N° d'ORDRE : 41/2012 – M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET

DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

« HOUARI BOUMEDIENE »

FACULTE DE MATHEMATIQUES.

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN : Mathématiques

Spécialité : Modélisation Mathématique et Analyse Numérique

Par

RAFA Saïd

Sujet

EXISTENCE GLOBALE POUR UN SYSTEME DE REACTION-DIFFUSION COUPLE.

Soutenu publiquement le 01/07/2012, devant le jury composé de :

N. AISSA	Maître de conférences/A	à l'USTHB	Présidente
M.S. MOULAY	Professeur	à l'USTHB	Directeur de MEMOIRE
T. ALIZIANE	Maître de conférences/A	à l'USTHB	Examinateur
D. BOUKARI	Professeur	à l'USTHB	Examinatrice

Je dédie ce fruit de mon travail
à l'âme de mes chers parents, à toute
ma famille grand et petit
notamment Maroua, Tarek, Lokmane
et professeur : M.S. Moulay
et à tout les enseignants et enseignantes
de faculté de Maths notamment ceux
de département d'analyse (E.D.P)

REMERCIEMENTS

Je tiens en premier lieu à temoigner ma reconnaissance à DIEU tout puissant de m'avoir donner le courage et la force de mener à terme ce projet. Qui m'a ouvert les portes du savoir.
Aprés, je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à mon directeur de ma thèse, Mr " M. S Moulay " Professur à l'U.S.T.H.B pour l'honneur qu'il me fait en assurant la direction et le suivi scientifique et technique, pour sa grande contribution à l'aboutissement de ce présent mémoire et qui m'a fait découvrir son riche et passionnant domaine de réaction-diffusion, et qui malgré ses nombreuses tâches sait être disponible pour me diriger dans mon travail. C'est grand honneur d'avoir travaillé à son côté, ses qualités scientifiques et abnégations dans la recherche sont un véritable exemple pour moi.
Je vous remercie pour votre précieuse présence assistance, votre disponibilité et l'interêt que vous avez manifesté pour ce modeste travail.
Je vous remercie pour vos orientations et votre enthousiasme envers mon travail. Les judicieux conseils et rigueurs que vous m'avez prodigué tout au long de ces années de travail m'ont permis de progresser dans mes études. Je vous remercie d'avoir cru en mes capacités et m'avoir fournir d'excelentes conditions me permettant d'aboutir à la production de ce mémoire qui n'aurait vu le jour sans votre confiance et votre générosité.
Je remercie vivement M.C "N. Aissa" pour l'honneur qu'elle me fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire, je la remercie chaleureusemenr pour sa participation à ma formation de m'avoir tracer le chemin.
Mes remerciement s'adressent aussi au M.C "T. Ali Ziane" pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de juger et d'evaluer mon travail. Je le remercie vivement.
Je remercie infiniment la professeur et mon enseignante dans l'année préparatoire ma-

dame "D. Hernane. Boukari" de l'interêt qu'elle a porté à ma thèse malgré ses nombreuses tâches et charges.

Je voudrais aussi exprimer mes remerciements au Pr "A. Heminna" qui m'a donné l'encouragement de continuer mes études supérieures et grâce à lui aussi j'ai appri la base mathématique pendant la période de mes études de graduation et de post-graduation notamment l'année théorique qui par ses talents de pedagogue, sa rigueur a suscité une vocation enfuie en moi, je tien à exprimer ma profonde gratitude envers lui.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous mes enseignants (enseignantes) qui ont contribué à ma formation depuis mon prmier pas à l'école, qu'ils (elles) trouvent ici l'expression de toute ma gratitude.

Je voudrais ensuite remercier le M.C "A. Benaissa" de l'université de Djilali Lyabes de Sidi Belabbes qu' également saluer une de ses qualités communes, un optimisme réaliste qui dans les périodes de doute m'a toujours redonné confiance et poussé à ne pas baisser les bras. Pour toutes ces raisons je ne regrette en rien de les avoir choisis de le remercier une autre fois.

Je tiens à remercier ensuite Mr "Michel Pierre" professeur de l'université de Rennes d'avoir me donné des conseils scientifiques sur le domaine de réaction-diffusion.

En fin je passe une dédicace spéciale au professeur de maths L. Bourkia, à tous mes frères, mes chers camarades, mes amis intimes et à mes collègues d'étude.

Table des matières

Notations

On utilisera dans ce mémoire les notations suivantes :

$\Omega :=$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

$\partial\Omega :=$ la frontière de Ω.

$\overline{\Omega} :=$ la fermeture de Ω, $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$.

$|\Omega| :=$ mes(Ω) (la mesure de Ω).

$Q :=$ $\Omega \times (0,\infty)$, $\Gamma := \partial\Omega \times (0,\infty)$.

$\Gamma_T :=$ $\partial\Omega \times (0,T)$, $Q_T := \Omega \times (0,T)$, avec $T \in (0,\infty)$.

$X :=$ un espace de Banach.

$L_c(X) :=$ l'espace des applications linéaires continues de X dans X.

$A : D(A) \subset X \to X :=$ opérateur linéaire de X dans X de domaine de $D(A)$ muni de la norme du graphe $\| u \|_{D(A)} := \| u \| + \| Au \|$.

$u^+ :=$ La partie positive de u.

$u^- :=$ La partie négative de u.

$\|u\|_{L^p(Q_T)} :=$ $\|u\|_{p,Q_T} := \Big(\displaystyle\int_{Q_T} |u(x,t)|^p dxdt \Big)^{\frac{1}{p}}$.

$C_0^\infty(Q_T) :=$ $C_c^\infty(Q_T) := D\,(Q_T)$.

$W^{k,p}(\Omega) :=$ $\Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R}\,;\, u$ mesurable et $D^\alpha u \in L^P(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \le k \Big\}$.

$H^k(\Omega) :=$ $W^{k,2}(\Omega)$.

$H_0^k(\Omega) :=$ $W_0^{k,2}(\Omega)$.

$W_{loc}^{k,p}(\Omega) :=$ $\Big\{ f \in W^{k,p}(K);\ \forall K$ compact de $\Omega \Big\}$.

$W_p^{2,1}(Q_T) :=$ $\Big\{ u \in L^p(Q_T); u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j} \in L^p(Q_T) \Big\}$ muni de sa norme naturelle :

$\| u \|_{W_p^{2,1}(Q_T)} :=$ $\| u \|_{p,Q_T} + \| D_x u \|_{p,Q_T} + \| D_x^2 u \|_{p,Q_T} + \| u_t \|_{p,Q_T}$.

Où $D_x u = (\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n})$, $D_x^2 u = (\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j})_{1 \le i,j \le n}$.

$\| u(.,t) \|_{W_p^2(\Omega)} :=$ $\Big(\displaystyle\sum_{|\alpha| \le 2} \| D^\alpha u(.,t) \|_{L^p(\Omega)}^p \Big)^{\frac{1}{p}}$.

$\nabla u :=$ $\Big(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \Big)$.

$$\triangle\ \mathrm{u} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\ ,\ \Delta : \text{opérateur de Laplace.}$$

$$\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n := \text{La normale extérieure unitaire.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u.\nu := \text{La dérivée normale extérieure à } \partial\Omega.$$

$$\blacksquare := \text{désigne la fin d'une démonstration.}$$

Résumé

L'objectif de ce mémoire est l'étude d'un système de réaction-diffusion de type parabolique semi-linéaire couplé (le couplage est triangulaire). On étudie notamment l'existence globale de la solution classique. Les outils utilisés sont principalement la théorie des semi-groupes, le principe du maximum, le théorème d'existence locale.
Notre mémoire est divisé en cinq chapitres.
Le chapitre un est construit pour faire un rappel sur quelques généralités concernant les espaces de Sobolev, la théorie des semi-groupes, le théorème de Hille-Yosida, le théorème d'existence locale et l'altérnative entre l'existence globale et l'explosion à temps fini(blow-up). Nous avons rappelé aussi le principe du maximum pour les problèmes paraboliques et sur les problèmes de la chaleur.
le chapitre deux est consacré à l'étude de l'existence globale d'un système de réaction-diffusion semi-linéaire, diagonal qui est en fait une étude préliminaire à notre problème.
le chapitre trois constitue l'essentiel de ce travail, il est consacré à l'étude du problème envisagé, c-à-d, l'existence globale en temps de la solution classique d'un système de réaction-diffusion semi-linéaire, non diagonal. La méthode suivie est une méthode itérative basée sur les injections de Sobolev et des estimations de type $L^p - L^\infty$.
Dans le quatrième chapitre nous présentons quelques exemples pour illustrer notre étude.
Finalement, dans le dernier chapitre on énonce quelques remarques et perspectives sur le thème.

Mots clefs

Système de réaction-diffusion, couplé, équation parabolique, semi-linéaire, existence globale, positivité, régularisation.

Introduction

Dans notre travail, nous nous sommes intéressés à une famille de systèmes d' équations paraboliques appelées systèmes de réaction-diffusion, pour des phénomènes d'évolution en même temps la diffusion spatiale et le type (bio) chimique de réaction.

Récemment, l'intérêt a connu une croissance pour ces modèles, en particulier pour des applications dans la biologie, l'écologie, l'environnement et la dynamique des populations.

Un système de réaction-diffusion est un modèle mathématique qui décrit l'évolution des concentrations d'une ou plusieurs substances spatialement distribuées et soumises à deux processus de réactions chimiques locales, dans lequel les différentes substances se transforment, et un processus de diffusion qui provoque une répartition de ces substances dans l'espace.

Cette description implique naturellement que de tels systèmes sont appliqués en chimie. Cependant, ils peuvent aussi décrire des phénomène dynamiques de nature différente : la dynamique des populations, la chimie, la biochimie, la biologie, la physique, la géologie ou l'écologie sont des exemples de domaines ou de tels systèmes apparaissent, et vu l'importance de ces derniers, on peut se demander comment on aboutit à des systèmes de réaction-diffusion ?.

Mathématiquement les systèmes de réaction-diffusion sont représentés par des systèmes des équations différentielles partielles paraboliques semi-linéaires qui prennent la forme générale suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u = D\Delta u + R(u) \\ +CL \\ +CI \end{cases} \tag{0.0.1}$$

Dans le système (0.0.1) les composantes de vecteur $u(x,t)$ représentent les concentrations chimiques ou les densités d'une population biologique ou représentent respectivement les densités de population, D est une matrice de diffusion diagonale ou non, Δ désigne le Laplacien et R représente toutes les réactions locales.

On peut aussi considérer le système (0.0.1) comme un modéle qui décrit la diffusion d'une maladie infectieuse (telle que AIDS par exemple) dans une population supposée pour être divisée en classe susceptible et contagieuse.

(Pour plus de motivation voir par exemple [25] ,[2]).

Dans les années récentes, il y a beaucoup de recherches concernant l'existence globale pour les solutions de systèmes paraboliques semi-linéaires et non linéaires des E.D.P.

Deux propriétés essentielles apparaissent dans la plupart des modèles, la positivité des solutions est préservée au cours du temps, la masse totale des composantes est contrôlée au cours du temps (parfois même exactement présevée).
Nous sommes principalement intéressés à l'étude de l'existence globale des solutions d'une classe de systèmes de réaction-diffusion *fortement couplés* et semi-linéaires du type suivant :

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u - b\Delta v = f(x,t,u,v), & \text{sur } Q \\ v_t - c\Delta u - d\Delta v = g(x,t,u,v), & \text{sur } Q \\ \lambda_1 \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + (1-\lambda_1)(u-\alpha_1) = 0, & \text{sur } \Gamma \\ \lambda_2 \dfrac{\partial v}{\partial \nu} + (1-\lambda_2)(v-\alpha_2) = 0, & \text{sur } \Gamma \\ u(x,0) = u_0(x); v(x,0) = v_0(x), & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{0.0.2}$$

dans le cas $b = 0, \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Notre étude portera essentiellement sur la méthode de dualité L^p qui permet d'estimer la deuxième composante dans L^∞ et d'en déduire ainsi le bornage uniforme et l'existence globale des solutions.

Chapitre 1

GENERALITES

1.1 notions générales et rappels

Dans ce chapitre nous rappelerons quelques résultats utiles sur lequels s'appuie notre travail.

1.1.1 Opérateurs différentiels

Soit n un entier, $x = (x_1, ..., x_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$.

- On appelle champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ une application $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui $x = (x_1, ..., x_n)$ associe $v(x) = \big(v_1(x), ..., v_n(x)\big)$.
- Pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, son gradient est le champ de vecteurs défini par : $grad\ u(x) = \nabla u(x) = \big(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x), ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}(x)\big)$.
- Pour un champ de vecteur $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on appelle divergence de v la fonction définie par : $div\ v(x) = \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) + ... + \dfrac{\partial v_n}{\partial x_n}(x)$.
- Le Laplacien d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s'écrit : $\Delta u = div(\nabla u)(x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + ... + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x)$.
- On appelle normale à $\partial\Omega$ un champ de vecteur $\nu(x)$ défini sur le bord $\partial\Omega$ tel qu'en tout point $x \in \partial\Omega$, $\nu(x)$ soit orthogonal au bord et unitaire.
- On appelle normale extérieure une normale qui pointe vers l'extérieur du domaine en tout point.
- On appelle dérivée normale d'une fonction régulière u sur le bord $\partial\Omega$ la fonction définie sur les points de $\partial\Omega$ par : $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \nabla u . \nu(x)$.

Equation aux derivées partielles

On fixe un entier $k \geq 1$ et soit U un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.1 *:*

Une expression de la forme

$$F\Big(D^k u(x), D^{k-1}u(x), ..., Du(x), u(x), x\Big) = 0, \quad (x \in U)$$

est dite équation différentielle d'ordre k, où

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times ... \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$$

est donnée, et

$$u : U \to \mathbb{R}$$

est l'inconnue.

Définition 1.1.2 *:*

L'EDP de la définition (1.1.1) *est semi-linéaire si elle est de la forme*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, ..., Du, u, x) = 0$$

1.1.2 Espaces fonctionnels

- On désigne par $L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$ l'espace de fonctions (ou plus exactement des classes d'équivalence de fonctions au sens de l'égalité presque partout) u mesurables telles que

$$\int_\Omega |u|^p dx < \infty$$

  muni de la norme

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} = \| u \|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- $L^p_{loc}(\Omega) = \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} / u \in L^p(\omega) \text{ pour chaque } \omega \subset\subset \Omega \Big\}$
- On désigne par $L^\infty(\Omega)$ l'espace de fonctions u mesurables et vérifient

$$|u| \leq C \text{ p.p sur } \Omega$$

  Où C est une constante positive.

  $L^\infty(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\| u \|_{L^\infty(\Omega)} = \| u \|_{\infty,\Omega} = \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)| = \inf \Big\{ C, |u| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \Big\}$$

- On désigne par $C(\Omega)$ l'espace de fonctions continues et bornées sur Ω muni de la norme :

$$\| u \|_{C(\Omega)} = \max_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

- On désigne par $C^k(\Omega)$ l'espace de fonctions k fois continûment différentiables sur Ω et on écrit :

$$C^{\infty}(\Omega) = \bigcap_{k\geq 0} C^{k}(\Omega)$$

1.1.3 Espaces particuliers

Rappelons les définitions de quelques espaces qu'on va utiliser dans notre travail.

Espaces de Sobolev

- $W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p}(\Omega), \exists g_1, ..., g_n \in L^{p}(\Omega), \int_{\Omega} g_i\varphi = -\int_{\Omega} u\varphi_{x_i}\, \forall \varphi \in D\,(\Omega) \right\}$
  muni de la norme :
  $\parallel u \parallel_{1,p} = \Big(\parallel u \parallel_p^p + \parallel \nabla u \parallel_p^p \Big)^{\frac{1}{p}}$, si $p < \infty$.
  $\parallel u \parallel_{1,\infty} = \max(\parallel u \parallel_{\infty} + \parallel \nabla u \parallel_{\infty})$.
- On note pour $1 \leq p < \infty$:
  $$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D\,(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$$
  .
- Et pour $m \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq p < \infty$ l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini comme suit :
  $W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^{p}(\Omega), D^{\alpha}u \in L^{p}(\Omega), |\alpha| \leq m \Big\}$.
  muni de la norme : $\parallel u \parallel_{m,p}^p = \sum_{|\alpha|\leq m} \parallel D^{\alpha}u \parallel_{L^p(\Omega)}^p$.
  Où $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $D^{\alpha} = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+....+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ....\partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ est la dérivée au sens des distributions, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.
- Naturellement : $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ et $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Les espaces $\mathbf{L^p(0, T, X)}$:

Ici on présente briévement quelques résultats sur les espaces de fonctions à valeurs dans un espace de Banach.
X désigne un espace de Banach et $T > 0$.
On définit les espaces suivants :

- C$\big([0,T],X\big) = \big\{$u :[0,T]$\rightarrow X continue\big\}$.
- $L^p(0, T, X) = \Big\{ u : (0, T) \rightarrow X \; mesurable, \int_0^T \parallel u(t) \parallel_X^p dt < +\infty \Big\}$,
  $1 \leq p < +\infty$ muni de la norme : $\parallel u \parallel_{L^p(0,T,X)} = \Big(\int_0^T \parallel u(t) \parallel_X^p dt \Big)^{\frac{1}{p}}$.
- $L^{\infty}(0, T, X) = \Big\{ u : (0, T) \rightarrow X \; mesurable, \exists C > 0, \parallel u(t) \parallel_X \leq C \; p.p.t \Big\}$ muni de la norme : $\parallel u \parallel_{L^{\infty}(0,T,X)} = \sup_{t\in(0,T)} ess \parallel u \parallel_X = \inf \Big\{ C > 0, \parallel u(t) \parallel_X \leq C \; p.p.t \Big\}$.
- Naturellement on a : $L^p\big(0, T, L^p(\Omega)\big) = L^p\big((0, T) \times \Omega\big)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Remarque 1.1.1

1. *Pour tout* $1 \leq p < \infty, L^p(0,T,X)$ *est un espace de Banach muni de sa norme*
$$\| u \|_{L^p(0,T,X)} = \Big(\int_0^T \| u(t) \|_X^p \, dt \Big)^{\frac{1}{p}}.$$
2. $C\big([0,T],X\big)$ *est dense dans* $L^p(0,T,X)$.

3. *Si* $1 < p < \infty$ *et si* X *est réflexif, alors* $L^p(0,T,X)$ *est réflexif*

(Voir [8]).

Soit $u(x,t)$ une fonction à valeurs réelles définie sur l'ensemble $\{(x,t) : (x,t) \in Q_T\}$.
On peut considérer u comme une fonction de la variable t à valeurs dans l'espace des fonctions définies sur Ω comme suit :
$$u(t)(x) = u(x,t).$$

Par suite pour $p \in [1,+\infty[$ on a les normes suivantes pour les fonctions $t \rightarrow u(t)$:

- $\| u(t) \|_{L^p(\Omega)} = \| u(t) \|_{p,\Omega} = \left(\displaystyle\int_\Omega |u(x,t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$
- $\| u \|_{L^p(Q_T)} = \| u \|_{p,Q_T} = \left(\displaystyle\int_0^T \| u(t) \|_{L^p(\Omega)}^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$
- $\| u(t) \|_{\infty,\Omega} = ess \sup\limits_{x\in\Omega} |u(x,t)|$
- $\| u \|_{L^\infty(Q_T)} = \| u \|_{\infty,Q_T} = \sup\limits_{(x,t)\in Q_T} ess|u(x,t)|$

1.1.4 Espaces $W_p^{2,1}(Q_T)$, $p \geq 1$

Définition 1.1.3 *:*
$u \in W_p^{2,1}(Q_T)$ *si et seulement si :*
$$u \in L^p\Big(]0,T[, W^{2,p}(\Omega)\Big) \text{ et } u_t \in L^p\Big(]0,T], L^p(\Omega)\Big)$$
$W_p^{2,1}(Q_T) = \Big\{u \in L^p(Q_T) : u_t, D_x u, D_x^2 u \in L^p(Q_T)\Big\} = \Big\{u \in L^p\Big(]0,T[, W^{2,p}(\Omega)\Big) : u_t \in L^p\Big(]0,T], L^p(\Omega)\Big)\Big\}$.
Où $D_x u = (\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n})$, $D_x^2 u = (\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j})_{1\leq i,j\leq n}$.

