l'innovation v_t a permis de considérer la volatilité comme une variable non observable, cette vision a donné lieu à une augmentation appréciable de la

flexibilité du modèle décrivant l'évolution de la volatilité, mais elle augmente davantage la difficulté dans l'estimation des paramètres inconnus.

Quelques propriétés du modèle le plus simple de VS

Le modèle le plus simple de la famille de la modélisation à volatilité stochastique et qui a reçu plus d'intérêt est le modèle, dit canonique, défini par :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \\ z_t \sim N(0, 1) \\ \ln(h_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(h_{t-1}) + v_t, t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

avec, toujours $v_t \sim i.i.d. N(0, \sigma_v^2)$ indépendant de $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

La condition nécessaire et suffisante de stationnarité faible de $\ln(h_t)$ est $|\alpha_1| < 1$. On peut facilement vérifier, sous cette condition, que :

$$\ln(h_t) \sim N\left(\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}, \frac{\sigma_v^2}{1 - \alpha_1^2}\right)$$

Dans ce cas, la Kurtosis du processus $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est égale à :

$$Kurt = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{E(\varepsilon_t^2)^2} = 3 \exp\left(\frac{\sigma_v^2}{1 - \alpha_1^2}\right) > 3.$$

Finalement, on note qu'il existe d'autres formes alternatives du modèle de VS, présenté précédemment, citons par exemple le modèle introduit par Kim et al.(1998), donné comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \alpha \exp\left(\frac{1}{2}h_t\right)z_t, \\ z_t \sim N(0, 1) \\ h_t = \mu + \beta(h_{t-1} - \mu) + v_t, t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Parallèlement au succès dû à l'utilisation de la moyenne conditionnelle par rapport à la moyenne inconditionnelle dans la méthodologie des modèles ARMA, l'originalité des modèles ARCH réside dans la distinction entre les moments conditionnels et les moments inconditionnels au second ordre. Tandis que la variance inconditionnelle de la variable d'intérêt reste

invariante dans le temps ; la variance conditionnelle dépend de façon non triviale de l'information antérieure. La nature exacte de cette dépendance est d'une importance capitale pour la modélisation des séries économiques (en particulier des séries financières) et leur comportement dynamique. Dans les applications pratiques, il est nécessaire d'avoir une idée à priori sur les irrégularités pouvant conduire à une formulation ARCH. Pour prendre compte de ces irrégularités, Engle a imaginé un processus mixte : il garde la structure du modèle ARMA, mais le bruit blanc n'a plus une volatilité constante.

1.3.4 Modèle ARCH

Supposons ε_t un processus aléatoire réel à temps discret. Alors sous certaines conditions et connaissant les réalisations passées, ce processus est tel que :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \\ z_t \text{ i.i.d. } E(z_t) = 0 \text{ et } Var(z_t) = 1. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où h_t est une fonction mesurable positive non constante .

Par définition ε_t est un processus non corrélé de moyenne nulle, mais dont la variance qui vaut h_t peut varier au cours du temps. Dans la plupart des applications, ε_t correspond à l'innovation d'un autre processus stochastique y_t tel que :

$$y_t = g(x_{t-1}; b) + \varepsilon_t$$

où $g(x_{t-1}; b)$ est une fonction de x_{t-1} et d'un vecteur de paramètres b , avec x_{t-1} appartenant à l'ensemble d'information disponible à la date $t - 1$. Pour simplifier, nous supposons que ε_t est lui-même le processus observable.

La formulation (1.2.1) est extrêmement générale et autorise une grande variété de modèles possibles. Dans le reste de la section nous allons exposer quelques modélisations qui ont été développées pour représenter les variations de h_t . Bien entendu, on commence par le premier modèle suggéré par Engle (1982) dans son papier fondateur.

Modèles ARCH linéaire

$$\begin{cases} \varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \\ h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 \\ z_t \sim i.i.d. N(0, 1) \end{cases} \quad (1.2.2)$$

où $\alpha_0 > 0$ et $\alpha_i \geq 0$ pour tout $i = 1, \dots, q$, sans quoi la variance conditionnelle pourrait être négative. Ce modèle est connu sous le nom *ARCH* (q) linéaire.

On remarque alors que Engle (1982) a permis à la variance conditionnelle, h_t , de changer au cours du temps. La variable aléatoire h_t s'exprime linéairement en fonction des carrés des valeurs passées du processus, lequel apparaît comme un bruit blanc gaussien, multiplié à chaque temps, t , par la racine carrée de cette dernière. L'intérêt de cette approche réside dans l'introduction d'une dynamique endogène au niveau de la définition de la variance. Ces modèles fournissent une spécification originale de l'hétéroscédasticité.

Remarque

Les contraintes sur les coefficients garantissent la positivité de la variance conditionnelle.

On peut de plus montrer que cette variance est finie si $\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$.

Le modèle *ARCH*(q) permet de prendre en compte les regroupements de volatilité, c'est-à-dire le fait que les fortes (faible) variations de prix sont suivies par d'autres fortes (faibles) variations de prix mais dont le signe n'est pas prévisible.

Une deuxième formulation du modèle est possible, à savoir :

$$\begin{cases} \varepsilon_t / \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, h_t) \\ h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \end{cases} \quad (1.2.3)$$

où \mathcal{F}_{t-1} représente l'ensemble d'information disponible à l'instant $t-1$, et la distribution conditionnelle de ε_t n'est autre qu'une gaussienne centrée, de variance h_t .

Maintenant, si on pose $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$, la formulation *ARCH*(q) devient :

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + v_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (1.2.4)$$

Ce qui forme une représentation $AR(q)$ pour le carré du processus d'innovation ε_t^2 , sachant que les variables $v_t = z_t^2 h_t - h_t = (z_t^2 - 1)h_t$ ne sont pas de variance constante mais de moyenne nulle et non corrélées entre elles. Notons que cette dernière formulation donne une forme plus générale au modèle $ARCH(q)$ où la normalité n'est pas requise.

Note

Dans le but de réduire le nombre de paramètres et de garantir une décroissance de l'impact des chocs les plus éloignés dans le passé, on impose souvent au début une structure de retard, ad hoc, décroissants linéairement, par exemple $\alpha_i = \alpha \frac{q+1-i}{q+1}$, $i = 1, \dots, q$. comme dans les papiers de Engle [1982, 1983].

1.3.5 Propriétés d'un modèle $ARCH$

Pour comprendre les modèles $ARCH$, il suffit d'étudier soigneusement le modèle $ARCH(1)$ suivant :

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= z_t \sqrt{h_t} \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \\ z_t &\sim i.i.d. N(0, 1)\end{aligned}$$

avec $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0$.

Nous allons à présent donner les propriétés fondamentales des processus $ARCH$.

Non corrélation du processus ε_t

Notons premièrement que, la moyenne non conditionnelle de ε_t est nulle :

$$E(\varepsilon_t) = E(E(\varepsilon_t/\mathcal{F}_{t-1})) = E(\sqrt{h_t}E(\varepsilon_t)) = 0.$$

Une propriété importante de l'espérance conditionnelle est la loi des espérances itérées :

$$E(\varepsilon_t/\mathcal{F}_r) = E(E(\varepsilon_t/\mathcal{F}_s)/\mathcal{F}_r), \quad \text{si } r \text{ et } s \text{ sont tels que } \mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{F}_s \text{ i.e. } r \leq s$$

En utilisant, cette dernière propriété, on aura, pour tout entier strictement positif m :

$$E(\varepsilon_t/\mathcal{F}_{t-m}) = E(E(\varepsilon_t/\mathcal{F}_{t-1})/\mathcal{F}_{t-m}) = E(0/\mathcal{F}_{t-m}) = 0 \quad \forall m.$$

Variance conditionnelle et non conditionnelle du processus

La variance non conditionnelle de ε_t est égale à :

$$V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon_{t-1}^2).$$

Sous l'hypothèse de stationnarité et d'annulité de la moyenne du processus, on a :

$$V(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

Pour que cette quantité existe et soit positive, ayant déjà $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0$, il faut que α_1 vérifie : $0 \leq \alpha_1 < 1$. Le processus ε_t est alors dit stationnaire au second ordre.

Tandis que la variance non conditionnelle est constante, la variance conditionnelle varie dans le temps, propriété centrale de la classe ARCH, et vérifie :

$$V(\varepsilon_t / \mathcal{F}_{t-m}) = \alpha_0 \left(\frac{1 - \alpha_1^m}{1 - \alpha_1} \right) + \alpha_1^m \varepsilon_{t-m}^2, \quad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

Preuve de la variance conditionnelle :

Prenant la formulation *ARCH* définie par(1.2.4) pour $q = 1$. Par itérations successives, on a :

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0(1 + \alpha_1 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_1^m) + \alpha_1^m \varepsilon_{t-m}^2 + v_t + \alpha_1 v_{t-1} + \dots + \alpha_1^{m-1} v_{t-m+1}$$

Considérant maintenant, l'espérance conditionnelle des deux membres, il vient :

$$E(\varepsilon_t^2 / \mathcal{F}_{t-m}) = \alpha_0 \left(\frac{1 - \alpha_1^m}{1 - \alpha_1} \right) + \alpha_1^m \varepsilon_{t-m}^2$$

Remarquons lorsque m tend vers l'infini, ces variances conditionnelles convergent vers la variance non conditionnelle, et l'on retrouve, alors, la formule de cette dernière, donnée ci-dessus.

$$V(\varepsilon_t) = \lim_{m \rightarrow \infty} V(\varepsilon_t / \mathcal{F}_{t-m}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\alpha_0 \left(\frac{1 - \alpha_1^m}{1 - \alpha_1} \right) + \alpha_1^m \varepsilon_{t-m}^2 \right] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

Moments centrés supérieurs

Les moments centrés impairs sont nuls par symétrie et les moments d'ordre pairs sont calculés en utilisant le théorème suivant [Engle(1982)].

On suppose que le processus commence indéfiniment loin dans le passé avec les $2r$ premiers moments finis.

Théorème Engle(1982)

Pour tout entier r , le $2r^{\text{ième}}$ moment du processus $ARCH(1)$ linéaire, avec $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, existe si, et seulement si :

$$\alpha_1^r \prod_{j=1}^r (2j - 1) < 1.$$

Preuve : voir Engle(1982).

Coefficient d'applatissage du processus (ou Kurtosis)

On peut également s'intéresser aux moments d'ordre supérieur des processus $ARCH$ afin d'analyser d'autres caractéristiques de ces modèles.

Puisque, dans les modèles (1.2.2), (1.2.3), les innovations sont conditionnellement distribuées suivant une loi normale, le troisième moment conditionnel $E(\varepsilon_t^3 / \mathcal{F}_{t-m}) = 0$, ce qui implique, toujours par la loi des espérances itérées, que le coefficient de skewness de la distribution de X_t est nul. En conséquence, la distribution de X_t , puisqu'elle est continue, est également symétrique.

L'analyse du quatrième moment standardisé (kurtosis) donne une indication sur l'applatissage de la distribution de ε_t . Il est difficile d'écrire une expression générale concise de la kurtosis d'un processus $ARCH(p)$. Néanmoins, on peut la calculer explicitement si ε_t est un processus $ARCH(1)$: il est donné dans ce cas par

$$kurt = 3 \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2} \text{ avec } 3\alpha_1^2 < 1$$

si $3\alpha_1^2 \geq 1$, alors le quatrième moment du processus n'existe pas. Puisque, α_1 doit véri-

fié : $0 < \alpha_1 < 1/\sqrt{3}$, on en déduit que $kurt > 3$, et donc que la distribution de ε_t est plus aplatie que celle de la normale. Ce résultat se généralise pour tout q . Même sans connaître la forme exacte du quatrième moment d'un processus ARCH(q), il est possible d'arriver facilement à la conclusion que $kurt \geq 3$ dans le cas général, comme nous allons le montrer à présent. Par (1.2.3), la distribution conditionnelle de ε_t est une normale et on sait que pour la loi normale, la kurtosis est égale à 3. Nous pouvons, donc, écrire :

$$E(\varepsilon_t^4 / \mathcal{F}_{t-m}) = 3 (E(\varepsilon_t^2 / \mathcal{F}_{t-m}))^2$$

En prenant l'espérance de chacun des membres, et en utilisant à nouveau la loi des espérances itérées, on obtient :

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t^4) &= 3E((E(\varepsilon_t^2 / \mathcal{F}_{t-m}))^2) \\ &\geq 3[E(E(\varepsilon_t^2 / \mathcal{F}_{t-m}))]^2 = 3[E(\varepsilon_t^2)]^2 \end{aligned}$$

et donc

$$k = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{[E(\varepsilon_t^2)]^2} \geq 3.$$

ce qui traduit l'aspect leptokurtique de la distribution du processus.

Il est souvent nécessaire en pratique lorsqu'on tente à identifier un modèle ARCH(q) linéaire de retenir un grand nombre de retard, q . Pour remédier à ce problème et, en sus, prendre en considération la longue mémoire observée empiriquement, vu que l'estimation sans la structure de retard conduit souvent à une violation des contraintes de positivité [voir Engle(1982); Engle(1983); Engle et Kraft(1983)], Bollerslev (1986) a généralisé le modèle initial d'Engle en établissant le modèle GARCH(p, q). Cette extension consiste en l'introduction de valeurs retardées de la variance conditionnelle dans son équation, ce qui est similaire à l'extension des processus AR aux processus ARMA. Cela permet une description plus parcimonieuse.

1.3.6 Modèles GARCH

Le modèle GARCH(p, q) est défini par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_t / \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, h_t) \\ h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} = \alpha_0 + A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)h_t, \quad t \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (1.2.5)$$

où $\alpha_0 > 0$; $\alpha_i \geq 0$ pour tout $i = 1, \dots, q$; $\beta_j \geq 0$ pour tout $j = 1, \dots, p$.

$$\text{et } A(L) = \sum_{i=1}^q \alpha_i L^i; \quad B(L) = \sum_{j=1}^p \beta_j L^j$$

Note

Pour $p = 0$, le processus GARCH (p, q) n'est rien que le processus ARCH (q).

Remarque

Le processus GARCH(p, q) est asymptotiquement stationnaire au second ordre, si $A(1) +$

$$B(1) = \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1. \text{ et la variance inconditionnelle } Var(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j}.$$

et $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$, pour $t \neq s$

Bien entendu, dans ces conditions, le processus GARCH (p, q) est équivalent à un processus ARCH (∞) linéaire, dont les paramètres décroissent de manière géométrique.

Une deuxième formulation du modèle GARCH (p, q) possible est la suivante :

En posant $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$, et en remplaçant h_t , par $\varepsilon_t^2 - v_t$, dans l'équation de la variance conditionnelle, h_t , on aura :

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_j) \varepsilon_{t-i}^2 + v_t - \sum_{j=1}^p \beta_j v_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (1.2.6)$$

avec $\alpha_i = 0$ si $i > q$ et $\beta_j = 0$ si $j > p$.

Ainsi, nous remarquons que le carré du processus, ε_t^2 , est vu comme un modèle ARMA($\max(p, q), p$).

L'innovation v_t est généralement hétéroscédastique, et de plus si la loi conditionnelle de

ε_t est normale, alors la variance conditionnelle de v_t sera égale à

$$\begin{aligned} E(v_t^2/\mathcal{F}_{t-1}) &= E(\varepsilon_t^4/\mathcal{F}_{t-1}) - 2E(\varepsilon_t^2/\mathcal{F}_{t-1})h_t + h_t^2 \\ &= 2h_t^2 \end{aligned}$$

1.3.7 Modèles IGARCH

Dans les travaux empiriques utilisant des données financières de haute fréquence temporelle, on constate souvent la persistance entraînée par les estimations de la variance conditionnelle, c'est à dire qu'un choc dans la variance conditionnelle est persistant dans le sens qu'il reste important dans les futures prévisions[Cf Bollerslev et al (1994)]. Cela se manifeste par la présence d'une racine unitaire dans le polynôme autoregressif i.e. $A(1) + B(1) = \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$ ou très proche de un. Cette motivation empirique a conduit Engle et Bollerslev (1986) à introduire cette classe de modèles en la qualifiant de GARCH Intégré ou IGARCH.

Cependant, parfois les distributions des rendements sont asymétriques. En effet, dans leur version initiale, les modèles *ARCH/GARCH* ne permettent pas de tenir compte de l'hypothèse d'asymétrie puisque la variance dépend uniquement de la valeur absolue de ε_t et non de son signe. Pour remédier à cet inconvénient, les modèles ARCH non linéaires et plus particulièrement la prise en compte des phénomènes asymétriques, deux grandes classes de modèles non linéaires, ont été proposés : Modèles *EGARCH* et Modèles *TARCH/TGARCH*

1.3.8 Modèles EGARCH

Le modèle EGARCH (Exponential GARCH) spécifie la variance conditionnelle en forme logarithmique. Cette spécification capture le fait stylisé qu'un choc négatif entraîne une variance conditionnelle, dans la période antérieure, plus élevée qu'un choc positif (*Nelson 1990, c*).

Alors, la variance h_t est une fonction asymétrique de ε_t , et le modèle est défini comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \\ \log(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\theta z_{t-i} + \gamma [|z_{t-i}| - E|z_{t-i}|]) + \sum_{j=1}^p \beta_j \log(h_{t-j}), t \in \mathbb{Z} \\ z_t \sim i.i.d. N(0, 1) \end{cases} \quad (1.2.7)$$

Remarquons que la variance h_t est, toujours, positive quelle que soit la valeur prise par les paramètres $\alpha_i, \beta_j, i = 1, \dots, q, j = 1, \dots, p$.

On note que si $\alpha_i \theta < 0$, la variance tend à croître (décroître) lorsque ε_{t-i} est négatif (positif), ce qui est en accord avec les constatations empiriques.

1.3.9 Modèles TGARCH

Engle et Bollerslev (1986) ont étudié les modèles *ARCH* à seuils (*TARCH*, T pour Threshold) où la variance est une fonction linéaire définie par morceaux qui permet différentes fonctions de volatilité selon le signe et la valeur des chocs. *Rabemananjara et Zakoian* (1991) ont proposé une généralisation avec les modèles TGARCH.

L'idée est la suivante : une autre façon que celle du modèle EGARCH, d'enrichir le modèle GARCH (p, q), pour qu'il soit capable de capturer l'évidence d'asymétrie est de faire apparaître l'effet du signe de l'innovation dans l'expression de la volatilité conditionnelle comme suit :

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^r \gamma_i I_{(\varepsilon_{t-i} < 0)} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$\text{où } I_{(\varepsilon_{t-i} < 0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon_{t-i} < 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases},$$

et $\gamma_i > 0, i = 1, \dots, r$ avec les restrictions d'un modèle GARCH(p, q) sur les paramètres restants.

1.3.10 Modèles à erreurs GARCH

Jusqu'ici, on a présenté différents modèles de la classe ARCH appliqués au processus initial, ε_t . En effet, dans la plupart des applications, ε_t correspond à l'innovation d'un autre processus stochastique, Y_t , ce qui permet de rajouter des effets additionnels des variables explicatives dans la moyenne ou la variance conditionnelles [Cf Weiss (1986)] ou.1984

A titre d'exemple :

On présente un modèle de régression linéaire avec erreurs GARCH

$$\begin{cases} Y_t = X_t\beta + \varepsilon_t, \\ \text{où } \varepsilon_t \text{ est un processus GARCH}(p, q) , \end{cases}$$

et un modèle ARMA avec erreurs GARCH

$$\begin{cases} \Phi(L)Y_t = \Theta(L)\varepsilon_t, \\ \text{où } \varepsilon_t \text{ est un processus GARCH}(p, q) , \end{cases}$$

1.3.11 Modèles ARCH-M

L'évaluation du risque constitue un point central dans l'économie financière et du fait que l'évaluation traditionnelle ne tient pas compte de la variation du degré d'incertitude dans le temps, les méthodes traditionnelles de mesure et de prédiction du risque sont extrêmement simples et non adaptées pour l'analyse de telles séries. En effet, de nombreuses théories financières relient de façon explicite le risque et l'espérance des rendements. Il existe des actifs plus ou moins risqués, et le rendement espéré de chaque actif doit refléter l'existence de ce risque : Plus l'actif est risqué plus le rendement anticipé devrait être élevé. Les modèles ARCH en moyenne, notés ARCH-M, introduit par Engle-Lilien- Robbins(1987) où la variance conditionnelle est une fonction explicative de la moyenne conditionnelle, semblent refléter cet aspect.

Le modèle général est donné par :

$$\begin{cases} Y_t = g(X_t; \beta; h_t) + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = z_t\sqrt{h_t}; \quad z_t \sim i.i.d. N(0, 1) \\ h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q\varepsilon_{t-q}^2 \end{cases}$$

On peut envisager plusieurs formes de la fonction $g(X_t; b; h_t)$, dont les plus adoptées sont :

La forme linéaire $g(X_t; \beta; h_t) = X_t' \beta + \delta h_t$.

La forme Log-linéaire $g(X_t; \beta; x_t; b; h_t) = X_t' \beta + \delta \log(h_t)$.

La forme racine carrée $g(X_t; \beta; h_t) = X_t' \beta + \delta \sqrt{h_t}$. c'est celui proposé par Engle-Lilien-Robbins(1987).

Avec δ : coefficient relatif d'aversion pour le risque.

Chapitre 2

Modélisation linéaire des séries chronologiques périodiques

2.1 Introduction :

Après la parution du fameux ouvrage de *Box et Jenkins*(1976), l'analyse des séries chronologiques a pris un essor fulgurant. L'intérêt et l'usage facile (dans la détermination de l'ordre (p, q) du modèle représentant les séries stationnaires ; l'estimation des paramètres et la validation du dit modèle) de ce qu'on appelle, dans la littérature des séries chronologiques, "Méthodologie de Box et Jenkins", a fait de cet ouvrage une référence incontournable. En effet, même si les séries étudiées étaient non stationnaires, il existe des transformations adéquates, dites de désaisonnalisation, à savoir : les différences ordinaires, les différences saisonnières, et les différences mixtes. De telles techniques servent à assurer la stationnarité au second ordre, pour pouvoir appliquer par la suite cette méthodologie.

Cependant, la pratique a montré que l'application d'une telle analyse à des séries exhibant une saisonnalité forte ou une tendance cyclique est parfois visiblement inadéquate. Cela est dû au fait que la structure de leur corrélation dépend de la saison. En effet, Tiao et Grupe (1980), ont bien illustré ce constat à travers l'exemple de la série mesurant le taux d'ozone ambiant, heure par heure, sur le bassin de *Los – Angles*. Pratiquement, on sait bien que sur ce bassin, le taux d'ozone croit, le matin, jusqu'à atteindre sa valeur maximale le début de l'après midi ; cette quantité diminue petit à petit jusqu'à ce qu'elle s'annule vers la nuit. Alors, l'adaptation d'une analyse standard pour modéliser une telle série aboutit à une mauvaise

identification du modèle du fait qu'elle ne prend pas en compte la nature périodique des données. De plus, Osborn (1991) a mis en évidence qu'une modélisation pareille mène à une surévaluation des ordres; non convergence des estimateurs des paramètres et l'inefficacité des prévisions.

Pour remédier à ce problème, Gladyshev (1961) introduisit, le concept des processus périodiquement corrélés. Ces derniers sont des processus du second ordre dont la moyenne et la fonction d'autocovariance sont des fonctions périodiques du temps. Ce même auteur établit le lien existant entre les processus périodiquement corrélés et les processus multivariés stationnaires qui leur sont associés et montra qu'une condition nécessaire et suffisante qu'un processus aléatoire, au second ordre, soit périodiquement corrélé est que le processus multivarié qui lui est associé soit faiblement stationnaire. En effet, en s'appuyant sur le théorème de décomposition linéaire de Cramer (1961), qui est une extension du théorème de Wold (1938) aux processus non stationnaires, les modèles linéaires périodiques qui forment une classe particulière des modèles évolutifs dans le temps, sont introduits afin de représenter les processus périodiquement corrélés. Ce qui, par la suite, a donné naissance aux modèles linéaires autorégressifs moyennes mobiles périodiques *PARMA*, représentation linéaire des processus périodiquement corrélés.

L'approche de Gladyshev (1961), décrite ci-dessous, est dite "Period-span Lumping". Faisant recours aux résultats déjà existants dans la littérature des processus multivariés stationnaires; cette approche se révèle appropriée dans l'étude des modèles périodiques, du fait que l'étude des propriétés théoriques d'un modèle *PARMA*, de période S , tels que la causalité et l'inversibilité ...etc, se ramène à celle d'un modèle *ARMA*, S -varié, stationnaire qui lui est associé. En sus, ces modèles périodiques ont montré un intérêt appréciable dans l'analyse des modèles *ARMA* multidimensionnelles, en servant à réduire le nombre de paramètres (Pagano(1978)).

En effet, cette technique a reçu l'intérêt de plusieurs chercheurs tels que : Cleveland et Tiao (1979);Tiao et Grupe (1980);Bentarzi et Hallin (1994);Bentarzi (1995);Ula et Smadi (1997) et autres. Toutefois, elle présente, comme toute autre technique, des inconvénients : Cipra (1985) a montré qu'il était indispensable de considérer la stationnarité de chaque canal. En outre, Bentarzi et Hallin (1994) [Cf. (1995)] ont montré qu'il ne faut retenir que

la condition suffisante ce qui diminue le nombre des modèles candidats i.e., on peut omettre de sélectionner certains modèles. De plus, vu son incapacité dans l'analyse spectrale, ces derniers auteurs ont développé une approche alternative, appelée ultérieurement par *Ula et Smadi* "Order Span Lumping ". Celle-ci consiste à ramener l'étude des propriétés d'un modèle m -varié, d -périodique, d'ordre q , à celle d'un modèle mq -varié, S -périodique d'ordre un.

Par ailleurs, plusieurs chercheurs furent intéressés par l'étude de quelques propriétés algébriques d'un modèle *PARMA*, comme la causalité (Tiao et Grupe (1980) ; Boshnakov(1997)); l'inversibilité (Cipra (1985), *Bentarzi* et Hallin (1994)) et la factorisation spectrale (*Bentarzi* et Hallin (1998), *Bentarzi* (1998)), aussi bien que l'étude de certaines propriétés probabilistes telles que le stationnarité périodique, l'ergodicité périodique et l'existence de moments d'ordre supérieur (Boyles et Gardner(1983). Par exemple, le problème de factorisation spectrale d'un modèle (*PARMA*) a été complètement résolu par *Bentarzi* (1998).

Dans ce présent chapitre, nous allons commencer par donner les définitions des processus périodiquement corrélés, ensuite présenter la classe des modèles linéaires à coefficients périodiques représentée par les modèles (*PARMA*) tout en exposant les approches, servant à étudier ces propriétés de base, à savoir : "Period Span Lumping", "Order Span Lumping".

2.2 Processus périodiquement corrélés

Gladyshev(1961) a introduit le concept de la corrélation périodique de la classe des modèles linéaires autorégressifs moyennes mobiles périodiques (*PARMA*) .

Soit $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus du second ordre, de moyenne et de fonction d'autocovariance, respectivement :

$$\mu_t = E(\mathbf{y}_t) ; t, \in \mathbb{Z}, \quad (2.2.1)$$

$$\gamma(t, s) = cov(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_s) ; t, s \in \mathbb{Z}, \quad (2.2.2)$$

Sans perte de généralité, on assume que $\mu_t = 0; t \in \mathbb{Z}$. i.e. le processus $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est supposé centré , ou encore représente une déviation d'un autre processus de moyenne μ_t .

2.2.1 Définition 2.2.1 : Processus périodiquement strictement stationnaire

Le processus du second ordre $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit strictement périodique (ou périodique au sens strict) s'il existe un entier S , strictement positif, tel que pour tout entier positif k et tout t_1, t_2, \dots, t_k ; la distribution conjointe de $(\mathbf{y}_{t_1}, \mathbf{y}_{t_2}, \dots, \mathbf{y}_{t_k})'$ est la même de celle de $(\mathbf{y}_{t_1+S}, \mathbf{y}_{t_2+S}, \dots, \mathbf{y}_{t_k+S})'$, ce qui se traduit par :

$$F_{t_1+S, t_2+S, \dots, t_k+S}(x_1, x_2, \dots, x_k) = F_{t_1, t_2, \dots, t_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (2.2.3)$$

$F(\cdot)$ est la fonction de distribution du processus $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$, et S , dit période du processus, est le plus petit entier strictement positif satisfaisant cette dernière condition.

Remarque

Il est clair que dans le cas particulier $S = 1$, ce processus (vérifiant la définition 2.2.1) est stationnaire au sens strict (ou fort). Il est bien connu en pratique, que vérifier la périodicité stricte des processus aléatoires, ainsi que leur stationnarité stricte, est une tâche délicate. Cependant, plusieurs des propriétés statistiques importantes des processus aléatoires peuvent être obtenues à partir de leur premier et second moments (s'ils existent); donc, la périodicité en ces deux moments peut être assez suffisante pour expliquer la propriété de stationnarité périodique du processus. Ce qui a conduit au concept de la corrélation périodique de *Gladyshev*(1961).

2.2.2 Définition 2.2.2 : Processus périodiquement corrélé

Le processus du second ordre $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit périodiquement corrélé (ou faiblement périodique) s'il existe un entier S , strictement positif, tel que la moyenne et la fonction d'autocovariance sont S -périodiques dans le temps, ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} i) \mu_{t+S\tau} &= \mu_t \\ ii) \gamma(t+S\tau, s+S\tau) &= \gamma(t, s) \quad \forall t, s, \tau \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Remarque

Le processus vérifiant une telle définition, pour $S = 1$, est un processus du second ordre faiblement stationnaire.

2.2.3 Fonction d'autocovariance d'un processus périodiquement corrélé

Soit $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus périodiquement corrélé, S -périodique, de moyenne nulle et de fonction d'autocovariance, S -périodique, $\gamma(\cdot, \cdot)$.

Soit, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, l'entier positif $i = 1, 2, \dots, S$ et l'entier τ , tel que $t = i + S\tau$.

Donc, la fonction d'autocovariance du processus \mathbf{y}_t , S -périodique, d'ordre h (ou encore pour l'horizon h) relative à la $i^{\text{ième}}$ période, notée $\gamma_h^{(i)}$, est telle que :

$$\gamma_h^{(i)} = \gamma(t, t - h) = \gamma(i, i - h) ; i = 1, 2, \dots, S, t \in \mathbb{Z}, h \in \mathbb{N}. \quad (2.2.5)$$

Il est facile de vérifier que :

$$\gamma_h^{(i+S\tau)} = \gamma_h^{(i)} \text{ et } \gamma_{-h}^{(i)} = \gamma_h^{(i+h)}. \quad (2.2.6)$$

2.2.4 Fonction d'autocovariance empirique d'un processus périodiquement corrélé

Soit $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus périodiquement corrélé, S -périodique, de moyenne nulle et de fonction d'autocovariance S -périodique, $\gamma_h^{(i)}$.

soit $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{NS}\}$ une série générée par ce processus.

