

N° D'ordre :12/2010 – M/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène
Faculté des Mathématiques



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en
Mathématiques
Spécialité : Recherche Opérationnelle
Option : Mathématiques de Gestion

Par : RAMDANI Zoubir

**Les techniques de Branch and bound
dans l'optimisation non convexe discrète.**

Soutenu publiquement, le 30/11/2010 devant le jury composé de :

| | | | | | |
|-------------------|-----------|----------|-------------------------|-----------|----------------------|
| M. | AÏDER | Meziane | Professeur | à l'USTHB | Président |
| M. | DJAMAL | Chaabane | Maître de Conférence(A) | à l'USTHB | Directeur de mémoire |
| M. | MOULAÏ | Mustapha | Professeur | à l'USTHB | Examineur |
| M ^{me} . | MERAZKA | Fatiha | Maître de Conférence(A) | à l'USTHB | Examinatrice |
| M. | MEZGHICHE | Abdelhak | Maître Assistant (A) | à l'USTHB | Invité |

Remerciements

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à monsieur CHAABANE Djamel, Maître de conférences à l'USTHB, mon directeur de mémoire, de m'avoir encadré, un grand merci, pour l'énorme soutien scientifique et moral qu'il a su m'accorder pendant cette année, pour ses qualités humaines et scientifiques et pour m'avoir toujours encouragé à aller de l'avant. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude et reconnaissance.

Mes vifs remerciements vont également à monsieur AÏDER Meziane, professeur à l'USTHB, qu'il ma fait l'honneur d'accepter de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie ensuite, monsieur MOULAÏ Mustapha, professeur à l'USTHB, trouve ici mes grands remerciements et ma sincère reconnaissance d'avoir accepté de juger ce travail en tant qu'examineur.

Que Madame MERAZKA Fatiha, Maître de Conférences (A) à l'USTHB, trouve ici mes vifs remerciements et reconnaissances d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Mes sincères remerciement vont aussi à MEZGHICHE Abdelhak, Maître assistant (A) à l'USTHB, pour avoir accepté de juger et pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

Très chaleureusement et sincèrement ; je remercie M. BRAHMI Boualem, Maître assistant (B) à l'université de Bordj-Bouararidj, pour sa perspicacité, ses précieux conseils et son soutien permanent qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Un témoignage de ma profonde reconnaissance s'adresse à toute ma famille pour le soutien incessant moral et financier, j'exprime ma sincère gratitude à mon inestimable mère pour tous ce qu'elle avait fait pour moi.

J'exprime mes sincères remerciements à Ben Ouaret Zina, Abbaci Leila, Ramdani Sophiane, Fengal Toufik, Hayoune Lekhder, Mansouri Amara, Bellout mourad (l'imprimerie), Bordjah Lahlou (SAIPAM), et à tous(tes) mes amis(es) pour leurs sincères amitiés.

A mes très chers parents.

A ma très chère famille.

A ma très chère Zina

Table des matières

| | |
|---|----------|
| liste des figures | iii |
| liste des tableaux | iv |
| liste des notations | iv |
| Introduction générale | 1 |
| 1 La programmation linéaire Multi-objectifs | 4 |
| 1.1 Introduction | 4 |
| 1.2 Programmation linéaire | 4 |
| 1.2.1 Méthodes de résolution d'un programme linéaire en nombres entiers | 5 |
| 1.3 Programmation linéaire Multi-objectifs | 9 |
| 1.3.1 Dominance et efficacité | 9 |
| 1.3.2 Front de Pareto | 10 |
| 1.3.3 Les points caractéristiques | 11 |
| 1.3.4 Exemple illustratif | 12 |
| 1.3.5 Ensemble et fonction convexe | 12 |
| 1.3.6 Optimum local et global | 13 |
| 1.3.7 Caractérisation des solutions efficaces de (MOLP) | 14 |
| 1.3.7.1 Paramètres de préférence | 14 |
| 1.3.8 Catégories de Méthodes Fondamentales | 16 |
| 1.3.9 Quelques méthodes d'optimisation multi-objectifs | 17 |
| 1.4 L'optimisation linéaire multi-objectifs discrète | 19 |
| 1.4.1 Introduction | 19 |
| 1.4.2 Formulation mathématique d'un problème MOILP | 19 |
| 1.4.3 Solutions efficaces supportées et non supportées | 19 |
| 1.5 Résolution des problèmes (MOILP) | 20 |
| 1.5.1 La méthode Klein & Hannan | 21 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1.5.2 | La méthode de Sylva & Crema | 22 |
| 1.5.3 | La méthode de Steuer & Choo | 24 |
| 1.5.4 | L'algorithme de Ralphs, Saltzman & Wiecek | 26 |
| 2 | L'optimisation d'une fonction sur le domaine efficace discret | 28 |
| 2.1 | Introduction | 28 |
| 2.2 | Formulation du problème | 29 |
| 2.3 | Résultats fondamentaux | 30 |
| 2.4 | Méthodes de résolution | 31 |
| 2.4.1 | Méthode de Abbas & Chaabane | 31 |
| 2.4.2 | Méthode de Jesus | 35 |
| 2.4.2.1 | Exemple Illustratif | 37 |
| 3 | La norme de Tchebychev pour optimiser une fonction Linéaire sur l'Ensemble des Solutions Efficaces Discrètes | 42 |
| 3.1 | Introduction | 42 |
| 3.2 | La théorie de la norme de Tchebychev | 43 |
| 3.3 | Formulation de l'algorithme | 48 |
| 3.3.1 | Convergence et propriétés | 50 |
| 3.3.2 | Illustration numérique | 52 |
| 3.4 | Relaxation de la condition d'efficacité forte | 57 |
| 3.4.1 | Illustration numérique | 60 |
| 3.5 | Conclusion | 63 |
| 4 | Expérimentations et résultats | 64 |
| 4.1 | Implantation et description du programme | 64 |
| 4.2 | Tests sur des exemples traités par quelques auteurs | 65 |
| 4.3 | Tests sur des exemples générés aléatoirement | 66 |
| | Conclusions et perspectives | 68 |
| | bibliographie | 70 |
| | Annexes | 74 |

Table des figures

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Principe de Branch and Bound | 8 |
| 1.2 | Le front de Pareto | 11 |
| 1.3 | L'illustration graphique de l'exemple 1 | 13 |
| 1.4 | Un ensemble convexe | 14 |
| 1.5 | Solutions supportées et non supportées | 20 |
| 2.1 | L'espace des décisions | 38 |
| 2.2 | Espace des critères | 39 |
| 2.3 | La région réduite \mathcal{D}^1 | 40 |
| 2.4 | La région réduite \mathcal{D}^2 | 41 |
| 3.1 | La norme pondérée de Tchebychev | 44 |
| 3.2 | La représentation graphique du programme de Tchebychev | 47 |
| 3.3 | Le domaine réduit de l'itération 1 | 55 |
| 3.4 | Le domaine réduit de l'itération 2 | 56 |
| 3.5 | Ligne de niveau optimale et dominance faible | 57 |
| 4.1 | L'organigramme de l'algorithme | 75 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Tableau simplexe optimal associé à la base B. | 6 |
| 2.1 | Tableau de résultats de l'exemple (2.4.2.1) | 37 |
| 3.1 | Les résultats de l'exemple (Ex.2) | 53 |
| 4.1 | Exemples didactiques provenant de la littérature | 65 |
| 4.2 | Tableau de résultats 1. | 67 |

Principales abréviations et notations

- MOLP : problème linéaire multi-objectifs.
- MOILP : problème linéaire multi-objectifs en nombres entiers.
- LP : problème linéaire mono-objectif.
- ILP : problème linéaire mono-objectif en nombres entiers.
- MILP : problème linéaire mono-objectif en variables mixtes.
- \mathbb{R}^p : ensemble des vecteurs à composantes réelles.
- \mathbb{R}_+^p : ensemble des vecteurs à composantes positives.
- S : ensemble réalisable.
- \mathcal{D} : ensemble réalisable discret.
- Δ, Λ : ensemble de paramètres de préférence.
- B : la base associée au tableau du simplexe.
- \mathbb{Z} : ensemble des entiers relatifs.
- $>$: relation d'ordre partiel dans \mathbb{R}_+^p .
- \gg : relation d'ordre total dans \mathbb{R}_+^p .
- $B\&B$: la méthode de séparation et évaluation "branch and bound".
- E : ensemble efficace du problème (MOLP).
- IE : ensemble de solutions efficaces du problème (MOILP).
- \mathcal{Z}^E : ensemble de points non dominés du problème (MOLP).
- \mathcal{Z}^{IE} : ensemble de points non dominés du problème (MOILP).
- SE : ensemble de solutions efficaces supportées.
- NSE : ensemble de solutions efficaces non-supportées.
- \mathcal{P}_E : le problème d'optimisation sur l'ensemble efficace.
- \mathcal{P}_R : son problème relaxé.
- ϕ : le critère à optimiser (critère principal).
- z^* : le point idéal.
- WTP : programme de la norme de Tchebychev.
- $\mathcal{P}(\beta)$: WTP associé au vecteur de poids β .
- M_i : la borne inférieure du critère i

Introduction générale

De nombreux secteurs de l'industrie (mécanique, chimie, télécommunications, environnement, transport, etc.) sont concernés par des problèmes complexes de grande dimension mettant en jeu des objectifs (critères) très importants (profit, coûts, délai, qualité de service, etc.) à atteindre et pour lesquels les décisions doivent être prises de façon rationnelle et logique. La modélisation traditionnelle n'a connu que des modèles d'optimisation à objectif unique jusqu'à l'apparition d'une nouvelle vision plus proche de la réalité et qui consiste à modéliser les problèmes de sorte que tous les objectifs pertinents soient pris en considération. Cette philosophie de multiplicité d'objectifs où l'optimisation multicritères semble très raisonnable et contribue efficacement à l'élaboration de nouveaux systèmes d'aide à la décision, qui visent à faciliter la tâche des décideurs devant des choix complexes, qui s'avèrent souvent être conflictuels.

Dans la pratique, une classe très importante de problèmes peuvent être modéliser sous forme de programmes linéaires multi-objectifs (Multiobjective Objective Linear Programming)(MOLP) où les critères et les contraintes sont tous linéaires et les variables de décision peuvent prendre des valeurs continues, discrètes et binaires. Cette famille de modélisation possède un héritage très riche accumulé par la programmation mathématique unicritère, considérablement développée depuis une cinquantaine d'années, lorsque G. B. Dantzig proposa l'algorithme du simplexe. L'optimisation linéaire multi-objectifs possède ses racines au 19ième siècle dans les travaux en économie de Edgeworth et Pareto (1896). Elle a été utilisée initialement en économie et dans les sciences de management, et graduellement appliquée aux sciences pour l'ingénieur. Contrairement à l'optimisation classique mono-objectif, la solution d'un problème multi-objectifs n'est pas une solution unique, mais un ensemble de solutions, connu comme l'ensemble des solutions Pareto Optimales ou bien solutions efficaces, offrant un bon compromis entre les différentes fonctions objectifs à optimiser, à partir de lesquelles, il est impossible d'augmenter la valeur d'un objectif sans diminuer d'au moins un autre.

Dans de nombreuses situations réelles modélisables par la programmation linéaire multi-objectifs, les variables de décision ne peuvent prendre que des valeurs entières, dans ce cas on parle, de programmation linéaire multi-objectifs en nombres entiers (MOILP) dont le domaine de décisions n'est plus convexe, ce genre de problèmes appartiennent à la classe de l'optimisation non convexe. L'importance de cette famille de problèmes d'optimisation a poussé Rokafellar [23] à dire : *"The great watershed in optimization isn't between linearity or non linearity but between convexity and nonconvexity"*.

Une préoccupation majeure dans la mise en œuvre des systèmes d'aide multicritères à la décision est la définition d'un formalisme permettant de refléter fidèlement les choix du décideur. Dans beaucoup de cas, les critères sont en conflit, sans compter la taille des calculs informatiques impliqués dans les algorithmes, la taille de l'ensemble des solutions efficaces habituellement considérable tendent à saturer le décideur jusqu'au point le choix de sa solution préférée devient une mission impossible. En effet, l'énumération de tout l'ensemble des solutions efficaces n'est pas appropriée car, les décideurs ne sont pas souvent intéressés par toutes les solutions efficaces mais d'un sous-ensemble de solutions répondant à certaines préférences. Par conséquent, le problème de l'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces qui est aujourd'hui, l'un des concepts importants et intéressants de la programmation multi-objectifs, il semblait un moyen fructueux pour éviter de tels préoccupations afin de mesurer les préférences des décideurs, et distinguer parmi les nombreuses solutions efficaces.

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous sommes intéressés au problème de l'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème de la programmation linéaire multi-objectifs en nombres entiers. Ce présent travail s'articule autour de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, des notions de base sur l'optimisation multi-objectifs linéaire en nombre entiers ainsi que quelques méthodes de résolution basées sur la théorie de la norme de Tchebychev sont présentées, les principaux résultats de la programmation uni-critère discrète, où les techniques de séparation et évaluation "branch & bound" sont rappelées.

Le deuxième chapitre propose une présentation détaillée du problème de l'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème de la programmation linéaire multi-objectifs en nombre entiers. Plus précisément, nous décrivons en détail les deux seuls méthodes existantes à savoir Abbas & Chaabane [1] et celle de Jorge [29] illustrée par un exemple didactique.

Dans le troisième chapitre, nous abordons notre contribution dans le domaine de l'optimisation d'un critère linéaire sur l'ensemble des points efficaces d'un problème linéaire multi-objectifs en nombres entiers en se basant sur la résolution d'un programme de la

norme de Tchebychev, nous allons discuter plusieurs formes équivalentes de ce norme et leurs avantages dans la caractérisation des solutions efficaces.

Le quatrième chapitre est consacré à une validation expérimentale de l'algorithme proposé, notre implémentation est testée sur des exemples de la littérature et des instances générées aléatoirement à l'aide d'un programme que nous avons développé et implémenté sous l'environnement Matlab 7.7.

Enfin, nous terminons par une conclusion générale en résumant les différentes démarches suivies dans ce travail et quelques perspectives de recherche.

La programmation linéaire Multi-objectifs

1.1 Introduction

Ce présent chapitre introductif s'articule autour de trois sections, dans la première, nous présentons la programmation linéaire unicritère qui reste une source d'inspiration fondamentale pour le développement des méthodes multicritères ; nous exploitant notre démarche théorique dans le cas de la présence des variables discrètes (entières) dans ces problèmes, la méthode de séparation et évaluation "Branch and Bound" qui est utile dans la suite de notre travail sera également détaillée. Dans le deuxième volet, nous rappelons d'une manière générale, les concepts de base de l'optimisation linéaire multi-objectifs, ainsi que quelques méthodes classiques. La troisième section concerne l'optimisation linéaire multi-objectifs en nombre entiers (MOILP) ainsi sur quelques méthodes sur lesquelles notre contribution s'est inspirée, notamment, celles qui exploitant la théorie des normes de Tchebychev seront présentées. La présentation de toutes ces notions est principalement basée sur les ouvrages Chaabane [12], Ehrgott [18], Teghem [47], Vanderbei [52] et Steuer & Choo [43].

1.2 Programmation linéaire

C'est en 1947 qu'a paru la première publication officielle de G. B. Dantzig décrivant l'algorithme simplexe. Depuis, les chercheurs ne cessent développer et implanter différentes techniques en utilisant toujours cet algorithme.

La forme générale d'un problème de programmation linéaire unicritère (LP) peut être

donnée par :

$$(LP) \begin{cases} \max(\text{ou min}) & z = cx \\ \text{s.c} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$.

La matrice A décrit l'ensembles des contraintes et restrictions du problèmes, son rang est supposé égal à m . le vecteur b représente le second membre des contraintes, le vecteur x désigne l'ensembles des variables sur lesquelles des décisions sont prises, $z = cx$ représente la fonction objectif et les composantes du vecteur c sont appelés coefficient économiques. Pour ne pas devoir rappeler toutes les notations et formules classiques concernant l'algorithme du simplexe, nous invitons les lecteurs à voir la référence [52].

Dans le cas où certaines variables sont entières, on a alors un problème de programmation linéaire mixte (MILP) qui s'écrit comme suit :

$$(MILP) \begin{cases} \max & (cx + hy) \\ \text{s.c} & Ax + Gy \leq b \\ & x \geq 0 \\ & y \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

Si toutes les variables sont entières, on aura un programme linéaire en nombres entiers (ILP) donné par :

$$(ILP) \begin{cases} \max & z = cx \\ \text{s.c} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La nature des problèmes de programmation linéaire en variables continues (LP) et les problèmes de programmation linéaire en variables discrètes (ILP) est différente. Contrairement au problème (LP) où on s'intéresse seulement aux solutions sommets extrêmes du polyèdre convexe, les solutions optimales des problèmes (ILP) et (MILP) peuvent se trouver à l'intérieur du polyèdre et par conséquent la recherche d'une solution optimale est souvent NP-difficile.

1.2.1 Méthodes de résolution d'un programme linéaire en nombres entiers

Dans la littérature, il existe deux méthodes exactes pour résoudre un programme linéaire en nombres entiers : les méthodes des coupes et la méthode de séparation et évaluation "Branch & Bound".

1. Méthodes des coupes

Les méthodes des coupes sont des algorithmes exacts pour les problèmes (ILP). Ces méthodes résolvent une séquence de relaxations du problème (ILP), les solutions

| | | |
|-------|-----------------------|---------------------|
| x_B | $\hat{A} = B^{-1}A$ | $\hat{b} = B^{-1}b$ |
| $-Z$ | $\hat{c} = c - \pi A$ | $z - C_B B^{-1}b$ |

TAB. 1.1 – Tableau simplexe optimal associé à la base B.

obtenues sont graduellement améliorées pour donner une meilleure approximation de la solution optimale. Pour les grandes instances, le problème (ILP) ne peut pas être résolu à l'optimum, les algorithmes de coupes produisent alors des solutions relativement proches d'une solution optimale en un temps d'exécution raisonnable, avec une garantie sur la valeur de l'approximation, nous décrivons dans cette section deux types de coupes les plus utilisées.

(a) Coupe de Dantzig

La coupe de Dantzig a été proposée sur la base que dans le problème relaxé (LP), le deuxième membre de l'équation matricielle des contraintes est un vecteur positif mais non entier, et une des variables hors-base est strictement positive (supérieure ou égale à 1), cette coupe est formulée par :

$$\sum_{j \in N} x_j \geq 1$$

Où N est l'ensemble des indices hors-base.

La coupe de Dantzig n'est plus utilisée (sauf en cas de nécessité) vu ses conditions d'utilisation.

(b) Coupe fractionnaire de Gomory

L'idée principale de cette méthode est d'ajouter des contraintes linéaires qui n'excluent aucune solution entière réalisable, une par une jusqu'à ce que la solution optimale de la relaxation soit entière.

Dans une première étape, on résout le programme relaxé (LP), on cherche une solution de base optimale en utilisant la méthode de simplexe, si elle existe, on choisit une variable de base non entière et on génère une inégalité sur la contrainte associée à cette variable afin de couper la région de faisabilité courante.

Étant donnée une base optimale B du problème relaxé (LP), le tableau optimal correspondant est donné par :

Où : $\pi = c_B B^{-1}$: est dit vecteur multiplicateur relatif à la base B. $\hat{c} = c - \pi A$: est dit vecteur coût réduit relatif à la base B, avec $\hat{c}_B = 0$.

Si la solution optimale de (LP) est entière, elle est la solution optimale du problème (ILP). Sinon, parmi les variables de base, choisissons x_i , $i \in B$ dont la valeur est fractionnaire.

La i^{me} ligne du tableau optimal est donnée par :

$$x_j + \sum_{j \in N} \hat{a}_{ij} x_j = \hat{b}_i \quad (1.2.1)$$

Où

\hat{a}_{ij} : est un élément de la matrice optimale des contraintes \hat{A} .

N : est l'ensemble des indices hors-base. Étant donné un nombre réel α , on désigne par : $\lfloor \alpha \rfloor$: le plus grand entier inférieur ou égal à α . $\langle \alpha \rangle = \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$ est appelée la partie fractionnaire de α et $\lfloor \alpha \rfloor$ sa partie entière.

Puisque toutes les variables sont positives ou nulles, on a :

$$\sum_{j \in N} \lfloor \hat{a}_{ij} \rfloor x_j \leq \sum_{j \in N} \hat{a}_{ij} x_j$$

de l'équation (1.2.1) on a :

$$x_j + \sum_{j \in N} \lfloor \hat{a}_{ij} \rfloor x_j \leq \hat{b}_i$$

Comme le membre gauche est entier dans cette inégalité, la partie droite (second membre) peut être remplacée par sa partie entière :

$$x_j + \sum_{j \in N} \lfloor \hat{a}_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor \hat{b}_i \rfloor \quad (1.2.2)$$

en soustrayant (1.2.2) de (1.2.1) on obtient :

$$\sum_{j \in N} \langle \hat{a}_{ij} \rangle x_j \geq \langle \hat{b}_i \rangle.$$

En ajoutant une variable d'écart x_s à cette dernière inéquation, on obtient la coupe de Gomory définie par :

$$- \sum_{j \in N} \langle \hat{a}_{ij} \rangle x_j + x_s = \langle -\hat{b}_i \rangle.$$

Cette contrainte est introduite dans le tableau simplexe optimal et le nouveau problème formé peut être résolu en utilisant la méthode dual simplexe. Après un nombre fini d'itérations, ou bien on obtient une solution optimale entière, ou bien le problème devient irréalisable.

2. Méthode de séparation et évaluation "Branch & Bound"

La méthode séparation et évaluation "Branch and Bound" a été développée par Land et Doig (1960) spécialement élaborée pour des problèmes de programmation linéaire en variables discrètes (ILP), le principe de cette méthode consiste à subdiviser l'ensemble S (l'ensemble de solutions admissibles) $S = \{x, x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b, x \geq 0\}$ en un nombre fini de sous-ensembles S^i , généralement on prend

$$\bigcup_{i=1} S^i = S \quad \text{avec} \quad S^i \cap S^j = \emptyset, \forall (i, j), i \neq j.$$

Ces subdivisions successives sont représentées à l'aide d'une arborescence de racine S^0 et des "noeuds" S^i présentant les sous-ensembles de solutions effectués.

Le déroulement de la méthode est constitué principalement de trois procédures :

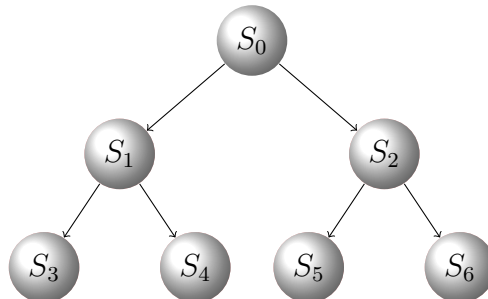


FIG. 1.1 – Principe de Branch and Bound

(a) **Procédure de séparation**

La racine S^0 arborescence représente la solution initiale du problème (ILP) en relaxant la contrainte d'intégrité, si sa solution est entière, la méthode s'arrête, sinon, choisissant une variable x_j non entière, soit disant la variable ayant la plus grande fraction, on divise le problème en deux sous-problèmes en ajoutant des contraintes de type $x_j \leq [x_j]$ pour l'un et la contrainte $x_j \geq [x_j] + 1$ pour l'autre tel que $[x_j]$ est la partie entière de la variable choisie pour le branchement. Ainsi, en résolvant les deux sous-problèmes représentés par les noeuds S_1 et S_2 et en prenant la meilleure solution trouvée, ce principe de séparation peut être appliqué de manière récursive à chacun des sous-ensembles de solutions obtenus.

(b) **Procédure d'évaluation**

L'évaluation d'un noeud de l'arborescence a pour but de déterminer l'optimum (une borne supérieure ou inférieure pour un problème de minimisation) de l'ensemble des solutions réalisables associé au noeud en question, ou au contraire, de prouver mathématiquement que cet ensemble ne contient pas de solution intéressante pour la résolution du problème initial.

La solution optimale du sous-problème associé à un noeud donné est appelée solution partielle.

(c) **Procédure Stérilisation**

Le but de cette procédure est d'éviter l'examen de tous les noeuds de l'arborescence. Dans le cas où la borne supérieure de la solution optimale du sous-problème traité est inférieure à la borne supérieure globale (ie. la meilleure solution trouvée jusqu'à présent), on est certain que toute solution réalisable de ce sous-problème ne sera pas meilleure que l'optimum global courant, il est donc inutile d'effectuer la séparation de son ensemble de solutions. On peut

également arrêter la recherche dans un noeud lorsque le sous-problème qui est lui associé est non réalisable.

Cette méthode peut également être appliquée aux problèmes avec variables binaires (zéro-un) et aux problèmes en variables mixtes (MILP) définis dans l'équation (1.2).

1.3 Programmation linéaire Multi-objectifs

Un problème de programmation linéaire multi-objectifs consiste à optimiser¹ (maximiser ou minimiser) plusieurs objectifs ($p \geq 2$) linéaires sur un ensemble de décisions défini par ($m \geq 1$) contraintes toutes linéaires.

Mathématiquement ce problème peut se formuler comme suit :

$$(MOLP) \begin{cases} \text{'' max'' } & Cx \\ S.c & x \in S. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Avec S est l'ensemble de décisions tel que $S = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b, x \geq 0\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ est la matrice des objectifs et ses vecteurs lignes $c^i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, p$ et le vecteur colonne $b \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ définit le second membre des contraintes.

On définit l'application f de S dans \mathbb{R}^p tel que $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ et $f_i = c^i x, x \in S$. L'image de S selon f est $\mathcal{Z} = f(S) = \{z \in \mathbb{R}^p, z = f(x), x \in S\}$ est appelé l'image de l'espace de décision ou bien l'espace des critères.

L'image de l'ensemble de solutions efficaces noté par E est l'ensemble Pareto (ou l'ensemble de solutions non dominées) noté \mathcal{Z}^E tel que $\mathcal{Z}^E = f(E)$.