- On munit $W_p^{2,1}(Q_T)$ de la norme :
$$\| u \|_{2,1,p} = \| u \|_{2,1,p,Q_T} := \| u \|_{p,Q_T} + \| D_x u \|_{p,Q_T} + \| D_x^2 u \|_{p,Q_T} + \| u_t \|_{p,Q_T}.$$
- En particulier dans le cas $p = 2$, l'espace $W_p^{2,1}(Q_T)$ est noté par $H^{2,1}(Q_T)$.

L'espace $C^{2,1}(Q_T)$:

$C^{2,1}(Q_T)$ est l'espace de fonctions qui sont deux fois continuement différentiables en variable spéciale x et une fois en variable de temps t, i.e :

$$C^{2,1}(Q_T) = \Big\{u : Q_T \to \mathbb{R} \,/\, u, \nabla u, \Delta u, u_t \in C(Q_T)\Big\}.$$

1.1.5 Quelques Inégalités

Nous nous donnons Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\partial\Omega$.
On rappelle quelques inégalités qui nous serviront dans notre mémoire :

Inégalité de Poincaré :

On suppose que Ω est un ouvert borné. Alors il existe une constante C positive indépendante de Ω et de p telle que :

$$\| u \|_{L^p} \leq C \| \nabla u \|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{1.1.1}$$

où $(1 \leq p < \infty)$

Corollaire 1.1.1

1. *L'application $u \mapsto \| \nabla u \|_{L^p}$ induit une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\| u \|_{W^{1,p}}$.*
2. *Sur $H_0^1(\Omega)$, la forme bilinéaire $(u, v) \mapsto \displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ est un produit scalaire qui induit la norme $\| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}$ équivalente à la norme $\| u \|_{H^1(\Omega)}$.*

(voir [7])

Théorème 1.1.1 (*Inégalité de Hölder*)
Soient p, $q \in [1, +\infty]$ tels que : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (si $p = 1$, alors $q = +\infty$, et inversement). Alors :
$\forall f \in L^p(\Omega), \forall g \in L^q(\Omega) : fg \in L^1(\Omega)$ et on a :

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)},$$

Remarque 1.1.2 *:*

1. *si* $p = q = 2$ *on obtient l'inégalité de Cauchy Schwartz :*
$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
2. $$\int_{\Omega} |f|^{p(\lambda+\mu)} dx \leq \left(\int_{\Omega} |f|^q dx\right)^{\frac{\lambda p}{q}} \left(\int_{\Omega} |f|^r dx\right)^{\frac{\mu p}{r}} \text{ pourvu que } \frac{\lambda p}{q} + \frac{\mu p}{r} = 1.$$

Inégalité de Gronwall (forme intégrale) :

- Soit ζ une fonction positive, intégrable sur $[0, T]$ et satisfaisant pour presque tout t l'inégalité : $\zeta(t) \leq c_1 \int_0^t \zeta(s)ds + c_2$,
où c_1 et c_2 sont des constantes positives, alors :
$$\zeta(t) \leq c_2(1 + c_1 t e^{c_1 t}), \text{ pour presque par tout } 0 \leq t \leq T.$$
- En particulier si :
$\zeta(t) \leq c_1 \int_0^t \zeta(s)ds$ pour presque par tout $0 \leq t \leq T$,
alors :
$$\zeta(t) \equiv 0 \quad \text{ pour presque tout } 0 \leq t \leq T.$$

Inégalité de Gronwall (forme différentielle) :

(i) Soit $\eta(.)$ une fonction positive, absolument continue sur $[0, T]$, qui satisfait pour presque par tout t l'inégalité différentielle

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

où $\phi(t)$ et $\psi(t)$ sont des fonctions positives, intégrables sur $[0, T]$. Alors

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds}\Big[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds\Big]$$

pour tout $0 \leq t \leq T$.
(ii)En particulier, si

$$\eta' \leq \phi\eta \text{ sur } [0, T] \text{ et } \eta(0) = 0$$

alors

$$\eta \equiv 0 \text{ sur } [0, T]$$

(Pour la démonstration voir [16]).

Inégalité de Gagliardo-Nirenberg :

$$\| u \|_{W^{k,p}} \leq C \| u \|_{W^{m,q}}^{\theta} \| u \|_{L_r}^{1-\theta}, \text{ si}$$

$$p \geq q,\ p \geq r,\ 0 \leq \theta \leq 1 \text{ et } k - \frac{n}{p} \leq \theta(m - \frac{n}{q}) - \frac{n(1-\theta)}{r}.$$

(On a inégalité stricte si $q = 1$ ou $r = 1$).

Voir [4].

Théorème de Gauss-Green

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et $\partial\Omega$ de classe C^1.

Théorème 1.1.2 (*de Gauss-Green*) *:*

Supposons $u \in C^1(\overline{\Omega})$. *Alors*

$$\int_{\Omega} u_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u\nu_i d\sigma \quad (i = 1, ..., n)$$

Théorème 1.1.3 (*Intégration par parties*) *:*

Soit $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. *Alors*

$$\int_{\Omega} u_{x_i} v dx = -\int_{\Omega} u v_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv\nu_i d\sigma \quad (i = 1, ..., n)$$

Théorème 1.1.4 (*Formule de Green*) *:*

Soit $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. *Alors*

(i) $\displaystyle\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma,$

(ii) $\displaystyle\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = -\int_{\Omega} u\Delta v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u d\sigma,$

(iii) $\displaystyle\int_{\Omega} \big(u\Delta v - v\Delta u\big) dx = \int_{\partial\Omega} \big(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\big) d\sigma.$

Voir [16].

Théorèmes de convergence pour les intégrales

Théorème 1.1.5 (*de convergence dominée de Lebesgue*) *:*

Supposons que les fonctions $\{f\}_{k=1}^{\infty}$ *soient intégrables sur* $\mathbb{R}^n$ *et*

$$f_k \to f \ p.p.$$

Supposons aussi

$$| f_k | \leq \ g \ p.p$$

pour une certaine fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \to \int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

Voir [16].

1.2 Point fixe

1.2.1 Convexité

Définition 1.2.1 (*ensemble convexe, Fonction convexe*) *:*

1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *est convexe si* $\forall (x,y) \in \Omega^2, \forall \lambda \in [0,1]$ *alors* $\lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$.
2. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *est convexe. Alors* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *est convexe si* $\forall (x,y) \in \Omega^2, \forall \lambda \in [0,1]$, *on a :* $f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

Définition 1.2.2 *:*

Soit (X,d) *un espace métrique et* $T : M \subset X \to X$ *une application.*

La solution de l'équation $Tx = x$ *est dite point fixe de* T

Théorème 1.2.6 (de Schauder)

Soit X *un espace de Banach et* K *une partie de* X *non vide, compacte et convexe.*

Soit T *une application continue de* K *dans* K*. Alors* T *admet un point fixe dans* K*.*

Preuve: voir la démonstration dans [5]. ▪

■

Définition 1.2.3 *:*

Soit $\big(X, \| \,.\, \|\big)$ *un espace métrique et* F *une application de* X *dans* X*. L'opérateur* F *est dit une contraction stricte ou application strictement contractante s'il existe un nombre réel c,* $0 \leq c < 1$*, tel que*

$$\| F(x) - F(y) \| \leq c \| x - y \| \text{ pour tout } x, y \in X.$$

Remarque 1.2.1 *:*

Il vient immédiatement de la dernière inégalité de la définition que toute application contractante F *est uniformément continue. En effet* F *est Lipschitzeinne continue avec constante Lipschitz c. Le nombre c est dit la constante de contraction de* F

Théorème 1.2.7 *:*

Soit $\big(X, \| \,.\, \|\big)$ *un espace de Banach et* $F : X \to X$ *une application contractante. Alors* F *posséde un unique point fixe.*

1.3 Générations de semi-groupes dans les espaces de Banach

La théorie des semi-groupes est une étude abstraite des équations différentielles ordinaires de premier ordre à valeurs dans des espaces de Banach, où les les opérateurs sont linéaires bornés ou non. Dans cette partie nous décrivons l'essentiel de la théorie, et présentons aussi bien l'application aux EDP linéaires et semi-linéaires. Cette approche fournit une altérnative élégante pour certains théorèmes de l'existence pour les équations d'évolution. On rappelle quelques définitions et propriétés de semi-groupes.
Soit X un espace de Banach de norme $\| \, . \, \|$, et soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur borné ou non de domaine $D(A)$.

1.3.1 Définitions

Dans cette section, X est un espace de Banach, sa norme est noté $\| \, . \, \|$.

Définition 1.3.1 *:*
Un semi-groupe de classe C^0 *sur* X *est une famille* $\{T(t), t \geq 0\}$ *d'éléments de* $L_c(X)$ *qui vérifie les propriétés suivantes :*
(i) $T(0) = I_X$ *où* I_X *est l'opérateur identité dans* X.
(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, *pour tout* $t, s \geq 0$ *(propriété algébrique).*
(iii) $\lim\limits_{t \to 0^+} \| T(t)x - x \|_X = 0$, *pour tout* $x \in X$ *(propriété topologique).*

Proposition 1.3.1 *:*
Soit $\{T(t), t \geq 0\}$ *un semi-groupe de classe* C^0 *sur* X. *Alors :*

1. $t \to \| T(t) \|$ *est bornée sur tout intervalle compact* $[0, \alpha]$.
2. *Pour tout* $x \in X$, *la fonction* $t \to T(t)x$ *est continue (à valeurs dans* X *) sur* $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.
3. *il existe des constantes réelles* ω *et* M *telles que*

$$\| T(t) \| \leq M e^{\omega t}, \; t \in \mathbb{R}^+.$$

Le nombre ω *est le type de* $\{T(t), t \geq 0\}$.

Preuve:
Voir [1].

$\blacksquare$

Définition 1.3.2 :

Un semi-groupe $\{T(t), t \geq 0\}$ *de classe* C^0 *est appelé semi-groupe de contraction de classe* C^0 *si l'on a :*

$\| T(t) \| \leq 1, \quad$ *pour tout* $t \geq 0.$

Exemple 1.3.1 (*particulier*)

Soit $A \in L_c(X)$

$e^{tA} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ *est bien définie, car :*

$\| e^{tA} \| \leq e^{t\|A\|}.$

Soit $u(t) = e^{tA}$ *la solution du problème de Cauchy :*

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} u'(t) - Au(t) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Alors, en posant $T(t) = e^{tA} u_0$

On vérifie aisément que $\{T(t), t \geq 0\}$ *est* C^0 *semi-groupe (et même un groupe) sur* X.

En d'autres termes, $T(t)$ *est la "résolvante" de l'équation différentielle :* $u' - Au = 0.$

Définition 1.3.3 :(**générateur infinitésimal**)

Soit $\{T(t), t \geq 0\}$ *un semi-groupe de classe* C^0 *sur* X. *On appelle générateur infinitésimal de* $\{T(t), t \geq 0\}$ *l'opérateur* $(A, D(A))$ *défini par :*

$D(A) = \left\{ x \in X / \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t} \text{existe} \right\}$ *et* $Ax = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t} \quad \forall x \in D(A).$

Remarque 1.3.1

- *D(A) est le sous-espace vectoriel de* X *constitué des vecteurs* u *tels que l'application* $t \in \mathbb{R}_+ \to T(t)u$ *soit dérivable à droite en 0.*
- $Au = \dfrac{d}{dt}(T(t)u)_{|t=0^+}$.

Proposition 1.3.2 :

Soit $\{T(t), t \geq 0\}$ *un* C^0*- semi-groupe et* A *son générateur infinitésimal. Alors :*

(**i**) *Pour* $u \in D(A)$, *on a*

$$T(t)u \in D(A) \ \text{ et } \ \frac{d}{dt} T(t)u = AT(t)u = T(t)Au \,, \ \forall t \geq 0$$

(**ii**) *Pour tout* $u \in X$, *on a*

$$\int_0^t T(\tau) u d\tau \in D(A) \ \text{ et } \ A \int_0^t T(\tau) u d\tau = T(t)u - u$$

Preuve:
(Voir la démonstration dans [22]). ▪

■

Théorème 1.3.8 (*propriété de générateur infinitésimal*)
(**i**) *Le domaine $D(A)$ est dense dans X.*
et
(*ii*) *A est un opérateur fermé.*

Preuve:
(Voir la démonstration dans [16]). ▪

■

1.3.2 opérateurs dissipatifs et m-dissipatifs

$A : D(A) \to X$ un opérateur linéaire.

Définition 1.3.4 *:*
Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire dans X, le graphe de A et l'image de A sont les sous-espaces vectoriels $G(A)$ et $R(A)$ de X définis par

$$G(A) = \big\{(u, f) \in X \times X, u \in D(A), f = Au\big\}$$
$$R(A) = A\big(D(A)\big)$$

Définition 1.3.5 *:*
Un opérateur (linéaire) A dans un espace de Banach X est dit dissipatif si on a

$$\forall u \in D(A), \forall \lambda > 0, \| (I - \lambda A)u \| \geq \| u \|.$$

Définition 1.3.6 *:*
Un opérateur (linéaire) A dans un espace de Banach X est dit m-dissipatif si
A est dissipatif,

$$\forall f \in X, \forall \lambda > 0, \exists u \in D(A), (I - \lambda A)u = f.$$

Remarque 1.3.2
Si A est un opérateur m-dissipatif dans X, il est immédiat, d'aprés les définitions (1.3.5) *et* (1.3.6) *que*
pour tout $f \in X$ et tout $\lambda > 0$, l'équation $(I - \lambda A)u = f$ posséde une unique solution, qui vérifie $\| u \| \leq \| f \|$

Proposition 1.3.3

Soit A un opérateur (linéaire) dissipatif dans X. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(**i**) *A est m-dissipatif dans X.*

(**ii**) *il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $f \in X$, il existe $u \in D(A)$ tel que $(I - \lambda_0 A)u = f$*

Voir [27]

Le théorème de Hille-Yosida

On rappelle que si A est un opérateur linéaire pas nécessairement borné dans X, l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A est l'ensemble de tous les nombres complexes λ pour lesquels $\lambda I - A$ est inversible, ie $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire dans X.

La famille $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(A)$ des opérateurs linéaires bornés, est applée la résolvante de A.

Théorème 1.3.9 (**de Hille-Yosida**) **:**

Soit X un espace de Banach, un opérateur linéaire (non borné) A tel que $A : D(A) \to X$ est le générateur infinitésimal d'un C^0-semi-groupe de contraction $T(t), t \geq 0$ si et seulement si

(i) A est fermé et $\overline{D(A)} = X$.

(ii) L'ensemble resolvant $\rho(A)$ de A contient $\mathbb{R}^+$ et pour tout $\lambda > 0$

$$\| (\lambda I - A)^{-1} \| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Preuve:

La démonstration du théorème (1.3.11) *se trouve dans* [1]. ▪

■

1.4 Existence locale

1.4.1 Problème de Cauchy non homogène

Soit X un espace de Banach et $-A$ le générateur infinitésimal d'un C^0 semi-groupe $\{T(t), t \geq 0\}$. On cherche une solution u du problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t), & \text{pour } t \geq 0 \\ u(0) = \varphi \end{cases} \tag{1.4.2}$$

Où φ et f sont les données du problème, et on note par T un temps final arbitraire.

***Définition 1.4.1* (solution classique)** *:*
On appelle solution **classique** *de* (1.4.2)*, une fonction $u \in C^1\big([0,T], X\big)$, telle que $u(t) \in D(A)$ $\forall t \geq 0$ et qui vérifie* (1.4.2)*.*

***Définition 1.4.2* (solution forte)** *:*
Une fonction $u : [0,T] \to X$ est dite **solution forte** *de* (1.4.2) *si u est fortement continument différentiable sur l'intervalle $0 < t < T$, $u(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$, l'équation* (1.4.2) *est satisfaite pour $0 < t < T$ et $u(t) \to \varphi$ quand $t \to 0$.*
On appelle également solution **forte** *de* (1.4.2) *une fonction $u \in W^{1.1}(0,T,X)$, telle que $u(t) \in D(A)$ p.p.t $t \geq 0$ et telle qu'elle vérifie* (1.4.2) *pour presque tout $t \geq 0$.*

***Définition 1.4.3* (solution faible) :**
Pour $f \in L^1\big(0,T,X\big)$ et $\varphi \in X$ on appelle "bonne solution" dite solution faible de (1.4.2) *la fonction $u \in C\big([0,T], X\big)$ donnée par la formule de Duhamel*

$$u(t) = T(t)\,\varphi + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds \quad ,\forall t \geq 0 \tag{1.4.3}$$

Remarque 1.4.1

- *La fonction donnée par* (1.4.3) *s'appelle bonne solution de* (1.4.2) *même si elle ne vérifie le problème de Cauchy* (1.4.2) *.*
- *Pour que u donnée par* (1.4.3) *satisfait le problème de Cauchy* (1.4.2) *il faut des conditions supplémentaires sur f et φ ou bien sur u elle même.*

Proposition 1.4.1 *:*
Soit $\varphi \in D(A)$ et $f \in L^1\big(0,T,X\big)$ donnée ainsi que u une solution classique $\Big($resp. forte$\Big)$ du problème de Cauchy. Alors u satisfait la formule de Duhamel pour tout

$t \geq 0$ $\Big($*resp.pour presque tout* $t \geq 0$ $\Big)$.
Si de plus $\{T(t), t \geq 0\}$ *est un semi-groupe d'isométrie de classe* C^0*, alors*

$$\| u \|_{C([0,T],X)} \leq \| \varphi \|_X + \| f \|_{L^1(0,T,X)}.$$

Essayons maintenant de voir quelles conditions doivent satisfaire les données pour que la fonction u définie par la formule de Duhamel soit une solution classique (ou forte) du problème de Cauchy.

Proposition 1.4.2 *:*
Soit $\varphi \in D(A)$ *et* $f \in W^{1,1}\big(0, T, X\big)$*. Alors la fonction* $u \in C\big([0,T], X\big)$ *donnée par la formule de Duhamel* (1.4.3) *est l'unique solution classique du problème de Cauchy* (1.4.2).

Remarque 1.4.2
La condition $f \in C\big([0,T], X\big)$ *ne suffit pas pour avoir une solution classique ou forte, même si* $\varphi \in D(A)$*. Par contre*

Proposition 1.4.3 *:*
Soit $\varphi \in D(A)$ *et* $f \in C\big([0,T], D(A)\big)$ $\Big($ *resp.* $f \in L^1\big(0, T, D(A)\big)$ $\Big)$*. Alors la fonction* $u \in C\big([0,T], X\big)$ *donnée par la formule de Duhamel* (1.4.3) *est l'unique solution classique (resp. l'unique solution forte) du problème de Cauchy* (1.4.2).

Si on a seulement $f \in C\big([0,T], X\big)$ on a la proposition suivante :

Proposition 1.4.4 *:*
Soit $\varphi \in D(A)$ *et* $f \in C\big([0,T], X\big)$ $\Big($ *resp.* $f \in L^1\big(0, T, X\big)$ $\Big)$*. Alors la fonction* u *donnée par la formule de Duhamel* (1.4.3) *est l'unique solution classique (resp. l'unique solution forte) du problème de Cauchy* (1.4.2) *si et seulement si* $u \in C^1\big([0,T], X\big)$ *ou* $u \in C\big([0,T], D(A)\big)$ *(resp.* $u \in W^{1,1}\big(0, T, X\big)$ *ou* $u \in L^1\big(0, T, D(A)\big)$ *).*
Si $\varphi \in D(A)$ *et* $f \in L^\infty\big(0, T, X\big)$*, alors la fonction* u *donnée par la formule de Duhamel* (1.4.3) *est l'unique solution forte du problème de Cauchy* (1.4.2) *si et seulement si* $u \in W^{1,\infty}\big(0, T, X\big)$ *ou* $u \in L^\infty\big(0, T, D(A)\big)$*.*

(Voir [28]).

1.4.2 Problème d'évolution semi-linéaire

Soit le problème d'évolution semi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = f\big(t, u(t)\big), & \text{pour } t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.4.4}$$

Où $-A$ est le générateur infinitésimal d'un C^0 semi-groupe $\{T(t), t \geq 0\}$ sur un espace de Banach X.

$f : [0,T] \times X \to X$, $T > 0$

Définition 1.4.4 *:*

Soit $-A$ le générateur infinitésimal d'un C^0 semi-groupe $\{T(t), t \geq 0\}$ sur X et $f : [0,T] \times X \to X$ vérifiant :

Pour tout x dans X ; la fonction $t \to f(t,x)$ est dans $L^1(0,T)$.