Alors, la fonction d'autocovariance empirique, notée $\tilde{\gamma}_h^{(i)}$, est définie par :

$$\tilde{\gamma}_h^{(i)} = N^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} \mathbf{y}_{i+S\tau} \mathbf{y}_{i+S\tau-h}. \quad (2.2.7)$$

Avec $\mathbf{y}_{i+S\tau-l} = 0$ quand $i + S\tau - l < 1$ ou $i + S\tau - l > NS$.

Lemme 2.2.1 : Convergence de la fonction d'autocovariance empirique

Soit $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus périodiquement corrélé.

Si $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est Gaussien, alors la fonction d'autocovariance empirique $\tilde{\gamma}$, converge presque sûrement et en moyenne quadratique vers la fonction d'autocovariance γ , quand N tend vers $+\infty$.

Preuve : voir Pagano (1978)

2.2.5 Processus périodiquement corrélé et processus multivarié stationnaire qui lui correspond

L'introduction du concept des processus périodiquement corrélés, basée sur la décomposition de *Wold – Cramer* (1961), par Gladyshev (1961), était renforcé par son théorème qui sera mentionné ci-dessous. Ce dernier assure que n'importe quel processus périodiquement corrélé, S -periodique, peut être représenté d'une manière équivalente par un processus multivarié stationnaire, S -varié. Dès lors, l'étude des processus périodiquement corrélés se ramène à celle des processus multivariés stationnaires qui leur sont associés.

Théorème 2.2.1 Gladyshev (1961)

soit $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus périodiquement corrélé S -periodique.

Soit le processus S -varié, $X(\tau)$, dont la i^{ieme} composante $X_i(\tau)$, est donnée par : $X_i(\tau) = \mathbf{y}_{i+S\tau}$; $i = 1, 2, \dots, S$ et $\tau \in \mathbb{Z}$.

Ce processus est donc donné par le vecteur :

$$\begin{aligned} X(\tau) &= (X_1(\tau), X_2(\tau), \dots, X_S(\tau))', \\ &= (\mathbf{y}_{1+S\tau}, \mathbf{y}_{2+S\tau}, \dots, \mathbf{y}_{S+S\tau})'. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Alors, le processus $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est périodiquement corrélé si, et seulement si $\{X(\tau), \tau \in \mathbb{Z}\}$ est faiblement stationnaire.

2.2.6 Relation entre les autocovariances d'un processus périodiquement corrélé et celles d'un processus multivarié stationnaire qui lui correspond

Soit $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$ la matrice de variance-covariance de $X(\tau_1)$ et $X(\tau_2)$, telle que :

$$\Gamma(\tau_1, \tau_2) = (\Gamma_{ij}(\tau_1, \tau_2))_{i,j=1,\dots,S}.$$

$$\text{avec } \Gamma_{ij}(\tau_1, \tau_2) = \text{cov}(X(\tau_1), X(\tau_2)); \quad i, j = 1, \dots, S \text{ et } \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{Z}.$$

Alors, il est facile de vérifier que :

$$\Gamma_{ij}(\tau_1, \tau_2) = \gamma_{i-j+S(\tau_1-\tau_2)}^{(i)} \quad ; \quad i, j = 1, \dots, S. \quad (2.2.9)$$

Le processus S -varié $X(\tau)$ étant stationnaire, donc sa matrice d'autocovariance, à l'horizon h , a la forme suivante :

$$\Gamma(h) = (\Gamma_{ij}(\tau, \tau - h))_{i,j=1,\dots,S}. \quad (2.2.10)$$

$$\text{avec } \Gamma_{ij}(\tau, \tau - h) = \gamma_{i-j+Sh}^{(i)}; \quad \tau \in \mathbb{Z}.$$

2.3 Modèles autorégressifs moyennes mobiles périodiques

2.3.1 Représentation linéaire de Wold – Cramer

Connu sous l'appellation de " Théorème de décomposition de Wold – Cramer", établi par Cramer (1961), l'extension du théorème de Wold (1938) aux processus non stationnaires, assure que n'importe quel processus stochastique (stationnaire ou pas) peut être décomposé d'une façon unique, en une somme, convergente en moyenne quadratique, du passé et du présent des innovations. Ce résultat de Wold-Cramér était le support théorique permettant l'introduction des modèles linéaires à coefficients évolutifs dans le temps (non stationnaires), dont les modèles autorégressifs moyennes mobiles périodiques (*PARMA*) sont une classe particulière.

2.3.2 Modèles autorégressifs moyennes mobiles périodiques PARMA

Définition 3.1 :

Le processus périodiquement corrélé, S -périodique, $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$, admet une représentation autorégressive moyenne mobile périodique d'ordre (p_t, q_t) , notée $PARMA(p_t, q_t)$, s'il est solution de l'équation aux différences stochastiques suivante :

$$\mathbf{y}_t - \sum_{i=1}^{p_t} \phi_{t,i} \mathbf{y}_{t-i} = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q_t} \theta_{t,j} \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.3.1)$$

où encore

$$\phi_t(L) \mathbf{y}_t = \theta_t(L) \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.3.2)$$

où $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus bruit blanc périodique de variance σ_t^2 . Les paramètres du modèle $\phi_{t,i}; i = 1, 2, \dots, p_t; \theta_{t,j}; j = 1, 2, \dots, q_t$ et des ordres p_t, q_t , ainsi que σ_t^2 , sont des fonctions périodiques du temps, de période S . De plus les polynômes périodiques :

$$\phi_t(L) = 1 - \sum_{i=1}^{p_t} \phi_{t,i} L^i; \quad \theta_t(L) = 1 - \sum_{j=1}^{q_t} \theta_{t,j} L^j$$

ne possèdent pas des racines communes.

Maintenant, si on pose $p = \max_{1 \leq t \leq S} (p_t); q = \max_{1 \leq t \leq S} (q_t)$, on peut alors réécrire le modèle $PARMA(p_t, q_t)$ sous une forme plus simple, notée $PARMA(p, q)$.

$$\mathbf{y}_t - \sum_{i=1}^p \phi_{t,i} \mathbf{y}_{t-i} = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_{t,j} \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.3.3)$$

Le modèle ainsi écrit est d'ordres (p, q) constants, tels que :

$$\phi_{t,i} = \phi_{s+S\tau,i} = \begin{cases} \phi_{s,i} & \text{si } i < p_t \ ; i = 1, 2, \dots, p. \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (2.3.4)$$

$$\theta_{t,j} = \theta_{s+S\tau,j} = \begin{cases} \theta_{s,j} & \text{si } j < q_t \ ; j = 1, 2, \dots, q. \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

pour tout $\tau \in \mathbb{Z}$ et $s = 1, 2, \dots, S$.

Note 3.1

Il faut noter que, pour $q_t = 0$, respectivement, $p_t = 0$, le modèle $PARMA_S(p_t, q_t)$ contient comme cas particuliers, le modèle autorégressif périodique $PAR_S(p_t)$:

$$\mathbf{y}_t - \sum_{j=1}^{p_t} \phi_{t,j} \mathbf{y}_{t-j} = \boldsymbol{\varepsilon}_t, t \in \mathbb{Z} \tag{2.3.5}$$

et le modèle moyenne mobile périodique $PMA_S(q_t)$:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t - \sum_{j=1}^{q_t} \boldsymbol{\theta}_{t,j} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}, t \in \mathbb{Z} \tag{2.3.6}$$

2.4 Etude des modèles *PARMA*

Afin d'étudier les propriétés d'un modèle *ARMA* périodique (telles que la causalité et l'inversibilité), il sera indispensable de passer par la vérification de la stationnarité qui, est dans ce cas, une stationnarité périodique. Pour ce faire, nous allons présenter, dans cette section, deux approches : La première, appelée "Period Span Lumping", se basant directement sur la définition formelle de la stationnarité due au théorème de *Gladyshev*(1961), consiste à ramener un modèle univarié périodique à un modèle multivarié et exploiter par la suite, les résultats déjà existants, concernant les propriétés de ce dernier. Quant à la seconde, dite "Order Span Lumping", elle ramène, dans le même but que la précédente, un modèle moyenne mobile (autorégressif) périodique à un modèle moyenne mobile (autorégressif) mais d'ordre un.

Avant de voir les approches précitées, nous allons définir deux propriétés, parmi les plus importantes dans l'étude de n'importe quel modèle, à savoir la causalité et l'inversibilité.

Notion de Causalité

Comme la causalité ne concerne que la partie autorégressive du modèle *PARMA*, un modèle *PAR*, défini par (2.3.5), est causal s'il peut s'écrire sous forme d'une somme, unique

et convergente en moyenne quadratique, du passé et du présent processus des innovations " ε_t ". Autrement dit, le modèle donné par (2.3.5) est dit causal s'il admet une solution de la forme :

$$\mathbf{y}_t = \sum_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{\alpha}_{t,j} \varepsilon_{t-j} ; t \in \mathbb{Z} \quad (2.4.1)$$

où la série est convergente, en moyenne quadratique. Cette expression est dite représentation de *Wold – Cramer* du processus $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

Notion d'Inversibilité

Le problème d'inversibilité est étroitement lié à celui de la causalité puisqu'il engage des techniques mathématiques semblables. Pour la simplicité et sans perte de généralité, nous considérons le modèle moyen mobile (2.3.6). Ce modèle est dit inversible, si son processus d'innovations ε_t peut s'écrire sous forme d'une somme du passé et du présent du processus.

C'est à dire, le modèle donné par (2.3.6) est dit inversible s'il existe des fonctions $\beta_{t;j}$ de façon que :

$$\varepsilon_t = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{t;j} \mathbf{y}_{t-j}; t \in \mathbb{Z} \quad (2.4.2)$$

où la série est convergente, en moyenne quadratique. Cette expression est dite de déconvolution.

2.4.1 Technique "Period Span Lumping"

Le principe de cette approche est d'effectuer un groupement des observations du processus $PARMA_S, \{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$, en paquets, de telle manière que chaque composante du processus multivarié $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ couvre toutes les observations d'une même période. De ce fait, le processus $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est périodiquement stationnaire si, et seulement si le processus $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire.

2.4.2 Modèle $PARMA(p_t, q_t)$ univarié et modèle $ARMA$ multivarié correspondant

Soit $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus autorégressif moyenne mobile périodique de période S .

La représentation backward du processus multivarié $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$, donnée plus haut par la formule (2.2.8), était remplacée par une alternative dite représentation forward, proposée par Ula et Smadi (1997). Selon cette dernière représentation, le processus $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} X(\tau) &= (X_S(\tau), \dots, X_2(\tau), X_1(\tau))', \\ &= \left(y_{S+S\tau}, \dots, \mathbf{y}_{2+S\tau}, \mathbf{y}_{1+S\tau} \right)'. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Alors, le processus multivarié $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfait un modèle autorégressif moyenne mobile S -varié suivant :

$$\Phi(0)X(\tau) - \sum_{k=1}^{p^*} \Phi(k)X(\tau - k) = \Theta(0)\eta(\tau) + \sum_{l=1}^{q^*} \Theta(l)\eta(\tau - l), \quad (2.4.4)$$

où $\eta(\tau)$ est un processus bruit blanc S -varié tel que :

$$\begin{aligned} \eta(\tau) &= (\boldsymbol{\varepsilon}_{S+S\tau}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{2+S\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}_{1+S\tau})' \\ &= (\eta_S(\tau), \dots, \eta_2(\tau), \eta_1(\tau))', \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

et sa matrice de covariance est une matrice diagonale, d'éléments σ_i^2 ; $i = 1, \dots, S$.

Les ordres du modèle sont : $p^* = \max_{1 \leq i \leq S} \left[\frac{p_i - 1}{S} \right] + 1$; $q^* = \max_{1 \leq i \leq S} \left[\frac{q_i - 1}{S} \right] + 1$; $i = 1, \dots, S$. où $[x]$ dénote le plus petit entier supérieur ou égal à x .

Les matrices carrées $S \times S$ des paramètres autorégressif : $\Phi(0); \Phi(k)$; $k = 1, \dots, p^*$, et les paramètres moyenne mobile : $\Theta(0); \Theta(m)$; $m = 1, \dots, q^*$ sont les suivantes :

$$(\Phi(0))_{ij} = \begin{cases} -\phi_{i,j-i} & i < j \\ \mathbf{1} & i = j \\ \mathbf{0} & i > j \end{cases} \quad (2.4.6)$$

et

$$(\Phi(k))_{ij} = \phi_{S-i+1, kS+j-i}, \quad i = j = 1, 2, \dots, S \text{ et } 1 \leq k \leq p^*,$$

et

$$(\Theta(0))_{ij} = \begin{cases} -\boldsymbol{\theta}_{i,j-i} & i < j \\ \mathbf{1} & i = j \\ \mathbf{0} & i > j \end{cases} ; \quad (2.4.7)$$

et

$$(\Theta(l))_{ij} = \boldsymbol{\theta}_{S-i+1, lS+j-i}, \quad i = j = 1, 2, \dots, S \text{ et } 1 \leq l \leq p^*,$$

sachant que $\boldsymbol{\phi}_{i,j} = 0$ pour $j > p_i$ et $\boldsymbol{\theta}_{i,j} = 0$ pour $j > q_i$.

Remarque Les matrices $\boldsymbol{\Phi}(p^*)$; $\Theta(q^*)$ ont, suivant la représentation backward, les dernières colonnes nulles, dont le nombre est respectivement égale à :

$$np = (Sp^* - 1) + \min_{1 \leq i \leq S} (i - p_i).$$

$$nq = (Sq^* - 1) + \min_{1 \leq i \leq S} (i - q_i).$$

Ce qui diminue les calculs au niveau de l'étude des propriétés du modèle (par exemple, l'obtention de la condition de stationnarité périodique).

La relation entre un modèle $PARMA_S(p_t, q_t)$ et un modèle $ARMA(p, q)$ S -varié étant établie, l'étude des propriétés du premier modèle (telles que la causalité et l'inversibilité) se découlent automatiquement de celles du second. D'où, il serait indispensable de commencer par donner les conditions de causalité et d'inversibilité d'un modèle $ARMA$ multivarié *Hannan*(1970).

2.4.3 Condition de stationnarité périodique

Condition de causalité d'un modèle ARMA multivarié

Soit le modèle $ARMA(p^*, q^*)$ multivarié à coefficients constants, suivant :

$$\sum_{i=0}^{p^*} A_i X(\tau - i) = \sum_{j=0}^{q^*} B_j \varepsilon(\tau - j) \quad (2.4.8)$$

où $\varepsilon(t)$ est un processus multivarié non corrélé et les matrices A_i , B_j , sont des matrices carrées réelles.

La condition pour que ce dernier processus soit causal est que les racines de l'équation :

$$\det \left[\sum_{i=0}^{p^*} A_i z^{p^*-i} \right] = 0; z \in \mathbb{Z}. \quad (2.4.9)$$

sont à l'intérieur du cercle unité.

Condition d'inversibilité d'un modèle ARMA multivarié

La condition d'inversibilité du modèle $ARMA(p^*, q^*)$ multivarié à coefficients constants, satisfaisant la formule (2.4.8) donnée ci-dessus, est telle que les racines de l'équation :

$$\det \left[\sum_{j=0}^{q^*} B_j z^{q^*-j} \right] = 0; z \in \mathbb{Z}. \quad (2.4.10)$$

soient à l'intérieur du cercle unité.

Remarque :

Les conditions de causalité et d'inversibilité du processus $ARMA$ multivarié étant données, celles du modèle univarié $ARMA$ périodique qui lui correspond en découlent immédiatement et sont présentées dans ce qui suit.

Condition de causalité d'un modèle autorégressif $AR_S(p_t)$ périodique

Le modèle univarié $PAR_S(p_t)$, de période S , défini par (2.3.5), est dit causal si, et seulement si, le modèle autorégressif S -varié à, coefficients constants, inhérent :

$$\Phi(0)X(\tau) - \sum_{k=0}^{p^*} \Phi(k)X(\tau - k) = \eta(\tau), \quad (2.4.11)$$

est causal.

Autrement dit, si, et seulement si, les racines de l'équation :

$$\det \left[\sum_{k=0}^{p^*} \Phi(k) z^{p^*-k} \right] = 0; z \in \mathbb{Z}. \quad (2.4.12)$$

sont à l'intérieur du cercle unité. Les matrices $\Phi(k)$; $k = 1, \dots, p^*$ sont données par les formules(2.4.6).

Condition d'inversibilité d'un modèle moyenne mobile périodique

Le modèle univarié $PMA_S(q_t)$, de période S , défini par (2.3.6), est dit inversible si, et seulement si, le modèle moyenne mobile, S -varié, à coefficient constants, inhérent :

$$X(\tau) = \Theta(0)\eta(\tau) + \sum_{l=0}^{q^*} \Theta(l)\eta(\tau - l), \quad (2.4.13)$$

est inversible. Autrement dit, si, et seulement si, les racines de l'équation :

$$\det \left[\sum_{l=0}^{q^*} \Theta(l)z^{q^*-l} \right] = 0; z \in \mathbb{Z}. \quad (2.4.14)$$

soient à l'intérieur du cercle unité. Sachant que les matrices $\Theta(l)$; $l = 1, \dots, q^*$ sont données par les formules(2.4.7).

Remarque Pour $p = 1$; on s'aperçoit que les zéros de l'équation (2.4.12) coïncident avec les valeurs propres de la matrice $\Phi^{-1}(0)\Phi(1)$. De ce fait, même lorsque $p > 1$, l'obtention des conditions de stationnarité périodique, selon [Fuller (1976); Barone et Roy (1983); Barone (1987)], devient un problème de recherche de valeurs propres.

Proposition

Le modèle autoregressif S -varié à coefficients constants, donné par (2.4.11) est causal si, et seulement si, les racines de l'équation (2.4.12) sont à l'intérieur du cercle unité. C'est à dire si, et seulement si, les valeurs propres de la une matrice carrée $Sp^* \times Sp^*$; notée $\tilde{\Phi}$, telle que :

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi^{-1}(0)\Phi(1) \dots \Phi^{-1}(0)\Phi(p^* - 1) & \Phi_0^{-1}\Phi(p^*) \\ \mathbf{I}_{m(p^*-1) \times m(p^*-1)} & \mathbf{0}_{m(p^*-1) \times m} \end{pmatrix} \quad (2.4.15)$$

sont toutes inférieures à un en valeurs absolue.

On note que si la matrice $\Phi(0)$, donnée par (2.4.6), est inversible puisque elle est une matrice carrée triangulaire inférieure, dont les éléments de sa diagonale sont égaux à un (alors, son déterminant vaut un).

En général, si la matrice $\Phi^{-1}(0)\Phi(p^*)$ a np colonnes finales nulles, alors la matrice $\tilde{\Phi}$ peut être écrite sous une forme fragmentée comme suit

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.16)$$

où \tilde{A} est une matrice carrée $Sp^* \times Sp^*$.

Ainsi, cette partition peut considérablement réduire le temps de calcul dans la recherche des valeurs propres (diminution du rang de la matrice à diagonaliser) [Ula(1990)]. Par ailleurs, il montra que les valeurs propres non nulles de la matrice $\tilde{\Phi}$ sont les mêmes que celles de la matrice \tilde{A} . Par conséquent, la stationnarité d'un modèle univarié $PAR_S(p_t)$, de période S , est liée à la position des valeurs propres de la matrice \tilde{A} par rapport au cercle unité [Cf. Ula et Smadi (1997)].

2.4.4 Technique "Order Span Lumping"

Dans le même but, d'étudier les propriétés théoriques des modèles de séries chronologiques périodiques, en particulier les conditions d'inversibilité et le problème de la factorisation spectrale, Bentarzi et Hallin (1994) introduisent une approche alternative, appelée ultérieurement par Ula et Smadi "Order Span Lumping", qui consiste en la représentation d'un modèle univarié (m -varié) S -périodique d'ordre q par un modèle $q(mq)$ -varié moyenne mobile \check{S} -périodique d'ordre un, où \check{S} est fonction de S et q . En effet, Bentarzi et Hallin (1994) découvrirent que la condition de stationnarité périodique, proposée par Cipra (1985) [Cf. Ghysels et Hall (1992)], pour un modèle moyenne mobile périodique univarié n'était pas nécessaire. Par ailleurs, Bentarzi (1995) a donné un contre exemple illustrant ce constat. Cet exemple comprenait un modèle moyenne mobile 2-périodique d'ordre 1, $PM A_2(1)$, inversible sans que les racines des deux polynômes correspondants soient, en même temps,

à l'intérieur du cercle unité. Pour plus de détails, voir Bentarzi (1995); Bentarzi et Hallin (1994).

Pour remédier à ce problème, Bentarzi et Hallin (1994) proposèrent cette nouvelle approche, dont l'idée de base est la même que celle de Gladyshev (1961) qui consiste à grouper les observations du processus, en paquets. Néanmoins, elles sont différentes dans la technique. Contrairement à la première qui les regroupe selon la période, celle-ci le fait selon l'ordre, d'où l'appellation de chacune.

Démarche de l'approche

soit $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$, un processus m -varié moyenne mobile S -périodique d'ordre q :

$$\mathbf{Y}_t = \sum_{j=0}^q \Theta_{t,j} \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.4.17)$$

où $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est le processus m -varié bruit blanc de variance périodique,

et $\Theta_{t,j}; j = 1, \dots, q$ sont des matrices carrées ($m \times m$)

Bentarzi et Hallin (1994) procèdent à un regroupement backward des observations du processus $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$, ils considèrent le processus mq -varié $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$:

$$X_T = (\mathbf{Y}_{Tq}, \mathbf{Y}_{Tq-1}, \dots, \mathbf{Y}_{Tq-(q-1)})'; \quad T \in \mathbb{Z} \quad (2.4.18)$$

$$\eta_T = (\varepsilon_{Tq}, \varepsilon_{Tq-1}, \dots, \varepsilon_{Tq-(q-1)})'; \quad T \in \mathbb{Z} \quad (2.4.19)$$

Ainsi, le processus donné par (2.4.17) peut être reformulé sous forme d'un processus moyenne mobile mq -varié d'ordre un

$$X_T = A_{T,0} + A_{T,1}\eta_T; \quad T \in \mathbb{Z} \quad (2.4.20)$$

où $A_{T,0}$ et $A_{T,1}$ sont des matrices ($mq \times mq$), données en fonction des coefficients périodiques,

$\Theta_{t,j}; i = 1, \dots, q$, du modèle (2.4.17) comme suit :

$$\text{et } \begin{cases} (A_{T,0})_{ij} = \begin{cases} \Theta_{Tq-(i-1),0}, & \text{si } i = j, \\ \Theta_{Tq-(i-1),j-i}, & \text{si } i < j, \\ 0_m, & \text{si } i > j, \end{cases} & i, j = 1, 2, \dots, q. \\ (A_{T,1})_{ij} = \begin{cases} \Theta_{Tq-(i-1),q+j-i}, & \text{si } i \geq j, \\ 0_m, & \text{si } i < j, \end{cases} & i, j = 1, 2, \dots, q. \end{cases} \quad (2.4.21)$$

Il est à noter que le processus mq -varié d'ordre un, $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$, donné par (2.4.20), est \check{S} -périodique. \check{S} est tel que $(\check{S} \times q)$ soit le plus petit multiple commun de q et S , ordre et période du modèle $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$, défini par (2.4.17).

Proposition *Bentarzi et Hallin (1994)*

Le modèle m -varié moyenne mobile S -périodique d'ordre q , (2.4.17), est inversible si, et seulement si, les racines du polynôme :

$$|\Psi - Iz| = 0; \quad z \in \mathbb{Z}$$

soient à l'intérieur du cercle unité.

où Ψ est une matrice carrée, de dimension $(mq \times mq)$ définie par :

$$\Psi = \mathbf{A}_{\check{S},0}^{-1} \mathbf{A}_{\check{S},1} \mathbf{A}_{\check{S}-1,0}^{-1} \mathbf{A}_{\check{S}-1,1} \dots \mathbf{A}_{2,0}^{-1} \mathbf{A}_{2,1} \mathbf{A}_{1,0}^{-1} \mathbf{A}_{1,1} \quad (2.4.22)$$

où les matrices $\mathbf{A}_{k,0}$ et $\mathbf{A}_{k,1}; k = 1, \dots, \check{S}$ sont données par les formules (2.4.21).

Corollaire *Bentarzi et Hallin (1994)*

Le modèle univarié moyenne mobile S -périodique d'ordre 1 :

$$\mathbf{y}_t = \theta_{t,0}\varepsilon_t + \theta_{t,1}\varepsilon_{t-1}; \quad t \in \mathbb{Z} \quad (2.4.23)$$

est inversible si, et seulement si;

$$\left| \frac{\theta_{1,1}\theta_{2,1}\dots\theta_{S,1}}{\theta_{1,0}\theta_{2,0}\dots\theta_{S,0}} \right| < 1.$$

Note

Vu que, la détermination des conditions d'inversibilité et de causalité fait appel aux mêmes outils mathématiques, *Ula et Smadi* (1997) ont exploité l'approche décrite ci dessus afin de trouver la condition de causalité des modèles autorégressifs périodiques. Ce qui va être l'objet de la proposition suivante.

Proposition *Ula et Smadi* (1997)

Le modèle m -varié autorégressif S -périodique d'ordre p suivant :

$$\mathbf{Y}_t - \sum_{j=1}^p \Phi_{t,j} \mathbf{Y}_{t-j} = \varepsilon_t ; z \in \mathbb{Z} \quad (2.4.24)$$

est causal si, et seulement si, les racines du polynôme :

$$|\Omega - Iz| = 0 ; z \in \mathbb{Z}$$

soient à l'intérieur du cercle unité, où Ω est une matrice carrée, de dimension $(mq \times mq)$ définie par :

$$\Omega = \mathbf{A}_{\check{S},0}^{-1} \mathbf{A}_{\check{S},1} \mathbf{A}_{\check{S}-1,0}^{-1} \mathbf{A}_{\check{S}-1,1} \dots \mathbf{A}_{2,0}^{-1} \mathbf{A}_{2,1} \mathbf{A}_{1,0}^{-1} \mathbf{A}_{1,1} \quad (2.4.25)$$

et les matrices $\mathbf{A}_{k,0}^{-1}$ et $\mathbf{A}_{k,1}$; $k = 1, \dots, \check{S}$, de dimension $(mq \times mq)$ sont telles que :

$$et \quad \begin{cases} (A_{T,0})_{ij} = \begin{cases} I_m & si \ i = j, \\ -\Phi_{Tp-(i-1),j-i} & si \ i < j, \\ 0_m, & si \ i > j, \end{cases} & i, j = 1, 2, \dots, p. \\ (A_{T,1})_{ij} = \begin{cases} \Phi_{Tp-(i-1),p+j-i} & si \ i \geq j, \\ 0_m, & is \ i < j, \end{cases} & i, j = 1, 2, \dots, p. \end{cases}$$

On remarque, en effet, que les deux approches ayant le même but, s'appuient sur le même support théorique, et aboutissent au même résultat. Mais, toutefois elles se diffèrent dans leur implémentation. La première consiste à chercher les valeurs propres d'une matrice de dimension $(mSp^* \times mSp^*)$ et voir leurs positions par rapport au cercle unité. Quant à la deuxième, elle suit la même démarche sauf qu'elle utilise une matrice de dimension $(mp \times mp)$, avec $mp < mSp^*$. Notons que l'égalité est vérifiée pour $p = S, 2S, \dots$. En sus, cette dernière a

montré son habilité à traiter d'autres problèmes telle que la factorisation spectrale (Bentarzi et Hallin (1998), Bentarzi (1998)).

Se basant sur l'approche "Period Span Lumping" de Gladyshev(1961), une autre représentation, exploitée la première fois par Lütkepohl (1991, chapitre 12) afin d'étudier la causalité (stabilité) et les problèmes d'évaluation (ou de l'estimation) du maximum de vraisemblance pour des modèles multivariés autorégressifs périodiques *PVAR*.

Soit le modèle m -varié autorégressif S -périodique d'ordre p défini par (2.4.24).

Considérons maintenant, la représentation backward : $\underline{\mathbf{Y}}_t = (\mathbf{Y}'_t, \mathbf{Y}'_{t-1}, \dots, \mathbf{Y}'_{t-p+1})'$, et $\boldsymbol{\eta}_t = (\boldsymbol{\varepsilon}'_t, \mathbf{0}'_{m(p-1) \times 1})'$ et la matrice S -périodique $\underline{\Phi}_t$ de dimension $mp \times mp$ telle que

$$\underline{\Phi}_t = \left(\begin{array}{c|c} \Phi_{t,1} \cdots \Phi_{t,p-1} & \Phi_{t,p} \\ \hline \mathbf{I}_{m(p-1) \times m(p-1)} & \mathbf{0}_{m(p-1) \times m} \end{array} \right)$$

Ainsi le modèle (2.4.24) peut s'écrire sous forme du modèle mp -varié, S -périodique d'ordre un :

$$\underline{\mathbf{Y}}_t = \underline{\Phi}_t \underline{\mathbf{Y}}_{t-1} + \boldsymbol{\eta}_t. \quad (2.4.26)$$

définissons alors, la $mp \times mp$ matrice $\Psi = \prod_{s=1}^S \underline{\Phi}_{S-s+1}$.

Suivant cette représentation, Aknouche(2006) a déterminé la condition de causalité d'un modèle $PVAR_S$, ce qui fera l'objet de la proposition suivante.

Proposition Aknouche(2006)

Le modèle m -varié autorégressif S -périodique d'ordre p défini par(2.4.26), est causal si, et seulement si :

$$\rho(\Psi) < 1, \quad (2.4.27)$$

où $\rho(A)$ désigne le rayon spectral de la matrice A : i.e., la plus grande valeur propre de la matrice A .

Preuve

Il est facile de vérifier que la solution de l'équation aux différences non homogène d'ordre un, associée à l'opérateur autorégressif d'ordre un, (2.4.26), est :

$$G(t, t_0) = \underline{\Phi}_t \underline{\Phi}_{t-1} \cdots \underline{\Phi}_{t_0+2} \underline{\Phi}_{t_0+1}.$$

Cette solution correspond à la valeur initiale $G(t_0, t_0) = \mathbf{I}_{m \times m}$, où t_0 est le temps de départ du processus.

La solution générale de l'équation aux différences stochastique non homogène d'ordre un, (2.4.26), est donnée par :

$$\underline{\mathbf{Y}}_t = \sum_{j=t_0+1}^t G(t, j) \underline{\boldsymbol{\eta}}_j + G(t, t_0) \underline{\mathbf{Y}}_{t_0}.$$

quand t_0 décroît vers l'infini, nous avons :

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \left\| \underline{\mathbf{Y}}_t - \sum_{j=t_0+1}^t G(t, j) \underline{\boldsymbol{\eta}}_j \right\| = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \|G(t, t_0) \underline{\mathbf{Y}}_{t_0}\|,$$

où $\|\cdot\|$ dénote la norme Euclidienne. Alors, la condition nécessaire et suffisante pour que le modèle (2.4.26) soit causal peut être obtenue en appliquant le théorème de Hallin (Hallin, 1986, théorème 3.1). Pour le cas périodique, ici présent, voir aussi (Bentarzi et Hallin, 1994), ce qui fait

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \|G(t, t_0)\| = 0 \text{ pour certains } t \text{ fixés.} \quad (2.4.28)$$

soit $t - t_0 = s_0 + n_0 S$, pour $s_0 \in \{0, \dots, S-1\}$ et $n_0 \in \mathbb{Z}$.