Dans l'espace des critères, le problème (MOLP) est équivalent au problème :

$$\text{'' max'' } \{z, \quad z \in \mathcal{Z}\} \quad (1.3.2)$$

Où $z_i = f_i(x), x \in S$, pour tout $1 \leq i \leq p$

1.3.1 Dominance et efficacité

À la fin du 19ème siècle, l'économiste Vilfredo Pareto formule le concept d'optimalité qui porte son nom (optimalité au sens de Pareto), qui constitue les origines de la recherche sur l'optimisation multi-objectifs où la notion d'optimalité dans l'optimisation mono-objectif n'a aucun sens. En effet, elle n'existe aucune solution réalisable x qui fasse diminuer un objectif sans augmenter dans le même temps au moins un autre objectif. Cependant, dans la plupart des cas, l'optimum de Pareto n'est pas constitué d'une seule solution mais d'un ensemble de solutions de "meilleur compromis" appelées solutions efficaces ou solutions non-dominées.

¹Dans ce mémoire, nous considérons, sans perte de généralité, que toutes les fonctions objectifs sont à maximiser.

- Définition 1.**
1. $\hat{x} \in S$ est dite solution efficace ou optimale au sens de Pareto si et seulement s'il n'existe pas une autre solution $x \in S$ tel que $c^i x \geq c^i \hat{x} \forall i = 1, 2, \dots, p$ avec au moins une inégalité stricte. Le vecteur critère $z = C\hat{x}$ est dit vecteur non dominé
 2. $\hat{x} \in S$ est dite faiblement efficace si et seulement s'il n'existe pas une autre solution $x \in S$ tel que $c^i x > c^i \hat{x} \forall i = 1, 2, \dots, p$. Le vecteur critère $z = C\hat{x}$ est dit faiblement non dominé.
 3. $\hat{x} \in S$ est dite fortement efficace si et seulement s'il n'existe pas une autre solution $x \in S$ tels que $x \neq \hat{x}$ et $c^i x \geq c^i \hat{x} \forall i = 1, 2, \dots, p$. Le vecteur critère $z = C\hat{x}$ est dit fortement non dominé.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^p, \lambda \geq 0$ le problème paramétrique (la fonction scalarisante) (P_λ) est définis comme somme pondérée des p fonctions objectifs tel que

$$(P_\lambda) \equiv \{\lambda Cx \mid x \in S\} \quad (1.3.3)$$

Théorème 1. (Geoffrion ,1968) Soit $\hat{x} \in S$, \hat{x} est une solution efficace si et seulement si $\hat{x} \in S$ est une solution optimale du problème paramétrique (P_λ) pour un certain $\lambda \geq 0$.

Théorème 2. (Iserman ,974)

- (a) $\hat{x} \in S$ une solution optimale du problème paramétrique (P_λ)
1. Si $\lambda \geq 0$ alors \hat{x} est faiblement efficace.
 2. Si $\lambda > 0$ alors \hat{x} est efficace.
 3. Si $\lambda \geq 0$ et \hat{x} est l'unique solution optimale de (P_λ) alors \hat{x} est fortement efficace.
- (b) En outre, si S est convexe alors :
1. Si \hat{x} est efficace alors il existe $\lambda > 0$ tel que \hat{x} est une solution optimale de (P_λ) .
 2. Si \hat{x} est faiblement efficace alors il existe $\lambda \geq 0$ tel que \hat{x} est une solution optimale de (P_λ) .

Théorème 3. (Iserman ,974) Une solution $\hat{x} \in S$ est efficace si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^p, \lambda > 0$ tel que

$$\lambda C\hat{x} \geq \lambda Cx \text{ pour tout } x \in S$$

1.3.2 Front de Pareto

Par définition, le front de Pareto est l'ensemble convexe dans le cas continu (non convexe dans le cas discret) constitué par l'image des solutions efficaces dans l'espace des critères . En effet, le front de Pareto est l'ensemble $\{z \mid z \in \mathcal{Z}^E \cap \mathcal{Z}\}$. \mathcal{Z} étant l'image de l'espace décisions. La figure (Fig.1.2) montre le front de Pareto pour les différentes situations envisageables pour un problème bi-critères.

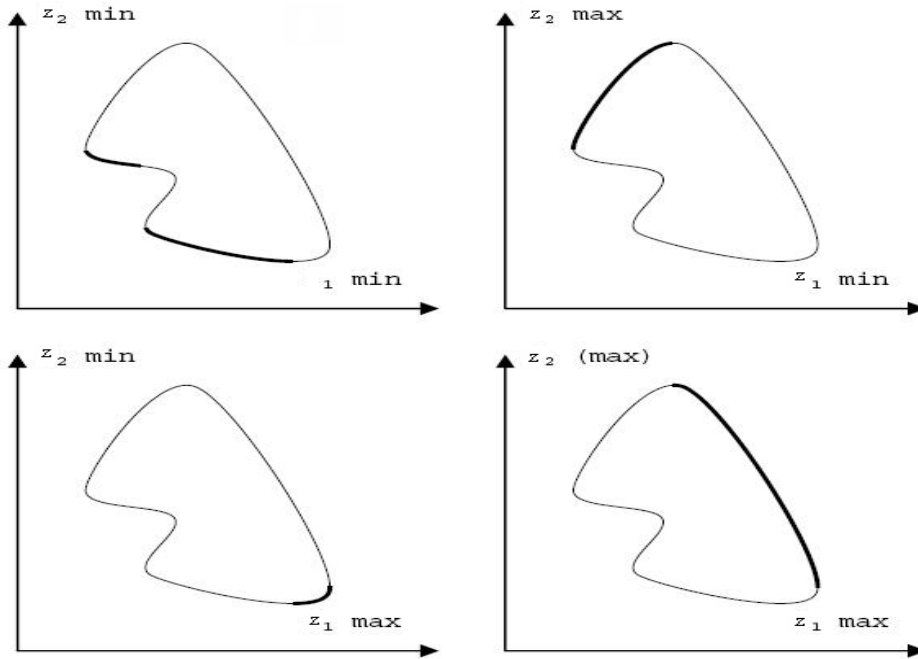


FIG. 1.2 – Le front de Pareto

1.3.3 Les points caractéristiques

Dans le cadre de l'optimisation multi-objectifs, le plus souvent le décideur raisonne plutôt en termes d'évaluation d'une solution sur chaque critère et se place naturellement dans l'espace des critères. Nous présentons ici quelques notions très utilisées dans l'optimisation multi-objectifs, le point idéal, le point nadir, la matrice des gains, etc.

Définition 2. (*Point idéal*) le point idéal $z^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_p^*)$ est le vecteur qui maximise chacune des fonctions objectifs f_i i-e $z_i^* = \max\{f_i(x), x \in S, i = 1, \dots, p\}$

Le vecteur idéal est généralement une solution utopique, dans le sens où il n'appartient pas à l'espace objectif réalisable. Dans certains cas, le décideur définit un *vecteur de référence* exprimant le but qu'il veut atteindre pour chaque objectif. Ceci généralise la notion de vecteur idéal. il définit la borne supérieure où les points non dominés peuvent atteindre. il est souvent employé comme points de référence dans la programmation du compromis ou dans des méthodes interactives dont le but est trouver une solution la plus préférée pour un décideur.

Définition 3. (*Point anti-idéal*) le point anti-idéal $\underline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_p)$ est le vecteur qui minimise chacune des fonctions objectifs f_i i-e $z_i = \min\{f_i(x), x \in S, i = 1, \dots, p\}$

Définition 4. (*Point nadir*) le point nadir $z^{nad} = (z_1^{nad}, z_2^{nad}, \dots, z_p^{nad})$ est le vecteur

$$z_i^{nad} = \min_j \{f_i(\hat{x}^j), x \in S, i = 1, \dots, p\}$$

Définition 5. (*Matrice des gains*) soit \hat{x}^j une solution optimale du critère f_j . La matrice des gains $p \times p$ est formée des éléments $z_j^i = f_i(\hat{x}^j)$ tels que

$$G = \begin{bmatrix} z_1^* & \dots & z_{1j} & \dots & z_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{i1} & \dots & z_i^* & \dots & z_{ik} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{p1} & \dots & z_{kj} & \dots & z_p^* \end{bmatrix}$$

Les coordonnées du point idéal apparaissent sur la diagonale principale de cette matrice. Lorsqu'un critère j possède plusieurs solutions optimales, la colonne j de la matrice des gains dépendra de la solution \hat{x}^j choisie (la matrice des gains est univoquement déterminée si, pour tous les critères j , la solution \hat{x}^j est unique).

La figure (Fig. 1.3) illustre ces différents points caractéristiques dans l'espace des objectifs sur un exemple de problème de maximisation bi-objectifs.

1.3.4 Exemple illustratif

Pour bien illustrer tous ces points, nous introduisons l'exemple suivant :

Exemple (Steuer, 1985)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{" max " } & -3x_1 - x_2 \\ \text{" max " } & x_1 + 2x_2 \\ S.c & 3x_1 - x_2 \leq 0 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

La figure (Fig.1.3)) montre l'ensemble réalisable S dans l'espace de décision et son image \mathcal{Z} dans l'espace des critères. Les points extrêmes de S et de \mathcal{Z} sont numérotés. Tout les points qui se trouvent sur le front de Pareto délimité par les points z^1, z^2 et z^3 sont des point non dominés. Tous les points situés à l'intérieur de ce front sont dominés. Le point idéal est $z^* = (0, 8)$ et le point nadir $z^{nad} = (-12, 0)$ et la matrice des gains est

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}$$

1.3.5 Ensemble et fonction convexe

Définition 6. (*Ensemble convexe*)

Soit l'ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$. S est convexe si

$$\forall x, y \in S : \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in S \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

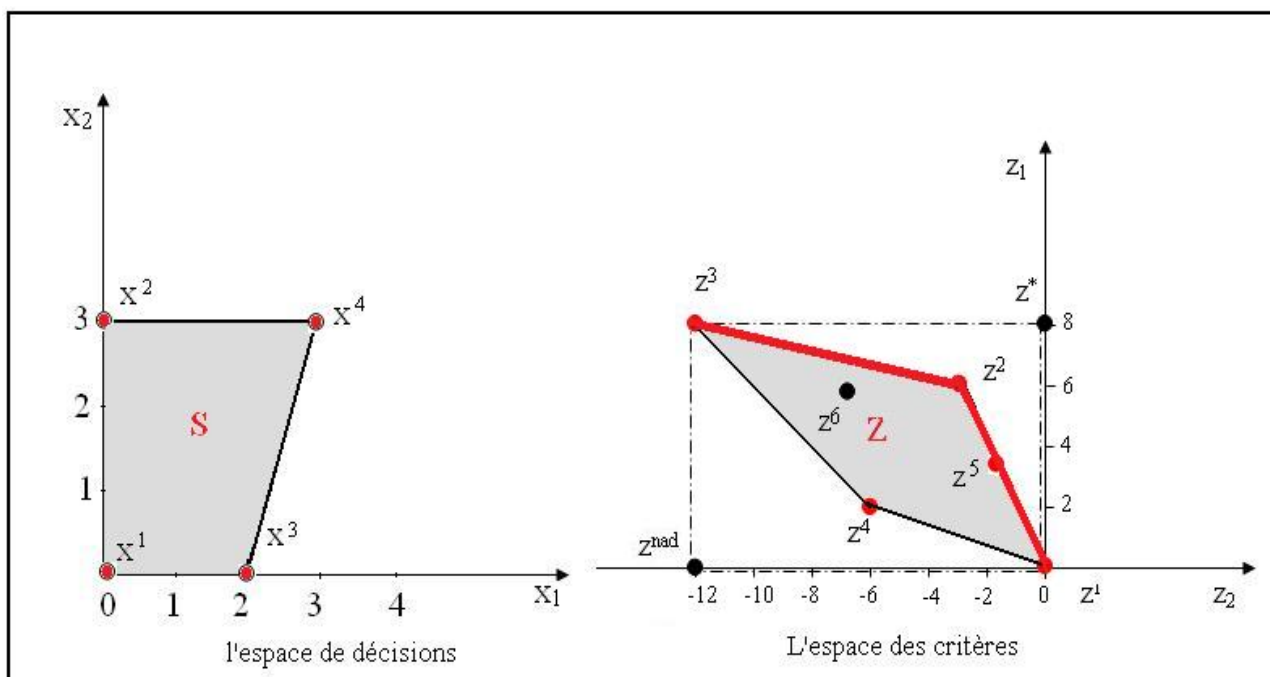


FIG. 1.3 – L'illustration graphique de l'exemple 1

La Figure (1.4) illustre cette notion.

Si S_1, S_2, \dots, S_r sont des ensembles convexes, alors l'intersection $\bigcap_{i=1}^r C_i$ est convexe

Définition 7. (Fonction convexe)

Soit un ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convexe. Une fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ est convexe si

$$\forall x, y \in S : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(z) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

- f est strictement convexe si cette inégalité est stricte.
- f est concave si $(-f)$ est convexe.

1.3.6 Optimum local et global

Définition 8. (Optimum local) Soit f une fonction à maximiser sur un ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$, x^* est un maximum local de f si

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } f(x^*) \geq f(x) \quad \forall x \in S \text{ avec } |x - x^*| < \varepsilon$$

Définition 9. (Optimum global) Soit f une fonction à maximiser sur un ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$, x^* est un maximum globale de f si

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } f(x^*) > f(x) \quad \forall x \in S \text{ avec } |x - x^*| < \varepsilon$$

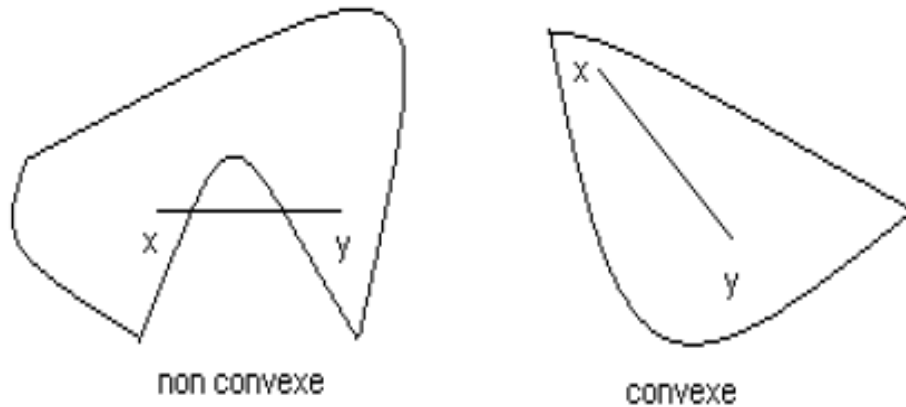


FIG. 1.4 – Un ensemble convexe

Les minimums locaux et globaux sont définis de manière similaire.

Remarque 1. *Dans le cas d'une fonction objectif convexe, il n'y a pas de distinction entre maximum local et global : tout maximum local est également global.*

1.3.7 Caractérisation des solutions efficaces de (MOLP)

Dans certaines situation, l'ensemble des solutions efficaces, qui est une partie de l'ensemble des solutions admissibles, soit très vaste et parfois infini, il est souvent impossible d'énumérer toutes les solutions efficaces. et même lorsque c'est possible, il est nécessaire d'aider le décideur à faire son choix parmi les solutions efficaces. La sélection d'une solution efficace spécifique du meilleur compromis nécessite donc une certaine connaissance de la structure de préférence du décideur. Les méthodes proposées pour aider un décideur à faire son choix parmi les solutions efficaces peuvent être classées en plusieurs catégorie selon la façon dont le décideur articule ou incorpore ses préférences. Chaque modèle de préférence est généralement explicité en fixant un certain nombre de paramètres. Citons brièvement quelques paramètres qui sont fréquemment utilisés.

1.3.7.1 Paramètres de préférence

- (a) Un vecteur $\lambda \in \mathbb{R}_+^p$ appelé vecteur de coefficients d'importance des p fonctions critères ou paramètres de préférence.
- (b) Des vecteurs de performances ayant des significations particulières, comme *le point de préférence* qui est défini par des niveaux d'aspiration (valeurs souhaitables) sur chaque critère et le point de reservation qui est défini par des niveaux de reservation (valeurs non souhaitables) sur chaque critère.

Fonctions scalarisante

Étant donné un ensemble de paramètres de préférence $\Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}_+^p\}$ où

$\lambda_i, i = 1, 2, \dots, p$ sont les coefficients d'importance des p critères. La fonction scalarisante des critères, croissante et agrège les valeurs des critères pour chaque solution est défini par : $f(z, \lambda) : \mathbb{R}^p \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$.

Les fonctions d'agrégation les plus employées sont décrites ci-dessous.

(1) Caractérisation à l'aide de poids

– *La somme pondérée* : largement utilisée en optimisation linéaire multi-objectifs où le problème (MOLP) peut se ramener à un problème de programmation paramétrique. Parmi les sommes les plus utilisées, nous citons :

$$- s_1(z, \lambda) = \sum_{i=1}^p \lambda_i z_i, \lambda \in \Lambda \text{ et } \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1.$$

$$- s_2(z, \lambda) = \sum_{i=1}^p \lambda_i |z_i^* - z_i|.$$

Où z_i^* est la i ème composante du vecteur idéal et $|\cdot|$ représente la norme de deux vecteurs.

La somme pondérée $s_2(z, \lambda)$ mesure la déviation qui sépare l'évaluation des solutions proposées, qui sont généralement des points efficaces ou faiblement efficaces, du point d'aspiration.

Cette déviation peut être mesurée par d'autres normes parmi lesquelles citons :

(a) la norme pondérée

$$s_3^q(z, \lambda) = \left[\sum_{i=1}^p \lambda_i |z_i^* - z_i| \right]^{\frac{1}{q}}, \quad q \in \mathbb{Z}_+^*$$

(b) la norme pondérée de Tchebychev

$$s_4(z, \lambda) = \max_{i=1,2,\dots,p} \{ \lambda_i |z_i^* - z_i| \}$$

(c) la norme composée (augmentée) de Tchebychev

$$s_5(z, \lambda) = \max_{i=1,2,\dots,p} \{ \lambda_i |z_i^* - z_i| \} + \rho \sum_{i=1}^p \lambda_i |z_i^* - z_i|, \quad \rho > 0$$

(2) Caractérisation à l'aide de points cibles

(a) Niveaux d'aspiration

$$s_6^q(z, \lambda) = \left[\sum_{i=1}^p \lambda_i |\hat{z}_i - z_i| \right]^{\frac{1}{q}}, \quad q \in \mathbb{Z}_+^*$$

le point $\hat{z} = \{\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_p\} \in \mathcal{Z}$ représente le point cible qu'on en souhaite s'approcher autant que possible.

(b) Niveaux de réservation

$$s_7^q(z, \lambda) = \left[\sum_{i=1}^p \lambda_i |z'_i - z_i| \right]^{\frac{1}{q}}, \quad q \in \mathbb{Z}_+^*$$

tel que $z' = \{z'_1, z'_2, \dots, z'_p\} \in \mathcal{Z}$ représente le point qu'on en souhaite s'éloigner le plus que possible.

1.3.8 Catégories de Méthodes Fondamentales

Dans la programmation mathématique multi-objectifs on distingue trois principales approches :

(a) **Optimisation unicritère avec articulation à priori des préférences**

Cette approche implique que l'utilisateur indique l'importance relative des fonctions objectifs avant d'appliquer l'algorithme d'optimisation. Dans ce type de méthodes, le problème multi-objectifs est remplacé par un problème unicritère donné par $\max_{z, \lambda} s(z, \lambda)$.

(b) **Optimisation paramétrique avec articulation à posteriori des préférences**

Cette approche nécessite de choisir un seul point de solution à partir d'un groupe de solutions mathématiquement équivalentes après que l'algorithme ait fonctionné ; le décideur impose des préférences directement à un ensemble de solutions potentielles. Alors théoriquement la solution finale reflète les préférences du décideur exactement. Donc ici, il n'est pas nécessaire de disposer d'une quelconque information initiale sur la structure de préférence du décideur.

(c) **Optimisation itérative avec articulation progressive des préférences**

Cette approche exige que les décideurs fournissent des entrées pendant le fonctionnement d'un algorithme. C'est une approche itérative qui consiste en une alternance de deux types d'étapes, les étapes de calcul et les étapes de dialogue avec le décideur :

- les étapes de calcul sont exécutées automatiquement par le programme ;
- les compromis sont fournis par la première étape aux décideurs qui réagissent à leur tour en apportant des informations complémentaires sur leurs préférences.

Cette information est injectée dans le programme utilisé et permet de construire de nouveaux compromis.

Le processus se poursuit pendant un certain nombre d'itérations jusqu'à la satisfaction du décideur ou après la satisfaction d'un certain test d'arrêt implémenté dans la procédure indiquant l'étape finale.

Utiliser cette approche peut être relativement efficace (en termes d'effort informatique), puisqu'on essaye seulement de produire un sous-ensemble de l'ensemble complet de solutions potentielles régies par les préférences de l'utilisateur. Cependant, alors que de telles approches reflètent exactement les intentions de l'utilisateur, elles ne peuvent pas fonctionner indépendamment ; l'utilisateur doit être présent lors l'exécution de l'algorithme.

1.3.9 Quelques méthodes d'optimisation multi-objectifs

Nous décrivons dans cette section quelques approches principales de détermination d'une solution efficace ou d'un ensemble de solutions efficaces. Nous donnons seulement le principe de chacune des méthodes et nous invitons le lecteur à voir les détails dans la référence [47].

◇ Méthode de la Somme pondérée

Cette méthode consiste à remplacer les divers objectifs par une somme pondérée de ceux-ci. Ceci signifie que notre problème de programmation linéaire multi-objectifs est transformé en un problème de programmation linéaire mono-objectif de la forme

$$\max_{x \in S} \sum_{k=1}^p \lambda_k Z_k(x)$$

La solution de ce problème dépend fortement du vecteur paramètre utilisé. Cette méthode a d'abord été développée pour la génération des solutions non dominées. Elle est très efficace au point de vue informatique et peut être appliquée pour produire une solution non dominée initiale qui peut être employée à son tour comme solution initiale pour d'autres techniques.

Le problème de cette approche est de déterminer les poids appropriés quand nous n'avons pas d'informations sur les préférences du décideur ; dans ce cas, tout point optimal obtenu dépend des coefficients pondérant les objectifs. La plupart des chercheurs choisissent une combinaison linéaire des objectifs avec des poids par défaut, puis produisent la courbe de gain ("trade-off") en faisant varier les poids.

Sans aucun doute, cette méthode est très simple et très facile à implémenter, mais elle a l'inconvénient de manquer la partie concave de la courbe de gain, ce qui peut poser de sérieux problèmes dans son application aux problèmes réels.

◇ Méthode lexicographique

Dans cette méthode les critères sont rangés par ordre d'importance par le concepteur. La solution optimale \bar{x} est alors obtenue en optimisant les fonctions objectifs en commençant par les plus importantes ; le processus continue ainsi selon l'ordre d'importance affecté aux objectifs.

On suppose que les indices des fonctions objectifs indiquent la priorité de l'objectif. Donc Z_1 et Z_p représentent les critères les plus et les moins importants respectivement. Le premier problème à résoudre peut être formulé comme :

$$\begin{cases} \max & Z_1 = c^1 x \\ S.c & x \in S_1. \end{cases}$$

Les critères sont rangés en ordre de préférence puis optimisés l'un après l'autre dans cet ordre. A l'itération k on résout le problème :

$$\begin{cases} \max & Z_k = c^k x \\ S.c & x \in S_k. \end{cases}$$

Avec $S_1 = S$ et $S_k = \{x \mid x \in S_{k-1}, c^{k-1}x \geq \bar{z}_{k-1} - h_{k-1}\}$ où $\bar{z}_{k-1} = \max_{x \in S_{k-1}} c^{k-1}x$ pour $k = 2, 3, \dots, p$ et h_{k-1} représente le niveau maximal de relaxation de $Z_{k-1} = c^{k-1}x$ par rapport à \bar{z}_{k-1} .

La solution finale dépend de l'ordre de préférence et de la définition de h_k ; elle n'est pas nécessairement efficace.

◇ Méthode de la programmation par objectif "Goal programming"

Charnes et Cooper (1961) et Ijiri (1965) sont crédités du développement de la méthode "goal programming" pour un modèle linéaire. Dans cette méthode, les décideurs doivent spécifier des cibles (des niveaux d'aspiration) ou des buts qu'ils souhaitent réaliser pour chacun des objectifs. Ces valeurs sont incorporées au problème en tant que contraintes additionnelles. La fonction objectif essaiera alors de réduire au minimum les déviations absolues des valeurs des fonctions objectifs par rapport aux cibles. La forme la plus simple de cette méthode peut être formulée comme suit :

$$\min_{x \in S} \left\{ \sum_{i=1}^p |Z_i(x) - T_i| \right\}$$

Où T_i représente la cible fixée par les décideurs pour le i^{me} critère. Le critère doit réduire au minimum la somme des valeurs absolues de la différence entre les valeurs à atteindre et les valeurs réellement réalisées. Il est possible d'utiliser cette technique de manière interactive en modifiant à chaque itération les niveaux d'aspiration.

Une formulation plus générale du "goal programming" est de remplacer la fonction objectif ci-dessus par la p^{me} puissance de la déviation $|Z_i(x) - T_i|$. Une telle formulation est appelée le goal programming généralisé.

En général, cette technique est très efficace si nous savons les buts désirés que nous souhaitons réaliser, et s'ils sont dans la région réalisable. S'il est difficile d'approcher la région réalisable, cette méthode pourrait devenir très inefficace, mais dans le cas linéaire, elle est très utile vu la disponibilité d'excellents programmes.

1.4 L'optimisation linéaire multi-objectifs discrète

1.4.1 Introduction

Dans la suite de ce chapitre, nous allons présenter un bref aperçu des notions de base de la programmation linéaire multi-objectifs en nombres entiers ainsi que quelques méthodes qui nous seront utiles dans la suite de notre travail.