On appelle solution faible de (1.4.4) une fonction $u \in C\big([0,T], X\big)$ vérifiant l'équation intégrale :

$$u(t) = T(t)u_0 + \int T(t-s) f\big(s, u(s)\big) ds \qquad .$$

Théorème 1.4.10

Soit $T > 0$. Une fonction $u : [0,T] \to X$ est une solution faible de (1.4.4) sur $[0,T]$ si et seulement si $f\big(u(.)\big) \in L^1(0,T,X)$ et u satisfait la formule de variation de constantes

$$u(t) = T(t)\varphi + \int_0^t e^{A(t-s)} f\big(u(s)\big) ds$$

pour tout $s \in [0,T]$.

(Voir [12]).

Théorème 1.4.11 (*d'existence locale de la solution faible*) *:*

Soit $f : \big[0, +\infty\big[\times X \to X$, une fonction continue en t pour $t \geq 0$ et localement lipschitzienne en x, uniformément en t sur les intervalles bornés.

Si $-A$ est le générateur infinitésimal d'un C^0 semi-groupe $\Big\{T(t), t \geq 0\Big\}$ sur X.

Alors :

$\forall\, u_0 \in X$, il existe $T_{max} \leq \infty$ tel que le problème (1.4.4) admet une unique "solution faible " sur $\big[0, T_{max}\big[$, avec l'alternative suivante :

Ou bien $T_{max} = +\infty$, on a l'existence globale, ou bien $T_{max} < +\infty$ et alors $\lim\limits_{t \to T_{max}} \| u(t) \| = \infty$.

(Voir [19])

On a les définitions et les remarques suivantes :

Définition 1.4.5 *:*

On dit que u explose en temps fini T^* si

$$\lim_{t\to T^*} \| u(.,t) \|_{\infty,\Omega} = \infty.$$

Définition 1.4.6 *:*

Un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est dit point d'explosion de u, si u n'est pas localement bornée au voisinage de (x_0, T), autrement dit, s'il existe une suite (x_n, t_n) telle que :
$(x_n, t_n) \to (x_0, T)$ et $|u(x_n, t_n)| \to +\infty$, quand $n \to +\infty$.

Remarque 1.4.3

- *Si u n'explose pas en temps fini, ça implique que la solution u est globale.*
  - *L'ensemble de tous les points d'explosion est appelé ensemble d'explosion de u.*
  - *Il est à noter que pour une solution donnée, le temps d'explosion est unique.*
- *La solution u est globale équivalente à u bornée.*
- *Deux cas se présentent :*

$$\begin{cases} T = +\infty \ , & \text{Existence globale} \\ T < +\infty \ , & \text{Explosion en temps fini} \end{cases}$$

- *Pour établir l'existence globale ($T_{max} = \infty$), il suffit donc d'obtenir une estimation a priori du type :*
  Pour toute solution u de (1.4.4) sur $\left[0, T\right[$, on a :
  $$\forall t \in \left[0, T\right[\ , \ \| u(t) \|_{\infty,\Omega} \leq C(t)$$
  où $C : \left[0, +\infty\right[\to \left[0, +\infty\right[$.

- *Dans le cas des systèmes de réaction-diffusion semi-linéaires, les techniques d'existence globale consistent à établir que les solutions sont bornées en norme dans L^∞ lorsque les données initiales sont dans L^∞.*

Rappel sur la méthode de la variation de constante :

Soit A un opérateur borné et soit l'équation différentielle avec condition initiale suivante :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(u(t), t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.4.5}$$

$A \in L_c(X)$, $t \in [0, T]$ et $u_0 \in X$.
On cherche $u : t \in [0, T] \to u(t) \in X$, $u(t) \in C^1\big([0, T], X\big)$, telle que on a (1.4.5).

La solution de l'équation homogène : $u'(t) = Au(t)$ est

$$u(s) = CT(s), \text{ où } C \text{ est une constante dans } X \qquad \text{avec } T(s) = e^{sA}.$$

On cherche une solution de (1.4.5) sous la forme : $u(s) = T(s)C(s)$.
On a :
$u'(s) = T(s)AC(s) + T(s)C'(s) = AT(s)C(s) + T(s)C'(s) = Au(s) + T(s)C'(s) = Au(s) + f(u, s)$.
Et donc

$$f(u, s) = T(s)C'(s).$$

Par conséquent

$$T(t - s)f(u, s) = T(t)C'(s).$$

On intègre les deux membres de la dérnière égalité de 0 à t, on obtient :

$$\int_0^t T(t)C'(s)ds = \int_0^t T(t - s)f(u, s)ds.$$

D'où :

$$T(t)C(t) - T(t)c(0) = \int_0^t T(t - s)f(u, s)ds.$$

Et tenant compte que $C(0) = u(0) = u_0$.
On obtient :

$$u(t) = T(t)C(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t - s)f(u, s)ds.$$

1.5 Principe du maximum et application aux problèmes paraboliques

Introduction :

En mathématiques, et plus précisément en analyse, le principe du maximum est une propriété des solutions de certaines équations aux dérivées partielles, de type elliptique ou parabolique qui dit qu'une fonction solution d'une telle équation sur un domaine atteint son maximum sur la frontière du domaine. De façon plus précise, le principe du maximum fort dit que si la fonction atteint son maximum sur l'intérieur du domaine, elle est constante. Le principe du maximum faible dit que le maximum de la fonction est atteint sur la frontière du domaine, mais peut aussi éventuellement être atteint à l'intérieur du domaine. Un principe du maximum encore plus faible se contente simplement de borner la fonction par son maximum sur la frontière.

Le principe du maximum pour les fonctions harmoniques est connu depuis les travaux de Gauss en 1839. En 1927, Eberhard Hopf généralise ce résultat en montrant q'une fonction satisfaisant une inéquation aux dérivées partielles du second ordre d'un certain type sur un domaine de $\mathbb{R}^n$ et qui atteint son maximum à l'intérieur du domaine est nécessairement constante.

La démonstration de E.Hopf s'inspire d'une idée simple qui l'amène à introduire une technique de comparaison qui conduira à une grande variété d'applications et de généralisation trés importante. Le principe du maximum est considéré comme le résultat classique et fondamental de la théorie des équations aux dérivées partielles de type elliptique ou parabolique.

En optimisation convexe, le principe du maximum affirme que le maximum d'une fonction convexe sur un ensemble compact et convexe est atteint sur sa frontière.

1.5.1 Equations paraboliques

Etant donné Ω un ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et l'ensemble $Q_T = \Omega \times (0, T]$ pour un certain temps $T > 0$ fixé.

On pose

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x,t)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u$$

et on a aussi la forme non divergentielle suivante

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u$$

Les coefficients a^{ij}, b^i, c $(i, j = 1, ..., n)$ sont donnés.

Définition 1.5.1 *:*
On dit que l'opérateur différentiel partiel $\dfrac{\partial}{\partial t} + L$ *est (uniformément) parabolique s'il existe une constante* $\theta > 0$ *telle que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2, \quad \textit{pour tout } (x,t) \in Q_T, \xi \in \mathbb{R}^n$$

1.5.2 Principe du maximum faible.

Nous supposerons dorénavant que l'opérateur L a la forme non divergentielle

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} + cu \tag{1.5.6}$$

où les coefficients a^{ij}, b^i, c sont continus par rapport à x et à t. Nous supposerons toujours la parabolicité uniforme de L, et aussi que $a^{ij} = a^{ji}(i, j = 1, ..., n)$. Rappelons aussi la frontière parabolique de Q_T est $\Sigma_T = \overline{Q}_T - Q_T$.

Théorème 1.5.12 *(Principe du maximum faible)*
Supposons $u \in C^{2,1}(Q_T) \bigcap C(\overline{Q}_T)$ *et*

$$c \equiv 0 \textit{ dans } Q_T$$

i) *Si*

$$u_t + Lu \leq 0 \textit{ dans } Q_T$$

alors

$$\max_{\overline{Q}_T} u = \max_{\Sigma_T} u$$

ii) *De même si*

$$u_t + Lu \geq 0 \textit{ dans } Q_T$$

alors

$$\min_{\overline{Q}_T} u = \min_{\Sigma_T} u$$

Théorème 1.5.13 *(principe du maximum faible pour* $c \geq 0$ *)*
Supposons $u \in C_1^2(Q_T) \bigcap C(\overline{Q}_T)$ *et*

$$c \geq 0 \textit{ dans } Q_T$$

i) *Si*

$$u_t + Lu \leq 0 \textit{ dans } Q_T$$

alors

$$\max_{\overline{Q}_T} u \leq \max_{\Sigma_T} u^+$$

ii) *si*

$$u_t + Lu \geq 0 \ dans \ Q_T$$

alors

$$\min_{\overline{Q}_T} u \geq -\max_{\Sigma_T} u^- \quad .$$

Remarque 1.5.1
En particulier, si $u_t + Lu = 0$ *sur* Q_T*, alors*

$$\max_{\overline{Q}_T} |u| = \max_{\Sigma_T} |u|$$

1.5.3 Inégalité de Harnack

L'inégalité de Harnack affirme que si u est une solution nonnégative de notre EDP parabolique, alors le maximum de u dans une certaine région intérieure à un temps positif, peut être estimeée par le minimum de u sur une certaine région en temps postérieur.

Théorème 1.5.14 (*Inégalité parabolique de Harnack*)
Supposons $u \in C^{2,1}(Q_T)$ *solution de*

$$u_t + Lu = 0 \ dans \ Q_T$$

et

$$u \geq 0 \ dans \ Q_T$$

Supposons $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ *est connexe. Alors pour chaque* $0 < t_1 < t_2 \leq T$*, il existe une constante* C *telle que*

$$\sup_{\Omega_1} u(.,t_1) \leq C \inf_{\Omega_1} u(.,t_2) \quad dans \ \Omega$$

La constante C *dépend seulement de* Ω_1, t_1, t_2 *et les coefficients de* L.

1.5.4 Principe du maximum fort

Théorème 1.5.15 (*Principe du maximum fort*)
Supposons $u \in C^{2,1}(Q_T) \bigcap C(\overline{Q}_T)$ *et*

$$c \equiv 0 \ dans \ Q_T$$

Supposons aussi que Ω *est connexe.*

i) *Si*

$$u_t + Lu \leq 0 \ dans \ Q_T$$

et u *atteint son maximum sur* $(\overline{Q}_T)^\circ$ *en un point* $(x_0, t_0) \in Q_T$*, alors* u *est constante sur* Q_{t_0}

ii) *De même, si*

$$u_t + Lu \geq 0 \ dans \ Q_T$$

et u atteint son minimum sur $\overline{Q}_T$ en un point $(x_0,t_0)\in Q_T$, alors u est constante sur Q_{t_0}.

Théorème 1.5.16 (*Principe du maximum fort pour $c\geq 0$*)
Supposons $u\in C_1^2(Q_T)\bigcap C(\overline{Q}_T)$ et

$$c\geq 0 \text{ dans } Q_T.$$

Supposons aussi que Ω est connexe.
i) *Si*

$$u_t+Lu\leq 0 \text{ dans } Q_T$$

et u atteint son maximum nonnégative sur $\overline{Q}_T$ en un point $(x_0,t_0)\in Q_T$, alors u est constante sur Q_{t_0}.
ii) *De même, si*

$$u_t+Lu\geq 0 \text{ dans } Q_T$$

et u atteint son minimum nonnégative sur $\overline{Q}_T$ en un point $(x_0,t_0)\in Q_T$, alors u est constante sur Q_{t_0}.

(Pour la démonstration de ces théorèmes , voir [16]).

Théorème de comparaison pour les équations non linéaires

On considère l'équation parabolique non linéaire suivante :

$$Pu=f(x,t,u), \qquad (x,t)\in Q_T. \tag{1.5.7}$$

Ici

$$-Pu=u_t-Lu\equiv u_t-\sum_{i,j=1}^{n}\big(a_{ij}(x,t)u_{x_i}\big)x_j. \tag{1.5.8}$$

(c'est à dire $b^i=0,\forall i=1,...,n$ et $c=0$ dans la forme divergentielle)
où (a_{ij}) est une matrice symétrique, et chaque a_{ij} est borné dans Q_T. De plus, supposons que P est uniformément parabolique dans Q_T, finalement nous supposons que f est de classe C^1 en u et höldérienne en x et t.
Soit u et v des fonctions de classe C^2 en x dans Ω, et de classe C^1 en t sur $[0,T]$, et on considère les trois conditions suivantes :

$$Pu-f(x,t,u)\leq Pv-f(x,t,u), \quad (x,t)\in Q_T \tag{1.5.9}$$

$$u(x,0) \geq v(x,0), \qquad x \in \Omega \tag{1.5.10}$$

$$\frac{du}{d\nu} + \beta u \geq \frac{dv}{d\nu} + \beta v, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \tag{1.5.11}$$

où $\beta = \beta(x,t) \geq 0$ sur $\partial\Omega \times (0,T)$.
En supposant ces conditions, on a le théorème de "comparaison" suivant :

Théorème 1.5.17
Sous les conditions ci-dessus sur P et f, si (1.5.9) – (1.5.11) *ont lieu, alors*

$$u(x,t) \geq v(x,t) \qquad \textit{pour tout } (x,t) \in \overline{Q}_T.$$

De plus, si $u(x,0) > v(x,0)$ pour chaque x dans un ouvert $\Omega_1 \subset \Omega$, alors $u(x,t) > v(x,t)$ dans $\overline{\Omega}_1 \times [0,T]$.

voir [14].

1.6 Rappel sur l'équation de la chaleur

On considère l'équation de la chaleur non homogène :

$$u_t - \Delta u = 0 \tag{1.6.12}$$

et l'équation de la chaleur homogène :

$$u_t - \Delta u = f \tag{1.6.13}$$

Pour des conditions initiales et des conditions aux limites convenables. Ici $t > 0$ et $x \in \Omega$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert. L'inconnue est $u : \overline{\Omega} \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $u = u(x,t)$, $\Delta u = \Delta_x u = \sum_{i=1}^{i=n} u_{x_i x_j}$.
Dans (1.6.13) la fonction $f : \Omega \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est donnée.

Interprétation physique

L'équation de la chaleur, aussi connue comme équation de diffusion décrit dans des applications typiques l'évolution en temps de densité u de certaine quantité telle que la chaleur, la concentration chimique, etc. Si $\Omega_1 \subset \Omega$ est une sous région régulière, le taux de changement de la quantité totale dans Ω_1 égale le flux net négatif à travers $\partial\Omega_1$:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_1} udx = -\int_{\partial\Omega_1} F.\nu dS,$$

F étant la densité de flux. Ainsi

$$u_t = -divF \tag{1.6.14}$$

puisque Ω_1 est arbitraire. Dans plusieurs situations F est proportionnelle au gradient de u, mais dans la direction opposée puisque le flux des régions de grandes concentrations se dirige vers les régions de plus petites concentrations.

$$F = -a\nabla u \quad (a > 0)$$

En remplaçant dans (1.6.14), on obtient l'EDP suivante :

$$u_t = a\, div(\nabla u) = a\Delta u$$

pour $a = 1$, c'est l'équation de la chaleur (1.6.12).

L'équation de la chaleur apparait aussi bien dans l'étude du mouvement Brownien.

1.6.1 Solution fondamentale

Définition 1.6.1 *:*

La fonction

$$\Phi(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

est dite la solution fondamentale de l'équation de la chaleur (1.6.12).

Sous la définition (1.6.1), on vérifie que Φ vérifie l'équation de la chaleur et l'égalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)dx = 1$$

Théorème 1.6.18

Soit $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

La fonction Φ *est localement intégrable sur* $\mathbb{R}^{n+1}$, $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0)$ *et*

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)\Phi = \delta_0$$

Pour la preuve voir [15].

Problème homogène à valeurs initiales

Maintenant on utilise Φ pour modèle, une solution du Problème à valeurs initiales (ou de Cauchy)

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g, & \text{sur } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{1.6.15}$$

Soit la fonction $(x, t) \to \Phi(x, t)$ qui résout l'équation de la chaleur loin de la singularité en $(0, 0)$, et ainsi $(x, t) \to \Phi(x-y, t)$ pour chaque $y \in \mathbb{R}^n$ fixé. Par conséquent la convolution

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(y) dy = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \tag{1.6.16}$$

est également une solution.

Théorème 1.6.19 (*Solution du problème à valeurs initiales*)
Supposons que $g \in C(\mathbb{R}^n) \bigcap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, *et on définit* u *par* (1.6.16). *Alors*
(i) $u \in C^\infty\big(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)\big)$,
(ii) $u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$,
et
(iii) $\lim\limits_{(x,t)\to(x^0,0)\ x\in\mathbb{R}^n, t>0} u(x,t) = g(x^0)$ *pour chaque point* $x^0 \in \mathbb{R}^n$

Problème non homogène à valeurs initiales

On considère le problème non homogène à valeurs initiales suivant :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = 0, & \text{sur } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{1.6.17}$$

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{\big(4\pi(t-s)\big)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s) dyds \tag{1.6.18}$$

pour $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ Pour confirmer que la formule (1.6.18) marche, utilisons pour simplification, la supposition : $f \in C^{2,1}\big(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)\big)$ et f à support compact.

Théorème 1.6.20 (*Solution non homogène du problème*)
On définit u *par* (1.6.18).
Alors
(i) $u \in C^{2,1}\big(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)\big)$,

(ii) $u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$,

et

(iii) $\lim\limits_{(x,t)\to(x^0,0), x\in\mathbb{R}^n, t>0} u(x,t) = 0$ *pour chaque point* $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Solution de l'équation de la chaleur et semi-groupe

On considère le problème homogène de valeurs initiales suivant :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \text{dans } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = g, & \text{sur } \mathbb{R} \times \{t=0\} \end{cases} \tag{1.6.19}$$

Dans $\mathbb{R}$, $u(x,t)$ donnée par le théorème (1.6.20) et la formule suivante

$u(x,t) = \Phi(.,t) * g = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y,t)g(y)dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y)dy \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$

$u(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y,t)g(y)dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y)dy \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$

$u(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y,t)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y)dy \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$.

$u(x,t) = g(x) * \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$.

D'où

$u(t)(x) = \Big(\dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} * g\Big)(x)$

$u(.,t) = u(t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(.)^2}{4t}} * g = T(t).g$

D'où

$$u(t)(x) = \big(T(t).g\big)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y)dy. \tag{1.6.20}$$

La famille $\big(T(t)\big)_{t\geq 0}$ forme un semi-groupe linéaire de contraction sur $L^2(\mathbb{R})$.
D'où le semi-groupe associé au problème (1.6.19), $T(t)$ est défini par la formule (1.6.20), avec $g \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et u solution de (1.6.19).

Remarque 1.6.1

$$\textit{Pour tout } \varphi \in D(\mathbb{R}) : \quad \lim_{t\to 0^+} < \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \varphi >=< \delta_0(x), \varphi >= \varphi(x)$$

D'autre part, on considère le problème non homogène suivant :

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = f, & \text{dans } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ v = 0, & \text{sur } \mathbb{R} \times \{t=0\} \end{cases} \tag{1.6.21}$$

$v(x,t)$ est donnée par le théorème (1.6.21) et la formule suivante :
$v(x,t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} f(y,s)dyds.$
Et donc
$v(x,t) = \int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} f(y,s)dy \Big) ds.$
$v(x,t) = \int_0^t \Big[f(.,s) * \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} \Big](x) ds$
$v(x,t) = \int_0^t \Big[\frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} * f(.,s)(x) \Big] ds.$
$= \int_0^t \Big[\frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} * f(.,s) \Big] ds(x) = v(t)(x).$

D'où
$v(.,t) = v(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} e^{-\frac{(.)^2}{4(t-s)}} * f(s)ds = \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$
On pose :

$w = u + v$

Où u la solution du problème (1.6.19) et v la solution du problème (1.6.21).

En sommant (1.6.19) et (1.6.21) membre à membre, nous obtenons :

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = f, & \text{dans } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ w = g, & \text{sur } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{1.6.22}$$

La solution w de (1.6.22) s'écrit sous la forme :

$$w(t) = u(t) + v(t) = T(t)g + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

Dans la suite, supposons $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, et on fixe un temps $T > 0$.