En exploitant la nature périodique de $\underline{\Phi}_t$, on peut réécrire $G(t, t_0)$ sous la forme :

$$G(t, t_0) = \left(\underline{\Phi}_{t_0+s_0} \underline{\Phi}_{t_0+s_0-1} \cdots \underline{\Phi}_{t_0+s_0-S+1} \right)^{n_0} \underline{\Phi}_{t_0+s_0} \underline{\Phi}_{t_0+s_0-1} \cdots \underline{\Phi}_{t_0+2} \underline{\Phi}_{t_0+1}.$$

puisque $\|\underline{\Phi}_{s_0+t_0} \underline{\Phi}_{s_0+t_0-1} \cdots \underline{\Phi}_{t_0+2} \underline{\Phi}_{t_0+1}\|$ est uniformément bornée par :

$$\max_{1 \leq s \leq S} \|\underline{\Phi}_s \underline{\Phi}_{s-1} \cdots \underline{\Phi}_{s-S+1}\| = C,$$

alors le membre droit de (2.4.28) peut s'écrire

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \|G(t, t_0)\| \leq C \lim_{n_0 \rightarrow \infty} \left\| \underline{\Phi}_{s_0} \underline{\Phi}_{s_0-1} \cdots \underline{\Phi}_{s_0-S+2} \underline{\Phi}_{s_0-S+1} \right\|^{n_0}$$

alors

$$\lim_{n_0 \rightarrow \infty} \left\| \underline{\Phi}_{s_0} \underline{\Phi}_{s_0-1} \cdots \underline{\Phi}_{s_0-S+2} \underline{\Phi}_{s_0-S+1} \right\|^{n_0} = 0$$

Après un certain réarrangement, on a

$$\lim_{n_0 \rightarrow \infty} \|\Psi\|^{n_0} = 0$$

ce qui est vérifié si, et seulement si, toutes les valeurs propres de la matrice Ψ soient inférieures en module à un. D'où la condition nécessaire et suffisante mentionnée.

Chapitre 3

Mélange de Modèles GARCH Périodiques (MPGARCH)

3.1 Introduction :

La modélisation des séries chronologiques financières, et celles qui se caractérisent par la volatilité instantanée comme les séries monétaires, environnementales, ... et d'autres, a pris, ces dernières décennies, un essor remarquable. Cela est dû à l'introduction de la classe des modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques *ARCH/GARCH* et leurs extensions. Ces modèles ont pu capturer plusieurs faits stylisés de telles séries comme : le comportement de la volatilité en "clusters" ; la longue mémoire (la persistance), la périodicité dans la fonction d'autocorrélation, et le changement de régime.

De même que l'on observe le regroupement des données financières selon la volatilité lorsque les fréquences des observations sont élevées, on constate souvent que la distribution marginale présente des queues plus larges qu'une loi normale (excès de Kurtosis), voir par exemple Mandelbrot (1963), Fama (1965). De plus, souvent leurs histogrammes sont manifestement multimodaux, d'où l'opposition à l'hypothèse de normalité des innovations imposée par les modèles *ARCH* et leurs extensions classiques. Pour remédier à cette inconsistance dans cette modélisation, Wong et Li (2001), en généralisant le modèle Mélange de Distribution de Transition introduit par Le et al. (1996), ont proposé le mélange de modèles autorégressifs avec erreurs autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (*MAR - ARCH*). Durant cette dernière décennie, plusieurs autres chercheurs se sont penchés dessus par

exemple : Alexander et Lazar (2004); Zhang et al.(2006); Ausin et Galiano (2007); Fong et al.(2007); Bauwens et al.(2007); Giannikis et al.(2008) et d'autres.

Vu l'existence de l'aspect périodique dans certaines séries chronologiques, ces modèles à coefficients constants se montrent incapables d'expliquer adéquatement cette périodicité. Dans cette optique, Bentarzi et Hamdi (2008) ont ajouté plus de flexibilité au modèles de mélange *ARCH*, en considérant les paramètres du modèle comme étant évolutifs dans le temps (précisément : périodiques). Ils ont proposé un mélange de modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques périodiques (*MPARCH*) et un mélange de modèles autorégressifs périodiques avec erreurs autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques périodiques (*MPAR – MPARCH*). Dans le même esprit de cette formulation et en suivant le principe de parcimonie, nous proposons un mélange de Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques Généralisés Périodiques, *MPGARCH*.

Le reste de ce chapitre est présenté comme suit : Dans la section 2, nous commençons par donner la définition d'un modèle de mélange de distributions, ensuite nous présentons quelques modèles de mélange à savoir, celui de Wong et Li (2001); le modèle (mélange *GARCH*) de Alexander et Lazar(2004) et le modèle (*MPARCH*) (Bentarzi et Hamdi (2008)). La section 3 contient la définition du modèle proposé, le mélange de modèles *GARCH* périodique, noté *MPGARCH*,. Dans la section 4, la condition de stationnarité périodique du second ordre du modèle étudié est établie, sous laquelle on obtient l'expression de la variance du processus. L'étude de la condition d'existence du moment d'ordre quatre et son expression, sous cette condition, sont données dans la section 5.

3.2 Quelques modèles de mélange

Souvent dans la vie réelle plusieurs sources aléatoires sont à l'origine des phénomènes, ce qui peut pousser à penser que la distribution de la population mère est un mélange de lois de distribution et qui pourraient même être simples et régulières telles que les lois gaussiennes, ce qui est reconnu en statistique. Par exemple en séries chronologiques financières, il est observé que les distributions des résidus des modèles ajustés sont, la plus part du temps, multimodales, d'où la possibilité de supposer que la densité conditionnelle soit une densité

de mélange de lois. Dans ce qui suit, nous présentons la définition générale d'un mélange de lois de distribution.

3.2.1 Définition d'un modèle de mélange de distributions :

Définition :

Soit X, Y deux variables aléatoires, la densité du mélange sous sa forme générale est :

$$f(y) = \int \phi(y/x)h(x)dx.$$

où $\phi(y/x)$; $h(x)$ sont, respectivement, la densité de la loi de Y sachant X et la densité de la loi de X .

Dans le cas où la loi de X est discrète qui prend ces valeurs dans l'ensemble fini $\{1, 2, \dots, K\}$, $K \in \mathbb{N}^*$, la forme de la densité du mélange sera :

$$f(y) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_k(y).$$

où $\phi_k(y) = \phi(y/x = k)$.

et $\lambda_k = P(X = k)$, est la probabilité que l'observation y est issue de la $k^{\text{ième}}$ composante du mélange. Les λ_k sont appelées proportions du mélange, telles que

$$\lambda_k > 0 \text{ et } \sum_{k=1}^K \lambda_k = 1, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, K\}.$$

Donnons maintenant la densité d'un mélange de K lois gaussiennes, de paramètres $\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K)'$, $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_K)'$; $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{K-1})'$.

$$f(y; \underline{\mu}, \underline{\sigma}, \underline{\lambda}) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_k\left(\frac{y - \mu_k}{\sigma_k}\right).$$

3.2.2 Mélange de modèles autorégressifs avec erreurs autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques ($MAR - ARCH$)

Pour modéliser les séries chronologiques non-linéaires, Wong et Li (2001) ont proposé un mélange de modèles autorégressifs avec erreurs autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques ($MAR - ARCH$). C'est-à-dire, la moyenne conditionnelle du processus suit un modèle de mélange autorégressifs (MAR), tandis que sa variance conditionnelle suit un mélange de modèles $ARCH$.

Le mélange de K modèles autorégressifs avec erreurs autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques, noté $MAR - ARCH (K; p_1, p_2, \dots, p_K; q_1, q_2, \dots, q_K)$, est le suivant :

$$\begin{cases} F(y_t / \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \Phi\left(\frac{e_{k,t}}{\sqrt{h_{k,t}}}\right), & t \in \mathbb{Z}, \\ e_{k,t} = y_t - \phi_{k,0} - \phi_{k,1}y_{t-1} - \phi_{k,2}y_{t-2} - \dots - \phi_{k,p_k}y_{t-p_k}, \\ h_{k,t} = \beta_{k,0} + \sum_{i=1}^{q_k} \beta_{k,i} e_{k,t-i}^2, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

où $\Phi(\cdot)$ et $F(\cdot / \mathcal{F}_{t-1})$ sont, respectivement, la fonction de distribution cumulative de la distribution gaussienne standard et de la distribution cumulative conditionnelle de y_t sachant l'information passée; \mathcal{F}_t dénote, la σ -algèbre basée sur l'information disponible jusqu'au temps t . $\beta_{k,0} > 0$, $k = 1, \dots, K$; et $\beta_{k,i} \geq 0$, $i = 1, \dots, q_k$, $k = 1, \dots, K$, conditions imposées pour éviter d'avoir des variances conditionnelles négatives ou nulles. De plus les constantes λ_k , $k = 1, 2, \dots, K$, sont des valeurs réelles strictement positives vérifiant : $\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1$.

Notons que :

La moyenne conditionnelle du processus y_t sachant le passé est :

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k (\phi_{k,0} + \phi_{k,1}y_{t-1} + \phi_{k,2}y_{t-2} + \dots + \phi_{k,p_k}y_{t-p_k}) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \mu_{k,t}, \quad (3.1.2)$$

et la variance conditionnelle du processus y_t sachant le passé est :

$$var(y_t / \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \lambda_k h_{k,t} + \sum_{k=1}^K \lambda_k \mu_{k,t}^2 - \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \mu_{k,t} \right)^2. \quad (3.1.3)$$

Le premier terme dans cette expression permet de modéliser la dépendance de la variance conditionnelle du passé "des erreurs". Quant au deuxième et troisième termes, ils modélisent le changement de la variance conditionnelle résultant de la différence dans les moyennes conditionnelles des composantes.

Remarquant que le modèle ($MAR - ARCH$) se montre très flexible dans la modélisation du changement de la variance conditionnelle.

Maintenant, nous allons énoncé les théorème 1 et 2, établissant, respectivement, la condition nécessaire et suffisante de stationnarité du premier et second ordre du processus y_t .

Théorème1 : Wong et Li (2001)

Une condition nécessaire et suffisante pour que le processus y_t soit stationnaire en moyenne est que toutes les racines z_1, \dots, z_p de l'équation

$$1 - \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \phi_{k,i} \right) z^{-i} = 0$$

soient à l'intérieur du cercle unité. où $\phi_{k,i} = 0$, pour $i > p_k$.

Théorème2 : Wong et Li (2001)

Supposons que y_t suit un processus $MAR - ARCH (K; 1, \dots, 1; q_1, \dots, q_K)$ stationnaire au premier ordre. La condition nécessaire et suffisante de stationnarité du second ordre du processus est que toutes les racines z_1, \dots, z_{q+1} de l'équation soient

$$1 - \sum_{k=1}^K \lambda_k (\beta_{k,1} + \phi_{k,1}^2) z^{-1} - \sum_{i=2}^q \sum_{k=1}^K \lambda_k \left[\beta_{k,i} + \beta_{k,i-1} \phi_{k,1} \left\{ \phi_{k,1} - 2 \left(\sum_{j=1}^K \lambda_j \phi_{j,1} \right) \right\} \right] z^{-i} - \sum_{k=1}^K \lambda_k \beta_{k,q} \phi_{k,1} \left\{ \phi_{k,1} - 2 \left(\sum_{j=1}^K \lambda_j \phi_{j,1} \right) \right\} z^{-q-1} = 0 \quad (3.1.4)$$

soient à l'intérieur du cercle unité. où $\beta_{k,i} = 0$, pour $i > q_k$.

Malgré que la détermination de la condition nécessaire et suffisante de l'existence de moments d'ordre supérieur d'un modèle général $MAR - ARCH$ soit faisable, mais reste très délicate. Wong et Li ont établi la condition nécessaire et suffisante de l'existence du moment d'ordre quatre d'un modèle $MAR - ARCH (K; 0, \dots, 0; 1, \dots, 1)$, avec $\phi_{k,0} = 0$, pour $k = 1, \dots, K$, et ses premier et troisième moments sont nuls, alors que le second moment est égal à $\sum_{k=1}^K \lambda_k \beta_{k,0} / \left(1 - \sum_{k=1}^K \lambda_k \beta_{k,1}\right)$. Ce qui va être donné dans le théorème suivant

Théorème 3 Wong et Li (2001)

Le moment d'ordre quatre d'un modèle stationnaire $MAR - ARCH (K; 0, \dots, 0; 1, \dots, 1)$, avec $\phi_{k,0} = 0$, pour $k = 1, \dots, K$, existe si, et seulement si

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k \beta_{k,1}^2 < \frac{1}{3}.$$

Preuves : voir (Wong et Li (2001), *annexes*)

3.2.3 Mélange de modèles ($GARCH$)

Plusieurs travaux récents sur les processus avec erreurs $GARCH$ assument explicitement que la variance conditionnelle est produit d'un mélange de composantes gaussiennes, quoique avec quelques restrictions sur les paramètres. L'article de Alexander et Lazar (2004) analyse le modèle de mélange normale général $GARCH (1, 1)$, c'est-à-dire sans restrictions, qui peut capturer la variation dans le temps de la kurtosis et la skewness conditionnelles. Le principal but de ce papier est de fournir l'évidence concluante que, pour modéliser des taux de change, un modèle de mélange de deux composantes $GARCH (1, 1)$ de distributions gaussiennes est plus performant que celui de trois composantes ou plus, et plus flexible qu'un mélange de modèles $GARCH$ de distribution Student symétrique.

Puisque le modèle $GARCH$ vise à modéliser la volatilité et non pas les rendements, nous supposons que l'équation de la moyenne conditionnelle ne contient aucune variable explicative, ni de constante, alors nous avons $y_t = \varepsilon_t$.

Le mélange de K modèles *GARCH* (1, 1) de distributions gaussiennes, noté dans Alexander et Lazar (2004) $NM(K) - GARCH(1, 1)$ est défini comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_t | I_{t-1} \sim NM(p_1, \dots, p_K; \mu_1, \dots, \mu_K; \sigma_{1,t}^2, \dots, \sigma_{K,t}^2), \\ \sigma_{i,t}^2 = \omega_i + \alpha_i \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_i \sigma_{i,t-1}^2, \quad i = 1, \dots, K. \\ \text{avec } \sum_{i=1}^K p_i = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^K p_i \mu_i = 0. \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

où les constantes p_i , $i = 1, 2, \dots, K$, sont des valeurs réelles strictement positives vérifiant : $\sum_{i=1}^K p_i = 1$. et $\alpha_i > 0$; $0 \leq \beta_i < 1$; $i = 1, 2, \dots, K$,

Notons que la variance du processus est égale à :

$$E(\varepsilon_t^2) = E(\sigma_t^2) = \frac{\sum_{i=1}^K p_i \mu_i^2 + \sum_{i=1}^K \frac{p_i \omega_i}{(1-\beta_i)}}{\sum_{i=1}^K \frac{p_i (1-\alpha_i - \beta_i)}{(1-\beta_i)}} \quad (3.2.2)$$

Pour que cette quantité soit finie et positive il faut que la condition suivante soit vérifiée

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_i + \alpha_i \frac{m}{n} > 0, \quad i = 1, \dots, K, \\ \text{avec } m = \sum_{i=1}^K p_i \mu_i^2 + \sum_{i=1}^K \frac{p_i \omega_i}{(1-\beta_i)} > 0, \\ \text{et } n = \sum_{i=1}^K \frac{p_i (1-\alpha_i - \beta_i)}{(1-\beta_i)} > 0, \end{array} \right. \quad (3.2.3)$$

On peut noter que si $(\alpha_i + \beta_i) < 1$ pour tout i , alors la partie ($n > 0$) de la condition est vérifiée. Cependant, c'est une condition suffisante, mais pas nécessaire et la condition (3.2.3) ci-dessus est plus exacte. Pour plus de détails voir Alexander et Lazar (2004).

Maintenant, nous allons donner l'expression de la skewness

$$\left\{ \begin{array}{l} s = \frac{E(\varepsilon_t^3)}{x^{3/2}}, \\ E(\varepsilon_t^3) = \sum_{i=1}^K p_i (3y_i \mu_i + \mu_i^3), \\ y_i = \frac{\omega_i + \alpha_i x}{1-\beta_i}, \quad x = E(\varepsilon_t^2), \end{array} \right. \quad (3.2.4)$$

La kurtosis est égale à :

$$\begin{cases} K = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{E(\varepsilon_t^2)^2} - 3 \\ E(\varepsilon_t^4) = \frac{3P'B^{-1}f+s}{1-3P'B^{-1}g} \end{cases} \quad (3.2.5)$$

où s est la skewness donnée ci-dessus, et P est un vecteur K -dimension tel que $P = (p_1, \dots, p_K)'$, où p_i , $i = 1, \dots, K$, sont les poids des composantes du mélange, et B est la matrice carrée $K \times K$ suivante

$$B = \begin{pmatrix} 1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1e_{11} & -2\alpha_1\beta_1e_{12} & \cdots & -2\alpha_1\beta_1e_{1K} \\ -2\alpha_2\beta_2e_{21} & 1 - \beta_2^2 - 2\alpha_2\beta_2e_{22} & \cdots & -2\alpha_K\beta_Ke_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2\alpha_K\beta_Ke_{K1} & -2\alpha_K\beta_Ke_{K2} & 0 & 1 - \beta_K^2 - 2\alpha_K\beta_Ke_{KK} \end{pmatrix} \quad (3.2.6)$$

$$e_{ij} = a_{ij}p_j;$$

avec a_{ij} , $i, j = 1, \dots, K$; sont les éléments de la matrice carrée $K \times K$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^K \frac{p_k\beta_1\alpha_k}{1-\beta_1\beta_k} & -\frac{p_2\alpha_1\beta_2}{1-\beta_1\beta_2} & \cdots & -\frac{p_K\alpha_1\beta_K}{1-\beta_1\beta_K} \\ -\frac{p_1\alpha_2\beta_1}{1-\beta_2\beta_1} & 1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^K \frac{p_k\beta_2\alpha_k}{1-\beta_2\beta_k} & \cdots & -\frac{p_K\alpha_2\beta_K}{1-\beta_2\beta_K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{p_1\alpha_K\beta_1}{1-\beta_K\beta_1} & -\frac{p_2\alpha_K\beta_2}{1-\beta_K\beta_2} & 0 & 1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq K}}^K \frac{p_k\beta_K\alpha_k}{1-\beta_K\beta_k} \end{pmatrix} \quad (3.2.7)$$

$$f = \begin{pmatrix} W_1 + 2\alpha_1\beta_1c_1 \\ \vdots \\ W_K + 2\alpha_K\beta_Kc_K \end{pmatrix}; \quad g = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1d_1 \\ \vdots \\ \alpha_K^2 + 2\alpha_K\beta_Kd_K \end{pmatrix}; \quad (3.2.8)$$

avec $W_i = \omega_i^2 + 2\omega_i\alpha_i x + 2\omega_i\beta_i y_i$.

$$c_i = \sum_{j=1}^K a_{ij} \left[\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^K \left(\frac{p_k r_{jk}}{1-\beta_j\beta_k} \right) \right) + y_j q \right]; \quad d_i = \sum_{j=1}^K a_{ij} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^K \left(\frac{p_k \alpha_j \alpha_k}{1-\beta_j\beta_k} \right) \right);$$

où $q = \sum_{k=1}^K p_k \mu_k^2$; $r_{ik} = \omega_i \omega_k + x(\omega_i \alpha_k + \omega_k \alpha_i) + \beta_i y_i \omega_k + \beta_k y_k \omega_i$.

Preuve voir (Alexander et Lazar(2004), *annexeB*)

3.2.4 Mélange de modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques périodiques (MPARCH)

Le mélange de modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques périodiquement corrélés (MPARCH), qui est une généralisation du modèle mélange (MARCH) de Wong et Li, a été proposé par Bentarzi et Hamdi (2008). La motivation primaire derrière cette extension, en plus des buts estimés par l'introduction des modèles de mélange(ARCH) tels que la modélisation de l'excès de kurtosis, la multimodalité ...etc, est de rendre le modèle plus flexible pour capturer la périodicité exhibée par la structure d'autocovariance de certaines séries chronologiques

Rappelons qu'un processus stochastique du second ordre $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est dit périodiquement corrélé, avec la période S ($S \in \mathbb{N}^*$), si, et seulement si sa moyenne $\mu_t := E(y_t)$ et sa fonction d'autocovariance $\gamma_h^{(t)} := cov(y_t, y_{t+h})$ sont périodiques, dans le temps t , de période S , i.e. $\mu_t = \mu_{t+rS}$ et $\gamma_h^{(t)} = \gamma_h^{(t+rS)}$, $\forall r, h \in \mathbb{Z}$.

Définition

Un processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ satisfait un modèle de mélange de K modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques périodiques, de période S et d'ordres q_1, q_2, \dots, q_K , dénoté $MPARCH_S(K; q_1, q_2, \dots, q_K)$, si :

$$\begin{cases} F(y_t / \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \Phi\left(\frac{y_t}{\sqrt{h_{k,t}}}\right), & t \in \mathbb{Z}, \\ h_{k,t} = \alpha_{0,t}^{(k)} + \sum_{i=1}^{q_k} \alpha_{i,t}^{(k)} y_{t-i}^2, & t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (3.3.1)$$

où $\Phi(\cdot)$ et $F(\cdot / \mathcal{F}_{t-1})$ sont, respectivement, la fonction de distribution cumulative de la distribution gaussienne standard et de la distribution cumulative conditionnelle de y_t sachant l'information passée; et \mathcal{F}_t dénote, la σ -algèbre basée sur l'information disponible jusqu'au temps t . Les paramètres $\alpha_{i,t}^{(k)}$, $i = 0, 1, \dots, q_k$, sont périodiques dans t , de période S , c.-à-d. $\alpha_{i,t+rS}^{(k)} = \alpha_{i,t}^{(k)}$, $i = 0, \dots, q_k$, $k = 1, \dots, K$, $r \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{Z}$.

Avec $\alpha_{0,t}^{(k)} > 0$, $k = 1, \dots, K$; $t \in \mathbb{Z}$, et $\alpha_{i,t}^{(k)} \geq 0$, $i = 1, \dots, q_k$, $k = 1, \dots, K$; $t \in \mathbb{Z}$. De plus les constantes λ_k , $k = 1, 2, \dots, K$, sont des valeurs réelles strictement positives vérifiant : $\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1$.

Pour simplifier, prenons q_k constant en k et $q = \max_k q_k$ avec $\alpha_{i,t}^{(k)} = 0$ pour $i > q_k$.

Remarquons que pour $K = 1$, nous avons le processus autorégressif conditionnellement hétéroscédastique périodique classique d'ordre q et de période S , noté $PARCH_S(q)$, qui est

donné comme suit :
$$\begin{cases} y_t = \sqrt{h_t} \zeta_t, \\ h_t := E(y_t^2 / \mathcal{F}_{t-1}) = \alpha_{0,t} + \sum_{i=1}^q \alpha_{i,t} y_{t-i}^2, \end{cases}$$

avec $\alpha_{i,t+rS} = \alpha_{i,t}$, $i = 0, \dots, q$, $r \in \mathbb{Z}$; $t \in \mathbb{Z}$

et $\{\zeta_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de moyenne nulle et de variance unité.

Condition de stationnarité périodique du second ordre

La variance conditionnelle de y_t , sachant l'information passée, est donnée par :

$$Var(y_t / \mathcal{F}_{t-1}) = E(y_t^2 / \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\alpha_{0,t}^{(k)} + \sum_{i=1}^q \alpha_{i,t}^{(k)} y_{t-i}^2 \right), \quad t \in \mathbb{Z},$$

par conséquent la variance non conditionnelle est donné par :

$$\gamma_t(0) = a_0(t) + a_1(t) \gamma_{t-1}(0) + a_2(t) \gamma_{t-2}(0) + \dots + a_q(t) \gamma_{t-q}(0), \quad (3.3.2)$$

où les coefficients $a_i(t) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{i,t}^{(k)}$, $i = 0, 1, \dots, q$, sont périodiques, dans le temps, de période S , alors la variance non conditionnelle satisfait une équation linéaire aux différences non homogène périodique d'ordre q .

On peut, clairement, voir d'après (3.2.1) que le processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est de moyenne nulle. Dans ce qui suit une condition nécessaire et suffisante serait établie pour que le modèle général $MPARCH_S(K; q, q, \dots, q)$ soit stationnaire au second ordre. A cette fin, nous définissons les $q \times q$ matrices périodiques $A_{0,T}$ et $A_{1,T}$ données par :

$$\text{et } \begin{cases} (A_{0,T})_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ -a_{j-i}(qT - i + 1), & \text{si } i < j, \\ 0, & \text{si } i > j, \end{cases} \\ (A_{1,T})_{ij} = \begin{cases} a_{q+j-i}(qT - i + 1), & \text{si } i \geq j, \\ 0, & \text{si } i < j, \end{cases} \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, q, \quad (3.3.3)$$

Soit $\mathbb{S}(\mathbb{S} \in \mathbb{N})$ le plus petit entier tel que $q\mathbb{S}$ soit le plus petit multiple commun de q et S .

Notons que les matrices $A_{0,T}$ et $A_{1,T}$ sont périodiques, de période \mathbb{S} .

Utilisant ces notations, on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition **Bentarzi et Hamdi (2008a)**

Le processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant un modèle $MPARCH_S(K; q, q, \dots, q)$ est périodiquement stationnaire au second ordre si, et seulement si toutes les racines de l'équation (de degré q)

$$|Iz - \Psi| = 0, \quad z \in \mathbb{C},$$

soient à l'intérieur du cercle unité, où

$$\Psi = (A_{0,\mathbb{S}}^{-1} A_{1,\mathbb{S}}) (A_{0,\mathbb{S}-1}^{-1} A_{1,\mathbb{S}-1}) \dots (A_{0,1}^{-1} A_{1,1})$$

De plus, l'expression de la variance de tel processus est donnée par :

$$\underline{\gamma}_T(0) = (I - \Psi)^{-1} \sum_{r=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{r-1} B_{T-j} \right) C_{T-r}, \quad T \in \mathbb{Z}, \quad (3.3.4)$$

où $\underline{\gamma}_T(0) = (\gamma_{qT}(0), \gamma_{qT-1}(0), \dots, \gamma_{qT-q+1}(0))'$, $C_T = A_{0,T}^{-1} c_T$, $B_T = A_{0,T}^{-1} A_{1,T}$,

$c_T = (a_0(Tq), a_0(Tq-1), \dots, a_0(Tq-q+1))'$, avec la convention $\prod_{j=x}^y B_j = I$, pour $x > y$.

Corollaire **Bentarzi et Hamdi (2008a)**

Le processus $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant la représentation $MPARCH_S(K; 1, 1, \dots, 1)$ est périodiquement stationnaire au second ordre si, et seulement si :

$$\prod_{s=1}^S \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{1,s}^{(k)} < 1.$$

De plus, l'expression de la variance de tel processus est donnée par :

$$\gamma_t(0) = \sum_{r=0}^{S-1} \prod_{j=0}^{r-1} \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{1,t-j}^{(k)} \right) \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{0,t-r}^{(k)} \right) / \left(1 - \prod_{s=1}^S \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{1,s}^{(k)} \right), \quad (3.3.5)$$

avec la convention $\prod_{j=x}^y B_j = I$, pour $x > y$.

3.3 Mélange de modèles GARCH Périodiques, (MPGARCH)

Du fait que le modèle GARCH peut être vu comme un modèle ARMA, alors par analogie à ce dernier et suivant le principe de parcimonie, nous proposons le mélange de Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques Généralisés Périodiques, noté MPGARCH qui est une généralisation du modèle MPARCH de Bentarzi et Hamdi (2008). Nous signalons, ici, que nous avons utilisé cet article pour étendre le modèle MPARCH au cas généralisé MPGARCH .

Puisque le modèle GARCH vise à modéliser la volatilité et non pas les rendements, nous supposons que l'équation de la moyenne conditionnelle ne contient aucune variable explicative, ni de constante, alors nous avons $y_t = \varepsilon_t$.

Définition

Un processus du second ordre $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est dit satisfaire un modèle de mélange de K GARCH périodiques, avec la période S et les ordres q_1, q_2, \dots, q_K et p_1, p_2, \dots, p_K , noté

$MPGARCH_S(K; q_1, q_2, \dots, q_K; p_1, p_2, \dots, p_K)$, s'il est donné par :

$$\begin{cases} F(\varepsilon_t / \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \phi\left(\frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_{k,t}}}\right) \\ \varepsilon_t = \sqrt{h_{k,t}} \zeta_t \\ h_{k,t} = \alpha_{0,t}^{(k)} + \sum_{i=1}^{q_k} \alpha_{i,t}^{(k)} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p_k} \beta_{j,t}^{(k)} h_{k,t-j} \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \quad (3.4.1)$$

où $\{\zeta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de v.a indépendentes et identiquement distribuées (*i.i.d.*) de moyenne nulle et de variance unité. Les symboles $\phi(\cdot)$, $F(\cdot / \mathcal{F}_{t-1})$ sont, respectivement, la distribution cumulative de la loi normale centré réduite et la distribution cumulative conditionnelle de ε_t sachant le passé du processus où \mathcal{F}_t est la tribu engendrée par le passé du processus ε_t jusqu'à l'instant t .

Les paramètres $\alpha_{i,t}^{(k)}$ et $\beta_{j,t}^{(k)}$ $i = 0, 1, \dots, q_k$ sont périodiques dans le temps de période S , i.e. $\alpha_{i,t+rS}^{(k)} = \alpha_{i,t}^{(k)}$ et $\beta_{t+rS,j}^{(k)} = \beta_{t,j}^{(k)}$, tels que $\alpha_{0,t}^{(k)} > 0$, $\alpha_{i,t}^{(k)} \geq 0$, $\beta_{j,t}^{(k)} \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, q_k$, $j = 1, \dots, p_k$, $k = 1, \dots, K$, $r \in \mathbb{Z}$ et $\forall t \in \mathbb{Z}$. et ce pour éviter la possibilité que la variance conditionnelle soit négative ou nulle.

Finalement, les constantes λ_k , $k = 1, \dots, K$, sont des nombres réels strictement positifs tels que $\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1$.

Pour raison de simplicité q_k, p_k , peuvent être pris comme des constantes en k , en prenant simplement $q = \max_k q_k$ $p = \max_k p_k$ et $\alpha_{t,i}^{(k)} = 0$, $\beta_{t,j}^{(k)} = 0$, $\forall i > q_k$ et $\forall i > p_k$.