1.4.2 Formulation mathématique d'un problème MOILP

Un problème de programmation linéaire multi-objectifs en nombre entiers (MOILP) est constitué d'un espace de décisions discret non convexe défini par un ensemble de contraintes linéaires sur lequel plusieurs critères souvent conflictuels (≥ 2) sont optimisés. Mathématiquement, ce problème peut être formulé par :

$$(MOILP) \begin{cases} \text{"max"} & Cx \\ \text{s.c} & x \in \mathcal{D} \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Avec $\mathcal{D} = S \cap \mathbb{Z}$, \mathbb{Z} étant l'ensemble des nombres entiers relatifs. $\mathbf{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, C est une matrice de dimension $p \times n$ d'éléments réels, et ses vecteurs lignes $c^i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, p$ définissent les critères.

Définition 10. Une solution réalisable \hat{x} du problème (MOILP) est une solution efficace, si et seulement si, il n'existe pas d'autre solution réalisable x telle que $Cx \geq C\hat{x}$, avec au moins une inégalité stricte. Le vecteur critère correspondant $C\hat{x}$ est dit solution non dominée (Point Pareto).

Notons par IE l'ensemble de toutes les solutions efficaces et par \mathcal{Z}^{IE} l'ensemble de tous points non dominés du problème (MOILP). Notons que les notions de bases concernant, la dominance faible et forte, les points caractéristiques (Points idéal, point nadir, etc.) énoncées dans la section précédente restent valables pour les problèmes (MOILP).

Théorème 4. si x^* est une solution du problème paramétrique $(P_\lambda) \equiv \max\{\lambda Cx \mid x \in S\}$, $\lambda \in \mathbb{R}^p$ et $\lambda > 0$ alors x^* est une solution efficace du problème (MOLP) $\equiv \text{"max"}\{Cx \mid x \in S\}$.

1.4.3 Solutions efficaces supportées et non supportées

Les problèmes (MOLP) et (MOILP) sont de nature différente, la différence est due au fait que l'ensemble S est convexe par contre l'ensemble \mathcal{D} n'est plus convexe, pour cette raison le principe de Geoffrion cité dans le théorème précédent qui permet de caractériser l'ensemble des solutions efficaces par la résolution du problème paramétrique (P_λ) n'est pas valable pour les problèmes (MOILP), car certaines solutions efficaces peuvent ne

pas être obtenues pour aucun $\lambda > 0$. Par conséquent, l'ensemble de solutions efficaces IE du problème (MOILP) peut être partagé en deux sous-ensembles : l'ensemble des solutions efficaces obtenues en résolvant le problème paramétrique dites solutions efficaces supportées (supported efficient solutions) et l'ensemble des solutions efficaces qui ne sont pas solutions du problème (P_λ) pour aucun λ dites solutions efficaces non supportées (non-supported efficient solutions).

Dans l'espace des critères, les points non dominés du problèmes (MOLP) se trouvent tous sur la frontière de Pareto. Par contre, dans les problèmes (MOILP) les points non supportés sont répartis à l'extérieur du convexe du front de Pareto, voir la figure (Fig.1.5).

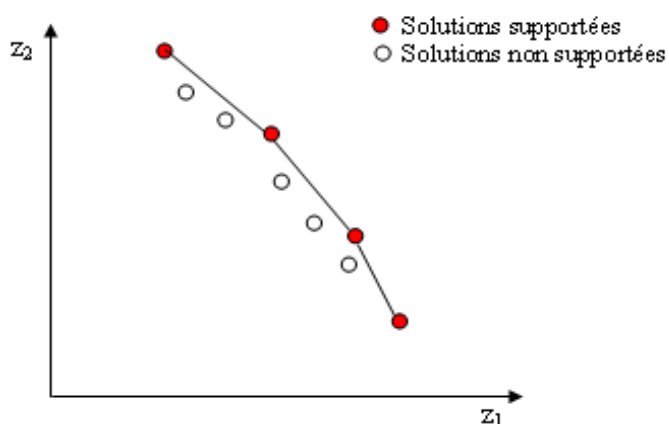


FIG. 1.5 – Solutions supportées et non supportées

1.5 Résolution des problèmes (MOILP)

Il existe dans la littérature une diversité de méthodes pour résoudre les problèmes (MOILP), quelque-unes nécessitent la présence du décideur (interactive), citons par exemple, Klein & Hannan [31], Steuer & Choo [43], Gonzales, Reeves & Franz [24], Marcotte & Soland [34], et d'autres méthodes consistent à générer tout l'ensemble des solution efficaces IE sans l'intervention du décideur, Villarreal & Karwan [12], Bitran [47], Chalmet, Lemondis & Elzinga [13], Sylva & Crema ([44], [45]), Abbas & Chaabane [12].

Comme nous venons de le citer, la difficulté particulière rencontrée dans la résolution des problèmes (MOILP) est la caractérisation de l'ensemble des solutions efficaces non supportées NSE . L'une des techniques appropriées pour surmonter à ce problème est la scolarisation de Tchebychev. Dans ce sens, Bowman (1975) a montré que tout l'ensemble des solutions efficaces du problème (MOILP) peut être énumérer en utilisant des techniques basées sur les normes de Tchebychev. Stueur & Choo [43] ont développé une procédure interactive généralisée pour résoudre les problèmes d'optimisation multi-objectifs

appropriée au cas linéaire en nombres entiers. Eswaran, Ravindran & Moskowitz [19] ont proposé un algorithme robuste pour résoudre les problèmes bi-objectifs discret non linéaire, Ralphs, Saltzman & Wiecek [38] ont proposé une procédure interactive pour le cas linéaire bi-critère.

Dans la suite de ce chapitre, nous rappelons uniquement quelques méthodes qui nous semblent utiles dans la suite de notre travail, à savoir la procédure interactive présentée par Stueur & Choo [43], l'algorithme proposé par Ralphs, Saltzman & Wiecek [38], la méthode de Sylva & Crema [44] et la méthode Klein & Hannan [31].

1.5.1 La méthode Klein & Hannan

La technique présentée par D. Klein & E. Hannan est une méthode interactive, pour générer séquentiellement un sous-ensemble efficace ou l'ensemble de toutes les solutions efficaces pour le problème (MOILP). Elle consiste à résoudre progressivement des programmes linéaires unicritères (ILP) avec des contraintes ajoutées à chaque itération. La méthode génère des solutions efficaces de façon que l'utilisateur n'est pas obligé de déterminer entièrement l'ensemble des solutions efficaces s'il ne s'intéresse qu'à quelques solutions. Une brève présentation de la méthode est résumée par l'algorithme ci-dessous.

L'algorithme de la méthode

Étape 1 (Initialisation) : Choisir un critère i , $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ du problème (MOILP) et résoudre le problème unicritère suivant :

$$(P_0) \begin{cases} \max & Z_i = c^i x \\ \text{s.c} & x \in \mathcal{D} \end{cases}$$

Si la solution de (P_0) est unique, alors elle est efficace et elle est l'unique élément dans la liste initiale des solutions efficaces IE_0 , sinon soit $\xi(P_0)$ l'ensemble des solutions optimales de (P_0) , par comparaison deux à deux des vecteurs critères associés, retenir celles qui sont non dominées pour construire IE_0 l'ensemble des solutions efficaces correspondant à $\xi(P_0)$.

Étape j ($j \geq 1$) résoudre le problème (P_j) défini par :

$$(P_j) \begin{cases} \max & Z_i = c^i x \\ \text{s.c} & x \in \mathcal{D} \\ & \bigwedge_{k=1}^r (\bigvee_{s=1, s \neq i}^p (c^s x \geq c^s \tilde{x}_k + \varepsilon^s)) \end{cases}$$

Où $0 < \varepsilon^s < 1$ et \tilde{x}_k ; $k = 1, 2, \dots, r$ sont les solutions efficaces obtenues dans les itérations $0, 1, \dots, j - 1$.

Pour $\varepsilon^s < 1$, la méthode produit un sous-ensemble de l'ensemble des solutions efficaces, mais si $\varepsilon^s = 1$, la procédure donne toutes les solutions efficaces.

Les contraintes supplémentaires ajoutées à chaque itération k assurent que les solutions optimales du problème (P_j) , s'elles existent, seront meilleures que toutes les solutions efficaces $\{\tilde{x}_k | k = 1, 2, \dots, r\}$ sur au moins un critère $s \neq i$.

La liste des solutions efficaces obtenue à l'étape j est :

$$IE_j = \bigcup_{k=0}^{j-1} IE_k$$

La procédure s'arrête lorsque le problème (P_j) devient irréalisable. Il est clair que la procédure est finie étant donné qu'on élimine au moins une solution à chaque étape et qu'il existe un nombre fini (si \mathcal{D} est borné) de solutions admissibles.

1.5.2 La méthode de Sylva & Crema

La méthode proposée par J. Sylva & A. Crema [44] est une variante de celle de Klein & Hannan présentée précédemment, ils ont élaborés un algorithme d'énumération de tous les vecteurs non dominés d'un problème (MOILP) en utilisant une approche théorique simple et directe, le problème est résolu en résolvant une suite de programmes linéaires en nombres entiers (ILP) maximisant une combinaison positive de toutes les fonctions objectives, en rajoutant dans chaque étape des contraintes assurant la détection d'une nouvelle solution efficace.

L'algorithme génère aussi des sous-ensembles de solutions efficaces qui peuvent être utiles dans la construction des méthodes interactives pour des problèmes concrets de grande dimension.

Proposition 1. *Si x^1, x^2, \dots, x^l des solutions efficaces du problème (MOILP) et $\mathcal{D}_s = \{x | x \in \mathbb{Z}^n, Cx \leq Cx^s, s \in \{1, 2, \dots, l\}\}$.*

si x^ est une solution efficace du problème multi-objectifs*

$$(P_l) \begin{cases} \max & Z = Cx \\ \text{s.c} & x \in (\mathcal{D} - \bigcup_{s=1}^l \mathcal{D}_s) \end{cases}$$

De plus, si le problème (P_l) est irréalisable, alors $\{Cx^s\}_{s=1}^l$ est l'ensemble de tous les vecteurs critères non dominés pour le problème (MOILP).

Corollaire 1. *Soient x^1, x^2, \dots, x^l des solutions efficaces du problème (MOILP) et $\mathcal{D}_s = \{x | x \in \mathbb{Z}^n, Cx \leq Cx^s, s \in \{1, 2, \dots, l\}\}$.*

Si x^ est une solution efficace du problème unicritère*

$$(P_\lambda^l) \begin{cases} \max & Z = \lambda Cx \\ \text{s.c} & x \in (\mathcal{D} - \bigcup_{s=1}^l \mathcal{D}_s) \end{cases}$$

pour un certain vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^p, \lambda > 0$, alors x^ est une solution efficace pour le problème (MOILP).*

L'algorithme de la méthode

Étape 1 : Après avoir choisir le vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^p, \lambda > 0$, résoudre le problème suivant :

$$(P_0^\lambda) \begin{cases} \max & \lambda Cx \\ \text{s.c} & x \in \mathcal{D} \end{cases}$$

Si ce problème n'est pas réalisable, alors le problème (MOILP) est aussi irréalisable. Sinon, une solution optimale x^1 est trouvée et elle est efficace pour le problème (MOILP) en vertu du corollaire précédent. Ensuite, une suite de problèmes linéaires en nombres entiers (ILP) augmentés par un ensemble de contraintes éliminant les solutions efficaces déjà trouvées sont résolus progressivement.

Après l itérations du processus, si le problème (P_{l-1}^λ) n'est pas réalisable, l'algorithme prend fin, sinon, une nouvelle solution efficace x^l est trouvée et un nouveau problème (P_l^λ) est défini en éliminant de l'ensemble d'admissibilité de (P_{l-1}^λ) toutes les solutions vérifiant $Cx \leq Cx^l$, ceci peut être traduit mathématiquement par les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} c^i x \geq (c^i x^l + 1)y_i^l + M_i(1 - y_i^l), & \forall i = 1, 2, \dots, p \\ \sum_{i=1}^p y_i^l \geq 1, & \forall i = 1, 2, \dots, p \\ y_i^l \in \{0, 1\}, & \forall i = 1, 2, \dots, p \end{cases}$$

Où M_i est la borne inférieure de la i ème fonction objectif dans le domaine \mathcal{D} , (Par exemple, dans le cas où tous les éléments du vecteur critère c^i sont positifs alors $M_i = 0$.)

A chaque critère c^i nous associons une variable binaire y_i^l définie par :

$$y_i^l = \begin{cases} 1 & \text{si le critère } c^i \text{ est strictement amélioré par rapport à } c^i x^{l-1}; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étape l : Résoudre le problème

$$(P_l^\lambda) \begin{cases} \max & \lambda Cx \\ \text{s.c} & x \in \mathcal{D} \\ c^i x \geq (c^i x^s + 1)y_i^s + M_i(1 - y_i^s), & \forall i = 1, 2, \dots, p \\ \sum_{i=1}^p y_i^s \geq 1, & \forall i = 1, 2, \dots, p, \forall s = 1, 2, \dots, l \\ y_i^s \in \{0, 1\}, & \forall i = 1, 2, \dots, p, \forall s = 1, 2, \dots, l \end{cases}$$

Remarque Pour des problèmes de grande taille, l'énumération de tous les vecteurs non dominés peut ne pas être possible, Dans ce cas l'intérêt se porte sur une partie seulement des solutions efficaces, cette partie peut être obtenue en changeant le problème (P_l^λ) en :

$$(P_l^\lambda) \begin{cases} \max & \lambda Cx \\ \text{s.c} & x \in \mathcal{D} \\ c^i x \geq (c^i x^s) + f_i y_i^s + M_i(1 - y_i^s), & \forall i = 1, 2, \dots, p \\ \sum_{i=1}^p y_i^s \geq 1, & \forall i = 1, 2, \dots, p, \forall s = 1, 2, \dots, l \\ y_i^s \in \{0, 1\}, & \forall i = 1, 2, \dots, p, \forall s = 1, 2, \dots, l \end{cases}$$

Où f_i représente l'écart souhaité entre deux vecteurs non dominés successivement trouvés pour chaque fonction objectif i .

La procédure continue jusqu'à ce que le problème (P_λ^l) devient irréalisable. À la fin, on obtient l'ensemble de toutes les solutions efficaces ou seulement une partie qui intéresse le décideur.

1.5.3 La méthode de Steuer & Choo

La procédure proposée consiste à échantillonner un sous ensemble de solutions efficaces en déterminant les points non dominés associés les plus proches du point idéal z^* selon un échantillon de poids de la norme de Tchebychev générés aléatoirement. A chaque itération, une technique de filtrage est utilisée pour avoir des valeurs de poids dispersées de petit et de plus petit sous-ensembles de points non dominés sont déterminés suffisamment bons jusqu'à l'arête du processus de décisions. le décideur intervient pour donner sa solution préférée, puis son voisinage est exploré pour déterminer un sous-ensemble de points non dominés qui sont adjacentes et plus proche du point idéal est calculé.

Une brève présentation de la théorie de la norme de Tchebychev.

La norme de Tchebychev et le point idéal

Rappelons que le point idéal z^* est le vecteur $(z_1^*, z_2^*, \dots, z_p^*)$ tel que

$$z_i^* = \max\{f_i(x), x \in S, i = 1, \dots, p\}$$

Nous supposons que le point idéal n'appartient pas au domaine réalisable ($z^* \notin \mathcal{Z}$).

On considère l'ensemble des vecteurs de poids

$$\Delta = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^p, 0 \leq \beta_i \leq 1, \sum_{i=1}^p \beta_i = 1 \right\}$$

La norme pondérée de Tchebychev et donnée par :

$$\|z^* - z\|_\beta = \max_{i=1, \dots, p} \{\beta_i |z_i^* - z_i|\}$$

La norme augmentée de Tchebychev est définie comme suit :

$$\| \|z^* - z\|_{\beta, \rho} = \max_{i=1, \dots, p} \{\beta_i |z_i^* - z_i|\} + \rho \sum_{i=1}^p (|z_i^* - z_i|)$$

Avec ρ est un petit réel positif.

Ces deux normes caractérisent la distance entre n'importe quel point $z \in \mathcal{Z}$

Soit à résoudre le problème suivant :

$$(MOILP) \equiv \text{'' max'' } \{c^i x, \quad x \in \mathcal{D}, \quad i = 1, 2, \dots, p\}$$

Qui équivalent à

$$(MOILP) \equiv \text{'' max'' } \{z^i, \quad z \in \mathcal{Z}, \quad i = 1, 2, \dots, p\}$$

Étant donné un point non dominé \bar{z} , pour déterminer un point non dominé dans le voisinage de \bar{z} et plus proche du point idéal, selon ces deux normes, l'algorithme proposé consiste à résoudre des programmes linéaires mixtes appelés programmes de la norme pondérée de Tchebychev (WNP) suivant :

(a) programme de Tchebychev :

$$P_p(\bar{\beta}) \begin{cases} \text{Min } \omega \\ \omega \geq \bar{\beta}_i (z_i^* - \bar{z}_i), 1 \leq i \leq p, \bar{\beta} \in \Delta; \\ \bar{z} \in \mathcal{Z}; \\ \omega \geq 0. \end{cases}$$

(b) Programme de la norme augmentée de Tchebychev :

$$P_a(\bar{\beta}) \begin{cases} \text{Min } \omega + \rho \sum_{i=1}^p (|z_i^* - \bar{z}_i|) \\ \omega \geq \bar{\beta}_i (z_i^* - \bar{z}_i), 1 \leq i \leq p, \bar{\beta} \in \Delta; \\ \bar{z} \in \mathcal{Z}; \\ \omega \geq 0. \end{cases}$$

tels que

$$\bar{\beta}_i = \begin{cases} \frac{1}{z_i^* - \bar{z}_i} \left[\sum_{i=1}^p \frac{1}{z_i^* - \bar{z}_i} \right]^{-1}, & \text{si } z_i^* \neq \bar{z}_i \forall i; \\ 1, & \text{si } z_i^* = \bar{z}_i; \\ 0, & \text{si } z_i^* \neq \bar{z}_i, \exists j, z_j^* = \bar{z}_j; \end{cases}$$

L'algorithme utilise trois paramètres (t,s,r) dont leurs valeurs peuvent influencer sur sa convergence tel que t = nombre d'itération maximale et s = la taille de l'échantillon à développé dans chaque itération et r et le facteur de convergence dont le but est de réduire séquentiellement l'espace de vecteur de poids Δ . Les auteurs ont discuté vivement leurs importance et proposent l'algorithme suivant :

L'algorithme de la méthode

- ⟨1⟩ Trouver le point idéal z^* .
- ⟨2⟩ Soit $\bar{\Delta}^0 = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^p, 0 \leq \beta_i \leq 1, \sum_{i=1}^p \beta^i = 1 \right\}$.
- ⟨3⟩ Poser $k = 0$ et donner les valeurs des paramètres t, s, r .
- ⟨4⟩ $k = k + 1$.
- ⟨5⟩ Générer aléatoirement $100 \times s$ vecteurs de poids dans $\bar{\Delta}^k$.
- ⟨6⟩ Filtrer ces vecteurs pour avoir $2 \times s$ vecteurs dispersés (représentatif).
- ⟨7⟩ Pour chacun de ces vecteurs résoudre le programme de la norme augmentée de Tchebychev $P_a(\bar{\beta})$
- ⟨8⟩ Filtrer les vecteurs obtenus pour avoir un échantillon de s vecteurs.

- ⟨9⟩ Soit z^k le vecteur jugé préféré par le décideur dans cet échantillon.
 ⟨10⟩ Calculer le vecteur β^k correspondant à z^k selon qui définit le point isoquant de la norme augmenté de Tchebychev.
 ⟨11⟩ Si $h < t$ aller à l'étape ⟨12⟩, si $h = t$ aller à l'étape ⟨14⟩.
 ⟨12⟩ Pour le vecteur β^k calculer dans l'étape ⟨10⟩ calculer

$$\bar{\Delta}^{(k+1)} = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^p, \beta_i \in [\ell_i, \mu_i], \sum_{i=1}^p \beta^p = 1 \right\}$$

Où

$$[\ell_i, \mu_i] = \begin{cases} [0, r^k], & \text{si } \beta_i^{(k)} - \frac{1}{2}r^k \leq 0; \\ [1 - r^k, 1], & \text{si } \beta_i^{(k)} + \frac{1}{2}r^k \geq 1; \\ [\beta_i^{(k)} - \frac{1}{2}r^k, \beta_i^{(k)} + \frac{1}{2}r^k \geq 1], & \text{sinon.} \end{cases}$$

- ⟨13⟩ Aller à l'étape ⟨4⟩
 ⟨14⟩ Calculer l'image inverse du vecteur(s) critère choisi (s) par le décideur.
 Arrêter
-

1.5.4 L'algorithme de Ralphs, Saltzman & Wiecek

Les auteurs ont proposé une méthode paramétrique pour énumérer tout l'ensemble des solutions efficaces d'un problème linéaire bi-critère en nombres entiers basé sur la scolarisation de Tchebychev (Norme de Tchebychev). L'algorithme se focalise sur l'idée de Eswaran, Ravindran & Moskowitz [19] qui ont développé un algorithme pour le même problème mais pour le cas non linéaire. Le principe général de l'algorithme est simple, Étant donné deux solutions non dominé z^p, z^q , la procédure génère une autre solution (s'elle existe) non dominé dans l'intervalle $[z^p, z^q]$. Cet intervalle est retiré de la liste des intervalles à explorer.

Un problème linéaire bi-critère en nombre entier est formulé comme suit :

$$(BIP) \equiv \text{"max"} \{ [f_1(x), f_2(x)], \quad x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^n \} \quad (1.5.1)$$

Qui équivalent à

$$(BIP) \equiv \text{"max"} \{ [z_1, z_2], \quad z \in \mathcal{Z} \} \quad (1.5.2)$$

Où $z_i = f_i, i=1,2$. Et \mathcal{Z} représente l'image de \mathcal{D} selon f . et \mathcal{Z}^{IE} dénote l'ensemble des solutions non dominés qui est l'image de IE tels que $|\mathcal{Z}^{IE}| = |IE| = N$.

La norme pondérée de Tchebychev devient alors :

$$\|z^* - z\|_\beta = \max \{ \beta |z_1^* - z_1|, (1 - \beta) |z_2^* - z_2| \}$$

Cette norme est utilisée pour calculer la distance minimale entre n'importe que point $z \in \mathcal{Z}$ et le point idéal z^* , d'après Bowman (1975) cela revient à résoudre le problème :

$$\min_{z \in \mathcal{Z}} \{ \|z^* - z\|_\beta \} \quad (1.5.3)$$

Théorème 5. (Steuer and Choo, 1983)

Si $\hat{z} \in \mathcal{Z}$ est un point Pareto alors \hat{z} est une solution optimale du problème (1.5.3).

Théorème 6. (Bowman, 1975)

Si l'ensemble des solutions non dominé \mathcal{Z}_E est uniformément dominant alors toute solution optimale du problème (1.5.3) est un point non dominé.

D'après Bowman (1975), le problème (1.5.3) est equivalent au problème suivant :

$$P(\beta) \equiv \min_{z \in \mathcal{Z}} \{ \omega \mid \omega \geq \beta(z_1^* - z_1); \omega \geq (1 - \beta)(z_2^* - z_2); \quad 0 \leq \beta \leq 1 \} \quad (1.5.4)$$

(a) Pour tout point non dominé z^p on a :

$$\beta_p = \frac{z_2^* - z_2^p}{z_1^* - z_1^p + z_2^* - z_2^p}$$

(b) Pour tout pair z^p, z^q de point non dominé on a :

$$\beta_{p,q} = \frac{z_2^* - z_2^q}{z_1^* - z_1^p + z_2^* - z_2^q}$$

Théorème 7. (Bowman, 1975)

Si les solutions non dominé sont ordonnées dans cete ordre

$$z_1^1 < z_1^2 < \dots < z_1^N \quad \text{et} \quad z_2^1 > z_2^2 > \dots > z_2^N \quad \text{alors} \quad \beta_1 > \beta_{1,2} > \beta_{2,3} > \beta_{3,4} > \dots > \beta_{N-1,N} > \beta_N$$

Selon cet ordre les deux points z^p et z^{p+1} sont adjacents dans la liste $\mathcal{Z}_E = \{z^1, z^2, \dots, z^N\}$.

L'algorithme de la méthode

⟨0⟩ (Initialisation) : Résoudre le problème ($P(\beta)$) pour $\beta = 0$ et $\beta = 1$ pour trouver respectivement les deux points non dominés z^1 et z^N ($z_1^1 > z_1^N$ et $z_2^1 < z_2^N$ et déterminer le point idéal $z^* = (z_1^1, z_2^N)$). Poser $I = \{[z^1, z^N]\}$ et $S = \{(x^1, z^1), (x^N, z^N)\}$

Itération : Tant que $I \neq \emptyset$ faire

⟨1⟩ Retirer $[z^1, z^N]$ de I .

⟨2⟩ Calculer $\beta_{p,q}$ selon l'équation (1.5.4), et résoudre le problème $P(\beta_{p,q})$ défini dans (1.5.4). Si sa solution est z^p ou z^q alors z^p et z^q sont adjacentes dans la liste $\mathcal{Z}_E = \{z^1, z^2, \dots, z^N\}$.

⟨3⟩ Sinon, une nouvelle solution z^r non dominé est trouvé. $S = S \cup \{(x^r, z^r)\}$ et ajouter les deux intervalles $[z^p, z^r]$ $[z^r, z^N]$ à I .