Définition 1.6.2 *:*

(**i**) *On définit le cylindre parabolique* $Q_T := \Omega \times (0, T]$.

(**ii**) *La frontière parabolique de* Q_T *est* $\Sigma_T := \overline{Q}_T - Q_T$.

On interprète Q_T comme l'intérieure parabolique de $\overline{Q}_T \times [0, T)$.

1.6.2 Propriété des solutions

a) Principe du maximum fort, unicité

Théorème 1.6.21 (*Principe du maximum fort pour l'équation de la chaleur*)
Supposons que $u \in C_1^2(Q_T) \bigcap C(\overline{Q}_T)$ *résout l'équation de la chaleur dans* Q_T.

(**i**) *Alors*

$$\max_{\overline{Q}_T} u = \max_{\Sigma_T} u.$$

(**ii**) *En outre, si* Ω *est connexe et il existe un point* $(x_0, t_0) \in Q_T$ *tel que*

$$u(x_0, t_0) = \max_{\overline{Q}_T} u$$

alors

$$u \text{ est constante dans } \overline{Q}_{t_0}$$

L'assertion (i) est le principe du maximum pour l'équation de la chaleur et (ii) est le principe du maximum fort.
Lorsqu'on remplace "max" par "min" les assertions (i) et (ii) restent valables.

Remarque 1.6.2
Le principe du maximum fort implique que si Ω *est connexe et* $u \in C^{2,1}(Q_T) \bigcap C(\overline{Q}_T)$ *satisfait :*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{dans } Q_T \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \\ u = g, & \text{sur } \Omega \times \{t = 0\} \end{cases}$$

où $g \geq 0$*, alors* u *est positive partout dans* Q_T *si* g *est positive quelque part sur* Ω*.*

Théorème 1.6.22 (*Unicité sur un domaine borné*)
Soit $g \in C(\Sigma_T), f \in C(Q_T)$*. Il existe au plus une solution* $u \in C^{2,1}(Q_T) \bigcap C(\overline{Q}_T)$ *du problème aux limites à valeurs initiales suivant :*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{dans } Q_T \\ u = g, & \text{sur } \Sigma_T \end{cases} \tag{1.6.23}$$

Théorème 1.6.23 (*Principe du maximum pour le problème de Cauchy*)
Supposons que $u \in C^{2,1}\big(\mathbb{R}^n \times (0, T]\big) \bigcap C\big(\mathbb{R}^n \times (0, T]\big)$ *résout*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u = g, & \text{sur } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{1.6.24}$$

et satisfait l'estimation de croissance

$$u(x, t) \leq A e^{a|x|^2} \quad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T) \tag{1.6.25}$$

A, a sont des constantes strictement positives.
Alors

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

Théorème 1.6.24 (*Unicité pour le problème de Cauchy*)
Soit $g \in C(\mathbb{R}^n)$, $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$.
Alors il existe au plus une solution $u \in C^{2,1}\big(\mathbb{R}^n \times (0,T]\big) \bigcap C\big(\mathbb{R}^n \times (0,T]\big)$ *du problème à valeurs initiales suivant :*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u = g, & \text{sur } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{1.6.26}$$

satisfait l'estimation de croissance suivante :

$$\mid u(x,t) \mid \leq Ae^{a|x|^2} \quad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T) \tag{1.6.27}$$

pour A, a sont des constantes strictement positives.

b) Régularité

Nous allons montrer à partir des théorèmes ci-dessous que les solutions de l'équation de la chaleur sont automatiquement régulières.

Théorème 1.6.25
Supposons que $u \in C^{2,1}(Q_T)$ *résout l'équation de la chaleur* (1.6.23) *dans* Q_T. *Alors*

$$u \in C^\infty(Q_T)$$

c) Estimations locales pour les solutions de l'équation de la chaleur

Théorème 1.6.26 (*Estimations sur les dérivées*)
Il existe pour chaque paire des entiers $k, l = 0, 1, ...,$ *une constante* $C_{k,l}$ *telle que*

$$\max_{C(x,t,\frac{r}{2})} \mid D_x^k D_t^l \mid \leq \frac{C_{k,l}}{r^{k+2l+n+2}} \parallel u \parallel_{L^1(C(x,t,r))}$$

pour tout cylindre $C(x,t,\frac{r}{2}) \subset C(x,t,r) \subset Q_T$ *et toute solution u de l'équation de la chaleur dans* Q_T.
$C(x,t,r) = \{(y,s)/ \mid x - y \mid \leq r, t - r^2 \leq s \leq t\}$

1.6.3 Méthode d'énergie

a) Unicité :

On considère le problème (1.6.23).

Théorème 1.6.27 (*unicité*)

Il existe au plus une solution $u \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ *du problème* (1.6.23).

b) backwards unicité :

Une question un peu plus subtile concerne l'unicité pour l'équation de la chaleur. Pour cela, supposons que u et $\widetilde{u}$ deux solutions régulières de l'équation de la chaleur dans Q_T, avec mêmes conditions aux limites sur $\partial\Omega$:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{dans } Q_T \\ u = g, & \text{sur } \partial\Omega \times [0,T] \end{cases} \tag{1.6.28}$$

$$\begin{cases} \widetilde{u}_t - \Delta \widetilde{u} = 0, & \text{dans } Q_T \\ \widetilde{u} = g, & \text{sur } \partial\Omega \times [0,T] \end{cases} \tag{1.6.29}$$

pour une certaine fonction g. Notons soigneusement que nous n'avons pas supposé que $u = \widetilde{u}$ en $t = 0$.

Théorème 1.6.28 (*unicité*)

Supposons que u résout (1.6.28) *et $\widetilde{u}$ résout* (1.6.29).

Si

$$u(x,T) = \widetilde{u}(x,T) \quad (x \in \Omega).$$

alors

$$u = \widetilde{u} \text{ dans } Q_T$$

Voir [16] .

Rappel d'un resultat classique sur l'équation de la chaleur

Soit $q > 2$, $F \in L^q(Q_T)$ *et* $w_0 \in L^q(\Omega)$.

Pour T fini et arbitraire, la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} w_t - d\Delta w = F, & \text{sur } Q_T \\ w = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) \\ w(0) = w_0, & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{1.6.30}$$

vérifie l'estimation suivante :

$$\| w \|_{L^r(Q_T)} \leq C \Big[\| F \|_{L^q(Q_T)} + \| w_0 \|_{L^q(\Omega)} \Big]$$

avec $\dfrac{1}{r} > \dfrac{1}{q} - \dfrac{2}{n+2}$, *si* $q < \dfrac{n+2}{2}$

et avec $r = +\infty$, *si* $q > \dfrac{n+2}{2}$

♦

Voir [17].

Chapitre 2

ETUDE D'UN SYSTEME DE REACTION-DIFFUSION FAIBLEMENT COUPLE

INTRODUCTION

La classe des systèmes de réaction-diffusion faiblement couplés, c'est à dire celle dont la matrice de diffusion est diagonale, est contenue dans une classe plus générale, celle des systèmes à matrice de diffusion non diagonale (triangulaire par exemple) ou pleine, comme le système suivant :

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u - b\Delta v = f(x,t,u,v), & \text{sur } Q \\ v_t - c\Delta u - d\Delta v = g(x,t,u,v), & \text{sur } Q \\ \lambda_1 \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + (1-\lambda_1)(u-\alpha_1) = 0, & \text{sur } \Gamma \\ \lambda_2 \dfrac{\partial v}{\partial \nu} + (1-\lambda_2)(v-\alpha_2) = 0, & \text{sur } \Gamma \\ u(x,0) = u_0(x); v(x,0) = v_0(x), & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{2.0.1}$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{2.0.2}$$

est à coefficients réels et ses valeurs propres sont réelles positives.

$$0 \leq \lambda_i \leq 1, \alpha_i \in C^2(\overline{\Omega}), i = 1, 2 \tag{2.0.3}$$

On suppose de plus que f et g sont des fonctions mesurables de $\Omega \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

il existe $\alpha \in]0, 1]$ tel que, pour tout $0 \leq |u|, |v| \leq r$

$$\begin{cases} \dfrac{|f(x,t,u,v) - f(x',t',u,v)|}{|x - x'|^\alpha + |t - t'|^\alpha} \leq C(r) \\ \dfrac{|g(x,t,u,v) - g(x',t',u,v)|}{|x - x'|^\alpha + |t - t'|^\alpha} \leq C(r) \end{cases} \tag{2.0.4}$$

et localement lipschitziennes par rapport à u et v, avec

$$f(x,t,0,0), g(x,t,0,0) \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^+).$$

Dans ce chapitre, nous abordons l'étude de l'existence globale de systèmes faiblement couplés vérifiant l'hypothèse du contrôle de masse, la préservation de la positivité de la solution au cours du temps et à données initiales uniformément bornées.

Pour cela, nous avons besoin d'un résultat trés important donné par le théorème suivant :

Théorème 2.0.29 (*d'existence locale pour les solutions classiques*)
Sous les hypothèses (2.0.2)-(2.0.5) et pour tout $(u_0, v_0) \in \left(L^\infty(\Omega)\right)^2$, *le système* (2.0.1) *admet une unique solution locale et classique* (u, v) *sur* $(0, T_{max})$, *telque,* $\forall 1 < p < \infty$,

$$u, v \in C\Big([0, T_{max}); L^p(\Omega)\Big) \bigcap C^{2,1}\Big(\overline{\Omega} \times (0, T_{max}); \mathbb{R}\Big)$$

De plus, le temps maximal d'existence T_{max} *et caractérisé par :*
Si $u(t)$ *et* $v(t)$ *sont bornées dans* $L^\infty(\Omega)$, *pour tout* $t \in [0, T]$ *et pour tout* $T > 0$, *alors* $T_{max} = +\infty$.

Preuve:

Pour la preuve de ce théorème Voir [10],[11].

▪

■

2.1 Etude d'un système diagonal

Position du problème :

Dans ce chapitre on traite le cas diagonal ($b = c = 0$).

Et supposons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ dans (2.0.1), nous obtenons le système suivant

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = f(x,t,u,v), & \text{sur } Q \\ v_t - d\Delta v = g(x,t,u,v), & \text{sur } Q \\ u = v = 0, & \text{sur } \Gamma \\ u(x,0) = u_0(x) \;\; ; \quad v(x,0) = v_0(x), & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Et on étudie localement le système (2.1.6) pour passer à l'existence globale.

C'est à dire on étudie le système de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = f(x,t,u,v), & \text{sur } Q_T \\ v_t - d\Delta v = g(x,t,u,v), & \text{sur } Q_T \\ u = v = 0, & \text{sur } \Gamma_T \\ u(x,0) = u_0(x) \;\; ; \quad v(x,0) = v_0(x), & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{2.1.6}$$

Où les coefficients de diffusion a et d sont des constantes réelles telles que $a > 0$, $d > 0$.

Et supposons que

$$(u_0, v_0) \in \left(L^\infty(\Omega)\right)^2 \tag{2.1.7}$$

Nous supposons aussi que les deux propriétés essentielles suivantes (H_1), (H_2) sont satisfaites :

$(\mathbf{H_1})$: grâce au principe du maximum, la positivité des solutions de (2.1.6) est préservée au cours du temps, propriété assurée par l'hypothèse suivante (la quasi-positivité) qui est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence globale de solutions classiques :

$$\begin{cases} f(x,t,0,v) \geq 0, g(x,t,u,0) \geq 0, \text{ pour tout } u, v \geq 0 \\ u_0 \geq 0, v_0 \geq 0 \end{cases}$$

$(\mathbf{H_2})$: La masse totale des composantes u et v est contrôlée au cours du temps,

c'est à dire que :

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\big(u(t)+v(t)\big)dx \leq 0.$$

qui est satisfaite en tant que la propriété suivante est satisfaite :

$$f+g\leq 0$$

La propriété $(\mathbf{H_2})$ nous laisse à croire qu'on espérer à une existence globale en temps des solutions.
La question est de savoir dans quelle mesure, (H_1) et (H_2) aident à l'existence globale de solutions.
Dans cette section on distingue les trois cas suivants :

2.1.1 1^{er} cas (E D O)

On considère le système d'équations différentielles ordinaires associé :

$$\begin{cases} u'(t) = f(u,v), & \text{sur } (0,\infty) \\ v'(t) = g(u,v), & \text{sur } (0,\infty) \end{cases} \tag{2.1.8}$$

Ici seulement les termes de réaction f et g apparaissent.
En sommant les deux équations de (2.1.9) on obtient :

$$u'(t)+v'(t) = f(u,v)+g(u,v)$$

Comme $f+g\leq 0$, donc $u'(t)+v'(t)\leq 0$.
On intégre de 0 à t les deux membres on obtient

$$\int_0^t \big(u'(s)+v'(s)\big)ds \leq 0$$

c'est à dire

$$0\leq u(t)+v(t)\leq u(0)+v(0).$$

Il est classique que les données initiales $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$, la solution de (2.1.9) avec $u(0) = u_0, v(0) = v_0$ existe sur un certain intervalle maximal $[0, T_{max})$ et généralement $T_{max} < \infty$.
D'aprés le principe du maximum, on a

$$0\leq u(t)+v(t)\leq u_0+v_0\ ,\ \forall t\in[0,T_{max})$$

Et comme $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$, ceci implique que

$$\|u(t)\|_{\infty,\Omega}\leq C \text{ et } \|v(t)\|_{\infty,\Omega}\leq C \quad , \ \forall t\in[0,T_{max}).$$

Le théorème d'existence locale implique que $T_{max} = +\infty$.
D'où l'existence globale pour le système d'équations différentielles ordinaires (2.1.9).

Remarque 2.1.1
L'existence globale pour une équation différentielle ordinaire implique toujours l'existence globale pour l'équation de réaction-diffusion associée , ceci c'est grâce au principe du maximum, mais ce résultat est en général faux pour les systèmes. On peut voir des contre-exemples explicites dans [23].

2.1.2 2^{eme} cas : les coefficients de diffusion sont égaux $(a = d)$

Donc le système associé est :

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = f(x,t,u,v), & \text{sur } Q_T \\ v_t - a\Delta v = g(x,t,u,v), & \text{sur } Q_T \\ u = v = 0, & \text{sur } \Gamma_T \\ u(x,0) = u_0(x) \quad ; \quad v(x,0) = v_0(x), & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{2.1.9}$$

Lemme 2.1.1 *Sous les hypothèses* (H_1), (H_2) *et* (2.1.8), *le système* (2.1.10) *admet une unique solution globale classique.*

Preuve:
En sommant les deux premières équations de (2.1.10) membre à membre, on obtient :

$$(u+v)_t - a\Delta(u+v) = f(x,t,u,v) + g(x,t,u,v)$$

On pose :

$$u + v = w \ , \ f + g = F \ .$$

On aura donc le problème suivant :

$$\begin{cases} w_t - a\Delta w = F(x,t,u,v), & \text{sur } Q_T \\ w = 0, & \text{sur } \Gamma_T \\ w(x,0) = w_0(x) \quad ; \quad , & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{2.1.10}$$

La fonction F est localement lipschitzienne, car f et g le sont .
Pour l'équation :

$$w_t - a\Delta w = F(x,t,u,v)$$

En vertu de (H_2), on a :

$$F \leq 0 \ .$$

On obtient donc :

$$w_t - a\Delta w \leq 0$$

Nous appliquons le principe du maximum pour l'opérateur parabolique $\dfrac{\partial}{\partial t} - a\Delta$, nous obtenons :

$$w(t) \leq w_0(x).$$

Et comme $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$, donc $w_0 \in L^\infty(\Omega)$.
Et par conséquent , on a une estimation a priori L^∞ sur w :

$$\|w(t)\|_{\infty,\Omega} \leq \|w_0\|_{\infty,\Omega}$$

C'est à dire

$$w(t) \in L^\infty(\Omega)$$

D'où :

$$\|u(t)\|_{\infty,\Omega} \leq C \text{ et } \|v(t)\|_{\infty,\Omega} \leq C \quad , \quad \forall t \in [0, T_{max}).$$

Le théorème d'existence locale implique que $T_{max} = +\infty$.
Ce qui assure l'existence globale de la solution (u, v) du système (2.1.10).

■

2.1.3 3^{eme} cas : les coefficients de diffusion sont différents $(a \neq d)$

.

Dans ce cas, nous avons besoin d'une méthode qui s'appelle la méthode principale pour la croissance polynomiale et le théorème (2.1.31) ci-dessous.

la méthode principale pour la croissance polynomiale

La méthode principale qu'on va présenter ici c'est pour un système 2×2 à diffusions générales et différentes.
Pour $r = 1, 2$, on pose :

$$A^r u = \partial_i(a^r_{ij}\partial_j u) + b^r_i \partial_i u + c^r_i u \tag{2.1.11}$$

Où on utilise la convention de sommation usuelle sur les indices et

$$a_{ij}^r, b_i^r \in C^1(\overline{\Omega}), \quad c^r \in C^0(\overline{\Omega}) \quad r = 1, 2. \tag{2.1.12}$$

$$a_{ij}^r \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \quad \textit{pour tout} \quad \alpha > 0, \quad r = 1, 2. \tag{2.1.13}$$

On considère le système suivant

$$\begin{cases} u_t = A^1 u + f(u, v), & \text{sur } Q \\ v_t = A^2 v + g(u, v), & \text{sur } Q \\ \lambda_1 \partial_\nu^1 u + (1 - \lambda_1)(u - \alpha_1) = 0, & \text{sur } \Gamma \\ \lambda_2 \partial_\nu^2 u + (1 - \lambda_2)(v - \alpha_2) = 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2.1.14}$$

où ∂_ν^r est la dérivée conormale sur $\partial\Omega$ correspondant à A^r, c'est à dire

$$\partial_\nu^r u = a_{ij}^r \partial_j u N_i$$

et $\overrightarrow{N} = (N_1, ..., N_n)$ est la dérivée normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$.
Supposons que

$$\alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \quad 0 < \lambda_1, \lambda_2 \leq 1 \quad ou \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \tag{2.1.15}$$

$$u = u_0 \, , \, v = v_0 \quad sur \quad \Omega \times \{0\}, \quad u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega), \quad u_0, v_0 \geq 0 \tag{2.1.16}$$

De plus nous supposons que :
$f(u, v) = f\big(x, t, u(x, t), v(x, t)\big), g(u, v) = g\big(x, t, u(x, t), v(x, t)\big)$ sont mesurables sur $\overline{\Omega} \times [0, \infty)^3$ et continuement localement lipschitziennes en u et v, c'est à dire

$$\begin{array}{l} p.p.\, (x, t) \in \Omega \times [0, \infty), \forall\ r > 0 : 0 \leq |u|, |\hat{u}|, |v|, |\hat{v}| \leq r, \, \exists K(r) > 0 : \\ \big|f(x, t, u, v) - f(x, t, \hat{u}, \hat{v})\big| + \big|g(x, t, u, v) - g(x, t, \hat{u}, \hat{v})\big| \leq K(r)(|u - \hat{u}| + |v - \hat{v}|). \end{array} \tag{2.1.17}$$

Aussi,

$$f(x, t, 0, v) \geq 0 \, , g(x, t, u, 0) \geq 0 \quad \forall u, v \geq 0, \quad p.p\, (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \tag{2.1.18}$$

et

$$f(x, t, u, v) + g(x, t, u, v) \leq L(u + v) + M \quad \forall u, v \geq 0, \, p.p\, (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \tag{2.1.19}$$

où $L, M \geq 0$.

Théorème 2.1.30

Supposons que la solution (u,v) de (2.1.15) - (2.1.17) *sur* $\Omega \times (0, \widehat{T})$ *possède la proprieté qu'il existe une fonction continue, croissante* $C_1 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *telle que*

$$\| u(.,t) \|_\infty \leq C_1(t) \quad pour \ \ 0 \leq t \leq \widehat{T} \tag{2.1.20}$$

et des nombres positifs $L_1(r), M_1(r)$ *et* σ *tels que*

$$|g(u,v)| \leq L_1(r)|v|^\sigma + M_1(r) \quad pour\ tout\ (u,v) \in [0,\infty)^2 \ \ avec\ |u| \leq r \tag{2.1.21}$$

Alors $\widehat{T} = \infty$ *et ainsi* (u,v) *existe globalement.*

Preuve:

Pour la démonstration de ce théorème, voir [24] , page 373. ▪

■

Maintenant on établit le résultat du 3^{eme} cas.