Notons que pour $K = 1$, nous avons le processus classique *GARCH* périodique, de période S et les ordres q et p , noté $PGARCH_S(p, q)$, donné par :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sqrt{h_t} \zeta_t \\ h_t = \alpha_{t,0} + \sum_{i=1}^q \alpha_{t,i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_{t,j} h_{t-j} \end{cases}$$

avec $\alpha_{t,i+rS} = \alpha_{t,i}$; $\beta_{t+rS,j} = \beta_{t,j}$; $i = 0, 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$, $r \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{Z}$, et $\{\zeta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est une séquence de variables aléatoires identiquement distribuées de moyenne nulle et variance unité.

3.3.1 Condition de stationnarité périodique du second ordre :

Dans cette section, nous allons établir la condition de stationnarité périodique du second ordre du processus vérifiant la définition (3.4.1) d'un modèle de mélange *GARCH* périodique.

La variance conditionnelle d'un tel modèle sachant le passé jusqu'à l'instant $(t - 1)$ est donnée par :

$$h_t := \text{Var}(\varepsilon_t / \mathcal{F}_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2 / \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \lambda_k (\alpha_{0,t}^{(k)} + \sum_{i=1}^q \alpha_{i,t}^{(k)} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_{j,t}^{(k)} h_{k,t-j}), \quad t \in \mathbb{Z} \quad (3.4.2)$$

En définissant le processus d'innovations $\{v_t; t \in \mathbb{Z}\}$, et le processus $\{v_{k,t}; t \in \mathbb{Z}\}$ tels que $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$; $v_{k,t} = \varepsilon_{t-i}^2 - h_{k,t}$, ces processus sont hétéroscédastiques

On réécrit le modèle (3.4.1) sous forme d'un modèle *PARMA* du carré du processus, $\{\varepsilon_t^2; t \in \mathbb{Z}\}$ et $\{v_t; t \in \mathbb{Z}\}$:

$$h_t = \sum_{k=1}^K \lambda_k (\alpha_{0,t}^{(k)} + \sum_{i=1}^q \alpha_{i,t}^{(k)} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_{j,t}^{(k)} h_{k,t-j}) \quad (3.4.3)$$

$$\varepsilon_t^2 = \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{0,t}^{(k)} + \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{i,t}^{(k)} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^K \lambda_k \beta_{j,t}^{(k)} (\varepsilon_{t-j}^2 - v_{k,t-j}) + v_t \quad (3.4.4)$$

En posant $a_i(t) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{i,t}^{(k)}$, $i = 0, 1, \dots, q$

et $b_j(t) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \beta_{j,t}^{(k)}$, $j = 1, \dots, p$

On aura :

$$\varepsilon_t^2 = a_0(t) + \sum_{i=1}^q a_i(t) \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j(t) \varepsilon_{t-j}^2 + v_t - \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^K \lambda_k \beta_{j,t}^{(k)} v_{k,t-j} \quad (3.4.5)$$

$$= a_0(t) + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} [a_i(t) + b_i(t)] \varepsilon_{t-i}^2 + v_t - \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^K \lambda_k \beta_{j,t}^{(k)} v_{k,t-j} \quad (3.4.6)$$

Soient maintenant : $r = \max(p, q)$, et le processus d'innovations $w_t = v_t - \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^K \lambda_k \beta_{j,t}^{(k)} v_{k,t-j}$
 et $c_i(t) = a_i(t) + b_i(t) ; i = 1, \dots, r$.

Alors l'équation (3.4.6) devient :

$$\varepsilon_t^2 = a_0(t) + \sum_{i=1}^r c_i(t) \varepsilon_{t-i}^2 + w_t \quad (3.4.7)$$

En suivant la méthode de Bentarzi et Allin (1994) présenté dans le chapitre 1, on considère les r équations stochastiques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{T_r}^2 = a_0(T_r) + \sum_{i=1}^r c_i(T_r) \varepsilon_{T_r-i}^2 + w_{T_r} \\ \varepsilon_{T_r-1}^2 = a_0(T_r-1) + \sum_{i=1}^r c_i(T_r-1) \varepsilon_{T_r-1-i}^2 + w_{T_r-1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{T_r-r+1}^2 = a_0(T_r-r+1) + \sum_{i=1}^r c_i(T_r-r+1) \varepsilon_{T_r-r+1-i}^2 + w_{T_r-r+1} \end{array} \right. \quad (3.4.8)$$

Il serait, maintenant, commode de réécrire ces équations sous forme matricielle ; pour ce faire, on procède à un regroupement des observations du carré du processus, $\{\varepsilon_t^2 ; t \in \mathbb{Z}\}$ en paquets.

Soit $\{X_t ; t \in \mathbb{Z}\}$, $\{\eta_t ; t \in \mathbb{Z}\}$ le processus regroupant, respectivement, les observations du carré du processus, $\{\varepsilon_t^2 ; t \in \mathbb{Z}\}$, et les innovations $\{w_t ; t \in \mathbb{Z}\}$ selon l'ordre r , tel que :

$$X_T = (\varepsilon_{T_r}^2, \varepsilon_{T_r-1}^2, \dots, \varepsilon_{T_r-r+1}^2)' , T \in \mathbb{Z} \quad (3.4.9)$$

$$\xi_T = (w_{T_r}, w_{T_r-1}, \dots, w_{T_r-r+1})' , T \in \mathbb{Z} \quad (3.4.10)$$

La nouvelle formulation des équations (3.4.8) est donné par :

$$A_{0,T} X_T = \delta_T + A_{1,T} X_{T-1} + \xi_T \quad (3.4.11)$$

où les $r \times r$ matrices $A_{0,T}$ et $A_{1,T}$ sont données, ci-dessous, en fonction des paramètres périodiques $c_i(t)$, qui sont eux mêmes en fonctions des paramètres périodiques $\alpha_{i,t}^{(k)}, \beta_{t,j}^{(k)}$; $i = 0, 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$, $k = 1, \dots, K$, et $t \in \mathbb{Z}$, du modèle original, $MPGARCH_S(K; q, q, \dots, q; p, p, \dots, p)$, étudié.

$$A_{0,T} = \begin{pmatrix} 1 & -c_1(Tr) & -c_2(Tr) & \cdots & -c_{r-1}(Tr) \\ 0 & 1 & -c_1(Tr-1) & \cdots & -c_{r-2}(Tr-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & -c_1(Tr-r+2) \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{1,T} = \begin{pmatrix} c_r(Tr) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{r-1}(Tr-1) & c_r(Tr-1) & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_2(Tr-r+2) & c_3(Tr-r+2) & c_r(Tr-r) & 0 & \\ c_1(Tr-r+1) & c_2(Tr-r+1) & c_{r-1}(Tr-r+1) & c_r(Tr-r+1) & \end{pmatrix}. \quad (3.4.12)$$

Et le vecteur colonne δ_T , de dimension r , donné par l'équation ci-dessous, est en fonction des paramètres périodiques $a_0(t)$, $t \in \mathbb{Z}$.

$$\delta_T = (a_0(Tr), a_0(Tr-1), \dots, a_0(Tr-r+1))' \quad (3.4.13)$$

Remarque : Il est clair que les matrices $A_{0,T}$, $A_{1,T}$ et le vecteur δ_T sont périodiques dans le temps, de période S .

Puisque la matrice $A_{1,T}$ est triangulaire inférieure, donc elle admet une matrice inverse $A_{1,T}^{-1}$.

Alors l'équation (3.4.11) devient :

$$X_T = A_{0,T}^{-1} \delta_T + A_{0,T}^{-1} A_{1,T} X_{T-1} + A_{0,T}^{-1} \xi_T \quad 3.4.14$$

A fin d'alléger l'écriture de l'équation (3.4.14), on pose :

$$B_T = A_{0,T}^{-1}A_{1,T}; \tilde{B}_T = A_{0,T}^{-1}\delta_T; \underline{\xi}_T = A_{0,T}^{-1} \xi_T.$$

On peut maintenant réécrire cette dernière équation (3.4.14) comme suit :

$$X_T = \tilde{B}_T + B_T X_{T-1} + \underline{\xi}_T \quad (3.4.15)$$

Après cette nouvelle formulation et ces notations, on peut donner la proposition suivante :

proposition 3.1 :

Le processus satisfaisant le modèle $MPGARCH_S(K; p, p, \dots, p; q, q, \dots, q)$ définit par l'équation (3.4.1) est périodiquement stationnaire au second ordre si, et seulement si toutes les valeurs propres $\lambda_i; i = 1, \dots, r$; de la $r \times r$ matrice définie positive Ω , sont positives strictement inférieure à un. (i.e) : $0 \leq \lambda_i < 1, i = 1, \dots, r$.où

$$\Omega = B_S B_{S-1} B_{S-2} \dots B_1 \quad (3.4.16)$$

Et l'expression explicite de sa variance sera égale à :

$$\underline{\gamma}_T(0) = (I - \Omega)^{-1} \sum_{i=0}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{i-1} B_{T-j} \right) \tilde{B}_{T-i} \quad (3.4.17)$$

avec $\underline{\gamma}_T(0) = (\gamma_{T_r}(0), \gamma_{T_{r-1}}(0), \dots, \gamma_{T_{r-r+1}}(0))'$; $B_T = A_{0,T}^{-1}A_{1,T}$; $\tilde{B}_T = A_{0,T}^{-1}\delta_T$;

$\delta_T = (a_0(T_r), a_0(T_r - 1), \dots, a_0(T_{r-r+1}))'$, et avec la convention

$$\prod_{j=a}^b B_j = I \quad , \forall a > b$$

Preuve :

a/ Condition de stationnarité périodique du second ordre En procédant par remplacements récursifs dans l'équation (3.4.14), on aura :

$$X_T = \tilde{B}_T + \sum_{j=1}^m \left(\left(\prod_{l=1}^j B_{T-l+1} \right) \tilde{B}_{T-j} \right) + \prod_{j=1}^m B_{T-j+1} X_{T-m} + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\prod_{l=1}^j B_{T-l+1} \right) \underline{\xi}_{T-j} + \underline{\xi}_T \quad (3.4.18)$$

En prenant l'espérance conditionnelle sachant le passé jusqu'à l'instant $t - m$, on retrouve :

$$E(X_T / \mathcal{F}_{t-m}) = \tilde{B}_T + \sum_{j=1}^m \left(\left(\prod_{l=1}^j B_{T-l+1} \right) \tilde{B}_{T-j} \right) + \prod_{j=1}^m B_{T-j+1} X_{T-m}$$

On remarque en fait que la variance conditionnelle ne dépend que de la valeur la plus récente X_{T-m} .

En suivant la démarche de Bentarzi et Hallin (1994), et s'appuyant sur la nature périodique de la matrice B_T .

Posons $T - j = s + \tau S$ et $m = i + hS$, avec $s, i = 1, \dots, S$ et $\tau, h \in \mathbb{Z}$.

$$\prod_{j=1}^m B_{T-j+1} = \prod_{l=s-1}^m B_l ; \quad (\text{puisque } B_{s+\tau S} = B_s) \quad (3.4.19)$$

$$= \prod_{l=s-1}^{i+hS} B_l \quad (3.4.20)$$

$$= \left(\prod_{l=s-1}^{s+S-1} B_l \right)^h \prod_{l=s+S}^i B_l \quad (3.2)$$

Sachant que le produit de deux matrices différentes $A \times B \neq B \times A$, il faut, alors, respecter l'ordre d'apparence des matrices.

Puisque la matrice B_T est en premier lieu la matrice B_{s-1} doit l'être aussi.

Intégrant maintenant cette dernière formule dans l'équation (3.4.18) :

$$E(X_T/\mathcal{F}_{t-m}, r) - \tilde{B}_T - \sum_{j=1}^m \left(\tilde{B}_{T-j} \prod_{l=1}^j B_{T-j+1} \right) = \left(\prod_{l=s-1}^{s+S-1} B_l \right)^h \prod_{l=s+S}^i B_l X_{T-m} \quad (3.4.22)$$

On considère, maintenant, la norme euclidienne des membres :

$$\left\| E(X_T/\mathcal{F}_{t-m}, r) - \tilde{B}_T - \sum_{j=1}^m \left(\tilde{B}_{T-j} \prod_{l=1}^j B_{T-j+1} \right) \right\| = \left\| \left(\prod_{l=s-1}^{s+S-1} B_l \right)^h \prod_{l=s+S}^i B_l X_{T-m} \right\| \quad (3.4.23)$$

Lorsque m tend vers l'infini (ainsi $h \rightarrow \infty$), la variance conditionnelle convergera vers la variance non conditionnelle, on a donc :

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left\| E(X_T^2/\mathcal{F}_{t-m}, r) - \tilde{B}_T - \sum_{j=1}^m \left(\tilde{B}_{T-j} \prod_{l=1}^j B_{T-j+1} \right) \right\| = 0 \quad (3.4.24)$$

D'où

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left\| \left(\prod_{l=s-1}^{s+S-1} B_l \right)^h \prod_{l=s+S}^i B_l X_{T-m}^2 \right\| = 0 \quad (3.4.25)$$

Puisque $\left\| \prod_{l=s+S}^i B_l X_{T-m}^2 \right\|$ est bornée, alors :

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left\| \left(\prod_{l=s-1}^{s+S-1} B_l \right)^h \right\| = 0 \quad (3.4.26)$$

Cela n'est vérifié que si, et seulement si la matrice:

$$\Psi = \prod_{l=s-1}^{s+S-1} B_l \quad (3.4.27)$$

ait des valeurs propres à l'intérieur du cercle unité, i.e. toutes les racines de $|\Psi - zI|$ soient à l'intérieur du cercle unité.

En fixant $s = 2$, la matrice Ψ tombe sur la matrice Ω définie par (3.4.16).

En rajoutant la condition de positivité des paramètres du modèle étudié, on retrouve exactement la condition donnée dans la proposition 3.1

b/ Expression de la variance En prenant l'espérance des deux membres de l'équation (3.4.15), on retrouve :

$$E(X_T^2) = \tilde{B}_T + B_T E(X_{T-1}^2) \quad (3.4.28)$$

On peut alors écrire :

$$\underline{\gamma}_T(0) = B_T \underline{\gamma}_{T-1}(0) + \tilde{B}_T \quad (3.4.29)$$

où $\underline{\gamma}_T(0)$ et \tilde{B}_T sont des vecteurs r -dimensionnel périodiques tels que :

$$\underline{\gamma}_T(0) = (\gamma_{Tr}(0), \gamma_{T(r-1)}(0), \dots, \gamma_{T(r-r+1)}(0))' \quad (3.4.30)$$

et $\tilde{B}_T = A_{0,T}^{-1} \delta_T$, avec δ_T donné par l'équation (3.3.13).

Procédant par S remplacements récursifs, en prenant en considération la nature périodique de la matrice, respectivement, le vecteur B_T, C_T dans l'équation (3.4.29) :

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}_T(0) &= B_T \left[B_{T-1} \underline{\gamma}_{T-2}(0) + \tilde{B}_{T-1} \right] + \tilde{B}_T \\ &= B_T B_{T-1} B_{T-2} \left[B_{T-3} \underline{\gamma}_{T-4}(0) + \tilde{B}_{T-3} \right] + B_T B_{T-1} \tilde{B}_{T-2} + B_T \tilde{B}_{T-1} + \tilde{B}_T \\ &\vdots \\ &= \prod_{j=0}^{S-1} B_{T-j} \underline{\gamma}_{T-j}(0) + \sum_{i=0}^{S-1} \prod_{j=0}^{i-1} B_{T-j} \tilde{B}_{T-i} \\ (I - \Omega) \underline{\gamma}_T(0) &= \sum_{i=0}^{S-1} \prod_{j=0}^{i-1} B_{T-j} \tilde{B}_{T-i} \end{aligned}$$

$$\underline{\gamma}_T(0) = (I - \Omega)^{-1} \sum_{i=0}^{S-1} \prod_{j=0}^{i-1} B_{T-j} \tilde{B}_{T-i}$$

avec la convention : $\prod_{j=a}^b B_j = I, \forall a < b$

Alors le vecteur périodique, de période S , est celui donné par l'expression (3.4.17) sous la condition de la proposition 3.1

corrolaire3.2 :

Le processus $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant un modèle $MPGARCH_S(K; 1, 1, \dots, 1; 1, 1, \dots, 1)$, est périodiquement stationnaire au second ordre si, et seulement si :

$$0 \leq \prod_{j=0}^{S-1} \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\alpha_{1,j}^{(k)} + \beta_{1,j}^{(k)} \right) < 1 \quad (3.4.31)$$

Dans ce cas, l'expression de la variance est, donc, égale à :

$$\gamma_t(0) = \sum_{i=0}^{S-1} \prod_{j=0}^{i-1} \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\alpha_{1,t-j}^{(k)} + \beta_{1,t-j}^{(k)} \right) \right) \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{0,t-i}^{(k)} \right) / \left(1 - \prod_{j=0}^{S-1} \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\alpha_{1,j}^{(k)} + \beta_{1,j}^{(k)} \right) \right) \quad (3.4.32)$$

Preuve :

a/Condition nécessaire et suffisante de stationnarité : Notons que ce cas de figure correspond au cas particulier $q = p = 1$. Par conséquence $r = 1$, alors les matrices $A_{0,T}, A_{1,T}$ sont réduites à 1 et $c_1(T)$, respectivement. D'où, la matrice B_T se réduit à $c_1(T)$ qui est périodique, de période S , donc la condition nécessaire et suffisante est égale à

$$0 \leq \prod_{j=0}^{S-1} \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\alpha_{1,j}^{(k)} + \beta_{1,j}^{(k)} \right) < 1.$$

Remarques :

1/Cette dernière condition devient $0 \leq \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\alpha_{1,j}^{(k)} + \beta_{1,j}^{(k)} \right) < 1$, pour $S = 1$, condition

nécessaire et suffisante de stationnarité périodique du second ordre d'un mélange de k modèles *GARCH* d'ordre un et sera égale à $0 \leq \prod_{j=0}^S (\alpha_{1,j} + \beta_{1,j}) < 1$, pour $k = 1$, condition nécessaire et suffisante de stationnarité d'un modèle périodique d'ordre un $PGARCH_S(1, 1)$ et c'est la même condition, pour $S = 2$, obtenue par Bollerslev et Ghysels (1996) pour le modèle $PGARCH_2(1, 1)$ de période 2.

2/De plus pour $p = 0$, la condition (3.4.31) devient $0 \leq \prod_{j=0}^S \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{1,j}^{(k)} < 1$ sera exactement celle obtenue par Bentarzi et Hamdi (2008a) pour le modèle $PARCH_S(K; 1, 1 \dots 1; 1, 1 \dots 1)$.

3/Sans oublier le cas simple, d'un modèle *GARCH*(1, 1) qui a comme condition de stationnarité $0 \leq \alpha_1 + \beta_1 < 1$ (Bollerslev (1986)), ce qui correspond au cas $k = S = 1$.

b/ Expression de la variance En prenant l'expression de la variance du modèle générale, équation (3.4.17), on retrouve pour le cas $q = p = 1$

$$\Omega = \prod_{j=0}^S \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\alpha_{1,j}^{(k)} + \beta_{1,j}^{(k)} \right) \quad (3.4.33)$$

$$B_T = \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\alpha_{1,T}^{(k)} + \beta_{1,T}^{(k)} \right) \quad (3.4.34)$$

$$\tilde{B}_T = \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{0,T}^{(k)} \quad (3.4.35)$$

Par conséquent l'expression de la variance d'un modèle $MPGARCH_S(K; 1, 1, \dots, 1; 1, 1, \dots, 1)$, est exactement donnée par l'équation (3.4.32).

Remarques

1-/ Pour $S = 1$, et sous la condition $0 \leq \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\alpha_{1,j}^{(k)} + \beta_{1,j}^{(k)} \right) < 1$, l'expression de la

variance devient :

$$\gamma_t(0) = \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_0^{(k)} \right) / \left(1 - \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\alpha_1^{(k)} + \beta_1^{(k)} \right) \right) \quad (3.4.36)$$

qui est l'expression de la variance d'un modèle $MGARCH(K; 1, 1, \dots, 1; 1, 1, \dots, 1)$, stationnaire au second ordre.

2-/ Pour $K = 1$, et sous la condition $0 \leq \prod_{j=0}^S (\alpha_{1,j} + \beta_{1,j}) < 1$, l'expression de la variance devient :

$$\gamma_t(0) = \sum_{i=0}^{S-1} \prod_{j=0}^{i-1} (\alpha_{1,t-j} + \beta_{1,t-j}) \alpha_{0,t-i} / \left(1 - \prod_{j=0}^S (\alpha_{1,j} + \beta_{1,j}) \right) \quad (3.4.37)$$

qui correspond à l'expression de la variance d'un modèle $PGARCH_S(1; 1)$, de période S , périodiquement stationnaire au second ordre.

3-/ Pour $P = 1$, et sous la condition $0 \leq \prod_{j=0}^S \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{1,j}^{(k)} < 1$, l'expression de la variance devient :

$$\gamma_t(0) = \sum_{i=0}^{S-1} \prod_{j=0}^{i-1} \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{1,t-j}^{(k)} \right) \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{0,t-i}^{(k)} \right) / \left(1 - \prod_{j=0}^S \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{1,j}^{(k)} \right) \quad (3.4.38)$$

qui correspond à l'expression de la variance, établie par Bentarzi et Hamdi(2008a), d'un modèle $MPARCH_S(K; 1, 1, \dots, 1; 1, 1, \dots, 1)$, de période S , périodiquement stationnaire au second ordre.

3.3.2 Moment d'ordre quatre d'un modèle $MPGARCH$ périodiquement stationnaire au second ordre

Dans cette section, nous allons établir la condition nécessaire et suffisante d'existence du moment d'ordre quatre d'un processus périodiquement stationnaire au second ordre

$$MPGARCH_S(K; 1, 1, \dots, 1; 1, 1, \dots, 1).$$

A cette fin, nous définissons les matrices carrées d'ordre $r\lambda = (S - 1)$ suivantes :

$$\Phi_{0,T} = \begin{pmatrix} \theta_0(Tr\lambda) & -\theta_1(Tr\lambda) & -\theta_2(Tr\lambda) & \cdots & -\theta_{r-1}(Tr\lambda) \\ 0 & \theta_0(Tr\lambda - 1) & -\theta_1(Tr\lambda - 1) & \cdots & -\theta_{r-2}(Tr\lambda - 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \theta_0(Tr\lambda - r\lambda + 2) & -\theta_1(Tr\lambda - r\lambda + 2) \\ & & & 0 & \theta_0(Tr\lambda - r\lambda + 1) \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{1,T} = \begin{pmatrix} \theta_r(Tr\lambda) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_{r-1}(Tr\lambda - 1) & \theta_r(Tr\lambda - 1) & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \theta_2(Tr\lambda - r\lambda + 2) & \theta_3(Tr\lambda - r\lambda + 2) & \theta_r(Tr\lambda - r\lambda) & 0 & \\ \theta_1(Tr\lambda - r\lambda + 1) & \theta_2(Tr\lambda - r\lambda + 1) & \theta_{r-1}(Tr\lambda - r\lambda + 1) & \theta_r(Tr\lambda - r\lambda + 1) & \end{pmatrix}.$$

(3.4.39)

Avec $\theta_i(t)$, des coefficients périodiques, égalent à :

$$\theta_i(t) = \begin{cases} 1 - \frac{3f}{1-\Lambda_2} \prod_{j=1}^{S-2} \left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2 \alpha_{1,t+1}^{(k)}, & i = 0 \\ 3 \left[d_{1,1} + \frac{f}{1-\Lambda_2} \prod_{j=1}^{S-1} \left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2 \left(\alpha_{1,t}^{(k)} \right)^2 \right] & i = 1 \\ \frac{3f}{1-\Lambda_2} \sum_{i=1}^{S-1} \prod_{j=1}^{i-2} \left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2 \left(\alpha_{1,t-i+1}^{(k)} \right)^2 & 2 \leq i \leq S - 1 \end{cases}$$

(3.4.40)

où
$$\Lambda_2 = \prod_{j=1}^S \left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2.$$

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{i,t}^{(k)} \alpha_{j,t}^{(k)}, \quad i, j = 0, 1.$$

$$f = \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2.$$

vu que les coefficients $\theta_i(t)$, qui sont en fonction de coefficients périodiques à savoir $\alpha_{i,t}^{(k)}$ et $\beta_{i,t}^{(k)}$, soient périodiques, alors les matrices $\Phi_{0,T}$ et $\Phi_{1,T}$ le sont aussi.

Soit maintenant :

$$\begin{aligned}
 \xi_t &= 3d_{0,0} + \frac{6e_0 D_{1,0}}{1 - \Lambda_1} + \frac{2f \text{ const}}{1 - \Lambda_2} + \left[6d_{0,1} + \frac{6e_0 D_{1,0}}{1 - \Lambda_1} \right] E(\varepsilon_{t-1}^2) \\
 &+ \frac{6f}{1 - \Lambda_2} \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \left[\left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2 \alpha_{0,t-i}^{(k)} \beta_{1,t-i}^{(k)} \left(1 + \frac{1}{1 - \Lambda_i} \sum_{r=1}^S \prod_{l=1}^{r-1} \beta_{1,t-i-l}^{(k)} \alpha_{0,t-i-r}^{(k)} \right) \right. \\
 &+ \left. \frac{6e_1 F}{(1 - \Lambda_1)(1 - \varpi)} \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \beta_{1,t-j}^{(k)} \alpha_{0,t-i}^{(k)} \right] E(\varepsilon_{t-i-1}^2) \\
 &+ \frac{6f}{1 - \Lambda_2} \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \left[\left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2 \alpha_{1,t-i}^{(k)} \beta_{1,t-i}^{(k)} \right. \\
 &\times \left. \frac{1}{1 - \Lambda_i} \sum_{r=1}^S \prod_{l=1}^{r-1} \beta_{1,t-i-l}^{(k)} \alpha_{0,t-i-r}^{(k)} \frac{1}{1 - \varpi_i} \sum_{r=1}^S \prod_{l=1}^{r-1} c_1(t-i-l) a_0(t-i-r) \right] E(\varepsilon_{t-i-r-1}^2) \\
 &+ \frac{6e_0}{1 - \Lambda_1} \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \beta_{1,t-j}^{(k)} \alpha_{1,t-i}^{(k)} E(\varepsilon_{t-i}^2).
 \end{aligned} \tag{3.4.41}$$

avec

$$\Lambda_1 = \prod_{j=1}^{i-1} \beta_{1,t-j}^{(k)} ; \quad \Lambda_i = \prod_{l=1}^S \beta_{1,t-i-l}^{(k)}.$$

$$\varpi = \prod_{j=1}^{i-1} c_1(t-j) ; \quad \varpi_i = \prod_{m=1}^S c_1(t-i-m). \text{ où } c_i(t) = a_i(t) + b_i(t) ; i = 1, \dots, r;$$

$$a_i(t) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{i,t}^{(k)}, \quad i = 0, 1, \dots, q \text{ et } b_j(t) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \beta_{j,t}^{(k)}, \quad j = 1, \dots, p \text{ sachant que } r =$$

$\max(p, q)$.

$$e_i = \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{i,t}^{(k)} \beta_{1,t}^{(k)} ; i = 0, 1.$$

$$\text{const} = \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2 \left(\alpha_{0,t-i}^{(k)} \right)^2 + \left(\frac{2}{1 - \Lambda_i} \right) \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2 \alpha_{0,t-i}^{(k)} \beta_{1,t-i}^{(k)} \sum_{r=1}^S \prod_{l=1}^{r-1} \alpha_{1,t-r-l}^{(k)} \alpha_{0,t-i-r}^{(k)}.$$

Λ_2 , f , $d_{i,j}$; $i, j = 0, 1$. sont donnés plus haut.

Ayant ces notations, nous allons énoncer la proposition suivante.

proposition 3.2 :

En supposant $\Lambda_1 < 1$, le processus satisfaisant le modèle $MPGARCH_S(K; 1, 1, \dots, 1; 1, 1, \dots, 1)$, périodiquement stationnaire au second ordre de période S avec $S \geq 2$, admet un moment d'ordre quatre fini si, et seulement si toutes les valeurs propres $\lambda_i ; i = 1, \dots, r\Lambda$; de la $r\Lambda \times r\Lambda$ matrice définie positive Ω^Λ , sont positives strictement inférieures à un. (i.e) :

$$0 \leq \lambda_i < 1, \quad i = 1, \dots, r\Lambda$$

où

$$\Omega^\Lambda = \Psi_S \Psi_{S-1} \Psi_{S-2} \dots \Psi_1 \quad (3.4.42)$$

De plus l'expression du moment d'ordre quatre d'un mélange de K modèles $GARCH$ S -périodique d'ordres $(1, 1, \dots, 1; 1, 1, \dots, 1)$ stationnaire au second ordre, $\vartheta = E(\varepsilon_t^4)$, sous cette condition, est la suivante :

$$\underline{\vartheta}_T = (I - \Omega^\Lambda)^{-1} \sum_{i=1}^{S-1} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \Psi_{T-j} \right) \tilde{D}_{T-i}, \quad T \in \mathbb{Z}, \quad (3.4.43)$$

avec $\Psi_T = \Phi_{0,T}^{-1} \Phi_{1,T}$, $\tilde{D}_T = \Phi_{0,T}^{-1} \underline{\xi}_T$,

où $\underline{\xi}_T = (\xi_{T r\Lambda}, \xi_{T r\Lambda-1}, \xi_{T r\Lambda-2}, \dots, \xi_{T r\Lambda-r\Lambda+1})'$ et $\underline{\vartheta}_T = (\vartheta_{T r\Lambda}, \vartheta_{T r\Lambda-1}, \vartheta_{T r\Lambda-2}, \dots, \vartheta_{T r\Lambda-r\Lambda+1})'$.

Preuve :

D'après la définition (3.2.1) du modèle étudié, nous pouvons voir que le moment conditionnel d'ordre quatre sachant le passé jusqu'à l'instant $t-1$ est égale à :

$$E(\varepsilon_t^4 / \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \lambda_k h_{k,t}^2$$

Après tout développement fait, et en prenant l'espérance des deux membres de cette dernière équation, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}E(\varepsilon_t^4) &= \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\alpha_{0,t}^{(k)} \right)^2 + 2E(\varepsilon_{t-1}^2) \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{0,t}^{(k)} \alpha_{1,t}^{(k)} + 2E(h_{k,t-1}) \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{0,t}^{(k)} \beta_{1,t}^{(k)} \\ &+ E(\varepsilon_{t-1}^4) \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\alpha_{1,t}^{(k)} \right)^2 + 2E(\varepsilon_{t-1}^2 h_{k,t-1}) \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{1,t}^{(k)} \beta_{1,t}^{(k)} + E(h_{k,t-1}^2) \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\beta_{1,t}^{(k)} \right)^2 \end{aligned}$$

Commençant par l'évaluation de $E(\varepsilon_{t-1}^2 h_{k,t-1})$.