L'optimisation d'une fonction sur le domaine efficace discret

2.1 Introduction

Dans certaines situations pratiques, l'énumération de tout l'ensemble des solutions efficaces d'un problème linéaire multi-objectifs n'est pas toujours recommandé. Comme connu, sans compter la taille des calculs informatiques impliqués dans les algorithmes, la taille de l'ensemble des solutions efficaces habituellement considérable tendent à saturer le décideur jusqu'au point le choix de sa solution préférée devient une mission impossible. Afin d'éviter ces situations, il semble très utile de considérer l'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces comme une manière pour mesurer les préférences du décideur, ou distinguer parmi, les nombreuses solutions efficaces. En particulier, Benson [3] prouve que dans quelques problèmes de modélisation impliquant des objectifs multiples, les modèles d'optimisation sur l'ensemble des solutions efficaces sont plus réalistes et appropriés que les programmes linéaires multi-objectifs plus habituels.

Le problème de l'optimisation d'une fonction sur l'ensemble des solutions efficaces du problème (MOLP) a été étudié pour la première fois en 1972 par Philip [35], qui a décrit un algorithme basé sur le déplacement sur les sommets efficaces adjacents dans le cas où la fonction à optimiser est linéaire. Depuis, notamment dans le cas continu, un bon nombre de chercheurs, citons par exemple, Benson [4] [5] [8], Horst et al [26], Benson & Sayin [8], Yamamoto [55], Dauer & Fosnaugh [15], Fülöp [22] et Ecker & Song [17] ont suivi cette voie ; plusieurs méthodes ont été développées où plusieurs formulations équivalentes au problème en question ont été proposées. Yamamoto [55] a classifié ces méthodes en différentes catégories à savoir :

- les algorithmes de recherche de sommets adjacents ;

- les algorithmes de recherche de sommets non adjacents ;
- les algorithmes basés sur la méthode de "branch and bound" ;
- les algorithmes basés sur la méthode de relaxation Lagrangienne ;
- les algorithmes basés sur la méthode duale ;
- les algorithmes basés sur la bisection.

Contrairement au cas continu qui a été complètement étudié, le cas discret n'a pas vu beaucoup de développements semblable, la première tentative d'étudier le problème a été réalisée par N.C. Nguyen (1992) où seulement une borne supérieure de la valeur optimale du critère principal a été donnée. La première méthode proposée pour l'optimisation sur l'ensemble efficace d'un problème (MOILP) en évitant l'énumération explicite de tous les points efficaces est celle de M. Abbas & D. Chaabane [1], où différents types de coupes sont imposées de telle manière que l'amélioration de la valeur optimale du critère principal à chaque itération soit garantie, suivie par l'algorithme de J. M. Jorge [29] qui est basé sur l'analyse d'un ordre approprié des problèmes linéaires en nombres entiers pour éliminer successivement les solutions moins bonnes sur le critère principal.

Dans la suite de ce chapitre, nous présentons quelques résultats de base sur l'optimisation d'un critère sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème (MOILP). Les deux seuls algorithmes proposés sont alors décrits. Nous détaillons l'algorithme de J. M. Jorge [29] et fournissons un exemple illustratif car notre contribution au chapitre 3 s'inspire de cet algorithme.

2.2 Formulation du problème

Rappelons qu'un problème (MOILP) peut être formulé par :

$$(MOILP) \begin{cases} \text{"max"} & Cx \\ \text{s.c} & x \in \mathcal{D} \end{cases} \quad (2.2.1)$$

avec $\mathcal{D} = S \cap \mathbb{Z}$, \mathbb{Z} étant l'ensemble des nombres entiers relatifs. S est supposé borné et convexe $\mathbf{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, C est une matrice de dimension $p \times n$ d'éléments réels, et ses vecteurs lignes $c^i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, p$.

Le problème de l'optimisation d'une fonction linéaire appelée "critère principal" qu'on note par \mathcal{P}_E sur l'ensemble des solutions efficaces IE du problème (MOILP) est formulé comme suit :

$$(\mathcal{P}_E) \begin{cases} \max & \phi = dx \\ \text{s.c} & x \in IE \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Son problème relaxé noté par (\mathcal{P}_R) est défini comme suit :

$$(\mathcal{P}_R) \begin{cases} \max & \phi = dx \\ \text{s.c} & x \in \mathcal{D} \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Le problème (\mathcal{P}_E) est un problème d'aide à la décision. Ce problème est doté de deux classes de problèmes : les problèmes de l'optimisation linéaire multi-objectifs en nombres entiers dont l'étude est en plein essor et les problèmes de l'optimisation unicritère discrète (ILP) qui constitue une extension assez large de la programmation linéaire (LP). Compte tenu de cette caractérisation, Il n'est pas surprenant que peu de travaux aient été réalisés et que seulement deux méthodes ont été proposées.

Naïvement, on peut résoudre le problème (\mathcal{P}_E) en formant la liste de toutes les solutions efficaces IE et en optimisant $\phi(x) = dx$ sur cette liste. Cette approche n'est pas appropriée pour des raisons d'ordre pratique liées à la difficulté de déterminer IE qui peut être un ensemble de taille exponentielle en le nombre de variables. Les sources de motivation pour étudier de tel problème vise à éviter cependant l'énumération explicite de toutes les solutions efficaces. On peut se demander pourquoi optimiser sur l'ensemble des solutions Pareto- optimales alors qu'il suffit d'optimiser sur la frontière efficace, l'ensemble des points non dominés dans l'espace des critères. Ceci est possible si la fonction à optimiser peut être exprimée en fonction des critères initiaux (variables dans l'espace des critères), mais la difficulté s'installe lorsque cette fonction est exprimée en fonction des variables de décision.

Comme connu, le problème en variables continues est déjà difficile à traiter ; il devient plus difficile encore en variables discrètes. Les difficultés particulières rencontrées dans sa résolution sont dues à :

- L'optimisation sur un ensemble IE qui ne peut pas être déterminé à priori ;
- Le cadre non convexité et discret du domaine de décision \mathcal{D} ;
- Sur le front de Pareto, non convexe, deux types de solutions peuvent être différenciées : les solutions supportées et les solutions non supportées.

2.3 Résultats fondamentaux

Théorème 8. (Isermann 1974) Soit \hat{x} un point arbitraire réalisable de S , \hat{x} est une solution efficace du problème (MOLP) si et seulement si la valeur optimale de la fonction objectif Θ^* est nulle dans le programme linéaire suivant :

$$(\mathcal{P}_{\hat{x}}) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \Theta = \sum_{i=1}^p \psi_i \\ s.c \quad c^i x - \psi_i = c^i \hat{x}, \quad i = 1, \dots, p \\ \quad \quad x \in S \\ \quad \quad \psi_i \in \mathbb{Z}_+^*, \quad i = 1, \dots, p \end{array} \right.$$

Le problème $(\mathcal{P}_{\hat{x}})$ est souvent utilisé pour tester l'efficacité d'une solution réalisable donnée. Le théorème suivant, montre que $(\mathcal{P}_{\hat{x}})$ peut être aussi utilisé pour générer une solution efficace même si la solution \hat{x} ne l'est pas.

Théorème 9. (Ecker et Kouada 1978) Si $(\mathcal{P}_{\hat{x}})$ possède une valeur maximale finie non nulle atteinte en un point réalisable w alors w est efficace.

Théorème 10. (Ecker et Kouada 1978) Si $(\mathcal{P}_{\hat{x}})$ n'admet pas une solution optimale finie, alors l'ensemble, E , des solutions efficaces du problème (MOLP) est vide.

Ces trois théorèmes ont été énoncé dans le cas continu, ils restent valables pour le cas où les variables de décision sont discrètes.

Dans les deux algorithmes décrits dans cette section, à chaque itération, on est appelé à tester l'efficacité d'une solution réalisable x par la résolution du problème (\mathcal{P}_x) , appelé souvent "test d'efficacité" tel qu'il est décrit dans le théorème (8) dont les paramètres restent inchangés, sauf le domaine de décision qu'il faut remplacé par le domaine discret \mathcal{D} .

Théorème 11. Soit \hat{x} une solution réalisable de \mathcal{D} , $\hat{x} \in IE$ si et seulement si la valeur optimale de la fonction objectif Θ^* est nulle dans le programme linéaire suivant :

$$(\mathcal{P}_{\hat{x}}) \begin{cases} \max & \Theta = \sum_{i=1}^p \psi_i \\ \text{s.c} & c^i x - \psi_i = c^i \hat{x}, \quad i = 1, \dots, p \\ & x \in \mathcal{D} \\ & \psi_i \in \mathbb{Z}_+^*, \quad i = 1, \dots, p \end{cases}$$

Preuve

(\Rightarrow) Par l'absurde, soit \hat{x} est solution efficace de (MOILP), on suppose que $\Theta^* \neq 0$, alors $\exists i \in \{1, 2, \dots, P\}$ tel que $\psi_i > 0$ et $\exists x \in \mathcal{D}$ tel que $c^i x > c^i \hat{x}$ donc Cx domine $C\hat{x}$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que \hat{x} est efficace.

(\Leftarrow) Soit maintenant $\Theta^* = 0$, on suppose que \hat{x} n'est pas efficace, alors il existe $x \in \mathcal{D}$ tel que $Cx \geq C\hat{x}$ et $Cx \neq C\hat{x}$ alors $\exists i \in \{1, 2, \dots, p\}$ tel que $c^i x - c^i \hat{x} > 0$ donc $\psi_i > 0$ ce qui contredit le fait $\Theta^* = 0$.

□

2.4 Méthodes de résolution

2.4.1 Méthode de Abbas & Chaabane

Les auteurs ont développé une méthode exacte pour résoudre le problème (\mathcal{P}_E) dans l'espace des critères, dont la fonction objectif est donnée par une somme pondérée des critères du (MOILP). Le principe de la méthode est le suivant :

Dans une première étape la condition nécessaire du théorème de Geoffrion (Théorème 1, Chapitre 1 §1) est utilisée pour déterminer une solution efficace initiale en résolvant le problème paramétrique (\mathcal{P}_λ) , en suite, dans chaque itération k , la region d'admissibilité est réduite en ajoutant des contraintes qui se traduit par deux types de coupes éliminant

les solutions dominées par la solution efficace courante, pour éliminer toutes les solutions moins bonnes sur le critère principal en résolvant un problème paramétrique (\mathcal{P}_λ^k) .

Notations et résultats préliminaires

Dans cette méthode nous adopterons les notations suivantes :

- z_1, z_2, \dots, z_p dénotent les critères initiaux du (MOILP)
- x_{opt} est la solution optimale du problème (\mathcal{P}_E) .
- ϕ_{opt} est la valeur optimale de ϕ .
- $z_i(x_{opt})$ est l'évaluation du critère i en la solution x_{opt} .
- $H^0 = \mathcal{D} = S \cap \mathbb{Z}^n$.

Pour $k \geq 1$ on a :

- I_k : l'ensemble des indices de base du tableau optimale de l'itération k .
- N_k : l'ensemble des indices hors-base du tableau optimale de l'itération k .
- D_k la région tronquée à l'itération k .
- E_{j_k} l'arête incidente à x_j à l'étape k .

Soit le problème unicritère $(\mathcal{P}_i(\mathcal{D}))$, $i \in \{1, \dots, p\}$

$$(\mathcal{P}_i(\mathcal{D})) \left(\begin{cases} \max & c^i \\ \text{s.c} & x \in \mathcal{D} \end{cases} \right) \quad (2.4.1)$$

Le problème $(\mathcal{P}_i(\mathcal{D}))$ peut avoir plusieurs solutions optimales, nous rappelons la notion de solution alternative dans la définition suivante.

Définition 11. Soit x^* une solution optimale du problème $(\mathcal{P}_i(\mathcal{D}))$, une solution réalisable $\bar{x} \in \mathcal{D}$ est dite solution alternative à x^* si $C^i x^* = C^i \bar{x}$.

Considérant le problème paramétrique (\mathcal{P}_λ) :

$$(\mathcal{P}_\lambda) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad z_\lambda = \sum_{i=1}^p \lambda_i c^i x, \quad i = 1, 2, \dots, p \\ \text{s.c} \quad x \in \mathcal{D} \end{array} \right. \quad (2.4.2)$$

Où λ est un vecteur de

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^p, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, p \right\}$$

Théorème 12. Si \hat{x} est une solution optimale de problème paramétrique (\mathcal{P}_λ) pour un certain $\lambda > 0$, alors \hat{x} est efficace pour le problème (MOILP).

Soit le problème (\mathcal{P}_λ^k) définit par :

$$(\mathcal{P}_\lambda^k) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad z_\lambda = \sum_{k=1}^p \lambda_k z_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, p \\ \text{s.c} \quad x \in \mathcal{D}^k \end{array} \right.$$

Où $\lambda > 0$ et \mathcal{D}^k est le domaine réduit défini par :

$$\mathcal{D}^k = \left(\mathcal{D}^k \setminus \bigcup_{r=0}^{k-1} \Delta_r \right) \cap \mathcal{D}_{x_{opt}}.$$

Où $\mathcal{D}_{x_{opt}} = \{x \mid x \in \mathcal{D}; dx \geq \phi_{opt} + 1\}$ et $\Delta_r = \{x \mid x \in \mathbb{Z}; Cx \leq Cx_r\}$ avec x^0, x^1, \dots, x^{k-1} des solutions efficaces obtenues en résolvant les problèmes $(\mathcal{P}_\lambda^0), (\mathcal{P}_\lambda^1), \dots, (\mathcal{P}_\lambda^{k-1})$. Ceci peut être traduit mathématiquement par les contraintes additionnelles suivantes :

$$H^k = H^{k-1} \cap \left\{ \begin{array}{l} x \in D \mid z_i(x) \geq (z_i(x_{opt}) + 1)y_i^k + M_i(1 - y_i^k), \quad \forall i = 1, 2, \dots, p \\ \sum_{i=1}^p y_i^k \geq 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, p \\ y_i^k \in \{0, 1\}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, p \end{array} \right\}$$

Où M_i est la borne inférieure de la i ème fonction objectif dans le domaine \mathcal{D} et à chaque critère z_i nous associons une variable binaire y_i^k définie par :

$$y_i^k = \begin{cases} 1 & \text{si le critère } z_i \text{ est strictement amélioré par rapport à } z_i(x_{opt}); \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Coupes de type I

L'algorithme proposé par les auteurs est basé principalement sur l'exploration des arêtes incidentes à une solution trouvée et l'utilisation de coupes éliminant une arête contenant des solutions admissibles au lieu d'un seul point admissible.

Proposition 2. Soit x_k une solution optimale du problème unicritère $(\mathcal{P}_1(\mathcal{D}_k))$. Supposons que $j_k \in N_k$. Une arête E_{j_k} incidente à la solution x_k est défini par l'ensemble

$$E_{j_k} = \left\{ \begin{array}{l} x_i = x_{k,j} - \theta_{j_k} y_{k,i_{j_k}}, i \in I_k \\ x_i \in \mathcal{D}_k \mid x_{j_k} = \theta_{j_k} \\ x_\alpha = \forall \alpha \in N_k \setminus \{j_k\} \end{array} \right\}.$$

Où \mathcal{D}_k est la région tronquée à l'itération k , $x_{k,i}$ est la i^{me} composante de la solution x_k , $y_{k,i_{j_k}}$ est l'élément de la ligne i de la colonne j_k dans le tableau optimale de x_k et θ_{j_k} est un entier positif tel que $0 < \theta_{j_k} \leq \min_{i \in I_k} \left\{ \frac{x_{k,i}}{y_{k,i_{j_k}}}, y_{k,i_{j_k}} > 0 \right\}$ et $\theta_{j_k} \times y_{k,i_{j_k}}$ est un vecteur entier $\forall i \in I_k$ si de tels vecteurs existent.

Théorème 13. Une solution réalisable entière du problème $(\mathcal{P}_1(\mathcal{D}_k))$ qui n'est pas sur l'arête E_{j_k} et incident à x_k de la région tronquée \mathcal{D}_k , se situe dans le demi espace fermé

$$\sum_{j \in N_k \setminus j_k} x_j \geq 1, \quad k \geq 1$$

Ce théorème montre que la coupe de type I peut être considérée comme une généralisation de la coupe de Dantzig. L'avantage d'utiliser cette coupe est de tronquer toutes les solutions réalisables entières du problème $(\mathcal{P}_1(\mathcal{D}_k))$ qui se trouvent sur l'arête E_{j_k} issue de la solution optimale x_k , tandis que, la coupe de Dantzig ne tronque qu'un seul point

du domaine d'admissibilité à savoir le point x_k .

Coupes de type II

Après avoir trouvé une nouvelle solution efficace de (MOILP), qui améliore la meilleure valeur de ϕ obtenue jusqu'à présent notée ϕ_{opt} , nous imposons une coupe dite coupe de type II pour chercher une nouvelle solution efficace dont la valeur ϕ est meilleure ou égale à ϕ_{opt} .

$$dx \geq \phi_{opt}$$

L'algorithme de la méthode

Étape 1

- Résoudre le problème relaxé (\mathcal{P}_R) défini dans (3.1.3) et soit x^* sa solution optimale.
- Si x^* est efficace, terminer x^* est optimale pour le problème (\mathcal{P}_E) défini dans (3.1)
- Sinon, aller à l'étape (2)

Étape 2

- Poser $\phi_{opt} = -\infty$ et résoudre un problème unicritère ($P_i(\mathcal{D})$), $i \in \{1, \dots, p\}$, par exemple, prendre $i = 1$ est poser sa solution x^1 .

2.1 Si $J_1 = \{j \in N_1 \mid Z_{1,j}^1 - C^1 - j = 0\} = \emptyset$ alors la solution optimale trouvée est unique et elle est efficace, poser $\phi_{opt} = dx^1$, $x_{opt} = x^1$ et aller à l'étape (3)

2.2 Si $J_1 \neq \emptyset$, alors la solution optimale x^1 peut ne pas être unique, tester son efficacité, si'elle n'est pas efficace, poser $\phi_{opt} = dx^1$, $x_{opt} = x^1$ et aller à l'étape (3)

Étape 3

- Poser $k=1$ et exécuter les sous étapes suivantes

3.1 Construire l'ensemble $\Gamma_k = \{j \in N_k \mid Z_{1,j}^k - C_j^1 \geq 0 \text{ et } \phi_j^k - d_j \leq 0\}$

- Si $\Gamma_k = \emptyset$ ajouter la coupe de Dantzig $\sum_{j \in N_k} z_j \geq 1$ et aller à l'étape (3.2)
- Sinon, soit $\gamma = \Gamma_k$ et aller à l'étape (a)

(a) Si $\gamma = \emptyset$, alors, soit $j_k \in \Gamma_k$, appliquer la coupe de type I $\sum_{j \in N_k \setminus \{j_k\}} x_j$, $k \geq 1$ et aller à l'étape (3.2). Sinon, sélectionner $j_k \in \gamma$ et calculer $\theta_{j_k}^0$ la partie entière de

$$\min_{i \in I_k} \left\{ \frac{x_{k,i}}{z_{k,ij_k}} \mid z_{k,ij_k} > 0 \right\}$$

- Si $\theta_{j_k}^0$ alors il n'y a aucune solution réalisable entière sur l'arête E_{j_k} , poser $\gamma := \gamma \setminus \{j_k\}$ et aller à l'étape (a)
- Sinon, si $\theta_{j_k}^0 > 1$ aller à l'étape (b)

(b) Si x^k est efficace et $dx^k \geq \phi_{opt}$ calculer β_k tel que

$$\beta_k = (d_{j_k} - \sum_{i \in I_k} d_i z_{k,ij_k})$$

- Si $\beta_k \neq 0$ aller à l'étape (C)

- Sinon, poser $\gamma := \gamma \setminus \{j_k\}$ et aller à l'étape (a)
 - Si x^k n'est pas efficace ou $dx^k < \phi_{opt}$ aller à l'étape (c) (L'arête E_{j_k} doit être explorée quelle que soit la valeur de β_k)
- (c) Explorer l'arête E_{j_k} , en cherchant des solutions réalisables de $(P(\mathcal{D}_k))$ correspondant à θ et tester pour l'efficacité à partir de $\theta = \theta_{j_k}^0$ jusqu'à $\theta = 1$ (tel que $\theta \in \mathbb{Z}_+^*$). Dès qu'une solution efficace \bar{x}^k vérifie $d\bar{x}^k > \phi_{opt}$ est trouvée pour une valeur de θ , remplacer x_{opt} par \bar{x}^k et ϕ_{opt} par $d\bar{x}^k >$ et aller à la sous-étape (3.2), s'il n'y a aucune solution efficace entière sur l'arête E_{j_k} , poser $\gamma := \gamma \setminus \{j_k\}$ et aller à l'étape (a)

3.2 Soit $k = k + 1$. La nouvelle région tronquée \mathcal{D}_k est obtenue comme sous-ensemble de \mathcal{D}_{k-1} en appliquant la coupe de type II ($dx \geq \phi_{opt}$) puis en utilisant la méthode dual de simplex et les coupes Gomory autant de fois nécessaire pour trouver une nouvelle solution optimale x^k , poser $x_{opt} = x^k$ et $\phi_{opt} = dx^k$ et aller à la sous-étape (3.1)

3.3 Soit $k = k + 1$. La nouvelle région tronquée \mathcal{D}_k est obtenue comme sous-ensemble de \mathcal{D}_{k-1} (ou \mathcal{D} si $k = 1$) en appliquant la coupe de Dantzig ou la coupe de type I puis en utilisant la méthode dual de simplex et les coupes Gomory autant de fois nécessaire pour trouver une nouvelle solution optimale $x^k, \phi^k = dx^k$

- Si x^k est efficace et $\phi_{opt} < dx^k$ poser $x_{opt} = x^k$ et $\phi_{opt} = dx^k$ et aller à la sous-étape (3.1)
- Sinon, aller à l'étape (3.1) sans mettre rien à jour.

Étape terminale La procédure prend fin, ou bien à la première étape si la solution x^0 est efficace, ou lorsque l'impossibilité des opérations de pivot indique que la région courante ne contient aucun point entier réalisable. La solution optimale est alors x_{opt} et sa valeur sur le critère ϕ est ϕ_{opt} .

2.4.2 Méthode de Jesus

L'algorithme proposé consiste à produire une solution optimale globale de (\mathcal{P}_E) sans devoir énumérer l'ensemble de toutes les solutions efficaces IE , la procédure commence à résoudre le problème relaxé (\mathcal{P}_R) , sa solution est testée pour l'efficacité, évidemment, seulement dans un nombre limité de cas spéciaux la solution optimale de (\mathcal{P}_R) fournit une solution optimale de (\mathcal{P}_E) . Ainsi, si ce n'était pas le cas, une solution efficace qui domine la solution optimale de (\mathcal{P}_R) est alors générée par le programme linéaire de test d'efficacité défini dans (11). Par suite, dans chaque itération, le critère principal est optimisé sur le domaine restreint $\mathcal{D} - \cup_{s=1}^l \mathcal{D}_s$ et $\mathcal{D}_s = \{x, x \in \mathbb{Z}^n, Cx \leq C\hat{x}^s\}$ tel que $\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^l$ sont des solutions efficaces obtenues à l'itérations l , en incluant progressivement des contraintes pour éliminer les solutions dominées par la solution efficace courante, afin de fournir une solution non dominée par les solutions détectées antérieurement jusqu'à ce qu'une solution optimale et efficace soit finalement trouvée.

L'algorithme de la méthode

Étape 0 : Initialisation

poser $\Phi_{inf} = -\infty$, $\Phi_{sup} = +\infty$, $l = 1$, et résoudre le problème relaxé (\mathcal{P}_R)

- Si (\mathcal{P}_R) n'est pas réalisable. Alors terminer, le problème (\mathcal{P}_E) n'a pas de solution.
- Autrement, soit x^l solution optimale de (\mathcal{P}_R).

Étape 1 : Tester l'efficacité de x^l

- Si x^l est efficace, l'algorithme prend fin et $X_{opt} = x^l$, $\Phi_{opt} = dx^l$.
- Sinon, poser $\Phi_{sup} = dx^l$ et aller à l'étape 2.

Étape 2 : Soit $\hat{x}^l \in IE$ une solution optimale du test d'efficacité dont le vecteur critères domine celui de x^l .

Dans l'espace des critères, plusieurs solutions efficaces peuvent avoir le même vecteur critères, pour cela le problème (T_l) est résolu pour optimiser le critère principal sur toutes les solutions équivalentes à \hat{x}^l .

Le problème (T_l) est défini par

$$(T_l) : \max \left\{ dx \mid Cx = C\hat{x}^l, x \in \mathcal{D} \right\} \quad (2.4.3)$$

soit \tilde{x}^l une solution optimale du (2.4.3).

- Si $d\tilde{x}^l > \Phi_{inf}$, poser $\Phi_{inf} = d\tilde{x}^l$ et $X_{opt} = \tilde{x}^l$. Aller à l'étape 3.
- Sinon, si $\Phi_{inf} = \Phi_{sup}$. Terminer, X_{opt} est la solution optimale de (\mathcal{P}_E).

Étape 3 : Résoudre le problème (R_l) défini par

$$(R_l) : \max \left\{ dx \mid x \in D - \cup_{s=1}^l D_s \right\} \quad (2.4.4)$$

où $D_s = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid Cx \leq C\tilde{x}^s\}$ avec $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^l$ sont les solutions optimales des problèmes (T_1), (T_2), ..., (T_l) respectivement.

- Si (2.4.4) n'est pas réalisable. Terminer, X_{opt} est une solution optimale de (\mathcal{P}_E).
- Autrement, soit x^{l+1} solution optimale de (2.4.4).
 - ▷ Si $d x^{l+1} \leq \Phi_{inf}$. Terminer, X_{opt} est une solution optimale de (\mathcal{P}_E).
 - ▷ Sinon, poser $l = l + 1$ et aller à l'étape 1.

Proposition 3. Soit x^{l+1} une solution optimale du problème (R_l) telle que $\Phi(x^{l+1}) > \max_{s=1, \dots, l} \{\Phi(\tilde{x}^s)\}$. Si $x^{l+1} \in IE$ alors x^{l+1} est une solution optimale de (\mathcal{P}_E).