Lemme 2.1.2

Sous les hypothèses (H_1), (H_2) *et* (2.1.8), *le système* (2.1.6) *admet une unique solution globale classique.*

Preuve:

L'hypothèse (H_2) implique que la norme L^1 de $u(t), v(t)$ est uniformément bornée sur le temps t.

En effet :

On somme les deux premières équations de (2.1.7), et on intègre sur Ω et compte tenu de $u = v = 0$ sur $\partial\Omega$, il vient :

$$\int_\Omega (u+v)_t dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega \big(u(t)+v(t)\big)dx \leq \int_\Omega (f+g)dx \leq 0.$$

En effet :

Lorsqu'on somme les deux équations de (2.1.7) et on intégre sur Ω, on obtient :

$$\int_\Omega (u_t + v_t)dx - a\int_\Omega \Delta u(x,t)dx - d\int_\Omega \Delta u(x,t)dx = \int_\Omega (f+g)dx.$$

D'où :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \big(u(t)+v(t)\big)dx - a\int_\Omega \Delta u(x,t)dx - d\int_\Omega \Delta u(x,t)dx = \int_\Omega (f+g)dx.$$

En intégrant par parties le deuxième terme et le troixième terme du premier membre de la dernière égalité , on obtient :
$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\big(u(t)+v(t)\big)dx + a\int_{\Omega} \mid \nabla u \mid^2 \, dx + d\int_{\Omega} \mid \nabla v \mid^2 \, dx - a\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \nu}d\sigma - d\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial \nu}d\sigma = \int_{\Omega}(f+g)dx.$
Comme $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ et $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ sont négatives, donc on en déduit que :
$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\big(u(t)+v(t)\big)dx \leq \int_{\Omega}(f+g)dx \leq 0$ (car $f+g\leq 0$).
Donc la fonction $t \to \int_{\Omega}\big(u(t)+v(t)\big)dx$ est décroissante.
Ainsi
$\forall t \in [0, T_{max}), \quad \int_{\Omega}\big(u(t)+v(t)\big)dx \leq \int_{\Omega}\big(u_0(x)+v_0(x)\big)dx.$
Et comme u et v sont nonnégatives, on en déduit qu'on a une estimation L^1 de la fonction $u(t)+v(t)$.
Il est connu que l'existence T_{max} dépend seulement des données initiales sur la norme L^∞. Plus précisément, l'existence globale ($T_{max}=+\infty$) aura lieu lorsque $u(t)$, $v(t)$ satisfont une estimation a priori L^∞ en temps.
Ici on a seulement une estimation a priori L^1.
Par conséquent l'existence globale ne peut se produire.
Donc dans ce cas la situation s'avère tout à fait plus compliquée, et l'existence globale n'est obtenue qu'au prix d'hypothèses supplémentaires. C'est par exemple, on rajoute également aux conditions (H_1) et (H_2) une extrat information :

$$(\mathbf{H_3}) \quad f \leq 0$$

Et par conséquent si, une des deux composantes dite u est a priori connue pour être bornée sous l'hypothèse (H_3) et les non-linéarités sont à croissance plynomiale, alors l'autre composante v est aussi uniformément bornée, et l'existence globale s'ensuit.
l'estimation uniforme sur u alors vient d'aprés le principe du maximum sur la première équation du système (2.1.7) :

$$u_t - a\Delta u = f(x,t,u,v)$$

En effet :
D'aprés (H_3) on a :

$$u_t - a\Delta u \leq 0$$

On applique le principe du maximum, on obtient :

$$\parallel u(t) \parallel_{\infty,\Omega} \leq \parallel u_0 \parallel_{\infty,\Omega}.$$

Il nous reste d'obtenir une estimation a priori L^∞ de v sur Q_T pour obtenir l'existence globale de (2.1.6).
L'existence globale pour le système (2.1.6) nécessite donc l'adjonction d'hypothèses supplémentaires sur les non-linéarités.
Si par exemple la fonction g a de plus une croissance polynomiale, c'est à dire :

$$\begin{aligned}
&\exists L_1(r) > 0, M_1(r) > 0 \textit{ et } \sigma > 0 \textit{ tels que} \\
&|g(u,v)| \leq L_1(r)|v|^\sigma + M_1(r) \textit{ pour tout } (u,v) \in [0,\infty) \textit{ avec } |u| \leq r
\end{aligned} \tag{2.1.22}$$

Il suffit de prendre dans le système (2.1.15) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et $A^1 = A^2 = \Delta$. Et comme $\| u(t) \|_{\infty,\Omega} \leq C$, où C est une constante positive, et sous l'hypothèse (2.1.23), on applique le théorème (2.1.31), on obtient l'existence globale classique de la solution (u,v) du système (2.1.6). ▪

■

Chapitre 3

ETUDE D'UN SYSTEME DE REACTION-DIFFUSION COUPLE

Introduction

Le but de ce chapitre est d'établir l'existence globale en temps ou l'explosion en temps fini des solutions du système de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = f(x,t,u,v), & \text{sur } Q \\ v_t - c\Delta u - d\Delta v = g(x,t,u,v), & \text{sur } Q \\ u = v = 0, & \text{sur } \Gamma \\ u(x,0) = u_0(x) \quad ; \quad v(x,0) = v_0(x), & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Où :

Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\partial\Omega$,

a, c et d sont des constantes telles que $a > 0$, $d > 0$, $c \in \mathbb{R}$, dites les coefficients de diffusion et f , g sont des fonctions dites termes de réaction.

Une question importante est la suivante :

Chercher des nonlinéarités "naturelles" qui permettent d'établir l'existence globale pour le système couplé $\big($c'est à dire le système précédent avec $c \neq 0\big)$.

Il est classique que le système précédent possède des solutions locales en temps, ceci découle du théorème d'existence locale cité au chapitre 2.

Notre but est de comprendre comment les résultats connus (plus haut dans le chapitre 2, cas diagonal) s'étendent à la situation non diagonale (triangulaire). Une première différence principale doit être prise en considération :

En effet, il est bien connu que lorsque le système est non diagonal ($c \neq 0$), le cône

positif des solutions (u, v) n'est pas en général invariant, même dans le cas des EDP linéaires, (voir [13]). Par conséquent, l'étude des solutions positives telle que stipulée par l'hypothèse (H_1) tombe en défaut.
Les hypothèses naturelles seraient les suivantes :

$$(\mathbf{H_3'}) \quad sign(u)\, f \leq 0$$

et

$$(\mathbf{H_2'}) \quad sign(u) f + sign(v) g \leq 0$$

3.1 Position du problème

Nous considérons le problème de réaction-diffusion suivant

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = f(x,t,u,v), & \text{sur } Q \\ v_t - c\Delta u - d\Delta v = g(x,t,u,v), & \text{sur } Q \\ u = v = 0, & \text{sur } \Gamma \\ u(x,0) = u_0(x) \quad ; \quad v(x,0) = v_0(x), & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{3.1.1}$$

$$a\,,\; d > 0\,,\; c \in \mathbb{R} \tag{3.1.2}$$

$$u_0\ ,\ v_0 \in L^\infty(\Omega) \tag{3.1.3}$$

$f, g : \Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont mesurables sur $\overline{\Omega} \times [0, \infty)^3$ et continuement localement lipschitziennes en u et v, à savoir :

$$\begin{array}{l} p.p.\,(x,t) \in \Omega \times [0,\infty), \forall\ r > 0 : 0 \leq |u|, |\hat{u}|, |v|, |\hat{v}| \leq r,\ \exists K(r) > 0 : \\ \big|f(x,t,u,v) - f(x,t,\hat{u},\hat{v})\big| + \big|g(x,t,u,v) - g(x,t,\hat{u},\hat{v})\big| \leq K(r)(|u-\hat{u}| + |v-\hat{v}|). \end{array} \tag{3.1.4}$$

Maintenant on passe aux hypothèses de structure sur les termes non-linéaires f et g.

$$p.p.\,(x,t) \in \Omega \times (0,\infty) \textit{ et pour tout } (u,v) \in \mathbb{R}^2, (sign\, u) f(x,t,u,v) \leq 0 \tag{3.1.5}$$

• En vertu du principe du maximum, l'hypothèse (3.1.5) implique une estimation a priori L^∞ sur u (c.à.d : $\| u \|_{L^\infty(Q_T)} \leq C$, avec C une constante positive).

$$\begin{aligned} &\mathit{Il\ existe}\ \alpha > 0\ ,\ \mathit{tel\ que\ p.p.}\,(x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \mathit{et\,pour\,tout}\,(u,v) \in \mathbb{R}^2 \\ &(\mathit{sign}\,u) f(x,t,u;v) + \alpha(\mathit{sign}\,v) g(x,t,u;v) \leq 0. \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Ici la fonction *sign* est définie comme usuellement par :

$$\mathit{sign}\,t = \begin{cases} \text{-1} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si t=0} \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Finalement, nous supposons une condition de croissance polynomiale sur f, g : c'est une hypothèse sur les signes de f et g par rapport à ceux des arguments u et v.

$$\begin{aligned} &\mathit{Il\ existe}\ L(r), M(r) > 0\,,\ \sigma \geq 1\ \mathit{tel\ que\ p.p}\ (x,t) \in \Omega \times (0,\infty)\ \mathit{et\ pour\ tout} \\ &(u,v) \in \mathbb{R}^2\ , |u| \leq r\ , |f(x,t,u,v)| + |g(x,t,u,v)| \leq L(r)|v|^\sigma + M(r). \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Remarque 3.1.1

Pour le résultat principal de ce travail, les conditions (3.1.5) *et* (3.1.6) *ont pu être affaiblies, par exemple, en remplaçant les membres de droite par des combinaisons linéaires de u et v (voir*[18]*).*

les diffusions ont pu également être remplacées par les plus générales. par exemple nous nous référons également à [18] *pour plus de détails et discussions.*

Il est standard (voir $[10, 9]$ *ou bien chapitre 1 Précédemment) que le système* (3.0.1) *possède une solution unique classique locale sur l'intervalle* $(0, T)$*. De plus, d'aprés le théorème d'existence locale pour les solutions classiques, le temps maximal d'existence T_{max} est caractérisé par :*

$\Big(\forall t \in (0, T_{max}), \| u(t) \|_\infty + \| v(t) \|_\infty \leq C\Big) \Rightarrow \Big(T_{max} = +\infty\Big).$

Par conséquent, pour montrer l'existence globale des solutions classiques, il suffit de prouver qu'elles restent bornées sur $(0, T_{max})$ *(en plus* $[10, 9]$*,voir aussi, e.g., les livres qui traitent les systèmes de réaction-diffusion pour ce type des arguments* $[4, 6, 3]$ *).*

On rappelle que la solution classique du problème (3.1.1) *est un couple* (u, v) *tel que* $(u, v) \in W_p^{2,1}\Big(\Omega \times (\eta, T_{max} - \eta)\Big) \bigcap C\Big([0, T_{max})\,;\, L^p(\Omega)\Big).$

3.2 Le théorème Principal

Nous affirmons maintenant le résultat principal de ce travail.

Théorème principal :

Sous les hypothèses (3.1.2) - (3.1.7), *le système* (3.1.1) *possède une solution unique classique globale .*

PREUVE DU THEOREME PRINCIPAL :
Pour la démonstration de ce théorème, nous commençons d'abord par l'étude du système suivant défini pour tout T fini :

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = f(x,t,u,v), & \text{sur } Q_T \\ v_t - c\Delta u - d\Delta v = g(x,t,u,v), & \text{sur } Q_T \\ u = v = 0, & \text{sur } \Gamma_T \\ u(x,0) = u_0(x) \quad ; \quad v(x,0) = v_0(x), & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{3.2.8}$$

Remarque 3.2.1
La démonstration du théorème principal sera divisée en quatre étapes que l'on va les faire dans la suite.

Etape 1
Dans cette étape, on établit l'estimation dans $L^\infty(Q_T)$ de u. Pour cela nous commençons par le lemme suivant :

Lemme 3.2.1
Soit $\varepsilon > 0$ *.*
On considère la fonction régularisante h_ε *définie par :*

$$h_\varepsilon(t) = \sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon$$

La fonction h_ε *vérifie :*
(i) $h_\varepsilon \geq 0$.
(ii) h_ε *est convexe.*
(iii) *Pour tout* $t \in \mathbb{R}^*$ *:* $0 \leq h_\varepsilon(t) \leq |t|$.
(iv) $\forall t \in \mathbb{R}^*$: $h_\varepsilon(t) \to |t|$ *lorsque* ε *tend vers 0,* $h'_\varepsilon(t) \to sign(t)$ *lorsque* ε *tend vers 0.*
(v) $h_\varepsilon(u)$ *converge uniformément vers* $|u|$ *lorsque* ε *tend vers 0.*

Preuve:

(i) Montrons que : $h_\varepsilon \geq 0$.

On a :

$t^2+\varepsilon^2 \geq \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{t^2+\varepsilon^2} \geq \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon \Rightarrow \sqrt{t^2+\varepsilon^2} - \varepsilon \geq 0$

c'est à dire $h_\varepsilon(t) \geq 0$.

(ii) Montrons que h_ε est convexe :

Pour cela il suffit de montrer que $h''_\varepsilon(t) \geq 0$.

On a :

$$h'_\varepsilon(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}} \text{ , } h''_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{(t^2+\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \geq 0 \text{ (évidente).}$$

D'où la convexité de h_ε.

(iii) Montrons que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$: $0 \leq h_\varepsilon(t) \leq |t|$:

D'un côté, nous avons $h_\varepsilon(t) \leq |t|$.

Car :

$$h_\varepsilon(t) = \sqrt{t^2+\varepsilon^2} - \varepsilon = \frac{t^2}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}+\varepsilon}.$$

Donc

$$h_\varepsilon(t) \leq \frac{t^2}{\sqrt{t^2}} = \sqrt{\frac{t^4}{t^2}} = \sqrt{t^2} = |t|.$$

D'où

$$h_\varepsilon(t) \leq |t|.$$

Et d'un autre côté, d'aprés ce qui précéde nous avons :

$$h_\varepsilon(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \geq 0.$$

D'où

$$0 \leq h_\varepsilon(t) \leq |t|$$

(iv) Montrons que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* : \lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon(t) = |t| \text{ et } \lim_{\varepsilon \to 0} h'_\varepsilon(t) = sign(t)$$

On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^* : h_\varepsilon(t) \text{ tend vers } \sqrt{t^2} = |t| \text{ lorsque } \varepsilon \text{ tend vers } 0,$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R}^* : \lim_{\varepsilon \to 0} h'_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{t}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}} = \frac{t}{|t|} = sign(t).$$

(v) Montrons que $h_\varepsilon(u)$ converge uniformément vers $|u|$ lorsque ε tend vers 0 :

On a : $\Big| h_\varepsilon(u) - \mid u \mid \Big| = \Big| \sqrt{u^2+\varepsilon^2} - (\varepsilon - \mid u \mid) \Big| = \dfrac{2 \mid u \mid \varepsilon}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2} + \varepsilon + \mid u \mid} \leq 2\varepsilon \to 0$

.

■

Proposition 3.2.1

Soit (u,v) *la solution locale du système* (3.1.1). *Alors :*

$$\| u(t) \|_{\infty,\Omega} \leq \| u_0 \|_{\infty,\Omega} \quad \textit{pour tout } 0 \leq t \leq T_{max}$$

Preuve:

Tout d'abord nous prouvons que :

$\big(h_\varepsilon(u)\big)_t - a\Delta h_\varepsilon(u) = h'_\varepsilon(u) f(x,t,u,v) - a h''_\varepsilon(u)|\nabla u|^2.$

On a :

$$\big(h_\varepsilon(u)\big)_t = u_t h'_\varepsilon(u)$$

et nous avons aussi :

$$\Delta h_\varepsilon(u) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\big(h_\varepsilon(u)\big) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\frac{\partial}{\partial x_i}\big(h_\varepsilon(u)\big)\Big] =$$
$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\frac{\partial u}{\partial x_i} h'_\varepsilon(u)\Big] = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i} h'_\varepsilon(u) + \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)^2 h''_\varepsilon(u) = (\Delta u) h'_\varepsilon(u) + |\nabla u|^2 h''_\varepsilon(u).$$

D'où

$\Big(h_\varepsilon(u)\Big)_t - a\Delta h_\varepsilon(u) = u_t h'_\varepsilon(u) - a h'_\varepsilon(u)(\Delta u) - a h''_\varepsilon(u)|\nabla u|^2.$

La première équation du système (3.2.8) est équivalente à :

$$u_t = a\Delta u + f(x,t,u,v).$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned}\Big(h_\varepsilon(u)\Big)_t - a\Delta h_\varepsilon(u) &= \Big[a\Delta u + f(x,t,u,v)\Big] h'_\varepsilon(u) - a h'_\varepsilon(u)(\Delta u) - a h''_\varepsilon(u)|\nabla u|^2 \\ &= a h'_\varepsilon(u)(\Delta u) + h'_\varepsilon(u) f(x,t,u,v) - a h'_\varepsilon(u)(\Delta u) - a h''_\varepsilon(u)|\nabla u|^2.\end{aligned}$$

D'où :

$\Big(\mathrm{h}_\varepsilon(u)\Big)_t - a\Delta h_\varepsilon(u) = h'_\varepsilon(u) f(x,t,u,v) - a h''_\varepsilon(u)|\nabla u|^2.$

Comme h_ε est convexe, régulière, $|\nabla u|^2 > 0$ et $a > 0$, alors

$$a h''_\varepsilon(u)|\nabla u|^2 > 0.$$

Nous obtenons :

$$\Big(h_\varepsilon(u)\Big)_t - a\Delta h_\varepsilon(u) \leq h'_\varepsilon(u) f(x,t,u,v) \tag{3.2.9}$$

Or

$$h'_\varepsilon(u) f(x,t,u,v) = \frac{u}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}} f(x,t,u,v).$$

En vertu de (3.1.5) il vient :

$$\Big(h_\varepsilon(u)\Big)_t - a\Delta h_\varepsilon(u) \leq \frac{u}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}} f(x,t,u,v) \leq \frac{u}{|u|} f(x,t,u,v).$$

Et on a :

$$\frac{u}{|u|} f(x,t,u,v) = (sign\, u) f(x,t,u,v) \leq 0.$$

D'où

$$\Big(h_\varepsilon(u)\Big)_t - a\Delta h_\varepsilon(u) \leq 0.$$

Comme $h_\varepsilon(u) = 0$ sur la frontière $\partial\Omega \times (0,T)$, il en résulte par application du principe du maximum l'estimation suivante :

$$\| h_\varepsilon(u)(t) \|_{\infty,\Omega} \leq \| h_\varepsilon(u)(0) \|_{\infty,\Omega} \leq \| u_0 \|_{\infty,\Omega} \ \text{ pour } 0 \leq t < T_{max}$$

(car d'aprés ce qui précéde $|h_\varepsilon(u)| \leq |u|$).
De plus, $h_\varepsilon(u)$ converge uniformément vers $|u|$ lorsque ε tend vers 0, ainsi on aura :

$$\| u(t) \|_{\infty,\Omega} \leq \| u_0 \|_{\infty,\Omega}, \quad \textit{pourtout} \ \ 0 \leq t \leq T_{max} \tag{3.2.10}$$

.

■

Dans la suite on s'intéresse à l'estimation de la deuxième composante v dans $L^\infty(Q_T)$. Pour cela on procède aux étapes 2, 3 et 4 ci-dessous.

Etape 2

On établit le résultat suivant :

Lemme 3.2.2

Soit u la première composante de la solution locale du système (3.2.8), $f(x,t,.,.) \in L^{\frac{p}{\sigma^2}}(Q_T)$. *Soit σ un nombre réel tel que $\sigma \geq 1$.*
Si pour tout $p \in (\sigma^2, +\infty)$, alors :

$$\Delta u \in L^{\frac{p}{\sigma^2}}(Q_T).$$

Preuve:

La première équation du système (3.2.8) est : $u_t - a\Delta u = f(x,t,u,v)$.