Par $(S-1)$ remplacements successifs dans cette expression suivante :

$$E(\varepsilon_{t-1}^2 h_{k,t-1}) = \alpha_{0,t-1}^{(k)} E(\varepsilon_{t-1}^2) + \alpha_{1,t-1}^{(k)} E(\varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-2}^2) + \beta_{1,t-1}^{(k)} E(\varepsilon_{t-1}^2 h_{k,t-2}). \quad (3.4.44)$$

Après certaines manipulations, et en tenant compte de la périodicité des paramètres, on aura :

$$E(\varepsilon_{t-1}^2 h_{k,t-1}) = \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \beta_{1,t-j}^{(k)} \alpha_{0,t-i}^{(k)} E(\varepsilon_{t-1}^2) + \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \beta_{1,t-j}^{(k)} \alpha_{1,t-i}^{(k)} E(\varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-i-1}^2) + \prod_{j=1}^S \beta_{1,t-j}^{(k)} E(\varepsilon_{t-1}^2 h_{k,t-1}) \quad (3.4.45)$$

Nous avons, maintenant, besoin d'évaluer $E(\varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-i-1}^2)$, $i = 1, \dots, S$. Pour ce faire, procédant par $S-1$ remplacements successifs dans l'expression suivante :

$$E(\varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-i-1}^2) = a_0(t-1) E(\varepsilon_{t-i-1}^2) + c_1(t-1) E(\varepsilon_{t-2}^2 \varepsilon_{t-i-1}^2) \quad (3.4.46)$$

Rappelons que les paramètres, donnés dans la section précédente, $a_0(t-1)$, $c_1(t-1)$ sont tels que :

$$c_i(t) = a_i(t) + b_i(t); \quad i = 1, \dots, r;$$

$$a_i(t) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{i,t}^{(k)}, \quad i = 0, 1, \dots, q \quad \text{et} \quad b_j(t) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \beta_{j,t}^{(k)}, \quad j = 1, \dots, p.$$

$$\text{alors pour } p = q = r = 1, \text{ on aura } a_0(t) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{0,t}^{(k)}; \quad c_1(t) = \sum_{k=1}^K \lambda_k (\alpha_{1,t}^{(k)} + \beta_{1,t}^{(k)}).$$

En tenant compte de la périodicité de ces paramètres et après certaines manipulations, l'équation (3.4.46) sera équivalente à :

$$E(\varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-i-1}^2) = \sum_{l=1}^S \prod_{r=1}^{i-1} c_1(t-r) a_0(t-l) E(\varepsilon_{t-i-1}^2) + \prod_{j=1}^S c_1(t-j) E(\varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-i-1}^2) \quad (3.4.47)$$

$$\text{Posons } \varpi = \prod_{j=1}^S c_1(t-j).$$

$$E(\varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-i-1}^2) = \frac{E(\varepsilon_{t-i-1}^2)}{1-\varpi} \sum_{l=1}^S \prod_{r=1}^{i-1} c_1(t-r) a_0(t-l) \quad (3.4.48)$$

Remplaçons $E(\varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-i-1}^2)$, $i = 1, \dots, S$ par cette dernière équation, dans l'équation (3.4.45), on aura :

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_{t-1}^2 h_{k,t-1}) &= \frac{1}{1-\Lambda_1} \left[\sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \beta_{1,t-j}^{(k)} \alpha_{0,t-i}^{(k)} E(\varepsilon_{t-1}^2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \beta_{1,t-j}^{(k)} \alpha_{1,t-i}^{(k)} \left(\frac{E(\varepsilon_{t-i-1}^2)}{1-\varpi} \right) \sum_{l=1}^S \prod_{r=1}^{i-1} c_1(t-r) a_0(t-l) \right] \end{aligned} \quad (3.4.49)$$

$$\text{avec } \Lambda_1 = \prod_{j=1}^S \beta_{1,t-j}^{(k)}.$$

Maintenant, nous allons passer à calculer $E(h_{k,t-1})$.

En faisant $S-1$ remplacements successifs dans l'expression suivante de la variance conditionnelle de la $k^{\text{ième}}$ composante du mélange du modèle étudié, on obtient :

$$E(h_{k,t-1}) = \frac{1}{1-\Lambda_1} \left[\sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \beta_{1,t-j}^{(k)} \alpha_{0,t-i}^{(k)} + \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \beta_{1,t-j}^{(k)} \alpha_{1,t-i}^{(k)} E(\varepsilon_{t-i}^2) \right] \quad (3.4.50)$$

Il nous reste, à présent d'évaluer $E(h_{k,t-1}^2)$.

$$\begin{aligned}
 E(h_{k,t-1}^2) &= \left(\alpha_{0,t-1}^{(k)}\right)^2 + 2\alpha_{0,t-1}^{(k)}\alpha_{1,t-1}^{(k)} E(\varepsilon_{t-2}^2) \\
 &+ 2\alpha_{0,t-1}^{(k)}\beta_{1,t-1}^{(k)} E(h_{k,t-2}) + \left(\alpha_{1,t-1}^{(k)}\right)^2 E(\varepsilon_{t-2}^4) \\
 &+ 2\alpha_{1,t-1}^{(k)}\beta_{1,t-1}^{(k)} E(\varepsilon_{t-2}^2 h_{k,t-2}) + \left(\beta_{1,t-1}^{(k)}\right)^2 E(h_{k,t-2}^2)
 \end{aligned} \tag{3.4.51}$$

Après $S - 1$ remplacement, on aura

$$\begin{aligned}
 E(h_{k,t-1}^2) &= \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \left(\beta_{1,t-j}^{(k)}\right)^2 \left(\alpha_{0,t-i}^{(k)}\right)^2 + \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \left(\beta_{1,t-j}^{(k)}\right)^2 \left(\alpha_{1,t-i}^{(k)}\right)^2 E(\varepsilon_{t-i-1}^4) \\
 &+ 2 \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \left(\beta_{1,t-j}^{(k)}\right)^2 \alpha_{0,t-i}^{(k)} \beta_{1,t-i}^{(k)} E(\varepsilon_{t-i-1}^2) \\
 &+ 2 \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \left(\beta_{1,t-j}^{(k)}\right)^2 \alpha_{0,t-i}^{(k)} \beta_{1,t-i}^{(k)} E(h_{k,t-i-1}) \\
 &+ 2 \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \left(\beta_{1,t-j}^{(k)}\right)^2 \alpha_{1,t-i}^{(k)} \beta_{1,t-i}^{(k)} E(\varepsilon_{t-i-1}^2 h_{k,t-i-1}) + \prod_{j=1}^S \left(\beta_{1,t-j}^{(k)}\right)^2 E(h_{k,t-1})
 \end{aligned} \tag{3.4.52}$$

Ayant les expressions(3.3.49) , (3.3.50) ,respectivement, de $E(\varepsilon_{t-1}^2 h_{k,t-1})$, $E(h_{k,t-1})$, nous pouvons facilement déduire les expressions de $E(\varepsilon_{t-i-1}^2 h_{k,t-i-1})$, $E(h_{k,t-i-1})$ suivantes:

$$\begin{aligned}
 E(\varepsilon_{t-i-1}^2 h_{k,t-i-1}) &= \frac{1}{1 - \Lambda_2} \left[\sum_{r=1}^S \prod_{l=1}^{r-1} \beta_{1,t-i-l}^{(k)} \alpha_{0,t-i-r}^{(k)} E(\varepsilon_{t-i-1}^2) \right. \\
 &\left. + \sum_{r=1}^S \prod_{l=1}^{r-1} \beta_{1,t-i-l}^{(k)} \alpha_{1,t-i-r}^{(k)} \frac{F_i}{1 - \varpi_i} E(\varepsilon_{t-i-r-1}^2) \right]
 \end{aligned} \tag{3.3.53}$$

$$E(h_{k,t-i-1}) = \frac{1}{1 - \Lambda_i} \left[E_i + \sum_{r=1}^S \prod_{l=1}^{r-1} \beta_{1,t-r-l}^{(k)} \alpha_{1,t-i-r}^{(k)} E(\varepsilon_{t-i-r}^2) \right]$$

$$\text{avec } \Lambda_i = \prod_{l=1}^S \beta_{1,t-i-l}^{(k)}.$$

$$E_i = \sum_{r=1}^S \prod_{l=1}^{r-1} \beta_{1,t-i-l}^{(k)} \alpha_{0,t-i-r}^{(k)}.$$

$$\varpi_i = \prod_{m=1}^S c_1(t-i-m).$$

$$F_i = \sum_{n=1}^S \prod_{m=1}^{n-1} c_1(t-i-m) a_0(t-i-n).$$

En substituant $E(\varepsilon_{t-i-1}^2 h_{k,t-i-1})$, $E(h_{k,t-i-1})$ par leurs expressions, dans la formule (3.4.52), nous aurons

$$\begin{aligned} E(h_{k,t-1}^2) &= \frac{1}{1-\Lambda_2} \left[\text{const} + 2 \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2 \alpha_{0,t-i}^{(k)} \beta_{1,t-i}^{(k)} \left(1 + \frac{\sum_{r=1}^S \prod_{l=1}^{r-1} \beta_{1,t-i-l}^{(k)} \alpha_{0,t-i-r}^{(k)}}{1-\Lambda_i} \right) E(\varepsilon_{t-i-1}^2) \right. \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2 \alpha_{0,t-i}^{(k)} \beta_{1,t-i}^{(k)} \left(\frac{\sum_{r=1}^S \prod_{l=1}^{r-1} \beta_{1,t-i-l}^{(k)} \alpha_{0,t-i-r}^{(k)}}{1-\Lambda_i} \right) E(\varepsilon_{t-i-r}^2) \\ &\quad + \frac{2}{1-\Lambda_i} \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2 \alpha_{1,t-i}^{(k)} \beta_{1,t-i}^{(k)} \left(\frac{\sum_{r=1}^S \prod_{l=1}^{r-1} \beta_{1,t-i-l}^{(k)} \alpha_{1,t-i-r}^{(k)}}{1-\prod_{l=1}^S c_1(t-i-l)} \right) \sum_{r=1}^S \prod_{l=1}^{r-1} c_1(t-i-l) a_0(t-i-r) \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2 \left(\alpha_{1,t-i}^{(k)} \right)^2 E(\varepsilon_{t-i-1}^4) \right] \end{aligned}$$

$$\text{où } \Lambda_2 = \prod_{j=1}^S \left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2 \text{ et } \Lambda_i = \prod_{l=1}^S \beta_{1,t-i-l}^{(k)}.$$

$$\text{const} = \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2 \left(\alpha_{0,t-i}^{(k)} \right)^2 + \left(\frac{2}{1-\Lambda_i} \right) \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2 \alpha_{0,t-i}^{(k)} \beta_{1,t-i}^{(k)} \sum_{r=1}^S \prod_{l=1}^{r-1} \alpha_{1,t-r-l}^{(k)} \alpha_{0,t-i-r}^{(k)}.$$

Finalement, en remplaçant, respectivement, $E(\varepsilon_{t-1}^2 h_{k,t-1})$, $E(h_{k,t-1})$ par leurs formules

(3.4.49), (3.4.50) dans l'expression (3.4.44) du moment d'ordre quatre, nous obtenons pour $S \geq 2$.

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{3f \prod_{j=1}^{S-2} \left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2 \alpha_{1,t+1}^{(k)}}{1 - \Lambda_2} \right) E(\varepsilon_t^4) &= 3d_{0,0} + \frac{6e_0 D_{1,0}}{1 - \Lambda_1} + \frac{2f \text{const}}{1 - \Lambda_2} + \left[6d_{0,1} + \frac{6e_0 D_{1,0}}{1 - \Lambda_1} \right] E(\varepsilon_{t-1}^2) \\
 &+ \frac{6f}{1 - \Lambda_2} \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \left[\left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2 \alpha_{0,t-i}^{(k)} \beta_{1,t-i}^{(k)} \left(1 + \frac{\sum_{r=1}^S \prod_{l=1}^{r-1} \beta_{1,t-i-l}^{(k)} \alpha_{0,t-i}^{(k)}}{1 - \Lambda_i} \right) \right. \\
 &+ \left. \frac{6e_1 F}{(1 - \Lambda_1)(1 - \varpi)} \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \beta_{1,t-j}^{(k)} \alpha_{0,t-i}^{(k)} \right] E(\varepsilon_{t-i-1}^2) \\
 &+ \frac{6f}{1 - \Lambda_2} \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \left[\left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2 \alpha_{1,t-i}^{(k)} \beta_{1,t-i}^{(k)} \frac{1}{1 - \Lambda_i} \right. \\
 &\times \left. \sum_{r=1}^S \prod_{l=1}^{r-1} \beta_{1,t-i-l}^{(k)} \alpha_{0,t-i-r}^{(k)} \frac{1}{1 - \varpi_i} \sum_{r=1}^S \prod_{l=1}^{r-1} c_1(t-i-l) a_0(t-i-r) \right. \\
 &+ \left. \frac{6e_0}{1 - \Lambda_1} \sum_{i=1}^S \prod_{j=1}^{i-1} \beta_{1,t-j}^{(k)} \alpha_{1,t-i}^{(k)} E(\varepsilon_{t-i}^2) \right. \\
 &+ \left. 3 \left[d_{1,1} + \frac{f}{1 - \Lambda_2} \prod_{j=1}^{S-1} \left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2 \left(\alpha_{1,t}^{(k)} \right)^2 \right] E(\varepsilon_{t-1}^4) \right. \\
 &+ \left. \frac{3f}{1 - \Lambda_2} \sum_{i=1}^{S-1} \prod_{j=1}^{i-2} \left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2 \left(\alpha_{1,t-i+1}^{(k)} \right)^2 E(\varepsilon_{t-i}^4) \right]
 \end{aligned}$$

$$f = \sum_{k=1}^K \lambda_k \left(\beta_{1,t-j}^{(k)} \right)^2.$$

$$e_i = \sum_{k=1}^K \lambda_k \alpha_{i,t}^{(k)} \beta_{1,t}^{(k)}. \quad ; i = 0, 1.$$

$$D_{i,j} = \sum_{r=1}^S \prod_{l=1}^{r-1} \alpha_{i,t-l}^{(k)} \alpha_{j,t-r}^{(k)}, \quad i, j = 0, 1.$$

$$F = \sum_{r=1}^S \prod_{l=1}^{r-1} c_{1,t-l}^{(k)} a_{0,t-r}^{(k)}.$$

De la sorte, le moment d'ordre quatre du processus $MPGARCH_S(K; 1, 1, \dots, 1; 1, 1, \dots, 1)$, satisfait l'équation aux différences linéaires non homogène à coefficients périodiques, d'ordre $r\lambda = (S - 1)$, suivante :

$$\theta_0(t)E(\varepsilon_t^4) = \sum_{i=1}^{S-1} \theta_i(t)E(\varepsilon_{t-i}^4) + \xi_t, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (3.4.56)$$

tels que les coefficients périodiques $\theta_i(t)$ et ξ_t sont donnés, respectivement, par (3.4.40), (3.4.41).

Si on pose, maintenant, $\Gamma_t = E(\varepsilon_t^4)$

Soit les vecteurs périodiques $\underline{\Gamma}_T, \underline{\xi}_T, \Psi_T, \tilde{D}_T$, de dimension $r\lambda$, tels que :

pour $T \in \mathbb{Z}$, $\underline{\Gamma}_T = (\Gamma_{T r\lambda}, \Gamma_{T r\lambda-1}, \Gamma_{T r\lambda-2}, \dots, \Gamma_{T r\lambda-r\lambda+1})'$; $\underline{\xi}_T = (\xi_{T r\lambda}, \xi_{T r\lambda-1}, \xi_{T r\lambda-2}, \dots, \xi_{T r\lambda-r\lambda+1})'$

$$\Psi_T = \Phi_{0,T}^{-1} \Phi_{1,T}, \quad \tilde{D}_T = \Phi_{0,T}^{-1} \underline{\xi}_T, \quad \text{où les matrices carrées d'ordre } r\lambda, \Phi_{1,T} \text{ et } \Phi_{0,T}$$

sont données par (3.4.39).

Ainsi, nous pouvons réécrire l'équation (3.4.56) sous la forme $r\lambda$ -varié, S -périodique qui lui correspond :

$$\underline{\Gamma}_T = \Psi_T \underline{\Gamma}_{T-1} + \tilde{D}_T, \quad T \in \mathbb{Z}. \quad (3.4.57)$$

Cette dernière équation est typiquement similaire à celle donnée par (3.4.29). De ce fait, la preuve de la proposition 3.2 peut être facilement établie, en suivant la démarche prise dans la preuve de la proposition 3.1 déjà établie.

corrolaire 3.2 :

En supposant $\Lambda_2 < 1$, le processus satisfaisant le modèle $MPGARCH_2(K; 1, 1, \dots, 1; 1, 1, \dots, 1)$, périodiquement stationnaire au second ordre de période 2 admet un moment d'ordre quatre

fini si, et seulement si :

$$\left| \frac{\theta_1(2)\theta_2(1)}{\theta_0(2)\theta_0(1)} \right| < 1.$$

Sous cette condition, l'expression du moment d'ordre quatre est telle que :

$$E(\varepsilon_t^4) = \frac{\theta_1(t)\tilde{D}_{t-1} + \theta_0(t-1)\tilde{D}_t}{\theta_0(t)\theta_0(t-1) - \theta_1(t)\theta_1(t-1)}$$

où les coefficients 2-périodiques $\theta_i(t)$ et \tilde{D}_t sont donnés plus haut.

Chapitre 4

Estimation du modèle

Introduction :

Dans le domaine des statistiques et beaucoup d'autres qui lui sont liés, la méthode du maximum de vraisemblance est largement utilisée dans l'estimation des paramètres du modèle. Cependant, dans l'analyse de séries temporelles, on dispose souvent d'informations incomplètes, certaines séries de données commencent plus tard que d'autres et parfois il s'agit de données non observables (cachées) comme dans le cas des Modèles de Markov Cachées (HMM) et les mélanges de modèles. Dans de telles situations, l'algorithme EM de Arthur Dempster (1977) se montre très appréciable. Cet algorithme est une méthode itérative efficace pour calculer l'estimation de vraisemblance maximale (MLE) en présence de données manquantes. Le but du MLE est d'estimer les paramètres du modèle pour lesquelles les données observées sont les plus vraisemblables tout en tenant compte de l'existence de données manquantes.

Chaque itération de l'algorithme se compose de deux processus : l'étape (E) pour Expectation (espérance) et l'étape (M) pour Maximisation. Dans la première, les données absentes sont estimées sachant les données observées et l'évaluation courante des paramètres du modèle. Cela est achevé par l'utilisation de l'espérance conditionnelle, expliquant le choix de la terminologie (Expectation). Dans la deuxième étape, la fonction de vraisemblance est maximisée dans la prétention que les données absentes sont connues. Les estimations des données manquantes de l'étape (E) sont employées au lieu des données réelles inobservables. La convergence est assurée puisque l'algorithme augmente la vraisemblance à chaque itération.

4.1 Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance :

4.1.1 Principe de la méthode

En général, pour l'estimation des paramètres, on définit une fonction de densité $p(\underline{X}/\underline{\theta})$ qui dépend de l'ensemble des paramètres. On suppose que notre ensemble de N données est extrait de cette distribution, c'est-à-dire $X = (x_1, \dots, x_N)$.

La densité de la variable X peut donc s'écrire :

$$p(\underline{X}/\underline{\theta}) = \prod_{i=1}^N p(x_i/\underline{\theta})$$

La fonction de vraisemblance des paramètres sachant les données est la suivante :

$$= \varrho(\underline{\theta}/X)$$

C'est la fonction de vraisemblance. Mais en pratique, il est plus facile de calculer le logarithme de cette fonction, on utilise donc la log-vraisemblance :

$$L(\underline{X}/\underline{\theta}) = \ln \varrho(\underline{\theta}/X).$$

Le problème se pose alors comme un problème d'optimisation de ces paramètres par rapport à la distribution : $\underline{\theta}^{opt} = \max_{\underline{\theta}} L(\underline{X}/\underline{\theta})$

Il suffit, maintenant, de dériver pour obtenir les estimateurs de $\underline{\theta}$. Pour des cas plus compliqués comme des variables avec données manquantes, il peut ne pas avoir de solution analytique, dans de telle situation il faut utiliser une méthode itérative comme l'algorithme EM.

4.1.2 Méthode du quasi-maximum de vraisemblance

L'idée générale des estimateurs du quasi-maximum de vraisemblance, *QMV*, consiste à démontrer que si l'on commet une erreur sur la distribution conditionnelle des résidus en

utilisant à tort une log-vraisemblance fondée sur une loi normale, cette erreur de spécification de la loi n'a pas de conséquence sur les propriétés de convergence de l'estimateur si la vraie loi des résidus appartient à la même classe de loi que la loi normale (Gouriroux, Montfort, 1989). L'estimateur sera : (i) asymptotiquement convergent et (ii) asymptotiquement normal. Par conséquent, la fonction de vraisemblance définissant l'estimateur du MV sous l'hypothèse de normalité et la fonction de quasi-vraisemblance de l'estimateur du QMV sont les mêmes.

La propriété suivante résume ce qui a été dit :

Propriété

Sous les conditions de régularité :

*/il existe une solution $\hat{\underline{\theta}}$ qui converge vers la vraie valeur $\underline{\theta}_0$.

*/L'estimateur QMV est asymptotiquement normal :

$$\sqrt{T} \left(\hat{\underline{\theta}}_T - \underline{\theta}_0 \right) \xrightarrow{\text{loi}} N(0, J^{-1} I J^{-1}).$$

où

$$J = E_{\underline{\theta}_0} \left[-\frac{\partial^2 L(X/\underline{\theta}_0)}{\partial \underline{\theta} \partial \underline{\theta}'} \right], \text{ et } I = E_{\underline{\theta}_0} \left[-\frac{\partial L(X/\underline{\theta}_0)}{\partial \underline{\theta}} \frac{\partial L(X/\underline{\theta}_0)}{\partial \underline{\theta}} \right],$$

avec L est la fonction de vraisemblance donnée plus haut.

4.1.3 L'algorithme EM

Formulation de l'algorithme EM en présence de données manquantes :

Si on définit X comme les données incomplètes observées, on assume qu'il existe un ensemble complet de données $Y = (X, Z)$; où Z représente l'ensemble des données manquantes. Alors on peut réécrire la fonction de densité jointe comme suit :

$$p(Y/\underline{\theta}) = p(X, Z/\underline{\theta}) = p(Z/X, \underline{\theta}) p(X/\underline{\theta})$$

et de la même façon, la fonction de la log-vraisemblance de l'ensemble complet de données :

$$L(\underline{\theta}/Y) = L(\underline{\theta}/X, Z) = \ln p(X, Z/\underline{\theta})$$

On doit donc trouver la valeur espérée de la log-vraisemblance de l'ensemble complet de données Y par rapport aux données manquantes Z sachant les données observées X et les paramètres, $\underline{\theta}$, du modèle. Le problème est qu'on ne connaît pas les variables cachées, il faut donc utiliser les données X et les paramètres d'une itération précédente $\underline{\theta}^{i-1}$.

La définition de cette espérance est :

$$Q(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{i-1}) = E_Z [\ln(p(X, Z/\underline{\theta})) / X, \underline{\theta}^{i-1}]$$

avec $\underline{\theta}^{i-1}$ les paramètres de l'itération précédente utilisés pour évaluer l'espérance, $\underline{\theta}$ les nouveaux paramètres à optimiser pour maximiser Q et E_Z l'espérance conditionnelle par rapport à la loi de Z sachant $\underline{\theta}^{i-1}$ et les données observées X . C'est par le calcul de cette espérance conditionnelle qu'on mesure la log-vraisemblance. C'est exactement l'étape (E) dite "Expectation step".

L'algorithme EM se résume alors, sous ses deux étapes, comme suit :

Etape E : Évaluation de l'espérance : $Q(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{i-1})$, sachant les données observées et les paramètres disposés.

Etape M : Maximisation de cette espérance : $\underline{\theta}^i = \underset{\underline{\theta}}{\text{arg max}} Q(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{i-1})$.

Ces deux étapes sont répétées jusqu'à convergence. Puisque chaque itération fait augmenter la log-vraisemblance, alors l'algorithme converge directement vers un maximum local de la fonction de log-vraisemblance.

4.1.4 L'algorithme EM généralisé (GEM)

Il existe une version généralisée de l'algorithme, dite "GEM", dans laquelle la valeur actualisée ne maximise pas nécessairement Q mais l'augmente simplement, c'est-à-dire satisfait :

$$Q(\underline{\theta}^i, \underline{\theta}^{i-1}) \geq Q(\underline{\theta}^{i-1}, \underline{\theta}^{i-1})$$

Alors $\underline{\theta}^i$ est choisi telle que la fonction $Q(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{i-1})$ soit supérieure à sa valeur au point $\underline{\theta}^{i-1}$ dans chaque itération. Ce qui peut garantir l'augmentation de la fonction log-vraisemblance.

La suite d'itérations de l'algorithme GEM convergera vers un maximum local.

4.1.5 L'algorithme GEM basé sur la seule étape de Newton-Raphson

L'algorithme *GEM* est utilisé lorsque le maximum global n'est pas facile à obtenir ce qui empêche de faire des calculs à l'étape *M*.

Dans notre travail, et dû à la difficulté des calculs dans l'étape *M*, comme nous allons le voir dans la section suivante, nous avons adapté l'algorithme *GEM* basé sur la seule étape de la méthode itérative de Newton-Raphson. Puisqu'il n'est pas important de maximiser Q dans un GEM mais uniquement réalisant le même objectif, celui de maximiser la fonction de la log-vraisemblance, l'itération de l'algorithme de Newton-Raphson est la suivante :

$$\underline{\theta}^i = \underline{\theta}^{i-1} + \left[\frac{\partial^2 Q(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{i-1})}{\partial \underline{\theta} \partial \underline{\theta}'} \right]_{\underline{\theta}=\underline{\theta}^{i-1}}^{-1} \left[\frac{\partial Q(\underline{\theta}, \underline{\theta}^{i-1})}{\partial \underline{\theta}} \right]_{\underline{\theta}=\underline{\theta}^{i-1}}$$

4.1.6 Avantages et inconvénients de l'algorithme EM

Nous proposons dans cette section, de donner une idée du potentiel de l'algorithme EM étant une méthode itérative pour l'estimation des paramètres. De plus, certaines critiques de cet algorithme seront aussi signalées.

*L'algorithme EM est stable numériquement et l'accroissement monotone de la vraisemblance est assurée à chaque itération de l'algorithme EM, (sauf à un point fixe de l'algorithme) voir par exemple McLachlan et Krishnan (1997, *chap.3*)

*L'algorithme EM Converge vers un point stationnaire. En effet, la convergence d'une suite d'itérations EM vers un maximum local ou global dépend du choix de la valeur initiale du paramètre $\underline{\theta}^0$. On dit qu'il y a, respectivement convergence, locale ou convergence globale selon le type de point stationnaire (maximum local ou maximum global), pour plus de détails voir (Chaubert-Pereira (2008)).

*L'algorithme EM est reconnu par la simplicité de sa mise en œuvre En sus, le coût de calcul par itération est peu gourmand, l'algorithme demande peu d'espace de stockage, par exemple, il n'a pas besoin d'emmagasiner la matrice d'information ni son inverse

*En observant la croissance monotone de la vraisemblance à chaque itération, il est facile de contrôler sa convergence et les erreurs de programmation.

*L'algorithme EM peut être utilisé pour donner des valeurs estimées des données manquantes.

Donnons à présent, quelques critiques de cet algorithme :

*L'algorithme EM n'a pas de procédure incluse qui pourrait produire la matrice de variance-covariance des paramètres estimés. Néanmoins, ce problème peut être réglé en utilisant des méthodes appropriées qui lui sont associées.

*/Dans certains cas, les étapes E et M de l'algorithme peuvent être analytiquement intraitables

*/La convergence de l'algorithme EM peut être lente. Il peut, aussi, converger lentement lorsqu'il y a beaucoup d'informations manquantes.

*/Quand 'il y a plusieurs maxima , il n'est pas certain que l'algorithme EM convergera vers un maximum global ou local .

4.2 Estimation des paramètres dans le cas classique, MGARCH :

Dans cette section, nous allons estimer les paramètres d'un modèle de mélange de K modèles *GARCH* classiques, noté $MGARCH(K; q, \dots, q; p, \dots, p)$, qui n'est rien d'autre que le modèle proposé, $MPGARCH_s(K; q, \dots, q; p, \dots, p)$ avec $S = 1$. La méthode d'estimation adoptée est celle du quasi-maximum de vraisemblance via l'algorithme EM .

Pour procéder à l'estimation par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance des paramètres d'un modèle $MGARCH (K; q, \dots, q; p, \dots, p)$, il faut avoir l'expression de la fonction de vraisemblance en premier. Pour ce faire, nous définissons les vecteurs suivants :

*/ Le vecteur des données complètes $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N, Z_1, Z_2, \dots, Z_N)'$

*/Le vecteur des données manquantes $\underline{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_N)'$

où $Z_t = (Z_{1,t}, Z_{2,t}, \dots, Z_{K,t})'$ est le vecteur de dimension K , telle que chaque composante : $Z_{k,t} = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon_t \text{ est générée par la } k^{ieme} \text{ composante de la distribution conditionnelle du mélange} \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

$$*/\underline{\theta} = (\underline{\lambda}', \theta'_1, \dots, \theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_K)'$$

$$\text{où } \theta_k = (\alpha_0^{(k)}, c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \dots, c_r^{(k)}, \dots, \beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}, \dots, \beta_r^{(k)})'; k = 1, \dots, K \text{ et } \underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{K-1})',$$

$$\text{avec } \sum_{k=1}^K \lambda_k = 1.$$

Pour une réalisation donnée, $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)'$, du modèle MGARCH, la densité conjointe de (ε_t, Z_t) est donnée par :

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_t, z_t / \mathcal{F}_{t-1}) &= \prod_{k=1}^K \left[P(Z_{k,t} = z_{k,t}) \frac{1}{\sqrt{h_{k,t}}} \phi\left(\frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_{k,t}}}\right) \right]^{z_{k,t}} \\ &= \prod_{k=1}^K \left[\frac{\lambda_k}{\sqrt{h_{k,t}}} \phi\left(\frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_{k,t}}}\right) \right]^{z_{k,t}} \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

D'où la fonction de quasi-vraisemblance des paramètres est la suivante :

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{t=r+1}^N f(\varepsilon_t, z_t / \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{1}{N-r} \prod_{t=r+1}^N \prod_{k=1}^K \left[\frac{\lambda_k}{\sqrt{2\pi} \sqrt{h_{k,t}}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2h_{k,t}}\right) \right]^{z_{k,t}} \quad (4.2.2)$$

Pour la suite $\mathcal{L}(\underline{\theta})$ dénote le logarithme naturel de la fonction du quasi-vraisemblance, utilisée pour simplifier les calculs, qui est égale à :

$$\mathcal{L}(\underline{\theta}) = \sum_{t=r+1}^N \sum_{k=1}^K z_{k,t} \left(\ln \lambda_k - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \left(\ln h_{k,t} + \frac{\varepsilon_t^2}{h_{k,t}} \right) \right) \quad (4.2.3)$$

Écrivant maintenant la fonction de la log-vraisemblance sous la forme vectorielle.

$$\text{Pour cela définissons le vecteur } \underline{\varepsilon}_t = (1, \varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2, \dots, \varepsilon_{t-r}^2, v_{k,t-1}, v_{k,t-2}, \dots, v_{k,t-r})'$$

$$\text{où } v_{k,t-i} = \varepsilon_{t-i}^2 - h_{k,t-i}; i = 1, \dots, r.$$

Alors $h_{k,t}$ peut être réécrite comme suit : $h_{k,t} = \theta'_k \underline{\varepsilon}_t$ d'où la possibilité de réécrire la fonction de de la log-vraisemblance sous sa forme vectorielle suivante :

$$\mathcal{L}(\underline{\theta}) = \text{const} + \sum_{t=r+1}^N \sum_{k=1}^K z_{k,t} \left(\ln \lambda_k - \frac{1}{2} \left(\ln \theta'_k \underline{\varepsilon}_t + \frac{\varepsilon_t^2}{\theta'_k \underline{\varepsilon}_t} \right) \right) \quad (4.2.4)$$

où $const = \frac{(r-N)}{2} \ln(2\pi) - \ln(N-r)$

4.2.1 L'algorithme EM.

1^{ière} étape de l'algorithme : "Expectation step(E)"

Ayant la formule de la fonction de log-vraisemblance, il suffit de la dériver par rapport aux paramètres pour obtenir leurs estimations (2^{ème} étape de l'algorithme). Mais cela n'est faisable sauf si les données manquantes $Z_{k,t}$ sont estimées (1^{ère} étape de l'algorithme). Pour ce faire, on suppose au début que les paramètres λ_k, θ_k sont connus en leur affectant les valeurs de la $i^{\text{ème}}$ itération $\lambda_k^{(i)}, \theta_k^{(i)}$ respectivement. A présent, les données manquantes $Z_{k,t}$ peuvent être remplacées par leurs espérances conditionnelles sachant les paramètres $\lambda_k^{(i)}, \theta_k^{(i)}$ et les données observées $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)'$, noté $\tau_{k,t}$. Dans ce cas, cette espérance n'est que la probabilité conditionnelle que l'observation ε_t soit générée par la $k^{\text{ème}}$ composante de la distribution conditionnelle du mélange sachant le passé jusqu'à l'instant $t-1$ et les estimations des paramètres $\lambda_k^{(i)}, \theta_k^{(i)}$.