Proposition 4. Soient $\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^l \in IE$, si (R^l) est irréalisable, alors l'ensemble de toutes les solutions non dominées est $Z(IE) = \{C\tilde{x}^1, \dots, C\tilde{x}^l\}$.

2.4.2.1 Exemple Illustratif

Considérons l'exemple à deux objectifs proposé par l'auteur :

$$(\mathcal{P}(\mathcal{D})) \left\{ \begin{array}{l} \text{"max"} f_1(x) = z_1 = x_1 - 2x_2 \\ \text{"max"} f_2(x) = z_2 = -x_1 + 4x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 0 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+^* \end{array} \right.$$

Soit l'ensemble de décisions

$$\mathcal{D} = \{x \mid -2x_1 + 4x_2 \leq 0; x_1 \leq 3; x_2 \leq 2; x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+^*\}.$$

L'ensembles de toutes les solutions efficaces est :

$$IE = \{(2;0), (3;0), (2;1), (3;1), (1;2), (2;2), (3;2)\}.$$

Notons que les solutions (2;1) et (2;0) sont non-supportées.

On considère le problème principal :

$$(\mathcal{P}_E) \left\{ \begin{array}{l} \max \Phi = -x_1 - 2x_2 \\ x \in IE \end{array} \right.$$

On note par $d = [-1 \ -2]$ le vecteur ligne de la fonction objectif Φ . Soit le problème relaxé du (\mathcal{P}_E) :

$$(\mathcal{P}_R) \left\{ \begin{array}{l} \max \Phi = -x_1 - 2x_2 \\ x \in \mathcal{D} \end{array} \right.$$

Les figures (Fig 2.1),(Fig 2.2) montrent respectivement l'espace de décisions et l'espace des critères du problème considéré.

| | | | | | | | | | | |
|-----------|--------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|---------|---------|---------|
| x | (0, 0) | (1, 0) | (1, 1) | (2, 0) | (3, 0) | (2, 1) | (3, 1) | (1, 2) | (2, 2) | (3, 2) |
| $Z(x)$ | (0, 0) | (1, -1) | (-1, 3) | (2, -2) | (3, -3) | (0, 2) | (1, 1) | (-3, 7) | (-2, 6) | (-1, 5) |
| $\Phi(x)$ | 0 | -1 | -3 | -2 | -3 | -4 | -5 | -5 | -6 | -7 |

TAB. 2.1 – Tableau de résultats de l'exemple (2.4.2.1)

Les bornes inférieures des deux fonctions objectifs sont $-M_1 = -3$, $-M_2 = -3$.

Itération1 :

Étape 0 : poser $\Phi_{inf} = -\infty$, $\Phi_{sup} = +\infty$, $l = 1$.

Résoudre le problème relaxé :

$$(\mathcal{P}_R) \left\{ \begin{array}{l} \max \Phi = -x_1 - 2x_2 \\ x_1 \leq 3, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{array} \right. \quad (2.4.5)$$

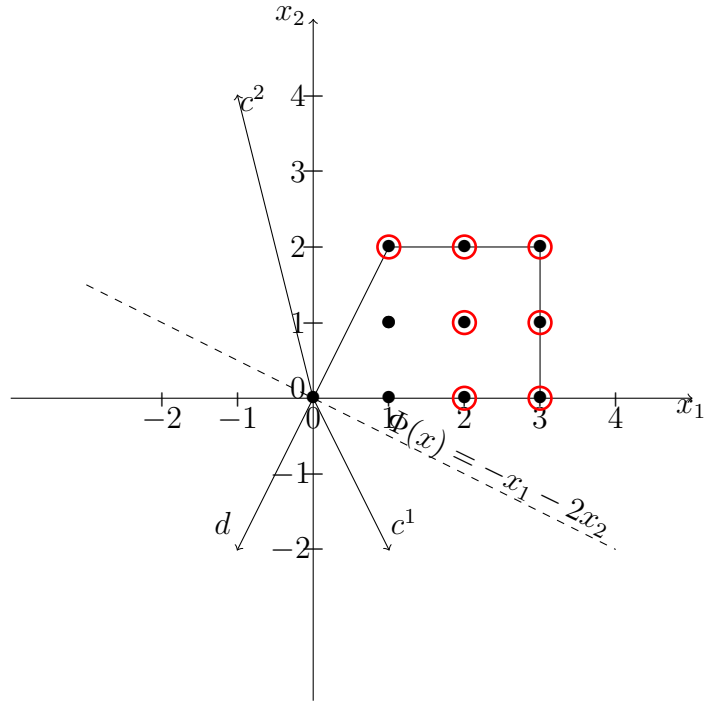


FIG. 2.1 – L'espace des décisions

Soit $x^1 = (0, 0)$ une solution optimale de (P_R) dont le vecteur critères $Z(x^1) = (0, 0)$.

Étape 1 : Tester l'efficacité de x^1 en résolvant le problème suivant :

$$(\mathcal{P}_{x^1}) \begin{cases} \max \Theta = \Psi_1 + \Psi_2 \\ x_1, x_2 \in \mathcal{D} \\ x_1 - 2x_2 - \Psi_1 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 - \Psi_2 = 0 \\ \Psi_i \geq 0, i = 1, 2. \end{cases} \quad (2.4.6)$$

à l'optimum $\Theta^* = 2$ avec les deux vecteurs suivants $\hat{x}^{1_1} = (2, 1)$; $\Psi^{1_1} = (0, 2)$ et $\hat{x}^{1_2} = (3, 1)$; $\Psi^{1_2} = (1, 1)$ donc $\Theta^* \neq 0$ c'est-à-dire que $x^1 = (0, 0)$ n'est pas efficace, poser $\Phi_{sup} = \Phi(x^1) = 0$, et aller à l'étape 2.

Étape 2 : Soit $\hat{x}^{1_1} = (2, 1)$ une solution optimale de (\mathcal{P}_{x^1}) , qui est efficace, le vecteur critères correspondant est $Z(\hat{x}^{1_1}) = (0, 2)$.

Résoudre le problème (T_1) tel que $(T_1) \equiv \max\{dx | Cx = C\hat{x}^{1_1}\}$ pour trouver les solutions efficaces ayant le même vecteur critère :

$$(T_1) \begin{cases} \max \Phi = -x_1 - 2x_2 \\ x_1, x_2 \in \mathcal{D} \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$$

La solution optimale de (T_1) est $\tilde{x}^1 = \hat{x}^{1_1} = (2, 1)$ et comme $\Phi(\tilde{x}^1) = -4 > \Phi_{inf} = -\infty$, poser $\Phi_{inf} = -4$ et $X_{opt} = \tilde{x}^1$.

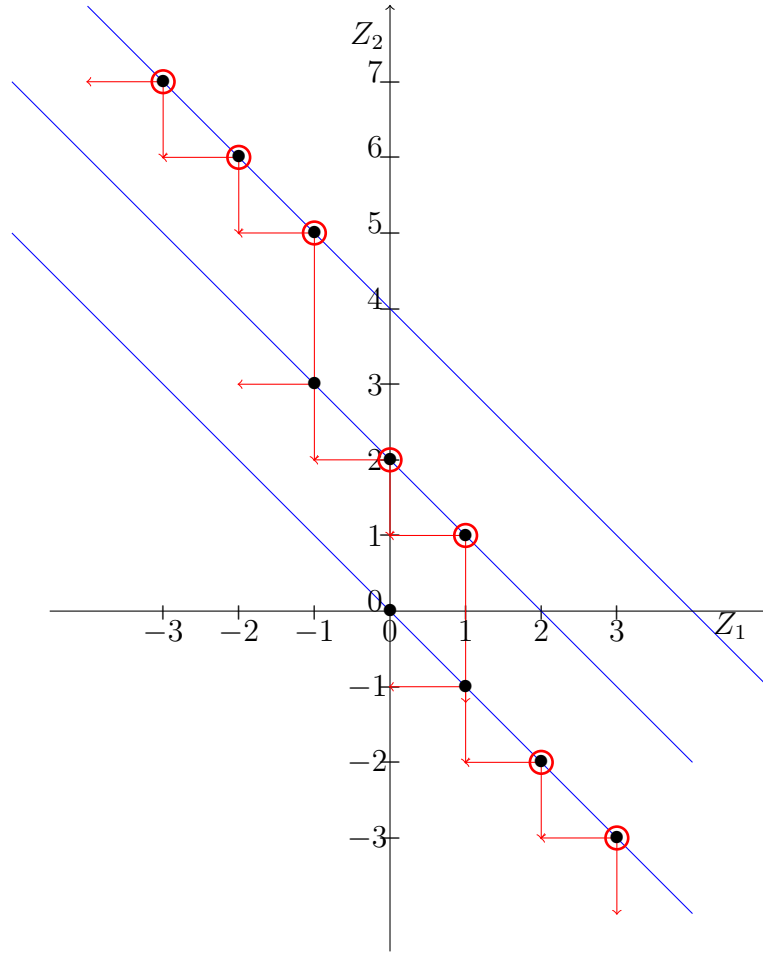


FIG. 2.2 – Espace des critères

$\Phi_{inf} \neq \Phi_{sup}$, aller à l'étape 3.

Étape 3 : Résoudre le problème (R_1) tel que $(R_1) \equiv \max\{dx | x \in \mathcal{D} - \cup_{s=1}^l \mathcal{D}_s\}$ où $\mathcal{D}_s = \{x \in \mathbb{Z}^n | Cx \leq C\tilde{x}^1\}$ avec \tilde{x}^1 est la solution optimale de problème (R_1) défini par :

$$(R_1) \left\{ \begin{array}{l} \max \Phi = -x_1 - 2x_2 \\ x_1, x_2 \in \mathcal{D} \\ C^i x \geq (C^i X_{opt} + 1)y_i^1 + M_i(1 - y_i^1), i = 1, 2, \dots, p \\ \sum_{j=1}^2 y_j^1 \geq 1; \\ y_i^1 \in 0, 1, i = 1, 2. \end{array} \right.$$

qui est équivalent au problème suivant :

$$(R_1) \left\{ \begin{array}{l} \max \Phi = -x_1 - 2x_2 \\ x_1, x_2 \in \mathcal{D} \\ x_1 - 2x_2 \geq y_1^1 - 3(1 - y_1^1) \quad (1) \\ -x_1 + 4x_2 \geq 3y_2^1 - 3(1 - y_2^1) \quad (2) \\ y_1^1 + y_2^1 \geq 1, \quad y_1^1, y_2^1 \in 0, 1 \end{array} \right.$$

Soit $x^2 = (1, 0)$, $y = (1, 0)$ une solution optimale de (R_1) et $Z(x^2) = (1, -1)$. Comme $\Phi(x^2) = -1 > \Phi_{inf}$, poser $l = l + 1 = 2$ et aller à l'étape 1.

Itération 2 :

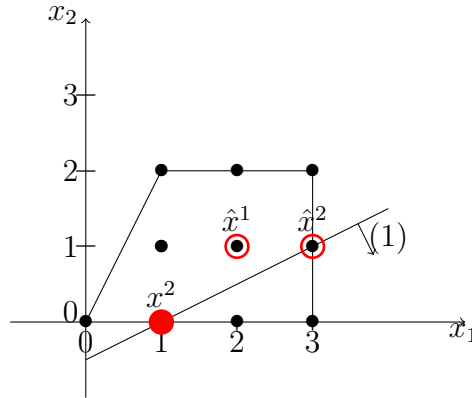


FIG. 2.3 – La région réduite \mathcal{D}^1

Étape 1 : La solution x^2 est testée pour l'efficacité en résolvant le problème (\mathcal{P}_{x^2})

$$(\mathcal{P}_{x^2}) \left\{ \begin{array}{l} \max \Phi = -x_1 - 2x_2 \\ x_1, x_2 \in \mathcal{D} \\ x_1 - 2x_2 - \Psi_1 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 - \Psi_2 = -1 \\ \Psi_i \geq 0, i = 1, 2. \end{array} \right.$$

A l'optimum $\Theta^* = 2$ avec le vecteur $\hat{x}^2 = (3, 1)$; $\Psi^3 = (0, 2)$ donc $\Theta^* \neq 0$ alors $x^2 = (1, 0)$ n'est pas efficace, poser $\Phi_{sup} = \Phi(x^1) = -1$, et aller à l'étape 2.

Étape 2 : $\hat{x}^2 = (3, 1)$ une solution optimale de (\mathcal{P}_{x^2}) qui est efficace, $Z(\hat{x}^2) = (1, 1)$

Résoudre le problème suivant :

$$(T_2) \left\{ \begin{array}{l} \max \Phi = -x_1 - 2x_2 \\ x_1, x_2 \in \mathcal{D} \\ x_1 - 2x_2 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 = 1 \end{array} \right.$$

Sa solution est $\tilde{x}^2 = \hat{x}^2 = (3, 1)$.

Comme $\Phi(\tilde{x}^2) = -5 < \Phi_{inf} = -4$, aller à l'étape 3 sans faire la mise à jour.

Étape 3 : Résoudre le problème R_2

$$(R_2) \left\{ \begin{array}{l} \max \Phi = -x_1 - 2x_2 \\ x_1, x_2 \in \mathcal{D} \\ x_1 - 2x_2 \geq y_1^1 - 3(1 - y_1^1) \\ -x_1 + 4x_2 \geq 3y_2^1 - 3(1 - y_2^1) \\ y_1^1 + y_2^1 \geq 1, \quad y_1^1, y_2^1 \in 0, 1 \\ x_1 - 2x_2 \geq 2y_1^2 - 3(1 - y_1^2) \quad (3) \\ -x_1 + 4x_2 \geq 2y_2^2 - 3(1 - y_2^2) \quad (4) \\ y_1^2 + y_2^2 \geq 1, \quad y_1^2, y_2^2 \in 0, 1 \end{array} \right.$$

$x^3 = (2, 0)$, $y = (1, 0, 1, 0)$ une solution optimale de (R_2) et $Z(x^3) = (2, -2)$. Comme $\Phi(x^3) = -2 > \Phi_{inf} = -4$, poser $l = l + 1 = 3$ et aller à l'étape 1.

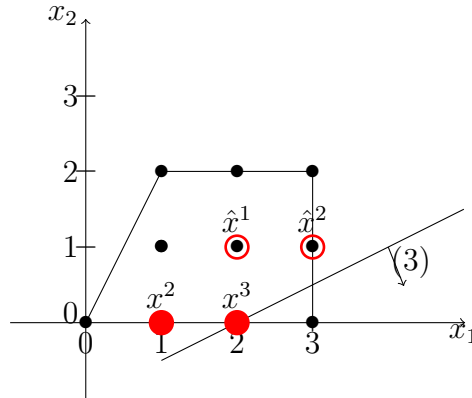


FIG. 2.4 – La région réduite \mathcal{D}^2

Itération 3 :

Étape 1 : La solution $x^3 = (2, 0)$ est testée pour l'efficacité en résolvant le problème (\mathcal{P}_x^3) , on trouve qu'elle est efficace ($\Theta^* = 0$), donc l'algorithme prend fin. $X_{opt} = (2, 0)$ solution optimale de (\mathcal{P}_E) et $\Phi_{opt} = -2$ est la valeur optimale du critère principal.

La norme de Tchebychev pour optimiser une fonction Linéaire sur l'Ensemble des Solutions Efficaces Discrètes

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous développons un algorithme exacte, pour résoudre le problème (\mathcal{P}_E) basé sur la norme pondérée de Tchebychev en évitant la résolution des sous-problèmes utilisée dans les deux méthodes citées dans le chapitre précédent. Cette norme est très utilisée dans l'élaboration des méthodes interactives pour résoudre le problème (MOILP), c'est une technique appropriée pour surmonter au problème de la caractérisation de toutes les solutions efficaces notamment celles qui sont non supportées NSE. Notre démarche réside sur la résolution d'un programme linéaire équivalent à la norme pondérée de Tchebychev appelé programme de la norme de Tchebychev "Weighted Tchebychev Programs"(WTP). Ce programme semble comme une alternative au test d'efficacité, sa résolution nous assure l'obtention d'une solution efficace à partir d'une solution admissible. Dans la suite de ce chapitre, nous rappelons quelques aspects théoriques sur les normes de Tchebychev et le point idéal qu'on a déjà détaillés dans le premier chapitre, ensuite, nous donnons une formulation de l'algorithme proposé en supposant que tout l'ensemble de solutions efficaces IE est fortement efficace, puis nous proposons une stratégie basée sur un programme linéaire mixte équivalent au programme de la norme de Tchebychev pour relaxer cette hypothèse.

Rappelons q'un problème de programmation multi-objectifs linéaire en nombres entiers est définit :

$$(MOILP) \equiv \text{"max"} \{Cx, \quad x \in \mathcal{D}\} \tag{3.1.1}$$

On suppose que $\mathcal{D} = S \cap \mathbb{Z}^n$ est non vide et que \mathbf{S} est un polyèdre convexe et borné $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, C est une matrice de dimension $p \times n$

d'éléments réels, et ses vecteurs lignes $c^i \in \mathbb{R}_n$, $i = 1, 2, \dots, p$.

Dans l'espace des critères, le problème (MOILP) est équivalent au problème suivant :

$$\text{'' max'' } \{z_i, \quad z \in \mathcal{Z}\} \quad (3.1.2)$$

Ou $z_i = c^i$, pour tout $1 \leq i \leq p$

Dans notre travail, sans perte de généralités, on s'intéresse principalement à la maximisation d'une fonction linéaire ϕ sur l'ensemble IE .

notons par (\mathcal{P}_E) le programme linéaire principal suivant :

$$\mathcal{P}_E \equiv \max\{dx, \quad x \in IE\}$$

Généralement $IE \neq D$, en autres, si le problème multi-objectifs (MOILP) est complètement efficace et le vecteur d est une combinaison linéaire des critères, l'ensemble IE peut être substitué par \mathcal{D} . Dans ce cas, le problème (\mathcal{P}_E) est équivalent au problème (\mathcal{P}_R) dit problème relaxé défini comme suit :

$$(\mathcal{P}_R) \equiv \max\{\phi = dx, \quad x \in \mathcal{D}\} \quad (3.1.3)$$

Qui peut être examiné par les techniques classiques de la programmation linéaire mono-objectif en nombres entiers.

3.2 La théorie de la norme de Tchebychev

Rappelons brièvement quelques notions de la théorie de la norme de Tchebychev et le point idéal.

Définition 12. le point idéal $z^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_p^*)$ est le vecteur qui maximise chacune des fonctions objectifs z_i i-e $z_i^* = \max\{c^i x, x \in D, i = 1, \dots, p\}$

On considère l'ensemble des vecteurs de poids

$$\Delta = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^p, 0 \leq \beta_i \leq 1, \sum_{i=1}^p \beta_i = 1 \right\}$$

Définition 13. La norme pondérée de Tchebychev d'un vecteur z peut être calculer en considérant le point idéal z^* comme origine :

$$\|z^* - z\|_{\beta} = \max_{i=1, \dots, p} \{\beta_i |z_i^* - z_i|\}$$

Définition 14. La norme augmentée de Tchebychev est défini comme suit :

$$\| \|z^* - z\|_{\beta, \rho} = \max_{i=1, \dots, p} \{\beta_i |z_i^* - z_i|\} + \rho \sum_{i=1}^p (|z_i^* - z_i|)$$

Avec ρ est un petit réel positif.

Exemple 1. Soit $\bar{z} = (1; 1)$ et $z^* = (3; 7)$ et $\bar{\beta} = (0.60; 0.40)$ alors la norme pondérée de Tchebychev de vecteur \bar{z} par rapport au point idéal z^* est $\|z^* - \bar{z}\|_{\beta} = 2.4$ et sa région est donnée par l'intersection du rectangle (ABCD) et le front de Pareto, voir la figure (3.1). Cette région contient tout les points qui dominent \bar{z} possédant des distances minimales du point idéal.

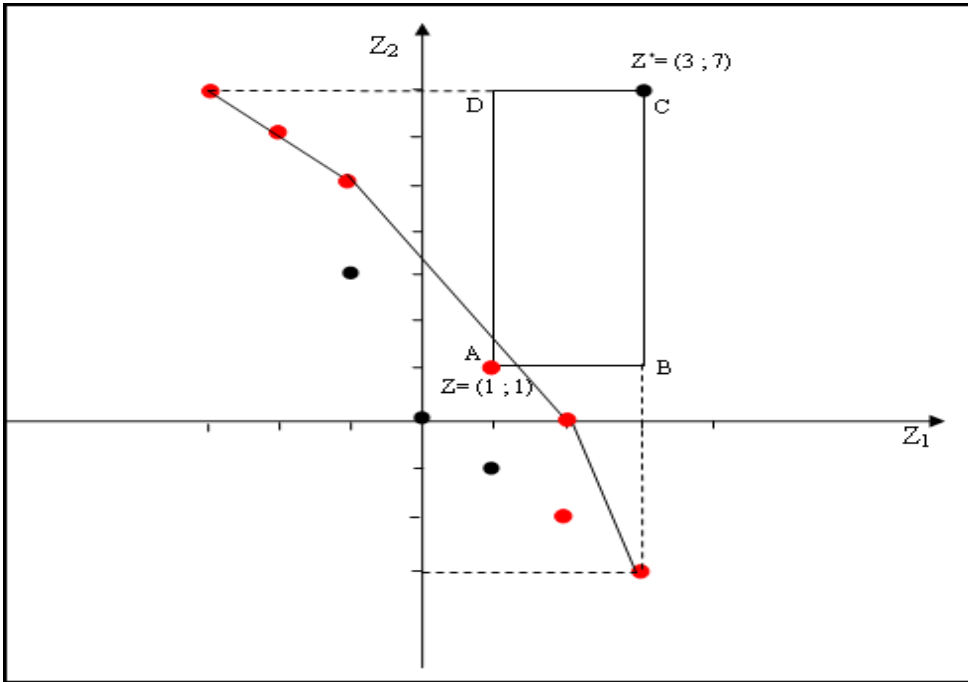


FIG. 3.1 – La norme pondérée de Tchebychev

Les normes de Tchebychev sont très utilisées pour mesurer, dans l'espace des critères, la déviation d'une solution donnée par rapport au point d'aspiration (souvent le point idéal). D'un point de vue pratique, le décideur opte pour les solutions ayant des distances minimales, cela se traduit par la minimisation de la déviation entre le point d'aspiration et la région optimale décrit par le norme utilisée. Mathématiquement, cela revient à résoudre le problème suivant :

$$\min_{z \in \mathcal{Z}} \{ \|z^* - z\|_{\beta} \} \quad (3.2.1)$$

qui est équivalent à

$$\min_{x \in \mathcal{D}} \{ \|z^* - Cx\|_{\beta} \} \quad (3.2.2)$$

(Bowman, 1976) a proposé de résoudre un programme linéaire mixte équivalent au problème (3.2.2), appelé programme de la norme pondérée de Tchebychev "weighted Tche-

bychev programs”(WTP)

$$\mathcal{P}(\beta) \begin{cases} \text{Min } \omega \\ \omega \geq \beta_i (z_i^* - z_i), 1 \leq i \leq p, \beta \in \Delta; \\ z \in \mathcal{Z}; \\ \omega \geq 0. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Tel que ω désigne la norme de Tchebychev, c'est-à-dire, la distance du point z au point idéal, sur lequel on a calculé le vecteur de poids β et les solutions optimales de $\mathcal{P}(\beta)$ se sont des vecteurs généralement non dominés qui possèdent des distances minimales que le point z . (Relativement au point \bar{z} , voir la figure 3.2).

Proposition 5. *Les deux problèmes (3.2.1) et (3.2.3) sont équivalents*

Preuve

De la définition de la norme pondérée de Tchebychev on a :

$$\begin{aligned} \omega &= \|z^* - z\|_\beta \\ &= \max_{i=1, \dots, p} \{\beta_i |z_i^* - z_i|\} \end{aligned}$$

Alors

$$\min_{z \in \mathcal{Z}} \omega = \min_{z \in \mathcal{Z}} \{\|z^* - z\|_\beta\} \Leftrightarrow \min_{z \in \mathcal{Z}} \max_{i=1, \dots, p} \{\beta_i |z_i^* - z_i|\}$$

ω est la borne inférieure de l'ensemble $\{\beta_i |z_i^* - z_i|\}, i = 1, \dots, p$ alors ω est le plus grand minorant de cet ensemble¹ d'où

$$\omega \geq \{\beta_i |z_i^* - z_i|\}, i = 1, \dots, p$$

Ce qui en résulte que le programme de la norme de Tchebychev $\mathcal{P}(\beta)$ est équivalent au problème (3.2.1).

□

L'équivalence a été énoncé dans l'espace des critères, il reste valable dans l'espace de décision. Alors le problème (3.2.1) est équivalent à

$$\mathcal{P}(\beta) \begin{cases} \text{Min } \omega \\ \omega \geq \beta_i (z_i^* - c^i x), 1 \leq i \leq p, \beta \in \Delta; \\ x \in \mathcal{D}; \\ \omega \geq 0. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

¹Selon la définition de la borne inférieure d'un ensemble

tels que

$$\beta_i = \begin{cases} \frac{1}{z_i^* - z_i} \left[\sum_{i=1}^p \frac{1}{z_i^* - z_i} \right]^{-1}, & \text{si } z_i^* \neq z_i \forall i; \\ 1, & \text{si } z_i^* = z_i; \\ 0, & \text{si } z_i^* \neq z_i, \exists j, z_j^* = z_j; \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Soit un point réalisable $\bar{z} \in \mathcal{Z}$, $\bar{z} < z^*$ et son vecteur poids $\bar{\beta} = (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_p)$ et $\bar{\beta}_i \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, p$ calculé selon l'équation (3.2.5) et $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^p$ dénote la direction de \bar{z} vers le point idéal z^* , la relation entre le vecteur de direction $\bar{\mu}$ et le vecteur de poids $\bar{\beta}$ est :

$$\bar{\mu} = \left(\frac{1}{\bar{\beta}_1}, \frac{1}{\bar{\beta}_2}, \dots, \frac{1}{\bar{\beta}_p} \right)$$

Où

$$\bar{\beta} = \frac{1}{z_i^* - \bar{z}_i} \left[\sum_{i=1}^p \frac{1}{z_i^* - \bar{z}_i} \right]^{-1}, 1 \leq i \leq p$$

La résolution de programme $\mathcal{P}(\bar{\beta})$ consiste à chercher selon la direction $\bar{\mu}$ les solutions non dominées ayant la distance minimale du point idéal dans sa région optimale donnée par l'intersection de la ligne dite "la ligne de niveau $\bar{\beta}$ " représentée par le rectangle discontinu (ABCD) et le front de Pareto, le point \bar{z} est appelé "sommet de la ligne de niveau" tel qu'il est montré dans la figure (3.2), pour lesquelles la valeur $\omega \geq 0$ est optimale pour le programme $\mathcal{P}(\bar{\beta})$.