On a :

$$\| u \|_{W^{2,1}_{\frac{p}{\sigma^2}}(Q_T)} \leq C \| f \|_{\frac{p}{\sigma^2},Q_T}.$$

Et on sait que :

$$\| u \|_{W^{2,1}_{p}(Q_T)} = \| u \|_{p,Q_T} + \| D_x u \|_{p,Q_T} + \| D_x^2 u \|_{p,Q_T} + \| u_t \|_{p,Q_T}$$

Donc

$$\| D_x^2 u \|_{\frac{p}{\sigma^2},Q_T} \leq C \| f \|_{\frac{p}{\sigma^2},Q_T}.$$

Et par conséquent :

$$\| \Delta u \|_{\frac{p}{\sigma^2},Q_T} \leq C \| f \|_{\frac{p}{\sigma^2},Q_T}.$$

Comme $\quad f \in L^{\frac{p}{\sigma^2}}(Q_T)$, alors,

$$\Delta u \in L^{\frac{p}{\sigma^2}}(Q_T).$$

.

$$\blacksquare$$

Lemme 3.2.3

Soit (u,v) *la solution locale du système* (3.2.8)*. Sous l'hypothèse* (3.1.5) *et l'inégalité* (3.2.9)*, on a :*

$$|h'_\varepsilon(u) f(x,t,u,v)| \leq -\big(h_\varepsilon(u)\big)_t + a\Delta h_\varepsilon(u)$$

Preuve:

D'une part on a :

$$\Big(h_\varepsilon(u)\Big)_t - a\Delta h_\varepsilon(u) \leq h'_\varepsilon(u) f(x,t,u,v).$$

Et d'autre part on a :

$h'_\varepsilon(u) f(x,t,u,v) = \dfrac{u}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}} f(x,t,u,v) = \dfrac{|u|}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}} (sign\, u) f(x,t,u,v).$

Tenant compte que $u = (sign\, u)|u|$, donc en vertu de (3.1.5) on en déduit que :

$$h'_\varepsilon(u) f(x,t,u,v) \leq 0.$$

Et on a trouvé auparavant que :

$$\Big(h_\varepsilon(u)\Big)_t - a\Delta h_\varepsilon(u) \leq 0.$$

Ceci implique que :

$$-\Big(h_\varepsilon(u)\Big)_t + a\Delta h_\varepsilon(u) \geq 0$$

D'où :

$$h'_\varepsilon(u) f(x,t,u,v) \leq -\Big(h_\varepsilon(u)\Big)_t + a\Delta h_\varepsilon(u). \tag{3.2.11}$$

En vertu de (3.2.9) et (3.2.11), on conclut que :

$$\Big(h_\varepsilon(u)\Big)_t - a\Delta h_\varepsilon(u) \ \leq\ h'_\varepsilon(u) f(x,t,u,v) \ \leq\ -\Big(h_\varepsilon(u)\Big)_t + a\Delta h_\varepsilon(u).$$

C'est à dire :

$$\Big|h'_\varepsilon(u) f(x,t,u,v)\Big| \ \leq\ -\Big(h_\varepsilon(u)\Big)_t + a\Delta h_\varepsilon(u) \tag{3.2.12}$$

.

■

On va estimer maintenant $f(x,t,u,v)$ par dualité.
Pour cela on établit le résultat suivant :

Proposition 3.2.2
Soit le problème adjoint

$$\begin{cases} -\phi_t - d\Delta\phi = \theta, & \text{sur } Q_T \\ \phi = 0, & \text{sur } \Gamma_T \\ \phi(.,T) = 0, & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{3.2.13}$$

du problème suivant :

$$\begin{cases} u_t - d\Delta u = \theta, & \text{sur } Q_T \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_T \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

où $\theta \in C_0^\infty(Q_T)$ *,* $\theta \geq 0$ *,* $T = T_{max}$ *, et* ϕ *une solution nonnégative du problème* (3.2.13)*, alors :*

$$\int_{Q_T} |f(x,t,u,v)|\phi(x,t)dxdt \leq C \parallel u_0 \parallel_{\infty,\Omega} \parallel \theta \parallel_{q,Q_T}$$

Preuve:

Pour la démonstration de la proposition (3.2.2), on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2.4 (régularité $\mathbf{L^p}$)

Soit $\theta \in C_0^\infty(Q_T)$, $\theta \geq 0$ et ϕ une solution positive de

$$\begin{cases} -\phi_t - d\Delta\phi = \theta, & \text{sur } Q_T \\ \phi = 0, & \text{sur } \Gamma_T \\ \phi(.,T) = 0, & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Ce problème possède une unique solution positive.

De plus, pour tout $1 < q < \infty$, il existe une constante C indépendante de θ telle que,

$$\parallel \phi \parallel_{W_q^{2,1}(Q_T)} + \parallel \phi(.,0) \parallel_{q,\Omega} \leq C \parallel \theta \parallel_{q,Q_T} \tag{3.2.14}$$

où

$$W_q^{2,1}(Q_T) = \Big\{\phi \in L^q(Q_T); \phi_t, \phi_{x_i}, \phi_{x_i x_j} \in L^q(Q_T)\Big\}$$

Preuve:

Voir [21]. ▪

■

Preuve de la proposition 3.2.2 :

Multiplions l'inégalité (3.2.12) par la solution ϕ de (3.2.13), et on intégre par parties sur Q_T, on aura :

$\displaystyle\int_{Q_T} \Big|h'_\varepsilon(u)f(x,t,u,v)\Big|\phi(x,t)\,dx\,dt \leq \int_{Q_T} -\Big(h_\varepsilon(u)\Big)_t\phi(x,t)\,dx\,dt + a\int_{Q_T} \Delta h_\varepsilon(u)\phi(x,t)\,dx\,dt.$

On a :

$\displaystyle\int_{Q_T} -\Big(h_\varepsilon(u)\Big)_t\phi\,dx\,dt = \int_\Omega \Big(-\int_0^T \Big(h_\varepsilon(u)\Big)_t\phi\,dt\Big)\,dx = \int_\Omega \Big[\int_0^T h_\varepsilon(u)\phi_t\,dt - h_\varepsilon\big(u(x,0)\big)\phi(x,0)\Big]\,dx =$
$\displaystyle\int_{Q_T} h_\varepsilon(u)\phi_t\,dx\,dt - \int_\Omega h_\varepsilon(u_0)\phi(x,0)\,dx \qquad \big(\text{ car } \phi(.,T) = 0\ \big).$

Et on a aussi :

$\displaystyle a\int_{Q_T} \Delta h_\varepsilon(u)\phi(x,t)\,dx\,dt = a\int_0^T \Big[\int_\Omega \Delta h_\varepsilon(u)\phi(x,t)dx\Big]\,dt = a\int_0^T \Big[\int_\Omega h_\varepsilon(u)\Delta\phi\,dx\Big]\,dt =$
$\displaystyle a\int_{Q_T} h_\varepsilon(u)\Delta\phi\,dx\,dt$ (car $\phi = 0$ sur Γ_T).

Donc :

$$\int_{Q_T} |h'_\varepsilon(u) f(x,t,u,v)|\phi(x,t)\,dx\,dt \leq \int_{Q_T} h_\varepsilon(u)\Big[\phi_t + a\Delta\phi(x,t)\Big]\,dx\,dt - \int_\Omega h_\varepsilon(u_0)\phi(x,0)dx.$$

Maintenant, en faisant tendre ε vers 0, et en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue on obtient :

$$\int_{Q_T} |f(x,t,u,v)|\phi(x,t)\,dx\,dt \;\leq\; \int_{Q_T} |u(x,t)|\Big(\phi_t(x,t) + a\Delta\phi(x,t)\Big)\,dx\,dt + \int_\Omega |u_0(x)|\phi(x,0)\,dx,$$

avec $q = \dfrac{p}{p-1}$, $p \in (\,1, \infty\,)$.

En utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons :

$$\int_{Q_T} |f(x,t,u,v)|\phi(x,t)\,dx\,dt \;\leq \parallel u \parallel_{p,Q_T} \parallel \phi_t \parallel_{q,Q_T} + a \parallel u \parallel_{p,Q_T} \parallel \Delta\phi \parallel_{q,Q_T}$$

$$+ \parallel u_0 \parallel_{p,\Omega} \parallel \phi(.,0) \parallel_{q,\Omega} \leq \parallel u \parallel_{p,Q_T} \parallel \phi \parallel_{W_q^{2,1}(Q_T)} + a \parallel u \parallel_{p,Q_T} \parallel \phi \parallel_{W_q^{2,1}(Q_T)}$$

$$+ \parallel u_0 \parallel_{p,\Omega} \parallel \phi(.,0) \parallel_{q,\Omega} = (1+a) \parallel u \parallel_{p,Q_T} \parallel \phi \parallel_{W_q^{2,1}(Q_T)} + \parallel u_0 \parallel_{p,\Omega} \parallel \phi(.,0) \parallel_{q,\Omega}.$$

D'où :

$$\int_{Q_T} |f(x,t,u,v)|\phi(x,t)\,dx\,dt \;\leq\; (1+a) \parallel u \parallel_{p,Q_T} \parallel \phi \parallel_{W_q^{2,1}(Q_T)} + \parallel u_0 \parallel_{p,\Omega} \parallel \phi(.,0) \parallel_{q,\Omega}.$$

Grâce à (3.2.10) et (3.2.14) il s'ensuit

$$\int_{Q_T} |f(x,t,u,v)|\phi(x,t)\,dx\,dt \;\leq\; C(1+a) \parallel u(t) \parallel_{\infty,Q_T} \parallel \theta \parallel_{q,Q_T} + C \parallel u_0 \parallel_{\infty,\Omega} \parallel \theta \parallel_{q,Q_T}.$$

Car :

$$\parallel u \parallel_{p,Q_T} \;\leq\; C \parallel u(t) \parallel_{\infty,Q_T} \quad \text{et} \parallel u_0 \parallel_{p,\Omega} \;\leq\; C \parallel u_0 \parallel_{\infty,\Omega}.$$

D'où :

$$\int_{Q_T} |f(x,t,u,v)|\phi(x,t)\,dx\,dt \;\leq\; C(1+a) \parallel u_0 \parallel_{\infty,\Omega} \parallel \theta \parallel_{q,Q_T} + C \parallel u_0 \parallel_{\infty,\Omega} \parallel \theta \parallel_{q,Q_T}$$

$$= C' \parallel u_0 \parallel_{\infty,\Omega} \parallel \theta \parallel_{q,Q_T}.$$

Où

$$C' = C(2+a).$$

Donc :

$$\int_{Q_T} |f(x,t,u,v)|\phi(x,t)\,dx\,dt \;\leq\; C' \parallel u_0 \parallel_{\infty,\Omega} \parallel \theta \parallel_{q,Q_T} \tag{3.2.15}$$

.

■

Par ailleurs, on établit le résultat suivant :

Proposition 3.2.3

Soit z la solution du système suivant :

$$\begin{cases} z_t - d\Delta z = c\Delta u, & \text{sur } Q_T \\ z = 0, & \text{sur } \Gamma_T \\ z(x,0) = v_0(x), & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{3.2.16}$$

avec $T = T_{max}$ *,* $u \in C^{2,1}(Q_T)$ *est la première composante de la solution locale du système* (3.2.8)*,* v_0 *la donnée initiale et c est le coefficient figurant dans le système* (3.2.8)*. Alors pour tout* $p \in (1\,,\,\infty)$ *, il existe une constante* $C > 0$ *telque :*

$$\| z \|_{L^p(Q_T)} \leq C \Big[\| u_0 \|_{\infty,\Omega} + \| v_0 \|_{\infty,\Omega} \Big] \tag{3.2.17}$$

Remarque 3.2.2

la solution z du système (3.2.16) avec $T = T_{max}$ *existe en tant que solution de l'équation de la chaleur.*

Preuve: $\big($ **de la proposition (3.2.3)** $\big)$

Notons d'abord que la solution classique z de (3.2.16) existe au moins quand la donnée initiale u_0 est régulière puisque Δu est alors dans $L^p_{loc}\Big(\big[0\,,\,T_{max}\big)\,,\,L^p(\Omega)\Big)$, pour tout $1 < p < \infty$.

En régularisant u_0 si nécessaire, il est suffisant de prouver l'inégalité (3.2.17) pour u_0 régulière.

Soit $\theta \in C_0^\infty(Q_T), \theta \geq 0$, et soit ϕ la solution non-négative du système (3.2.13).

Multiplions la première équation du système (3.2.16) par la fonction ϕ, et on intègre par parties sur Q_T, alors,

$$-\int_{Q_T} \phi_t(x,t) z(x,t)\,dx\,dt - \int_\Omega \phi(x,0) v_0\,dx - d\int_{Q_T} z(x,t)\Delta\phi(x,t)\,dx\,dt = c\int_{Q_T} u(x,t)\Delta\phi(x,t)\,dx\,dt.$$

En effet :

On a :

$$\int_{Q_T} z_t(x,t)\phi(x,t)\,dx\,dt - d\int_{Q_T} \Delta z(x,t)\phi(x,t)\,dx\,dt = c\int_{Q_T} \Delta u(x,t)\phi(x,t)\,dx\,dt$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\int_\Omega \Big[-\int_0^T z(x,t)\phi_t(x,t)\,dt + z(x,T)\phi(x,T) - z(x,0)\phi(x,0)\Big]\,dx - d\int_0^T \Big[\int_\Omega z(x,t)\Delta\phi(x,t)\,dx\Big]\,dt$$
$$= c\int_{Q_T} u(x,t)\Delta\phi(x,t)\,dx\,dt$$

ce qui est équivalent à :

$$-\int_\Omega\int_0^T z(x,t)\phi_t(x,t)\,dx\,dt - \int_\Omega v_0(x)\phi(x,0)\,dx - d\int_{Q_T} z(x,t)\Delta\phi(x,t)\,dx\,dt$$
$$= c\int_{Q_T} u(x,t)\Delta\phi(x,t)\,dx\,dt.\ \Big(\text{Car } \phi(x,T) = 0 \ \text{ et } \ z(x,0) = v_0(x)\Big).$$

Ce qui est équivalent aussi à :

$$\int_{Q_T} z(x,t)\big[-\phi_t(x,t) - d\Delta\phi(x,t)\big]\,dx\,dt - \int_\Omega v_0(x)\phi(x,0)\,dx = c\int_{Q_T} u(x,t)\Delta\phi(x,t)\,dx\,dt.$$

Maintenant nous utilisons la définition de ϕ :

Comme ϕ est une solution de (3.2.13), alors

$$-\phi_t - d\Delta\phi \,=\, \theta \text{ sur } Q_T.$$

D'où, en remplaçant dans le premier terme de la dernière égalité, on aura

$$\int_{Q_T} \theta(x,t)\, z(x,t)\, dx\, dt \,=\, \int_{\Omega} \phi(x,0) v_0(x)\, dx \,+\, c \int_{Q_T} u(x,t) \Delta\phi(x,t)\, dx\, dt \tag{3.2.18}$$

Soit $p \in \big(1\,,\,\infty\big)$ et $q \,=\, \dfrac{p}{p-1}$.
On utilise l'inégalité (3.2.14) , on en déduit de l'égalité (3.2.18) que :
$\Big|\displaystyle\int_{Q_T} \theta(x,t)\, z(x,t)\, dx\, dt\Big| \leq C\Big[\, \| \, v_0 \,\|_{p,\Omega} \,+\, \| \, u \,\|_{p,Q_T} \,\Big] \, \| \, \theta \,\|_{q,Q_T}.$
En effet :
$\Big|\displaystyle\int_{Q_T} \theta(x,t)\, z(x,t)\, dx\, dt\Big| \leq \displaystyle\int_{\Omega} |\phi(x,0)|\, |v_0(x)|\, dx \,+ c \displaystyle\int_{Q_T} |u(x,t)|\, |\Delta\phi(x,t)|\, dx\, dt.$
Utilisons l'inégalité de Hölder, on trouve :
$\Big|\displaystyle\int_{Q_T} \theta(x,t)\, z(x,t)\, dx\, dt\Big| \leq \| \, \phi(.,0) \,\|_{q,\Omega} \| \, v_0 \,\|_{p,\Omega} \,+ c \,\| \, u \,\|_{p,\Omega} \| \, \Delta\phi \,\|_{q,Q_T}$
$\leq \| \, \phi \,\|_{W_q^{2,1}(Q_T)} \| \, v_0 \,\|_{p,\Omega} \,+ c \,\| \, u \,\|_{p,\Omega} \| \, \phi \,\|_{W_q^{2,1}(Q_T)} = \| \, \phi \,\|_{W_q^{2,1}(Q_T)} \big(\, \| \, v_0 \,\|_{p,\Omega} \,+ c \,\| \, u \,\|_{p,\Omega} \,\big).$
Et en vertu de (3.2.14),
$\Big|\displaystyle\int_{Q_T} \theta(x,t)\, z(x,t)\, dx\, dt\Big| \leq \, C \,\| \, \theta \,\|_{q,Q_T} \, \sup(1,c) \Big[\, \| \, v_0 \,\|_{p,\Omega} \,+\, \| \, u \,\|_{p,\Omega} \,\Big].$
Mais nous avons :

$$\| \, u \,\|_{p,\Omega} \leq \| \, u \,\|_{\infty,\Omega}.$$

Donc nous obtenons :

$$\Big|\int_{Q_T} \theta(x,t)\, z(x,t)\, dx\, dt\Big| \leq \, C' \,\| \, \theta \,\|_{q,Q_T} \, \Big(\, \| \, u \,\|_{\infty,\Omega} + \| \, v \,\|_{\infty,\Omega} \,\Big).$$

Et grâce à l'inégalité (3.2.10), il s'ensuit que :

$$\Big|\int_{Q_T} \theta(x,t)\, z(x,t)\, dx\, dt\Big| \leq \, C' \, \| \, \theta \,\|_{q,Q_T} \, \Big[\, \| \, u_0 \,\|_{\infty,\Omega} \,+\, \| \, v_0 \,\|_{\infty,\Omega} \,\Big].$$

Par dualité on en déduit que :

$$\| \, z \,\|_{L^p,Q_T} \leq \, C'\Big[\, \| \, v_0 \,\|_{\infty,\Omega} \,+\, \| \, u_0 \,\|_{\infty,\Omega} \,\Big] \quad \forall p : 1 < p < \infty.$$

En effet :

On a :

$$\Big|\int_{Q_T} \theta(x,t)\, z(x,t)\, dx\, dt\Big| = \Big| < z, \theta >_{L^p(Q_T),L^q(Q_T)} \Big|.$$

Et nous savons que :

$$||z||_{L^p} = \sup_{||\theta||_{q,Q_T} \leq 1} \Big| < z, \theta >_{L^p(Q_T),L^q(Q_T)} \Big|.$$

D'où :

$$||z||_{L^p} \leq \sup_{||\theta||_{q,Q_T} \leq 1} C' \parallel \theta \parallel_{q,Q_T} \Big[\parallel u_0 \parallel_{\infty,\Omega} + \parallel v_0 \parallel_{\infty,\Omega} \Big]$$
$$\leq C' \Big[\parallel u_0 \parallel_{\infty,\Omega} + \parallel v_0 \parallel_{\infty,\Omega} \Big].$$

C'est à dire :

$$||z||_{L^p,Q_T} \leq C' \Big[\parallel u_0 \parallel_{\infty,\Omega} + \parallel v_0 \parallel_{\infty,\Omega} \Big] \quad , \quad \forall p : 1 < p < \infty.$$

▪

■

Etape 3 :

Dans ce qui suit, on va montrer que la deuxième composante de la solution (u, v) du système (3.2.8) est dans $L^{\frac{p}{\sigma}}(Q_T)$.

Tout d'abord, nous donnons la remarque suivante :

Remarque 3.2.3

En écrivant : $v = (v - z) + z$

Dans l'étape 2, proposition (3.2.3) *nous avons montré que* $z \in L^p(Q_T)$.

Donc, pour montrer que la fonction v *est dans* $L^{\frac{p}{\sigma}}(Q_T)$, *il suffit d'établir que la fonction* $v - z$ *est dans* $L^{\frac{p}{\sigma}}(Q_T)$ *.*

C'est pour ça, nous commençons par la proposition suivante, où on établira que :

$$v - z \in L^{\frac{p}{\sigma}}(Q_T).$$

Proposition 3.2.4

On considère le système (3.2.8) *, et* (u, v) *sa solution locale et supposons que* $g(x, t, u, v) \geq 0$.