Ayant la densité conditionnelle de $\varepsilon_t, z_{k,t}$, sachant le passé jusqu'à l'instant $t-1$, égale à :

$$f(\varepsilon_t, z_{k,t} / \lambda_k^{(i)}, \theta_k^{(i)}, \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{\lambda_k^{(i)}}{\sqrt{h_{k,t}}} \phi\left(\frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_{k,t}}}\right) \quad (4.2.5)$$

où $h_{k,t}$ est calculée en fonction des estimations des paramètres de la $i^{\text{ème}}$ itération, $\theta_k^{(i)}$.

2^{ème} étape de l'algorithme : "Maximisation step(M)"

Une fois la 1^{ère} étape de l'algorithme accomplie, et les données soient complètes, nous passons à la 2^{ème} étape, à savoir l'étape M, qui sera faite par la résolution du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \lambda_k} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta_k} = 0 \end{cases}, k = 1, \dots, K-1.$$

Les premières dérivées partielles de la fonction de log-vraisemblance par rapport aux paramètres λ_k , θ_k , sous la contrainte $\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1$; $k = 1, \dots, K$ sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \lambda_k} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \left\{ \sum_{t=r+1}^N \left(\sum_{k=1}^{K-1} z_{k,t} \ln \lambda_k - z_{K,t} \ln \left(1 - \sum_{k=1}^{K-1} \lambda_k \right) \right) \right\} \\ &= \sum_{t=r+1}^N \left(\frac{z_{k,t}}{\lambda_k} - \frac{z_{K,t}}{\lambda_K} \right); \quad k = 1, \dots, K-1 \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_k} = \frac{1}{2} \sum_{t=r+1}^N \frac{z_{k,t}}{\theta'_k \underline{\varepsilon}_t} \left(\frac{\varepsilon_t^2}{\theta'_k \underline{\varepsilon}_t} - 1 \right) \frac{\partial h_{k,t}}{\partial \theta_k}. \quad (4.2.8)$$

Sous l'hypothèse que les données manquantes soient connues (estimées dans l'étape M), les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres peuvent être obtenus comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \lambda_k} = 0 &\implies \sum_{t=r+1}^N \left(\frac{z_{k,t}}{\lambda_k} - \frac{z_{K,t}}{\lambda_K} \right) = 0 \quad ; k = 1, \dots, K-1 \\ &\implies \frac{1}{\lambda_k} \sum_{t=r+1}^N z_{k,t} = \frac{1}{\lambda_K} \sum_{t=r+1}^N z_{K,t} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

$z_{k,t}$ étant inconnues, on les remplace par leurs estimations $\tau_{k,t}$, on aura :

$$\begin{aligned} \sum_{t=r+1}^N \tau_{k,t} &= \frac{\lambda_k}{\lambda_K} \sum_{t=r+1}^N \tau_{K,t} \\ \sum_{t=r+1}^N \sum_{k=1}^K \tau_{k,t} &= \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k}{\lambda_K} \sum_{t=r+1}^N \tau_{K,t} \end{aligned}$$

sachant que $\sum_{k=1}^K \tau_{k,t} = 1$ et $\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1$, on a :

$$\lambda_K = \sum_{t=r+1}^N \tau_{K,t} \quad (4.2.10)$$

Remplaçons maintenant cette dernière expression dans l'expression (4.2.9), on aura l'expression des estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres λ_K :

$$\hat{\lambda}_k = \sum_{t=r+1}^N z_{k,t} ; \quad k = 1, \dots, K-1. \quad (4.2.11)$$

Maintenant, concernant le vecteur θ_k , il n'existe pas de solution analytique explicite de l'équation $\partial \mathcal{L}(\underline{\theta}) / \partial \theta_k = 0$.

Nous pouvons alors utiliser une méthode itérative, soit celle de Newton-Raphson, ce qui nécessite l'évaluation de dérivée seconde de la fonction de log-vraisemblance par rapport à θ_k , dont l'expression, facile à vérifier, est la suivante :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_k \partial \theta_k'} = -\frac{1}{2} \sum_{t=\tau_1}^{N-1} \frac{z_{k,t}}{h_{k,t}^2} \left(\frac{2\varepsilon_t^2}{h_{k,t}} - 1 \right) \frac{\partial h_{k,t}}{\partial \theta_k} \left(\frac{\partial h_{k,t}}{\partial \theta_k} \right)', \quad \text{pour } k = 1, \dots, K. \quad (4.2.12)$$

Selon la méthode de Newton-Raphson, partant d'une valeur initiale, $\theta_k^{(0)}$ de θ_k , l'estimation $\hat{\theta}_k$ du vecteur θ_k peut être évaluée par la façon itérative suivante :

$$\theta_k^{(i+1)} = \theta_k^{(i)} + \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_k \partial \theta_k'} \Big|_{\theta_k = \theta_k^{(i)}} \right]^{-1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_k} \Big|_{\theta_k = \theta_k^{(i)}} \right] \quad (4.2.13)$$

où $\theta_k^{(i)}$, $k = 1, \dots, K$, est la valeur de θ_k dans la $i^{\text{ème}}$ itération .

Les estimateurs des paramètres sont alors obtenus en réitérant les deux étapes de l'algorithme EM jusqu'à convergence, c'est à dire jusqu'à stationnarité de la fonction de log-vraisemblance, ce qui peut être traduit par le critère d'arrêt suivant :

$$\left| \mathcal{L}(\underline{\theta}^{(i+1)}) - \mathcal{L}(\underline{\theta}^{(i)}) \right| \leq a \quad , \text{ avec } a \text{ une valeur arbitrairement petite}$$

4.3 Estimation des paramètres dans le cas périodique, MPGARCH :

Nous allons étudier dans cette section l'estimation des paramètres d'un modèle Mélange de K modèles $GARCH$ périodiques, noté $MPGARCH_S(K; q, \dots, q; p, \dots, p)$, pour lequel nous allons suivre la même démarche que celle du cas classique.

Expression de la vraisemblance.

Soient les vecteurs suivants :

*/Le vecteur des données complètes $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{NS}, Z_1, Z_2, \dots, Z_{NS})'$

*/Le vecteur des données manquantes $\underline{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_{NS})'$

où $Z_t = (Z_{1,t}, Z_{2,t}, \dots, Z_{K,t})'$ est le vecteur de dimension K , telle que chaque composante :

$$Z_{k,t} = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon_t \text{ est générée par la } k^{ieme} \text{ composante de la distribution conditionnelle du mélange.} \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

*/ $\underline{\theta} = (\underline{\lambda}', \theta'_{1,1}, \dots, \theta'_{1,S}, \theta'_{2,1}, \dots, \theta'_{2,S}, \dots, \theta'_{K,1}, \dots, \theta'_{K,S})'$

où $\theta_{k,s} = (\alpha_{0,s}^{(k)}, c_{1,s}^{(k)}, c_{2,s}^{(k)}, \dots, c_{r,s}^{(k)}, \beta_{1,s}^{(k)}, \beta_{2,s}^{(k)}, \dots, \beta_{r,s}^{(k)})'$; $s = 1, \dots, S, k = 1, \dots, K$

et $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{K-1})'$, avec $\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1$

Pour une réalisation donnée $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{NS})'$ du modèle $M|PGARCH$, la densité conjointe de (ε_t, Z_t) est donnée par :

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_t, z_t / \mathcal{F}_{t-1}) &= \prod_{k=1}^K \left[P(Z_{k,t} = z_{k,t}) \frac{1}{\sqrt{h_{k,t}}} \phi \left(\frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_{k,t}}} \right) \right]^{z_{k,t}} \\ &= \prod_{k=1}^K \left[\frac{\lambda_k}{\sqrt{h_{k,t}}} \phi \left(\frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_{k,t}}} \right) \right]^{z_{k,t}} \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

D'où la fonction du quai-vraisemblance normalisé des paramètres est la suivante :

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{t=r+1}^{NS} f(\varepsilon_t, z_t / \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{1}{NS-r} \prod_{t=r+1}^{NS} \prod_{k=1}^K \left[\frac{\lambda_k}{\sqrt{2\pi} \sqrt{h_{k,t}}} \exp\left(\frac{\varepsilon_t^2}{2h_{k,t}}\right) \right]^{z_{k,t}} \quad (4.4.2)$$

Pour la suite $\mathcal{L}(\underline{\theta})$ dénote le logarithme naturel de la fonction du quasi-vraisemblance, utilisé pour simplifier les calculs, qui est égale à :

$$\mathcal{L}(\underline{\theta}) = \ln\left(\frac{1}{NS-r}\right) + \sum_{t=r+1}^{NS} \sum_{k=1}^K z_{k,t} \left(\ln \lambda_k - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \left(\ln h_{k,t} + \frac{\varepsilon_t^2}{h_{k,t}} \right) \right) \quad (4.4.3)$$

Pour pouvoir étudier la périodicité dans le modèle, il convient de poser :

$$t = s + \tau S; \quad \tau = 0, 1, \dots, N-1$$

$$r+1 = s_0 + \tau_0 S; \quad s_0 = 1, \dots, S \quad \text{avec}$$

$$\tau_0 = \begin{cases} \left\lfloor \frac{r+1}{S} \right\rfloor & ; \text{ si } s_0 \neq S. \\ \left\lfloor \frac{r+1}{S} \right\rfloor - 1 & ; \text{ si } s_0 = S. \end{cases} \quad \text{et} \quad \tau_1 = \begin{cases} \tau_0 & ; \text{ si } s \geq s_0. \\ \tau_0 + 1 & ; \text{ si } s \leq s_0. \end{cases}$$

où $[x]$ est la partie entière de x .

Avec ces nouvelles notation nous pouvons réécrire la fonction de log-vraisemblance comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\underline{\theta}) = & \text{const} + \sum_{s=s_0}^S \sum_{k=1}^K z_{k,s+\tau_0 S} \left(\ln \lambda_k - \frac{1}{2} \left(\ln h_{k,s+\tau_0 S} + \frac{\varepsilon_{s+\tau_0 S}^2}{h_{k,s+\tau_0 S}} \right) \right) \\ & + \sum_{\tau=\tau_0+1}^{N-1} \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^K z_{k,s+\tau S} \left(\ln \lambda_k - \frac{1}{2} \left(\ln h_{k,s+\tau S} + \frac{\varepsilon_{s+\tau S}^2}{h_{k,s+\tau S}} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

$$\text{avec } \text{const} = \frac{(r-NS)}{2} \ln(2\pi) - \ln(NS-r).$$

Il serait plus judicieux d'écrire la fonction de la log-vraisemblance pour la forme vectorielle. Pour cela, définissons le vecteur $\underline{\varepsilon}_{s,\tau} = (1, \varepsilon_{s+\tau S-1}^2, \varepsilon_{s+\tau S-2}^2, \dots, \varepsilon_{s+\tau S-r}^2, v_{k,s+\tau S-1}, v_{k,s+\tau S-2}, \dots, v_{k,s+\tau S-r})$ où $v_{k,s+\tau S-i} = \varepsilon_{s+\tau S-i}^2 - h_{k,s+\tau S-i}$; $i = 1, \dots, r$.

Alors $h_{k,s+\tau S}$ peut être réécrite sous la forme du produit vectoriel suivant : $h_{k,s+\tau S} = \theta'_{k,s} \underline{\varepsilon}_{s,\tau}$ d'où la possibilité de réécrire la fonction de la log-vraisemblance pour sa forme vectorielle

suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = & \text{const} + \sum_{s=s_0}^S \sum_{k=1}^K z_{k,s+\tau_0 S} \left(\ln \lambda_k - \frac{1}{2} \left(\ln(\theta'_{k,s} \underline{\varepsilon}_{s,\tau_0}) + \frac{\varepsilon_{s+\tau_0 S}^2}{\theta'_{k,s} \underline{\varepsilon}_{s,\tau_0}} \right) \right) \\ & + \sum_{\tau=\tau_0+1}^{N-1} \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^K z_{k,s+\tau S} \left(\ln \lambda_k - \frac{1}{2} \left(\ln(\theta'_{k,s} \underline{\varepsilon}_{s,\tau}) + \frac{\varepsilon_{s+\tau S}^2}{\theta'_{k,s} \underline{\varepsilon}_{s,\tau}} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

4.3.1 L'algorithme EM .

1^{ière} étape de l'algorithme : "Expectation step (E)"

Dans le cas périodique, et puisque la procédure est la même que dans le cas classique et les formules sont presque similaires nous allons les donner directement :

La densité conditionnelle de $\varepsilon_{s+\tau S}, z_{k,s+\tau S}$, sachant le passé jusqu'à l'instant $t-1$, est égale à :

$$f(\varepsilon_{s+\tau S}, z_{k,s+\tau S} / \lambda_k^{(i)}, \theta_{k,s}^{(i)}, \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{\lambda_k^{(i)}}{\sqrt{h_{k,s+\tau S}}} \phi \left(\frac{\varepsilon_{s+\tau S}}{\sqrt{h_{k,s+\tau S}}} \right) \quad (4.4.6)$$

Et l'estimation des données manquantes $Z_{k,s+\tau S}$ qui n'est rien que l'espérance conditionnelle sachant les paramètres $\lambda_k^{(i)}, \theta_{k,s}^{(i)}$ et les données observées $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{NS})'$, noté $\tau_{k,t}$, est égale à :

$$\tau_{k,s+\tau S} = E \left(z_{k,s+\tau S} / \lambda_k^{(i)}, \theta_{k,s}^{(i)}, \mathcal{F}_{t-1} \right) = \frac{\frac{\lambda_k^{(i)}}{\sqrt{h_{k,s+\tau S}}} \phi \left(\frac{\varepsilon_{s+\tau S}}{\sqrt{h_{k,s+\tau S}}} \right)}{\sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k}{\sqrt{h_{k,s+\tau S}}} \phi \left(\frac{\varepsilon_{s+\tau S}}{\sqrt{h_{k,s+\tau S}}} \right)} \quad (4.4.7)$$

où $h_{k,s+\tau S}$ est calculée en fonction des estimations des paramètres de la $i^{\text{ème}}$ itération, $\theta_{k,s}^{(i)}$.

2^{ième} étape de l'algorithme : "Maximisation step(M)"

Une fois la 1^{ière} étape de l'algorithme accomplie et les données soient complètes, nous passons à la 2^{ième} étape, à savoir l'étape M (pour Maximisation), qui sera faite par la résolution

du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \lambda_k} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s}} = 0 \end{cases}, k = 1, \dots, K - 1.$$

Les premières dérivées partielles de la fonction de log-vraisemblance par rapport aux paramètres λ_k , $\theta_{k,s}$, sous la contrainte $\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1$; $k = 1, \dots, K$ sont les suivantes :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \lambda_k} = \sum_{t=r+1}^{NS} \left(\frac{z_{k,t}}{\lambda_k} - \frac{z_{K,t}}{\lambda_K} \right); \quad k = 1, \dots, K - 1 \quad (4.4.8)$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s}} = \sum_{\tau=r+1}^N \frac{z_{k,s+\tau S}}{\theta'_{k,s} \underline{\varepsilon}_{s,\tau}} \left(\frac{\varepsilon_{s+\tau S}^2}{\hat{\theta}'_{k,s} \underline{\varepsilon}_{s,\tau}} - 1 \right) \frac{\partial h_{k,s+\tau S}}{\partial \theta_{k,s}}. \quad (4.4.9)$$

Alors, les estimateurs du maximum du quasi- vraisemblance des paramètres

$$\lambda_K : \hat{\lambda}_k = \sum_{t=r+1}^{NS} z_{k,t}; \quad k = 1, \dots, K - 1. \quad (4.4.10)$$

Concernant les estimateurs du vecteur $\theta_{k,s}$, comme nous l'avons déjà signalé dans le classique il n'existe pas de solution analytique explicite de l'équation $\partial \mathcal{L}(\underline{\theta}) / \partial \theta_{k,s} = 0$. Nous utilisons alors la méthode itérative de Newton-Raphson. La dérivée seconde de la fonction de log-vraisemblance par rapport à $\theta_{k,s}$, est égale à :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s} \partial \theta'_{k,s}} = -\frac{1}{2} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \frac{z_{k,s+\tau S}}{h_{k,s+\tau S}^2} \left(\frac{2\varepsilon_{s+\tau S}^2}{h_{k,s+\tau S}} - 1 \right) \frac{\partial h_{k,s+\tau S}}{\partial \theta_{k,s}} \left(\frac{\partial h_{k,s+\tau S}}{\partial \theta_{k,s}} \right)', \quad (4.4.11)$$

pour $k = 1, \dots, K$; $s = 1, \dots, S$

Selon la méthode de Newton-Raphson, et partant d'une valeur initiale, $\theta_k^{(0)}$ de $\theta_{k,s}$, l'estimation, $\hat{\theta}_{k,s}$, du vecteur $\theta_{k,s}$ peut être évaluée par la façon itérative suivante :

$$\theta_{k,s}^{(i+1)} = \theta_{k,s}^{(i)} + \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s} \partial \theta'_{k,s}} \Big|_{\theta_{k,s} = \theta_{k,s}^{(i)}} \right]^{-1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s}} \Big|_{\theta_{k,s} = \theta_{k,s}^{(i)}} \right] \quad (4.4.12)$$

où $\theta_{k,s}^{(i)}$, $k = 1, \dots, K$; $s = 1, \dots, S$, est la valeur de $\theta_{k,s}$ dans la $i^{\text{ème}}$ itération.

L'algorithme se déroule jusqu'à stabilité de la fonction de log-vraisemblance, on choisira une valeur arbitraire a pour la vérifiée. i.e

$$\left| \mathcal{L}(\underline{\theta}^{(i+1)}) - \mathcal{L}(\underline{\theta}^{(i)}) \right| \leq a, \text{ avec } a \text{ une valeur arbitrairement petite}$$

4.3.2 Matrice d'information

Calcul de la matrice d'information complète

En effet, la matrice d'information observée, I_{ob} , peut être calculée à partir de la matrice d'information complète, I_c , et la matrice d'information manquante, I_m , avec la relation suivante :

$$I_{ob} = I_c - I_m \quad \text{où}$$

$$I_c = E \left(- \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta} \partial \underline{\theta}'} / \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta} = \hat{\underline{\theta}}}$$

et

$$I_m = Var \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} / \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta} = \hat{\underline{\theta}}}$$

Maintenant passons aux calculs de ces matrices.

Calcul de la matrice d'information complète, I_c

Cette matrice est une matrice bloc diagonale de la forme suivante :

$$I_c = \begin{pmatrix} A^{(\lambda)} & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & A^{(\theta_{1,1})} & 0 & \dots & & 0 \\ & 0 & \ddots & & & \\ & & & A^{(\theta_{1,s})} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & A^{(\theta_{K,1})} & \\ & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & & 0 & A^{(\theta_{K,s})} \end{pmatrix}$$

Alors le premier bloc de cette matrice est une matrice carrée de dimension $K - 1$, définie comme suit :

$$A^{(\lambda)} = E \left(-\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \lambda \partial \lambda'} / \boldsymbol{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \left(A_{i,j}^{(\lambda)} \right)_{i,j=1,\dots,K-1}.$$

Calculer les éléments de la matrice, I_c , revient à évaluer la dérivée seconde de la fonction log-vraisemblance par rapport à λ .

A partir de l'équation (4.4.8), nous avons pour $i = j = 1, \dots, K - 1$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial^2 \lambda} &= - \sum_{t=r+1}^{NS} \left(\frac{z_{i,t}}{\lambda_i^2} + \frac{z_{K,t}}{\lambda_K^2} \right) \\ &= \left[- \sum_{s=s_0}^S \left(\frac{z_{i,s+\tau_0 S}}{\lambda_i^2} + \frac{z_{K,s+\tau_0 S}}{\lambda_K^2} \right) - \sum_{\tau=\tau_0+1}^{N-1} \sum_{s=s_1}^S \left(\frac{z_{i,s+\tau S}}{\lambda_i^2} + \frac{z_{K,s+\tau S}}{\lambda_K^2} \right) \right], \end{aligned}$$

et pour $i, j=1, \dots, K-1$ avec $i \neq j$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j'} = - \sum_{t=r+1}^{NS} \frac{z_{K,t}}{\lambda_K^2} = \left[- \sum_{s=s_0}^S \frac{z_{K,s+\tau_0 S}}{\lambda_K^2} - \sum_{\tau=\tau_0+1}^{N-1} \sum_{s=s_1}^S \frac{z_{K,s+\tau S}}{\lambda_K^2} \right]$$

Alors, nous obtenons pour $i = j = 1, \dots, K - 1$,

$$\begin{aligned} A_{i,i}^{(\lambda)} &= E \left(\sum_{t=r+1}^{NS} \left(\frac{z_{i,t}}{\lambda_i^2} + \frac{z_{K,t}}{\lambda_K^2} \right) / \boldsymbol{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \\ &= \sum_{t=r+1}^{NS} \left(\frac{\tau_{i,t}}{\hat{\lambda}_i^2} + \frac{\tau_{K,t}}{\hat{\lambda}_K^2} \right) \\ &= \left[\sum_{s=s_0}^S \left(\frac{\tau_{i,s+\tau_0 S}}{\hat{\lambda}_i^2} + \frac{\tau_{K,s+\tau_0 S}}{\hat{\lambda}_K^2} \right) + \sum_{\tau=\tau_0+1}^{N-1} \sum_{s=s_1}^S \left(\frac{\tau_{i,s+\tau S}}{\hat{\lambda}_i^2} + \frac{\tau_{K,s+\tau S}}{\hat{\lambda}_K^2} \right) \right] \end{aligned}$$

et nous avons pour $i, j = 1, \dots, K - 1$ quand $i \neq j$

$$\begin{aligned} A_{i,i}^{(\lambda)} &= E \left(\sum_{t=r+1}^{NS} \frac{z_{K,t}}{\lambda_K^2} / \boldsymbol{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \\ &= \sum_{t=r+1}^{NS} \frac{\tau_{K,t}}{\hat{\lambda}_K^2} \\ &= \left[\sum_{s=s_0}^S \frac{\tau_{K,s+\tau_0 S}}{\hat{\lambda}_K^2} + \sum_{\tau=\tau_0+1}^{N-1} \sum_{s=s_1}^S \frac{\tau_{K,s+\tau S}}{\hat{\lambda}_K^2} \right]. \end{aligned}$$

Il nous reste à présent l'évaluation des $(r+1) \times (r+1)$ matrices carrées, $A^{(\theta_{k,s})}$, $k = 1, \dots, K$ et $s = 1, \dots, S$, telles que :

$$A^{(\theta_{k,s})} = E \left(-\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{k,s} \partial \theta_{k,s}'} / \boldsymbol{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}}$$

$$= E \left(\frac{1}{2} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \frac{z_{k,s+\tau S}}{h_{k,s+\tau S}^2} \left(\frac{2\varepsilon_{s+\tau S}^2}{h_{k,s+\tau S}} - 1 \right) \frac{\partial h_{k,s+\tau S}}{\partial \theta_{k,s}} \left(\frac{\partial h_{k,s+\tau S}}{\partial \theta_{k,s}} \right)' / \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}}$$

Pour calculer cette quantité nous avons besoin d'évaluer la dérivée de la volatilité, $h_{k,s+\tau_0 S}$, par rapport à $\theta_{k,s}$, $k = 1, \dots, K$; $s = 1, \dots, S$.

Rappelons que l'écriture matricielle de $h_{k,s+\tau_0 S}$ est telle que $h_{k,s+\tau_0 S} = \theta_{k,s}' \underline{\varepsilon}_{s,\tau}$

où $\underline{\varepsilon}_{s,\tau} = (1, \varepsilon_{s+\tau S-1}^2, \varepsilon_{s+\tau S-2}^2, \dots, \varepsilon_{s+\tau S-r}^2, v_{k,s+\tau S-1}, v_{k,s+\tau S-2}, \dots, v_{k,s+\tau S-r})'$

avec $v_{k,s+\tau S-i} = \varepsilon_{s+\tau S-i}^2 - h_{k,s+\tau S-i}$; $i = 1, \dots, r$.

et $\theta_{k,s} = (\alpha_{0,s}^{(k)}, c_{1,s}^{(k)}, c_{2,s}^{(k)}, \dots, c_{r,s}^{(k)}, \beta_{1,s}^{(k)}, \beta_{2,s}^{(k)}, \dots, \beta_{r,s}^{(k)})'$; $S = 1, \dots, S$, $k = 1, \dots, K$

Ainsi, nous avons
$$\frac{\partial h_{k,s+\tau S}}{\partial \theta_{k,s}} = \frac{\underline{\varepsilon}_{s,\tau}}{1 - \prod_{i=1}^S \beta_{k,s-i+\tau S}} .$$

$$\begin{aligned} \text{Nous obtenons alors : } E \left(\frac{1}{2} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \frac{z_{k,s+\tau S}}{\hat{\theta}_{k,s}' \underline{\varepsilon}_{s,\tau}} \left(\frac{\underline{\varepsilon}_{s,\tau}}{1 - \prod_{i=1}^S \beta_{k,s-i+\tau S}} \right) \left(\frac{\underline{\varepsilon}_{s,\tau}}{1 - \prod_{i=1}^S \beta_{k,s-i+\tau S}} \right)' / \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ = \frac{1}{2} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \frac{z_{k,s+\tau S}}{\hat{\theta}_{k,s}' \underline{\varepsilon}_{s,\tau} \hat{\underline{\varepsilon}}_{s,\tau}' \hat{\theta}_{k,s}} \left(\frac{2\varepsilon_{s+\tau S}^2}{\hat{\theta}_{k,s}' \underline{\varepsilon}_{s,\tau}} - 1 \right) \left(\frac{\underline{\varepsilon}_{s,\tau} \hat{\underline{\varepsilon}}_{s,\tau}'}{\left(1 - \prod_{i=1}^S \hat{\beta}_{k,s-i+\tau S} \right)^2} \right)' \end{aligned}$$

Calcul de la matrice d'information manquante

Rappelons que la matrice d'information manquante est telle que

$$I_m = Var \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} / \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}}$$

Celle-ci peut être écrite sous la forme simplifiée suivante :

$$I_m = \begin{pmatrix} B^{(\lambda,\lambda)} & B^{(\lambda,\theta_{1,1})} & \dots & B^{(\lambda,\theta_{1,S})} & & B^{(\lambda,\theta_{K,1})} & \dots & B^{(\lambda,\theta_{K,S})} \\ B^{(\theta_{1,1},\lambda)} & B^{(\theta_{1,1},\theta_{1,1})} & & B^{(\theta_{1,1},\theta_{1,S})} & & & & B^{(\theta_{1,1},\theta_{K,S})} \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ B^{(\theta_{1,S},\lambda)} & B^{(\theta_{1,S},\theta_{1,1})} & \dots & B^{(\theta_{1,S},\theta_{1,S})} & & & & B^{(\theta_{1,S},\theta_{K,S})} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ B^{(\theta_{K,1},\lambda)} & B^{(\theta_{K,1},\theta_{1,1})} & \dots & B^{(\theta_{K,1},\theta_{1,S})} & & B^{(\theta_{K,1},\theta_{K,1})} & & B^{(\theta_{K,1},\theta_{K,S})} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ B^{(\theta_{K,S},\lambda)} & B^{(\theta_{K,S},\theta_{1,1})} & \dots & B^{(\theta_{K,S},\theta_{1,S})} & & & & B^{(\theta_{K,S},\theta_{K,S})} \end{pmatrix}$$

où $B^{(\lambda,\lambda)}$, $B^{(\theta_{k,s},\lambda)}$, et $B^{(\theta_{k,s},\theta_{i,j})}$, avec $k, i = 1, \dots, K$ et $s, j = 1, \dots, S$, sont, respectivement des matrices de dimensions $(K-1) \times (K-1)$, $(r+1) \times (K-1)$ et $(r+1) \times (r+1)$.

Nous remarquons que la matrice, I_m , est symétrique, alors il suffit d'évaluer sa matrice triangulaire, par exemple la triangulaire inférieure, pour l'évaluer.