Dans le programme $\mathcal{P}(\bar{\beta})$ on a : $\omega \geq \bar{\beta}_i (z_i^* - z_i), 1 \leq i \leq p$ implique que $z_i \geq z_i^* - \frac{\omega}{\bar{\beta}_i}$ pour tout $1 \leq i \leq p$. alors, toutes les solutions du programme $\mathcal{P}(\bar{\beta})$, qui dominent le point \bar{z} appartiennent à l'ensemble $\Phi(\omega)$ tels que

$$\Phi(\omega) = \left\{ z \in \mathbb{R}^p \mid z_i \in \left[z_i^* - \frac{\bar{\omega}}{\bar{\beta}_i}, +\infty \right], \beta_i > 0 \right\}$$

La représentation graphique du programme de Tchebychev ($\mathcal{P}(\beta)$) est donnée dans la figure (3.2).

Maintenant, soit un point $\bar{z} \in \mathcal{Z}$ tel qu'il existe j où $\bar{z}_j = z_j^*$ alors tous les composantes du vecteurs $\bar{\beta}$ sont nulles sauf la j^{me} qui égal à 1, la ligne optimale de ($\mathcal{P}\bar{\beta}$) est de niveau égale à 1 où ω est nul, donc la résolution du programme ($\mathcal{P}\bar{\beta}$) consiste à chercher les points non dominé sur cette ligne où certains sont faiblement dominés. Sur la figure (3.2) le point z^1 est dominé faiblement par le point z^2 . Cette situation peut être remarquée même pour des lignes optimales de niveaux < 1 .

Bien que le programme mixte de la norme pondérée de Tchebychev peut avoir plusieurs solutions optimales, le théorème suivant de (R.E. Steuer and E.U. Choo, 1986) nous assure qu'il existe au moins un point non dominé $\bar{z} \in \mathcal{Z}$ qui le résout.

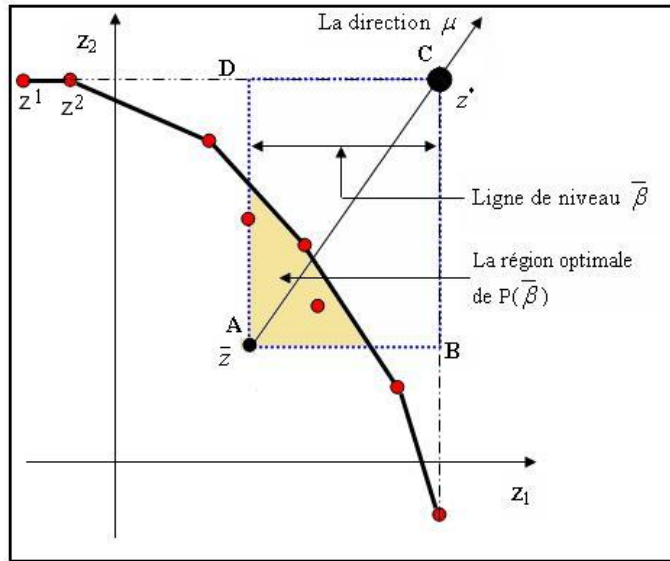


FIG. 3.2 – La représentation graphique du programme de Tchebychev

Théorème 14. (R.E. Steuer and E.U. Choo, 1986) Si \mathcal{Z} est fini, et soit $M = \{z \in \mathcal{Z}, (z, \omega)\}$ l'ensemble des solutions optimales de $\mathcal{P}(\beta)$ pour un vecteur $\beta \in \Delta$ alors il existe $\hat{z} \in M$ tel que \hat{z} est un point Pareto.

Preuve

Puisque \mathcal{Z} est fini, $\mathcal{Z}_P \neq \emptyset$, soit $\bar{\omega}$ la valeur optimale de la fonction objectif du programme mixte $\mathcal{P}(\beta)$, on suppose qu'il n'existe pas $z \in M$ tel que z est un point Pareto. Soit \hat{z} un élément de M qui n'est pas dominé par n'importe quel point de M , si $\hat{z} \notin \mathcal{Z}_P$ alors il existe $\bar{z} \in \mathcal{Z}_P$ tel que $\bar{z} \geq \hat{z}$ et $\bar{z} \neq \hat{z}$; mais $(\bar{\omega}, \bar{z})$ est une solution optimale de $\mathcal{P}(\beta)$ ce qui implique que \bar{z} est élément de M , qui est contradictoire. Alors il existe $\bar{z} \in M$ tel que $\bar{z} \in \mathcal{Z}_P$.

□

Le théorème a été énoncé dans l'espace des critères mais il reste valable dans le domaine de décision \mathcal{D} .

Théorème 15. (Bowman, 1976). Si \hat{x} est une solution efficace alors \hat{x} est une solution optimale de $\mathcal{P}(\beta)$ pour un certain $\beta \in \Delta$.

La condition suffisante de ce théorème n'est pas toujours vérifiée, du théorème de (R.E. Steuer and E.U. Choo, 1986) la solution optimale du programme $\mathcal{P}(\beta)$ peut ne pas être unique, et peut ne pas être efficace, mais il nous assure que $\mathcal{P}(\beta)$ admet une solution efficace. Comme nous le remarquons $\mathcal{P}(\beta)$ est un programme linéaire en variables mixtes, les techniques appropriées coupes de Dantzig, Gomory et Branch and Bound nous permettent d'avoir tout l'ensemble des solutions optimales de $\mathcal{P}(\beta)$. La problématique

se situe pas ici mais sur la détermination de la solution efficace parmi les nombreuses solutions. Pour cela considérons le théorème suivant :

Théorème 16. (*Bowman, 1976*) *Si l'ensemble des solutions efficaces du problème (MOILP) est fortement efficace alors toute solution optimale du programme $(\mathcal{P}(\beta))$ est une solution efficace de (MOILP), pour un certain $\beta \in \Delta$.*

(a) Soit z^p un point non dominé et $z^q \in Z$ tel que $z^p \neq z^q$ on a :

$$\beta_i^p = \begin{cases} \frac{1}{z_i^* - z_i^p} [\sum_{i=1}^p \frac{1}{z_i^* - z_i^p}]^{-1}, & \text{si } z_i^* \neq z_i^p \forall i; \\ 1, & \text{si } z_i^* = z_i^p; \\ 0, & \text{si } z_i^* \neq z_i^p, \exists j, z_j^* = z_j^p; \end{cases} \quad (3.2.6)$$

(b) Notons par ω_{pp} la valeur optimale du problème :

$$\mathcal{P}(\beta^p) \begin{cases} \text{Min } \omega \\ \omega \geq \beta_i^p (z_i^* - c^i x), 1 \leq i \leq p; \\ x \in \mathcal{D}; \\ \omega \geq 0. \end{cases}$$

Lemme 1. (*Steuer and E.U. Choo, 1986*).

Si on considère (a) et (b) alors il n'existe pas $z^q \neq z^p$ tel que z^q appartient à l'ensemble

$$\Phi(\omega_{pp}) = \left\{ z \in \mathbb{R}^p \mid z_i \in \left[z_i^* - \frac{\omega_{pp}}{\beta_i^p}, +\infty \right], \beta_i > 0 \right\}$$

3.3 Formulation de l'algorithme

Dans cette section, nous donnons une formulation générale de notre algorithme où IE est supposé fortement efficace en s'appuyant sur le résultat du théorème de (Bowman, 1976)(Thm 16); la condition suffisante de ce théorème n'est pas toujours vérifiée, pour cela, nous proposons une formulation équivalente au problème de la norme pondérée de Tchebychev pour relaxer cette hypothèse.

Le principe général de l'algorithme est simple : initialement, la procédure commence à déterminer le point idéal z^* et la borne inférieure de chaque critère. A chaque itération, les deux problèmes (\mathcal{P}_R) et $\mathcal{P}(\beta)$ sont résolus, une solution optimale (\mathcal{P}_R) est déterminée sur laquelle la borne supérieure de ϕ est mise à jour, une nouvelle solution efficace est générée et ajoutée à la liste où la borne inférieure de ϕ est évaluée. Notons que, conséquence du lemme (Steuer and E.U. Choo, 1986)(Lem.1) : si la solution optimale du (\mathcal{P}_R) est fortement efficace alors elle est la seule solution optimale de $\mathcal{P}(\beta)$. Sinon, le vecteur critère de la solution efficace générée domine fortement celui de la solution optimale de (\mathcal{P}_R) . Le domaine de décision se réduit d'avantage par l'ajout des contraintes connues dans la littérature par "Corners constraints" (Klein and Hannan, 1982)[31] non seulement

pour éviter les solutions efficaces déjà parcourues mais pour éliminer aussi des régions dominées. l'algorithme procède ainsi et prend fin, lorsque le domaine de décision devient vide ou lorsqu'on ne peut pas améliorer la valeur du critère principal où la borne inférieure coïncide avec la borne supérieure.

Le domaine restreint $\mathcal{D} - \cup_{s=1}^l \mathcal{D}_s$ en question se traduit par l'ajout des contraintes additionnelles :

$$\mathcal{D} - \bigcup_{s=1}^l \mathcal{D}_s = \left\{ \begin{array}{l} c^i x \geq (c^i x^s + 1)y_i^s + M_i(1 - y_i^s), \quad i=1,2,\dots,p, \quad s=1,2,\dots,l; \\ \sum_{i=1}^p y_i^s \geq 1; \\ y_i^s \in \{0, 1\} \\ x \in \mathcal{D} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad i=1,2,\dots,p, \quad s=1,2,\dots,l;$$

Tels que $\mathcal{D}_s = \{x, x \in \mathbb{Z}^n, Cx \leq Cx^s\}$ et $x^s \in \{x^s\}_{s=1}^l$ un sous-ensemble de solutions efficace du (MOILP) et M_i est la borne inférieure du critère i pour tout $i = 1, 2, \dots, p$ avec $M_i = 0$ si $c_j^i \geq 0$ pour tout $j = 1, \dots, n$, sinon $M_i = \min\{c^i x \mid x \in \mathcal{D}\}$.

Sachons que si $y_i^s = 0$ la contrainte associée est redondante et si $y_i^s = 1$ alors une amélioration stricte au i ème critère est imposés par la variable x^s .

Proposition 6. [44] Si x^1, x^2, \dots, x^l des solutions efficaces du problème (MOILP) et $\mathcal{D}_s = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^n, Cx \leq Cx^s\}$, si x^* est une solution efficace du problème multi-objectifs

$$(P_l) \equiv \text{"max"} \{Cx, x \in \mathcal{D} - \bigcup_{s=1}^l \mathcal{D}_s\}$$

alors x^* est une solution efficace du problème (MOILP).

Proposition 7. Soient x^1, x^2, \dots, x^l des solutions efficaces de (MOILP) et $\mathcal{D}_s = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^n : Cx \leq Cx^s\}$

Pour un certain $\beta \in \Delta$, si \hat{x} est une solution optimale du $\mathcal{P}(\beta)$:

$$\mathcal{P}(\beta) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \omega \\ \omega \geq \beta_i(z_i^* - c^i x), 1 \leq i \leq p \\ x \in \mathcal{D} - \cup_{s=1}^l \mathcal{D}_s \\ \omega \geq 0 \end{array} \right.$$

Alors \hat{x} est une solution efficace du (MOILP).

Preuve

Pour un vecteur $\beta \in \Delta$, en vertu de théorème de Bowman (Thm.16) toute solution

optimale \hat{x} de programme $\mathcal{P}(\beta)$ est efficace pour le problème (MOILP), de plus d'après la proposition (Prop.6) toute solution efficace de problème

$$” \max ” \left\{ Cx, x \in \mathcal{D} - \bigcup_{s=1}^l \mathcal{D}_s \right\}$$

est efficace pour le problème (MOILP). Par conséquent, si $\hat{x} \in \mathcal{D} - \bigcup_{s=1}^l \mathcal{D}_s$ donc $\hat{x} \notin \bigcup_{s=1}^l \mathcal{D}_s$

alors il n'existe pas $x \in \bigcup_{s=1}^l \mathcal{D}_s$ tel que $Cx \geq C\hat{x}$ avec une inégalité stricte.

□

L'algorithme de la méthode

Étape 0 :Initialisation – Déterminer le point idéal z^* , ou $z_i^* = \max\{c^i x, x \in \mathcal{D}\}, i = 1, \dots, p$.

- Trouver les bornes inférieure M_i de chaque critère $c^i, i = 1, \dots, p$
- Poser $x_{opt} = []$;
- Poser $\phi_{sup} = +\infty, \phi_{inf} = -\infty$
- $l = 1, IE_l = \emptyset$.

Étape 1 : Résoudre de PL relaxé \mathcal{P}_R^l dans $\mathcal{D} - \bigcup_{s=1}^l \mathcal{D}_s$

tels que $\mathcal{D}_s = \{x, x \in \mathbb{Z}_*^n, Cx \leq C\hat{x}^i\}$ et $\hat{x}^i \in IE_l$

- Si \mathcal{P}_R^l n'est pas réalisable. Terminer x_{opt} est optimale pour (\mathcal{P}_E)
- Sinon, soit x^l sa solution optimale et $z^l = Cx^l$ le vecteur critère associé.
 - Si $dx^l \leq \phi_{sup}$ poser $\phi_{sup} = dx^l$.
 - calculer le vecteur β^l de z^l selon l'équation (3.2.5) et aller à (2)

Étape 2 : Résoudre du PL mixte de la norme de Tchebychev $\mathcal{P}(\beta^l)$ dans $\mathcal{D} - \bigcup_{s=1}^l \mathcal{D}_s$

- Si $\mathcal{P}(\beta^l)$ est irréalisable. Terminer x_{opt} est optimale pour \mathcal{P}_E .
- Sinon, soit \hat{x}^s sa solution.
 - Si $d\hat{x}^s \geq \phi_{inf}$, poser $\phi_{inf} = d\hat{x}^s, x_{opt} = \hat{x}^s$ et aller à l'étape (3)

Étape 3 : Si $\phi_{inf} \geq \phi_{sup}$. Terminer x_{opt} est optimale pour (\mathcal{P}_E) .

Sinon . poser $IE_{l+1} = IE_l \cup \{\hat{x}^l\}, l = l + 1$ et aller à l'étape (1)

3.3.1 Convergence et propriétés

La caractéristique fondamentale de l'algorithme décrit ci-dessus est à chaque itération, le problème relaxé (\mathcal{P}_R) qui un programme linéaire en nombres entiers (ILP) et le programme de Tchebychev qui un programme linéaire en variable mixtes (MILP) sont résolus, une nouvelle solution fortement efficace est générée, les deux bornes inférieures et supérieure sont mises à jour, le domaine de décision se réduit par l'ajout des contraintes supplémentaires pour éliminer les régions dominées par les solutions efficaces courantes, l'algorithme prend fin lorsque les deux bornes soient égales ou le domaine de décisions devient vide.

Remarque 2. Notons que, lors de l'étape d'initialisation, nous pouvons avoir recours à une solution optimale efficace initiale parmi le sous-ensemble déterminé pour avoir un point idéal, et pour cela nous utilisons le principe du théorème (Iserman ,1974) suivant, *i-e* nous évaluons la borne inférieure du critère principal sur les solutions optimales qui sont uniques pour $\lambda \geq 0$. Dans ce cas,

$$IE_0 = \{\bar{x}^i \mid \bar{x}^i \text{ est une solution optimale est unique pour le critère } i\}$$

$$\phi_{inf} = \max\{d\bar{x}, \bar{x} \in IE_0\}$$

et la solution unique qui maximise le critère principal peut être considérée comme une solution efficace et optimale initiale, ainsi on peut aussi réduire le domaine de décision dès la première itération par l'ajout des contraintes relativement aux solutions efficaces de ce sous-ensemble.

Théorème 17. (Iserman ,1974) Soit le problème paramétrique $(P_\lambda) \equiv \lambda Cx \mid x \in \mathcal{D}$, si $\lambda \geq 0$ et \hat{x} est l'unique solution optimale de (P_λ) alors \hat{x} est fortement efficace.

A une itération donnée de l'algorithme, soit une solution optimale x^l pour le problème (\mathcal{P}_R) et son vecteur critère $z^l = Cx^l$, le vecteur de poids correspondant $\beta^l \in \Delta$ se calcule comme suit :

$$\beta_i^l = \begin{cases} \frac{1}{z_i^* - z_i^l} \left[\sum_{i=1}^p \frac{1}{z_i^* - z_i^l} \right]^{-1}, & \text{si } z_i^* \neq z_i^l \forall i; \\ 1, & \text{si } z_i^* = z_i^l; \\ 0, & \text{si } z_i^* \neq z_i^l, \exists j z_j^* = z_j^l. \end{cases}$$

Lors de la résolution de $(\mathcal{P}(\beta^l))$ trois cas sont envisageables :

- (a) S'il $\exists j$ tel que $z_j^* = z_j^l$ alors $\beta_j^l = 1$ et $\beta_i^l = 0$ pour tout $i \neq j$. Alors, la valeur optimale de ω est nulle pour laquelle la solution optimale de $(\mathcal{P}(\beta^l))$ est forcément x^l (puisque IE est supposé fortement efficace) alors x^l est efficace, donc l'algorithme prend fin ;
- (b) Si pour tout i $z_i^l \neq z_i^*$, alors les solutions qui dominent fortement le vecteur z^l se trouvent dans la région optimale de $(\mathcal{P}(\beta^l))$, la solution non dominée ayant la distance minimale du point idéal est générée ;
- (c) Autrement, x^l soit disant efficace et pour tout i $z_i^l \neq z_i^*$, on distingue deux situations :
 - Si x^l est supportée : dans ce cas, son vecteur critère z^l se situe sur la frontière de Pareto, donc la région optimale de $(\mathcal{P}(\beta^l))$ contient seulement z^l , alors x^l est l'unique solution optimale pour $(\mathcal{P}(\beta^l))$;
 - Si x^l est non-supportée alors z^l ne figure pas sur la frontière de Pareto, comme z^l est le sommet de la ligne optimale, on ne peut pas envisager une autre solution $z = Cx$ non dominé tel que z appartient à la région optimale de $(\mathcal{P}(\beta^l))$ et à la même ligne optimale z^l et plus proche du point idéal que z^l , alors x^l est l'unique solution optimale pour $(\mathcal{P}(\beta^l))$.

Proposition 8. *L'algorithme est fini.*

Preuve

Clairement, le domaine de décision \mathcal{D} est non vide et borné, le nombre de solutions efficace $|IE|$ est fini, l'ensemble des points non dominés \mathcal{Z}_P est fini, \mathcal{D} possède un nombre limité de solutions réalisable entières, dans chaque itération l'algorithme génère une solution réalisable entière et une solution efficace pour améliorer la valeur de ϕ , le domaine se réduit progressivement jusqu'à ce qu'il devient vide dont le programme relaxé (\mathcal{P}_R) devient irréalisable.

□

Corollaire 2. *L'algorithme proposé converge en un nombre fini d'itérations vers une solution optimale du problème (\mathcal{P}_E).*

Preuve

En particulier, dans le plus mauvais cas, l'algorithme exécute $|IE|$ itérations, c'est-à-dire, l'algorithme parcourt tout l'ensemble des solutions efficaces qui fini.

□

3.3.2 Illustration numérique

Nous illustrons le fonctionnement de l'algorithme par cet exemple didactique proposé (Jesùs, 2008)[29].

Exemple 2.

$$(MOILP) \equiv \text{"max"} \{x_1 - 2x_2, -x_1 + 4x_2, \quad x \in \mathcal{D}\}$$

tel que

$$\mathcal{D} = \{x \mid -2x_1 + 4x_2 \leq 0; x_1 \leq 3; x_2 \leq 2; x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+^*\}$$

On considère le problème principale :

$$(\mathcal{P}_E) \equiv \max\{\phi = -x_1 - 2x_2, \mid x \in IE\}$$

le problème relaxé :

$$(\mathcal{P}_R) \equiv \max\{\phi = -x_1 - 2x_2, \mid x \in \mathcal{D}\}$$

L'ensemble des solutions efficaces IE et son image Z_{IE} dans l'espace des critères et les valeurs du critère principal ϕ sont regroupés dans le tableau suivant :

Notons que les solutions (2;1) et (2;0) sont non-supportées.

Itération 1

Étape 0

| | | | | | | | |
|--------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|
| IE | (2;0) | (3;0) | (2;1) | (3;1) | (1;2) | (2;2) | (3;2) |
| Z_E | (2;-2) | (3;-3) | (0;2) | (1;1) | (-3;7) | (-2;7) | (-1;5) |
| ϕ | -2 | -3 | -4 | -5 | -5 | -6 | -7 |

TAB. 3.1 – Les résultats de l'exemple (Ex.2)

- Les bornes inférieures des deux fonctions objectifs $M_1 = 3, M_2 = 3$
- Le point idéal est $z^* = (3, 7), \bar{x}^1 = (3; 0), \bar{x}^2 = (1; 2)$.
- En vertu du théorème (Thm.17), les deux critères admettent des solutions uniques, alors on peut prendre $IE_1 = \{\bar{x}^1, \bar{x}^2\}$.
- $\phi_{inf} = \max\{d\hat{x}^i | \hat{x}^i \in IE_1\} = -3$ alors $x_{opt} = \bar{x}^1 = (3; 0), \phi_{sup} = +\infty$.
- $l = 1, s = 2$
- Etape 1 : (Résoudre le problème relaxé \mathcal{P}_R^1)

$$(R_R^1) \begin{cases} \max \phi & = -x_1 - 2x_2 \\ x & \in \mathcal{D} - \cup_{k=1}^s \mathcal{D}_k \end{cases}$$

$$(\mathcal{P}_R^0) \begin{cases} \max \phi & = -x_1 - 2x_2 \\ x_1 - 2x_2 & \geq (3+1)y_1^1 - 3(1-y_1^1) \\ -x_1 + 4x_2 & \geq (-3+1)y_2^1 - 3(1-y_2^1) \\ x_1 - 2x_2 & \geq (-3+1)y_1^2 - 3(1-y_1^2) \\ -x_1 + 4x_2 & \geq (7+1)y_1^2 - 3(1-y_2^2) \\ y_1^1 + y_2^1 & \geq 1 \\ & x \in \mathcal{D} \\ & y_j^i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, j = 1, 2 \end{cases}$$

- $x^0 = (0; 0)$ la solution optimale de (\mathcal{P}_R^1) et le vecteur critère associé $z^1 = (0, 0)$
- $dx^3 = 0 \leq \phi_{sup} = +\infty, \phi_{sup} = 0$
- On calcule le vecteur $\beta^0 = (\beta_1^0, \beta_2^0)$
 - $\beta_1^1 = \frac{1}{z_1^* - z_1^1} [\frac{1}{z_1^* - z_1^1} + \frac{1}{z_2^* - z_2^1}]^{-1} = \frac{1}{3} [\frac{1}{3} + \frac{1}{7}]^{-1}$
 - $\beta_2^3 = \frac{1}{z_2^* - z_2^1} [\frac{1}{z_1^* - z_1^1} + \frac{1}{z_2^* - z_2^1}]^{-1} = \frac{1}{7} [\frac{1}{3} + \frac{1}{7}]^{-1}$
- $\beta^1 = (\frac{7}{10}, \frac{3}{10})$

Étape 2

- On résout le PL $(\mathcal{P}(\beta^1))$:

$$(\mathcal{P}(\beta^1)) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \omega \\ \omega \geq \frac{7}{10}(3 - x_1 + 2x_2) \\ \omega \geq \frac{3}{10}(7 + x_1 + 4x_2) \\ x_1 - 2x_2 \geq (3 + 1)y_1^1 - 3(1 - y_1^1) \\ -x_1 + 4x_2 \geq (-3 + 1)y_2^1 - 3(1 - y_2^1) \\ x_1 - 2x_2 \geq (-3 + 1)y_1^2 - 3(1 - y_1^2) \\ -x_1 + 4x_2 \geq (7 + 1)y_1^2 - 3(1 - y_2^2) \\ y_1^1 + y_2^1 \geq 1 \\ x \in \mathcal{D} \\ \omega \geq 0 \\ y_j^i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, j = 1, 2 \end{array} \right.$$

$$(\mathcal{P}(\beta^1)) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \omega \\ 10\omega + 7x_1 - 14x_2 \geq 21 \\ 10\omega - 3x_1 + 12x_2 \geq 21 \\ x_1 - 2x_2 \geq (3 + 1)y_1^1 - 3(1 - y_1^1) \\ -x_1 + 4x_2 \geq (-3 + 1)y_2^1 - 3(1 - y_2^1) \\ x_1 - 2x_2 \geq (-3 + 1)y_1^2 - 3(1 - y_1^2) \\ -x_1 + 4x_2 \geq (7 + 1)y_1^2 - 3(1 - y_2^2) \\ y_1^1 + y_2^1 \geq 1 \\ y_1^2 + y_2^2 \geq 1 \\ x \in \mathcal{D} \\ \omega \geq 0 \\ y_j^i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, j = 1, 2 \end{array} \right.$$

- La solution optimale de $(\mathcal{P}(\beta^1))$ est $\hat{x}^1 = (3; 1), \hat{z}^1 = (1; 1)$.
- $d\hat{x}^1 = -5 \not\leq \phi_{inf} = -3$

Étape 3

- $\phi_{inf} = -3 \neq \phi_{sup} = 0$.
- $IE_{l+1} = IE_l \cup \{\hat{x}^0\}, l = l + 1, s = s + 1$.