Soit $\sigma \geq 1$*.Alors :*

Pour tout $p \in (\sigma, \infty)$, *on a :*

$$v - z \in L^{\frac{p}{\sigma}}(Q_T)$$

Preuve:

On retranche l'équation en z du système (3.2.16) rappelé ci-dessous de l'équation en v du système (3.2.8) rappelé aussi ci-dessous :

C'est à dire on retranche l'équation en z du système suivant :

$$\begin{cases} z_t - d\Delta z = c\Delta u, & \text{sur } Q_T \\ z = 0, & \text{sur } \Gamma_T \\ z(x, 0) = v_0(x), & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

de l'équation en v du système suivant :

$$\begin{cases} v_t - c\Delta u - d\Delta v = g(x,t,u,v), & \text{sur } Q_T \\ v = 0, & \text{sur } \Gamma_T \\ v(x,0) = v_0(x), & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} (v-z)_t - d\Delta(v-z) = g(x,t,u,v), & \text{sur } Q_T \\ v - z = 0, & \text{sur } \Gamma_T \\ (v-z)(x,0) = 0, & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Nous avons l'équation :

$$\big(v-z\big)_t - d\Delta\big(v-z\big) = g(x,t,u,v).$$

Et on a trouvé dans l'étape 1 (l'inégalité (3.2.9)) que :

$$\big(h_\varepsilon(u)\big)_t - a\Delta h_\varepsilon(u) \leq h'_\varepsilon(u) f(x,t,u,v)$$

Ainsi, nous avons :

$$\big(h_\varepsilon(v-z)\big)_t - d\Delta h_\varepsilon(v-z) \leq h'_\varepsilon(v-z) g(x,t,u,v) \tag{3.2.19}$$

Où $h'_\varepsilon(v-z) = \dfrac{v-z}{\sqrt{(v-z)^2+\varepsilon^2}} = \dfrac{|v-z| sign(v-z)}{\sqrt{(v-z)^2+\varepsilon^2}}$.
Car on sait que : $|k| sign(k) = k$.
Or :

$$sign(v-z) = \begin{cases} sign\, v, & si \quad |v| \geq |z| \\ -sign\, z, & si \quad |v| \leq |z| \end{cases}$$

Maintenant pour $|v| \geq |z|$, nous utilisons (3.1.5), (3.1.6) et (3.2.19) pour obtenir

$$\big(h_\varepsilon(v-z)\big)_t - d\Delta h_\varepsilon(v-z) \leq \frac{1}{\alpha} |f(x,t,u,v)| \tag{3.2.20}$$

En effet :

L'inégalité (3.1.6) est équivalente à :

$$(sign\, v) g(x,t,u,v) \leq -\frac{1}{\alpha}(sign\, u) f(x,t,u,v).$$

D'autre part :

$$h'_\varepsilon(v-z) = \frac{|v-z|}{\sqrt{(v-z)^2+\varepsilon^2}} sign\,(v-z).$$

$\bullet Si$ |v|$\geq |z|$ on a :

$$sign\,(v-z) = sign\,v.$$

D'où :

$$h'_\varepsilon(v-z) \leq sign\,(v-z) = sign\,v.$$

Donc :
$\big(h_\varepsilon(v-z)\big)_t - d\Delta h_\varepsilon(v-z) \leq (sign\,v)g(x,t,u,v) \leq -\dfrac{1}{\alpha}(sign\,u)f(x,t,u,v).$
Et nous avons :

$$-\frac{1}{\alpha}(sign\,u)f(x,t,u,v) \leq \frac{1}{\alpha}|f(x,t,u,v)|.$$

D'où :

$$\big(h_\varepsilon(v-z)\big)_t - d\Delta h_\varepsilon(v-z) \leq \frac{1}{\alpha}|f(x,t,u,v)|.$$

Maintenant pour $|v| \leq |z|$, nous utilisons (3.1.7) et (3.2.19) nous obtenons

$$\big(h_\varepsilon(v-z)\big)_t - d\Delta h_\varepsilon(v-z) \leq L|z|^\sigma + M. \tag{3.2.21}$$

En effet :
$\bullet Si$|v| $\leq |z|$ alors,

$$sign\,(v-z) = -sign\,z.$$

On a :
$\big(h_\varepsilon(v-z)\big)_t - d\Delta h_\varepsilon(v-z) \leq h'_\varepsilon(v-z)g(x,t,u,v) \leq (-sign\,z)g(x,t,u,v) \leq |g(x,t,u,v)| \leq |f(x,t,u,v)| + |g(x,t,u,v)|$.
Et grâce à l'hypothèse de croissance polynomiale (3.1.7), on obtient :

$$\big(h_\varepsilon(v-z)\big)_t - d\Delta h_\varepsilon(v-z) \leq L(r)|z|^\sigma + M(r).$$

En additionnant (3.2.19) et (3.2.20) nous obtenons :

$$2\Big[\big(h_\varepsilon(v-z)\big)_t - d\Delta h_\varepsilon(v-z)\Big] \leq \frac{1}{\alpha}|f(x,t,u,v)| + L|z|^\sigma + M.$$

C'est à dire :

$$\big(h_\varepsilon(v-z)\big)_t - d\Delta h_\varepsilon(v-z) \leq \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{\alpha}|f(x,t,u,v)| + L|z|^\sigma + M\Big]$$

D'où :

$$\big(h_\varepsilon(v-z)\big)_t - d\Delta h_\varepsilon(v-z) \leq \frac{1}{\alpha}|f(x,t,u,v)| + L|z|^\sigma + M. \qquad (3.2.22)$$

En utilisant également la dualité comme au dessus, et nous multiplions la dernière inégalité (3.2.22) par la solution ϕ de (3.2.13) et on intègre sur Q_T, nous obtenons :

$$\int_{Q_T} h_\varepsilon(v-z)\theta(x,t)\,dx\,dt \leq$$
$$\frac{1}{\alpha}\int_{Q_T} |f(x,t,u,v)|\phi(x,t)\,dx\,dt + L\int_{Q_T}|z|^\sigma\phi(x,t)\,dx\,dt + M\int_{Q_T}\phi(x,t)\,dx\,dt.$$

En effet :

Lorsqu'on multiplie (3.2.22) par ϕ, et on intègre sur Q_T nous obtenons :
$\int_{Q_T}\big(h_\varepsilon(v-z)\big)_t\phi(x,t)dxdt - d\int_{Q_T}\Delta h_\varepsilon(v-z)\phi(x,t)dxdt \leq \frac{1}{\alpha}\int_{Q_T}|f(x,t,u,v)|\phi(x,t)dxdt +$
$L\int_{Q_T}|z|^\sigma\phi(x,t)dxdt + M\int_{Q_T}\phi(x,t)dxdt$

Notons successivement par I_1, I_2 le premier terme et le second terme du premier membre de la dernière inégalité.

C'est à dire :
$I_1 = \int_{Q_T}\Big(h_\varepsilon(v-z)\Big)_t\phi(x,t)dxdt$ et $I_2 = -d\int_{Q_T}\Delta h_\varepsilon(v-z)\phi(x,t)dxdt$.
On évalue chacune des I_1 et I_2 à part.

En faisant une intégration par parties sur I_1 :

$$I_1 = \int_{Q_T}\Big(h_\varepsilon(v-z)\Big)_t\phi(x,t)\,dx\,dt = \int_\Omega\int_0^T\Big(h_\varepsilon(v-z)\Big)_t\phi(x,t)\,dx\,dt =$$
$$\int_\Omega\Big[(h_\varepsilon(v-z)\phi(x,t)dt\Big]_0^T dx$$
$$-\int_{Q_T} h_\varepsilon(v-z)\phi_t(x,t)dxdt =$$
$$\int_\Omega\Big[h_\varepsilon(v-z)\phi(x,T) - h_\varepsilon(v-z)\phi(x,0)\Big]dx - \int_{Q_T} h_\varepsilon(v-z)\phi_t(x,t)dxdt =$$
$$-\int_\Omega h_\varepsilon(v-z)\phi(x,0)dx - \int_{Q_T}\big(h_\varepsilon(v-z)\phi_t(x,t)dxdt = -\int_\Omega h_\varepsilon(v-z)\phi(x,0)dx$$
$$+\int_{Q_T} h_\varepsilon(v-z)\big(d\Delta\phi+\theta\big)dxdt$$
$$= -\int_\Omega h_\varepsilon(v-z)\phi(x,0)dx + d\int_{Q_T} h_\varepsilon(v-z)\Delta\phi(x,t)dxdt + \int_{Q_T} h_\varepsilon(v-z)\theta(x,t)dxdt.$$

car en vertu de la première équation de (3.2.13) de l'étape 2, on a $\phi_t = -\theta - d\Delta\phi$.

D'autre part, en faisant aussi une intégration par parties sur I_2, on obtient :
$I_2 = -d\int_{Q_T}\Delta h_\varepsilon(v-z)\phi(x,t)dxdt = -d\int_{Q_T} h_\varepsilon(v-z)\Delta\phi(x,t)dxdt$
Notons par I, $I_1 + I_2$, et donc

$I = I_1 + I_2 = -\int_\Omega h_\varepsilon(v-z)\phi(x,0)dx + \int_{Q_T} h_\varepsilon(v-z)\theta(x,t)dxdt.$
D'où :

$$-\int_\Omega h_\varepsilon(v-z)\phi(x,0)dx + \int_{Q_T} h_\varepsilon(v-z)\theta(x,t)dxdt \leq$$
$$\frac{1}{\alpha}\int_{Q_T} |f(x,t,u,v)|\phi(x,t)\,dx\,dt + L\int_{Q_T} |z|^\sigma \phi(x,t)\,dx\,dt + M\int_{Q_T} \phi(x,t)\,dx\,dt\ .$$

Et par conséquent :
$\int_{Q_T} h_\varepsilon(v-z)\theta(x,t)dxdt \leq \frac{1}{\alpha}\int_{Q_T} |f(x,t,u,v)|\phi(x,t)\,dx\,dt + L\int_{Q_T} |z|^\sigma\phi(x,t)\,dx\,dt + M\int_{Q_T} \phi(x,t)\,dx\,dt.$
Maintenant en faisant tendre ε vers 0, et utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous obtenons :
$\int_{Q_T} |v-z|\theta(x,t)\,dx\,dt \leq \frac{1}{\alpha}\int_{Q_T} |f(x,t,u,v)|\phi(x,t)\,dx\,dt + L\int_{Q_T} |z|^\sigma\phi(x,t)\,dx\,dt + M\int_{Q_T} \phi(x,t)\,dx\,dt$
.

Notons par J le premier membre et notons successivement par J_1, J_2 et J_3 le premier terme, le second terme et le troixième terme du second membre de la dernière inégalité. De nouveau, utilisons (3.2.14), avec $q = \frac{p}{p-\sigma}$, $p \in (\sigma\,,\,\infty)$ et succéssivement les estimations (3.2.15) et (3.2.17), nous trouvons :

$$\int_{Q_T} |v-z|\theta(x,t)\,dx\,dt \leq C\|\,u_0\|_{\infty,\Omega}\|\,\theta\|_{\frac{p}{p-\sigma},Q_T} + L\|\,z^\sigma\|_{\frac{p}{\sigma},Q_T}\|\,\phi\|_{\frac{p}{p-\sigma},Q_T} + M'\|\,\phi\|_{\frac{p}{p-\sigma},Q_T}$$
$$\leq C\Big[\big(\|\,u_0\|_{\infty,\Omega} + \|\,v_0\|_{\infty,\Omega}\big)^\sigma + \|\,u_0\|_{\infty,\Omega} + 1\Big]\|\,\theta\|_{\frac{p}{p-\sigma},Q_T}\ .$$

En effet :

$$J_1 = \frac{1}{\alpha}\int_{Q_T} |f(x,t,u,v)|\phi(x,t)dxdt,$$

$$J_2 = L\int_{Q_T} |z|^\sigma\phi(x,t)dxdt,$$

et

$$J_3 = M\int_{Q_T} \phi(x,t)dxdt.$$

Traitons chaque intégrale à part.
Pour l'intégrale J_1, en vertu de (3.2.15), il vient :

$$J_1 \leq \frac{1}{\alpha}C'\ \|\ u_0\ \|_{\infty,\Omega}\|\ \theta\ \|_{q,Q_T}\ .$$

Pour l'intégrale J_2, comme $\frac{\sigma}{p} + \frac{p-\sigma}{p} = 1$, on peut utiliser l'inégalité de Hölder, ainsi on obtient :

$$J_2 \leq L\left(\int_{Q_T} \Big(|z|^\sigma\Big)^{\frac{p}{\sigma}} dxdt \right)^{\frac{\sigma}{p}} \left(\int_{Q_T} |\phi(x,t)|^{\frac{p}{p-\sigma}} dxdt \right)^{\frac{p-\sigma}{p}}$$

D'où :

$$J_2 \leq L \parallel z^\sigma \parallel_{\frac{p}{\sigma},Q_T} \parallel \phi \parallel_{\frac{p}{p-\sigma},Q_T}.$$

On pose : $\dfrac{p}{p-\sigma} = q.$
Donc nous obtenons :
$J_2 \leq L \parallel z^\sigma \parallel_{\frac{p}{\sigma},Q_T} \parallel \phi \parallel_{W_q^{2,1}(Q_T)} \leq L \parallel z^\sigma \parallel_{\frac{p}{\sigma},Q_T} \Big(\parallel \phi \parallel_{W_q^{2,1}(Q_T)} + \parallel \phi(.,0) \parallel_{q,\Omega} \Big).$
En vertu de (3.2.14) et (3.2.17) on en déduit que :

$$J_2 \leq LC_1 \Big(\parallel u_0 \parallel_{\infty,\Omega} + \parallel v_0 \parallel_{\infty,\Omega} \Big)^\sigma C_2 \parallel \theta \parallel_{q,Q_T}.$$

C'est à dire :

$$J_2 \leq LC_1C_2 \Big(\parallel u_0 \parallel_{\infty,\Omega} + \parallel v_0 \parallel_{\infty,\Omega} \Big)^\sigma \parallel \theta \parallel_{q,Q_T}.$$

Et pour l'intégrale J_3, on l'estime, en utilisant l'inégalité de Hölder :
$J_3 \leq M\Big(mes(Q_T)\Big)^{\frac{1}{p}} \parallel \phi \parallel_{q,Q_T} \leq M\Big(mes(Q_T)\Big)^{\frac{1}{p}} \parallel \phi \parallel_{W_q^{2,1}(Q_T)}$

$\leq M\Big(mes(Q_T)\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\parallel \phi \parallel_{W_q^{2,1}(Q_T)} + \parallel \phi(.,0) \parallel_{q,\Omega} \Big).$
En vertu de (3.2.14), on obtient une estimation de J_3 :

$$J_3 \leq M\Big(mes(Q_T)\Big)^{\frac{1}{p}} C_3 \parallel \theta \parallel_{q,Q_T}.$$

On pose maintenant :

$$J = \int_{Q_T} |v-z|\theta(x,t)\, dx\, dt.$$

Donc nous obtenons :
$J \leq J_1 + J_2 + J_3 \leq \dfrac{1}{\alpha} C' \parallel u_0 \parallel_{\infty,\Omega} \parallel \theta \parallel_{q,Q_T} + LC_1C_2 \Big(\parallel u_0 \parallel_{\infty,\Omega} + \parallel v_0 \parallel_{\infty,\Omega} \Big)^\sigma \parallel \theta \parallel_{q,Q_T}$
$+M\Big(mes(Q_T)\Big)^{\frac{1}{p}} C_3 \parallel \theta \parallel_{q,Q_T}.$
Soit :

$$C = \max \Big\{ \frac{1}{\alpha} C' \ , \ LC_1C_2 \ , \ MC_3 \Big(mes(Q_T)\Big)^{\frac{1}{p}} \Big\}.$$

Finalement nous obtenons :
$J = \displaystyle\int_{Q_T} |v-z|\theta(x,t)\, dx\, dt \leq C \Bigg[\parallel u_0 \parallel_{\infty,\Omega} + \Big(\parallel u_0 \parallel_{\infty,\Omega} + \parallel v_0 \parallel_{\infty,\Omega} \Big)^\sigma + 1 \Bigg] \parallel \theta \parallel_{q,Q_T}.$
Et comme $q = \dfrac{p}{p-\sigma}$, alors,
$\displaystyle\int_{Q_T} |v-z|\theta(x,t)\, dx\, dt \leq C \Bigg[\parallel u_0 \parallel_{\infty,\Omega} + \Big(\parallel u_0 \parallel_{\infty,\Omega} + \parallel v_0 \parallel_{\infty,\Omega} \Big)^\sigma + 1 \Bigg] \parallel \theta \parallel_{\frac{p}{p-\sigma},Q_T}.$
Et par conséquent, ceci implique par dualité que :

$$v - z \in L^{\frac{p}{\sigma}}(Q_T) \quad , \quad \text{pour tout } p \in (\sigma, \infty)$$

En effet :

Comme :

$$\frac{p-\sigma}{p} + \frac{\sigma}{p} = 1$$

et

$$\int_{Q_T} |v-z|\theta(x,t)\,dx\,dt = \Big| < |v-z|, \theta >_{L^{\frac{p}{\sigma}}(Q_T), L^{\frac{p}{p-\sigma}}(Q_T)} \Big|$$

$\leq \sup\limits_{\|\theta\|\leq 1} \Big| < |v-z|, \theta >_{L^{\frac{p}{\sigma}}(Q_T), L^{\frac{p}{p-\sigma}}(Q_T)} \Big| \leq C\Big[\| u_0 \|_{\infty,\Omega} + \big(\| u_0 \|_{\infty,\Omega} + \| v_0 \|_{\infty,\Omega} \big)^{\sigma} + 1 \Big].$

Et comme $\| v - z \|_{\frac{p}{\sigma}, Q_T} = \sup\limits_{\|\theta\|\leq 1} \Big| < |v-z|, \theta >_{L^{\frac{p}{\sigma}}(Q_T), L^{\frac{p}{p-\sigma}}(Q_T)} \Big|.$

on en déduit que :

$$\| v - z \|_{\frac{p}{\sigma}, Q_T} \leq C\Big[\big(\| u_0 \|_{\infty,\Omega} + \| v_0 \|_{\infty,\Omega} \big)^{\sigma} + \| u_0 \|_{\infty,\Omega} + 1 \Big] \qquad (3.2.23)$$

.

■

Proposition 3.2.5

Sous les mêmes hypothèses de la proposition (3.2.4).

Soit $\sigma \geq 1$.

Alors :

Pour tout $p \in (\sigma, \infty)$, *on a :*

$$v \in L^{\frac{p}{\sigma}}(Q_T)$$

et :

$$\| v \|_{\frac{p}{\sigma}, Q_T} \leq C\Big((\| u_0 \|_{\infty,\Omega} + \| v_0 \|_{\infty,\Omega})^{\sigma} + \| u_0 \|_{\infty,\Omega} + \| v_0 \|_{\infty,\Omega} + 1 \Big).$$

Preuve:

En combinant (3.2.17) et (3.2.23), on obtient :

$$\| v \|_{\frac{p}{\sigma}, Q_T} \leq C\Bigg(\Big(\| u_0 \|_{\infty,\Omega} + \| v_0 \|_{\infty,\Omega} \Big)^{\sigma} + \| u_0 \|_{\infty,\Omega} + \| v_0 \|_{\infty,\Omega} + 1 \Bigg) \qquad (3.2.24)$$

En effet :

Comme $\sigma \geq 1$, alors $p \geq \dfrac{p}{\sigma}$.

Et alors :

$$\| z \|_{\frac{p}{\sigma},Q_T} \leq \| z \|_{p,Q_T}$$

D'où, en vertu de (3.2.17), il vient :

$$\| z \|_{\frac{p}{\sigma},Q_T} \leq C(\| u_0 \|_{\infty,\Omega} + \| v_0 \|_{\infty,\Omega})$$

Comme $v = (v - z) + z$, alors,

$$\| v \|_{\frac{p}{\sigma},Q_T} \leq \| v - z \|_{\frac{p}{\sigma},Q_T} + \| z \|_{\frac{p}{\sigma},Q_T}.$$

Et par conséquent on obtient :
$\| v \|_{\frac{p}{\sigma},Q_T} \leq C\Big[\big(\| u_0\|_{\infty,\Omega} + \| v_0\|_{\infty,\Omega}\big)^{\sigma} + \| u_0\|_{\infty,\Omega} + 1\Big] + C\Big(\| u_0 \|_{\infty,\Omega} + \| v_0 \|_{\infty,\Omega} \Big).$
Il vient :

$$\| v \|_{\frac{p}{\sigma},Q_T} \leq C\left[\left(\| u_0\|_{\infty,\Omega} + \| v_0\|_{\infty,\Omega}\right)^{\sigma} + \| u_0\|_{\infty,\Omega} + \| v_0\|_{\infty,\Omega} + 1\right].$$

Ceci veut dire que la norme $L^{\frac{p}{\sigma}}$ de v est finie sur Q_T.