Alors, on a :

$$B^{(\lambda,\lambda)} = \text{Var} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \lambda} \middle/ \boldsymbol{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \left(B_{i,j}^{(\lambda,\lambda)} \right)_{i,j=1,\dots,K-1}$$

où l'évaluation des éléments, $B_{i,j}^{(\lambda,\lambda)}$, $i, j = 1, \dots, K-1$, de la matrice $B^{(\lambda,\lambda)}$ est telle que :

Cas où $i = j = 1, \dots, K-1$

$$\begin{aligned} B_{i,j}^{(\lambda,\lambda)} &= \text{Var} \left(\sum_{t=r+1}^{NS} \left(\frac{z_{i,t}}{\lambda_i} - \frac{z_{K,t}}{\lambda_K} \right) \middle/ \boldsymbol{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \\ &= \sum_{t=r+1}^{NS} \frac{\tau_{i,t}(1-\tau_{i,t})}{\hat{\lambda}_i^2} + \frac{\tau_{K,t}(1-\tau_{K,t})}{\hat{\lambda}_K^2} + 2 \frac{\tau_{i,t}\tau_{K,t}}{\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_K} \end{aligned}$$

Cas où $i, j = 1, \dots, K-1$, avec $i \neq j$

$$\begin{aligned} B_{i,j}^{(\lambda,\lambda)} &= \text{cov} \left(\sum_{t=r+1}^{NS} \left(\frac{z_{i,t}}{\lambda_i} - \frac{z_{K,t}}{\lambda_K} \right), \sum_{t=r+1}^{NS} \left(\frac{z_{i,t}}{\lambda_i} - \frac{z_{K,t}}{\lambda_K} \right) \middle/ \boldsymbol{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \\ &= \sum_{t=r+1}^{NS} \left(-\frac{\tau_{i,t}\tau_{j,t}}{\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j} + \frac{\tau_{i,t}\tau_{K,t}}{\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_K} + \frac{\tau_{K,t}\tau_{j,t}}{\hat{\lambda}_K\hat{\lambda}_j} + \frac{\tau_{K,t}(1-\tau_{K,t})}{\hat{\lambda}_K^2} \right). \end{aligned}$$

Evaluation des matrices $B^{(\theta_{k,s}, \theta_{i,j})}$, $k, i = 1, \dots, K$ et $s, j = 1, \dots, S$,

Commençons par le cas où $k = i$

$$\begin{aligned} B^{(\theta_{k,s}, \theta_{k,s})} &= \text{Var} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s}} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \frac{\tau_{k,s+\tau S} (1 - \tau_{k,s+\tau S})}{\hat{\theta}'_{k,s} \underline{\varepsilon}_{s,\tau}} \left(\frac{\varepsilon_{s+\tau S}^2}{\hat{\theta}'_{k,s} \underline{\varepsilon}_{s,\tau}} - 1 \right)^2 \frac{\underline{\varepsilon}_{s,\tau} \underline{\varepsilon}'_{s,\tau}}{\left(1 - \prod_{i=1}^S \hat{\beta}_{k,s-i+\tau S} \right)^2}. \end{aligned}$$

Pour le cas où $k, i = 1, \dots, K$ et $s, j = 1, \dots, S$, avec $s \neq j$ les $B^{(\theta_{k,s}, \theta_{i,j})}$ s'annulent.

Il nous reste maintenant d'évaluer les matrices $B^{(\theta_{k,s}, \lambda)}$.

$$B^{(\theta_{k,s}, \lambda)} = \text{cov} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s}}, \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \lambda} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} = \left(B_{i,j}^{(\theta_{k,s}, \lambda)} \right)_{\substack{i=1, \dots, r+1 \\ j=1, \dots, K-1}}.$$

Si on désigne par $B_{\cdot,j}^{(\theta_{k,s}, \lambda)}$, $j = 1, \dots, K-1$, le $j^{\text{ième}}$ vecteur de la matrice $B^{(\theta_{k,s}, \lambda)}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} B_{\cdot,k}^{(\theta_{k,s}, \lambda)} &= \text{cov} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s}}, \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \lambda_k} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \frac{\tau_{k,s+\tau S} (1 - \tau_{k,s+\tau S})}{\hat{\lambda}_k} + \frac{\tau_{k,s+\tau S} \tau_{K,s+\tau S}}{\hat{\lambda}_K} \\ &\quad \times \left(\frac{\varepsilon_{s+\tau S}^2}{\hat{\theta}'_{k,s} \underline{\varepsilon}_{s,\tau}} - 1 \right) \frac{\underline{\varepsilon}_{s,\tau}}{1 - \prod_{i=1}^S \hat{\beta}_{k,s-i+\tau S}}, \end{aligned}$$

en ce qui concerne le cas $j \neq k$ et $k \neq K$

$$\begin{aligned} B_{\cdot,j}^{(\theta_{k,s}, \lambda)} &= \text{cov} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \theta_{k,s}}, \frac{\partial \mathcal{L}(\underline{\theta})}{\partial \lambda_j} \middle/ \underline{\theta}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \frac{\tau_{k,s+\tau S} \tau_{K,s+\tau S}}{\hat{\lambda}_K} + \frac{\tau_{k,s+\tau S} \tau_{j,s+\tau S}}{\hat{\lambda}_j} \\ &\quad \times \left(\frac{\varepsilon_{s+\tau S}^2}{\hat{\theta}'_{k,s} \underline{\varepsilon}_{s,\tau}} - 1 \right) \frac{\underline{\varepsilon}_{s,\tau}}{1 - \prod_{i=1}^S \hat{\beta}_{k,s-i+\tau S}}, \end{aligned}$$

alors que pour $j \neq k$ et $k = K$ nous avons :

$$\begin{aligned}
 B_{\cdot,j}^{(\theta_{k,s},\lambda)} &= cov \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{k,s}}, \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \lambda_j} \middle/ \underline{\boldsymbol{\theta}}, \mathcal{F}_{NS} \right) \Big|_{\underline{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{NS-\tau} \sum_{\tau=\tau_1}^{N-1} \frac{\tau_{K,s+\tau S} (1-\tau_{K,s+\tau S})}{\hat{\lambda}_K} + \frac{\tau_{K,s+\tau S} \tau_{j,s+\tau S}}{\hat{\lambda}_j} \\
 &\quad \times \left(\frac{\varepsilon_{s+\tau S}^2}{\hat{\theta}_{k,s} \varepsilon_{s,\tau}} - 1 \right) \frac{\varepsilon_{s,\tau}}{1 - \prod_{i=1}^S \hat{\beta}_{k,s-i+\tau S}} .
 \end{aligned}$$

Enfin, puisque nous avons évalué les matrices d'information complète et manquante, nous pouvons obtenir la matrice d'information observée à partir de laquelle nous pouvons calculer la variance des estimations, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, en prenant l'inverse de sa diagonale. De plus la variance de l'estimation, $\hat{\lambda}_K$, est égale à

$$\begin{aligned}
 var(\hat{\lambda}_K) &= var\left(1 - \sum_{k=1}^{K-1} \hat{\lambda}_k\right) \\
 &= \sum_{k=1}^{K-1} var(\hat{\lambda}_k) + 2 \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{l>k}^{K-1} cov(\hat{\lambda}_k, \hat{\lambda}_l)
 \end{aligned}$$

Chapitre 5

Identification du modèle et Application

5.1 Identification du modèle, *MPGARCH*

Dans la section précédente de l'estimation des paramètres du modèle étudié, nous avons supposé que le nombre, K , de modèles dans le mélange et les ordres, p_t, q_t , étaient connus. Par contre, en réalité ils sont inconnus et il faudrait les identifier. Pour ce faire, et du fait que ces modèles possèdent une structure d'autocovariance ARMA, nous avons adopté le critère d'identification BIC^* adapté au cas périodique, suivant :

$$P - BIC^* = -2NS\mathcal{L}^*(\hat{\theta}) + \log(NS - r)((S + 1)K - 1 + S \sum_{k=1}^K p_k + S \sum_{k=1}^K q_k)$$

avec $\mathcal{L}^*(\hat{\theta})$ est la log quasi-vraisemblance maximisée calculée à partir de la fonction densité de probabilité conditionnelle du modèle *MPGARCH*.

$$\mathcal{L}^*(\hat{\theta}) = \frac{1}{NS} \sum_{t=p+q+1}^{NS} \log(f(\varepsilon_t/\mathcal{F}_{t-1})) = \frac{1}{NS} \sum_{t=p+q+1}^{NS} \log\left(\frac{d}{d\varepsilon_t} F(\varepsilon_t/\mathcal{F}_{t-1})\right); \text{ avec } p = p_{\max} \text{ et } q = q_{\max}.$$

Afin de vérifier l'efficacité du critère de sélection BIC choisi, sur les modèles de mélange *GARCH*, nous avons testé leur efficacité sur une série générée de taille (500) générée à partir d'un modèle *MPGARCH*₂(2, 1, 1; 1, 1). Notons que le programme du critère de sélection a été implémenté sous l'environnement Matlab 7.0. Et le modèle sélectionné sera alors celui

pour lequel la valeur du critère est la plus petite. Nous avons fixé $K = 2$ et nous avons considéré les modèles de deux mélange $GARCH$, d'ordres $(q_1, q_2; p_1, p_2)$, avec $q_1 = 1, \dots, 5$ et $p_1 = 1, \dots, 5$.

Nous avons effectué 100 répliquations du programme, dont les résultats sont rapportés dans le Tableau (5.1.1) suivant :

Tableau (5.1.1) : Pourcentage de sélection d'un modèle $MPGARCH_2(2, 1, 1; 1, 1)$.

ordre	$q_1 = 1$	$q_2 = 1$	$p_1 = 1$	$p_2 = 1$
pourcentage	95	80	97	85

D'après le Tableau (5.1.1), on conclut que le meilleur modèle est le modèle de deux mélange $GARCH$ 2- périodique d'ordres $(1, 1; 1, 1)$, $MPGARCH_2(2, 1, 1; 1, 1)$.

5.2 Application numérique

5.2.1 Etude de simulation

Cette section est consacrée à une étude de simulation intensive. En appliquant l'algorithme EM , nous avons considéré plusieurs modèles : Mélanges de k modèles $GARCH$, 2-périodiques, d'ordres $(1, 1; 1, 1)$ pour $(k = 2, 3)$ avec k le nombre de modèles dans le mélange, notés $MPGARCH_2(k; 1, 1; 1, 1)$, ainsi qu'un mélange de 2 modèles $GARCH$ classique, d'ordres $(1, 1; 1, 1)$, noté $MGARCH(2; 1, 1; 1, 1)$. Pour étudier la performance de l'algorithme EM , nous avons utilisé une méthode de Monte-Carlo, prenant différentes tailles d'échantillon (500 ; 750 ; 1000, 2000, 3000) pour lesquelles nous avons simulé 1000 réalisations. On note que dans la génération d'une série de taille N , on génère $(N + 1000)$ observations et on ne garde que les N dernières, et ce pour éliminer l'effet des valeurs initiales. L'algorithme EM a été exécuté pour ces séries sous l'environnement Matlab 7.0.

Les tableaux $(5, 2, 1), (5, 2, 2); (5, 2, 4)$ rapportent, respectivement, les vraies valeurs (TV) des paramètres des processus générateurs $MPGARCH_2(k, 1, 1; 1, 1)$ pour $(k = 2, 3)$, $MGARCH(2; 1, 1; 1, 1)$, la moyenne empirique (ME) et l'écart-type empirique (ESE) de leurs estimations.

Tableau(5, 2, 1) : Résultats des 1000 simulations d'un modèle $MPGARCH_2(2, 1, 1; 1, 1)$

	<i>TV</i>	<i>NS</i> = 500		<i>NS</i> = 750		<i>NS</i> = 1000	
		<i>ME</i>	<i>ESE</i>	<i>ME</i>	<i>ESE</i>	<i>ME</i>	<i>ESE</i>
λ_1	0.75	0.7981	0.0943	0.7923	0.0884	0.7856	0.0793
$\alpha_{0,1}^{(1)}$	0.0003	0.0003	0.00009	0.0003	0.000082	0.0003	0.00008
$\alpha_{0,2}^{(1)}$	0.009	0.0154	0.0076	0.0164	0.0072	0.0171	0.0066
$\alpha_{1,1}^{(1)}$	0.03	0.0308	0.00009	0.0308	0.000082	0.0308	0.00008
$\alpha_{1,2}^{(1)}$	0.05	0.0474	0.0076	0.0484	0.0072	0.0491	0.0066
$\beta_{1,1}^{(1)}$	0.9	0.9098	0.00009	0.9098	0.000082	0.9098	0.00008
$\beta_{1,2}^{(1)}$	0.85	0.8504	0.0076	0.8514	0.0072	0.8521	0.0066
λ_2	0.25	0.2019	0.0943	0.2077	0.0884	0.2144	0.0793
$\alpha_{0,1}^{(2)}$	0.007	0.0069	0.0007	0.0071	0.0007	0.0071	0.0006
$\alpha_{0,2}^{(2)}$	0.0001	0.0004	0.0002	0.0004	0.0002	0.0004	0.0002
$\alpha_{1,1}^{(2)}$	0.15	0.1519	0.0007	0.1521	0.0007	0.1521	0.0006
$\alpha_{1,2}^{(2)}$	0.2	0.1981	0.0017	0.1985	0.0016	0.1987	0.0015
$\beta_{1,1}^{(2)}$	0.8	0.8069	0.0007	0.8071	0.0007	0.8071	0.0006
$\beta_{1,2}^{(2)}$	0.75	0.7491	0.0017	0.7495	0.0016	0.7497	0.0015

suite du Tableau (5, 2, 1) :

	<i>TV</i>	<i>NS</i> = 2000		<i>NS</i> = 3000		<i>NS</i> = 4000	
		<i>ME</i>	<i>ESE</i>	<i>ME</i>	<i>ESE</i>	<i>ME</i>	<i>ESE</i>
λ_1	0.75	0.7780	0.0645	0.7738	0.0541	0.7695	0.0441
$\alpha_{0,1}^{(1)}$	0.0003	0.0003	0.000078	0.0003	0.000073	0.0003	0.00007
$\alpha_{0,2}^{(1)}$	0.009	0.0182	0.0055	0.0185	0.0047	0.0190	0.0040
$\alpha_{1,1}^{(1)}$	0.03	0.0308	0.000078	0.0308	0.000073	0.0308	0.00007
$\alpha_{1,2}^{(1)}$	0.05	0.0502	0.0055	0.0505	0.0047	0.0510	0.0040
$\beta_{1,1}^{(1)}$	0.9	0.9098	0.000078	0.9098	0.000073	0.9098	0.00007
$\beta_{1,2}^{(1)}$	0.85	0.8532	0.0055	0.8535	0.0047	0.8540	0.0040
λ_2	0.25	0.2220	0.0645	0.2262	0.0541	0.2305	0.0441
$\alpha_{0,1}^{(2)}$	0.007	0.0072	0.0005	0.0073	0.0004	0.0073	0.0004
$\alpha_{0,2}^{(2)}$	0.0001	0.0004	0.0002	0.0004	0.0003	0.0004	0.0003
$\alpha_{1,1}^{(2)}$	0.15	0.1522	0.0005	0.1523	0.0004	0.1523	0.0004
$\alpha_{1,2}^{(2)}$	0.2	0.1989	0.0013	0.1990	0.0011	0.1991	0.0010
$\beta_{1,1}^{(2)}$	0.8	0.8072	0.0005	0.8073	0.0004	0.8073	0.0004
$\beta_{1,2}^{(2)}$	0.75	0.7499	0.0013	0.7500	0.0011	0.7501	0.0010

Il peut être remarqué à partir du tableau (5, 2, 1), pour un mélange de 2 modèles GARCH périodiques, que les biais des estimations obtenues sont petits, même pour des séries de petite

taille. C-à-d, les vraies valeurs sont bien estimées, particulièrement les coefficients du modèle. Par contre, les écarts-types empiriques des estimations des paramètres, λ_k , sont plus élevés pour les séries de petite taille. Cependant, ce phénomène indésirable disparaît, comme nous pouvons le constater, lorsque la taille devient importante, ce qui est bien illustré par les dernières colonnes des tableaux, chose qui reflète la consistance empirique des estimateurs obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance via l'algorithme EM. Nous pouvons également conclure que les estimations se rapprochent des vraies valeurs des paramètres, au fur et à mesure que la taille augmente, ce qui prouve la convergence empirique des estimateurs obtenus par l'algorithme EM. Cette dernière propriété devrait être théoriquement prouvée.

Tableau(5, 2, 2) : Résultats des 1000 simulations d'un modèle $MPGARCH_2$, (3; 1, 1; 1, 1; 1, 1)

	$NS = 500$			1000			2000			3000		
	TV	ME	ESE	ME	ESE	ME	ESE	ME	ESE	ME	ESE	
λ_1	0.5	0.4688	0.1429	0.4708	0.04041	0.4621	0.04280	0.4881	0.15073			
$\alpha_{0,1}^{(1)}$	0.0003	0.00033	0.00012	0.00042	0.00004	0.00042	0.00004	0.00032	0.00012			
$\alpha_{1,1}^{(1)}$	0.03	0.03083	0.00166	0.03092	0.00004	0.03092	0.00004	0.03082	0.00012			
$\beta_{1,1}^{(1)}$	0.9	0.90983	0.00012	0.90992	0.00004	0.90993	0.00004	0.90982	0.00012			
$\alpha_{0,2}^{(1)}$	0.008	0.00410	0.00417	0.00665	0.00068	0.00671	0.00074	0.00418	0.00227			
$\alpha_{1,2}^{(1)}$	0.05	0.06600	0.00012	0.06965	0.00068	0.06971	0.00074	0.06641	0.00486			
$\beta_{1,2}^{(1)}$	0.85	0.86892	0.00417	0.87265	0.00068	0.87271	0.00074	0.86941	0.00486			
λ_2	0.3	0.2795	0.11472	0.2907	0.01887	0.2995	0.01753	0.30061	0.11771			
$\alpha_{0,1}^{(2)}$	0.007	0.00065	0.00233	0.00079	0.00007	0.00080	0.00007	0.00065	0.00013			
$\alpha_{1,1}^{(2)}$	0.15	0.15465	0.00015	0.15479	0.00007	0.15480	0.00007	0.15465	0.00013			
$\beta_{1,1}^{(2)}$	0.8	0.80965	0.00754	0.80979	0.00007	0.80980	0.00007	0.80965	0.00013			
$\alpha_{0,2}^{(2)}$	0.0006	0.00433	0.00015	0.00651	0.00080	0.00665	0.00089	0.00443	0.00157			
$\alpha_{1,2}^{(2)}$	0.2	0.20492	0.00828	0.20751	0.00080	0.20765	0.00089	0.20454	0.00671			
$\beta_{1,2}^{(2)}$	0.75	0.75592	0.00015	0.75851	0.00080	0.75865	0.00089	0.75554	0.00671			
λ_3	0.2	0.2517	0.22710	0.23851	0.02455	0.23840	0.02716	0.2113	0.23298			
$\alpha_{0,1}^{(3)}$	0.0005	0.00043	0.00012	0.00055	0.00005	0.00055	0.00006	0.00044	0.00015			
$\alpha_{1,1}^{(3)}$	0.21	0.1207	0.00882	0.12085	0.00005	0.12085	0.00007	0.12074	0.00015			
$\beta_{1,1}^{(3)}$	0.79	0.7987	0.00012	0.79885	0.00005	0.79885	0.00007	0.79874	0.00015			
$\alpha_{0,2}^{(3)}$	0.0001	0.01660	0.02747	0.02375	0.00142	0.02397	0.00157	0.01657	0.00904			
$\alpha_{1,2}^{(3)}$	0.19	0.18182	0.00012	0.19375	0.00142	0.19397	0.00157	0.17736	0.04047			
$\beta_{1,2}^{(3)}$	0.70	0.72124	0.03159	0.73375	0.00142	0.73397	0.00157	0.70813	0.08755			

Nous constatons à partir du tableau (5, 2, 2), pour un mélange de 3 modèles GARCH périodiques, que les biais des estimations obtenues sont petits, même pour des séries de petite taille. C-à-d, les vraies valeurs sont bien estimées, particulièrement les coefficients du modèle. Par contre, les écarts-types empiriques des estimations des paramètres, λ_k , sont relativement plus élevés.

Nous pouvons conclure que pour les deux modèles $MPGARCH_2(K, 1, 1; 1, 1)$, ($K = 2, 3$), les vraies valeurs sont bien estimées, cependant, on constate que les estimations données dans le premier modèle ($K = 2$) sont meilleures que celles données dans le deuxième modèle ($K = 3$). car même si, pour les deux mélanges, les estimations des paramètres soient bonne dans le premier les écarts-types empiriques des estimations diminuent quand la taille de l'échantillon augmente par contre dans le second mélange c'est le contraire.

Maintenant, il nous a paru utile de donner les résultats de 1000 simulations d'un modèle $MGARCH(2, 1, 1; 1, 1)$ stationnaire, puisque nous avons donné la démarche théorique de son estimation. Notons que c'est un cas particulier du modèle étudié, $MPGARCH_S(2, 1, 1; 1, 1)$, pour $S = 1$. Les résultats sont rapportés dans le Tableau (5, 2, 4) suivant :

Tableau(5, 2, 4) :Résultats des 1000 simulations d'un modèle $MGARCH(2, 1, 1; 1, 1)$

	$NS =$	500		1000		2000		3000	
	TV	ME	ESE	ME	ESE	ME	ESE	ME	ESE
λ_1	0.75	0.65642	0.38599	0.66330	0.40527	0.70235	0.35475	0.7100	0.3547
$\alpha_0^{(1)}$	0.000001	0.000023	0.00016	0.00033	0.00171	0.000012	0.0001	0.000014	0.0001
$\alpha_1^{(1)}$	0.05	0.075327	0.05469	0.07682	0.07737	0.07424	0.04224	0.07291	0.0422
$\beta_1^{(1)}$	0.80	0.750646	0.27503	0.75524	0.25371	0.77826	0.24481	0.80230	0.2448
λ_2	0.25	0.34358	0.38599	0.33670	0.40527	0.29765	0.35475	0.2900	0.3548
$\alpha_0^{(2)}$	0.00001	0.000002	0.000009	0.0000026	0.000004	$2.7e^{-6}$	$3e^{-6}$	$3e^{-6}$	$5e^{-6}$
$\alpha_1^{(2)}$	0.01	0.022346	0.069429	0.026339	0.06369	0.02142	0.09630	0.02426	0.09630
$\beta_1^{(2)}$	0.75	0.744657	0.10905	0.73454	0.14410	0.73925	0.12632	0.7310	0.12632

Nous pouvons constater, à partir du Tableau(5, 2, 4) ci-dessus, que l'estimation des paramètres est bonne et s'améliore au fur et à mesure que la taille de la série augmente mais les écarts-types empiriques des estimations des paramètres sont élevés, surtout pour les paramètres, λ_k .

D'autre part, pour voir la performance de l'algorithme EM , nous avons modélisé des données générées à partir d'un modèle périodique $MPGARCH_2(2, 1, 1; 1, 1)$ par un modèle classique $MGARCH(2, 1, 1; 1, 1)$, ce qui va nous illustrer l'effet de l'ignorance de la périodicité, dans la modélisation de séries issues d'un modèle périodique, sur l'estimation des paramètres,

Nous avons simulé plusieurs séries dont nous rapportons les résultats d'une seule série de taille (1000) dans le Tableau (5, 2, 5) suivant :

Tableau (5, 2, 5)

	<i>TV</i>	<i>MPGARCH</i> ₂ (2, 1, 1; 1, 1)	<i>MGARCH</i> (2, 1, 1; 1, 1)
λ_1	0.75	0.749740	0.84910
$\alpha_{0,1}^{(1)}$	0.0003	0.000280	0.012917
$\alpha_{0,2}^{(1)}$	0.009	0.018267	—
$\alpha_{1,1}^{(1)}$	0.03	0.030780	0.125243
$\alpha_{1,2}^{(1)}$	0.05	0.050267	—
$\beta_{1,1}^{(1)}$	0.9	0.909780	0.082602
$\beta_{1,2}^{(1)}$	0.85	0.853267	—
λ_2	0.25	0.250259	0.15090
$\alpha_{0,1}^{(2)}$	0.007	0.007087	0.002783
$\alpha_{0,2}^{(2)}$	0.0001	0.000531	—
$\alpha_{1,1}^{(2)}$	0.15	0.152087	0.043874
$\alpha_{1,2}^{(2)}$	0.2	0.198592	—
$\beta_{1,1}^{(2)}$	0.8	0.807087	0.758157
$\beta_{1,2}^{(2)}$	0.75	0.749592	—
<i>BIC</i>		−2813.7	−1813.7

En faisant une comparaison entre les deux modèles, classique et périodique, nous constatons, premièrement d'après le Tableau précédent (5, 2, 5), que la valeur du BIC associée au modèle périodique est plus petite que celle associée au modèle classique. En sus, on peut conclure à partir des graphes, de la figure (5.2) ci-dessous, de la variance conditionnelle ou la volatilité, calculée à partir du modèle *MPGARCH* estimé, est clairement proche de la volatilité de la série simulée, comparé à celui de la volatilité calculée à partir du modèle *MGARCH* classique. On conclut alors que le modèle de mélange *GARCH* périodique est plus précis et plus approprié pour représenter les caractéristiques de cette série.

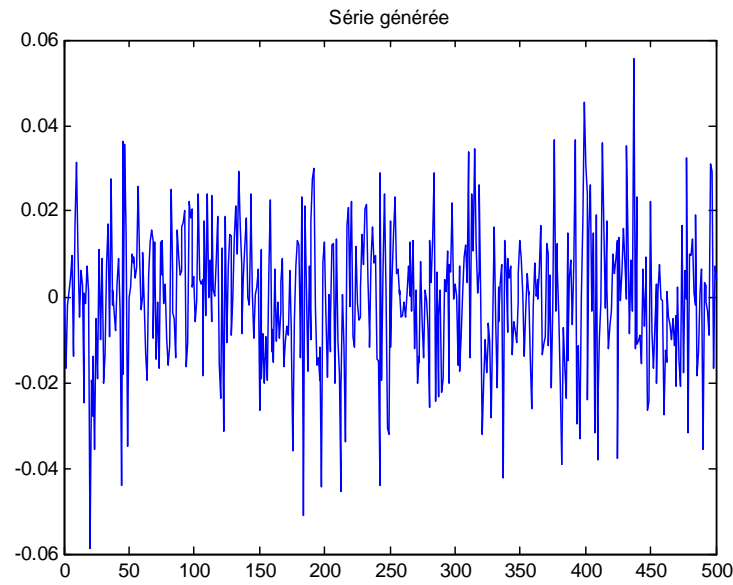


Figure (5.1) : Série simulée à partir d'un modèle *MPGARCH*.

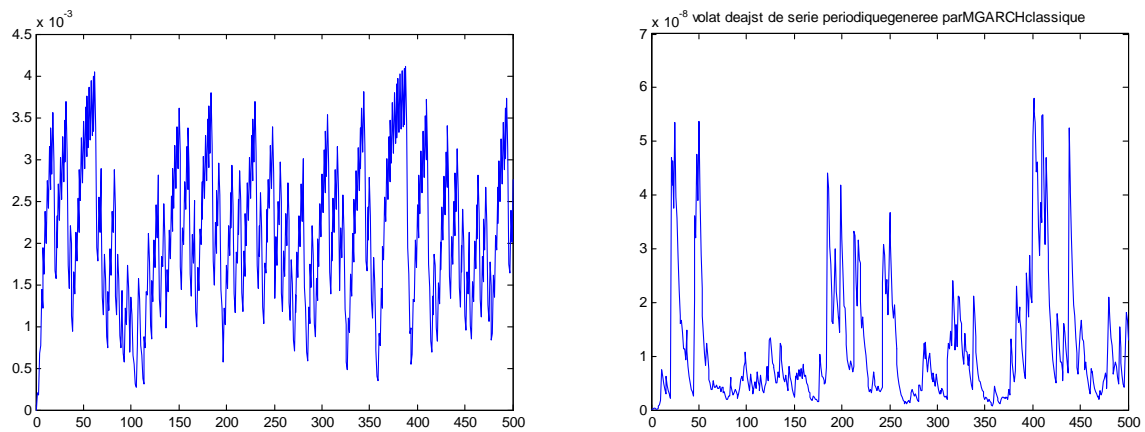


Figure (5.2) : Ignorance de l'existence de la périodicité dans un mélange de modèles *GARCH*.

5.2.2 Application sur des données réelles

Cette section comporte, en premier lieu la description des données (*S&P500*), respectivement les données (*DJEURO*), sur lesquelles nous allons essayer de montrer à travers leur modélisation, l'importance et la flexibilité des modèles *MPGARCH* de capturer, en sus des caractéristiques saisies par le modèle *MGARCH* stationnaire, la périodicité qui est très souvent rencontrée dans les données économiques, en particulier les données financières. Les résultats de l'estimation et des prévisions sont donnés par la suite.

On fait remarquer que notre choix concernant la période, prise égale à 2, est expliqué par la présence de périodicité dans les séries financières réelles, qui est artificielle mais justifiable. Cette périodicité est justifiée par ce que l'on appelle effet des jours fériés. En effet, en pratique, cette périodicité est juste une division de la série en deux périodes tel que Bollerslev et Ghysels (1996) ont procédé dans leur modélisation des taux de change spot de Deutschemark/Livre sterling par les modèles *GARCH* périodiques.

Alors pour l'application sur les séries réelles, nous procédons à une simple division de la série étudiée en deux périodes à savoir : la première rassemble les données des jours de Lundi et ceux des jours fériés, alors que le reste de la série est pris comme étant la deuxième période. Nous rappelons que le critère, de sélection du modèle, adopté est celui de $P - BIC^*$.

Description des données (S&P 500)

Le S&P 500 (Standard & Poor's 500) est un indice constitué à partir du prix de 500 titres de la bourse de New York. Ces titres représentent environ 75 % de la capitalisation totale de la bourse de New York. Considéré comme l'indice le plus représentatif du marché américain, il est la principale référence pour mesurer la performance des gestionnaires sur ce marché. Il est géré par Standard & Poor's, l'une des trois principales sociétés de notation financière.

Nous proposons, dans notre application, les données sont journalières de la série réelle S&P 500, correspondant à l'année 2008.

Nous avons appliqué une transformation logarithmique à ces données. Les figures (5.3) et (5.4) donnent respectivement le graphe de la série transformée ainsi que son histogramme.

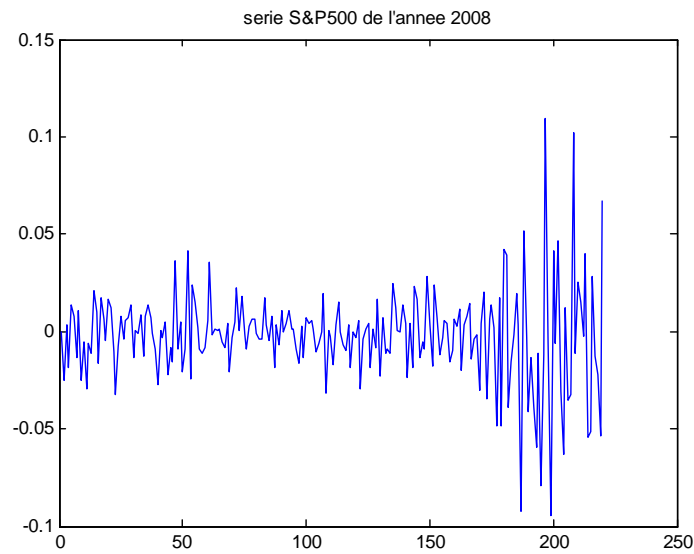


Figure (5.3) : Rendement logarithmiques de la série S&P 500.