Itération 2

Étape 1

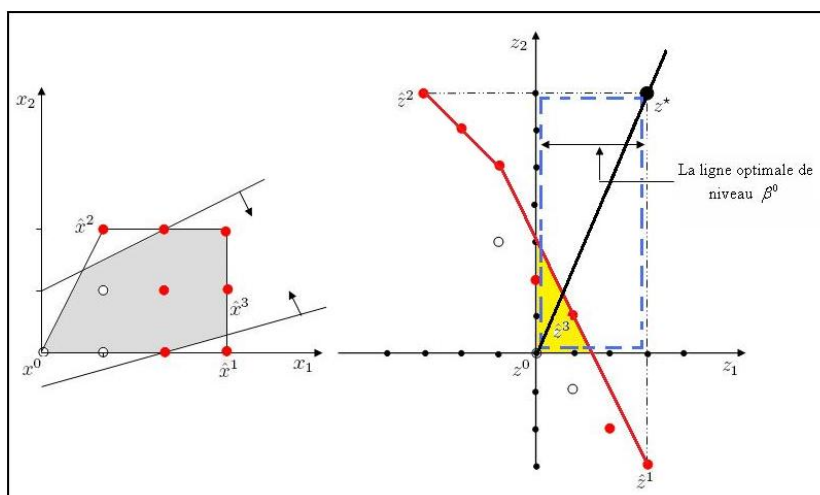


FIG. 3.3 – Le domaine réduit de l'itération 1

– Résoudre le PL (\mathcal{P}_R^2) dans $\mathcal{D} - \cup_{k=1}^s \mathcal{D}_k$

$$(\mathcal{P}_R^2) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \phi = -x_1 - 2x_2 \\ x_1 - 2x_2 \geq (3+1)y_1^1 - 3(1-y_1^1) \\ -x_1 + 4x_2 \geq (-3+1)y_2^1 - 3(1-y_2^1) \\ x_1 - 2x_2 \geq (-3+1)y_1^2 - 3(1-y_1^2) \\ -x_1 + 4x_2 \geq (7+1)y_1^2 - 3(1-y_2^2) \\ x_1 - 2x_2 \geq (1+1)y_1^3 - 3(1-y_1^3) \\ -x_1 + 4x_2 \geq (1+1)y_2^3 - 3(1-y_2^3) \\ y_1^1 + y_2^1 \geq 1 \\ y_1^2 + y_2^2 \geq 1 \\ y_1^3 + y_2^3 \geq 1 \\ x \in \mathcal{D} \\ y_j^i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2 \end{array} \right.$$

– Sa solution optimale est $x^2 = (2; 0)$ et $z^2 = (2, -2)$

– $dx^2 = -2 \leq \phi_{sup} = 0; \phi_{sup} = -2$

Étape 2

– $\beta^2 = (\frac{9}{10}; \frac{1}{10})$

– On résoud le PL $(\mathcal{P}(\beta^2))$

$$(\mathcal{P}(\beta^2)) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \omega \\ 10\omega + 9x_1 - 18x_2 \geq 27 \\ 10\omega - x_1 + 4x_2 \geq 7 \\ x_1 - 2x_2 \geq (3+1)y_1^1 - 3(1-y_1^1) \\ -x_1 + 4x_2 \geq (-3+1)y_2^1 - 3(1-y_2^1) \\ x_1 - 2x_2 \geq (-3+1)y_1^2 - 3(1-y_1^2) \\ -x_1 + 4x_2 \geq (7+1)y_2^2 - 3(1-y_2^2) \\ x_1 - 2x_2 \geq (1+1)y_1^3 - 3(1-y_1^3) \\ -x_1 + 4x_2 \geq (1+1)y_2^3 - 3(1-y_2^3) \\ y_1^1 + y_2^1 \geq 1 \\ y_1^2 + y_2^2 \geq 1 \\ y_1^3 + y_2^3 \geq 1 \\ x \in \mathcal{D} \\ y_j^i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2 \end{array} \right.$$

– Sa solution est $\hat{x}^2 = (2; 0), \hat{z}^2 \text{ d}x^2 = -2 \leq \phi_{inf} = -3, \phi_{inf} = -2, x_{opt} = (2, 0)$

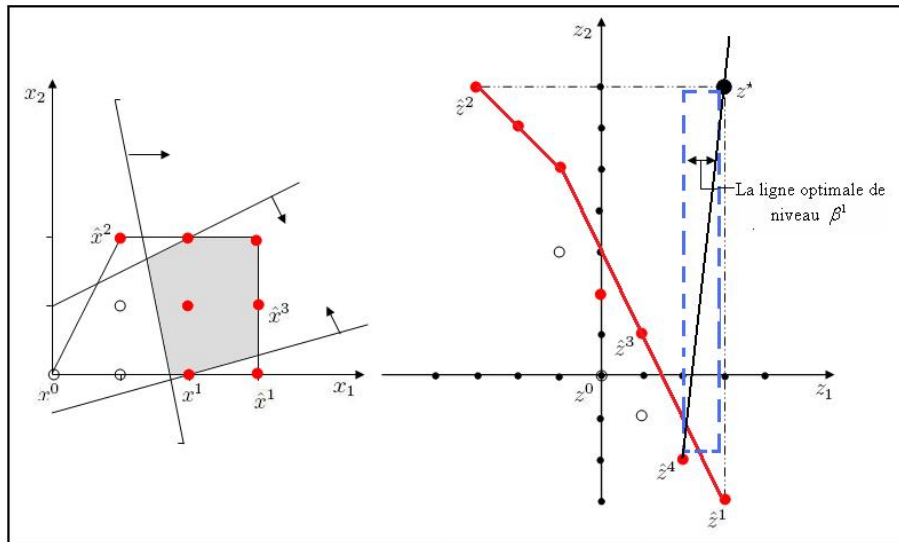


FIG. 3.4 – Le domaine réduit de l'itération 2

Etape 3

- $\phi_{inf} = \phi_{sup} - 2.$
- Terminer, la solution optimale est $x_{opt} = (2; 0)$ et $\phi_{opt} = \phi_{inf} = -2.$

3.4 Relaxation de la condition d'efficacité forte

Plusieurs problèmes pratiques violent l'hypothèse de l'efficacité forte de l'ensemble des solutions efficaces IE supposée dans l'algorithme décrit précédemment. Si l'ensemble IE n'est pas fortement efficace, le programme linéaire de la norme de Tchebychev $\mathcal{P}(\beta)$ peut avoir plusieurs solutions optimales, dont certaines ne sont pas efficaces. L'algorithme proposé doit être modifié pour tenir compte de l'efficacité non-forte de l'ensemble IE .

Dans l'espace des critères, un vecteur critère réalisable qui est faiblement dominé par un autre point Pareto est une problématique, parce que tous les deux peuvent se trouver sur la même ligne de niveau pour une certaine norme pondérée de Tchebychev, par conséquent tous les deux peuvent résoudre $\mathcal{P}(\beta)$ pour certain (β) produits au cours de l'algorithme. Par exemple, dans la figure (3.5), le rectangle discontinu (ABCD) représente la ligne de niveau optimale de la norme de Tchebychev pour un programme donné $\mathcal{P}(\beta)$, z^1 et z^2 sont optimales pour $\mathcal{P}(\beta)$, z^2 domine faiblement z^1 . Si une solution \hat{x} est optimale pour un programme $\mathcal{P}(\beta)$ pour un certain (β) alors son image dans l'espace des critères $\hat{z} = C\hat{x}$ se trouve sur un bord de la ligne de niveau et peut être faiblement dominé par n'importe quel autre point réalisable sur la ligne optimale. Pour relaxer la condition imposée sur l'ensemble IE et s'assurer que toute solution de programme de Tchebychev est efficace, on envisage deux approches pour accomplir ce but.

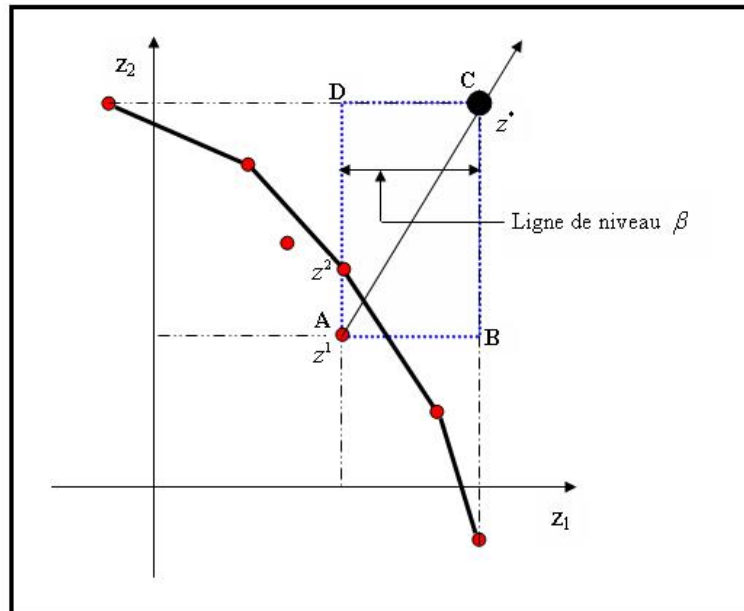


FIG. 3.5 – Ligne de niveau optimale et dominance faible

1. *La norme augmentée de Tchebychev* : Une façon pour s'assurer que toute solution du programme de la norme de Tchebychev est efficace est d'utiliser la norme augmentée

(généralisée) de Tchebychev proposée par (Steuer, 1986).

La norme augmentée de Tchebychev est définie comme suit :

$$\| \| z^* - z \| \|_{\beta, \rho} = \max_{i=1, \dots, p} \{ \beta_i |z_i^* - z_i| \} + \rho \sum_{i=1}^p (|z_i^* - z_i|)$$

Avec ρ est un petit réel positif. Une description graphique de cette norme se trouve dans [38].

Le programme de Tchebychev selon cette norme est donné par :

$$\mathcal{P}(\beta) \begin{cases} \text{Min } \omega + \rho \sum_{i=1}^p (|z_i^* - z_i|) \\ \omega \geq \beta_i (z_i^* - z_i), 1 \leq i \leq p, \beta \in \Delta; \\ z \in \mathcal{Z}; \\ \omega \geq 0. \end{cases}$$

Puisque $z_i^* - z_i \geq 0 \quad \forall z \in \mathcal{Z}$, alors la fonction objectif de $\mathcal{P}(\beta)$ s'écrit

$$\text{Min } \omega + \rho \sum_{i=1}^p (z_i^* - z_i) \quad 1 \leq i \leq p$$

Qui est équivalente à

$$\text{Min } \omega + \rho \sum_{i=1}^p (z_i^* - c^i x) \quad 1 \leq i \leq p$$

Pour tout petit $\rho > 0$ fixé :

- Toute solution optimale de $\mathcal{P}(\beta)$ est efficace (en particulier, elle n'est pas faiblement efficace) et
- Pour une solution x optimale donnée de $P(\beta)$ pour un certain β , alors il existe $0 \leq \hat{\beta} \leq 1$ tel que x est une solution optimale et unique pour $P(\beta)$.

Dans la pratique, le choix de la valeur de ρ peut être une problématique. Une valeur très petite de ρ peut engendrer des difficultés numériques parce que le poids du second membre de la fonction objectif de $P(\beta)$ peut perdre la signification du premier membre ω . Par contre, une grande valeur de ρ peut causer des solutions efficaces inaccessibles. D'après Ralphs et al [38], Steuer (1986) recommande $0.001 \leq \rho \leq 0.01$ mais ces valeurs ne sont pas toujours valables car le choix de ρ dépend de la dimension relative de la valeur optimale de la fonction objectif ω et elles ne peuvent pas être calculées a priori. Les valeurs de ρ assez petites peuvent garantir la découverte de solutions efficaces (en particulier pour un ρ proche de 0 ou de 1). Le programme de Tchebychev de cette norme est utilisé dans l'algorithme développé par Ralphs et al [38] pour énumérer tout l'ensemble des solutions efficaces d'un problème bi-critères en nombres entiers, les auteurs ont utilisé la méthode de "branch and

bound” pour trouver toutes les solutions optimales du problème $P(\beta)$ et comparer les solutions deux à deux puis prendre celle qui n’est pas dominée, cette approche n’est pas appropriée pour le problème étudié.

2. Une autre stratégie alternative pour relaxer l’hypothèse de l’efficacité forte de IE consiste à résoudre un programme linéaire de Tchebychev $P(\beta)$ modifié ayant p contraintes de plus ; ceci augmente le temps requis pour résoudre $P(\beta)$, mais élimine les difficultés numériques liées à la norme augmentée de Tchebychev. Le programme linéaire mixte équivalent en question est donné dans la proposition suivante :

Proposition 9. Soit \hat{x}^l une solution réalisable de \mathcal{D} , $z^l = C\hat{x}^l$ son vecteur critère et $\beta^l \in \Delta$, \hat{x}^l est une solution efficace de problème (MOILP) si et seulement si $\psi_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, p$ dans le programme linéaire suivant :

$$P(\beta^l) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \omega \\ \text{s.c} \quad c^i x - \psi_i = c^i \hat{x}^l, \quad 1 \leq i \leq p \\ \quad \quad \omega \geq \beta_i^l (z_i^* - c^i \hat{x}^l), \quad 1 \leq i \leq p, \beta \in \Delta; \\ \quad \quad x \in \mathcal{D} - \cup_{s=1}^l D_s \\ \quad \quad \omega \geq 0 \\ \quad \quad \psi_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, p \end{array} \right.$$

Preuve

(\Rightarrow) Par l’absurde, soit \hat{x}^l une solution efficace de (MOILP), on suppose qu’il existe un indice i tel que $\psi_i \neq 0$, soit x une solution optimale de $P(\beta^l)$ et $\exists i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\psi_i > 0$ alors $c^i x > c^i \hat{x}^l$ ce qui implique que Cx domine $C\hat{x}^l$ ce qui contredit l’hypothèse \hat{x}^l est solution efficace.

(\Leftarrow) Soit maintenant $\psi_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, p$, on suppose que \hat{x}^l n’est pas efficace, alors il existe $x \in \mathcal{D}$ tel que $Cx \geq C\hat{x}^l$ et $Cx \neq C\hat{x}^l$ alors $\exists i \in \{1, 2, \dots, P\}$ tel que $c^i x - c^i \hat{x}^l > 0$ donc $\psi_i > 0$ ce qui est contradictoire avec $\psi_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, p$.

□

L’algorithme décrit précédemment doit être modifié pour tenir compte de l’efficacité non-forte de l’ensemble IE , comme nous l’avons indiqué, l’utilisation de la norme augmentée de Tchebychev n’est pas recommandée car le choix de ρ est une autre problématique. En effet, nous optons pour la deuxième alternative où le programme linéaire mixte de la norme de Tchebychev à résoudre dans la deuxième étape de l’algorithme est celui décrit dans la proposition (9).

3.4.1 Illustration numérique

Nous considérons l'exemple à trois objectifs proposé par Jesus (2005) [28]

$$(MOILP) \left\{ \begin{array}{l} \text{"max"} \quad z_1 = x_1 \\ \text{"max"} \quad z_2 = x_2 \\ \text{"max"} \quad z_3 = x_3 \\ \text{s.c} \quad x_1 + x_2 \leq 5 \\ \quad \quad x_1 \leq 3 \\ \quad \quad x_2 \leq 3 \\ \quad \quad x_3 \leq 1 \\ \quad \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+^* \end{array} \right. \quad (3.4.1)$$

le problème principal est :

$$(\mathcal{P}_E) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \phi = -x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ \text{s.c} \quad x \in IE \end{array} \right. \quad (3.4.2)$$

le problème relaxé est :

$$(\mathcal{P}_R) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \phi = -x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ \text{s.c} \quad x \in \mathcal{D} \end{array} \right. \quad (3.4.3)$$

Initialisation

- $M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = 0$
- le point idéal $z^* = (3; 3; 1)$
- $\phi_{inf} = -\infty, \phi_{sup} = +\infty$
- $l = 1, IE_1 = \emptyset, s = 0$.

Itération 1 Etape 1 : On résoud le PL relaxé (\mathcal{P}_R^1)

$$(\mathcal{P}_R^1) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \phi = -x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ \text{s.c} \quad x_1 + x_2 \leq 5 \\ \quad \quad x_1 \leq 3 \\ \quad \quad x_2 \leq 3 \\ \quad \quad x_3 \leq 1 \\ \quad \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+^* \end{array} \right.$$

- Sa solution est $x^1 = (0; 0; 0) \quad z^1 = (0; 0; 0)$
- $dx^1 = 0 \leq \phi_{sup} = +\infty, \phi_{sup} = 0$
- On calcule β^1
 - $\beta_1^1 = \frac{1}{3-0} \left[\frac{1}{3-0} + \frac{1}{3-0} + \frac{1}{1-0} \right]^{-1} = \frac{1}{5}$
 - $\beta_2^1 = \frac{1}{3-0} \left[\frac{1}{3-0} + \frac{1}{3-0} + \frac{1}{1-0} \right]^{-1} = \frac{1}{5}$

- $\beta_3^1 = \frac{1}{1-0}[\frac{1}{3-0} + \frac{1}{3-0} + \frac{1}{1-0}]^{-1} = \frac{3}{5}$
- $\beta^1 = (\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{3}{5})$

Étape 2 : On résoud le PL de la norme de Tchebychev $\mathcal{P}(\beta^1)$

- On résoud le PL mixte $\mathcal{P}(\beta^0)$ défini dans la proposition (9)

$$\mathcal{P}(\beta^1) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \omega \\ 5\omega + x_1 \geq 3 \\ 5\omega + x_2 \geq 3 \\ 5\omega + x_3 \geq 3 \\ x_1 - \psi_1 = 0 \\ x_2 - \psi_2 = 0 \\ x_3 - \psi_3 = 0 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{D} \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+^* \omega \geq 0 \end{array} \right.$$

- Tous les $\psi_i \neq 0, i = 1, 2, 3$ la solution $x^1 = (0; 0; 0)$ n'est pas efficace
- Sa solution est $\hat{x}^1 = (3; 2; 1); \hat{z}^1 = (3; 2; 1)$
- $d\hat{x}^1 = -11 \geq \phi_{inf} = -\infty, \phi_{inf} = -11, x_{opt} = \hat{x}^1 = (3; 2; 1)$

Étape 3

- $\phi_{inf} = -11 \not\geq \phi_{sup} = 0.$
- $IE_{l+1} = IE_0 \cup \{\hat{x}^1\}, l = l + 1, s = s + 1$

Itération 2

Étape 1 : On résoud le pl relaxé (\mathcal{P}_R^2) dans $\mathcal{D} - \bigcup_{k=1}^s \mathcal{D}_k$

tel que $\mathcal{D}_k = \{x \in \mathbb{Z}_+^*, C\hat{x}^1 \geq Cx\}$

$$(\mathcal{P}_R^2) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \phi = -x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ \text{s.c} \quad x_1 - 2x_2 \geq (3+1)y_1^1 - 3(1-y_1^1) \\ \quad \quad x_1 \geq (3+1)y_1^1 \\ \quad \quad x_2 \geq (2+1)y_2^1 \\ \quad \quad x_3 \geq (1+1)y_1^1 \\ y_1^1 + y_2^1 + y_3^1 \geq 1 \\ \quad \quad y_j^1 \in \{0, 1\}, j = 1, 2, 3 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{D} \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+^* \end{array} \right.$$

- Sa solution est $x^2 = (0; 3; 0) z^2 = (0; 3; 0)$
- $dx^2 = -6 \leq \phi_{sup} = 0, \phi_{sup} = -6$
- $\beta^2 = (0; 1; 0)$ puisque $z_2^2 = z_2^*$

Étape 2 : On résoud le PL de la norme de Tchebychev $\mathcal{P}(\beta^2)$

$$\mathcal{P}(\beta^2) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \omega \\ \omega + x_2 \geq 3 \\ x_1 - \psi_1 = 0 \\ x_2 - \psi_2 = 3 \\ x_3 - \psi_3 = 0 \\ x \in \mathcal{D} - \bigcup_{k=1}^s \mathcal{D}_k \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+^* \\ \omega \geq 0 \end{array} \right.$$

- Tous les $\psi_i \neq 0, i = 1, 2, 3$ la solution $x^2 = (0; 3; 0)$ n'est pas efficace
- Sa solution est $\hat{x}^1 = (2; 3; 1); \hat{z}^2 = (2; 3; 1)$
- $d\hat{x}^2 = -12 \not\geq \phi_{inf} = -11, x_{opt} = \hat{x}^2 = (3; 2; 1)$

Étape 3

- $\phi_{inf} = -11 \not\geq \phi_{sup} = -6.$
- $IE_{l+1} = IE_l \cup \{\hat{x}^1\}, l = l + 1$

Itération 3

Etape 1 : On résoud le pl relaxé (\mathcal{P}_R^3) dans $\mathcal{D} - \bigcup_{k=1}^s \mathcal{D}_k$ tel que $\mathcal{D}_k = \{x \in \mathbb{Z}_+^*, C\hat{x}^l \geq Cx\}, \hat{x}^l \in IE_2$

$$(\mathcal{P}_R^3) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \phi = -x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ \text{s.c} \quad x_1 \geq (3 + 1)y_1^1 \\ \quad \quad x_2 \geq (2 + 1)y_2^1 \\ \quad \quad x_3 \geq (1 + 1)y_3^1 \\ \quad \quad x_1 \geq (2 + 1)y_1^2 \\ \quad \quad x_2 \geq (3 + 1)y_2^2 \\ \quad \quad x_3 \geq (1 + 1)y_3^2 \\ y_1^1 + y_2^1 + y_3^1 \geq 1 \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \geq 1 \\ \quad \quad y_j^i \in \{0, 1\}; j = 1, 2, 3; i = 1, 2 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{D} \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+^* \end{array} \right.$$

Le PL (\mathcal{P}_R^3) est irréalisable.

L'algorithme prend fin : la solution optimale du problème principal est $(3; 2; 1)$ et $\phi_{opt} = -11.$

Remarque 3. Dans l'exemple illustratif précédent, si on résoud le programme de la norme de Tchebychev relativement à la solution optimale $x^1 = (0; 0; 0)$ de (\mathcal{P}_R^1) sans tenir compte

de la nouvelle formulation nous trouvons sa solution $(2;2;1)$ qui est faiblement dominée par la solution $(2;3;1)$ donnée par le programme de Tchebychev modifié. De ce fait, la modification du programme de tchebychev nous permet d'éviter ce genre de situations.

3.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une nouvelle méthode pour résoudre le problème de l'optimisation d'une fonction sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème (MOILP) sans devoir énumérer tout l'ensemble efficace. Contrairement aux deux algorithmes décrits dans le chapitre précédent, notre algorithme évite le recours à la résolution des sous-programmes pour tester l'efficacité d'une solution admissible. Il est clair qu'une expérimentation visant à comparer ces trois méthodes semble intéressante bien qu'une telle comparaison n'ait pas été faite dans ce travail. L'algorithme proposé exploite un programme linéaire unicritère en variables mixtes issu de la norme pondérée de Tchebychev comme un moyen pour caractériser une solution efficace à partir d'une solution réalisable. Pour faire face à la problématique liée aux solutions faiblement efficaces et à la norme utilisée, nous avons proposé de résoudre un programme de Tchebychev modifié dont la résolution nous assure l'obtention d'une solution efficace. Nous avons illustré le fonctionnement de l'algorithme sur deux exemples, notamment dans la présence des solutions faiblement efficaces et des solutions efficaces non supportées. Les résultats trouvés montrent que pour avoir la solution optimale pour chacun des problèmes considérés, l'algorithme évite l'énumération explicite de tous les points efficaces, l'algorithme parcourt uniquement un sous-ensemble très restreint de solutions efficaces sur lequel le problème étudié est fondé. Dans le chapitre suivant, nous allons tester les performances de l'algorithme aux termes de la durée d'exécution et le nombre de solutions efficaces parcourues au cours de l'exécution par le programme de la méthode implémentée sous MATLAB.

Expérimentations et résultats

Dans ce chapitre, nous complétons notre étude par des résultats expérimentaux afin de tester les performances de l'algorithme proposé pour la maximisation d'un critère linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème (MOILP) . L'algorithme à été programmé sous l'environnement MATLAB 7.7 et exécuter sur un PC (Intel Centrino, processeur 1.8 Ghz) avec 2 Gb de RAM, sous le système d'exploitation (Windows Vista Basic).

4.1 Implantation et description du programme

Le programme de la nouvelle méthode contient essentiellement 2 étapes et un test d'arrêt, la première étape consiste à résoudre le problème relaxé du problème principal, et la deuxième est consacré à la résolution du programme de Tchebychev en relaxant la condition d'efficacité forte tel qu'il est décrit dans la proposition (9), l'exécution du programme s'arrête une fois que la valeur de la borne inférieure du critère principal coïncide avec la valeur de la borne supérieure ou le problème relaxé devient irréalisable. L'architecture de l'algorithme développé s'est articulée sur la recherche d'une solution optimale de deux types programmes linéaires, un programme en variables entières (ILP) et un programme en variables mixtes (entières, 0-1 ,réelles), pour leurs résolution, le programme de la méthodes fait appel à une fonction recursive programmée par Katrick [30] exploitant la méthode de "Branch & Bound".

Les principales procédures utilisées sont les suivantes :

- Algorithmes révisé du simplexe et dual simplexe : ces deux algorithmes sont appelés par la procédure de "Branch & bound" pour résoudre les programmes linéaires.
- Procédure de "Branch & bound" : Cette procédure est appelée à chaque itération

au niveau de deux étapes, la première étape pour résoudre le problème relaxé (P_R) du problème principal en maximisant le critère linéaire $\phi(x) = dx$, et la deuxième étape pour résoudre le programme de la norme de Tchebychev.