C'est à dire

$$v \in L^{\frac{p}{\sigma}}(Q_T)$$

.

$\blacksquare$

Lemme 3.2.5

Sous les mêmes hypothèses de la proposition précédente, on a :

$$f(x,t,u,v), g(x,t,u,v) \in L^{\frac{p}{\sigma^2}}(Q_T)\,, \quad \forall p \in (\sigma^2, +\infty). \tag{3.2.25}$$

Avec une estimation de la norme correspondante dépendante seulement des données.

Preuve:

Rappelons qu'ici $T = T_{max}$.

D'aprés (3.1.7), il découle :
$|f(x,t,u,v)| \leq 2L(r)|v|^{\sigma}$ $\Big[$on a supposé que $L(r)|v|^{\sigma} = \sup\big(L(r)|v|^{\sigma}, M(r)\big)\Big]$
et par conséquent, nous obtenons :

$$\int_{Q_T} |f(x,t,u,v)|^{\frac{p}{\sigma^2}} dxdt \leq (2L(r))^{\frac{p}{\sigma^2}} \int_{Q_T} |v(x,t)|^{\frac{p}{\sigma}} dxdt.$$

D'où :

$$\| f \|_{\frac{p}{\sigma^2},Q_T} \leq (2L(r))^{\frac{p}{\sigma}} \| v \|_{\frac{p}{\sigma},Q_T} \;, \; \forall p \in (\sigma^2, +\infty).$$

Egalement, nous obtenons :

$$\| g \|_{\frac{p}{\sigma^2},Q_T} \leq \big(2L(r)\big)^{\frac{p}{\sigma}} \| v \|_{\frac{p}{\sigma},Q_T}, \forall p \in (\sigma^2, +\infty).$$

▪

$$\blacksquare$$

Etape 4 :

Cette étape est la fin de la démonstration du théorème principal, où on établira grâce aux étapes précédentes et en vertu de la régularité L^p des solutions de l'équation de la chaleur que :

$$c\Delta u \in L^{\frac{p}{\sigma^2}}, \quad \forall p \in (\sigma^2, \infty), \ \sigma > 0$$

La deuxième équation de (3.2.8) est équivalente à :

$$v_t - d\Delta v = c\Delta u + g(x,t,u,v).$$

Et nous posons :

$$F(x,t,u,v) = c\Delta u(x,t) + g(x,t,u,v).$$

D'où :

$$v_t - d\Delta v = F.$$

Pour aboutir à $v \in L^\infty(Q_T)$, nous appliquons le résultat rappelé à la fin du chapitre 1 (section de l'équation de la chaleur) sur le problème suivant :

$$\begin{cases} v_t - d\Delta v = F, & \text{sur } Q_T \\ v = 0, & \text{sur } \Gamma_T \\ v(0) = v_0, & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{3.2.26}$$

On a vu dans l'étape 2 de ce chapitre, lemme (3.2.2) que :

$$\Delta u \in L^{\frac{p}{\sigma^2}}(Q_T), \forall p \in (\sigma^2, +\infty).$$

Et donc :

$$c\Delta u \in L^{\frac{p}{\sigma^2}}(Q_T), \forall p \in (\sigma^2, +\infty).$$

Et comme

$$g \in L^{\frac{p}{\sigma^2}}(Q_T), \forall p \in (\sigma^2, +\infty).$$

Alors :

$$F \in L^{\frac{p}{\sigma^2}}(Q_T), \forall p \in (\sigma^2, +\infty).$$

Et on sait que si $v_0 \in L^\infty(\Omega)$, alors $v_0 \in L^{\frac{p}{\sigma^2}}(\Omega)$, pour tout $p \in (\sigma^2, +\infty)$.

Le résultat cité à la fin du chapitre 1 sur l'équation de la chaleur, implique que :
$\| v \|_{L^\infty(Q_T)} \leq C \Big[\| F \|_{L^{\frac{p}{\sigma^2}}(Q_T)} + \| v_0 \|_{L^{\frac{p}{\sigma^2}}(\Omega)} \Big]$, pour tout $\dfrac{p}{\sigma^2} > \dfrac{n+2}{2}$.
Et par conséquent

$$v \in L^\infty(Q_T).$$

En vertu de (3.2.10) de l'étape 1 de ce chapitre où on a établit que $u \in L^\infty(Q_T)$, on en conclut que la solution (u, v) du système (3.2.8) est dans $\big(L^\infty(Q_T)\big)^2$.

Finalement, l'estimation dans $L^\infty(Q_T)$ de v en découle.

L'alternative du théorème d'existence locale implique que $T_{max} = +\infty$.

Donc la solution (u, v) du système (3.1.1) est globale. Ce qui acheve la démonstration du théorème principal de ce chapitre.

Chapitre 4

EXEMPLES ET ILLUSTRATIONS

4.1 Quelques exemples et commentaires

Pour illustrer ce qui précéde, nous pouvons considérer le système suivant comme exemple.

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = -u|v|^p, & \text{sur } Q_T \\ v_t - c\Delta u - d\Delta v = u\Big(|v|^p - \eta uv|v|^{p+q}\Big), & \text{sur } Q_T \\ u = v = 0, & \text{sur } \Gamma_T \\ u(x,0) = u_0(x)\ ;\ v(x,0) = v_0(x), & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{4.1.1}$$

avec $p > 1$, $q > 0$, $a, d > 0$, $\eta \geq 0$, $c \in \mathbb{R}$ et $(u_0, v_0) \in \big(L^\infty(\Omega)\big)^2$.
On pose :
$f(x,t,u,v) = -u|v|^p$ et $g(x,t,u,v) = u\Big(|v|^p - \eta uv|v|^{p+q}\Big)$.
Il peut être aisément vérifié que les hypothèses du théorème principal sont satisfaites.

Ainsi ce système admet une unique solution globale classique.
Plus généralement, des systèmes de la forme suivante :

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = -uF(u,v), & \text{sur } Q_T \\ v_t - c\Delta u - d\Delta v = u\Big(F(u,v) - \eta uvG(u,v)\Big), & \text{sur } Q_T \\ u = v = 0, & \text{sur } \Gamma_T \\ u(x,0) = u_0(x)\ ;\ v(x,0) = v_0(x), & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{4.1.2}$$

peuvent être considérés où F et G sont des fonctions régulières non-négatives à croissance polynomiale et $\eta \geq 0$.

On pose :

$$f(u,v) = -uF(u,v)$$
$$g(u,v) = u\Big(F(u,v) - \eta\, u\, vG(u,v)\Big)$$

De nouveau, f et g vérifient les hypothèses du théorème principal, l'existence globale d'une unique solution classique en découle.
Notons que si $\eta = 0$, donc ces systèmes satisfont la condition :

$$\forall u \geq 0 \ , \ \forall v \in \mathbb{R} \ , \ f + g = 0 \tag{4.1.3}$$

La condition (4.1.3) est plus forte que (3.1.6) car

$$g = -f \ \Rightarrow (sign\, v)g = -(sign\, v)f \leq -f$$

où la dérnière inégalité provient du fait que $-f \geq 0$, car $u \geq 0$ et F est non négative.
Comme nous avons vu à la fin du chapitre 3, l'existence globale est alors plutôt facilement prouvée grâce à (4.1.3).
Dans ce cas particulier ($\eta = 0$), v peut être facilement estimé dans $L^p(Q_T)$ comme suit :
En additionnant les deux premières équations du système (4.1.2) membre à membre, on obtient :

$$v_t - d\Delta v = -u_t + a\Delta u + c\Delta u \tag{4.1.4}$$

Le théorème de la régularité L^p de dualité implique alors que la norme L^p de v sur Q_T est bornée par la même norme de u.
C'est à dire :

$$\| \, v \, \|_{L^p(Q_T)} \leq \| \, u \, \|_{L^p(Q_T)} \leq C \, \| \, u \, \|_{L^\infty(Q_T)}$$

Puisque u est borné dans L^∞, l'existence globale s'ensuit.
Le cas général $\eta > 0$ nécessite plus de travail pour obtenir comme ci-dessus une estimation sur v.

Chapitre 5

REMARQUES ET PERSPECTIVES

5.1 Quelques remarques sur des différentes approches

Lorsque $a \neq d$, on peut obtenir une preuve différente de certains résultats comme suit :
La matrice de diffusion :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

peut être diagonalisable et le système (3.1.1) peut être transformé en un système diagonal par un changement corréspondant des fonctions. Donc nous vérifions que les termes non-linéaires (F, G) du nouveau système satisfont les mêmes hypothèses (3.1.5) et (3.1.6)que f et g avec α est remplacé par un $\hat{\alpha}$ correspondant :

$$\hat{\alpha} = \frac{\alpha|a-d|}{\big(|a-d| + \alpha|c|\big)}$$

Nous sommes ainsi conduits à vérifier que le résultat du théorème principal est valide pour un système diagonal. Ceci est bien connu si des hypothèses supplémentaires assurant la positivité de u et v sont vérifiées. (pour celui-ci pourrait par exemple supposer des conditions du type $(\mathbf{H_1})$ sur f et g et que u_0 et v_0 sont de sorte que les données initiales du système diagonalisable soient positives.
Nous avons à prouver que les conditions «bilatérales» (3.1.5) et (3.1.6) sont suffisantes pour traiter le cas des solutions sans signe.
Puisque $a \neq d$, on introduit la transformation linéaire,

$$P : (u, v) \to (u, \frac{-c}{a-d}u + v) = (u, w).$$

Alors, u et w vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = f\Big(x,t,u,\dfrac{c}{a-d}u+w\Big), & \text{sur } Q_T \\ w_t - d\Delta w = \dfrac{-c}{a-d} f\Big(x,t,u,\dfrac{c}{a-d}u+w\Big) + g\Big(x,t,u,\dfrac{c}{a-d}u+w\Big), & \text{sur } Q_T \\ u = w = 0, & \text{sur } \Gamma_T \\ u(x,0) = u_0(x) \quad ; \quad w(x,0) = w_0(x), & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{5.1.1}$$

Le lemme (2.1.2) du chapitre 2, nous permet de montrer que le système (5.1.1) admet une solution globale classique.

Plus précisément, si nous posons

$$F(x,t,u,w) = f\Big(x,t,u,\frac{c}{a-d}u+w\Big)$$
$$G(x,t,u,w) = \frac{-c}{a-d} f\Big(x,t,u,\frac{c}{a-d}u+w\Big) + g\Big(x,t,u,\frac{c}{a-d}u+w\Big)$$

Les fonctions F, G satisfont les hypothèses (2.0.4), (2.0.5), (H_1) et (H_2). Egalement $(u_0, w_0) \in \big(L^\infty(\Omega)\big)^2$.

Par suite Le lemme (2.1.2) s'applique pour le système (5.1.1). Cette approche ne peut pas cependant traiter le cas $a = d$, depuis lors $\hat{\alpha} = 0$. Ceci est un peu étonnant :

En effet :

1. Au moins, quand $c = 0$, l'existence globale du système (3.1.1) est immédiate puisque $u + v$ satisfait l'équation de la chaleur.

   En effet :

   En sommant les deux premières équations du système (3.2.8) et on pose :

   $u + v = w$ et

   $f + g = F$,

   on obtient :

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = F, & \text{sur } Q_T \\ w = 0, & \text{sur } \Gamma_T \\ w(x,0) = w_0(x), & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

   Où :

   la fonction F est localement lipschitzienne, puisque les fonctions f et g le sont.

   Et $w(x,0) = u(x,0) + v(x,0) = w_0(x)$.

2. Quand $c \neq 0$ (et $a = d$) , nous avons :

$$\Big(|u|+|v|\Big)_t - d\Delta\Big(|u|+|v|\Big) - sign\, v\Delta u \leq 0 \tag{5.1.2}$$

En effet :

Quand $c \neq 0, a = d$, le système (3.2.8) est équivalent à

$$\begin{cases} u_t - a\Delta u = f(x,t,u,v), & \text{sur } Q_T \\ v_t - c\Delta u - a\Delta v = g(x,t,u,v), & \text{sur } Q_T \\ u = v = 0, & \text{sur } \Gamma_T \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{5.1.3}$$

En multipliant la première équation du système (5.1.2) par $(sign\, u)$ et la deuxième équation du même système par $(sign\, v)$ et on somme membre à membre on obtient :
$\big($en tenant compte que $u(sign\, u) = |u|$ et $v(sign\, v) = |v|$ $\big)$,
$\big(|u|+|v|\big)_t - a\Delta\big(|u|+|v|\big) - c(sign\, v)\Delta u = (sign\, u)f + (sign\, v)g.$
Et d'aprés (3.1.6), on en déduit que :

$$\big(|u|+|v|\big)_t - a\Delta\big(|u|+|v|\big) - c(sign\, v)\Delta u \leq 0.$$

• Si $v \geq 0$ (i.e $sign\, v = 1$) :
On obtient dans ce cas

$$\big(|u|+|v|\big)_t - a\Delta\big(|u|+|v|\big) - c\Delta u \leq 0$$

qui est équivalent à :

$$\big(|u|+|v|\big)_t - a\Delta\big(|u|+|v|\big) \leq c\Delta u.$$

Ceci implique que $|u| + |v|$ est borné dans $L^p\big(Q_T\big)$, pour tout $p \in (1, +\infty)$, puisque $u \in L^\infty\big(Q_T\big)$ (on utilise encore la technique L^p de dualité). L'existence globale s'ensuit.
• Si v n'a pas de signe :
En général, cette approche ne peut conclure (cette approche échoue).
Un cas particulier :
Nous revenons au cas général a , $d > 0$ et $c \in \mathbb{R}$.
Supposons que nous travaillons avec u positive $\big($ ceci le cas si $u_0 \geq 0, f(0,v) = 0 \;\; \forall v \in \mathbb{R}\big)$ et que (3.1.5) est satisfaite, donc u est uniformément bornée.
Supposons maintenant que nous avons précisément :

$$\forall u \geq 0 \;\;, \forall v \geq 0 \;\;, \; f + g = 0 \tag{5.1.4}$$

Alors v peut être facilement estimée dans $L^p(Q_T)$, comme suit :
En sommant les deux premières équations du système (3.2.8), en tenant compte que $f + g = 0$, on obtient :

$$v_t - d\Delta v = -u_t + a\Delta u + c\Delta u.$$

c'est à dire :

$$v_t - d\Delta v = -u_t + (a + c)\Delta u \tag{5.1.5}$$

En vertu de (5.1.3), et d'aprés le théorème de régularité L^p de dualité, on en déduit que $\| v \|_{L^p(Q_{T_{max}})}$ est bornée par la même norme de celle de u, et nous savons que cette dernière est bornée dans L^∞.
D'où il vient l'existence globale.
En général, nous avons seulement l'inégalité dans (5.1.5), donc seulement v^+ (la partie positive de v) peut être bornée dans L^p.
Comme il est montré par des exemples dans le chapitre 4, v^- (la partie négative de v) doit être également contrôlée.

Conclusion

Nous avons donc établi dans ce travail quelques résultats concernant l'existence globale en temps de solutions classiques pour des systèmes de réaction-diffusion de type paraboliques semi-linéaires couplés.
Ces résultats vont dans les directions suivantes :
- la positivité des solutions est préservée au cours du temps
- la masse totale est préservée ou contrôlée au cours du temps
- le couplage triangulaire dans les diffusions
- les données initiales sont L^∞
- les termes non-linéaires sont à croissance polynomiale.

On a utilisé la technique basée sur la théorie de la régularité L^p pour les équations paraboliques et les estimations L^∞.

Bibliographie

[1] A. Pazy, *" Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations "* Appl. Math. Sci. 44, Springer-Verlag, New York 1983(Cité pages 18, 43 et 58).

[2] C. Castillo-Chavez, K.Cook, W.Huang and S.A Levin, *"On the role of long inculbation periods in the dynamics of acquired immnodeficiency Syndrome (AIDS)"*, J.math. Biol. 27(1989), 373-398.

[3] C. V. Pao, *"Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations"*, Pleunum, New York, 1992.

[4] D. Henry, *"Geometric theory of semilinear parabolic equations"* Lecture Notes in Mathematics 840, Springer-Verlag, New York, 1981.(Cité page 12, 43, 47 et 58).

[5] E. Zeidler, *"Nonlinear Functional Analysis and its Applications . I. Fixed Point Theorems"*, Springer-Verlag, (1985).

[6] F. Roth, *"Global solutions of reaction-diffusion systems"* Lecture Notes Mathematics, Vol. 1072, Springer-Verlag, New York 1984 (Cité pages 43 46 et 58).

[7] H. Brezis, *"Analyse fonctionnelle. Théorie et applications"*. Masson, Paris, France, 1983.

[8] H. Brezis, *"Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert"*, Mathematics Studie, North-Holland, 1973.

[9] H. Amann, *"Global existence for semilinear parabolic systems"*, J. Reine Angew. Math. 360(1985), 47-83.

[10] H. Amann, *"Existence and regularity for semilinear parabolic evolution equations"*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa, Ser. IV ,11, 593 -676, 1984.

[11] H. Amann, *"Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boudary value problems, in function Space, Differential operators and Nonlinear Analysis"* , H. TRIEBEL AND H. J. Schmeisser, Teubner-Texte Math. 133, 9-126, Teubner, Stuttgart, 1993.

[12] J. M. Ball, *"Strongly continious semi-group, weack solutions and variation of constants formula"*, Proc Amer. Math. Soc. 63 (1977), 370-373.

[13] J. Morgan, *"Global existence for semi-linear parabolic systems"*, SIAM J. Math. Anal. 20, No. 5 (1989), 1128-1144.

[14] J. Smoller, *"Shocks waves and Reaction-Diffusion Systems"*. Springer Verlag, 1994.

[15] Lars Hörmander, *"The Analysis of linear Partial Differential Operators I"* Springer-Verlag Berlin Heidelberg NewYork Tokyo.

[16] Lawrence C. Evans, *"Partial Differential Equations"*, Departement of Mathematics, University of California, Berkeley, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19.

[17] Michel. Pierre, *"Systemes de réaction-diffusion"*, Ecole de printemps, "Equations aux dérivées partielles non linéaires ", Marrakech, 31 mars -5 avril 2008.

[18] N. Boudiba, *"Existence globale dans les systèmes de réaction-diffusion"*, thèse d'université. Université de Rennes I, 1999.

[19] N. Boudiba, *"Existence globale pour des systèmes de réaction-diffusion paraboliques quasi-linéaires"*, thèse de Magister N° d'ordre 05/95-M/MT, USTHB.

[20] N. Boudiba and M. Pierre, *"Global Existence for coupled Reaction-Diffusion Systems"*, Journal of Mathematical Analysis and application 250, 1-12(2000).

[21] O. A. Ladyzenskaya, V. A. Solonnikov and N. N. Uralceva, *"Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type"*Trans. Math. Monographs, Vol. 23, Am. Math. Soc., Providence, 1968.

[22] Robert Dautray -Jacques Louis Lions, *"Analyse mathématique et calcul numérique"*, Tome III, Volume 8.

[23] R. H.Martin and M. Pierre, *"Influence of mixed boundary conditions in some reaction-diffusion systems"* , Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 127, no. 5, 1053-1066, 1997.

[24] R. H. Martin and M. Pierre, *"Nonlinear reaction-diffusion systems , in Nonlinear Equations in the applied sciences"* W. F. Ames and C. Rogers, Academic Press, 1991, Notes and Reports in Mathematics in science and Engineering.

[25] S. Busenberg and K. Cook, *"Verticaly transmitted diseases"*, Biomathematics volume 23, Springer-Verlag, New York (1993), 248.

[26] S.Hollis, R. H. Martin and Michel Pierre, *"Global existence and boundednessin reaction-diffusion systems"* SIAM J. Math. Anal. 18, (1987), 744-761.

[27] T. CAZENAV et HARAUX, *"Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires"* Mathématiques Applications, Ellipse-Edition Marketing 1990.

[28] Y. Segal, *"Non-linear semi-groups"*, Ann. Math. 78(1963), 339-364.