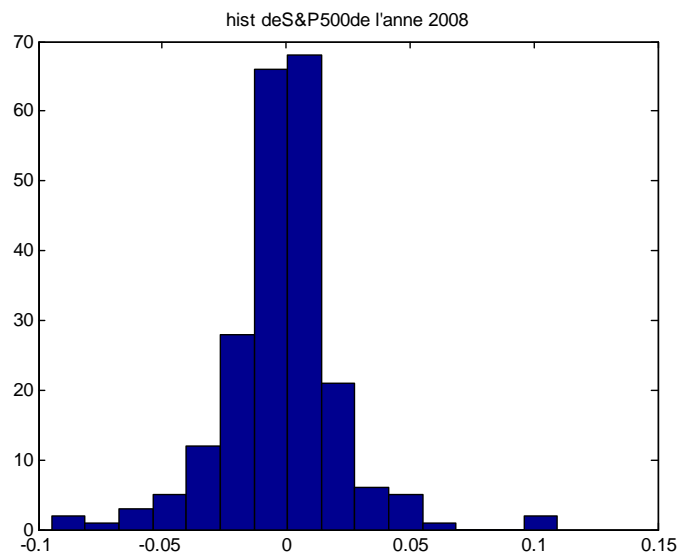


Figure (5.4) : Histogramme de la série S&P 500.

Pour la modélisation de cette série, nous avons trouvé que le meilleur modèle est un mélange de deux modèles $GARCH_2(1, 1; 1, 1)$ périodique (noté $MPGARCH_2(2; 1, 1; 1, 1)$),

avec un $P - BIC^* = -1374.79$. Pour l'estimation des paramètres du modèle, nous n'avons considéré que les 237 premières observations, et les 7 dernières observations ont été réservées pour les prévisions. Les résultats de l'estimation sont donnés par :

soit le modèle estimé suivant :

$$\begin{cases} F(\varepsilon_{s+\tau S} / \mathcal{F}_{s+\tau S-1}) = \sum_{k=1}^2 \lambda_k \phi\left(\frac{\varepsilon_{s+\tau S}}{\sqrt{h_{s+\tau S}}}\right) \\ \varepsilon_v = \sqrt{h_{k,s+\tau S}} \zeta_{s+\tau S} \\ h_{k,s+\tau S} = \alpha_{0,s+\tau S}^{(k)} + \alpha_{1,t}^{(k)} \varepsilon_{s+\tau S-1}^2 + \beta_{1,t}^{(k)} h_{k,s+\tau S-1} \end{cases}, \tau \in \mathbb{Z}; k, s = 1, 2.$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2) = (0.694649 ; 0.305351)$,

$$\left(\alpha_{0,1}^{(1)}, \alpha_{0,2}^{(1)}; \alpha_{0,1}^{(2)}, \alpha_{0,2}^{(2)}\right) = (0.000231, 0.017054; 0.00658, 0.000209);$$

$$\left(\alpha_{1,1}^{(1)}, \alpha_{1,2}^{(1)}; \alpha_{1,1}^{(2)}, \alpha_{1,2}^{(2)}\right) = (0.030731, 0.049054; 0.151570, 0.197254);$$

$$\left(\beta_{1,1}^{(1)}, \beta_{1,2}^{(1)}; \beta_{1,1}^{(2)}, \beta_{1,2}^{(2)}\right) = (0.909741, 0.852081; 0.806380, 0.748153)$$

Nous donnons, maintenant, les graphes des autocorrélations simples et partielles des résidus de la série réelle (*S&P500*) ajustée par un modèle $MPGARCH_2(2; 1, 1; 1, 1)$ présentés dans la figure (5.5) suivante :

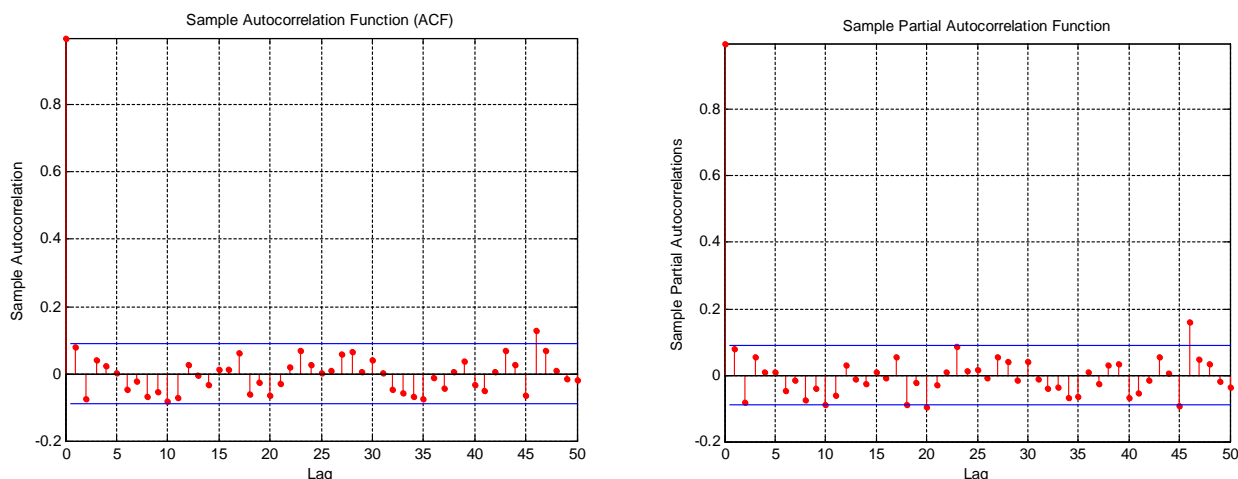
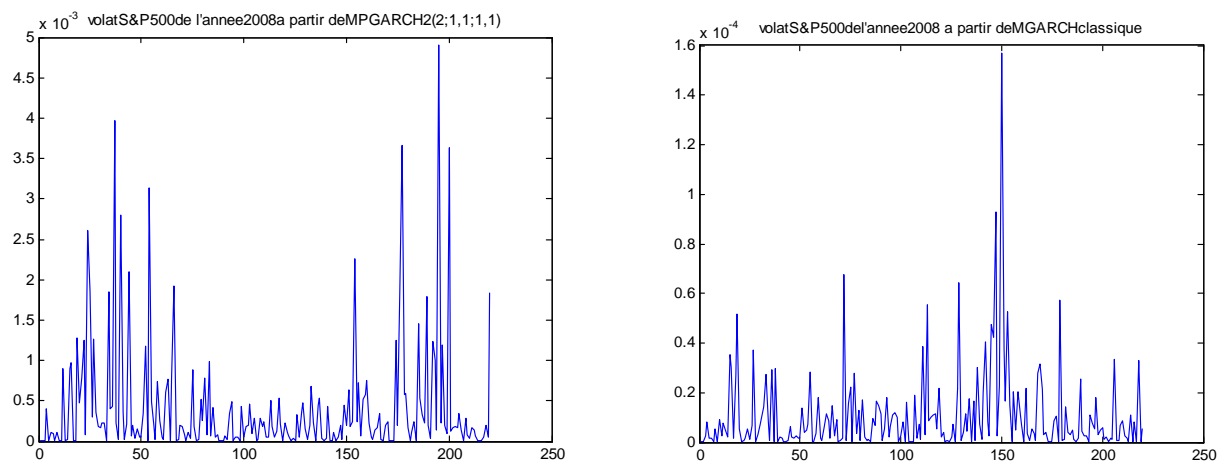


Figure (5.5) : Les autocorrélations simples et partielles des résidus de la série (*S&P500*) ajustée par un modèle *MPGARCH*

Nous remarquons d'après la figure (5.5) que les résidus de l'ajustement de la série ($S\&P500$) par le modèle $MPGARCH_2(2, 1, 1; 1, 1)$ forment bien un bruit blanc.



Figure(5.6) : Volatilité de la série $S\&P500$ calculée à partir d'un modèle $MPGARCH$ respectivement un modèle $MGARCH$

A partir des graphes de la figure (5.6) ci-dessus, on constate que la volatilité calculée à partir du modèle périodique est clairement proche de la volatilité de la série ajustée.

5.2.3 Application sur la série des données réelles $DJEURO$

Description des données $DJEURO$:

Le Dow Jones Eurostoxx 50 (appelé aussi DJ Eurostoxx 50) est un nouvel indice boursier, lancé le 26 février 1998, au niveau européen. Au même titre que le CAC 40 pour la France, l'Eurostoxx regroupe 50 sociétés selon leur capitalisation boursière au sein de la zone Euro .

Dans notre application, les données de la série sont journalières correspondant à la période 01/01/1999 jusqu'à 24/09/2002.

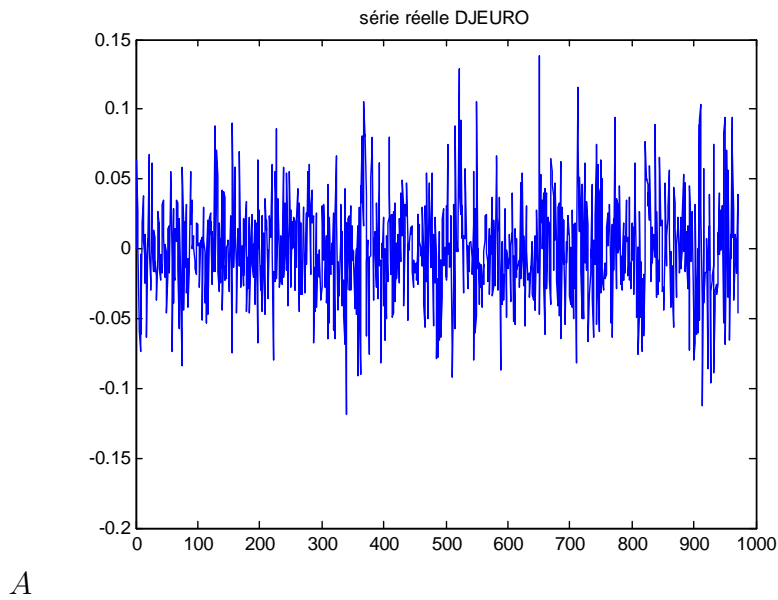
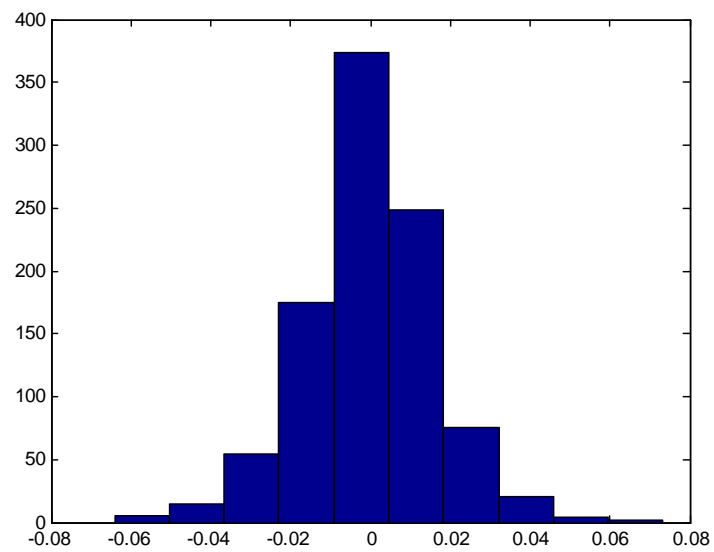


Figure (5.7) : Rendement logarithmiques de la série *DJEURO*.



Figure(5.8) : Histogramme de la série (*DJEURO*).

Pour la modélisation de cette série, nous avons trouvé que le meilleur modèle est un

mélange de deux modèles $GARCH_2(1, 1; 1, 1)$ périodique (noté $MPGARCH_2(2; 1, 1; 1, 1)$), avec un $P - BIC^* = -1382.73$. Les résultats de l'estimation sont donnés par :

soit le modèle estimé suivant :

$$\begin{cases} F(\varepsilon_{s+\tau S} / \mathcal{F}_{s+\tau S-1}) = \sum_{k=1}^2 \lambda_k \phi\left(\frac{\varepsilon_{s+\tau S}}{\sqrt{h_{s+\tau S}}}\right) \\ \varepsilon_v = \sqrt{h_{k,s+\tau S}} \zeta_{s+\tau S} \\ h_{k,s+\tau S} = \alpha_{0,s+\tau S}^{(k)} + \alpha_{1,t}^{(k)} \varepsilon_{s+\tau S-1}^2 + \beta_{1,t}^{(k)} h_{k,s+\tau S-1} \end{cases}, \tau \in \mathbb{Z}; k, s = 1, 2.$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2) = (0.741645, 0.258355)$,

$$\left(\alpha_{0,1}^{(1)}, \alpha_{0,2}^{(1)}; \alpha_{0,1}^{(2)}, \alpha_{0,2}^{(2)}\right) = (0.000282, 0.020247; 0.007353, 0.000520);$$

$$\left(\alpha_{1,1}^{(1)}, \alpha_{1,2}^{(1)}; \alpha_{1,1}^{(2)}, \alpha_{1,2}^{(2)}\right) = (0.030781, 0.052147; 0.152352, 0.199243);$$

$$\left(\beta_{1,1}^{(1)}, \beta_{1,2}^{(1)}; \beta_{1,1}^{(2)}, \beta_{1,2}^{(2)}\right) = (0.909682, 0.855267; 0.807453, 0.750154)$$

Nous donnons, maintenant, les graphes des autocorrélations simples et partielles des résidus de la série réelle ($DJEURO$) ajustée par un modèle $MPGARCH_2(2; 1, 1; 1, 1)$ présentés dans la figure (5.9) suivante :

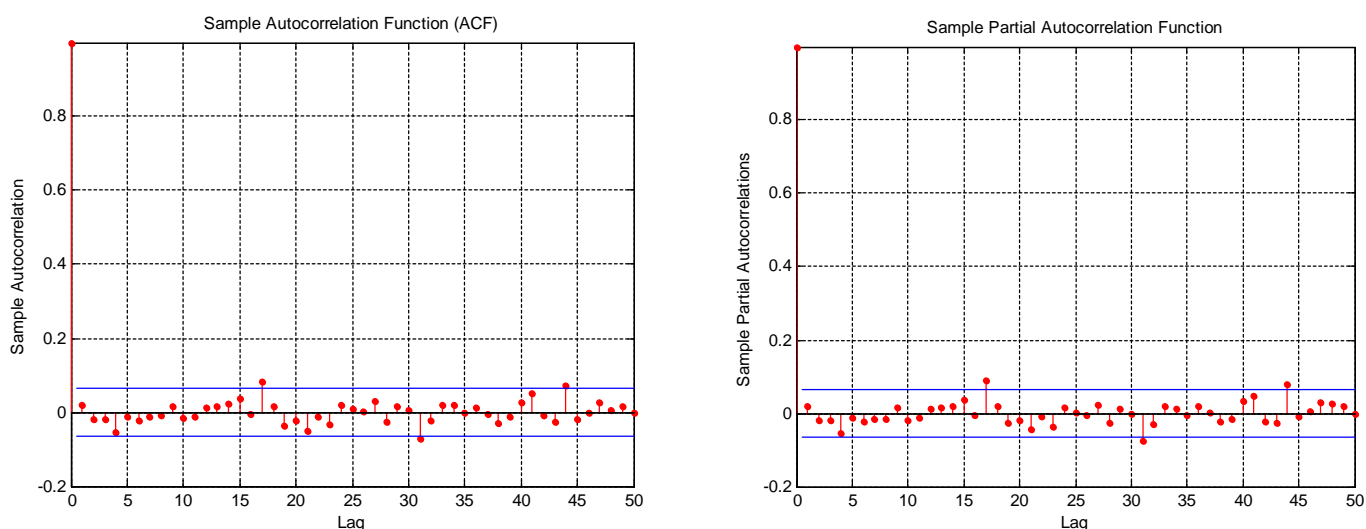


Figure (5.9) : Les autocorrélations simples et partielles des résidus de la série $DJEURO$ ajustée par un modèle $MPGARCH$.

Nous remarquons d'après la figure (5.9) que les résidus de l'ajustement de la série réelle (*DJEURO*) par le modèle $MPGARCH_2(2, 1, 1; 1, 1)$ forment bien un bruit blanc.

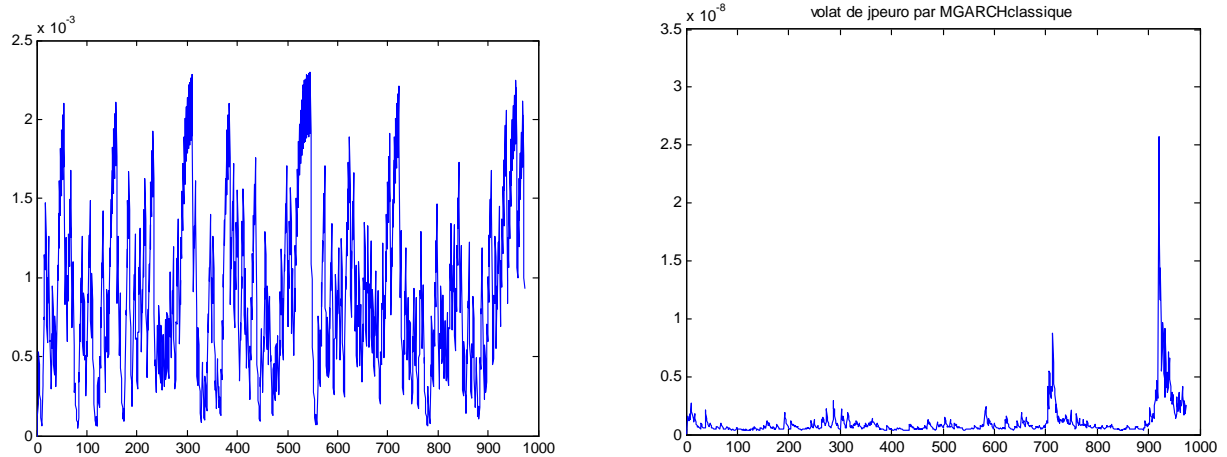


Figure (5.10) : Volatilité de la série *DJEURO* calculée, respectivement, à partir d'un modèle *MPGARCH* et un modèle *MGARCH*.

A partir des graphes de la figure (5.10) ci-dessus, on constate que la volatilité calculée à partir du modèle périodique est clairement proche de la volatilité de la série ajustée.

A la fin de ce chapitre, nous pouvons conclure qu'il faut utiliser le modèle périodique dans la modélisation de données où l'aspect de périodicité y figure.

Chapitre 6

Conclusion Générale

Dans notre travail, nous nous sommes intéressés à la modélisation des séries temporelles non linéaires, en particulier, les séries financières. Ces dernières exhibent souvent, en plus de l'hétéroscédasticité, une distribution conditionnelle multimodale avec excès de kurtosis et une asymétrie, donc présence d'une loi non normale, d'autres caractéristiques additionnelles peuvent figurer dans le comportement de ces séries telle que :la longue mémoire, le changement de régime, la périodicité...ect. A cet effet, nous avons apporté une contribution en introduisant, aux modèles de mélange *ARCH*, une nouvelle classe de modèles de séries chronologiques non linéaires périodiques que nous avons nommé Mélange de Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques Généralisés Préiodiques, noté *MPGARCH*. Avant d'aborder l'étude de ce modèle, nous avons donné un aperçu sur les caractéristiques et propriétés des séries chronologiques financières et nous avons présenté une liste non exhaustive des modèles non linéaires permettant leurs modélisation où nous avons mis l'accent sur la formulation *ARCH* et ses principales extensions . Ensuite il nous a paru important d'exposer quelques modèles de mélange de modèles *ARCH*. Cette revue de modèles, nous a permis de toucher l'importance des séries chronologiques dans le domaine de la finance. Et effet, ces modèles ont montré une flexibilité pour capturer la volatilité caractérisant ces séries. Cependant, il existe parmi ces dernières celles qui présentent un comportement cyclique, ce qui nous a conduit à étudier le cas de mélange de modèles où le couple volatilité, périodicité est présent. Dans cette optique, nous avons proposé notre modèle *MPGARCH* qui est une généralisation du modèle mélange *GARCH* au cas périodique, et peut être vu comme une alternative du modèle de mélange *ARCH* périodique ,*MPARCH*, de Bentarzi et Hamdi

(2008), ayant l'avantage de retenir un nombre de retard plus souple.

Alors nous avons entrepris une étude probabiliste, statistique ainsi qu'une application du modèle proposé. Tout d'abord, nous avons établi la condition de stationnarité périodique du second ordre, sous laquelle nous avons obtenu l'expression de la variance du processus. Ensuite nous avons procédé à l'étude de la condition d'existence du moment d'ordre quatre et donner son expression, sous cette condition. Enfin, nous avons effectué une étude de simulation intensive. Afin de faire une comparaison, nous avons considéré, plusieurs modèles : Mélanges de K (pour différentes valeurs de K) modèles GARCH, périodiques, ainsi qu'un mélange de modèles GARCH classique dans le but de voir l'effet de l'ignorance de la périodicité de la série. On note que pour l'identification du modèle, nous avons utilisé le critère BIC adapté au cas périodique. Concernant la méthode de l'estimation du modèle, on a adopté celle du quasi-maximum de vraisemblance via l'algorithme EM implémentée sous l'environnement Matlab 0.7. En outre, nous avons calculé la matrice d'information des estimations.

En fin, et suite à cette étude menée dans le cadre de ce mémoire, nous envisageons d'étendre le modèle proposé au cas multivarié ou bien de le combiner avec celui du mélange de modèles AR périodiques, introduit par Shao (2006) pour capturer la périodicité dans la moyenne conditionnelle ainsi que dans la variance conditionnelle. En ce qui concerne la méthode d'estimation des paramètres, l'application de l'approche bayésienne peut être entreprise.

Bibliographie

- [1] Adams, G. J. et Goodwin, G. C. (1995). Parameter estimation for periodic *ARMA* Models. *Journal of Time Series Analysis*, **16**, 127-145
- [2] Akaike, H. (1979), A Bayesian extension of the minimum AIC procedure of autoregressive model fitting. *Biometrika*, 66, 237-242..
- [3] Aknouche, A., (2001). Estimation en ligne et hors ligne des modèles *ARMA* périodiques. Thèse de Magister. Faculté des Sciences Mathématiques, U.S.T.H.B. Alger. Algérie
- [4] Aknouche, A., (2006). Etude théorique et algorithmique de la modélisation des séries chronologiques périodiques. Thèse de Doctorat. Faculté de Mathématiques, U.S.T.H.B. Alger.
- [5] Aknouche, A. et Bentarzi, M. (2008). On the existence of higher-order moments for periodic GARCH models. *Statistics and Probability Letters*, 78, 3262-3268.
- [6] Aknouche A. et Bibi, A. (2009). Quasi-maximum likelihood estimation of periodic GARCH and periodic ARMA-GARCH processes. *Journal of Time Series Analysis*, 28, 19-46.
- [7] Aknouche, A. et Guerbyenne, H. (2009). On some probabilistic properties of double periodic AR models. *Statistics & Probability Letters*, 79, 407-413.
- [8] Alexander, C. et Lazar.,E. (2004.a) Normal Mixture GARCH(1,1) :Applications to Exchange Rate Modelling. ISMA Centre Discussion Papers in Finance 2004-06. forthcoming in the *Journal of applied Econometrics*.
- [9] Alexander, C. et Lazar.,E. (2004.b). The equity Index Skew and Asymmetric Normal Mixture GARCH. ISMA Centre Discussion Papers in Finance 2004-14. forthcoming in the *Journal of applied Econometrics*.

- [10] Anderson, T. W. (1971). The Statistical Analysis of Time Series. New York : JohnWiley& Sons.
- [11] Bentarzi, M. (1995). "Modèles de séries chronologiques à coefficients périodiques". Thèse de Doctorat es sciences. Institut de mathématiques, U.S.T.H.B, Alger, Algérie.
- [12] Bentarzi, M.(1998). Model-Building Problem of Periodically Correlated m-Variate Moving Average Processes. *Journal of Multivariate Analysis*. 66, 1-21.
- [13] Bentarzi, M. et Hallin, M. (1994). On the Invertibility of Periodic Moving Average Models. *Journal of Time Series Analysis*. Vol 15, N°3, 263-268.
- [14] Bentarzi, M. et Hallin, M. (1998). Spectral factorization of periodically correlated $MA(1)$ processes. *Journal of Applied Probability*, **35**, 46-54.
- [15] Bentarzi, M. et Hamdi.F(2008).Mixture periodic autoregressive conditional heteroskedastic models.Computational Statistics and Data Analysis 53 (2008) 1–16.
- [16] Bentarzi, M. (1995). "Modèles de séries chronologiques à coefficients périodiques". Thèse de Doctorat es sciences. Institut de mathématiques, U.S.T.H.B, Alger, Algérie.
- [17] Bentarzi, M.(1998). Model-Building Problem of Periodically Correlated m-Variate Moving Average Processes. *Journal of Multivariate Analysis*. 66, 1-21
- [18] Bentarzi, M. et Merzougui, M. (2007). Moments of Mixture Periodic Autoregressive Models. Revised.
- [19] Bera, A. K., et Higgins, M. L.(1993). ARCH Models : Properties, Estimation and Testing. *Journal of Economic Surveys*, 7 (4), 307-366.
- [20] Bibi, A. et Aknouche, A. (2009). On the probabilistic properties of periodic GARCH processes. *Mathematical Methods of Statistics*,17, 305-316.
- [21] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- [22] Bollerslev, T, R.Y.Chou et K. F Kroner (1992)..ARCH Modeling in finance : A review of the théorie and empirical evidence,Journal of Econometrics,52 :5-59
- [23] Bollerslev, T, R.Y.Chou, N.Jayaraman et K. F Kroner (1991). Les modèles ARCH en finance : Un point sur la théorie et les résultatst empiriques. *Annales d'économie*, 24 :1–59.

- [24] Box, G.E.P et G.M. Jenkins (1976). Time Series Analysis : Forecasting and Control
- [25] Boukerdena F (2001). Etude des Modèles Autoregressifs à erreurs *ARCH* classiques et périodiques Thèse de Magister. Faculté des Sciences Mathématiques, U.S.T.H.B. Alger. Algérie
- [26] Brockwell, J.P. et Davis. R. A. (1991) Time series : Theory and Methods. Springer-Verlag. 2nd edition. New York.
- [27] Čipra, T. (1985). Periodic moving average processes. *Aplikace Matematiky*, **30**, 218-229
- [28] Dempster, A. P., Laird, N. M., and Rubin, D. B. (1977). Maximum Likelihood From Incomplete Data via the EM Algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, 39, 1 – 38.
- [29] Djeddou, L. (2006). Mélange de Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques. Thèse de Magister. Faculté des Sciences Mathématiques, U.S.T.H.B. Alger. Algérie
- [30] Djuric, P. M. et Kay, M. (1992). Order selection of autoregressive models. *IEEE Trans. Signal. process.*, **42**, 2829-2833.
- [31] Dreesbeke, J.J., B. Fichet et Ph. Tassi, éd., Modélisation *ARCH*, Ed Bruxelles, Bruxelles.
- [32] Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with estimates of variance of U.K. Inflation. *Econometrica*, 50, 987-1008.
- [33] Fuller, W. A. (1996). Introduction to statistical time series. second ed. Wiley, New York.
- [34] Francq, C. et Zakoïan, J. M. (2004). Maximum likelihood estimation of pure *GARCH* and *ARMA-GARCH* processes. *Bernoulli*, 10, 605-637.
- [35] Gladyshev, E. G. (1961). Periodically correlated random sequences. *Soviet. Math.*, **2**, 385-88.
- [36] Ghysels, E., Hall, A. et Lee, H. S. (1996). On Periodic Structures and Testing for Seasonal Unit Roots. *Journal of the American Statistical Association*. Vol. 91, N.436, 1551-1559.
- [37] Gourieroux, C. (1992). Modèles ARCH et Applications Financières. Collection ENSAE, Economica.

- [38] Gouriéroux, C., A. Monfort et A. Trognon (1984). Pseudo Maximum Likelihood Methods : Theory, *Economica*, 52, 681-700.
- [39] Granger C.W.J. et A. Anderson (1978). An Introduction to Bilinear Time Series Models. Göttingen, Vanderhoeck and Ruprecht.
- [40] Guerbyenne, H. (2007). Modèles de séries chronologiques conditionnellement hétéroscédastiques. Thèse de Doctorat. Faculté de Mathématiques, U.S.T.H.B. Alger.
- [41] Haas, M., S. Mittnik et M.S. Paoletta. Mixed Normal Conditional Heteroskedasticity.. Center for Financial Studies. CFS Working Paper No. 2002/10
- [42] Hamdi.F (2008). Modèle espace état et processus périodiquement corrélés. Thèse de Doctorat. Faculté des Sciences Mathématiques,, U.S.T.H.B, Alger, Algérie.
- [43] Kim, S, Shephard, N. and Chib, S. (1998), "Stochastic Volatility : Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models", *Review of Economic Studies*, 45, 361-393
- [44] Milhoj, A. (1985). The moment structure of *ARCH* processes. *Scandinavian Journal of Statistics*, **12**, 281-292.
- [45] Nelson, D.B. (1990) Stationarity and persistence in GARCH(1, 1) model. *Econometric Theory*, 6, 318–334.
- [46] Osborn, D. R. et Smith, J. P. (1989). The performance of periodic autoregressive models in forecasting seasonal U. K. consumption. *Journal of Business and Economic Statistics*, **7**, 117-127.
- [47] Osborn, D. R. (1992). The implication of periodically varying coefficients for seasonal time-series processes. *Journal of Econometrics*, **48**, 373-384.
- [48] Posedel, P. (2005). Properties and Estimation of GARCH(1,1) Model. *Metodološki zvezki*, Vol. 2, No. 2, 2005, 243-257
- [49] Shao, Q. (2006). Mixture periodic autoregressive time series model. *Statistics & Probability Letters. Volume 76, Issue 6, Pages 609 – 618.*
- [50] Tiao, G. C. et Grupe, M. R. (1980). Hidden periodic autoregressive-moving average models in time series data. *Biometrika*, **67**, 365-373.
- [51] Tsay, R S. (2002). Analysis of Financial Time Series. Financial Econometrics. John Wiley & Sons

- [52] Ula, T. A. (1990). Periodic covariance stationarity of multivariate periodic autoregressive moving average processes. *Water Resour. Res.*, **26**, 855-861.
- [53] Ula, T. A. et Smadi, A. A. (1997). Periodic stationary conditions for periodic autoregressive moving average processes as eigenvalue problems. *Water Resources Research*, **33**, 1929-1934.
- [54] Weiss, A. A. (1986). Asymptotic theory for *ARCH* models : estimation and testing. *Econometric Theory*, **2**, 107-131.
- [55] Wold, H. (1938). A study in the stationary time series. Almqvist and Wiksell, Stockholm (2nd edition : 1954).
- [56] Wong, C. S. and Li, W. K. (2000). On a mixture autoregressive model. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, 62, 95 – 115.
- [57] Wong, C. S. and Li, W. K. (2001). On a mixture autoregressive conditional heteroscedastic model. *Journal of the American Statistical Association* 96, 982 – 95
- [58] Zhang, Z., Li, W.K., Yuen, K.C., 2006. On a mixture *GARCH* time-series model. *J. Time Ser. Anal.* **27**, 577–597.