- Procédure d’initialisation : cette procédure fait appel à la procédure précédente pour trouver le point idéal z^* et les bornes inférieures des critères.
- Procédure Beta : Cette procédure consiste à calculer à chaque itération le vecteur β du vecteur critère de la solution optimale du problème relaxé trouvée antérieurement.

Toutes ces procédures sont appelées d’un programme principal élaboré à partir de l’organigramme présenté en annexe (4.1). Avant d’exécuter le programme principal, l’utilisateur doit insérer les données d’entrées nécessaires : la matrice des critères $C(p \times n)$, la matrice des contraintes $A(m \times n)$, le vecteur second membre des contraintes $b(m \times 1)$ et le vecteur du critères principal $d(1 \times n)$. Ces données peuvent être introduites d’une manière interactive ou à partir d’un fichier de données “.m”.

4.2 Tests sur des exemples traités par quelques auteurs

Le tableau suivant présente quelques exemples traités dans la littérature, on a ajouté un critère principal et on l’a évalué sur l’ensemble des solutions efficaces déterminées par la méthode de Klein & Hannan [31] .

| Instances | n | m | p | #itér | durée(sec.) | #sol-eff | #sol-eff parcouru |
|----------------------------|---|---|---|-------|-------------|----------|-------------------|
| J.M. Jorge[29] | 2 | 3 | 2 | 2 | 0.0147 | 7 | 2 |
| J. Philip [35] | 2 | 3 | 2 | 4 | 0.0530 | 4 | 4 |
| R.Gupta & R. Mahorta [49] | 2 | 3 | 3 | 4 | 0.2799 | 5 | 4 |
| J. Sylva & A. crema [44] | 4 | 6 | 2 | 2 | 0.1270 | 4 | 2 |
| J. Sylva & A. Crema [45] | 3 | 4 | 2 | 1 | 0.0191 | 4 | 1 |
| D. Klein & E. Hannan [31] | 4 | 6 | 2 | 1 | 0.0050 | 6 | 1 |
| J.N. Karaivanova et al[12] | 3 | 3 | 3 | 1 | 0.0030 | 14 | 1 |
| R.Stueur [41] | 8 | 8 | 3 | 1 | 0.0195 | 5 | 1 |
| V.J. Bowman [12] | 3 | 4 | 2 | 1 | 0.0354 | 3 | 1 |

TAB. 4.1 – Exemples didactiques provenant de la littérature

Avec :

- $n, m, p(p \geq 2) \in N_*^+$: sont respectivement le nombre de variables de décision, le nombre de contraintes, le nombre de critères.
- #itér : est le nombre d’itérations effectuées, notons qu’il est égal au nombre de programmes de la norme pondérée de Tchebychev ($P(\beta)$) résolus au cours de l’exécution.

- #durée : La durée d'exécution en secondes (sec.).
- # sol-eff : le nombre de solutions efficaces.
- # sol-eff parcourues : le nombre des solutions efficaces parcourues au cours de l'exécution.

Nous remarquons dans ce tableau que l'algorithme proposé génère une solution optimale maximisant le critère principal sans devoir énumérer tout l'ensemble de solutions efficaces qui peut être grand même pour un problème de petite taille à l'encontre l'exemple de J. N. Karaivanova et al qui contient 14 solutions efficaces mais uniquement un sous-ensemble de solutions efficaces, à l'exception de l'exemple J. Philip, l'algorithme parcourt tout l'ensemble efficace. Notons que, le nombre d'itérations effectuées est égal aux nombre de solutions efficaces parcourues. La durée de l'exécution varié en fonction du nombre de programmes linéaires résolus et la taille du problème traité.

4.3 Tests sur des exemples générés aléatoirement

Pour mesurer les performances de l'algorithme, seulement un regard global est nécessaire pour voir comment la durée de l'exécution (en Secondes.) et le nombre d'itérations se développent. Au total de 240 problèmes, ont été aléatoirement générés selon la procédure suivante : Les composantes de la matrice A, C sont générées respectivement selon les distributions uniformes discrètes $[1, 30]$ et $[-10, 10]$, le vecteur b est généré selon la distribution uniforme discrète $[75, 150]$ et le vecteur d du critère principal $\phi(x)$ est généré de la même distribution que la matrice C . Afin d'assurer l'admissibilité du domaine de décision \mathcal{D} , toutes les contraintes de chaque problème généré sont du type " \leq " et les coefficients de la matrice A et du vecteur b sont tous positifs, ainsi la région réalisable est bornée. Les instances traitées ont été regroupées en 24 catégories selon le nombre de variables, de contraintes et de fonctions objectifs . Le nombre de fonctions objectifs p a été fixé à 3, 5 et 8.

Les résultats obtenus pour chaque instance représentent la moyenne sur dix exécutions indépendantes. Le tableau 1 montre le temps moyen (en secondes) et le nombre moyen d'itérations. En outre, les valeurs minimums et maximums de chaque mesure sont rapportées en intervalles. En particulier, le tableau 1 montre l'exécution de l'algorithme quand le nombre de variables augmente par rapport au nombre de contraintes, la moyenne de chaque mesure est obtenue quand le nombre de variables est incrémenté. En revanche, l'effet d'augmenter le nombre de contraintes, pour un nombre fixe de variables, est moins perceptible, généralement le nombre de contraintes est inversement lié à la taille de l'ensemble réalisable.

Nous remarquons dans le tableau ci-dessus que le nombre de solutions efficaces parcourues, qui est égal au nombre moyen d'itérations effectuées, le nombre moyen ne dépasse pas 8 itérations ce qui est relativement petit, par rapport aux tailles des instances traitées.

| p | p=3 | | p=5 | | p=8 | |
|----------------|-------------------------------|-----------------|--------------------------------|-----------------|-------------------------------|----------------|
| | #durée | #itér | #durée | #itér | #durée | #itér |
| 10×10 | 1.9959 [0.0282,6.3889] | 3.80 [1,9] | 2.9622 [0.0387,22.6666] | 2.90 [1,7] | 8.5287 [0.597,24.2301] | 3.70 [1,7] |
| 10×15 | 24.5502 [0.4246,188.6122] | 4.50 [2,14] | 19.8598 [0.6786,143.0883] | 3.80 [1,12] | 83.7872 [1.8536,135.5467] | 6.60 [1,12] |
| 15×15 | 7.9937 [0.5129,38.4163] | 3.80 [1,6] | 13.5034 [0.3321,44.7659] | 3.70 [1,9] | 17.9318 [0.6534,137.7048] | 2.80 [1,6] |
| 15×20 | 89.5642 [0.3426 156.7653] | 5.80 [1,10] | 186.0249 [0.2395 203.8093] | 6.90 [1,13] | 56.5700 [1.0907 239.8551] | 5.10 [2 13] |
| 20×20 | 47.9937 [2.1289,173.4673] | 3.60 [1,10] | 56.7834 [1.4536,184.2153] | 5.20 [1,10] | 44.8291 [0.9835,148.2332] | 3.50 [1,9] |
| 20×25 | 102.7835 [1.2445,351.8174] | 5.80 [1,15] | 47.6417 [2.5106,136.2583] | 4.20 [1,8] | 98.0330 [0.8986,200.1312] | 3.60 [1,6] |
| 20×35 | 131.2083 [1.2097 405.7556] | 5.60 [2 ,10] | 101.6787 [0.2881 343.2778] | 5.40 [1,8] | 169.9712 [2.7565,613.2332] | 5.50 [1,11] |
| 25×25 | 198.2347 [1.9831 978.6541] | 6.90 [2 ,12] | 346.7863 [1.4321 1294.5179] | 7.80 [2 ,14] | 267.1785 [1.1756,840.1333] | 6.30 [1,10] |

TAB. 4.2 – Tableau de résultats 1.

Évidemment, les difficultés rencontrées dans la solution de ces problèmes sont étroitement liés à leurs dimensions notamment lorsque le nombre de variables n est grand. Constatons que le temps d'exécution est significatif dans quelques instances traitées. En effet, lors de l'étape initialisation qui consiste à déterminer le point idéal et la borne inférieure de chaque critère d'où la résolution de $2p$, (p étant le nombre de critères) programmes unicritères en nombres entiers ayant m contraintes et n variables, à chaque itération réalisée on résoud deux types de problèmes, une nouvelle solution efficace est générée. Certes, cette solution nous sert d'avantage pour réduire le domaine de décision en éliminant des régions dominées, mais elle augmente la taille des deux problèmes, le problème relaxé s'accroît de $2p + 1$ contraintes et de p variables en 0-1, le programme de la norme de Tchebychev s'augmente de $3p + 1$ contraintes et de $p + 1$ variables dont p sont en 0-1 et une variable continue. En dépit de cette complexité, l'explosion en terme de temps d'exécution et de l'espace mémoire observés est évidemment due à la nature discrète et à taille du problème où l'utilisation d'une procédure exacte comme "Branch&Bound" n'est pas toujours florissant.

Conclusions et perspectives

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés au problème de l'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème linéaire multi-objectifs en nombres entiers (MOILP). Le problème semble comme un moyen fructueux pour éviter l'énumération explicite de tout l'ensemble efficace. En dépit de ses aspects multi-objectifs et discret (non convexe), le problème appartient à la classe d'optimisation globale, ce qui n'est pas étonnant que de très peu de travaux ont été réalisés contrairement au problème dans le cas continu qui été abondamment étudié. Dans un premier temps, nous avons mis l'accent sur les problèmes linéaires multi-objectifs en nombres entiers où les aspects fondamentales et quelques méthodes de résolution ont été détaillés. Ensuite, nous avons abordé le problème considéré, les deux seules méthodes existantes dans la littérature ont été détaillées.

En effet, nous avons proposé un nouveau algorithme exacte pour résoudre le problème en question, l'idée de base est de considérer la norme pondérée de Tchebychev, cette technique est appropriée pour surmonter au problème de la caractérisation de toutes les solutions efficaces notamment celles qui sont non supportées. A nos connaissances, cette technique n'a été jamais utilisée pour résoudre ce type de problème. Notre algorithme consiste à résoudre une série de programmes de Tchebychev (un programme linéaire uni-critère en variables mixtes) dans le sens d'éviter l'exploration de tout l'ensemble efficace. Au premier lieu, pour éviter le piège lié à la norme pondérée de Tchebychev et aux solutions faiblement efficaces, nous avons supposé que tout l'ensemble des solutions efficaces est fortement efficace, puis on a proposé une autre reformulation du programme de Tchebychev pour relaxer cette hypothèse en lui intégrant le concept du test d'efficacité utilisé vivement dans les deux méthodes déjà développés.

L'algorithme proposé a été programmé et exécuté sous l'environnement MATLAB 7.7. Dans le but, d'observer le fonctionnement et de tester les performances de l'algorithme,

une série d'exécutions est réalisée sur des problèmes de différentes tailles aléatoirement générés. Les résultats obtenus témoignent encore que notre algorithme est très efficace au terme de gain du nombre de solutions efficaces parcourues. Vu l'aspect discret et le caractère multi-objectifs du problème, le temps d'exécution est parfois significatif dans quelques instances de grandes tailles.

Le travail que nous avons mené et les résultats que nous avons obtenus laissent entrevoir des perspectives de recherche qui nous semblent devoir être explorées dans un futur proche, parmi lesquelles nous évoquons :

- Une amélioration de l'algorithme en lui intégrant une métaheuristique comme la recherche Tabu dans la résolution des problèmes unicritères en nombres entiers pour faire face au ralentissement de la procédure de "Branch and Bound" afin de traiter des problèmes de grande taille.
- Une mise à jour d'un survey concernant l'optimisation d'un critère linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème multi-objectifs en nombres entiers où une étude comparative des trois méthodes peut être considérée.
- Dans le domaine de recherche des solutions efficaces, le cas mixte est peu abordé et mérite d'être considéré à la lumière des nouvelles approches introduites dans le cas où toutes les variables sont entières.
- L'optimisation d'un critère sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème multi-objectifs non linéaire. Nous pensons plus particulièrement au cas fractionnaire et au cas quadratique ; le cas où le critère principal est quadratique.

Bibliographie

- [1] M. Abbas and D. Chaabane. Optimizing a linear function over an integer efficient set. *European Journal of Operational Research*, 174 :1140-1161, 2006.
- [2] R. Benayoun, J. de Montgolfier, J. Tergny, and O. Laritchev. Linear programming with multiple objective functions : Step method (stem). *Mathematical Programming*, 13 : 366-375, 1971.
- [3] H.P. Benson. Optimization over the efficient set. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 98 : 562-580, 1984.
- [4] H.P. Benson. An all-linear programming relaxation algorithm for optimizing over the efficient set. *Journal of Global Optimization*, 1 :83-104, 1991.
- [5] H.P. Benson. A finite nonadjacent extreme-point search algorithm for optimization over the efficient set. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 73 :47-64, 1992.
- [6] H.P. Benson. A bisection-extreme point search algorithm for optimizing over the efficient set in the linear dependence case. *Journal of Global Optimization*, 3 :95-111, 1993.
- [7] H.P. Benson and D. Lee. Outcome-based algorithm for optimizing over the efficient set of a bicriteria linear programming problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 88 :77-105, 1996.
- [8] H.P. Benson and S. Sayin. Optimization over the efficient set : Four special cases. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 80 :1-16, 1994.
- [9] B.Metev and V. Vassilev. Estimating the minimum of a function over the efficient set of a molp problem for some experiments. *Cybernetics and Information Technologies*, 6 :1, 2006.
- [10] S. Bolintineanu. Minimization of a quasi-concave function over an efficient set. *Mathematical Programming*, 61 :89-110, 1993.

- [11] D. Chaabane. A method for optimizing over the integer efficient set in th criteria space. *Second International Engineering Conference Proceeding,Ryadh, KSA*, pp. 19-21, 2004.
- [12] D. Chaabane. *Contribution à l'optimisation multicritère en variables discrète*. PhD thesis, Faculté Polytechnique de Mons, Belgique, 2006.
- [13] L.G. Chalmet, L. Lemondis, and D.J. Elzinga. An algorithm for the bi-criterion integer programming problem. *European Journal of Operational Research*, 25 : 292-300, 1986.
- [14] J.P. Dauer. Optimization over the efficient set using an active constraint approach. *Methods and Models of Operations Research*, 35 :185-195, 1991.
- [15] J.P Dauer and T.A Fosnaugh. Optimization over the efficient set. *Journal of Global Optimization*, 7 : 261-277, 1995.
- [16] J.G. Ecker and I.A. Kouada. Finding all efficient extreme points for multiple objective linear programs. *Mathematical Programming*, 14 : 249-261, 1978.
- [17] J.G. Ecker and J.H. Song. Optimizing a linear function over an efficient set. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 83 :541-563, 1994.
- [18] M. Ehrgott. *Multicriteria Optimization*. Springer Berlin-Heidelberg, 2ème edition, 2005.
- [19] P.K. Eswaran, A. Ravindran, and H . Moskowitz. Algorithms for nonlinear integer bicriterion problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 63, No. 2, 1989.
- [20] H. Nakayama et al. *Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence, Vector Optimization*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [21] C.D. Flipo. *Optimisation Combinatoire Multi-Objectif : Apport des Méthodes Coopératives et Contribution à l'Extraction de Connaissances*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille, France, 2005.
- [22] J. Fülöp. A cutting plane algorithm for linear optimization over the efficient set. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, Berlin*, 405 :374-385, 1994.
- [23] L. Galand. *Méthodes exactes pour l'optimisation multicritère dans les graphes : recherche de solutions de compromis*. PhD thesis, Université Paris VI,UFR d'Ingénierie, 2008.
- [24] J.J. Gonzales, G.R. Reeves, and L.S. Franz. An interactive procedure for solving multiple objective integer linear programming problems. *in Haimes Y. and Chankong(eds), Decision Making with Multiple Objectives, Springer-Verlag, Berlin*, pp.250-260, 1985.
- [25] R. Horst and N.V. Thoai. Maximizing a concave function over the efficient or weakly efficient set. *European Journal of Operational Research*, 117 : 239-252, 1999.

- [26] R. Horst, N.V. Thoai, Y. Yamamoto, and D. Zenke. On optimization over the efficient set in linear multicriteria programming. *Journal of Optimization and Theory Applications*, 134 :433-443, 2007.
- [27] M. Jünger and V. Kaibel. *Integer Programming and Combinatorial Optimization*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [28] J.M. Jorge. A bilinear algorithm for optimizing a linear function over the efficient set of a multiple objective linear programming problem. *Journal of Global Optimization*, 31 : 1-16, 2005.
- [29] J.M. Jorge. An algorithm for optimizing a linear function over an integer efficient set. *European Journal of Operational Research*, 10.1016, 2008.
- [30] M. katrick. *The branch and bound algorithm for a mixed-integer linear programming problem*. www.mtalab-exchange.com, 2010.
- [31] D. Klein and E. Hannan. An algorithm for the multiple objective integer linear programming problem. *European Journal of Operational Research*, 9 : 378-385, 1982.
- [32] P. Kouvelis and S. Sayin. Algorithm robust for the bicriteria discrete optimization problem. *Ann Oper Res*, 147 : 71-85, 2006.
- [33] M. Luque, F. Ruiz, and R.E. Steuer. Modified interactive chebyshev algorithm (mica) for convex multiobjective programming. *European Journal of Operational Research*, 204 :557-564, 2010.
- [34] O. Marcotte and R.M. Soland. An interactive branch-and-bound algorithm for multiple criteria optimization. *Management Science*, 32 1 : 1231-1240, 1986.
- [35] J. Philip. Algorithms for the vector maximization problem. *Mathematical Programming*, 2 :207-229, 1972.
- [36] T.Q. Phong and T.Q. Tuyen. Bisection search algorithm for optimizing over the efficient set. *Vietman Journal of Mathematics*, 2000.
- [37] L. Pourkarimi, M.A. Yaghoobi, and M. Mashinchi. Determining maximal efficient faces in multiobjective linear programming problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 354 :234-248, 2009.
- [38] T.K. Ralphs, M.J. Saltzman, and M.M. Wiecek. An improved algorithm for solving biobjective integer programs. *Ann Oper Res*, 147 :43-70, 2007.
- [39] F. Ruiz, M. Luque, F. Miguel, and M.D.M. Mu noz. An additive achievement scalarizing function for multiobjective programming problems. *European Journal of Operational Research*, 188 : 683-694, 2008.
- [40] S. Sayin. Optimizing over the efficient set using a top-down search of faces. *Operations Research*, 48 :65-72, 2000.
- [41] R. Steuer. *Multiple Criteria Optimization : Theory, Computation and Applications*. John Wiley & Sons, New-York, 1985.

- [42] R.E. Steuer. Random problem generation and the computation of efficient extreme points in multiple objective linear programming. *Computational Optimization and Applications*, 3 :333-347, 1994.
- [43] R.E. Steuer and E.U. Choo. An interactive weighted tchebycheff procedure for multiple objective programming. *Mathematical Programming*, 26 :326-344, 1983.
- [44] J. Sylva and A. Crema. A method for finding the set of non-dominated vectors for multiple objective integer linear programs. *European Journal of Operational Research*, 158 :46-55, 2004.
- [45] J. Sylva and A. Crema. A method for finding well-dispersed subsets of non-dominated vectors for multiple objective mixed integer linear programs. *European Journal of Operational Research*, 180 :1011-1027, 2007.
- [46] S. Tawfik. *The branch and bound algorithm for a mixed-integer linear programming problem*. www.mtalab-exchange.com, 2010.
- [47] J. Teghem. Programmation linéaire. *Université de Bruxelles SMA*, deuxième édition, 2003.
- [48] P.T. Thach, H. Konno, and D. Yokota. Dual approach to nminimization on the set of paretooptimal solutions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 88 :689-707, 1996.
- [49] N.V. Thoai. A class of optimization problems over the efficient set of a multiple criteria nonlinear programming problem. *European Journal of Operational Research*, 122 : 58-68, 2000.
- [50] N.V. Thoai. Conical algorithm in global optimization for optimizing over efficient sets. *Journal of Global Optimization*, 18 : 321-336, 2001.
- [51] E.L. Ulungu. *Optimisation combinatoire multicritère : Détermination de l'Ensemble des Solutions Efficaces et Méthodes Interactives*. PhD thesis, Université de Mons-Hainaut, Belgique, 1993.
- [52] R. J. Vanderbei. *Linear Programming : Foundations and Extensions*. Princeton University, 2001.
- [53] R.J. Vanderbei. *Lineair Programming :Foundations and Extensions*. Princeton University Edition, 2000.
- [54] D.J. White. The maximization of a function over the efficient set via a penalty function approach. *European Journal of Operational Research*, 94 : 143-153, 1996.
- [55] Y. Yamamoto. Optimization over the efficient set : overview. *Journal of Global Optimization*, 22 :285-317, 2002.

Annexes

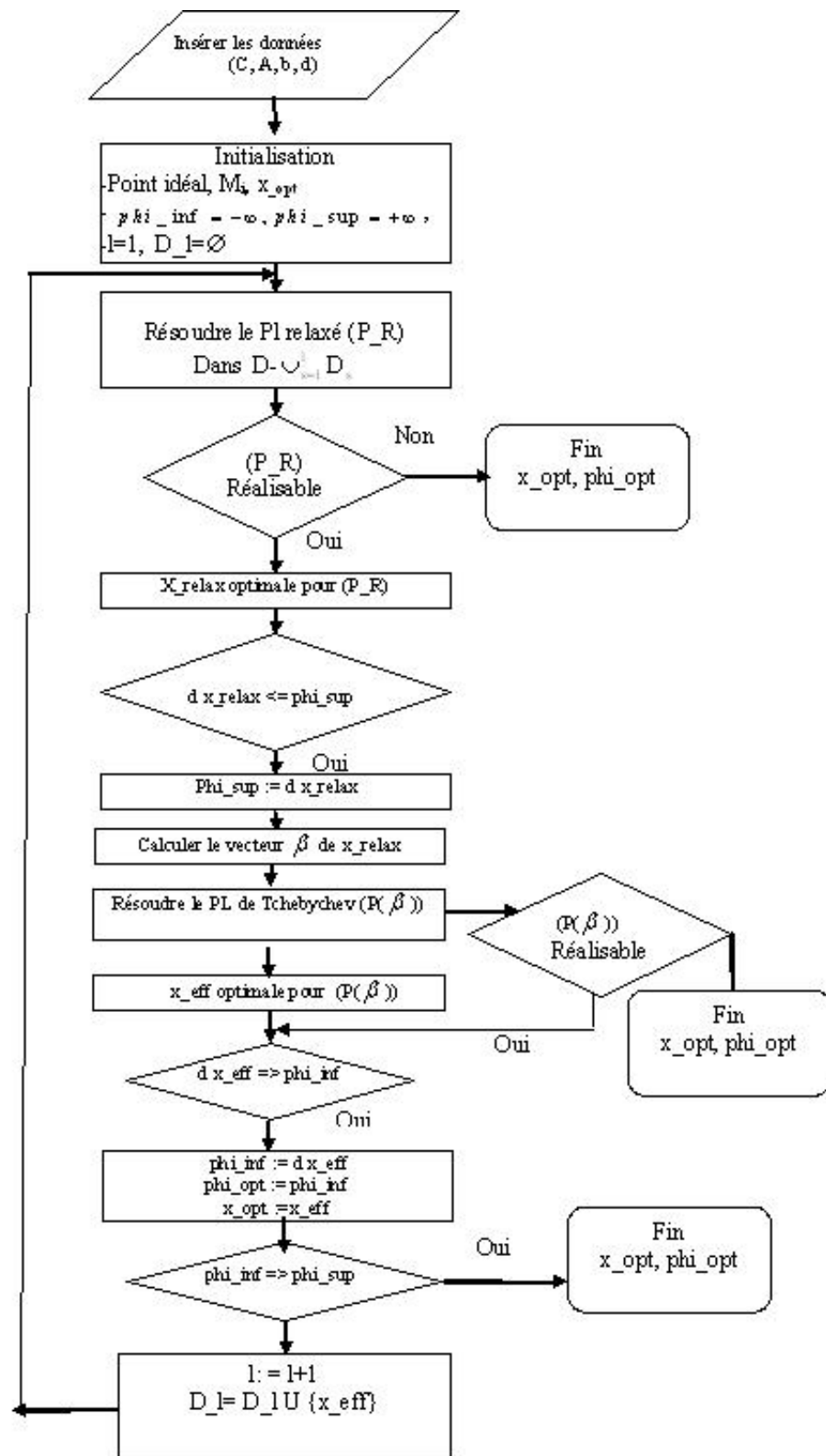


FIG. 4.1 – L'organigramme de l'algorithme

Résumé

Dans certaines situations pratiques, l'énumération de tout l'ensemble efficace d'un problème linéaire multi-objectif n'est pas toujours recommandée. Comme connu, sans compter la taille des calculs informatiques impliqués dans les algorithmes, la taille de cet ensemble habituellement considérable tendent à saturer le décideur jusqu'au point le choix de sa solution préférée devient une mission impossible. Afin d'éviter ces situations, nous considérons le problème de l'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble efficace comme une manière de mesurer les préférences du décideur, ou distinguer parmi, les nombreuses solutions efficaces.

Ce problème appartient à la classe d'optimisation globale non convexe, ce qui rend sa résolution plus difficile. Nous avons proposé un algorithme basé sur la résolution d'un programme de la norme de Tchebychev pour caractériser des solutions efficaces, qui consiste à éviter l'énumération explicite de tout l'ensemble efficace. L'algorithme a été programmé et exécuté sous l'environnement MATLAB 7.7. Ses performances et propriétés ont été analysées sur une série de tests réalisés sur plusieurs instances aléatoirement générées pour différentes tailles.

Mots clés : Optimisation multi-objectifs, Optimisation sur l'ensemble des solutions efficaces, Norme de Tchebychev.